Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 14 - Sannolikhetsmodeller I

Oskar Gustafsson

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

Översikt

- **Bernoulliförsök**
- **Geometrisk fördelning**
- **Binomialfördelning**

Bernoulliförsök

- **Bernoulliförsök**
  1. Bara **två möjliga utfall**: lyckas/misslyckas.
  2. **Samma sannolikhet** för lyckas, p, i alla försök.
  3. **Oberoende försök**.
- Typexempel: **slantsingling**.
  - Lyckas = Krona, Misslyckas = Klave.
  - Sannolikhet $p = 0.5$ för schysst mynt.
  - Utfall på en singling beror inte på andra singlingar.

Bernoulliförsök forts.

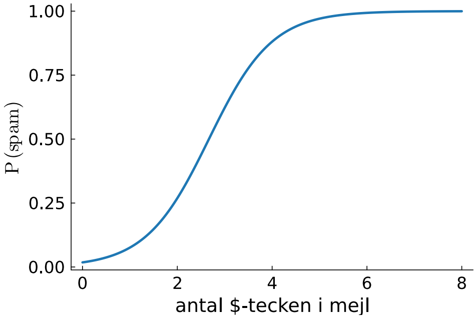
- Lyckas/Misslyckas är bara en benämning utan någon mänsklig värdering.
- Samma med positivt/negativt resultat.
- Död/Levande. Hel/Trasig. Spam/Ham.

⚠ Utan återläggning $\Rightarrow$ inte samma p i olika försök:

  - $P(\text{1:a kortet } \spadesuit) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
  - $P(\text{2:a kortet } \spadesuit) = \frac{12}{51}$ om 1:a $\spadesuit$ eller $\frac{13}{51}$ om 1:a $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$.
  - Vi bryter emot både regel 2 och 3 på föregående sida.

Motivation - regression med binära y-variabler

- Bernoulli-fördelning med **samma sannolikhet** p.
- Spamdata: lära oss om $p = P(\text{spam})$ från data. $\hat{p} = 0.9$. 🙄
- **Spam-filter**: ska datorn skicka **just detta mejl** till Spam?
- SDAII: **Logistisk regression** där spam sannolikheten p **beror på förklarande variabler**, som i regression. 😘

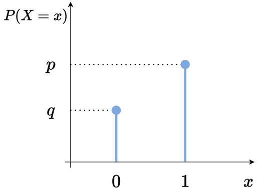


Bernoullifördelning

- Två möjliga utfall: lyckad/misslyckad. **Binär variabel**.
- Vi kan koda **lyckat = 1**, **misslyckat =0**.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{om Bernoulli-försök lyckat} \\ 0 & \text{om Bernoulli-försök misslyckat} \end{cases}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{för } x = 1 \\ q = 1 - p & \text{för } x = 0 \end{cases}$$



- **Väntevärde** och **Varians**

$$E(X) = \mu = \sum_{\text{alla } x} x \cdot P(x) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1)$$
$$= 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$Var(X) = \sum (x - \mu)^2 \cdot P(x) = (0 - p)^2 \cdot q + (1 - p)^2 \cdot p$$
$$= p^2 q + q^2 \cdot p = pq(\underbrace{p + q}_{1}) = pq$$

Exempel - Basketspelarens straffkast

- Situation: En basketspelare kastar ett straffkast.
  - Lyckas = Träff. Misslyckas = Miss.
  - Sannolikheten att spelaren sätter sit kast är $p = 0.8$.
  - Sannolikheten för att misslyckas är $q = 1 - p = 0.2$.
- Slumpvariabeln X:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{om spelaren träffar, med } P(X = 1) = p = 0.8 \\ 0 & \text{om spelaren missar, med } P(X = 0) = q = 0.2 \end{cases}$$

- Väntevärde $E(X)$:
  - $E(X) = \sum_{\text{alla } x} x \cdot P(x) = (1 \cdot p) + (0 \cdot q)$
  - $E(X) = (1 \cdot 0.8) + (0 \cdot 0.2) = 0.8$
  - Tolkning: I genomsnitt 0.8 poäng per kast.
- Varians Var(X):
  - $Var(X) = p \cdot q$
  - $Var(X) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$
  - Tolkning: Ett mått på osäkerheten i varje kasts utfall.

