Statistik och dataanalys I - F12

Statistiska institutionen

Jonas Bjermo

VT2026

Innehåll föreläsning 12

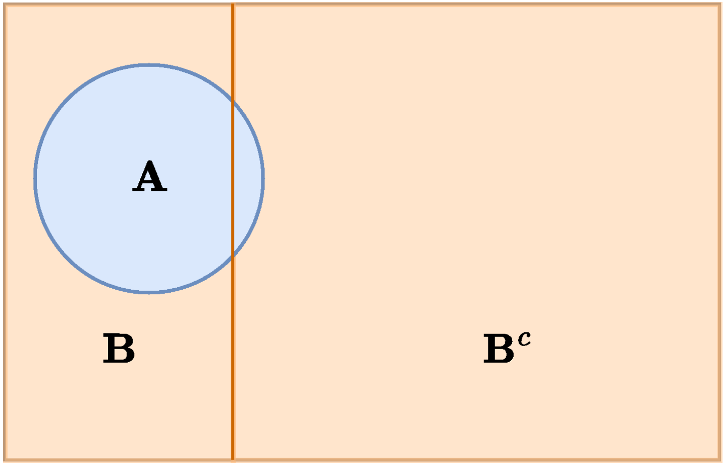
- Betingad sannolikhet
- Lagen om total sannolikhet
- Bayes sats

Betingad sannolikhet

- Betingade sannolikheter använder vi när vi vill svara på frågan: "hur sannolikt är det att A inträffar om jag vet att B inträffar".
- Vi betecknar denna sannolikhet $P(A|B)$, där tecknet $|$ läses 'givet' eller 'betingat på'.
- Sannolikheten för att B inträffar **givet att A har inträffat**.
- **Exempel**:
  - Vad är sannolikheten att fotbollslaget A vinner matchen **givet att** lag B gör första målet?
  - Vad är sannolikheten för att skolrestaurangen serverar ärtsoppa **givet att** det är torsdag?
  - Vad är sannolikheten för att skolrestaurangen serverar ärtsoppa **givet att** det är tisdag?

Betingad sannolikhet

- **Exempel**: Covid
  - $A = \{\text{positivt hemtest}\}$, $B = \{\text{har covid}\}$.
  - Söker: $P(B|A) = P(\text{har covid}|\text{positivt hemtest})$
- Utfallsrummet ges av: $S = \{\{A, B\}, \{A^c, B\}, \{A, B^c\}, \{A^c, B^c\}\}$
- Sannolikheten för att B inträffar **givet att A har inträffat**. Dvs. sannolikheten att vi observerar $\{A, B\}$ när vi vet att A inträffat.

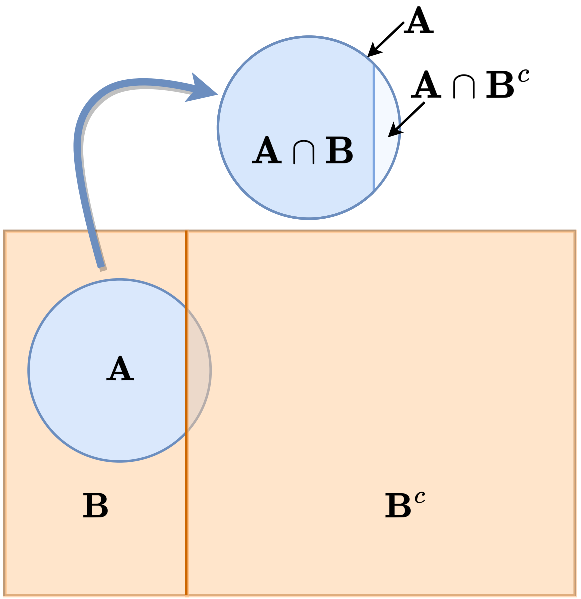


Betingad sannolikhet - världen krymper

- **Betingad sannolikhet**

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- **Betinga på** A innebär att blå cirkeln blir **vårt nya utfallsrum**.
- Inget utanför blå cirkeln kan längre inträffa. S går från hela rektangeln till att bli $= A$.



