

Formel- och tabellsamling för Statistik och dataanalys I, 15 hp

Kurskod: ST1101

Begrepp i **orange** typsnitt används inom del 1 av kursen.

Begrepp i **orange** och **blått** typsnitt används inom del 2 av kursen.

Version 2.0

Deskriptiv statistik - en variabel

Stickprovsmedelvärde

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Stickprovsvarians

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Stickprovsstandardavvikelse

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

Standardisering - stickprov

$$z_x = \frac{x - \bar{x}}{s_x}$$

Deskriptiv statistik - två variabler

Stickprovskovarians

$$s_{xy} = \text{Cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$$

Stickprovskorrelation

$$r_{xy} = \text{Corr}(x, y) = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum_{\text{alla data}} z_x z_y}{n - 1}$$

Enkel linjär regression - estimation

Skattad regressionsmodell

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

Skattning av lutningen

$$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

Skattning av interceptet

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

Residualvarians

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}$$

Prediktion för $x = x_i$

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$$

Multipel linjär regression ($k = 1$ för enkel)

Skattad regressionsmodell

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k$$

Skattningarna b_0, b_1, \dots, b_k ges av datorutskrift.

Residualvarians

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - k - 1}$$

Prediktion för $x = x_i$

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1,i} + b_2 x_{2,i} + \dots + b_k x_{k,i}$$

ANOVA-uppdelning

$$\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE}$$

$$\text{SST} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$\text{SSR} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

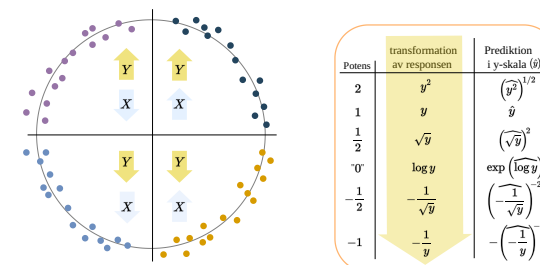
Anpassningsmått

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}}$$

$$R_{\text{adj}}^2 = 1 - \frac{\text{SSE} / (n - k - 1)}{\text{SST} / (n - 1)}$$

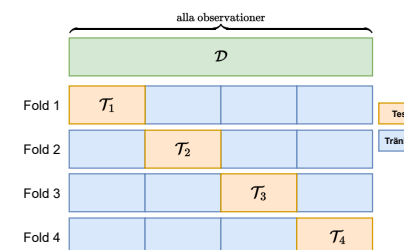
För enkel linjär regression gäller att $R^2 = r_{xy}^2$

Transformationer - Tukeys cirkel



Korsvalidering

Datamaterialets observationer $\mathcal{D} = \{1, 2, \dots, n\}$ delas upp i K delar, där varje observation är med i exakt en del.



Skattning av modellens prognosförmåga på nya data:

$$\text{SSE}_{\text{cv}} = \sum_{i \in \mathcal{I}_1} (y_i - \hat{y}_i^{(1)})^2 + \dots + \sum_{i \in \mathcal{I}_K} (y_i - \hat{y}_i^{(K)})^2$$

$$\text{RMSE}_{\text{cv}} = \sqrt{\frac{\text{SSE}_{\text{cv}}}{n}}$$

- $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{D}$ är alla observationer som är *testdata* i fold k
- $\sum_{i \in \mathcal{I}_k}$ är summan över alla *testdata* i fold k
- $\hat{y}_i^{(k)}$ är prediktionen av y_i i fold k från en modell skattad på alla data *förutom* testdata i \mathcal{I}_k .

Sannolikhetslära

Additionssatsen

$$P(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) + P(\mathbf{B}) - P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Multiplikationssatsen

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = P(\mathbf{B}|\mathbf{A})P(\mathbf{A}) = P(\mathbf{A}|\mathbf{B})P(\mathbf{B})$$

Satsen om total sannolikhet

$$P(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^K P(\mathbf{A}|\mathbf{B}_k)P(\mathbf{B}_k)$$

där $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_K$ är en partitionering av utfallsrummet.

Bayes sats

$$P(\mathbf{B}_k|\mathbf{A}) = \frac{P(\mathbf{A}|\mathbf{B}_k)P(\mathbf{B}_k)}{P(\mathbf{A})}$$

Kombinatorik

Fakultet (eng. **factorial**) av positiva heltalet n

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

och $0! = 1$ per definition.

Kombinationer och permutationer

| Hur många sätt att välja k element bland n element? | | |
|---|------------------|---------------------------------|
| | med återläggning | utan återläggning |
| med ordning | n^k | ${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ |
| utan ordning | ej på kurs | ${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ |

Slumpvariablers egenskaper - en variabel

X är en diskret variabel med sannolikhetsfördelning $P(x)$.

