Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 16 - Sannolikhetsmodeller för kontinuerliga variabler

Mattias Villani

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

mattiasvillani.com @matvil @matvil mattiasvillani

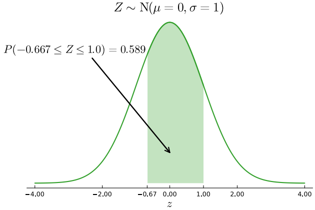
Översikt

- **Likformig fördelning**
- **Normalfördelning**
- **Poissonfördelning**
- **Exponentialfördelning**
- **Student-t**

Kontinuerliga slumpvariabler och täthetsfunktionen

- **Kontinuerlig slumpvariabel** antar alla värden, men $P(X = x) = 0$ för alla x! 🤯
- **Täthetsfunktion**: $f(x)$.
- Positiv $f(x) > 0$ för alla x.
- Täthetsfunktion ger **inte** sannolikheter. OK om $f(x) > 1$.
- **Täthetsfunktionen** används för att **beräkna sannolikheter**:

$$P(a \leq X \leq b) = \text{arean under } f(x) \text{ mellan } a \text{ och } b$$



- **SDAIII**: räkna arean under funktion med **integration**.

Likformig fördelning

Likformig fördelning

a : 0

b : 1

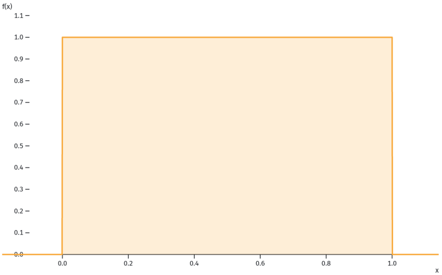
Kvantil: 1

Om $X \sim \text{Uniform}(0,1)$ så gäller att

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = 0.500$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = 0.0833$$

$$P(X \leq 1) = 1.000$$



Mattias Villani Likformig fördelning

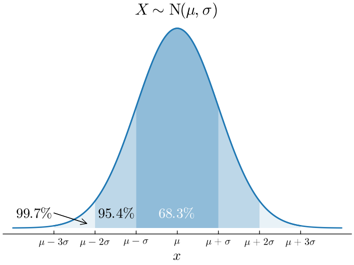
Observable

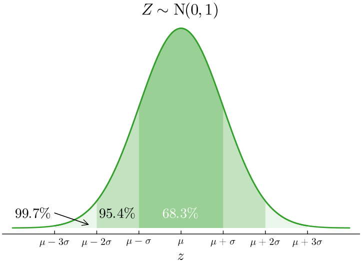
Normalfördelning

- $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$E(X) = \mu$$
$$SD(X) = \sigma$$

- **68-95-99.7% regeln**





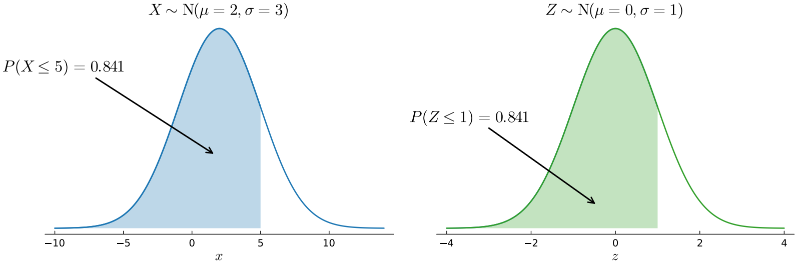
Normalfördelning - standardisering

- **Standardisering**

$$X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

- **Sannolikhet via standardisering** för $X \sim N(2, 3)$

$$P(X \leq 5) = P(X - 2 \leq 5 - 2) = P\left(\frac{X - 2}{3} \leq \frac{5 - 2}{3}\right) = P(Z \leq 1)$$

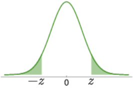


Normalfördelning - Z-tabell

Normalfördelning

Tabellen ger sannolikheten $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ för olika z där Z är standardnormal, $Z \sim N(0,1)$.
Sannolikheter i den vänstra svansen fås genom symmetri: $P(Z \leq -z) = 1 - P(Z \leq z)$.

