Statistik och dataanalys I - F11

Statistiska institutionen

Jonas Bjermo

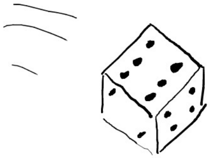
VT2026

Innehåll föreläsning 11

- Från slumpmässighet till sannolikhet
- Försök, utfall och händelser
- Sannolikheter och sannolikhetslära
- Sannolikhetsberäkningar
- Kombinatorik

Slumpmässighet

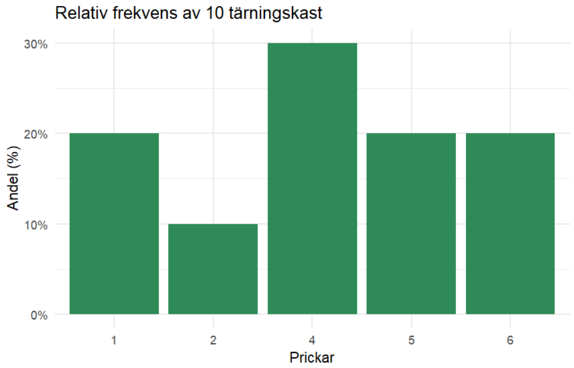
- Går det att förutsäga utfallet av ett tärningskast?

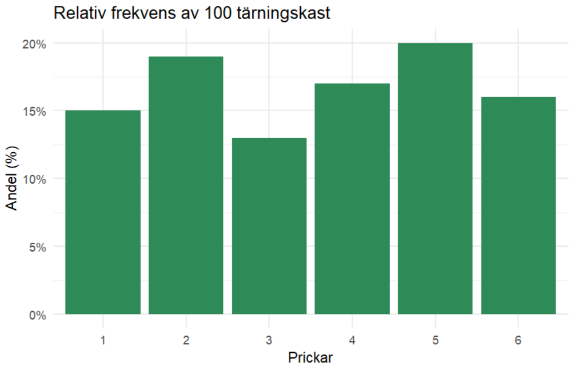


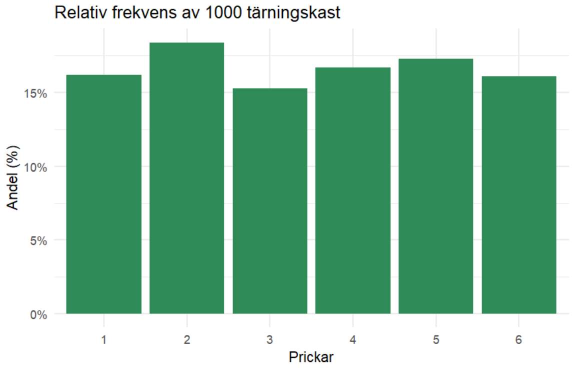
- En slantsingling?

Från slumpmässighet till sannolikhet

- **Svårt!** Eftersom det är **slumpmässiga** händelser.
- Men vi kan förutsäga **proportioner** av tärningskast, slantsingling osv. i det det **långa loppet**.







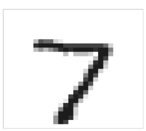
Sannolikheter

- Sannolikheter för en kärnkraftsolycka.
- Sannolikheten för en stor översvämning.
- Sannolikheten för att två personer har en matchande DNA-profil.

Exempel: Ett test för en ovanlig sjukdom har 99 % pricksäkerhet. Sjukdomen finns hos 0,1 % av befolkningen. Om du testar positivt, vad är sannolikheten att du faktiskt har sjukdomen?

Sannolikhetslära

- Beskriver och kvantifierar **osäkerhet** och **slumpmässiga** fenomen.
  - Statistiska modeller bygger på **sannolikhetsmodeller**.
  - Att **kvantifiera osäkerheten** i en **prediktion**.
  - Hjälper till att fatta **optimala** beslut i en osäker värld.

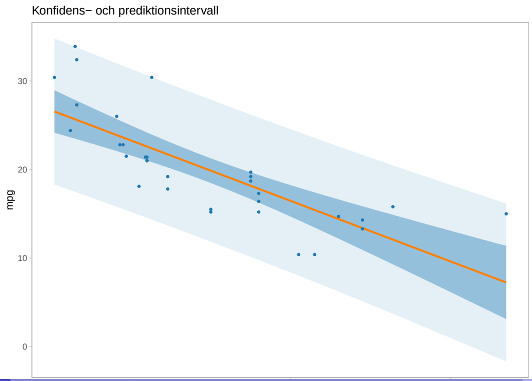


$\rightarrow$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
			0.01				0.99		

