Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 18 - Hypotestest

Oscar Oelrich

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

Översikt

- **Hypotestest för en andel**
- **Hypotestest för ett väntevärde**

Exempel: trasiga mobilskärmar

- Ett företag producerar skärmar till mobiltelefoner.
- 15% av skärmarna får pixeldefekter och måste kasseras.
- Ny teknik. Stickprov: $n = 160$ skärmar. 14 var defekta.
- Bör företaget köpa in den nya tekniken?

- **Modell** för nya tekniken: $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$.
- Skattning: $\hat{p} = \frac{14}{160} = 0.0875$
- Verkar bättre, men kan vara **slumpen i detta stickprov**.
- Hur sannolikt är det att få $\hat{p} = 0.0875$ om $p = 0.15$?

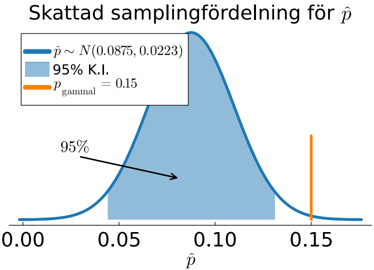
Konfidensintervall för andelen trasiga skärmar

- **Samplingfördelning** (check: $n\hat{p} = 14 \geq 10$, $n\hat{q} = 146 \geq 10$)

$$\hat{p} \overset{\text{approx}}{\sim} N(p, SD(\hat{p}))$$

- $SD(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ skattas med **standardfelet** $SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$.
- **95% konfidensintervall för p**

$$\hat{p} \pm z_{0.025} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.0875 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.0875 \cdot (1 - 0.0875)}{160}} \approx (0.049, 0.139)$$



- Den sanna samplingfördelningen för $\hat{p}$ beror på okända p. 🙃

Hypotestest för andelen trasiga skärmar

- Företaget vill fatta beslut: köpa ny teknik eller inte?
- **Nollhypotes** (H_0): ny teknik lika bra som gamla.
- **Alternativhypotes** (H_A): ny teknik **inte** lika bra som gamla.

$$H_0 : p = 0.15 \qquad\qquad H_0 : p = p_0$$
$$H_A : p \neq 0.15 \qquad\qquad H_A : p \neq p_0$$

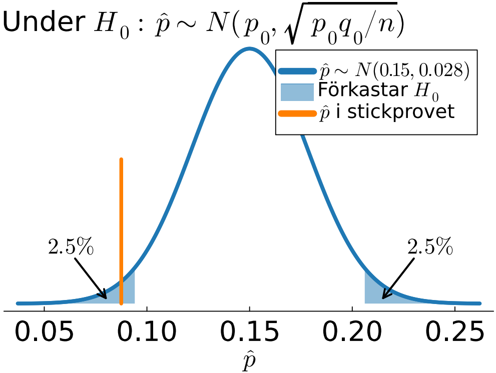
- Hur sannolikt är $\hat{p} = 0.0875$ i stickprov **om** $p = 0.15$?
- Samplingfördelning **om H_0 är sann**

$$\hat{p} \overset{\text{approx}}{\sim} N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

- **Antag att nollhypotesen är sann**, dvs $p = 0.15$

$$\text{Under } H_0 : \ \hat{p} \overset{\text{approx}}{\sim} N\left(0.15, \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{160}}\right) = N(0.15, 0.028)$$

Hypotestest för andelen trasiga skärmar



- Ett stickprov med $\hat{p} = 0.0875$ är osannolikt **om H_0 är sann** ($p = 0.15$). Vi tror därför inte på H_0.

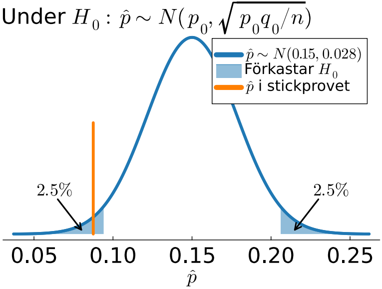
Hypotestest för andelen trasiga skärmar

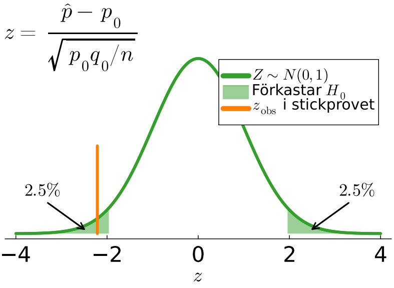
- **Samplingfördelning under H_0**

$$\hat{p} \overset{\text{approx}}{\sim} N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

- **Standardiserad samplingfördelning under H_0**

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \sim N(0,1)$$





Hypotestest för andelen trasiga skärmar

- **Teststatistika under H_0**

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \sim N(0,1)$$

- **Observerad teststatistika** i stickprovet

$$z_{\text{obs}} = \frac{0.0875 - 0.15}{\sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{160}}} = -2.214$$

- **Kritiskt värde** från $N(0,1)$

$$z_{\text{crit}} = z_{0.025} = 1.96$$

- Förkastar H_0 om $z_{\text{obs}} < -1.96$ eller $z_{\text{obs}} > 1.96$.
- Förkastar H_0 om $|z_{\text{obs}}| = 2.214 \geq z_{\text{crit}} = 1.96$.
- $|z_{\text{obs}}|$ eftersom förkastar i båda svansarna. **Dubbelsidigt test**.
- **Förkastar** H_0 på 5% signifikansnivå.

