Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 15 - Sannolikhetsmodeller II

Oskar Gustafsson

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

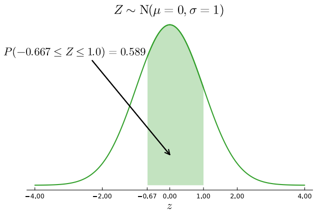
Översikt

- **Likformig fördelning**
- **Normalfördelning**
- **Poissonfördelning**
- **Student-t**

Kontinuerliga slumpvariabler och täthetsfunktionen

- **Kontinuerlig slumpvariabel** antar alla värden, men $P(X = x) = 0$ för alla x! 🤯
- **Täthetsfunktion**: $f(x)$.
- Positiv $f(x) > 0$ för alla x.
- Täthetsfunktion ger **inte** sannolikheter. OK om $f(x) > 1$.
- **Täthetsfunktionen** används för att **beräkna sannolikheter**:

$$P(a \leq X \leq b) = \text{arean under } f(x) \text{ mellan } a \text{ och } b$$



- **SDAIII**: räkna arean under funktion med **integration**.

Likformig fördelning

- Varje värde är lika sannolikt.
- Kan definieras för både och diskreta slumpvariabler.
  - Kontinueliga: Vid vilken tidpunkt anländer min buss?
  - Vilket nummer vinner på lotto?
- $X \sim U(a, b)$, läses som: X är likformigt fördelad inom intervallet a till b.
- Täthetsfunktion: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ för alla $a \leq x \leq b$. Alla värden har samma sannolikhetstäthet!
- Väntevärde och varians: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ och $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Likformig fördelning, exempel

- Jag sitter på mitt kontor med en studsboll som jag kastar så hårt jag kan i väggen. Antag att bollen hamnar någonstans mellan längst till vänster och längst till höger med samma sannolikhet. Antag också att mitt kontor är 4 meter långt.
- Bollens slutposition kan antas likformigt fördelad mellan 0 (längst till vänster) och 4 (längst till höger).
- Hur långt från den vänstra väggen kommer bollen i genomsnitt att hamna och med vilken varians?
  - $E(X) = \frac{b-a}{2} = \frac{4-0}{2} = 2$ meter från väggen, med varians $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(4-0)^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ meter.
- Slh att bollen hamnar som mest 1 meter från väggen? (CDF) $P(X \leq 1) = \frac{1-a}{b-a} = \frac{1}{4}$. Visa bild på tavlan!

Likformig fördelning

Likformig fördelning

a : 0

b : 1

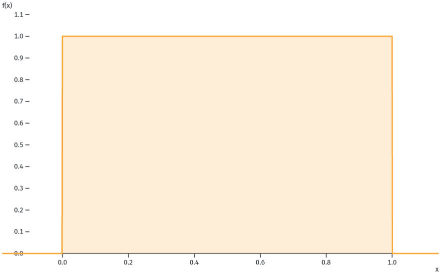
Kvantil: 1

Om $X \sim \text{Uniform}(0, 1)$ så gäller att

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = 0.500$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = 0.0833$$

$$P(X \leq 1) = 1.000$$



Mattias Villani Likformig fördelning

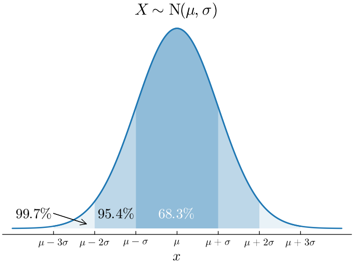
Observable

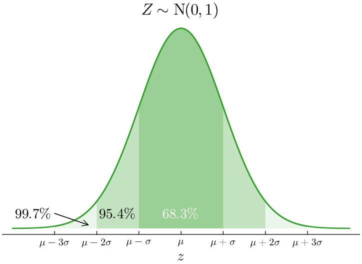
Normalfördelning

- $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$E(X) = \mu$$
$$SD(X) = \sigma$$