Sannolikheter för regression

- Hittills på kursen:
  - skattat **regressionslinjen**: $\hat{y} = b_0 + b_1 x$
  - **prediktion** för en ny observation: $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$
- Sannolikhetslära hjälper oss att göra ännu mer:
  - Om $b_1 \neq 0$, är x och y verkligen korrelerade? Från **stickprov** till **population**.
  - **Osäkerhetsintervall** för b_1 som troligen täcker det sanna värdet.
  - **Osäkerhetsintervall** för **prediktionen** $\hat{y}_i$



Försök, utfall och utfallsrum

- Vi utför ett **försök** (eng: trial): singlar slant.
- Observerar ett **utfall** (eng: outcome): Krona.
- **Utfallsrummet** är **alla möjliga** utfall: $S = \{\textbf{Krona}, \textbf{Klave}\}$
- Kast med tärning:

⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅

- Kast med två tärningar: Summan av antal prickar.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Händelser

- En **händelse** består av en mängd av **utfall**.
- Händelse A = {pricksumman är 7 vid två slagna tärningar}

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Händelser

- Händelse B = {samma antal prickar på två slagna tärningar}

$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	**2**	3	4	5	6	7
⚁	3	**4**	5	6	7	8
⚂	4	5	**6**	7	8	9
⚃	5	6	7	**8**	9	10
⚄	6	7	8	9	**10**	11
⚅	7	8	9	10	11	**12**

Sannolikhet

- Vi kan ju inte förutsäga ett enskild utfall från t.ex. ett tärningskast.
- Vi vill kvantifiera hur troligt ett utfall är med en **sannolikhet**.
- Vad är **sannolikheten** att få 6 prickar med en tärning?
  - Utfallsrum: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Händelse: $A = \{6\}$
  - Sannolikhet: $P(A)$. Måste uppfylla $0 \leq P(A) \leq 1$.

Tre sannolikhetsbegrepp

- **Logisk sannolikhet**: Fysiska egenskaper hos en tärning $\rightarrow$ samma sannolikhet för alla utfall

$$P(A) = \frac{\text{antal utfall i A}}{\text{totalt antal möjliga utfall}} = 1/6 \approx 1.667$$

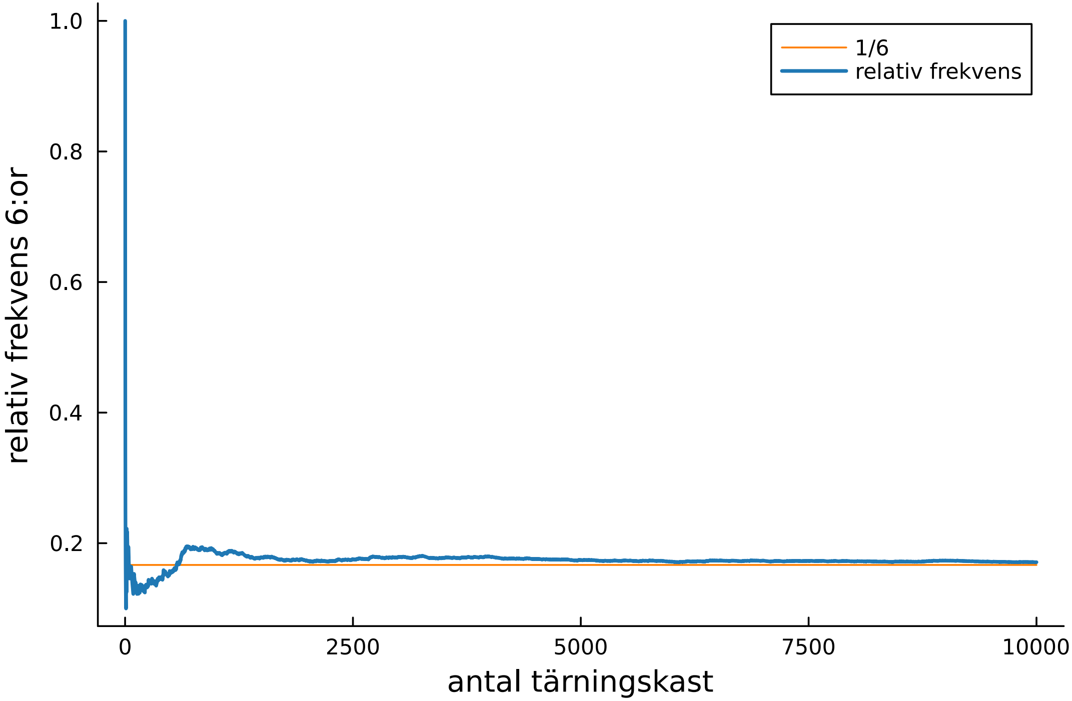
- **Empirisk sannolikhet**: Andelen 6:or om tärningen kastas "oändligt" många gånger.

$$P(A) = \frac{\text{antal gånger som A inträffar}}{\text{totalt antal försök}}$$

- **Subjektiv sannolikhet**: Min tidigare erfarenhet av tärningskast och min uppfattning om en tärnings symmetri säger mig att min sannolikhet att få en 6:a är $1/6 \approx 0.1667$.