Hypotestest för andelen trasiga skärmar

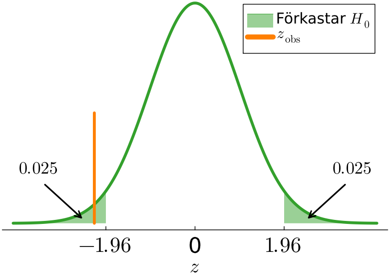
- **Observerad teststatistika** i stickprovet

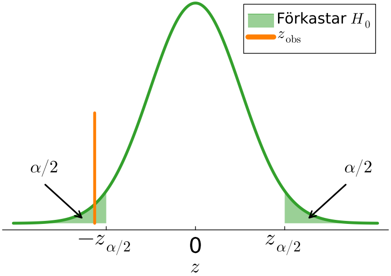
$$z_{\text{obs}} = -2.214$$

- **Kritiskt värde** från $N(0, 1)$

$$z_{\text{crit}} = z_{0.025} = 1.96$$

- $|z_{\text{obs}}| \geq z_{\text{crit}} \implies$ **förkastar** H_0 på 5% signifikansnivå.





Alternativ approach: p-värde

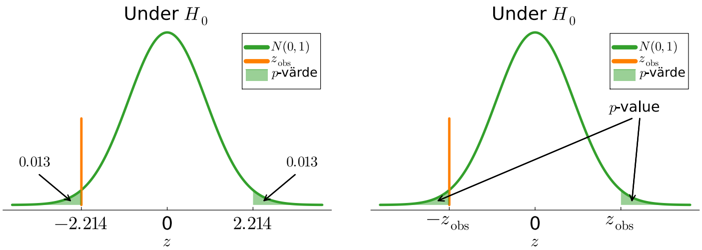
- p-**värde**: sannolikhet observera z_{obs} (eller värre) om H_0 sann:

$$p\text{-värde} = P\left(|Z| \geq |z_{\text{obs}}| \mid H_0 \text{ är sann}\right)$$

- p-värde $< 0.05 \implies$ vi förkastar H_0 på 5% signifikansnivå.
- p-värde $\geq 0.05 \implies$ vi förkastar inte H_0 på 5% signifikansnivå.
- Från Z-tabell (eller `pnorm(-2.214)`)

$$P\left(Z \leq -2.214\right) \approx 0.013$$

- p-värdet är $2 \cdot 0.013 = 0.026$.



K.I. för ett väntevärde - internethastighet

- Min internethastighet (i Mbit/sekund) under fem dagar:

$$15.77, 20.5, 8.26, 14.37, 21.09$$

- Mitt bredbandsbolag: du får 20 Mbit/sekund i genomsnitt.
- Jag: hold my beer ...
- **Modell**: $X_1, X_2, \ldots, X_5 \sim N(\mu, \sigma)$ [bortse från negativa]
- Antag: enligt Bredbandskollen är $\sigma = 5$.
- **95% konfidensintervall**

$$\bar{x} \pm z_{0.025} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$15.998 \pm 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$(11.615, 20.381)$$

Hypotestest för ett väntevärde - känd varians

- **Hypoteser**

$$H_0 : \mu = 20 \qquad\qquad H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_A : \mu \neq 20 \qquad\qquad H_A : \mu \neq \mu_0$$

- **Teststatistiska**

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{SD(\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- Om H_0 sann: $Z \sim N(0, 1)$.
- Internethastighet

$$z_{\text{obs}} = \frac{15.998 - 20}{\frac{5}{\sqrt{5}}} \approx -1.790$$

- **p-värde**

$$2 \cdot P(Z \leq -1.790) \approx 2 \cdot 0.037 = 0.074$$

- p-värde $> 0.05 \Rightarrow$ kan inte förkasta H_0 på 5% signifikansnivå.

K.I. för ett väntevärde - skattad varians

- Antag nu att σ inte är känd och skattas med

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

- Internethastighetsdata:

$$s = \sqrt{\frac{(15.77 - 15.998)^2 + \ldots + (21.09 - 15.998)^2}{4}} = 5.2147$$

- **95% konfidensintervall**

$$\bar{x} \pm t_{0.025,4} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$15.998 \pm 2.776 \cdot \frac{5.2147}{\sqrt{5}}$$

$$(9.523, 22.472)$$

- Bredare intervall när variansen måste skattas.

Hypotestest för ett väntevärde - skattad varians

- **Teststatistiska**

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{SE(\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

- Om H_0 sann: $T \sim t_{n-1}$, **student-t med $n-1$ frihetsgrader**.
- Teststatistiska för internethastighet

$$t_{\text{obs}} = \frac{15.998 - 20}{\frac{5.2147}{\sqrt{5}}} \approx -1.716$$

- **p-värde** från t_4-fördelningen

$$2 \cdot P(T \leq -1.716) \approx 2 \cdot 0.081 = 0.162$$

- p-värde större än $0.05 \Rightarrow$ kan inte förkasta nollhypotesen på 5% signifikansnivå.
- Det är nu ännu mer troligt att få $\bar{X} = 15.998$ även om H_0 är sann, dvs om $\mu = 20$.

