

Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 11 - Osäkerhet och Sannolikhet




Oscar Oelrich

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

- Motivation
- Försök, Utfall och Händelser
- Sannolikheter
- Sannolikhetsberäkningar
- Kombinatorik

Sannolikheter för dataanalys

■ Sannolikhetslära är intressant i sig:

- Sannolikheten för en kärnkraftsolycka 
- Sannolikheten att två personer har identiska DNA. 
- Sannolikheten att träffa den rätta på dejtingapp. 

■ Sannolikhetslära viktigt för dataanalys:

- **Statistiska modeller är sannolikhetsmodeller.**
Bra modell av verkligheten: data sannolika enligt modellen.
- Kan **kvantifiera osäkerheten** i en **prediktion**.
- Kan **fatta optimala beslut i en osäker värld**.

7	→									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
				0.01				0.99		



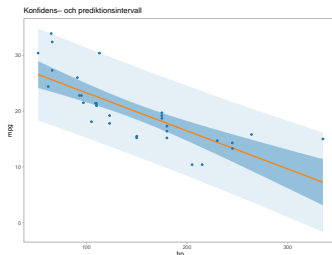
Sannolikheter för regression

■ Hittills på kursen:

- skatta **regressionslinjen**: $\hat{y} = b_0 + b_1x$
- **prediktion** för ny observation: $\hat{y}_i = b_0 + b_1x_i$

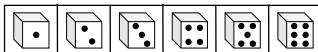
■ Med sannolikhetslära kan vi göra mycket mer:

- om $b_1 \neq 0$, finns det **verkligen korrelation** mellan x och y ?
Stickprov vs **Population**.
- **osäkerhetsintervall för b_1** som troligen täcker sanna värdet.
- **osäkerhetsintervall för prediktionen \hat{y}_i** .















Försök, utfall och utfallsrum

- Vi utför ett **försök** (eng. trial): singlar ett mynt.
- Observerar ett **utfall** (eng. outcome): Krona.
- **Utfallsrummet** är **alla möjliga utfall** som kan inträffa.
- Singla slant $S = \{\text{Krona, Klave}\}$.
- Kasta en tärning:















- Kasta två tärningar, summera antal prickar.

						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

Händelse - exakt sju prickar med två tärningar

- En **händelse** är en **mängd av utfall**.
- Händelsen $A = \text{få exakt 7 prickar med två tärningar}$.













$$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

Händelse - samma antal prickar på båda tärningarna

- Händelsen $A = \{\text{få samma antal prickar på båda tärningarna}\}$

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

Tre sannolikhetsbegrepp

- Vad är **sannolikheten** att få en 6:a med en tärning?

- Utfallsrum: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Händelse: $A = \{6\}$.
- Sannolikhet: $P(A)$. Måste uppfylla: $0 \leq P(A) \leq 1$.

- 1 **Lika sannolika utfall** (logisk sannolikhet).

En tärnings fysiska egenskaper \rightarrow alla sidor är lika sannolika.

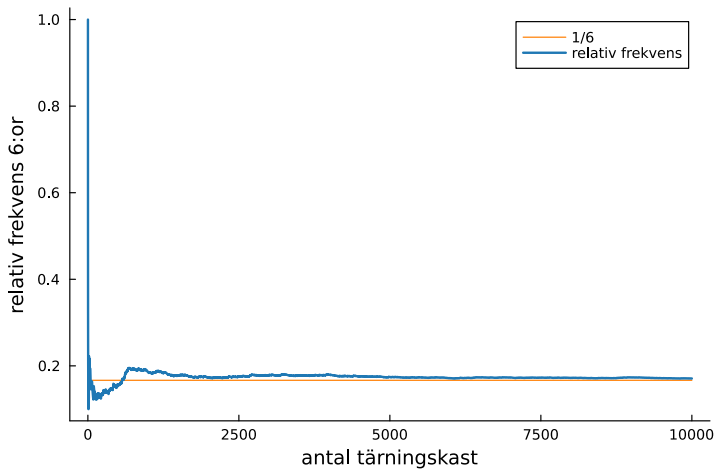
$$P(A) = \frac{\text{antal utfall i } A}{\text{totalt antal möjliga utfall}} = 1/6 \approx 0.1667$$

- 2 **Empirisk sannolikhet**: andelen 6:or om jag kastar tärningen ett "oändligt" antal gånger.