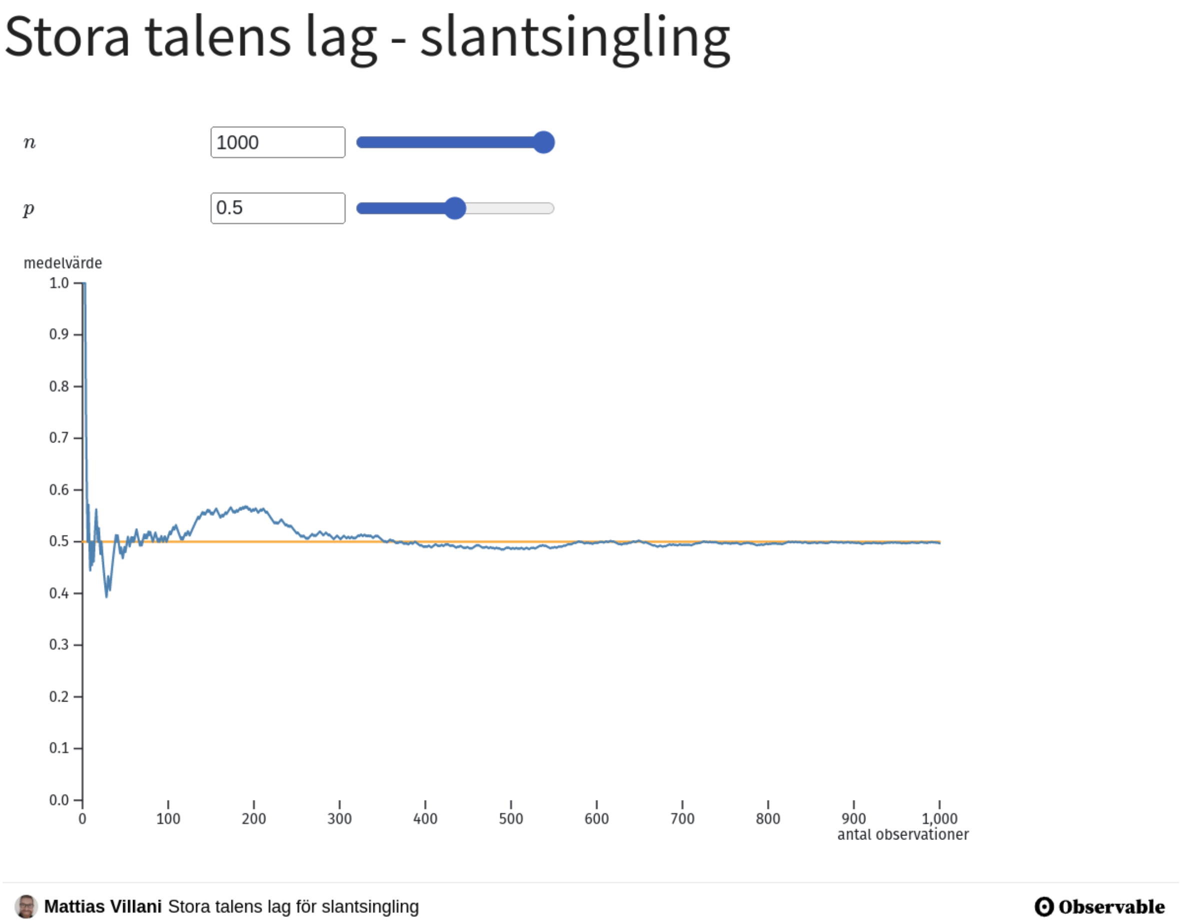
Stora talens lag

När vi upprepar ett slumpmässig försök om och om igen, stabiliseras andelen gånger ett visst utfall inträffar → ett tal.