Geometrisk fördelning

- Email: **spam** eller **ham** (icke-spam). **Lyckas = ham**.
  - $P(\text{ham}) = p = 0.1, P(\text{spam}) = q = 1 - 0.1 = 0.9.$
- Hur många mejl måste du öppna tills du får ditt första ham?

$$P(\text{första ham på fjärde mejlet}) = \overbrace{\underbrace{0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9}_{3 \text{ spam}} \cdot \underbrace{0.1}_{\text{ham}}}^{\text{gånger pga oberoende}} = 0.9^3 \cdot 0.1 = 0.0729$$

- Vad är sannolikheten för x st mejl tills första ham?

$$P(\text{första ham på } x\text{:te mejlet}) = 0.9^{x-1} \cdot 0.1$$

Geometrisk fördelning

- **Geometrisk slumpvariabel** från Bernoulliförsök

$$X = \text{antal försök } \textbf{\textit{tills första lyckade}} \text{ inträffar}$$

- **Geometrisk fördelning**

$$P(X = x) = q^{x-1}p, \qquad \text{för } x = 1, 2, \ldots$$

⚠ X **inkluderar** försöket där du först lyckas.
Wikipedia kallar detta för för-första-gången-fördelning.

Geometrisk fördelning

Geometrisk fördelning

p : 0.5

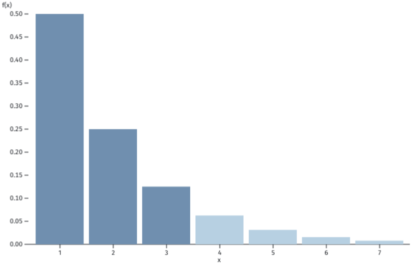
Kvantil: 3

Om $X \sim \text{Geo}(0.5)$ så gäller att

$$E(X) = \frac{1}{p} = 2.00$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = 0.250$$

$$P(X \leq 3) = 0.8750$$



Mattias Villani Geometrisk fördelning

Observable

Geometrisk fördelning i R

- $X \sim \text{Geom}(p = 0.4)$. Sannolikheten p kallas `prob` i R.

Beräkning	R kommando
$P(X = 2)$	`dgeom(x = 2, prob = 0.4)`
$P(X \leq 2)$	`pgeom(q = 2, prob = 0.4)`
Kvantil	`qgeom(p = 0.5, prob = 0.4)`
10 slumptal	`rgeom(n = 10, prob = 0.4)`

⚠ R använder Wikipedias definition av geometrisk fördelning. X räknar **antalet misslyckade försök** **innan** första lyckade. Fix:

```
y = rgeom(n = 100, prob = 0.5) # y is number of trials BEFORE first success
x = y + 1                      # x is number of trials INCLUDING first success
```

- Se programkoden geometric.R på kurssidan.

Basketspelarens straffkast, forts.

- Vi har samma basketspelare, men nu definierar vi ett "lyckat" försök som en miss.
  - Sannolikheten för att "lyckas" är nu $p = P(Miss) = 0.2$.
  - Sannolikheten för att "misslyckas" (dvs. att träffa) är $q = P(Träff) = 0.8$
- Y är antalet kast som krävs för att få den första **missen**.
- $E(Y) = 1/p = 1/0.2 = 5$
- **Tolkning:** Vi förväntar oss att det i genomsnitt krävs $Y = 5$ kast innan spelaren missar för första gången.
- $Var(Y) = q/p^2 = 0.8/0.2^2 = 0.8/0.04 = 20$
- **Tolkning:** Variansen är nu mycket högre nu! Det betyder att det är mycket större osäkerhet kring när den första missen kommer.

Binomialfördelning

- **Geometrisk** fördelning:
  - Hur många Bernoulli-**försök tills första lyckade**?
  - Antal försök är slumpmässigt.
- **Binomialfördelning**:
  - **Hur många lyckade** i n Bernoulli-försök med sannolikhet p.
  - **Antal försök** n är **förbestämt** och fixerat.
  - Antal lyckade är slumpmässigt.
- Vi skriver $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ och säger att: "X är **binomialfördelad** med **parametrar** n och p."
- **Binomial: summan av n oberoende Bernoullivariabler**