$$P(A) = \frac{\text{antal gånger som } A \text{ inträffar}}{\text{totalt antal försök}}$$

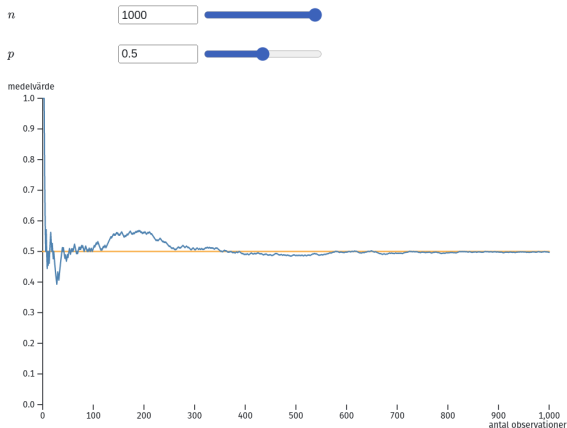
- 3 **Subjektiva sannolikheter**. **Min** tidigare erfarenhet av tärningskast och **min** uppfattning om en tärnings symmetri säger mig att **min** sannolikhet att få en 6:a är $1/6 \approx 0.1667$.

Stora talens lag - få 6:a med tärning

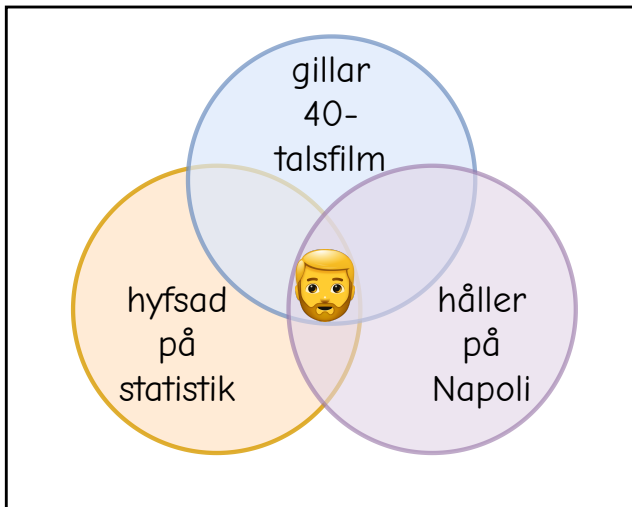


Stora talens lag - slantsingling

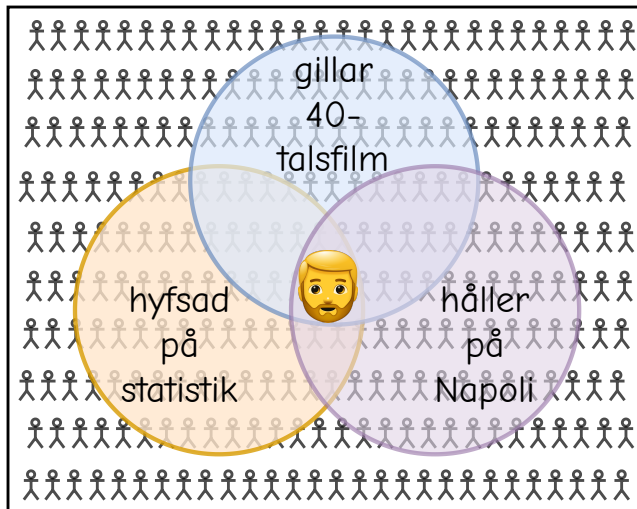
Stora talens lag - slantsingling



Venndiagram

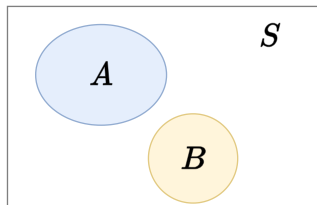
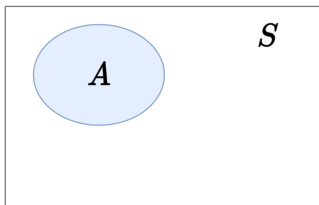


Venndiagram



























Händelse - Venndiagram













- Praktiskt att visualisera händelser i ett **Venndiagram**.
- **Utfallsrummet** (allt som kan inträffa) visas med **rektangel**.
- **Händelser** ritas som **cirklar**, **ellipser** eller **rektanglar**.




