Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 13 - Betingade sannolikheter och Bayes sats

Mattias Villani

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

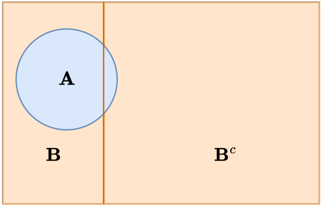
mattiasvillani.com @matvil @matvil mattiasvillani

Översikt

- **Betingad sannolikhet**
- **Lagen om total sannolikhet**
- **Bayes sats**

Betingad sannolikhet

- Covid:
  - A = {positivt hemtest}. B = {har covid}.
  - Intresse: $P(B|A) = P(\text{har covid}|\text{positivt hemtest})$
- Tecknet | läses 'givet' eller betingat på.
- Sannolikheten för att A inträffar **givet att B har inträffat**.

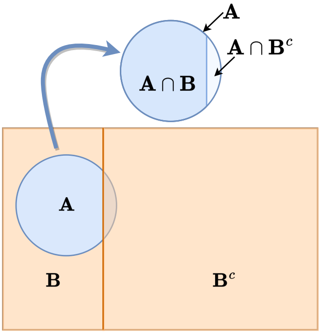


Betingad sannolikhet - världen krymper

- **Betingad sannolikhet**

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- **Betinga på A** innebär att blå cirkeln blir **vårt nya utfallsrum**.
- Inget utanför blå cirkeln kan längre inträffa. "A is the new S".



Korstabeller och sannolikheter

Antal

Pets	Gender		
	Female	Male	Total
Has cats	3412	2388	5800
Has dogs	3431	3587	7018
Has both	897	577	1474
Total	7740	6552	14,292

Snittsannolikheter (Table %)

Pets	Gender		
	Female	Male	Total
Has cats	23.9%	16.7%	40.6%
Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
Has both	6.3%	4.0%	10.3%
Total	54.2%	45.8%	100%

Betingat på kön (Column %)

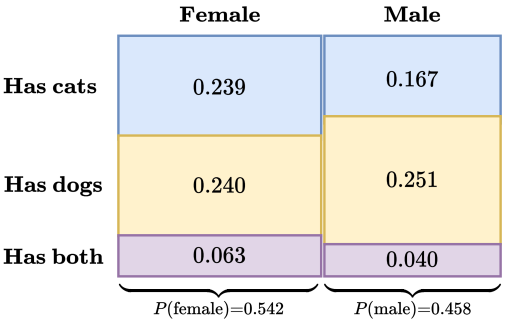
Pets	Gender		
	Female	Male	Total
Has cats	44.1%	36.4%	40.6%
Has dogs	44.3%	54.8%	49.1%
Has both	11.6%	8.8%	10.3%
Total	100%	100%	100%

Betingat på husdjur (Row %)

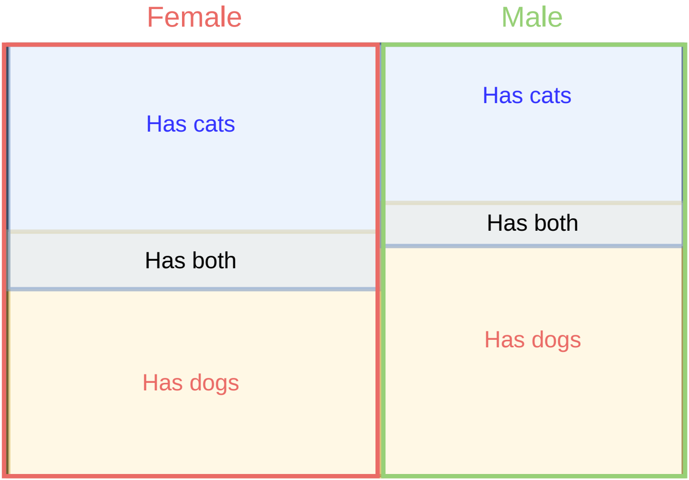
Pets	Gender		
	Female	Male	Total
Has cats	58.8%	41.2%	100%
Has dogs	48.9%	51.1%	100%
Has both	60.9%	39.1%	100%
Total	54.2%	45.8%	100%