Väntevärde (eng. **expected value**)

$$\mu = E(X) = \sum_{\text{alla } x} x \cdot P(x)$$

Varians (eng. **variance**)

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{\text{alla } x} (x - \mu)^2 \cdot P(x) = E(X^2) - \mu^2$$

Standardavvikelse (eng. **standard deviation**)

$$\sigma = \text{SD}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Väntevärde linjärkombination (c och d är konstanter)

$$E(c + d \cdot X) = c + d \cdot E(X)$$

Varians linjär kombination

$$\text{Var}(c + d \cdot X) = d^2 \cdot \text{Var}(X)$$

Slumpvariablers egenskaper - två variabler

Kovarians mellan två slumpvariabler X och Y

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Korrelation mellan två slumpvariabler X och Y

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{SD}(X) \cdot \text{SD}(Y)}$$

Väntevärde för en summa av två slumpvariabler

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Väntevärde linjärkombination av två slumpvariabler

$$E(cX + dY) = cE(X) + dE(Y)$$

Variansen för en summa av två slumpvariabler

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

Varians linjärkombination av två slumpvariabler

$$\text{Var}(cX + dY) = c^2\text{Var}(X) + d^2\text{Var}(Y) + 2cd\text{Cov}(X, Y)$$

Medelvärde av slumpvariabler

Låt X_1, X_2, \dots, X_n vara **oberoende likafördelade** slumpvariabler med väntevärde $\mu = E(X_i)$ och varians $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$. För stickprovmedelvärdet $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ gäller då:

Väntevärde för medelvärdet

$$E(\bar{X}) = \mu$$

Varians för medelvärdet

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Stora talens lag: För alla $\epsilon > 0$

$$P(|\bar{X} - \mu| > \epsilon) \rightarrow 0 \text{ när } n \rightarrow \infty$$

Centrala gränsvärdesatsen (informellt):

$$\bar{X} \overset{\text{approx}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ för stort } n$$

Tumregel: approximationen är tillräckligt bra om $n \geq 30$.

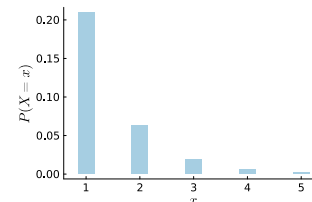
Diskreta fördelningar

Geometrisk fördelning: $X \sim \text{Geo}(p)$

$$P(X = x) = q^{x-1}p \text{ för } x = 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

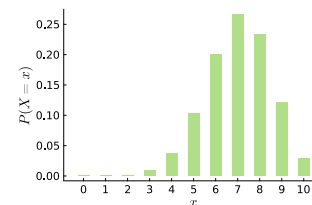


Binomialfördelning: $X \sim \text{Binom}(n, p)$

$$P(X = x) = {}_nC_x \cdot p^x q^{n-x} \text{ för } x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq$$

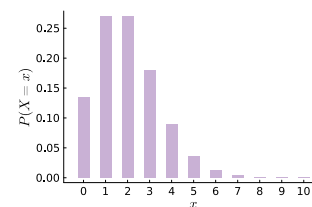


Poissonfördelning: $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \text{ för } x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \lambda$$

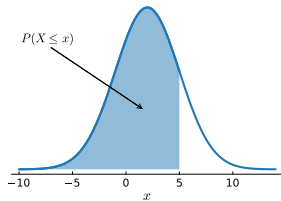
$$\text{Var}(X) = \lambda$$



Normalfördelning och standardisering

Normalfördelning: $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$E(X) = \mu$$
$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

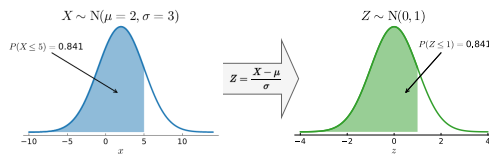


Linjärkombination: Om $X \sim N(\mu, \sigma)$ och $Y = c + d \cdot X$

$$Y \sim N(c + d \cdot \mu, |d| \cdot \sigma)$$

Standardisering: Om $X \sim N(\mu, \sigma)$ så

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$



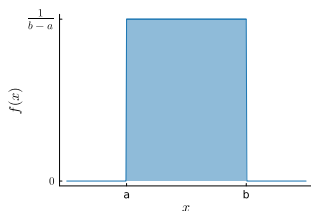
Andra kontinuerliga fördelningar

Likformig fördelning: $X \sim U(a, b)$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ för } -a < x < b$$

$$E(X) = (a+b)/2$$

$$\text{Var}(X) = (b-a)^2/12$$



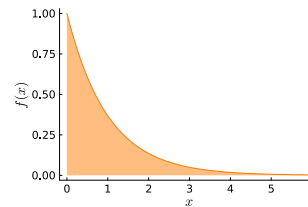
Exponentialfördelning: $X \sim \text{Expon}(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ för } x \geq 0$$