Symmetri



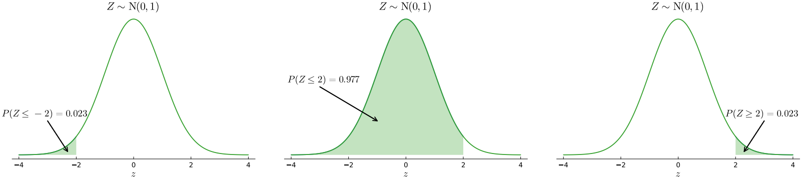
Andra decimalen i z

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

Normalfördelning - symmetri

- **Negativa z-värden** finns inte i Z-tabellen.
- Vi utnyttjar normalfördelningens **symmetri** för negativa z

$$P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2)$$



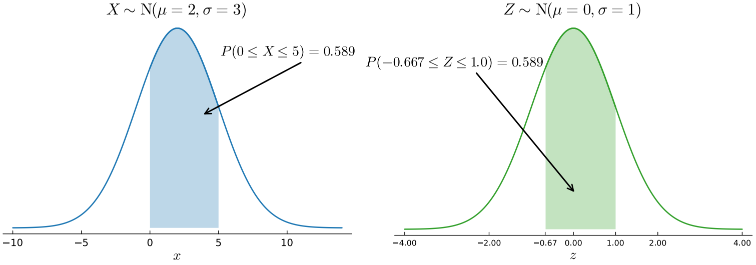
Normalfördelning - intervall via standardisering

- **Sannolikhet via standardisering** för $X \sim N(2,3)$

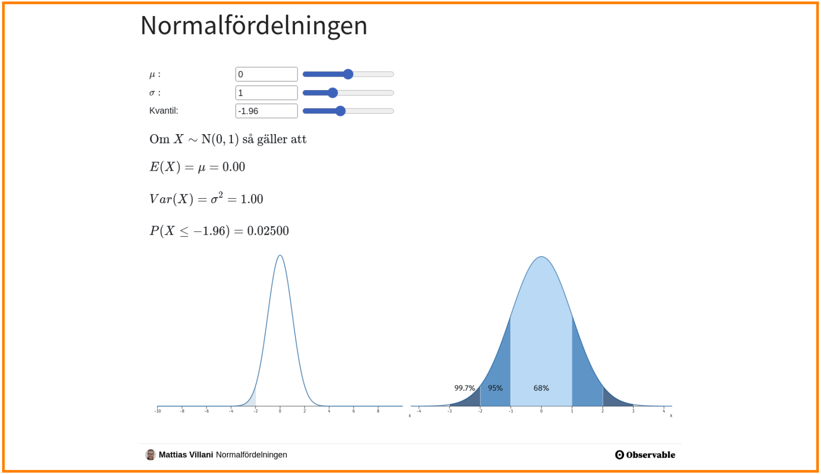
$$P(0 \leq X \leq 5) = P\left(\frac{0-2}{3} \leq \frac{X-2}{3} \leq \frac{5-2}{3}\right)$$
$$= P(-0.667 \leq Z \leq 1)$$
$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0.667)$$

och pga **symmetri**

$$P(Z \leq -0.667) = 1 - P(Z \leq 0.667)$$



Normalfördelningen - interaktivt



Normalfördelning - egenskaper

Linjärkombination av normalfördelad slumpvariabel.

Om $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ och $Y = c + aX$ så gäller

$$Y \sim \mathrm{N}(c + a\mu,\ |a|\sigma)$$

Summa av oberoende normalfördelade slumpvariabler.

Om $X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X)$ och $Y \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ är oberoende slumpvariabler så är även summan normalfördelad:

$$X + Y \sim \mathrm{N}(\mu_X + \mu_Y,\ \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2})$$

- **Fördelningarna** för linjärkombination och summa är **normal**!
- Summan är fortfarande normal om X **och** Y **är beroende**.