- **68-95-99.7% regeln**





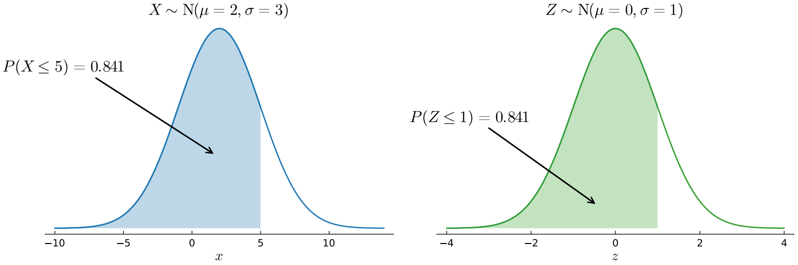
Normalfördelning - standardisering

- **Standardisering**

$$X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

- **Sannolikhet via standardisering** för $X \sim N(2, 3)$

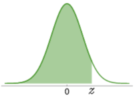
$$P(X \leq 5) = P(X - 2 \leq 5 - 2) = P\left(\frac{X-2}{3} \leq \frac{5-2}{3}\right) = P(Z \leq 1)$$

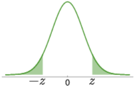


Normalfördelning - Z-tabell

Normalfördelning

Tabellen ger sannolikheten $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ för olika z där Z är standardnormal, $Z \sim N(0,1)$.
Sannolikheter i den vänstra svansen fås genom symmetri: $P(Z \leq -z) = 1 - P(Z \leq z)$.





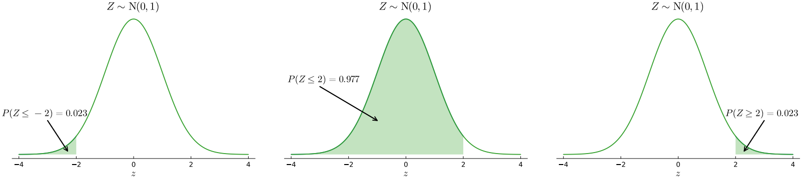
Andra decimalen i z

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

Normalfördelning - symmetri

- **Negativa z-värden** finns inte i Z-tabellen.
- Vi utnyttjar normalfördelningens **symmetri** för negativa z

$$P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2)$$



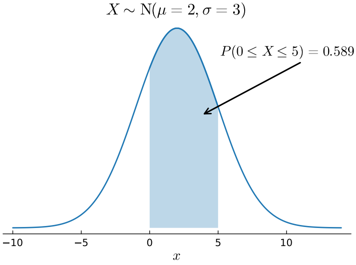
Normalfördelning - intervall via standardisering

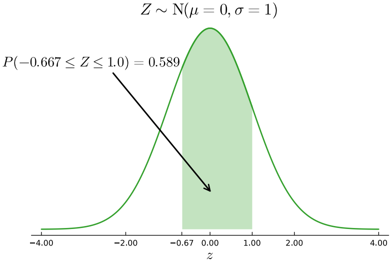
- **Sannolikhet via standardisering** för $X \sim N(2, 3)$

$$P(0 \leq X \leq 5) = P\left(\frac{0-2}{3} \leq \frac{X-2}{3} \leq \frac{5-2}{3}\right)$$
$$= P(-0.667 \leq Z \leq 1)$$
$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0.667)$$

och pga **symmetri**

$$P(Z \leq -0.667) = 1 - P(Z \leq 0.667)$$





Normalfördelningen - interaktivt

Normalfördelningen

μ : 0

σ : 1

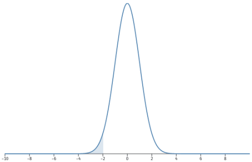
Kvantil: -1.96

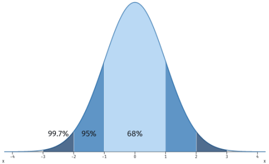
Om $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ så gäller att

$E(X) = \mu = 0.00$

$Var(X) = \sigma^2 = 1.00$

$P(X \leq -1.96) = 0.02500$





Mattias Villani Normalfördelningen

Observable

Normalfördelning - egenskaper

Linjärkombination av normalfördelad slumpvariabel.

Om $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ och $Y = c + aX$ så gäller

$$Y \sim \mathrm{N}(c + a\mu,\ |a|\sigma)$$

Summa av oberoende normalfördelade slumpvariabler.