Korstabeller och sannolikheter

Pets	Gender: Female	Male	Total
Has cats	3412	2388	5800
Has dogs	3431	3587	7018
Has both	897	577	1474
Total	**7740**	**6552**	**14,292**

Antal

Pets	Gender: Female	Male	Total
Has cats	23.9%	16.7%	40.6%
Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
Has both	6.3%	4.0%	10.3%
Total	**54.2%**	**45.8%**	**100%**

Snittsannolikheter (Table %)

Pets	Gender: Female	Male	Total
Has cats	44.1%	36.4%	40.6%
Has dogs	44.3%	54.8%	49.1%
Has both	11.6%	8.8%	10.3%
Total	**100%**	**100%**	**100%**

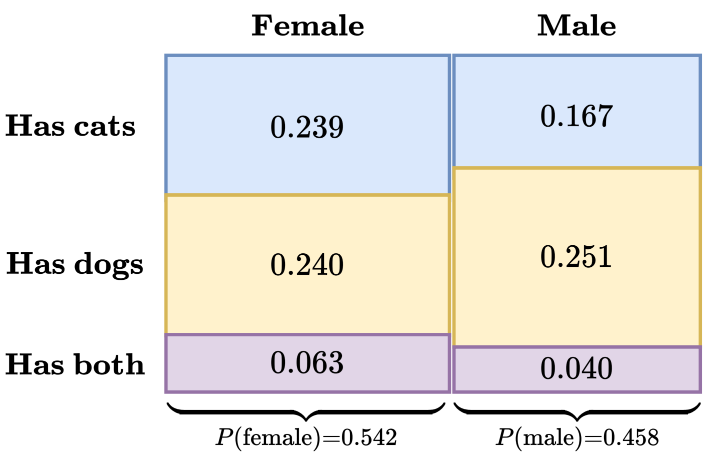
Betingat på kön (Column %)

Pets	Gender: Female	Male	Total
Has cats	58.8%	41.2%	100%
Has dogs	48.9%	51.1%	100%
Has both	60.9%	39.1%	100%
Total	**54.2%**	**45.8%**	**100%**

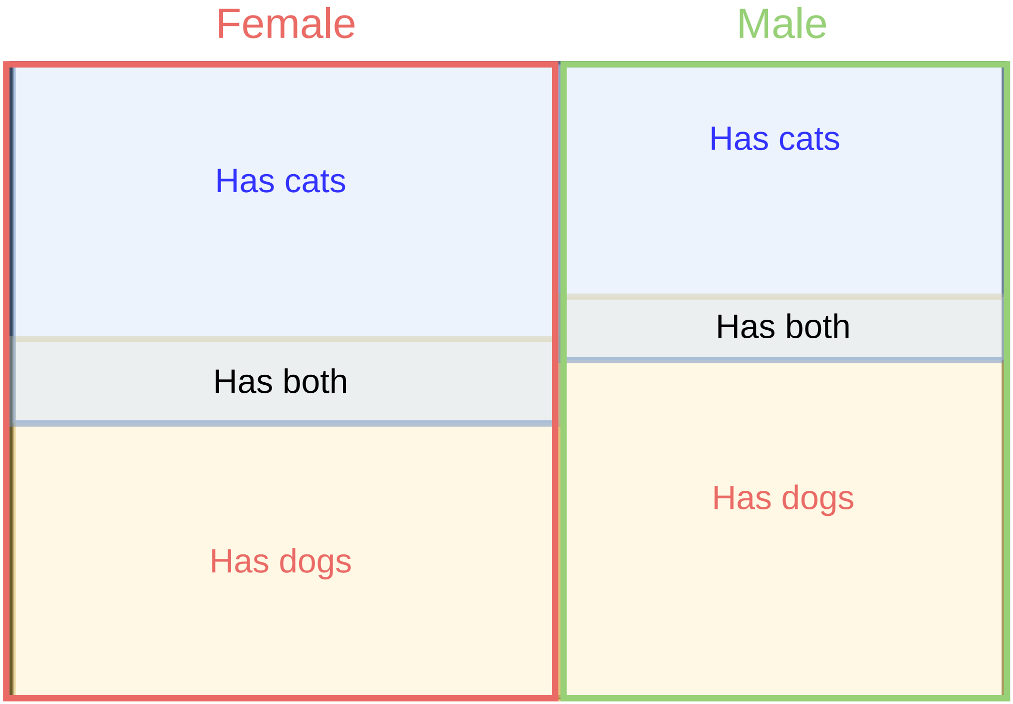
Betingat på husdjur (Row %)

