

# Statistik och Dataanalys I

## Föreläsning 12 - Betingade sannolikheter och Bayes sats

**Oskar Gustafsson**

Statistiska institutionen  
Stockholms universitet

- Betingad sannolikhet
- Lagen om total sannolikhet
- Bayes sats

# Betingad sannolikhet

- Betingade sannolikheter använder vi när vi vill svara på frågan: “hur sannolikt är det att  $A$  inträffar om jag vet att  $B$  inträffar”.
- Vi betecknar denna sannolikhet med  $P(A|B)$ , där Tecknet  $|$  läses 'givet' eller “betingat på”.
- Sannolikheten för att  $B$  inträffar **givet att  $A$  har inträffat**.
- Några exempel:
  - ▶ Vad är sannolikheten att fotbollslag  $A$  vinner matchen **givet att** lag  $B$  gör första målet?
  - ▶ Vad är sannolikheten att skolrestaurangen serverar ärtsoppa **givet att** det är torsdag?
  - ▶ Vad är sannolikheten att skolrestaurangen serverar ärtsoppa **givet att** det är tisdag?

# Betingad sannolikhet

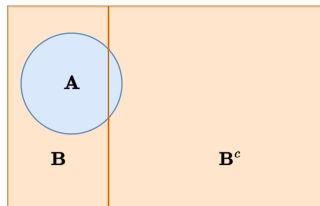
## ■ Covid:

- ▶  $A = \{\text{positivt hemtest}\}$ ,  $B = \{\text{har covid}\}$ .
- ▶ Intresse:  $P(B|A) = P(\text{har covid}|\text{positivt hemtest})$

## ■ Utfallsrummet ges av:

$$S = \{\{A, B\}, \{A^c, B\}, \{A, B^c\}, \{A^c, B^c\}\}.$$

- Sannolikheten för att  $B$  inträffar **givet att  $A$  har inträffat**.  
Dvs sannolikheten att vi observerar  $\{A, B\}$ , när vi vet att  $A$  inträffat

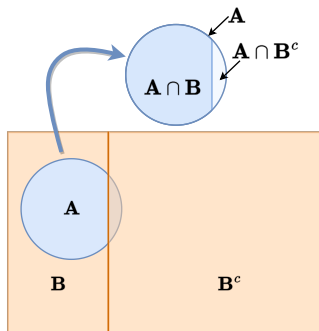


# Betingad sannolikhet - världen krymper

## ■ Betingad sannolikhet

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- **Betinga på  $A$**  innebär att blå cirkeln blir **vårt nya utfallsrum**.
- Inget utanför blå cirkeln kan längre inträffa. “ $A$  is the new  $S$ ”.



# Korstabeller och sannolikheter

Antal

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	3412	2388	5800
	Has dogs	3431	3587	7018
	Has both	897	577	1474
	Total	7740	6552	14,292

Snittsannolikheter (Table %)

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	23.9%	16.7%	40.6%
	Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
	Has both	6.3%	4.0%	10.3%
	Total	54.2%	45.8%	100%

Betingat på kön (Column %)

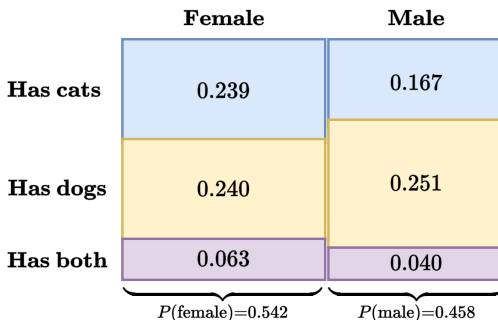
		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	44.1%	36.4%	40.6%
	Has dogs	44.3%	54.8%	49.1%
	Has both	11.6%	8.8%	10.3%
	Total	100%	100%	100%

Betingat på husdjur (Row %)

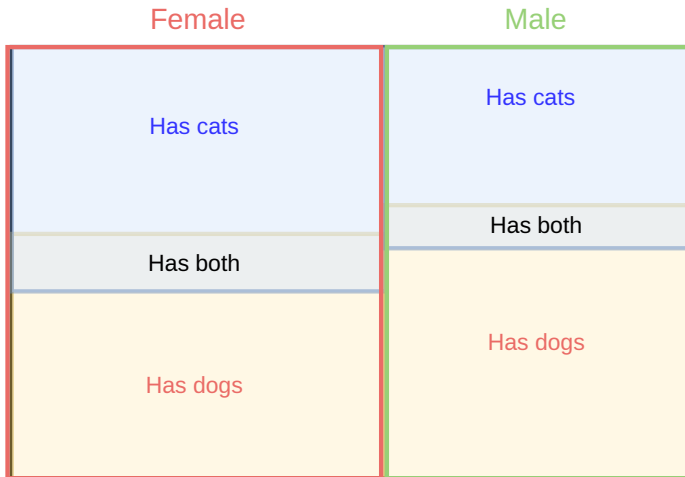
		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	58.8%	41.2%	100%
	Has dogs	48.9%	51.1%	100%
	Has both	60.9%	39.1%	100%
	Total	54.2%	45.8%	100%

