Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 17 - Samplingfördelning och konfidensintervall för en andel

Mattias Villani

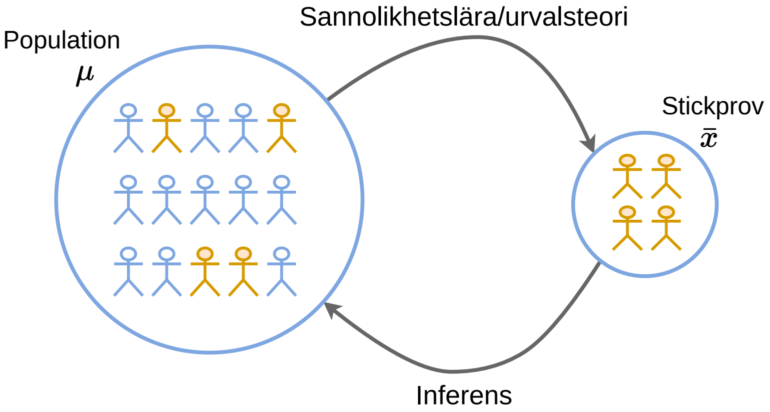
Statistiska institutionen
Stockholms universitet

mattiasvillani.com @matvil @matvil mattiasvillani

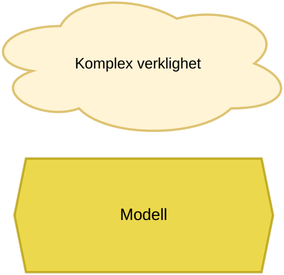
Översikt

- **Sannolikhetsmodeller** och verkligheten.
- **Samplingfördelningen**.
- **Samplingfördelningen** för en **andel**.
- **Samplingfördelningen** för **medelvärdet**.

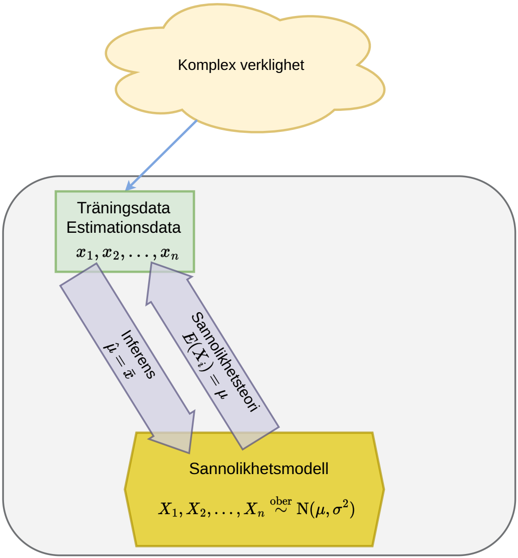
Population och stickprov - ändliga populationer



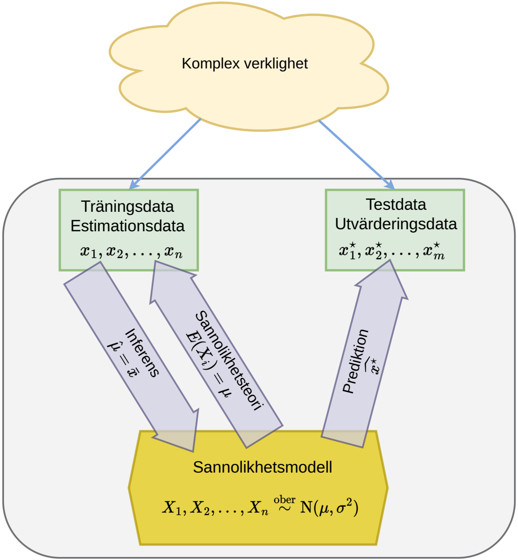
Modeller som en förenkling av verkligheten