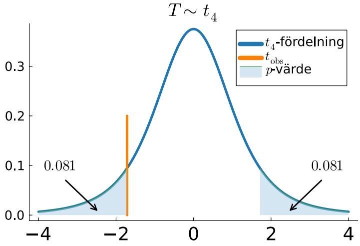
Hypotestest för ett väntevärde - skattad varians

- Teststatistiska

$$t_{\text{obs}} \approx -1.716$$

- **p-värde** från t_4-fördelningen

$$2 \cdot P(T \leq -1.716) \approx 2 \cdot 0.081 = 0.162$$



Ensidigt hypotestest för ett väntevärde

- Egentligen vill jag nog göra ett **ensidigt test** med hypoteser

$$H_0 : \mu = 20 \qquad H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_A : \mu < 20 \qquad H_A : \mu < \mu_0$$

- Samma **teststatistiska**

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

- Om H_0 sann: $T \sim t_{n-1}$, **student-t med $n-1$ frihetsgrader**.
- Teststatistiska

$$t_{\text{obs}} \approx -1.716$$

- **p-värde** från t_4-fördelningen [inte gånger 2 pga ensidigt test]

$$P(T \leq -1.716) \approx 0.081$$

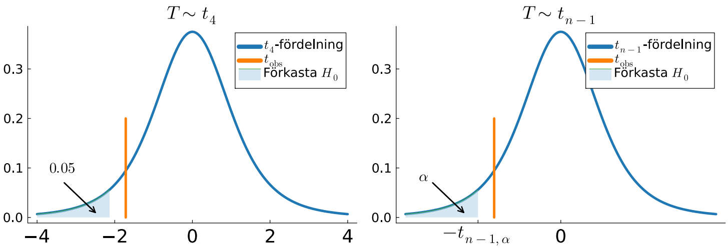
- Eftersom p-värde är större än 0.05 kan jag inte förkasta nollhypotesen på 5% signifikansnivå.

Ensidigt hypotestest för ett väntevärde

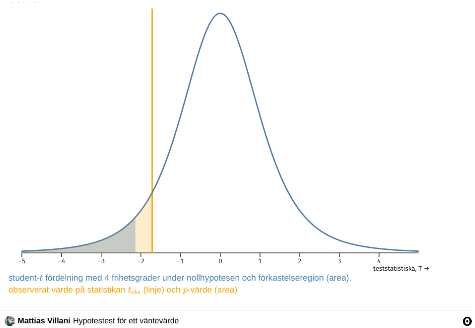
- Beslut-variant med kritiskt värde (jfr tidigare $t_{0.025,4} = 2.776$)

$$t_{0.05,4} = 2.132$$

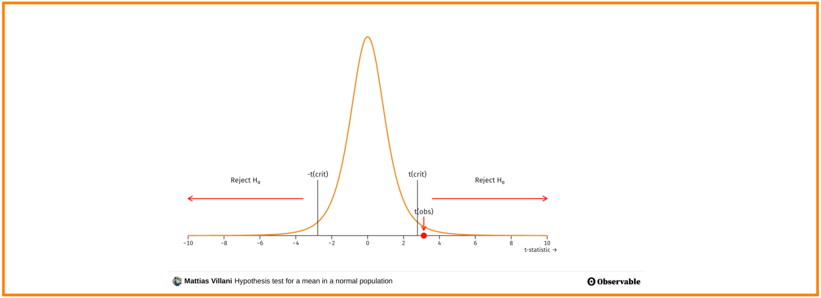
- **Ensidigt test** med $H_A : \mu < 20 \Rightarrow$ **förkastar vid litet** t_{obs} (vänstersvansen), dvs om $t_{\text{obs}} < -2.132$.
- Eftersom $t_{\text{obs}} = -1.716 > -2.132$ så förkastar vi inte H_0 på 5% signifikansnivå.



Ensidigt test för ett väntevärde



Test för ett väntevärde



Hypotestest - fatta principen bakom!

- **Hypotestest andel**. Teststatistiska

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{SE(\hat{p})} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$$

- **Hypotestest väntevärde**. Teststatistiska

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{SE(\bar{X})} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

- **Allmänt**

$$\frac{\text{Estimatet} - \text{Parametern under } H_0}{\text{Standardfel Estimator under } H_0}$$

- Är estimatet $\bar{x}$ **tillräckligt långt från** μ_0, **jämfört med den naturliga samplingvariation vi har för** $\bar{X}$ **om** H_0 **är sann**? I så fall kommer data nog inte från H_0. Förkasta H_0!

Credits

Dessa slides skapades för kursen statistik och dataanalys 1 av Mattias Villani HT 2023, och har modifierats av Oscar Oelrich för statistik och dataanalys 1 VT 2024.