# Korstabell och mosaic-plot

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	23.9%	16.7%	40.6%
	Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
	Has both	6.3%	4.0%	10.3%
	Total	54.2%	45.8%	100%



# Vennndiagram

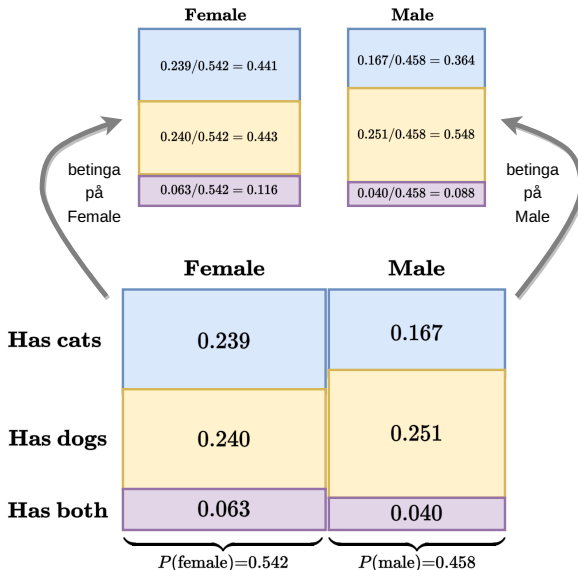




# Korstabell och betingad sannolikhet

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	44.1%	36.4%	40.6%
	Has dogs	44.3%	54.8%	49.1%
	Has both	11.6%	8.8%	10.3%
	Total	100%	100%	100%

# Korstabell och betingad sannolikhet



# Allmänna multiplikationsregeln

**Allmänna multiplikationsregeln.** För händelser  $A$  och  $B$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

■ Terminologi:

$$\underbrace{P(A \cap B)}_{\text{snittsannolikhet}} = \underbrace{P(A)}_{\text{marginell sannolikhet}} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{\text{betingad sannolikhet}}$$

■  $A$  och  $B$  är **oberoende händelser** om (och endast om)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

**Oberoende händelser - variant.**

$A$  och  $B$  är oberoende om (och endast om)

$$P(B|A) = P(B)$$

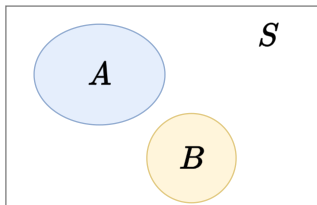
# Oberoende händelser

## Oberoende händelser - variant.

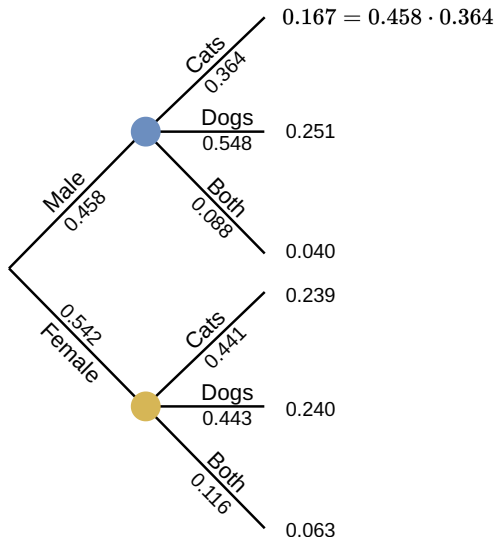
$A$  och  $B$  är oberoende om (och endast om)

$$P(B|A) = P(B)$$

- Oberoende händelser - vetskapen om att  $A$  har inträffat påverkar inte sannolikheten för  $B$ .
- **Oberoende  $\neq$  Disjunkta**. Disjunkta händelser kan ju inte inträffa samtidigt!



# Betingade sannolikheter bäst i form av träd



# Snitt- och marginella sannolikheter bäst i tabell

simultansannolikheter (joint) kön och husdjur

		Gender		Total
		Female	Male	
Pets	Has cats	23.9%	16.7%	40.6%
	Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
	Has both	6.3%	4.0%	10.3%
	Total	54.2%	45.8%	100%

marginalsannolikheter  
husdjur

marginalsannolikheter kön

# Bayes sats

## ■ Allmänna multiplikationsregeln

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

## ■ Betingad sannolikhet

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

## ■ Bayes sats 🤖

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

## ■ Bayes vänder betingningar: beräkna $P(B|A)$ från $P(A|B)$ .

# Känna igen handskrivna siffror

- Förenkling: skilja på enbart 0:or och 1:or



- $A = \{\text{vit pixel i mitten}\}$  och  $B = \{\text{siffran är en nolla}\}$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

$$P(B) = \frac{\text{antal bilder med nollor}}{\text{totalt antal bilder}}$$

$$P(A) = \frac{\text{antal bilder med vit pixel i mitten}}{\text{totalt antal bilder}}$$