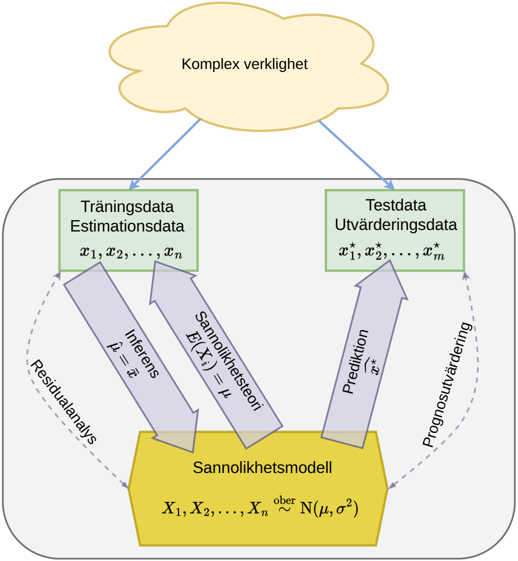
Sannolikhetsmodeller och inferens



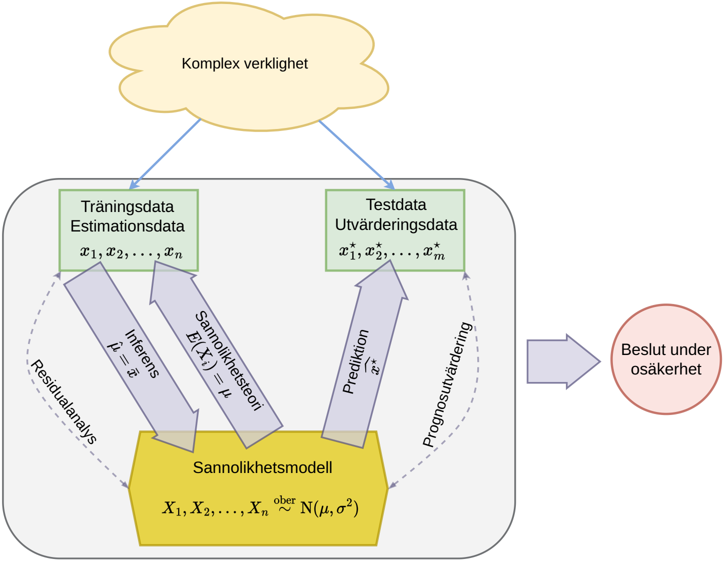
Sannolikhetsmodeller möter verkligheten - prediktion



Modellering är en iterativ process



Slutmålet är ofta beslutsfattande i en osäker värld

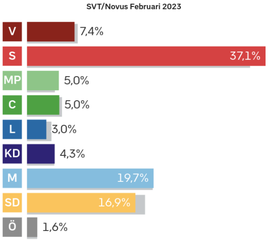


Statistika, estimator och estimat

- **Statistika** - kvantitet som beräknas från ett stickprov.
- Andelen som röstar på socialdemokraterna i en valundersökning.
- Medelvärdet $\bar{x}$ av inkomster för personer i ett stickprov.
- Använder en statistika för **skatta en populationsparameter**.
- **Populationsväntevärdet** μ skattas med **estimatorn** $\bar{X}$.
- För ett givet stickprov $x_1, x_2, ..., x_n$ får vi ett **estimat** $\bar{x}$ av μ.

Väljarundersökningar

- Vilket parti skulle du rösta på om det var val idag?
- SVT/Novus. **Stickprov** med $n = 3539$ personer.



- Kontaktade via telefon eller sms. Representativt? Bortfall?
- **Populationsparameter**: andelen S-röstare i populationen p.
- **Population**: röstberättigade i Sverige.
- **Estimator** för att skatta p: andelen S-röstare i stickprovet.
- **Estimat** i SVT/Novus undersökning:

$$\hat{p} = \frac{1313}{3539} \approx 0.371 \text{ dvs } 37.1\%$$

Samplingfördelningen

- Men $\hat{p} = 0.371$ är bara ett osäkert estimat från **ett** slumpmässigt valt stickprov.
- Om vi hade frågat 3539 **andra personer** hade vi säkerligen fått ett annat estimat.
- **Samplingfördelningen**:
  - fördelningen för en **estimator**
  - **över alla möjliga stickprov** av storleken n.
- **Statistiskt säkerställd** förändring från månaden innan?
- **Konfidensintervall** för p: med 95% **säkerhet/konfidens** täcker intervallet $(0.355, 0.387)$ den sanna andelen p.