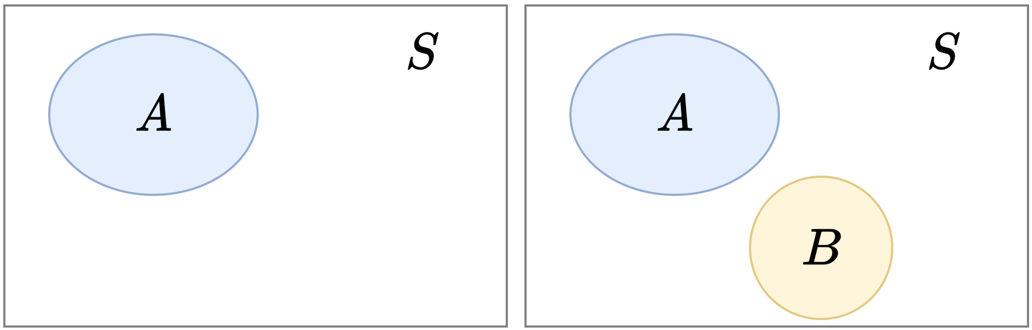
Samma sannolikhet vid varje försök och **oberoende** försök.

Stora talens lag - slantsingling



Venndiagram

- Praktiskt att visualisera händelser i ett **Venndiagram**.
- **Utfallsrummet** (allt som kan inträffa) visas med **rektangel**.
- **Händelser** ritas som **cirklar, ellipser eller rektanglar**.



(a) En händelse A (b) Två händelser A och B

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Venndiagram - kast med två tärningar

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Venndiagram - kast med två tärningar

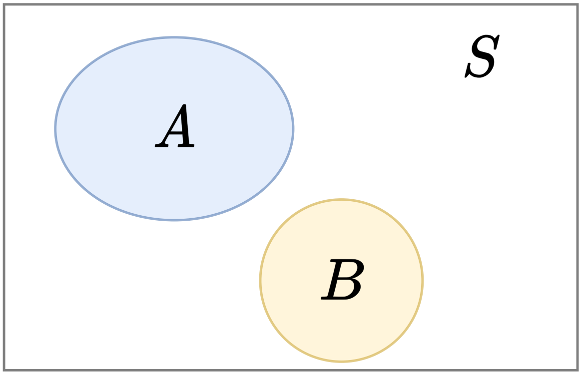
	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

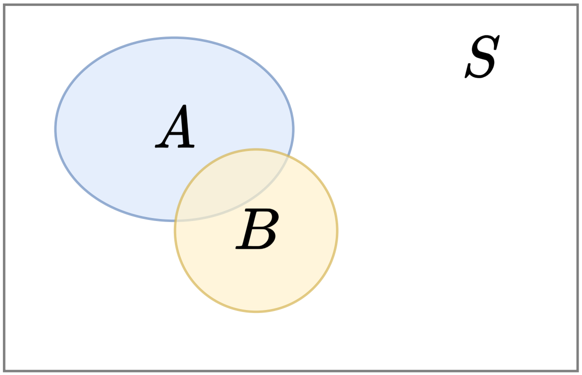
	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Disjunkta händelser



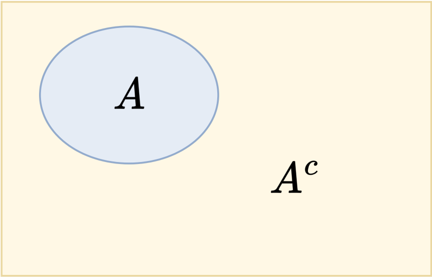
Disjunkta händelser inga gemensamma element.



Överlappande händelser med gemensamma element.

Komplementhändelse

- **Komplementet** till A inträffar när A **inte** inträffar.
- Skrivs A^c, där c = ”Complement”.

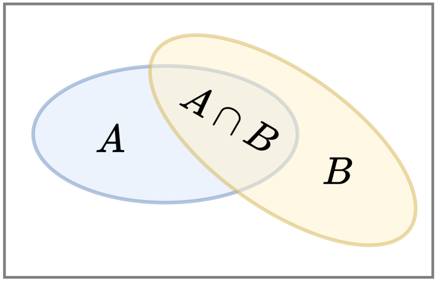


- **Exempel**: Tärningskast
  - $A = \{\text{udda antal prickar}\} = \{1, 3, 5\}$
  - $A^c = \{\text{jämnt antal prickar}\} = \{2, 4, 6\}$

- **Exempel**: Inflation
  - $A = \{\text{inflationen nänsta månad} \leq 2\} = \{1, 3, 5\}$
  - $A^c = \{\text{inflationen nänsta månad} > 2\} = \{2, 4, 6\}$

Snitthändelse

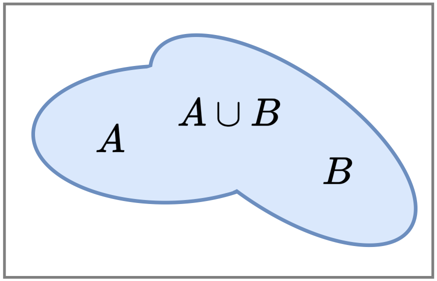
- **Snitthändelsen** är händelsen där **både** A och B inträffar.
- Skrivs A och B eller $A \cap B$.