Korstabell och mosaic-plott

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	23.9%	16.7%	40.6%
	Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
	Has both	6.3%	4.0%	10.3%
	Total	54.2%	45.8%	100%



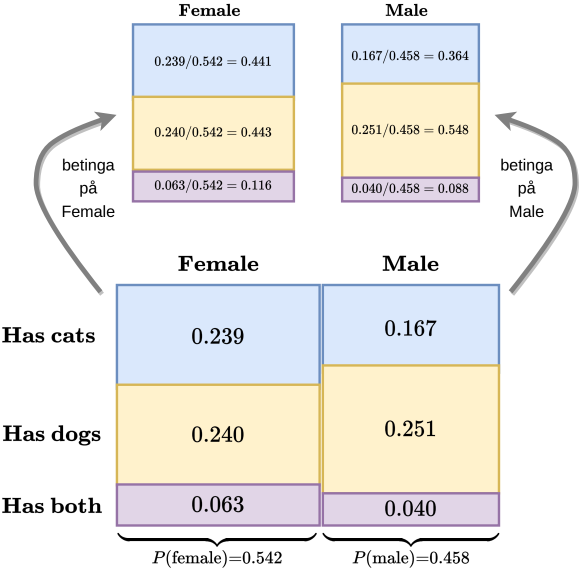
Venn-diagram



Korstabell och betingad sannolikhet

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	44.1%	36.4%	40.6%
	Has dogs	44.3%	54.8%	49.1%
	Has both	11.6%	8.8%	10.3%
	Total	100%	100%	100%

Korstabell och betingad sannolikhet



Allmänna multiplikationsregeln

Allmänna multiplikationsregeln. För händelser A och B

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

- **Oberoende händelser** A och B är oberoende

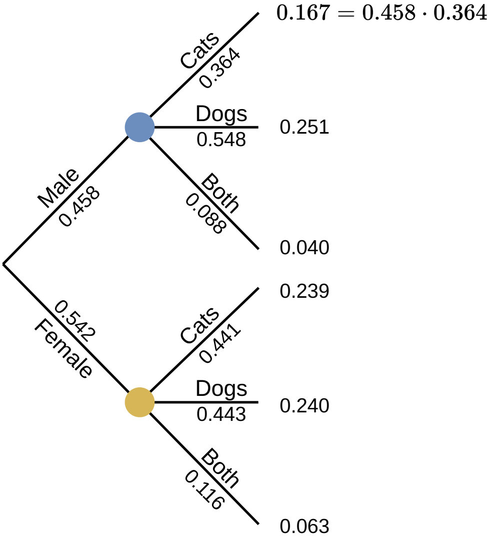
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Oberoende händelser - variant.
A och B är oberoende om (och endast om)

$$P(B|A) = P(B)$$

- Oberoende händelser - vetskapen om att A har inträffat påverkar inte sannolikheten för B.
- **Oberoende $\neq$ Disjunkta**. Disjunkta händelser kan ju inte inträffa samtidigt!

Betingade sannolikheter bäst i form av träd



Snitt- och marginella sannolikheter bäst i tabell

simultansannolikheter (joint) kön och husdjur

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	23.9%	16.7%	40.6%
	Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
	Has both	6.3%	4.0%	10.3%
	Total	54.2%	45.8%	100%

marginalsannolikheter husdjur

marginalsannolikheter kön

Bayes sats

- **Allmänna multiplikationsregeln**

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

- **Betingad sannolikhet**

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- **Bayes sats** 😍

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- **Bayes vänder betingningar**: beräkna $P(B|A)$ från $P(A|B)$.

