Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 18 - Konfidensintervall för ett väntevärde

Mattias Villani

Statistiska institutionen
Stockholms universitet

 mattiasvillani.com

 @matvil

 @matvil

 mattiasvillani

Översikt

- Samplingfördelningen för ett medelvärde
- Konfidensintervall för ett väntevärde
- Centrala gränsvärdessatsen och stora talens lag

Samplingfördelning för $\bar{X}$ - normalmodellen

- **Modell för populationen**: $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma)$.
- Antag först att σ **är känd**.
- Vi **skattar** populationens väntevärde $\mu = E(X)$ med

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

- **Samplingfördelningen**

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- Vi måste bevisa tre saker:
  - $\bar{X}$ är normalfördelad.
  - $E(\bar{X}) = \mu$
  - $SD(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Samplingfördelning för $\bar{X}$ - normalmodellen

Normalfördelning

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

är en **summa** av normalfördelade variabler, **skalad** med $1/n$.
F16: $\bar{X}$ är normalfördelad.

$\bar{X}$ är väntevärdesriktig för μ

$$E((\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{skalning}}{=} \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{summa}}{=} \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu\right) \overset{\text{samma termer}}{=} \frac{1}{n}(n\mu) = \mu$$

Varians/Standardavvikelse

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{skalning}}{=} \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{summa}}{=} \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2\right) \overset{\text{samma termer}}{=} \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

KI väntevärde - normalpopulation med känd varians

Antag: $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma)$, σ känd

$(1\text{-}\alpha)$%-igt konfidensintervall för väntevärde μ

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot SE(\bar{x})$$

$$SE(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Normalpopulation med okänd varians

- Variansen i populationen, σ^2, är oftast **okänd**.
- Vi kan **skatta σ^2 med stickprovsvariansen**

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- Varför dividerar vi med $n-1$?
- För att s^2 **är väntevärdesriktig för** σ^2

$$E(s^2) = \sigma^2$$

- **OM μ är känd** kan vi skatta σ^2 väntevärdesriktigt med

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$$

- "Förlorar en frihetsgrad" när vi skattar μ med $\bar{x}$.
- SDM-boken (s. 538): stickprovet kommer ligga närmare $\bar{x}$ än μ i genomsnitt. Avvikelserna $x_i - \bar{x}$ blir för små i genomsnitt.

Okänd varians $\Longrightarrow$ student-t fördelning

- Om σ^2 är **känd**

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

och genom standardisering

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

- Om **okänd** σ^2 **skattas** med s^2 är $\bar{X}$ **student-t** fördelad:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

- Alltså: när standardavvikelsen i populationen måste skattas får den standardiserade $\bar{X}$ **tyngre svansar**.

Student-t fördelning

Student-t distribution

$X \sim t_\nu(0,1)$

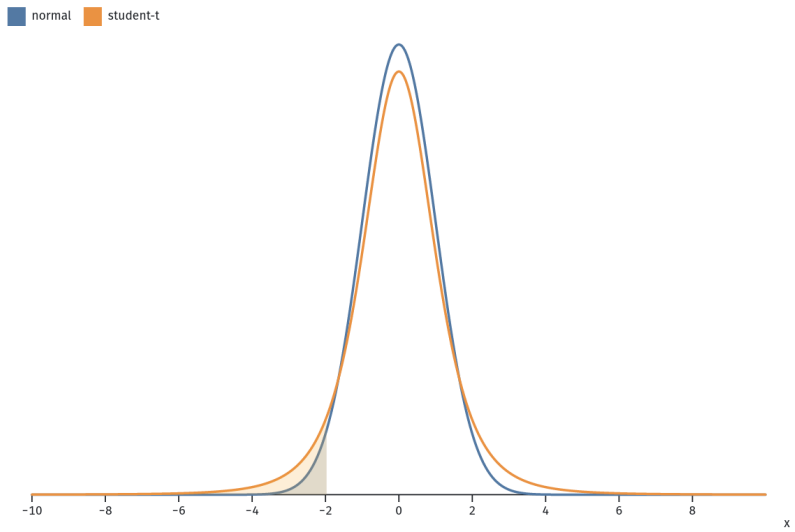
$E(X) = 0 \text{ om } \nu > 1$

$Var(X) = \frac{\nu}{\nu - 2} \text{ om } \nu > 2$

Frihetsgrader ν : 4

Kvantil: -1.96

Normalfördelning: $P(X \leq -1.96) = 0.02500$
Student-t fördelning: $P(X \leq -1.96) = 0.06078$



Mattias Villani Student-t fördelning Observable

KI väntevärde - normalpopulation med okänd varians

Antag: $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma)$, med σ okänd.

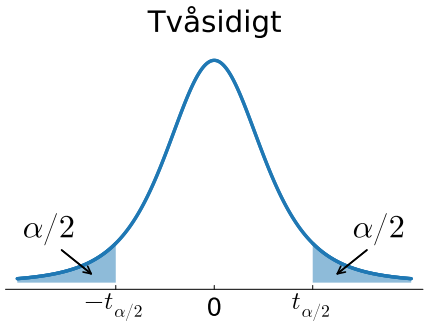
(1-α)%-igt konfidensintervall för väntevärde μ

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} \cdot SE(\bar{x})$$

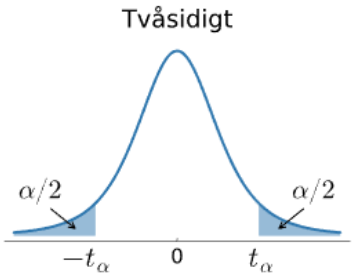
$$SE(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

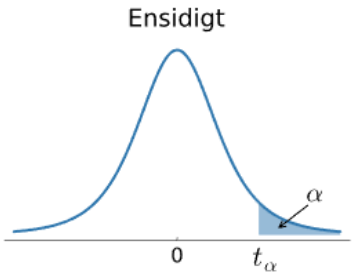
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- **Kritiskt värde** $t_{\alpha/2, n-1}$ student-t med $n-1$ frihetsgrader.



Student-t tabell





Konfidensnivå:	80%	90%	95%	98%	99%
Tvåsidig sannolikhet:	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010
Ensidig sannolikhet:	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
df					
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861

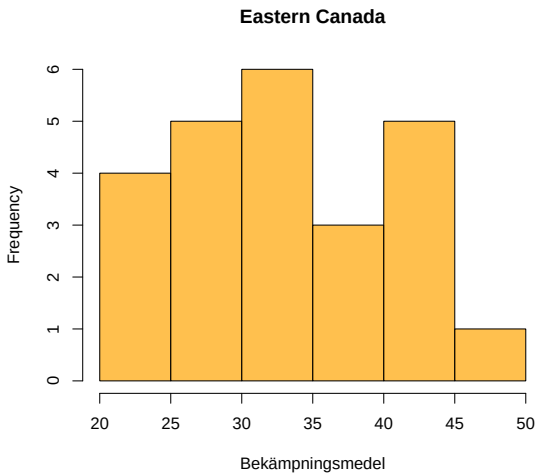
Bekämpningsmedel i odlad lax

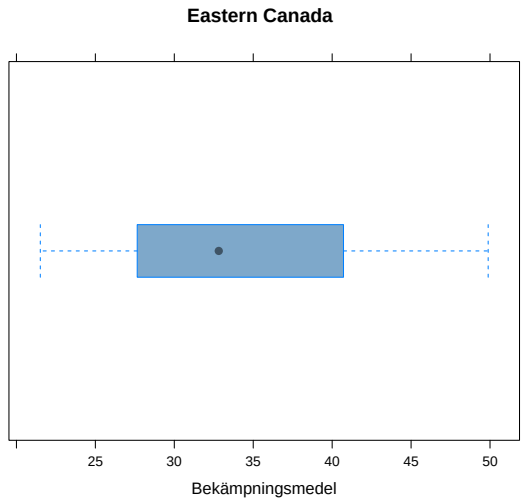
SDMdata Farmed_salmon

- Datamaterial med gifter i 153 laxar vid 8 olika platser.
- Här: Bekämpningsmedel (`Total.pestocide`) i Eastern Canada med $n = 24$ laxar:

```
x=c(25.739, 24.799, 27.563, 21.511, 23.821, 23.311, 49.883, 42.352, 44.598, 31.353,
33.837, 33.915, 41.668, 42.383, 43.638, 39.768, 35.256, 36.270, 29.630, 31.266, 32.577,
33.056, 29.789, 27.737)
```

- Modell: $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma)$, och σ okänd.
- **Normalfördelad population?** Kolla stickprovet:





- Svårt se med få observationer. Histogram ok. Inga outliers.

Bekämpningsmedel i odlad lax

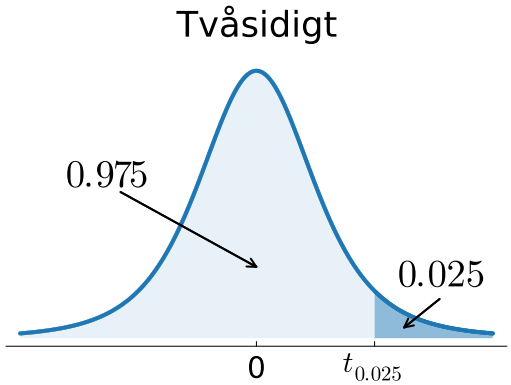
- **95%-igt konfidensintervall för μ:** $(30.332, 36.811)$

$$\bar{x} \pm t_{0.025,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$33.572 \pm t_{0.025,23}\frac{7.671}{\sqrt{24}}$$

$$33.572 \pm 2.069\frac{7.671}{\sqrt{24}}$$

- $t_{0.025,23} = 2.069$ från tabell, eller R: `qt(0.975, df = 23)`.

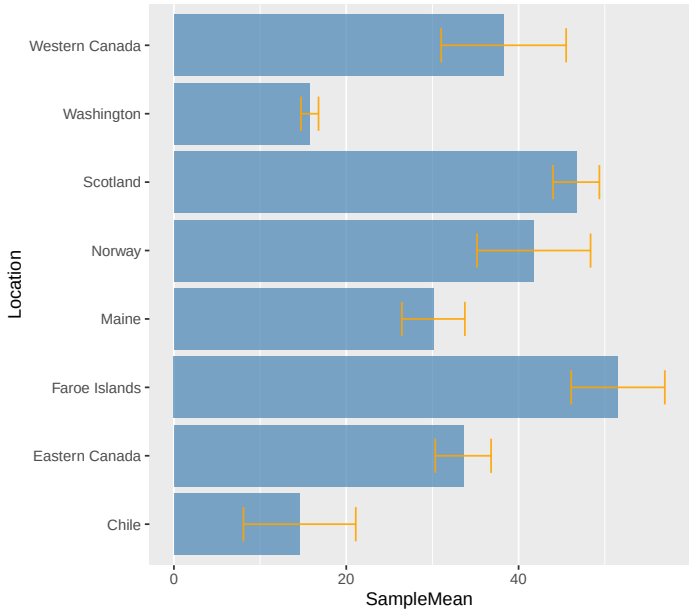


- Standardavvikelsen s beräknas i R som `sd(x)`, eller för hand:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Bekämpningsmedel i odlad lax

- **68%-igt konfidensintervall för μ:** $(31.980, 35.163)$
- **95%-igt konfidensintervall för μ:** $(30.332, 36.811)$
- **99%-igt konfidensintervall för μ:** $(29.176, 37.968)$
- Högre konfidens $\Longrightarrow$ bredare intervall.
- 95%-iga konfidensintervall alla orter:



- Se R-koden confidence_intervals_salmon.R på kurswebbsidan.

KI väntevärde - normalpop, okänd varians, $n \geq 30$

Antag: $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma)$, med σ okänd och $n \geq 30$.