- Två tärningskast:
  - $A = \{\text{samma antal prickar på båda tärningarna}\}$
  - $B = \{\text{summan av prickarna är tio}\}$
  - $A \cap B = \{\text{5:a på båda tärningarna}\}$
- Lågkonjuktur:
  - $A = \{\text{BNP-tillväxt kvartal } 1 < 0\}$
  - $B = \{\text{BNP-tillväxt kvartal } 2 < 0\}$
  - $A \cap B = \{\text{Negativ BNP-tillväxt två kvartal i rad}\}$
- Snitt av **disjunkta** mängder A och B kallas den **tomma mängden**, $A \cap B = \emptyset$.

Unionhändelse

- **Unionhändelsen** är händelsen där **A och/eller B** inträffar.
- **Minst** en av händelserna inträffar.



- **Exempel**: Universitetsstudier.
  - $A = \{\text{Kommer in på en kurs på betyg}\}$
  - $B = \{\text{Kommer in på en kurs på högskoleprov }\}$
  - $A \cup B = \{\text{Kommer in på kursen}\}$

Formell sannolikhet - med ord

1. En sannolikhet är ett tal mellan 0 och 1.
2. Sannolikheten för en händelse som **säkert** inträffar är 1.
3. Sannolikheten för att händelsen **inte** inträffar är 1 minus sannolikheten för att den inträffar.
4. Av två händelser som **inte kan inträffa** samtidigt är sannolikheten för att **åtminstone en** inträffar summan av båda händelsernas sannolikheter.
5. Sannolikheten att två oberoende händelser **båda** inträffar är lika med produkten av händelsernas sannolikheter.

Formell sannolikhet - matematisk

Sannolikheten $P(A)$, för händelse A på utfallsrummet S

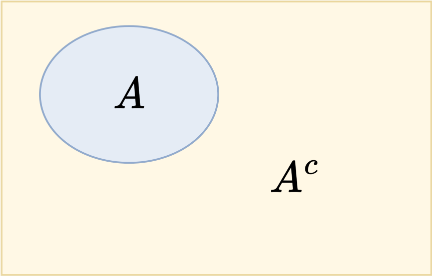
1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ om A och B är **disjunkta**
5. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ om A och B är **oberoende**

Komplementsregeln

- Händelserna A och A^c kan **inte** inträffa samtidigt; de är ju disjunkta.
- Någon av A och A^c **måste** då inträffa $\Rightarrow P(A) + P(A^c) = 1$

Komplementsregeln

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



- **Exempel (kodning)**: $A = \{\text{ingen bugg i koden}\}$, $A^c = \{\text{minst en bugg i koden}\} = \{\text{en bugg, två buggar}, \dots\} \Rightarrow$ $P(\{\text{minst en bugg i koden}\}) = 1 - P(\{\text{ingen bugg i koden}\})$

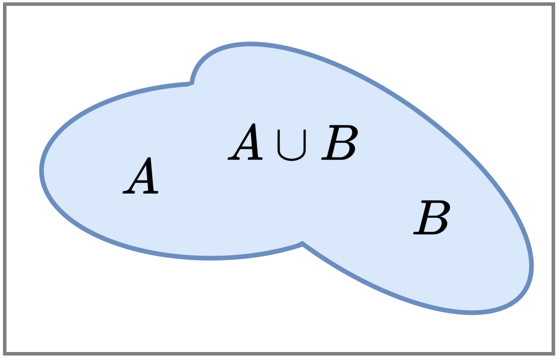
Allmänna additionsregeln

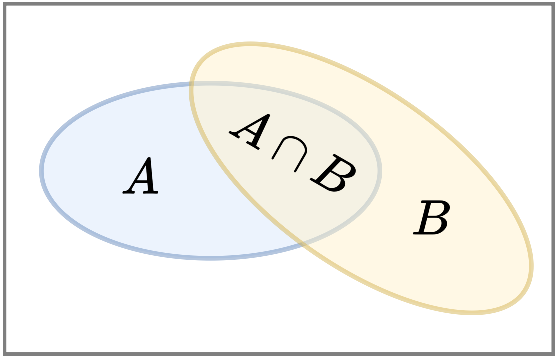
- **Additionsregeln**: A och B är disjunkta
  $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Allmänna additionsregeln

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

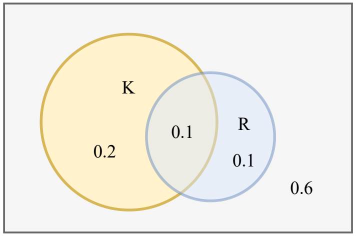
- Om inte snittet $A \cap B$ subtraheras, kommer det att räknas två gånger.