Vennndiagram - summa sju prickar och samma

						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12


						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12


Venndiagram - summa tio prickar och samma




1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12



1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12



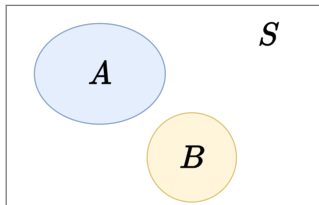
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12



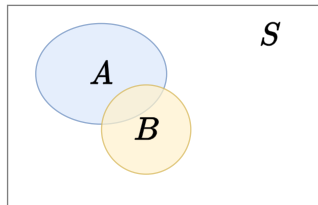
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Disjunkta händelser

Disjunkta händelser
inga gemensamma element

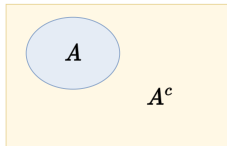


Överlappande händelser
med gemensamma element



Komplementshändelsen

- **Komplementet** till A inträffar när **A inte inträffar**.
- Vi skriver A^c där c står för engelskans **C**omplement.

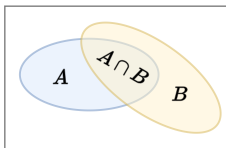


- **Tärningar**
 - $A = \{\text{udda antal prickar på tärning}\} = \{1, 3, 5\}$.
 - $A^c = \{\text{jämnt antal prickar på tärning}\} = \{2, 4, 6\}$.
- **Inflation**
 - $A = \{\text{inflationen nästa månad} \leq 2\}$.
 - $A^c = \{\text{inflationen nästa månad} > 2\}$.
- **Mjukvarubuggar**
 - $A = \{\text{ingen bugg i programvaran}\}$.
 - $A^c = \{\text{minst en bugg}\} = \{1 \text{ bugg}, 2 \text{ buggar}, \dots\}$

Snitthändelsen

- **Snitthändelsen** är händelsen där **både A och B** inträffar.
- Vi skriver **A och B** eller $A \cap B$.

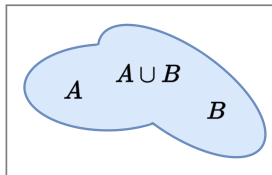
🇺🇸 Snitt = **Intersection**



- Två tärningar:
 - $A = \{\text{samma prickar på båda tärningar}\}$
 - $B = \{\text{totalt 10 prickar}\}$
 - $A \cap B = \{5\text{:a på båda tärningar}\}$
- Lågkonjunktur 🤔
 - $A = \{\text{BNP-tillväxt kvartal 1} < 0\}$
 - $B = \{\text{BNP-tillväxt kvartal 2} < 0\}$
 - $A \cap B = \{\text{Negativ BNP-tillväxt två kvartal i rad}\}$
- Disjunkta händelsers snitt är den **tomma mängden** \emptyset
$$A \text{ och } B \text{ disjunkta} \iff A \cap B = \emptyset$$

Unionhändelsen

- **Unionhändelsen** är händelsen där **A och/eller B** inträffar.
- **Minst en** av händelserna inträffar.



- Universitetsstudier 🎓
 - $A = \{\text{Kommer in på kurs på betyg}\}$
 - $B = \{\text{Kommer in på kurs på högskoleprov}\}$
 - $A \cup B = \{\text{Kommer in på kurs}\}$

Sannolikheten $P(A)$ för händelse A på utfallsrummet S

- 1 $0 \leq P(A) \leq 1$
- 2 $P(S) = 1$
- 3 $P(A^c) = 1 - P(A)$
- 4 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ om A och B är **disjunkta**
- 5 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ om A och B är **oberoende**

- 1 En sannolikhet är ett tal mellan 0 och 1.
- 2 Sannolikheten för en **säker händelse** är 1.
- 3 Sannolikheten att en händelse **inte** inträffar är 1 minus sannolikheten för händelsen.
- 4 Sannolikheten att **åtminstone en** av två händelser som **inte kan inträffa samtidigt** är summan av händelsernas sannolikheter.
- 5 Sannolikheten att två oberoende händelser **båda** inträffar är produkten av händelsernas sannolikheter.