Korstabell och mosaic-plot

		Gender		
		Female	**Male**	**Total**
Pets	**Has cats**	23.9%	16.7%	40.6%
	Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
	Has both	6.3%	4.0%	10.3%
	Total	**54.2%**	**45.8%**	**100%**



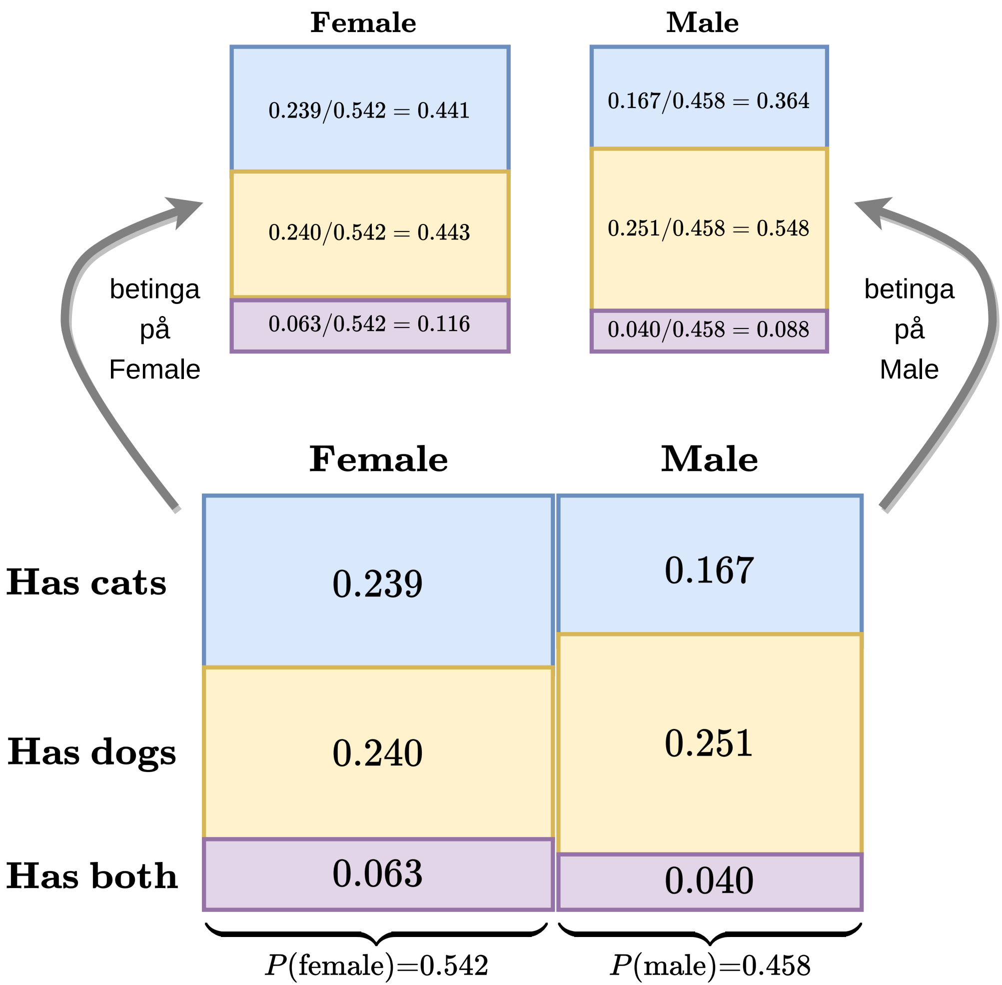
Venndiagram



Korstabell och betingad sannolikhet

Pets	Gender:	Female	Male	Total
	Has cats	44.1%	36.4%	40.6%
	Has dogs	44.3%	54.8%	49.1%
	Has both	11.6%	8.8%	10.3%
	Total	100%	100%	100%

