

Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 18 - Konfidsensintervall för ett väntevärde

Mattias Villani



Statistiska institutionen
Stockholms universitet



mattiasvillani.com



@matvil



@matvil



mattiasvillani

- Samplingfördelningen för ett medelvärde
- Konfidensintervall för ett väntevärde
- Centrala gränsvärdessatsen och stora talens lag

Samplingfördelning för \bar{X} - normalmodellen

- **Modell för populationen:** $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma)$.
- Vi **skattar** populationens väntevärde $\mu = E(X)$ med

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Samplingfördelning \bar{X}

Om $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma)$, och σ **känd**

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- Vi måste bevisa tre saker:
 - ▶ \bar{X} är normalfördelad.
 - ▶ $E(\bar{X}) = \mu$
 - ▶ $SD(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Samplingfördelning för \bar{X} - normalmodellen

■ Normalfördelning

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

är en **summa** av normalfördelade variabler, **skalad** med $1/n$.
F16: \bar{X} är normalfördelad.

■ \bar{X} är väntevärdesriktig för μ

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{\text{skalning}}{=} \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{\text{summa}}{=} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n E(X_i)\right) \\ &\stackrel{\text{modell}}{=} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \mu\right) \stackrel{\text{samma termer}}{=} \frac{1}{n} (n\mu) = \mu \end{aligned}$$

■ Varians/Standardavvikelse

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}) &= \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{\text{skalning}}{=} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{\text{summa}}{=} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)\right) \\ &\stackrel{\text{modell}}{=} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \sigma^2\right) \stackrel{\text{samma termer}}{=} \frac{1}{n^2} (n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

KI väntevärde - normalpopulation med känd varians

- Eftersom $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ så har vi alltså att

$$SD(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Från samplingfördelningen $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ kan vi skapa ett konfidsensintervall:

Antag: $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma)$, σ känd

$(1-\alpha)\%$ -igt konfidsensintervall för väntevärde μ

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot SD(\bar{x})$$

$$SD(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Normalpopulation med okänd varians

- Variansen i populationen, σ^2 , är oftast **okänd**.
- Vi kan **skatta σ^2 med stickprovsvariansen**

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

- Varför $n - 1$? För att s^2 är **väntevärdesriktig för σ^2**



$$E(s^2) = \sigma^2$$

- **OM μ är känt** kan vi skatta σ^2 väntevärdesriktigt med

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$$

- “Förlorar en frihetsgrad” när vi skattar μ med \bar{x} .
- SDM-boken (s. 538): stickprovet kommer ligga närmare \bar{x} än μ i genomsnitt. Avvikelserna $x_i - \bar{x}$ blir för små i genomsnitt.

Okänd varians \implies student- t fördelning

- Om σ^2 är **känd**

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

och genom standardisering

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

- Om **okänd** σ^2 **skattas** med s^2 är \bar{X} **student- t** fördelad:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

- Alltså: när standardavvikelsen i populationen måste skattas får den standardiserade \bar{X} **tyngre svansar**.
- När σ är känd: **standardavvikelse** för \bar{X} : $SD(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- När σ skattas: **standardfel** för \bar{X} : $SE(\bar{X}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Student- t fördelning

Student- t distribution

$$X \sim t_{\nu}(0, 1)$$

$$E(X) = 0 \text{ om } \nu > 1$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\nu}{\nu - 2} \text{ om } \nu > 2$$

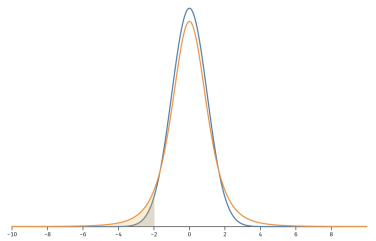
Frihetsgrader ν : 

Kvantil: 

Normalfördelning: $P(X \leq -1.96) = 0.02500$

Student- t fördelning: $P(X \leq -1.96) = 0.06078$

 normal  student- t



K.I. väntevärde - normalpopulation, okänd varians

Antag: $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma)$, med σ okänd.

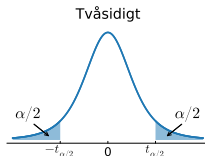
$(1-\alpha)\%$ -igt konfidensintervall för väntevärde μ

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} \cdot SE(\bar{x})$$

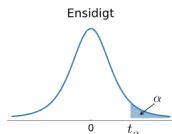
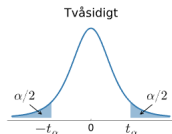
$$SE(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

■ **Kritiskt värde** $t_{\alpha/2, n-1}$ student- t med $n-1$ frihetsgrader.