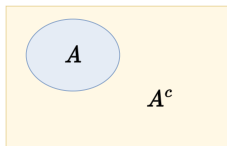
Komplementsregeln

- A och A^c är **disjunkta**. Kan inte inträffa samtidigt.
- Någon av A eller A^c *måste* inträffa.

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

Komplementsregeln

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



- $A = \{\text{ingen bugg i koden}\}.$
- $A^c = \{\text{åtminstone en bugg i koden}\} = \{1 \text{ bugg}, 2 \text{ buggar}, \dots\}$
- $P(\{\text{åtminstone en bugg i koden}\}) = 1 - P(\{\text{ingen bugg i koden}\}).$

Den allmänna additionsregeln

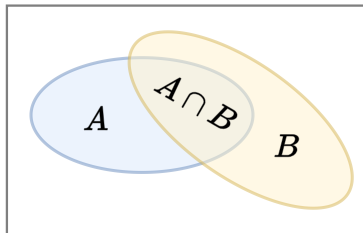
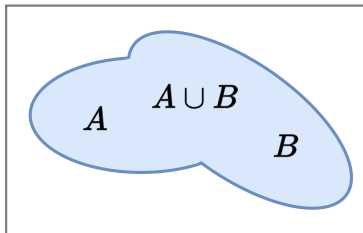
- **Additionsregeln:** Om A och B är **disjunkta**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Allmänna additionsregeln (även överlappande händelser)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Måste dra bort snittet $A \cap B$ för det räknas två ggr.



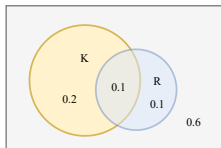
Röst på socialdemokraterna 🌹 additionsregeln

- \mathbf{R} = person röstar 🌹 i riksdagsvalet. $P(\mathbf{R}) = 0.2$
- \mathbf{K} = person röstar 🌹 i kommunalvalet. $P(\mathbf{K}) = 0.3$
- Personen röstar på 🌹 in båda valen: $P(\mathbf{R} \cap \mathbf{K}) = 0.1$
- Röstar 🌹 i åtminstone ett av valen? Additionsregeln:

$$P(\mathbf{R} \cup \mathbf{K}) = 0.2 + 0.3 - 0.1 = 0.4$$

- Röstar inte på 🌹 i något av valen?

$$P(\mathbf{R}^c \cap \mathbf{K}^c) = P((\mathbf{R} \cup \mathbf{K})^c) = 1 - P(\mathbf{R} \cup \mathbf{K}) = 1 - 0.4 = 0.6$$



Multiplikationsregeln för oberoende händelser

- Händelserna A och B är **oberoende** om vetskapen att B har inträffat **inte påverkar** sannolikheten för A . Och vice versa.
- Test: kommer sannolikheten för A förändras om man får veta att B har inträffat? Om inte, så är A och B oberoende.

Multiplikationsregeln. För **oberoende** händelser A och B

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Hur beräknar man sannolikheten för snittet $A \cap B$ för händelser som **inte** är oberoende? Stay tuned, kommer i F12. 🤔

Multiplikationsregeln för oberoende händelser

- Vad är sannolikheten att få 2 st krona i rad vid slantsingling?

$$0.5 \cdot 0.5 = 0.5^2 = 0.25$$

- Vad är sannolikheten att få 5 st krona i rad vid slantsingling?

$$0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.5^5 = 0.03125$$

- 1% risk att streaming laggar under en kväll. Oberoende kvällar.

$$P(\text{ingen lagg hela veckan}) = (1 - 0.01)^7 = 0.99^7 \approx 0.932.$$

- Sannolikheten att dra två klöver ur en blandad kortlek?




$$P(1:a \text{ kortet klöver}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(2:a \text{ kortet klöver} \textbf{ givet } 1:a \text{ kortet klöver}) = \frac{12}{51}$$

$$P(2:a \text{ kortet klöver} \textbf{ givet } 1:a \text{ kortet} \textbf{ inte klöver}) = \frac{13}{51}$$

- $A = \{. \text{ på } 1:a\}$ och $B = \{. \text{ på } 2:a\}$ är **inte** oberoende.