Korstabell och betingad sannolikhet



Allmänna multiplikationsregeln

Allmänna multiplikationsregeln

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

- Terminologi:

$$\underbrace{P(A \cap B)}_{\text{snittsannolikhet}} = \underbrace{P(A)}_{\text{marginell sannolikhet}} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{\text{betingad sannolikhet}}$$

- A och B är **oberoende händelser** om (och endast om)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Oberoende händelser - variant

A och B är oberoende om (och endast om)

$$P(B|A) = P(B)$$

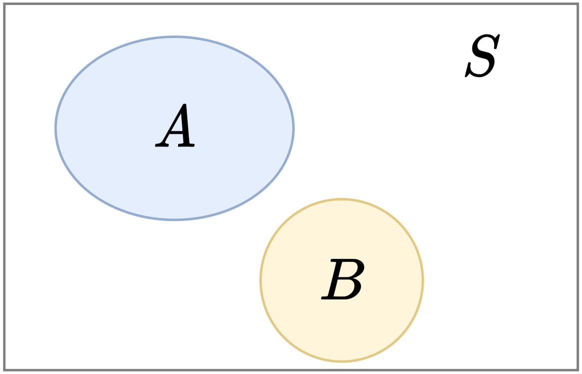
Oberoende händelser

Oberoende händelser - variant

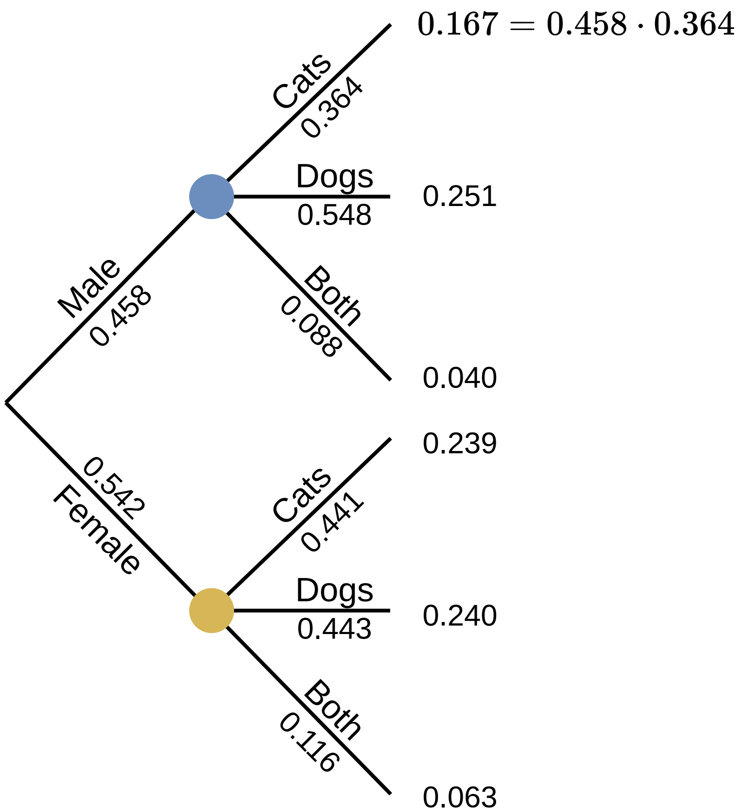
A och B är oberoende om (och endast om)

$$P(B|A) = P(B)$$

- Oberoende händelser - vetskapen om att A har inträffat påverkar inte sannolikheten för B.
- **Oberoende $\neq$ Disjunkta**. Disjunkta händelser kan ju inte inträffa samtidigt!