Exempel: Röst på socialdemokraterna (S)

- Låt $R = \{\text{En person röstar på S i riksdagsvalet}\}$, $P(R) = 0.2$.
- Låt $K = \{\text{En person röstar på S i kommunalvalet}\}$, $P(K) = 0.3$.
- Låt sannolikheten att personen röstar på S i båda valen vara $P(R \cap K) = 0.1$.
- Vad är sannolikheten att personen röstar på S i **åtminstone** ett av valen? Additionsregeln:
  $P(R \cup K) = P(R) + P(K) - P(R \cap K) = 0.2 + 0.3 - 0.1 = 0.4$
- Vad är sannolikheten för att personen inte röstar på S i något av valen?
  $P(R^c \cap K^c) = P((R \cup K)^c) = 1 - P(R \cup K) = 1 - 0.4 = 0.6$



Multiplikationssregeln för oberoende händelser

- Händelserna A och B är **oberoende** om vetskapen att B har inträffat **inte påverkar** sannolikheten för A. Och vice versa.

Allmänna additionsregeln

För **oberoende** händelser A och B gäller

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Hur beräknar man sannolikheten för snittet $A \cap B$ för händelser som inte är oberoende? Kommer i F12.

Multiplikationsregeln för oberoende händelser

- Vad är sannolikheten att få 2 st krona i rad vid slantsingling?

$$0.5 \cdot 0.5 = 0.5^2 = 0.25$$

- Vad är sannolikheten att få 5 st krona i rad vid slantsingling?

$$0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.5^5 = 0.03125$$

- 1 % risk att streaming laggar under en kväll. Oberoende kvällar.

$$P(\text{ingen lagg hela veckan}) = (1 - 0.01)^7 = 0.99^7 \approx 0.932.$$

Multiplikationsregeln för oberoende händelser

- Sannolikheten att dra två klöver ur en blandad kortlek?

$$P(\text{1:a kortet klöver}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{2:a kortet klöver } \textbf{givet} \text{ 1:a kortet klöver}) = \frac{12}{51}$$

$$P(\text{2:a kortet klöver } \textbf{givet} \text{ 1:a kortet } \textbf{inte} \text{ klöver}) = \frac{13}{51}$$

- $A = \{\text{klöver på 1:a}\}$ och $B = \{\text{klöver på 2:a}\}$ är inte oberoende.
- Svaret: $P(\text{1:a och andra kortet klöver}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}$, kommer i F12.
- Vad händer om vi lägger tillbaka första kortet innan vi drar det andra?

Röst på (S) - multiplikationsregeln

- Låt $\mathbf{R} = \{\text{En person röstar på S i riksdagsvalet}\}$, $P(\mathbf{R}) = 0.2$.
- Låt $\mathbf{K} = \{\text{En person röstar på S i kommunalvalet}\}$, $P(\mathbf{K}) = 0.3$.
- Låt sannolikheten att personen röstar på S i båda valen vara $P(\mathbf{R} \cap \mathbf{K}) = 0.1$.
- Är händelserna **R** och **K** **oberoende**? Vi måste undersöka om

$$P(\mathbf{R} \cap \mathbf{K}) \stackrel{?}{=} P(\mathbf{R}) \cdot P(\mathbf{K})$$

- Händelserna är inte oberoende:

$$P(\mathbf{R}) \cdot P(\mathbf{K}) = 0.2 \cdot 0.3 \neq 0.1 = P(\mathbf{R} \cap \mathbf{K})$$

Kombinatorik - på hur många olika sätt?

- **Exempel**: Vi väljer helt slumpmässigt fem kort från en kortlek med 52 kort (4 färger med 13 valörer). Vad är sannolikheten att få "färg"?

- Kombinatorik underlättar för att lösa detta och liknande problem.

- Antag att n personer ska ställa sig i kö. På hur många olika sätt kan detta utföras?

Kombinatorik - permutationer

- Första personen kan väljas på n olika sätt.
- Andra personen kan väljas på $n-1$ olika sätt, tredje personen på $n-2$ olika sätt osv.
- **Multiplikationsprincipen** säger då att det totala antalet sätt är $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$
- $n!$ sägs vara antalet möjliga **permutationer**.

Kombinatorik - permutationer

- **Exempel**: Nio löpare i ett lopp. Antalet möjliga sätt att bestämma prispallar? Multiplikationsprincipen $\rightarrow 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ olika sätt. Antal permutationer av 3 objekt valda bland 9.

- Vi betecknar antal **permutationer** av k objekt valda bland n, $(k \leq n)$, med ${}_nP_k$.

