Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 22 - Chi2-test och beslut under osäkerhet

Mattias Villani

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

mattiasvillani.com @matvil @matvil mattiasvillani

Översikt

- **Chi2-test för goodness of fit**
- **Beslutsfattande under osäkerhet**

Kortkampanj (Uppgift 22.2 i SDM)

- Bank har tre sorters kreditkort: Silver, Gold och Platinum.
- Marknadsföringkampanj. Skillnad i vilken kortklass kunder ansöker om?
- Undersöker $n = 200$ personers ansökningar efter kampanj.

Korttyp	Innan	Efter	Stickprov efter	Förväntat om ingen effekt av kampanj
Silver	60%	55%	111	$200 \cdot 0.6 = 120$
Gold	30%	29.5%	59	$200 \cdot 0.3 = 60$
Platinum	10%	15%	30	$200 \cdot 0.1 = 20$

Chi2-test

- **Räknedata**. Antal.
- Hypoteser
  - H_0: räknedata följer fördelning med sannolikhet p_k i cell k.
  - H_A: räknedata följer annan fördelning.
- Totalt antal i hela tabellen: n
- **Förväntat antal** i cell k: $\text{Exp}_k = n \cdot p_k$.
  - Exempel: $\text{Exp}_{\text{silver}} = 200 \cdot 0.6 = 120$
- **Observerat antal** i cell k: Obs_k
  - Exempel: $\text{Obs}_{\text{silver}} = 111$

Korttyp	Innan	Efter	Stickprov efter	Förväntat om ingen effekt av kampanj
Silver	60%	55%	111	$200 \cdot 0.6 = 120$
Gold	30%	29.5%	59	$200 \cdot 0.3 = 60$
Platinum	10%	15%	30	$200 \cdot 0.1 = 20$

Chi2-test

- Hypoteser
  - H_0: räknedata följer fördelning med sannolikhet p_k i cell k.
  - H_A: räknedata följer annan fördelning.

- Chi2 (χ^2) test för tabell med K celler - **teststatistika**

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(\mathrm{Obs}_k - \mathrm{Exp}_k)^2}{\mathrm{Exp}_k} = \sum_{\text{all cells}} \frac{(\mathrm{Obs} - \mathrm{Exp})^2}{\mathrm{Exp}}$$

- **Under H_0** - **Chi2-fördelning** med $K - 1$ frihetsgrader

$$\chi^2 \sim \chi^2_{K-1}$$

Chi2-fördelning

Chi2-fördelningen

Frihetsgrader, ν: 4

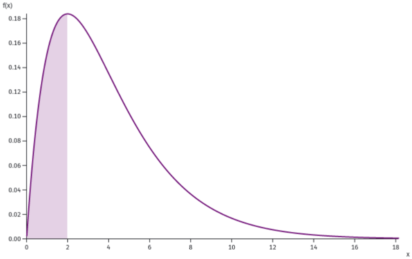
Kvantil: 2

Om $X \sim \chi^2(4)$ så gäller att

$E(X) = \nu = 4.0$

$Var(X) = 2\nu = 8.0$

$P(X \leq 2) = 0.2642$



Mattias Villani Chi2-fördelningen

Observable

Chi2-test

- **Teststatistika**

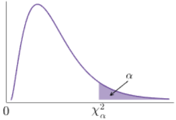
$$\chi^2_{obs} = \sum_{\text{all cells}} \frac{(\text{Obs} - \text{Exp})^2}{\text{Exp}} = \frac{(111-120)^2}{120} + \frac{(59-60)^2}{60} + \frac{(30-20)^2}{20} = 5.6917$$

- **Under H_0** - **Chi2-fördelning** med $3 - 1 = 2$ frihetsgrader
- Kritiskt värde på signifikansnivå 5% från χ^2_2-tabell: $\chi^2_{crit} = 5.991$.
- Eftersom $\chi^2_{obs} < \chi^2_{crit}$ kan vi inte förkasta H_0.
- Finns inte stöd för att kampanjen har ändrat fördelningen över olika kortklasser.

Korttyp	Innan	Efter	Stickprov efter	Förväntat om ingen effekt av kampanj
Silver	60%	55%	111	$200 \cdot 0.6 = 120$
Gold	30%	29.5%	59	$200 \cdot 0.3 = 60$
Platinum	10%	15%	30	$200 \cdot 0.1 = 20$

Chi2-tabell

χ^2-fördelning



Right-tail probability:	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
df					
1	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188

Beslut under osäkerhet

- Vi behöver ofta **fatta beslut** i en miljö med **osäkerhet**.
  - **Beslut**: Ska jag ta med ett paraply när jag går ut?
  - **Osäkerhet**: kommer det att regna?