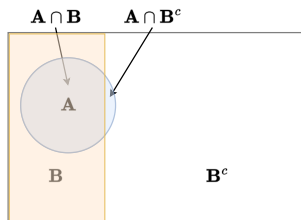
$$P(A|B) = \frac{\text{antal bilder med nolla som också har vit pixel i mitten}}{\text{antal bilder med nollor}}$$



# Lagen om total sannolikhet

- Sannolikheten för varje händelse  $A$  kan delas upp som:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$



- Allmänna multiplikationsregeln:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \text{ och } P(A \cap B^c) = P(A|B^c)P(B^c)$$

- Lagen om total sannolikhet

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

# Bayes sats - via lagen om total sannolikhet

## ■ Lagen om total sannolikhet

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

## ■ Bayes sats

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

## ■ Bayes sats med lagen om total sannolikhet

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

# Fungerar hemtest för Covid?

## ■ Bayes sats

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

- Covid:  $A = \{\text{pos}\}$ .  $B = \{\text{covid}\}$

$$P(\text{covid}|\text{pos}) = \frac{P(\text{pos}|\text{covid})P(\text{covid})}{P(\text{pos}|\text{covid})P(\text{covid}) + P(\text{pos}|\text{inte covid})P(\text{inte covid})}$$

- Notera:  $P(\text{neg}|\text{inte covid}) = 1 - P(\text{pos}|\text{inte covid})$ .

- **Prevalens:**  $P(\text{covid})$  - andel med covid i populationen.
- **Sensitivitet:**  $P(\text{pos}|\text{covid})$  - hur **känsligt** är testet för att upptäcka covid?
- **Specificitet:**  $P(\text{neg}|\text{inte covid})$  - är testet **specifikt** för covid, eller reagerar det även på annat?

# Fungerar hemtest för covid?




antigen test för detektering av Covid-19 är ett CE-certifierat test för självprovtagning som kan indikera pågående infektion av coronavirus. Snabbtest som utförs genom nästopsning i främre näsan. Med hög specificitet på 99,20 % samt hög sensitivitet på 96,77 % Passar för screening av symptomfria individer exempelvis på arbetsplatser.

■ Sensitivitet:  $P(\text{pos test} | \text{covid}) = 0.9677$

■ Specificitet:  $P(\text{neg test} | \text{inte covid}) = 0.9920$

## Bayes sats

Den här widgeten låter dig undersöka hur tillförlitliga hemtest för Covid är genom att beräkna den betingade sannolikheten  $P(\text{covid} | \text{positiv test})$  med hjälp av Bayes sats. Du kan också använda widgeten till andra problem, genom att ge händelserna covid och pos andra namn.

Event A:   
Event B:   
  
 $P(\text{pos} | \text{cov})$     
 $P(\text{not pos} | \text{not cov})$     
 $P(\text{cov})$   

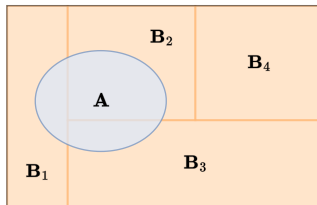
$P(\text{cov} | \text{pos}) = 0.8642$

 Mattias Villani Bayes' theorem for events

 Observable

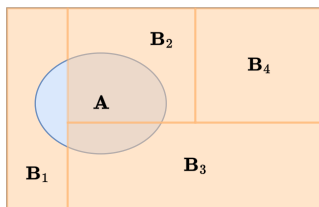
■ Notera dock att vanligtvis är  $P(\text{covid} | \text{symptom})$  större än prevalensen  $P(\text{covid})$ . Man testar sig pga symptom. Se slutet av denna [notebook](#).

# Lagen om total sannolikhet - allmän version



$$P(A) = \sum_{j=1}^K P(A|B_j)p(B_j)$$

# Bayes sats - allmän version



$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^K P(A|B_j)p(B_j)}$$

■ Exempel: handskrivna siffror:

- ▶  $B_0 = \{\text{nolla}\}$ ,  $B_1 = \{\text{etta}\}$ ,  $B_2 = \{\text{tvåa}\}$ , ... ,  $B_9 = \{\text{nia}\}$ .
- ▶  $A = \{\text{vit pixel i mitten}\}$

Dessa slides skapades för kursen statistik och dataanalys 1 av Mattias Villani HT 2023, och har modifierats av Oscar Oelrich VT 2024, och Oskar Gustafsson för VT 2025.