- ${}_nP_k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

- ${}_nP_k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$

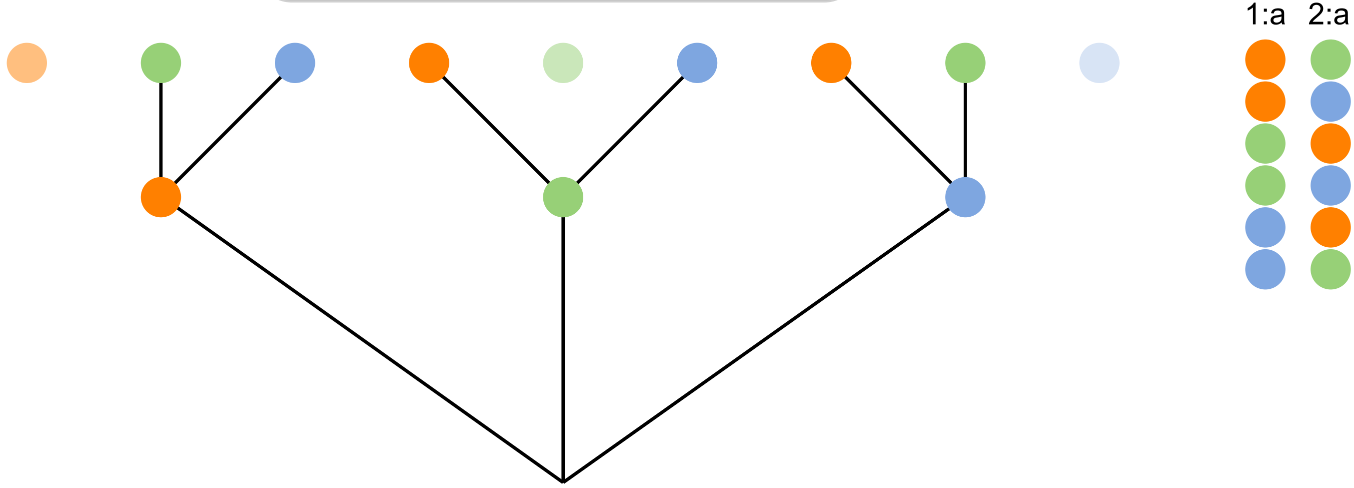
- **Exempel**: $n = 20, k = 10$
  ${}_{20}P_{10} = 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 11 = \frac{20!}{(20-10)!} = \frac{20!}{10!} = 670442572800.$

Utan återläggning, med hänsyn till ordning

välj $k = 2$ bland $n = 3$

utan återläggning - med hänsyn till ordning

$$ {}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6 $$



Kombinatorik - kombinationer

- **Exempel**: Välj tre kulor glass från fem olika smaker (nougat, lakrits, jordgubb, vanilj, choklad).
- ${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60$
- Men för den som beställer en glass spelar kanske ordningen ingen roll, permutationen ”jordgubb, vanilj, choklad” är likvärdig med ”jordgubb, choklad, vanilj”.
- Vi talar då om antal **kombinationer**.

Kombinatorik - kombinationer

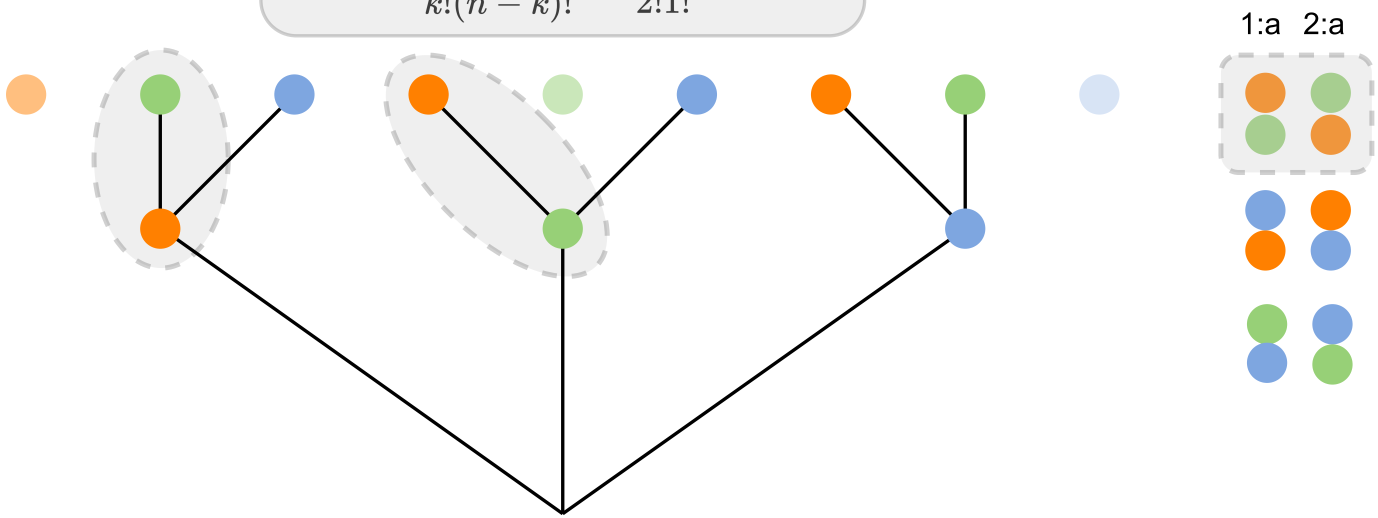
- Varje mängd av k objekt kan ju ordnas på $k!$ olika sätt.
- Därför får vi antal möjligheter till $\frac{n!}{(n-k)!}/k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Betecknas ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (även $\binom{n}{k}$).
- Antal **kombinationer** av k objekt som kan väljas bland n.
- Glass-exempel forts. ${}_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = 10$.