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$E(X) = 1/\lambda$$

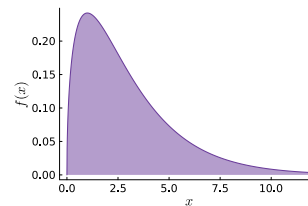
$$\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$$



χ^2 -fördelning: $X \sim \text{Chi2}(\nu)$

$$E(X) = \nu$$

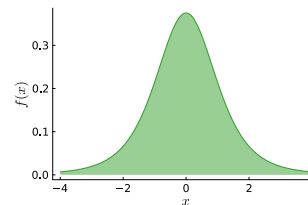
$$\text{Var}(X) = 2\nu$$



Student t-fördelning: $X \sim t(\nu)$

$$E(X) = 0 \text{ om } \nu > 1$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\nu}{\nu-2} \text{ om } \nu > 2$$



Inferens för en population

Konfidensintervall väntevärde känd varians

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Konfidensintervall väntevärde okänd varians

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Konfidensintervall andel

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Teststatistika $H_0 : \mu = \mu_0$ känd varians

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Teststatistika $H_0 : \mu = \mu_0$ okänd varians

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_x / \sqrt{n}}$$

Teststatistika proportion $H_0 : p = p_0$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Jämföra två oberoende grupper

Teststatistika $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ okända varianser

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - d_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$

Frihetsgraderna i t-fördelningen under H_0 är komplicerad.

Jämföra två grupper - parade data

Data som differenser: D_1, D_2, \dots, D_n , där $D_i = X_{1,i} - X_{2,i}$.
 $\bar{D} = \sum_{i=1}^n D_i / n$ och s_D^2 är stickprovsvariansen för differenserna.

Teststatistika parade data $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ okänd varians

$$T = \frac{\bar{D} - d_0}{s_D / \sqrt{n}}$$

Enkel linjär regression - inferens

Populationsmodell

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad \text{och} \quad \varepsilon_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon)$$

Standardfel för b_1

$$s_{b_1} = \frac{s_e}{s_x \sqrt{(n-1)}}$$

Konfidensintervall för b_1

$$b_1 \pm t_{\alpha/2, n-2} \cdot s_{b_1}$$

Teststatistika för $H_0 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$

$$T = \frac{b_1 - \beta_1^{(0)}}{s_{b_1}}$$

Prediktionsintervall vid x_*

$$\hat{y}_* \pm t_{\alpha/2, n-2} \cdot \sqrt{\frac{s_e^2}{n} + s_{b_1}^2 (x_* - \bar{x})^2 + s_e^2}$$

Multipel linjär regression - inferens

Populationsmodell

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \dots + \beta_k x_{k,i} + \varepsilon_i \quad \text{och} \quad \varepsilon_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon)$$

Standardfel för b_j

Komplicerad formel, ges av datorutskift.

Konfidensintervall för b_j

$$b_j \pm t_{\alpha/2, n-k-1} \cdot s_{b_j}$$

Teststatistika för $H_0 : \beta_j = \beta_j^{(0)}$

$$T = \frac{b_j - \beta_j^{(0)}}{s_{b_j}}$$

Chi2-test

Teststatistika för χ^2 -test

$$\chi^2 = \sum_{\text{alla celler}} \frac{(\text{Obs} - \text{Exp})^2}{\text{Exp}}$$

Frihetsgrader för goodness-of-fit:

$$\nu = K - 1 \quad \text{där } K \text{ är antalet celler/bins}$$

Normalfördelning

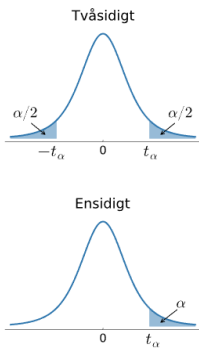
Tabellen ger sannolikheten $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ för olika z där Z är standardnormal, $Z \sim N(0, 1)$. Sannolikheter i den vänstra svansen fås genom symmetri: $P(Z \leq -z) = 1 - P(Z \leq z)$.