Känna igen handskrivna siffror

- Förenkling: skilja på enbart 0:or och 1:or

- A ={vit pixel i mitten} och B ={siffran är en nolla}

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

$$P(B) = \frac{\text{antal bilder med nollor}}{\text{totalt antal bilder}}$$

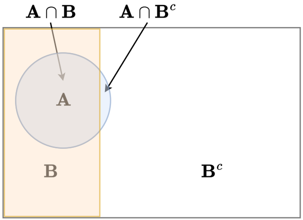
$$P(A) = \frac{\text{antal bilder med vit pixel i mitten}}{\text{totalt antal bilder}}$$

$$P(A|B) = \frac{\text{antal bilder med nolla som också har vit pixel i mitten}}{\text{antal bilder med nollor}}$$

Lagen om total sannolikhet

- Sannolikheten för varje händelse A kan delas upp som:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$



- Allmänna multiplikationsregeln:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \text{ och } P(A \cap B^c) = P(A|B^c)P(B^c)$$

- **Lagen om total sannolikhet**

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

Bayes sats - via lagen om total sannolikhet

- **Lagen om total sannolikhet**

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

- Bayes sats

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- **Bayes sats** med lagen om total sannolikhet

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

Fungerar hemtest för Covid?

- **Bayes sats**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

- Covid: A = {pos}. B = {covid}

$$P(\text{covid}|\text{pos}) = \frac{P(\text{pos}|\text{covid})P(\text{covid})}{P(\text{pos}|\text{covid})P(\text{covid}) + P(\text{pos}|\text{inte covid})P(\text{inte covid})}$$

- Notera: $P(\text{neg}|\text{inte covid}) = 1 - P(\text{pos}|\text{inte covid})$.

- **Prevalens**: $P(\text{covid})$ - andel med covid i populationen.
- **Sensitivitet**: $P(\text{pos}|\text{covid})$ - hur **känsligt** är testet för att upptäcka covid?
- **Specificitet**: $P(\text{neg}|\text{inte covid})$ - är testet **specifikt** för covid, eller reagerar det även på annat?

Fungerar hemtest för covid?

antigentest för detektering av Covid-19 är ett CE-certifierat test för självprovtagning som kan indikera pågående infektion av coronavirus. Snabbtest som utförs genom nästopsning i främre näsan. Med hög specificitet på 99,20 % samt hög sensitivitet på 96,77 %. Passar för screening av symptomfria individer exempelvis på arbetsplatser.

- Sensitivitet: $P(\text{pos test}|\text{covid}) = 0.9677$
- Specificitet: $P(\text{neg test}|\text{inte covid}) = 0.9920$

Bayes sats

Den här widgeten låter dig undersöka hur tillförlitliga hemtest för Covid är genom att beräkna den betingade sannolikheten P(covid | positivt test) med hjälp av Bayes sats. Du kan också använda widgeten till andra problem, genom att ge händelserna covid och pos andra namn.

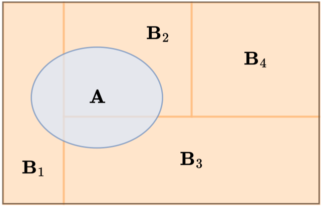
Event A:	cov
Event B:	pos
$P(\text{pos} \mid \text{cov})$	0.9677
$P(\text{not pos} \mid \text{not cov})$	0.992
$P(\text{cov})$	0.05

$P(\text{cov} \mid \text{pos}) = 0.8642$

Mattias Villani Bayes' theorem for events

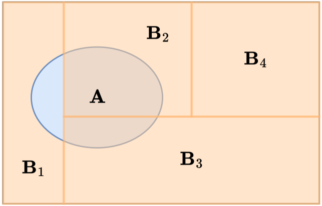
Observable

Lagen om total sannolikhet - allmän version



$$P(A) = \sum_{j=1}^{K} P(A|B_j)p(B_j)$$

Bayes sats - allmän version



$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^{K} P(A|B_j)p(B_j)}$$

- Exempel: handskrivna siffor:
  - $B_0 =$\{nolla\}, $B_1 =$ \{etta\}, $B_2 =$ \{tvåa\}, ... , $B_9 =$ \{nia\}.
  - $A =$\{vit pixel i mitten\}