Om $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X)$ och $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ är oberoende slumpvariabler så är även summan normalfördelad:

$$X + Y \sim \mathrm{N}(\mu_X + \mu_Y,\ \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2})$$

- **Fördelningarna** för linjärkombination och summa är **normal**!
- Summan är fortfarande normal om X **och** Y **är beroende**.

Poissonfördelning

- **Poissonfördelningen** är en fördelning för **räknedata** (antal):
  - antal buggar i en mjukvara
  - antal budgivare i en eBay auktion
  - antal besök till läkaren
- Om $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ så

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad \text{för } x = 0, 1, 2, \ldots$$

- $e \approx 2.71$ är Eulers tal.
- Poisson har samma **väntevärde** och **varians**:

$$E(X) = \lambda$$
$$Var(X) = \lambda$$

Poissonfördelning - interaktivt

Poissonfördelningen

λ : 2

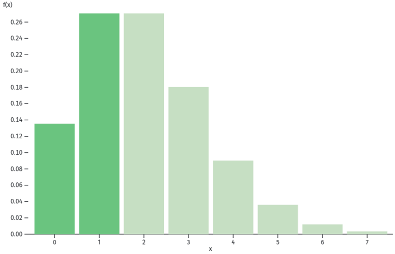
Quantile: 1

If $X \sim \text{Poisson}(2)$ then

$E(X) = \lambda = 2.00$

$Var(X) = \lambda = 2.00$

$P(X \leq 1) = 0.4060$



Mattias Villani Poisson distribution

Observable

Poissonfördelning för antal bud på eBay

sda123 ebaycoins

- Data från 1000 **eBay-auktioner av samlarmynt**.
- `nBids` är **antalet budgivare** i en given auktion.
- Olika värdefulla och olika reservationspris (lägsta pris).
- Fokus här på de 550 observationer med lägst reservationspris.
- **Modell** för `nBids`: $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{ober}}{\sim} \text{Pois}(\lambda)$.

	nBids	PowerSeller	VerifyID	Sealed	Minblem	MajBlem	LargNeg	LogBook	MinBidShare	Sold	low_res_price
1	2	0	0	0	0	0	0	-0.224	-0.209	True	low
2	6	1	0	0	0	0	0	0.607	-0.348	True	low
3	1	1	0	0	0	0	0	0.033	0.442	True	high
4	1	0	0	0	1	0	0	0.376	0.144	True	high
5	4	0	0	0	0	0	1	1.435	-0.41	True	low
6	2	0	0	0	0	0	0	-0.914	0.632	True	high
7	2	0	0	0	1	0	0	-0.248	0.295	True	high
8	2	0	0	0	0	0	0	-0.914	0.632	True	high
9	2	1	0	0	0	0	0	0.511	0.055	True	high
10	6	0	0	1	0	0	0	-0.362	0.025	True	high
11	0	1	0	0	0	0	0	-0.224	0.477	False	high

Wegmann, B. och Villani, M. (2011). Bayesian Inference in Structural Second-Price Common Value Auctions, *Journal of Business and Economic Statistics*

Punktskattning av modellparametrar

- Modell för `nBids`: $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{ober}}{\sim} \text{Pois}(\lambda)$.
- Hur väljer vi parametern λ? **Punktskattning**. **Estimat**. $\hat{\lambda}$.
- **Momentmetoden**: Eftersom $\lambda = E(X)$ så är $\hat{\lambda} = \bar{x}$ rimligt.
- **Maximum likelihood**: välj det λ som maximerar sannolikheten för datamaterialet. 😍
- Maximum likelihood-metoden funkar för alla modeller. 😎

Maximum likelihood för Poisson - interaktivt

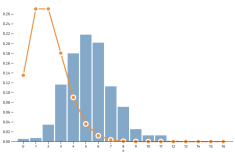
Maximum likelihood estimation - Poissonfördelning

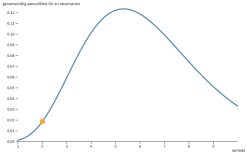
Modell: $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{ober}}{\sim} \text{Pois}(\lambda)$