Andra decimalen i z

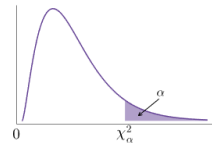
| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |

Student-t fördelning



| Konfidensnivå: | 80% | 90% | 95% | 98% | 99% |
|-----------------------|-------|-------|--------|--------|--------|
| Tvåsidig sannolikhet: | 0.200 | 0.100 | 0.050 | 0.020 | 0.010 |
| Ensidig sannolikhet: | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.005 |
| df | | | | | |
| 1 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| 32 | 1.309 | 1.694 | 2.037 | 2.449 | 2.738 |
| 35 | 1.306 | 1.690 | 2.030 | 2.438 | 2.724 |
| 40 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 |
| 45 | 1.301 | 1.679 | 2.014 | 2.412 | 2.690 |
| 50 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 |
| 60 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 |
| 75 | 1.293 | 1.665 | 1.992 | 2.377 | 2.643 |
| 100 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 |
| 120 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 |
| 140 | 1.288 | 1.656 | 1.977 | 2.353 | 2.611 |
| 180 | 1.286 | 1.653 | 1.973 | 2.347 | 2.603 |
| 250 | 1.285 | 1.651 | 1.969 | 2.341 | 2.596 |
| 400 | 1.284 | 1.649 | 1.966 | 2.336 | 2.588 |
| 1000 | 1.282 | 1.646 | 1.962 | 2.330 | 2.581 |
| oändligt | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

χ^2 -fördelning



| Sannolikhet i höger svans: | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.005 |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| df | | | | | |
| 1 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |
| 2 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.597 |
| 3 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.345 | 12.838 |
| 4 | 7.779 | 9.488 | 11.143 | 13.277 | 14.860 |
| 5 | 9.236 | 11.070 | 12.833 | 15.086 | 16.750 |
| 6 | 10.645 | 12.592 | 14.449 | 16.812 | 18.548 |
| 7 | 12.017 | 14.067 | 16.013 | 18.475 | 20.278 |
| 8 | 13.362 | 15.507 | 17.535 | 20.090 | 21.955 |
| 9 | 14.684 | 16.919 | 19.023 | 21.666 | 23.589 |
| 10 | 15.987 | 18.307 | 20.483 | 23.209 | 25.188 |
| 11 | 17.275 | 19.675 | 21.920 | 24.725 | 26.757 |
| 12 | 18.549 | 21.026 | 23.337 | 26.217 | 28.300 |
| 13 | 19.812 | 22.362 | 24.736 | 27.688 | 29.819 |
| 14 | 21.064 | 23.685 | 26.119 | 29.141 | 31.319 |
| 15 | 22.307 | 24.996 | 27.488 | 30.578 | 32.801 |
| 16 | 23.542 | 26.296 | 28.845 | 32.000 | 34.267 |
| 17 | 24.769 | 27.587 | 30.191 | 33.409 | 35.718 |
| 18 | 25.989 | 28.869 | 31.526 | 34.805 | 37.156 |
| 19 | 27.204 | 30.144 | 32.852 | 36.191 | 38.582 |
| 20 | 28.412 | 31.410 | 34.170 | 37.566 | 39.997 |
| 21 | 29.615 | 32.671 | 35.479 | 38.932 | 41.401 |
| 22 | 30.813 | 33.924 | 36.781 | 40.289 | 42.796 |
| 23 | 32.007 | 35.172 | 38.076 | 41.638 | 44.181 |
| 24 | 33.196 | 36.415 | 39.364 | 42.980 | 45.559 |
| 25 | 34.382 | 37.652 | 40.646 | 44.314 | 46.928 |
| 26 | 35.563 | 38.885 | 41.923 | 45.642 | 48.290 |
| 27 | 36.741 | 40.113 | 43.195 | 46.963 | 49.645 |
| 28 | 37.916 | 41.337 | 44.461 | 48.278 | 50.993 |
| 29 | 39.087 | 42.557 | 45.722 | 49.588 | 52.336 |
| 30 | 40.256 | 43.773 | 46.979 | 50.892 | 53.672 |
| 40 | 51.805 | 55.758 | 59.342 | 63.691 | 66.766 |
| 50 | 63.167 | 67.505 | 71.420 | 76.154 | 79.490 |
| 60 | 74.397 | 79.082 | 83.298 | 88.379 | 91.952 |
| 70 | 85.527 | 90.531 | 95.023 | 100.425 | 104.215 |
| 80 | 96.578 | 101.879 | 106.629 | 112.329 | 116.321 |
| 90 | 107.565 | 113.145 | 118.136 | 124.116 | 128.299 |
| 100 | 118.498 | 124.342 | 129.561 | 135.807 | 140.169 |