Utan återläggning, utan hänsyn till ordning

välj $k = 2$ bland $n = 3$

utan återläggning - utan hänsyn till ordning

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{3!}{2!1!} = 3 \text{ sätt}$$



Kombinationer - med återläggning

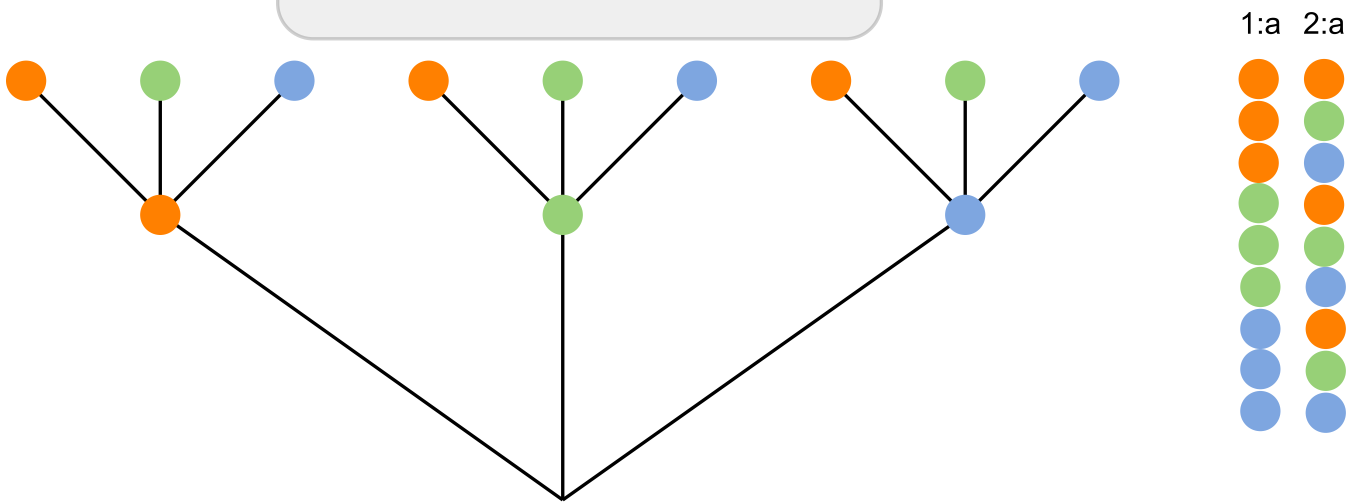
- **Exempel**: Hur många möjliga koder finns det på ett sifferlås med 4 ”platser” som kan ha siffrorna 0-9?
- Varje position i koden kan fyllas av 10 olika siffror (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
- Alltså kan första platsen ha 10 möjliga siffror, andra 10, tredje 10 och fjärde 10.
- $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$
- Allmänt gäller n^k

Med återläggning, med hänsyn till ordning

välj $k = 2$ bland $n = 3$

med återläggning - med hänsyn till ordning

$$n^k = 3^2 = 9$$



Kombinatorik

Hur många sätt att välja k element bland n element?

	med återläggning	utan återläggning
med ordning	n^k	${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
utan ordning	ej på kurs	${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Credits

Dessa slides är gjorda utifrån slides som skapades för kursen statistik och dataanalys 1 av Mattias Villani HT 2023, och har modifierats av Oscar Oelrich VT 2024, Oskar Gustafsson för VT 2025, och Jonas Bjermo VT 2026.