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

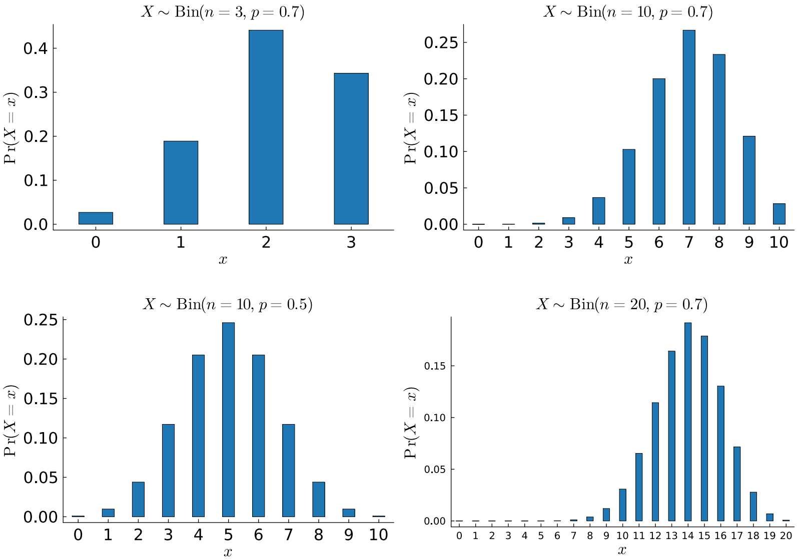
Binomialfördelning

- Exempel 1: $n = 3$ försök med resultat:
  $X_1 = 1$ (Krona första), $X_2 = 1$ (Krona andra) och $X_3 = 0$ (Klave tredje).
  $$X = 1 + 1 + 0 = 2 \text{ st lyckade (Krona).}$$
- Exempel 2: observera $n = 5$ förbipasserande bilar, våra Bernoulli fördelade variabler, $Y_1, \ldots, Y_5$, antar värdet 1 om bilen är vit, 0 annars.
- Experimentet resulterade i:
  $Y_1 = 1$ (vit bil), $Y_4 = 1$ (vit bil) och övriga bilar inte vita.

$$\text{Slumpvariabel: } X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ antalet vita bilar.}$$

$$\text{Utfall: } x = \sum_{i=1}^{n} y_i = 2 \text{ vita bilar.}$$

Binomialfördelning



Binomialfördelning - väntevärde

- Väntevärde i en binomialfördelning? 😱

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot P(x)$$

Väntevärde - summa av slumpvariabler.

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

- Väntevärde för varje Bernoulli-variabel: $E(X_i) = p$.

- **Väntevärde för $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$**

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = \underbrace{p + p + \ldots + p}_{n \text{ st}} = np$$

Binomialfördelning - varians

- Varians i en binomialfördelning? 😱😱😱

$$Var(X) = \sum_{x=0}^{n} (x-\mu)^2 \cdot P(x)$$

Varians - summa av oberoende slumpvariabler.

$$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n)$$

- Bernoulliförsök är oberoende. ☑
- Varians för varje Bernoulli-variabel: $Var(X_i) = pq$.
- **Varians för** $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

$$Var(X) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n) = \underbrace{pq + pq + \ldots + pq}_{n \text{ st}} = npq$$

Binomialfördelning - interaktivt

Binomialfördelningen

n : 10

p : 0.5

Kvantil: 3

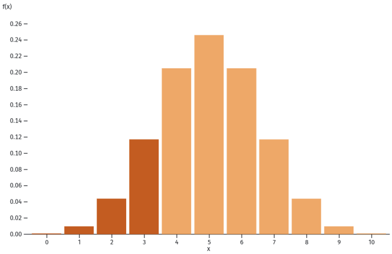
Visa normalapproximation

Om $X \sim \text{Binom}(10, 0.5)$ så gäller att

$$E(X) = np = 5.00$$

$$Var(X) = np(1-p) = 2.50$$

Exakt: $P(X \leq 3) = 0.1719$



Mattias Villani Binomialfördelningen

Observable

Binomialfördelningens sannolikheter

- Om $X \sim \text{Bin}(n, p)$ - vad är egentligen $P(X = x)$?
- Sannolikheten att få $\{1, 1, 0\}$ i $n = 3$ försök?

$$p \cdot p \cdot q = p^2 q^1$$

- Det finns dock **flera sätt att få $X = 2$** i $n = 3$ försök:

1:a försök	2:a försök	3:e försök	X	$P(X = x)$
1	1	0	2	p^2q
1	0	1	2	p^2q
0	1	1	2	p^2q

- Eftersom dessa tre olika sätt att få $X = 2$ är **disjunkta**:

$$P(X = 2) = 3 \cdot p^2 q$$

- På samma sätt

$$P(X = 0) = P(\{0, 0, 0\}) = 1 \cdot q^3$$
$$P(X = 1) = P(\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}) = 3 \cdot pq^2$$
$$P(X = 2) = P(\{1, 1, 0\}, \{1, 0, 1\}, \{0, 1, 1\}) = 3 \cdot p^2 q$$
$$P(X = 3) = P(\{1, 1, 1\}) = 1 \cdot p^3$$

Binomialfördelningens sannolikheter

- **Sannolikhetsfördelning** $X \sim \mathrm{Bin}(3, p)$

x	0	1	2	3
$P(x)$	q^3	$3 \cdot pq^2$	$3 \cdot p^2 q$	p^3

- Kolla att summan av alla sannolikheter är ett:

$$q^3 + 3 \cdot pq^2 + 3 \cdot p^2 q + p^3 = (p+q)^3 = 1^3 = 1$$

- Allmänna fallet $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

$$P(X = x) = {}_nC_x \cdot p^x q^{n-x}$$

- ${}_nC_x$ är antalet sätt ordna x st 1:or bland n observationer.

Hur många sätt att välja k element bland n element?		
	med återläggning	utan återläggning
med ordning	n^k	${}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
utan ordning	ej på kurs	${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Binomialfördelningen bilexemplet

- Exempel 2: observera $n = 5$ förbipasserande bilar, våra Bernoulli fördelade variabler, $Y_1, \ldots, Y_5$, antar värdet 1 om bilen är vit, 0 annars. Antag att sannolikheten att observera en vit bil (lyckat försök) är $p = 0.3$
- Vad är sannolikheten att vi observerar exakt 2 vita bilar, $P(X = 2)$, som i exemplet?

$$P(X = 2) =_n C_x p^x q^{(n-x)} = \frac{n!}{(n-x)!x!}(1-p)^{(n-x)} p^x$$
$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{(3 \times 2) \times 2}(1-0.3)^{(5-2)} 0.3^2 = \frac{120}{12} 0.7^3 0.3^2 = 0.3087$$

- Vad är väntevärde och varians för antal bilar?
- Bara att använda formelbladet! $E(X) = np = 5 \times 0.3 = 1.5$ och $V(X) = npq = 5 * 0.3 * 0.7 = 1.05$

Approximera binomialfördelning med normal

- Om $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ så

$$E(X) = \mu = np$$

och

$$SD(X) = \sigma = \sqrt{npq}$$

- **Normalapproximation** av binomialfördelning

$$X \overset{\text{approx}}{\sim} N(np, \sqrt{npq})$$

- Approximationen är tillräckligt bra om

$$np \geq 10 \text{ och } nq \geq 10$$

- Man kan också gör en **kontinuitetskorrektion** som korrigerar för att vi approximerar en diskret fördelning (binomial) med en kontinuerlig (normal), see SDM-boken kapitel 15.5.

Normalapproximation av binomial - interaktivt

Binomialfördelningen

n : 10

p : 0.5

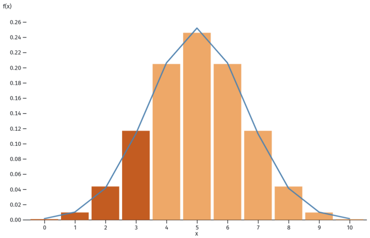
Kvantil: 3

Visa normalapproximation ☑

Om $X \sim \text{Binom}(10, 0.5)$ så gäller att

$$E(X) = np = 5.00$$
$$Var(X) = np(1-p) = 2.50$$

Exakt:	$P(X \leq 3) = 0.1719$
Normal approx:	$P(X \leq 3) = 0.1030$
Normal approx med kontinuitetskorrektion:	$P(X \leq 3) = 0.1714$



Mattias Villani Binomialfördelningen

Observable

Credits

Dessa slides skapades för kursen statistik och dataanalys 1 av Mattias Villani HT 2023, och har modifierats av Oscar Oelrich VT 2024, och Oskar Gustafsson för VT 2025.