Betingade sannolikheter, bäst i form av träd



Snitt- och marginella sannolikheter, bäst i tabell

simultansannolikheter (joint) kön och husdjur

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	23.9%	16.7%	40.6%
	Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
	Has both	6.3%	4.0%	10.3%
	Total	54.2%	45.8%	100%

marginalsannolikheter husdjur

marginalsannolikheter kön

Bayes sats

- **Allmänna multiplikationsregeln**

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

- **Betingad sannolikhet**

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- **Bayes sats**

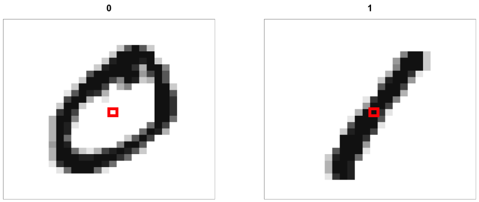
$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- **Bayes sats vänder betingningar**.

Från $P(B|A)$ kan vi beräkna $P(A|B)$.

Exempel: Handskrivna siffror

- Förenkling: skilja på enbart 0:or och 1:or



- A = vit pixel i mitten och B = siffran är en nolla

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

$$P(B) = \frac{\text{antal bilder med nollor}}{\text{totalt antal bilder}}$$

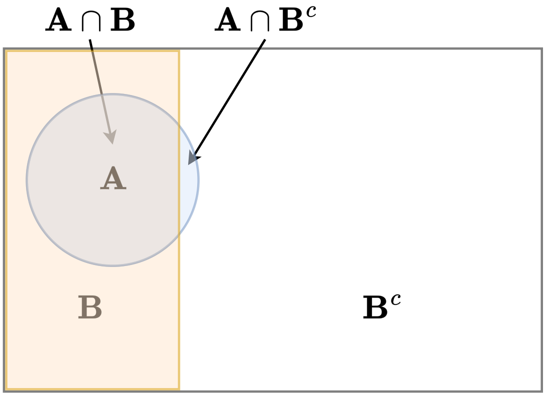
$$P(A) = \frac{\text{antal bilder med vit pixel i mitten}}{\text{totalt antal bilder}}$$

$$P(A|B) = \frac{\text{antal bilder med nolla som också har vit pixel i mitten}}{\text{antal bilder med nollor}}$$

Lagen om total sannolikhet

- Sannolikheten för varje händelse A kan delas upp som:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$



- Allmänna multiplikationsregeln:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \text{ och } P(A \cap B^c) = P(A|B^c)P(B^c)$$

- **Lagen om total sannolikhet**:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

Bayes sats - via lagen om total sannolikhet

- **Lagen om total sannolikhet**

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

- Bayes sats

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- Bayes sats med lagen om total sannolikhet

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

Tillförlitlighet av hemtest för covid

- Vi utgår från **Bayes sats**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

- Låt $A = \{\text{pos}\}$ och $B = \{\text{covid}\}$

$$P(\text{covid}|\text{pos}) = \frac{P(\text{pos}|\text{covid})P(\text{covid})}{P(\text{pos}|\text{covid})P(\text{covid}) + P(\text{pos}|\text{ej covid})P(\text{ej covid})}$$

- **Notera**: $P(\text{neg}|\text{ej covid}) = 1 - P(\text{pos}|\text{ej covid})$

> - **Prevalens**: $P(\text{covid})$ - andel med covid i populationen.
> - **Sensitivitet**: $P(\text{pos}|\text{covid})$ - hur känsligt är testet för att upptäcka covid? (true positive)
> - **Specificitet**: $P(\text{neg}|\text{ej covid})$ - är testet specifikt för covid, eller reagerar det även på annat? (true negative)

Tillförlitlighet av hemtest för covid

antigentest för detektering av Covid-19 är ett CE-certifierat test för självprovtagning som kan indikera pågående infektion av coronavirus. Snabbtest som utförs genom nästopsning i främre näsan. Med hög specificitet på 99,20 % samt hög sensitivitet på 96,77 %. Passar för screening av symptomfria individer exempelvis på arbetsplatser.

- **Sensitivitet**: $P(\text{pos test}|\text{covid}) = 0.9677$
- **Specificitet**: $P(\text{neg test}|\text{inte covid}) = 0.9920$

Bayes sats

Den här widgeten låter dig undersöka hur tillförlitliga hemtest för Covid är genom att beräkna den betingade sannolikheten P(covid | positivt test) med hjälp av Bayes sats. Du kan också använda widgeten till andra problem, genom att ge händelserna covid och pos andra namn.

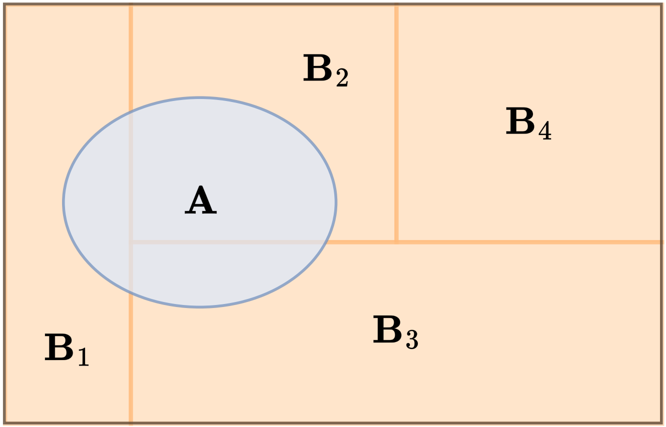
Event A:	cov
Event B:	pos
$P(\text{pos} \mid \text{cov})$	0.9677
$P(\text{not pos} \mid \text{not cov})$	0.992
$P(\text{cov})$	0.05

$\text{P}(\text{cov} \mid \text{pos}) = 0.8642$

Mattias Villani Bayes' theorem for events **Observable**

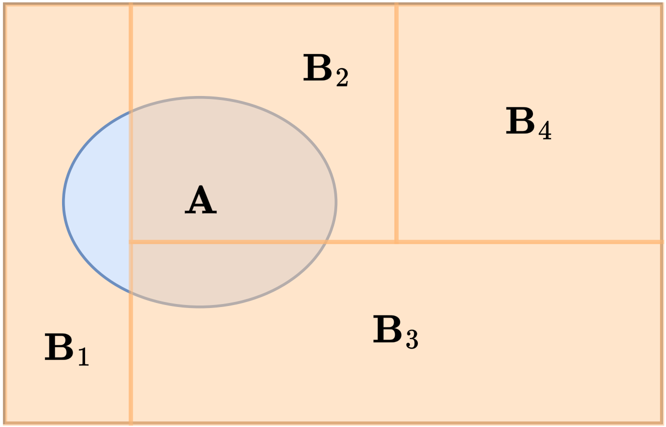
- Notera dock att vanligtvis är $P(\text{covid}|\text{symptom})$ större än prevalensen $P(\text{covid})$. Man testar sig pga symptom. Se slutet av denna notebook.

Lagen om total sannolikhet - allmän version



$$P(A) = \sum_{j=1}^{K} P(A|B_j)p(B_j)$$

Bayes sats - allmän version



$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^{K} P(A|B_j)p(B_j)}$$

- **Exempel**: handskrivna siffor.
  - B_0 = nolla, B_1 = etta, B_2 = tvåa, ..., B_9 = nia.
  - A = vit pixel i mitten

Credits

Dessa slides är gjorda utifrån slides som skapades för kursen statistik och dataanalys 1 av Mattias Villani HT 2023, och har modifierats av Oscar Oelrich VT 2024, Oskar Gustafsson för VT 2025, och Jonas Bjermo VT 2026.