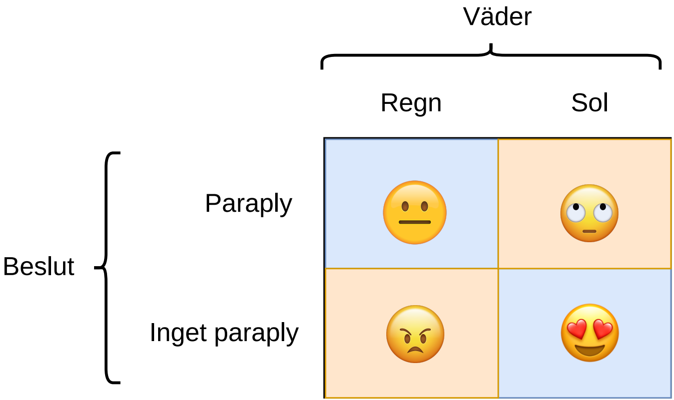
  - **Beslut**: ska jag investera i aktier eller spara på banken?
  - **Osäkerhet**: börsens och inflationens utveckling under min placeringshorisont.

  - **Beslut**: Ska Sverige satsa på snabbtåg?
  - **Osäkerhet**: hur kommer elbilar utvecklas? klimatet? vad kommer det kosta? etc etc

Beslut och statistik

- Ett fattat beslut har **konsekvenser**.
- **konsekvenserna beror på osäkra faktorer** som vi inte vet när vi fattar beslutet.
- Vi behöver **sannolikhetfördelningen** för de osäkra kvantiteterna.
- Modellerar **osäker kvantitet** i form av en **slumpvariabel** X.
- Använder **data** (och expertkunskap) för att beräkna dessa sannolikheter. **Statistik**!

Beslut + Utfall = Konsekvens



Nyttobegreppet

- **Beslutsprocess**:
  - Du **fattar beslutet** a.
  - X **realiseras** som x.
  - Kombinationen a och x ger dig viss **nytta** (eng. **utility**):

$$U(a, x)$$

- Ibland: **förlust** $L(a, x)$ - vilket bara är negativ nytta

$$L(a, x) = U(a, x)$$

Nytta

		Väder	
		Regn	Sol
Beslut	Paraply	0	50
	Inget paraply	-100	100

Maximin - en pessimistisk beslutsregel

- **Maximin**: välj beslut *a* som maximerar den minimala nyttan.
- **Garderar mot det värsta** som kan hända (pessimist).

		Väder	
		Regn	Sol
Beslut	Paraply	0	50
	Inget paraply	-100	100

- Maximin ignorerar hur sannolika utfallen är.

		Väder	
		0.2	0.8
		Regn	Sol
Beslut	Paraply	0	50
	Inget paraply	-100	100

		Väder	
		0.01	0.99
		Regn	Sol
Beslut	Paraply	0	50
	Inget paraply	-100	100

- I **spelteori** med intelligent **motståndare** är maximin optimal.

Maximera förväntad nytta

- Beslutsregel välj beslut a som maximerar förväntade nytta

$$\mathrm{EU}(a) = \sum_{\text{alla } x} U(a, x) \cdot P(X = x)$$

- Paraply-beslutet:

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{Paraply}: & \mathrm{EU}(a) &= 0.2 \cdot 0 + 0.8 \cdot 50 = 40 \\ a_2 &= \text{Inget paraply}: & \mathrm{EU}(a) &= 0.2 \cdot (-100) + 0.8 \cdot 100 = 60 \end{aligned}$$

- Optimalt beslut: ta inte med paraply.

		Väder	
		0.2	0.8
		Regn	Sol
Beslut	Paraply	0	50
	Inget paraply	-100	100

Maximera förväntad nytta

- Paraply-beslutet i Bergen:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \text{Paraply}: & \mathrm{EU}(a) &= 0.7 \cdot 0 + 0.3 \cdot 50 = 15 \\
a_2 &= \text{Inget paraply}: & \mathrm{EU}(a) &= 0.7 \cdot (-100) + 0.3 \cdot 100 = -40
\end{aligned}
$$

- Optimal beslut i Bergen: Paraply!

		Väder	
		0.7	0.3
		Regn	Sol
Beslut	Paraply	0	50
	Inget paraply	-100	100