Samplingfördelningen - ändlig population

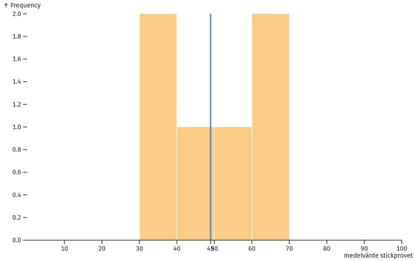
Samplingfördelning för en andel - Ändlig population

Pop.storlek: N 4

Urvalsstorlek: n 2

Population: [24,79,41,52] med medelvärde 49.000
Det finns totalt $\binom{4}{2} = 6$ möjliga stickprov av storlek n=2.

Stickprov	Urval	Medelvärde
1	24,79	51.5
2	24,41	32.5
3	24,52	38
4	79,41	60
5	79,52	65.5
6	41,52	46.5



Mattias Villani Samplingfördelning för ändlig population **Observable**

Samplingfördelningen för en andel

- **En andel är egentligen ett medelvärde** av binära variabler

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{om person } i \text{ röstar på S} \\ 0 & \text{om person } i \text{ inte röstar på S} \end{cases}$$

- **Populationsparameter** med N personer i populationen:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

- **Modell**: $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$.
- $\overset{\text{iid}}{\sim}$ betyder 'independent and identically distributed'. **Oberoende och likafördelade**.
- **Sampling utan återläggning** $\Longrightarrow$ egentligen inte oberoende med samma sannolikhet p.
- Oberoende Bernoulli ändå OK modell, **om stickprovet är max 10% av populationen**. Korrektion ändlig population.

Samplingfördelningen för en andel

- Vi skattar p med andelen i stickprovet

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

- Vilken fördelning har $\hat{p}$?
- Eftersom $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$ så vet vi att:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Binomial}(n, p)$$

$$E(Y) = np \qquad \text{och} \qquad SD(Y) = \sqrt{npq}$$

- Eftersom $\hat{p} = \frac{1}{n}Y$, så [F14 - skalning: $E(aX) = aE(X)$]

$$E(\hat{p}) = \frac{1}{n}E(Y) = \frac{1}{n}np = p$$

och [F14 - skalning: $SD(aX) = |a|SD(X)$]

$$SD(\hat{p}) = \left|\frac{1}{n}\right|\sqrt{npq} = \frac{1}{n}\sqrt{npq} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Väntevärdesriktig estimator och stora talens lag

- Vi skattar p med andelen i stickprovet

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

- Vi vet nu att

$$E(\hat{p}) = p \qquad \text{och} \qquad SD(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

- Estimatorn $\hat{p}$ är **väntevärdesriktig** för populationsandelen p

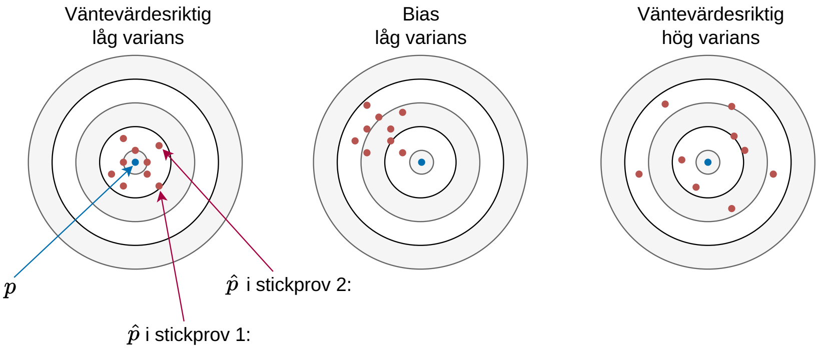
$$E(\hat{p}) = p$$

- **Väntevärdesriktig = korrekt i genomsnitt**, sett över alla möjliga stickprov.
- **Bias**

$$\mathrm{Bias}(\hat{p}) = E(\hat{p}) - p = 0$$

- $SD(\hat{p})$ minskar när stickprovstorleken n ökar.
- **Stora talens lag**: $\hat{p}$ kommer vara nära p i stora stickprov.

