trabalho04

Alysson da Silva Moura

15/04/2022

```
library(tidyverse)
```

```
## Warning: package 'tidyverse' was built under R version 4.1.3

## Warning: package 'ggplot2' was built under R version 4.1.2

## Warning: package 'stringr' was built under R version 4.1.2

## Warning: package 'forcats' was built under R version 4.1.3
```

```
library(purrr)
```

Dados

Podemos reutilizar os dados da Atividade 03:

```
dados <- data.frame(
  cenario = c("Recessão", "Normal", "Crescimento Rápido"),
  prob = c(.25, .5, .25),
  txRetornoA = c(-.08, .11, .25),
  txRetornoB = c (.08, .05, -.03)
)
```

Questão 01

Ainda, podemos também utilizar os valores de ρ_{AB}, σ_{AB} da atividade passada:

```
retornos <- dados %>%
  mutate(esperadoA = prob * txRetornoA,
         esperadoB = prob * txRetornoB) %>%
  summarise(tresperadoA = sum(esperadoA),
            tresperadoB = sum(esperadoB),
            dsA = sqrt(sum( (txRetornoA - tresperadoA )^2 * prob ) ),
            dsB = sqrt(sum( (txRetornoB - tresperadoB )^2 * prob ) ),
            covAB = sum((txRetornoA - tresperadoA) * ( txRetornoB - tresperadoB) * prob),
            corrAB = covAB / (dsA * dsB))
```

E nós temos então:

Retorno Esperado ($\bar{R}$)				Covariância (σ_{AB})	Correlação (ρ_{AB})
A	B	A	B		
0.0975	0.0375	0.1173403	0.0408503	-0.0043812	-0.9140188

O retorno de uma carteira qualquer é dada por:

$$R_{Pj} = \sum_{i=1}^{N}(W_i R_{ij})$$

Onde R_{Pj} é o j-ésimo retorno do portifólio (ou carteira) e W_i é a fração investida do capital do investidor na i-ésima ação e N o número de ações.

Assim, o retorno esperado de uma carteira é:

$$\overline{R} = E(R_p) = E\left(\sum_{i=1}^{N} W_i R_{ij}\right)$$

Como a esperança da soma é igual a soma das esperanças, podemos fazer:

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{N} E(W_i R_{ij})$$

Que é igual a:

$$\overline{R}_P = \sum_{i=1}^{N}(W_i \overline{R}_i)$$

Já a variância (ou o risco) de um portifólio com duas ações é definida como:

$$\sigma_p^2 \ = E(R_P - \overline{R_P})^2 = E\big[W_1 R_{1j} + W_2 R_{j2} - (W_1 \overline{R}_1 + X_2 \overline{R}_2)\big]^2$$

E, fazendo as operações, podemos encontrar que:

$$\sigma_P^2 = W_1^2 \sigma_1^2 + W_2^2 \sigma_2^2 + 2 W_1 W_2 \sigma_{12}$$

Em uma carteira *Equal Wage* divide-se o capital igualmente entre os ativos, ou seja:

$$W_1 = W_2 = 0.5$$

O retorno é então:

```r
pesosEqual <- c(0.5, 0.5)

# mapeia os pesos para os retonos dos assets

mapRetorno <- function(pesos, retornos) {
  map2_dbl(pesos, retornos,`*`)
}
```

```r
#retornosEqual <- map2_dbl(pesosEqual, retornos |> select(c(1:2)), ~ .x * .y )

sum(mapRetorno(pesosEqual, retornos |> select(c(1:2))))
```

```
## [1] 0.0675
```

```r
#sum(retornosEqual)
```

E a variância:

```r
varPortifolio <- function(pesoj, pesok, dj, dk, cov) {
  pesoj^2 * dj^2 + pesok^2 * dk^2 + 2*pesok*pesoj*cov
}


varEqual <- varPortifolio(pesosEqual[1], pesosEqual[2],
                          retornos$dsA,
                          retornos$dsB,
                          retornos$covAB)

varEqual
```

```
## [1] 0.00166875
```

Para a carteira de variância minima, temos que:

$$\min_{w_1} w_1^2\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_{12} - 2w_1^2\sigma_{12}$$

derivando em relação a w_1 temos:

$$w_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}$$

e, por definição, $w_2^* = 1 - w_1^*$

Numericamente:

```r
#peso que minimiza a variancia
pesoMinVar <- function(dj, dk, cov) {
  (dj^2 - cov) / (dj^2 + dk^2 - 2*cov)
}

pesoMinVar(retornos$dsA, retornos$dsB, retornos$covAB)
```

```
## [1] 0.75
```

```r
#Vamo chamar isso de W1MIN pra evitar nomezão

W1MIN <- pesoMinVar(retornos$dsA, retornos$dsB, retornos$covAB)
```

E o retorno:

```r
pesosMin <- c(W1MIN, 1 - W1MIN)


retornosMin <- map2_dbl(pesosMin, retornos |> select(1:2), ~ .x * .y)

sum(retornosMin)
```

```
## [1] 0.0825
```

E a variância:

```r
varEqual <- varPortifolio(pesosMin[1], pesosMin[2],
                          retornos$dsA,
                          retornos$dsB,
                          retornos$covAB)

varEqual
```

```
## [1] 0.00620625
```

Pode-se definir o prêmio de risco como:

$$P = E(R_P) - r_f$$

Onde r_f é o retorno do ativo *risk-free*

E uma carteira eficiente como aquela que maximiza o Coeficiente de Recompensa (S):

$$S = \frac{P}{\sigma_p}$$

.

A partir disso, podemos criar um `DataFrame` com os valores que precisamos:

```r
rbarra <- retornos |> select(1:2) |> as_vector()
pesoRf <- 0.2

df <- data.frame(
  pesoj = seq(0, 1, by = .05)) |>
  mutate(pesok = 1 - pesoj,
         retornoP = pesoj * rbarra[1] + pesok * rbarra[2],
         varP = sqrt(varPortifolio(pesoj, pesok,retornos$dsA,retornos$dsB,retornos$covAB)),
         slpRf = (retornoP - 0.05) / varP,
         retornoC = 0.05 * pesoRf + (1 - pesoRf) * retornoP
  )
```

E a carteira de maior recompensa:

```
df |> filter(slpRf == max(slpRf))
```

```
##   pesoj pesok retornoP       varP     slpRf retornoC
## 1   0.4   0.6   0.0615 0.02647168 0.4344265   0.0592
```

E a de menor risco:

```
df |> filter(varP == min(varP))
```

```
##   pesoj pesok retornoP   varP slpRf retornoC
## 1  0.25  0.75   0.0525 0.0125   0.2    0.052
```

Graficamente temos: