Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 16 - Kontinuerliga sannolikhetsmodeller

Mattias Villani

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

mattiasvillani.com @matvil mattiasvillani

Översikt

- **Likformig fördelning**
- **Exponentialfördelning**
- **Student-*t***
- **Sannolikhetsmodeller** och verkligheten

Likformig fördelning

Likformig fördelning

a : 0

b : 1

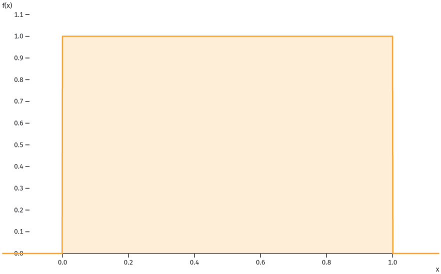
Kvantil: 1

Om $X \sim \text{Uniform}(0, 1)$ så gäller att

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = 0.500$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = 0.0833$$

$$P(X \leq 1) = 1.000$$



Mattias Villani Likformig fördelning

Observable

Exponentialfördelning

- Om $X \sim \mathrm{Expon}(\lambda)$ så är sannolikhetsfunktionen

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ för } x > 0$$

- $e \approx 2.71$ är Eulers tal.
- Väntevärdet är

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

- **Exponentialfördelning** vanlig modell för **väntetider**.
  - Tid mellan samtal till stödlinje.
  - Tid mellan mjukvarureleaser.
- Exponential och Poisson-fördelningen hänger ihop:
  - Om **antalet samtal** till stödlinje per timme är $\mathrm{Poisson}(\lambda = 3)$ så förväntar vi oss $\lambda = 3$ st samtal i timmen.
  - Då är **tiden mellan samtal** $\mathrm{Expon}(\lambda = 3)$ och vi förväntar oss $1/\lambda = 1/3$ timmar (20 minuter) mellan samtal.

Exponentialfördelning

Exponentialfördelningen

λ : 1.01

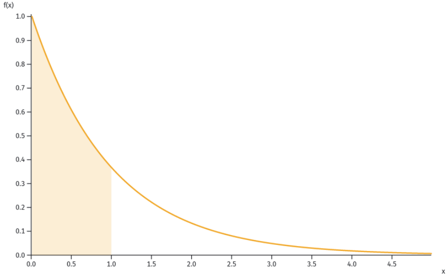
Kvantil: 1

Om $X \sim \text{Expon}(1.01)$ så gäller att

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 0.990$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 0.980$$

$$P(X \leq 1) = 0.6358$$



Mattias Villani Exponentialfördelningen

Observable

Exponentialfördelning i R

- $X \sim \mathrm{Expon}(\lambda = 3)$. Parametern λ kallas `rate` i R.

Beräkning	R kommando	Kommentar
$f(0.5)$	`dexp(x = 0.5, rate = 3)`	$f(x)$ vid $x = 2$
$P(X \leq 0.5)$	`pexp(q = 0.5, rate = 3)`	
Kvantil	`qexp(p = 0.5, rate = 3)`	Medianen
10 slumptal	`rexp(n = 10, rate = 3)`	

- Se programkoden exponential.R på kurssidan.

Student-t fördelning (standard)

Student-t distribution

$X \sim t_\nu(0,1)$

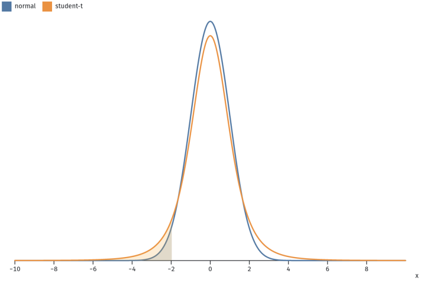
$E(X) = 0$ om $\nu > 1$

$Var(X) = \dfrac{\nu}{\nu - 2}$ om $\nu > 2$

Frihetsgrader ν : 4

Kvantil: -1.96

Normalfördelning: $P(X \leq -1.96) = 0.02500$
Student-t fördelning: $P(X \leq -1.96) = 0.06078$



Mattias Villani Student-t fördelning

Observable

Varför student-t är viktig för inferens

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende data from $N(\mu, \sigma^2)$.
- Stickprovmedelvärdet

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

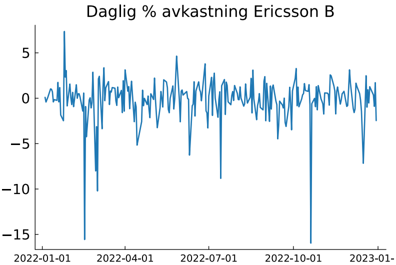
- Inferens: intresserad av fördelningen för det **standardiserad medelvärdet**

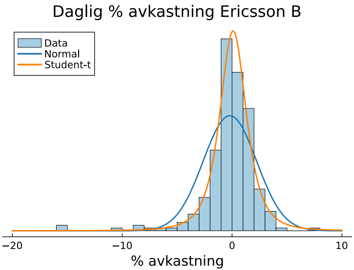
$$\frac{\bar{X} - \mu}{SD(\bar{X})}$$

- Om variansen i populationen σ^2 **är känd** så är det **standardiserade medelvärdet normalfördelat**.
- Om variansen i populationen σ^2 **är okänd**, och måste skattas med s^2, så är det **standardiserade medelvärdet student-t fördelad** med $\nu = n - 1$ frihetsgrader.