Poissonfördelning

- **Poissonfördelningen** är en fördelning för **räknedata** (antal).
- Om $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ så

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad \text{för } x = 0, 1, 2, ...$$

- $e \approx 2.71$ är Eulers tal.
- Poisson har samma **väntevärde** och **varians**:

$$E(X) = \lambda$$
$$Var(X) = \lambda$$

- Exempel:
  - antal buggar i en mjukvara
  - antal budgivare i en eBay auktion
  - antal besök till läkaren

Poissonfördelning - interaktivt

Poissonfördelningen

λ : 2

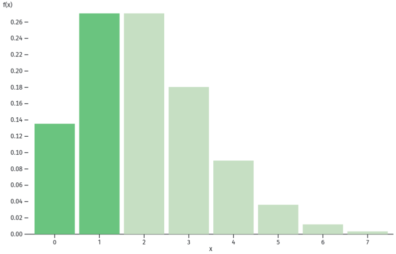
Quantile: 1

If $X \sim \text{Poisson}(2)$ then

$E(X) = \lambda = 2.00$

$Var(X) = \lambda = 2.00$

$P(X \leq 1) = 0.4060$



Mattias Villani Poisson distribution

Observable

Poissonfördelning för antal bud på eBay

- Data från 1000 **eBay-auktioner av samlarmynt**.
- `nBids` är **antalet budgivare** i en given auktion.
- Olika värdefulla och olika reservationspris (lägsta pris).
- Fokus här på de 550 observationer med lägst reservationspris.
- **Modell** för `nBids`: $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{ober}}{\sim} \mathrm{Pois}(\lambda)$.

	nBids	PowerSeller	VerifyID	Sealed	Minblem	MajBlem	LargNeg	LogBook	MinBidShare	Sold	low_res_price
1	2	0	0	0	0	0	0	-0.224	-0.209	True	low
2	6	1	0	0	0	0	0	0.607	-0.348	True	low
3	1	1	0	0	0	0	0	0.033	0.442	True	high
4	1	0	0	0	1	0	0	0.376	0.144	True	high
5	4	0	0	0	0	0	1	1.435	-0.41	True	low
6	2	0	0	0	0	0	0	-0.914	0.632	True	high
7	2	0	0	0	1	0	0	-0.248	0.295	True	high
8	2	0	0	0	0	0	0	-0.914	0.632	True	high
9	2	1	0	0	0	0	0	0.511	0.055	True	high
10	6	0	0	1	0	0	0	-0.362	0.025	True	high
11	0	1	0	0	0	0	0	-0.224	0.477	False	high

Wegmann, B. och Villani, M. (2011). Bayesian Inference in Structural Second-Price Common Value Auctions, *Journal of Business and Economic Statistics*

Punktskattning av modellparametrar

- Modell för `nBids`: $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{ober}}{\sim} \mathrm{Pois}(\lambda)$.
- Hur väljer vi parametern λ? **Punktskattning**. **Estimat**. $\hat{\lambda}$.
- **Momentmetoden**: Eftersom $\lambda = E(X)$ så är $\hat{\lambda} = \bar{x}$ rimligt.
- **Maximum likelihood**: välj det λ som maximerar sannolikheten för datamaterialet. 😍
- Maximum likelihood-metoden funkar för alla modeller. 😎

Maximum likelihood för Poisson - interaktivt

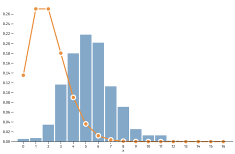
Maximum likelihood estimation - Poissonfördelning

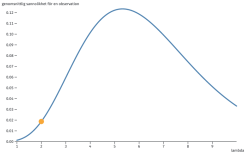
Modell: $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{\text{ober}}{\sim} \text{Pois}(\lambda)$

λ : 2

Visa maximum likelihood anpassning

Medelsannolikhet för observerad data med modellen Pois(λ = 2) är 0.01872





Mattias Villani Maximum likelihood - Poissonmodellen

Observable

Exponentialfördelning

- Om $X \sim \mathrm{Expon}(\lambda)$ så är **täthetsfunktionen**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ för } x > 0$$

- **Väntevärde** och **varians**

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ och } Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- **Exponentialfördelning** vanlig modell för **väntetider**.
  - Tid mellan samtal till stödlinje.
  - Tid mellan mjukvarureleaser.
- Exponential och Poisson-fördelningen hänger ihop:
  - Om **antalet samtal** till stödlinje per timme är $\mathrm{Poisson}(\lambda = 6)$ så förväntar vi oss $\lambda = 6$ st samtal i timmen.
  - Då är **tiden mellan samtal** $\mathrm{Expon}(\lambda = 6)$ och vi förväntar oss $1/\lambda = 1/6$ timmar (10 minuter) mellan samtal.