λ : 2

Visa maximum likelihood anpassning

Medelsannolikhet för observerad data med modellen Pois(λ = 2) är 0.01872



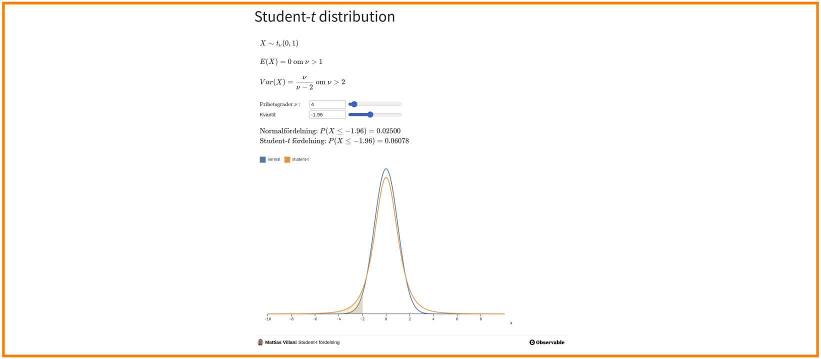


Mattias Villani Maximum likelihood - Poissonmodellen

Observable

Student-t fördelning (standard)

- $X \sim t_\nu(0,1)$ är en **student-t** fördelning med ν **frihetsgrader**.
- **Kontinuerliga symmetriska** variabler över $(-\infty, \infty)$.
- Student-t har mer sannolikhet på **extrema utfall**.
- **Student-t** fördelning alltmer lik normalfördelning när ν ökar.



Varför student-t är viktig för inferens

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende data från $N(\mu, \sigma)$.
- Stickprovmedelvärdet

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

- Inferens: fördelningen för det **standardiserade medelvärdet**

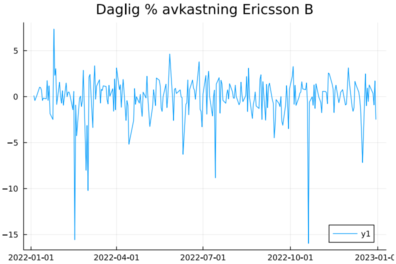
$$\frac{\bar{X} - \mu}{SD(\bar{X})}$$

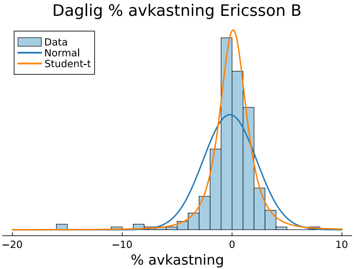
- Om variansen i populationen σ^2 **är känd** så är det **standardiserade medelvärdet normalfördelat**.
- Om variansen i populationen σ^2 **är okänd**, och måste skattas med s^2, så är det **standardiserade medelvärdet student-t fördelad** med $\nu = n - 1$ frihetsgrader.

Student-t som modell för aktieavkastning

sda123 ericsson

- Student-t fördelningen kommer visa sig viktig för inferens för väntevärdet μ i en normalpopulation. F17.
- Student-t är en bra modell för data med extremvärden.
- Daglig avkastning Ericsson B aktie under hela år 2022.
- Finansiella data har ofta extremvärden. **Tunga svansar**.
- Maximum likelihood: $\mu = 0.094$, $\phi = 1.279$ och $\nu = 2.706$.





Allmän Student-t fördelning för datamodellering

Allmän Student-t distribution

$X \sim t_\nu(\mu, \phi^2)$

$E(X) = \mu$ om $\nu > 1$

$Var(X) = \dfrac{\nu}{\nu - 2}\phi^2$ om $\nu > 2$

Läge μ : 2

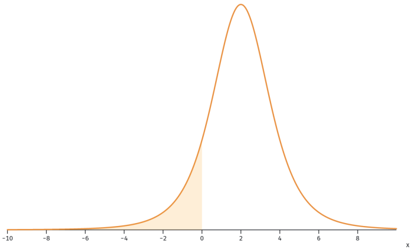
Skala ϕ : 1.5

Frihetsgrader ν : 4

Kvantil: 0

visa normalfördelning

Student-t fördelning: $P(X \leq 0) = 0.1266$



Credits

Dessa slides skapades för kursen statistik och dataanalys 1 av Mattias Villani HT 2023, och har modifierats av Oscar Oelrich VT 2024, och Oskar Gustafsson för VT 2025.