Student-t som modell för aktieavkastning

- Daglig avkastning Ericsson B aktie under hela år 2022. sda1 ericsson
- Finansiella data har ofta extremvärden. **Tunga svansar**.
- Maximum likelihood: $\mu = 0.094$, $\phi = 1.279$ och $\nu = 2.706$.





Allmän Student-t fördelning för datamodellering

Allmän Student-t distribution

$X \sim t_\nu(\mu, \phi^2)$

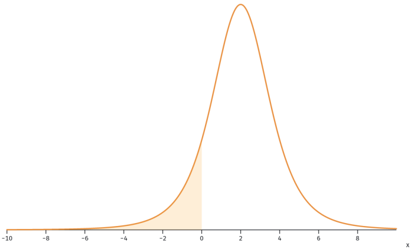
$E(X) = \mu$ om $\nu > 1$

$Var(X) = \dfrac{\nu}{\nu - 2}\phi^2$ om $\nu > 2$

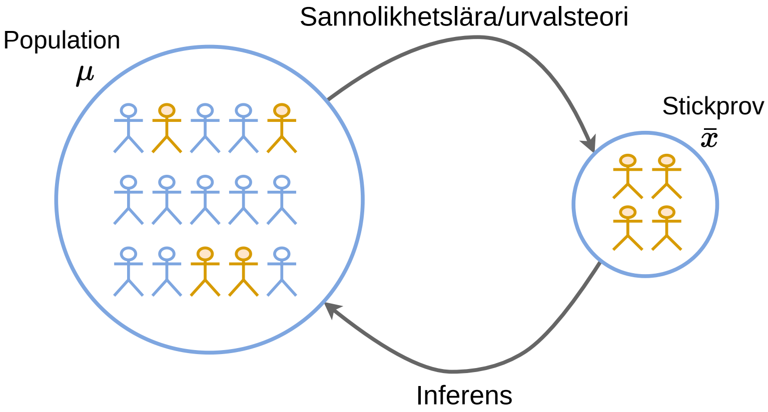
Läge μ :	2
Skala ϕ :	1.5
Frihetsgrader ν :	4
Kvantil:	0

visa normalfördelning

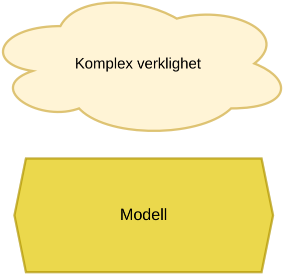
Student-t fördelning: $P(X \leq 0) = 0.1266$



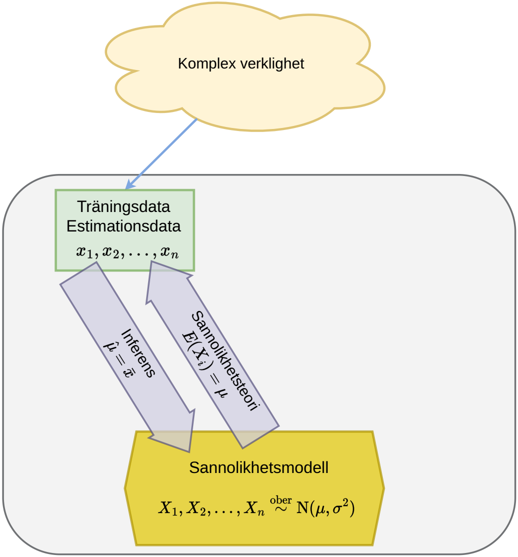
Population och stickprov - ändliga populationer



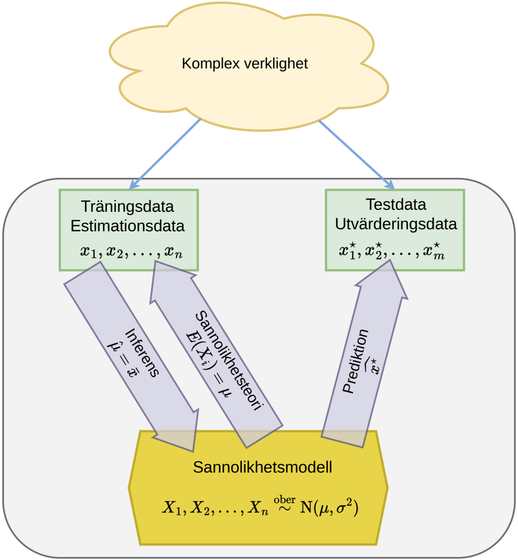
Modeller som en förenkling av verkligheten



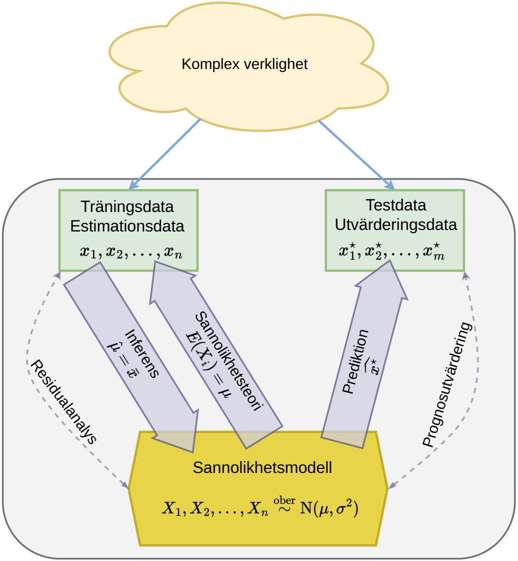
Sannolikhetsmodeller och inferens



Sannolikhetsmodeller möter verkligheten - prediktion



Modellering är en iterativ process



Slutmålet är ofta beslutsfattande i en osäker värld