Väntevärdesriktighet, bias och varians



Samplingfördelningen för $\hat{p}$ - normalapproximation

- Väntevärde och standardavvikelse för estimatorn $\hat{p}$

$$E(\hat{p}) = p \qquad \text{och} \qquad SD(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

- **Normalapproximation**

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

- När är normalapproximationen tillräckligt bra?
  - stickprovsstorleken $n \geq 30$ (centrala gränsvärdessatsen)
  - $np \geq 10$ och $nq \geq 10$.
  - **oberoendeantagandet** måste vara (hyfsat) uppfyllt.
  - stickprovet är **högst 10% av populationen**.

Stora talens lag - andel

Stora talens lag - normalapproximation av andel

Normalapproximation av samplingfördelningen för en andel

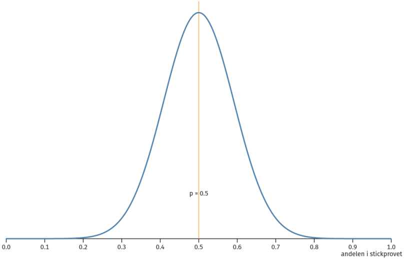
n 30

p 0.5

Stickprovet $n = 30$ är större än 30. ✅

Antal förväntade lyckade $np = 15.0$ är större än 10. ✅

Antal förväntade misslyckade $nq = 15.0$ är större än 10. ✅



Normalapproximation av samplingfördelningen för en andel.

Mattias Villani Stora talens lag för slantsingling

Observable

Exempel - röstandel för S

- $\hat{p} = 0.371$, men $\hat{p}$ varierar från stickprov till stickprov.
- **Normalapproximation**

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

- **Standardavvikelse för estimator**

$$SD(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

- Men vi vet inte p! Lösning: sätt in skattning $\hat{p}$ istället för p.
- **Standardfel för estimator**

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.371(1-0.371)}{3539}} \approx 0.0081$$

- Kan vi använda normalapproximation?
  - stickprovsstorleken $n = 3539 \geq 30$. ✅
  - $n\hat{p} = 3539 \cdot 0.371 = 1312.97 \geq 10$ ✅
  - $n\hat{q} = 3539 \cdot (1 - 0.371) = 2226.03 \geq 10$ ✅
  - **Oberoendeantagandet**. Slumpmässigt urval. ✅
  - **Högst 10% av populationen**. Definitivt OK! ✅

Normalapproximation för en andel

- **Normalapproximation**

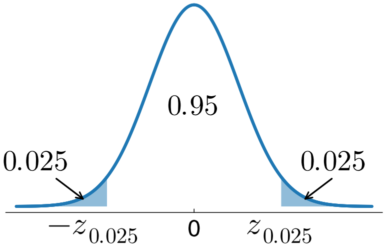
$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

- 68-95-99.7 regeln:
  - $P(\hat{p}$ är högst en standardavvikelse från $p) = 0.683$
  - $P(\hat{p}$ är högst två standardavvikelser från $p) = 0.954$
  - $P(\hat{p}$ är högst tre standardavvikelser från $p) = 0.997$
- Vanligt att vi vill ha “rundare” sannolikheter:
  - $P(\hat{p}$ är högst 1.645 standardavvikelser från $p) = 0.90$
  - $P(\hat{p}$ är högst 1.96 standardavvikelser från $p) = 0.95$
  - $P(\hat{p}$ är högst 2.576 standardavvikelser från $p) = 0.99$

Kritisk värde för 95%-igt konfidensintervall

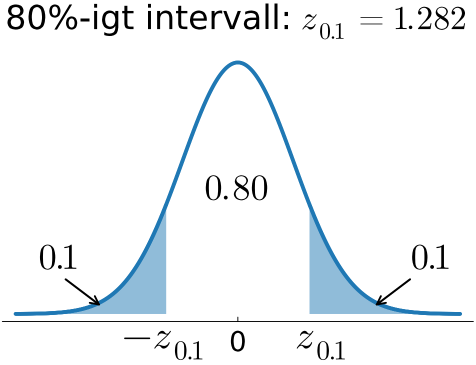
- Intervall med sannolikhet 0.95:
  - Sannolikhetsmassa **utanför** intervallet: $\alpha = 0.05$
  - Sannolikhetsmassa **i vardera svans**: $\alpha/2 = 0.025$
  - $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$
  - 2.5% av sannolikhetsmassan till *höger* om $z_{0.025}$.
  - 97.5% av sannolikhetsmassan till *vänster* om $z_{0.025}$.
  - $z_{0.025}$ från Z-tabell, det z där $P(Z \leq z) = 1 - 0.025 = 0.975$