Student- t tabell

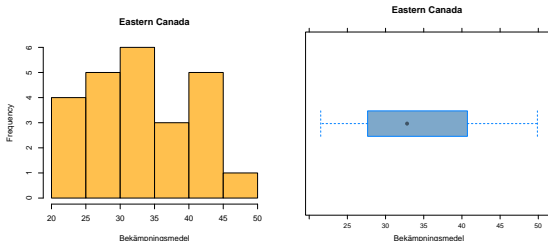


Konfidensnivå:	80%	90%	95%	98%	99%
Tvåsidig sannolikhet:	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010
Ensidig sannolikhet:	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
df					
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861

- Datamaterial med gifter i 153 laxar vid 8 olika platser.
- Här: Bekämpningsmedel (Total.pestocide) i Eastern Canada med $n = 24$ laxar:

`x=c(25.739, 24.799, 27.563, 21.511, 23.821, 23.311, 49.883, 42.352, 44.598, 31.353, 33.837, 33.915, 41.668, 42.383, 43.638, 39.768, 35.256, 36.270, 29.630, 31.266, 32.577, 33.056, 29.789, 27.737)`

- Modell: $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma)$, och σ okänd.
- **Normalfördelad population?** Kolla stickprovet:



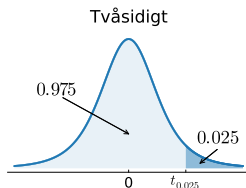
- Svårt se med få observationer. Histogram ok. Inga outliers.

Bekämpningsmedel i odlad lax

- 95%-igt konfidensintervall för μ : (30.332, 36.811)

$$\begin{aligned}\bar{x} \pm t_{0.025, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \\ 33.572 \pm t_{0.025, 23} \frac{7.671}{\sqrt{24}} \\ 33.572 \pm 2.069 \frac{7.671}{\sqrt{24}}\end{aligned}$$

- $t_{0.025, 23} = 2.069$ från tabell, eller R: `qt(0.975, df = 23)`.

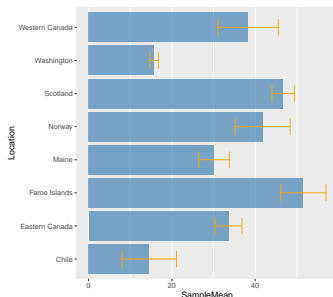


- Standardavvikelsen s beräknas i R som `sd(x)`, eller för hand:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Bekämpningsmedel i odlad lax

- 68%-igt konfidensintervall för μ : (31.980, 35.163)
- 95%-igt konfidensintervall för μ : (30.332, 36.811)
- 99%-igt konfidensintervall för μ : (29.176, 37.968)
- Högre konfidens \implies bredare intervall.
- 95%-iga konfidensintervall alla orter:



- Se R-koden [confidence_intervals_salmon.R](#) på kurswebbsidan.

KI väntevärde - normalpop, okänd varians, $n \geq 30$

Antag: $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma)$, med σ okänd och $n \geq 30$.

Approximativt $(1-\alpha)\%$ -igt K.I. för väntevärde μ

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot SE(\bar{x})$$

$$SE(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Centrala gränsvärdessatsen

Om X_1, X_2, \dots, X_n är oberoende från en population med godtycklig fördelning (med ändlig varians σ^2) så är

samplingfördelningen för medelvärdet approximativt normalfördelat i stora stickprov:

$$\bar{X} \stackrel{\text{approx}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ för tillräckligt stort } n$$

Tumregel: $n \geq 30$ är tillräckligt.

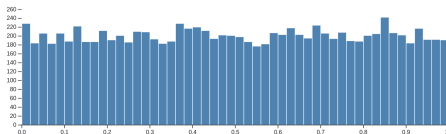
Centrala gränsvärdessatsen (CGS) - interaktivt

Centrala gränsvärdessatsen

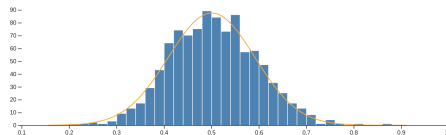
Fördelning för data:

undre gräns (a)

övre gräns (b)



Stickprovstorlek, n:

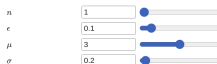


Om X_1, X_2, \dots, X_n är oberoende från en population med godtycklig fördelning (med ändligt väntevärde μ) så blir

samplingfördelningen för medelvärdet alltmer koncentrerad kring μ när stickprovsstorleken n ökar.

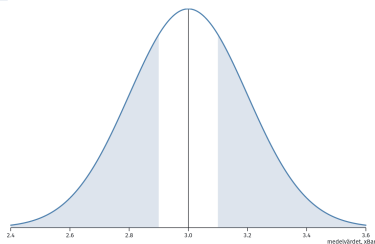
Stora talens lag - interaktivt

Samplingfördelningen koncentreras kring μ



$$P(|\bar{X}_n - \mu| > 0.1) = 0.6171$$

■ samplingfördelningen för medelvärdet i en normalpopulation



Mattias Villani Stora talens lag

Observable

Konfidsensintervall för μ - tre olika situationer

- **Normalpopulation** med **känd varians** σ^2

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- **Normalpopulation** med **okänd varians** skattad med s^2

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- **Godtycklig populationsmodell** och $n \geq 30$ (CGS)

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$