Röst på socialdemokraterna multiplikationsregeln

- \mathbf{R} = person röstar  i riksdagsvalet. $P(\mathbf{R}) = 0.2$
- \mathbf{K} = person röstar  i kommunalvalet. $P(\mathbf{K}) = 0.3$
- Personen röstar på  in båda valen: $P(\mathbf{R} \cap \mathbf{K}) = 0.1$
- Är händelserna \mathbf{R} och \mathbf{K} **oberoende**? Vi måste undersöka om

$$P(\mathbf{R} \cap \mathbf{K}) = P(\mathbf{R}) \cdot P(\mathbf{K})$$

- Händelserna är **inte** oberoende:

$$P(\mathbf{R}) \cdot P(\mathbf{K}) = 0.2 \cdot 0.3 \neq 0.1 = P(\mathbf{R} \cap \mathbf{K})$$

- Att hen röstat på  i kommunalvalet ger information om vad hen röstat på i riksdagsvalet.
- **Betingad sannolikhet** för \mathbf{R} **givet** \mathbf{K} är sann: 0.333 (se F13).
- $P(\mathbf{R})$ ökar från 0.2 till 0.333 när vi vet att \mathbf{K} är sann.

Kombinatorik

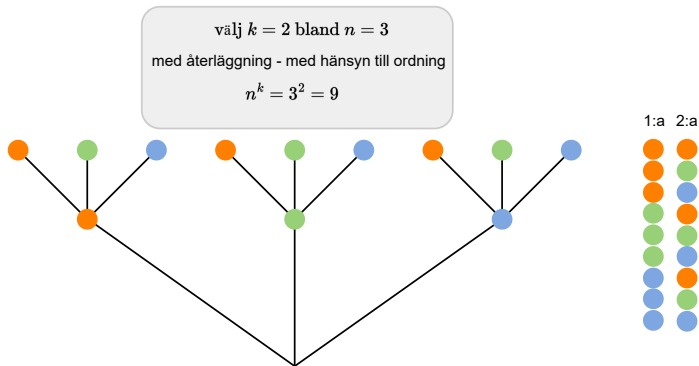
- Dataset 1: **med ordning**: Krona, Klave, Klave, Krona, Krona.
- Dataset 2: **utan ordning**: 3 st Krona och 2 st Klave.
- Är det lika sannolikt att observera Dataset 1 som Dataset 2?
- **Kombinatorik**: räknar antal sätt/kombinationer.
- **Fakultetet** (eng. factorial). Utläses som n-fakultet.

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

Hur många sätt att välja k element bland n element?

	med återläggning	utan återläggning
med ordning	n^k	${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
utan ordning	ej på kurs	${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Med återläggning, med hänsyn till ordning

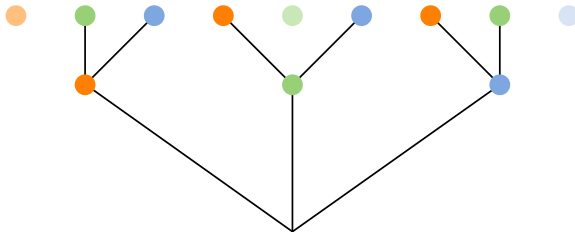


Utan återläggning, med hänsyn till ordning

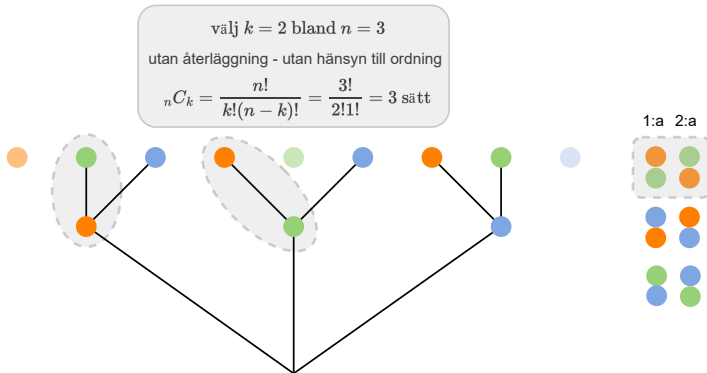
välj $k = 2$ bland $n = 3$

utan återläggning - med hänsyn till ordning

$${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$$



Utan återläggning, utan hänsyn till ordning



Dessa slides skapades för kursen statistik och dataanalys 1 av Mattias Villani HT 2023, och har modifierats av Oscar Oelrich för statistik och dataanalys 1 VT 2024.