95%-igt intervall: $z_{0.025} = 1.96$



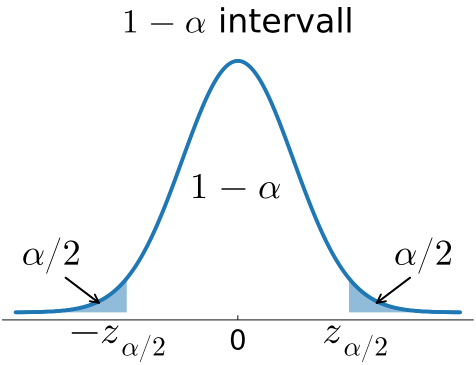
Kritisk värde för 80%-igt konfidensintervall

- Intervall med sannolikhet 0.8:
  - $\alpha = 0.2$
  - $z_{\alpha/2} = z_{0.1} = 1.282$
  - "värdet som har 10% av sannolikhetsmassan till höger om sig"



Kritisk värde - konfidensintervall $1 - \alpha$ sannolikhet

- **Kritiskt värde för ett intervall** med sannolikhet $1 - \alpha$:
  - Sannolikhetsmassa **utanför** intervallet: α
  - Sannolikhetsmassa **i vardera svans**: $\alpha/2$
  - $z_{\alpha/2}$ "har $\alpha/2$ av sannolikhetsmassan till höger om sig"



95%-igt konfidensintervall för en andel

- Normalapproximation

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Approximativt 95%-igt konfidensintervall för andel p

$$\hat{p} \pm z_{0.025} \cdot SE(\hat{p})$$

där

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

- Intervall från **givet stickprov** antingen täcker eller missar p.
- Ett 95%-igt konfidensintervall kommer innehålla populationsvärdet p **i 95% av alla möjliga stickprov**.
- "Den sanna andelen är i intervallet **med 95% säkerhet**".

Konfidensintervall för en andel - interaktivt

Konfidensintervall för en andel - normalapproximation

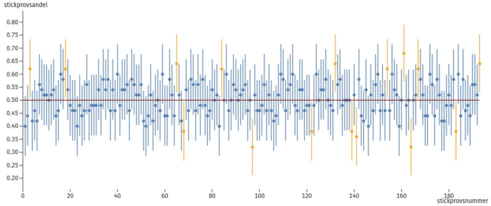
Populationsandel, p: 0.5

Konfidensnivå: 90

Stickprovsstorlek, n: 50

Play — antal stickprov = 193

Av totalt 193 stickprov innehöll 177 st (**91.710%**) av de 90%-iga konfidensintervallen den sanna populationsandelen $p = 0.5$.



Mattias Villani Konfidensintervall för en andel

Observable

Konfidensintervall för en andel

- Normalapproximation

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Approximativt (1-α)%-igt konfidensintervall för andel p

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{p})$$

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

- **Felmarginal** (eng. margin of error, ME): $z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{p})$
- Konfidensintervall:

$$\text{Estimat} \pm \text{Felmarginal}$$

- Trade-off: **högre konfidensnivå $\Longrightarrow$ större felmarginal**.
- SDM-boken: z^* istället för $z_{\alpha/2}$.
  SDM-boken avrundar också ofta $z_{0.025} = 1.96$ till $z^* = 2$.

Exempel - röstandel för S

- **Estimat**: $\hat{p} = 0.371$.
- **Standardfel** för estimator

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.371(1-0.371)}{3539}} \approx 0.0081$$

- 95% konfidensintervall för andelen S-röstare i populationen:

$$\hat{p} \pm z_{0.025} \cdot SE(\hat{p})$$
$$0.371 \pm 1.96 \cdot 0.0081$$
$$0.371 \pm 0.015876$$

  vilket ger intervallet $(0.355, 0.387)$.
- Intervallet $(0.355, 0.387)$ innehåller andelen S-röstare, p, med 95% säkerhet. Men kom ihåg vad detta faktiskt betyder!
- Intervall som skapas med formeln $\hat{p} \pm z_{0.025} \cdot SE(\hat{p})$ kommer innehålla p i 95% av alla möjliga stickprov från populationen.