Exponentialfördelning

Exponentialfördelningen

λ : 1.01

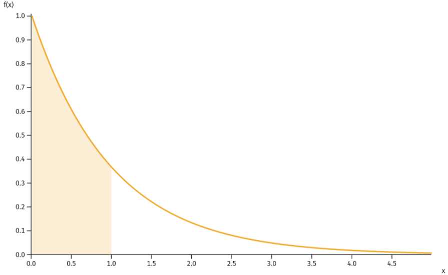
Kvantil: 1

Om $X \sim \text{Expon}(1.01)$ så gäller att

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 0.990$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 0.980$$

$$P(X \leq 1) = 0.6358$$



Mattias Villani Exponentialfördelningen

Observable

Exponentialfördelning i R

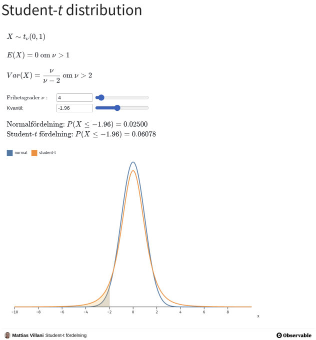
- $X \sim \text{Expon}(\lambda = 3)$. Parametern λ kallas `rate` i R.

Beräkning	R kommando	Kommentar
$f(0.5)$	`dexp(x = 0.5, rate = 3)`	$f(x)$ vid $x = 0.5$
$P(X \leq 0.5)$	`pexp(q = 0.5, rate = 3)`	
Kvantil	`qexp(p = 0.5, rate = 3)`	Medianen
10 slumptal	`rexp(n = 10, rate = 3)`	

- **Täthetsfunktion** heter **density function** på engelska. Därav namnet `dexp`.
- Se programkoden exponential.R på kurssidan.

Student-t fördelning (standard)

- $X \sim t_\nu(0,1)$ är en **student-*t*** fördelning med ν **frihetsgrader**.
- **Kontinuerliga symmetriska** variabler över $(-\infty, \infty)$.
- Student-t har mer sannolikhet på **extrema utfall**.
- **Student-*t*** fördelning blir alltmer lik normal när ν ökar.



Varför student-t är viktig för inferens

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende data from $N(\mu, \sigma^2)$.
- Stickprovmedelvärdet

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

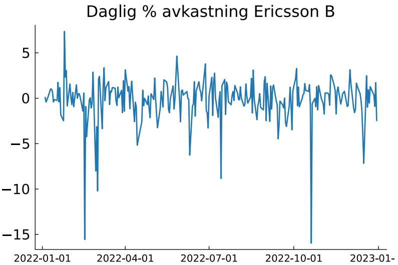
- Inferens: fördelningen för det **standardiserade medelvärdet**

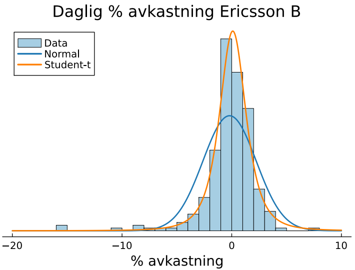
$$\frac{\bar{X} - \mu}{SD(\bar{X})}$$

- Om variansen i populationen σ^2 **är känd** så är det **standardiserade medelvärdet normalfördelat**.
- Om variansen i populationen σ^2 **är okänd**, och måste skattas med s^2, så är det **standardiserade medelvärdet student-t fördelad** med $\nu = n - 1$ frihetsgrader.

Student-t som modell för aktieavkastning

- Daglig avkastning Ericsson B aktie under hela år 2022. sda1 ericsson
- Finansiella data har ofta extremvärden. **Tunga svansar**.
- Maximum likelihood: $\mu = 0.094$, $\phi = 1.279$ och $\nu = 2.706$.





Allmän Student-t fördelning för datamodellering

Allmän Student-t distribution

$X \sim t_\nu(\mu, \phi^2)$

$E(X) = \mu$ om $\nu > 1$

$Var(X) = \frac{\nu}{\nu - 2}\phi^2$ om $\nu > 2$

Läge μ :	2
Skala ϕ :	1.5
Frihetsgrader ν :	4
Kvantil:	0

visa normalfördelning ☐

Student-t fördelning: $P(X \leq 0) = 0.1266$