Approximativt $(1\text{-}\alpha)$%-igt K.I. för väntevärde μ

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot SE(\bar{x})$$

$$SE(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Centrala gränsvärdessatsen

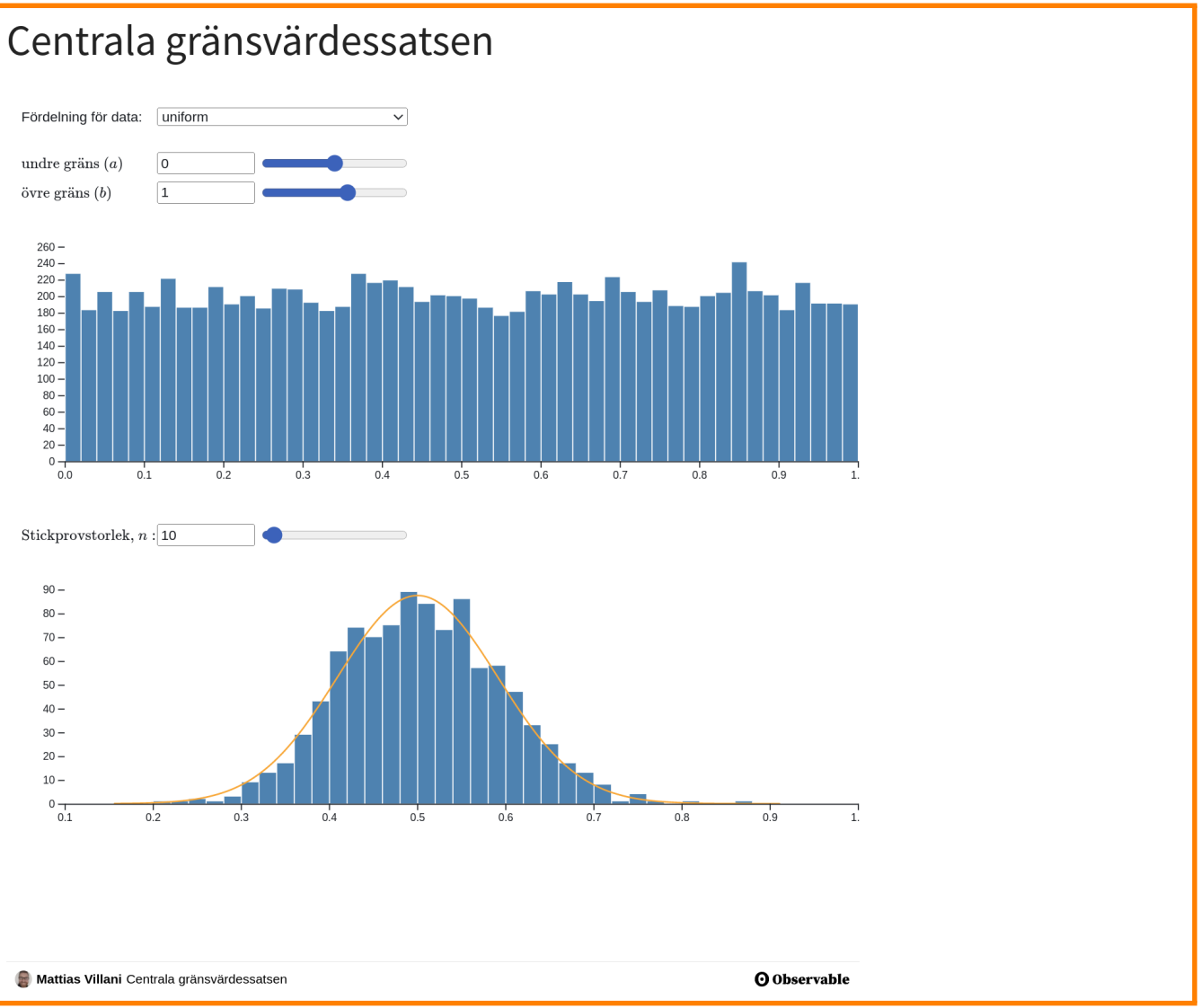
Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende från en population med godtycklig fördelning (med ändlig varians σ^2) så är

samplingfördelningen för medelvärdet approximativt normalfördelat i stora stickprov:

$$\bar{X} \overset{\text{approx}}{\sim} \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ för tillräckligt stort } n$$

Tumregel: $n \geq 30$ är tillräckligt.

Centrala gränsvärdessatsen - interaktivt



Stora talens lag

Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende från en population med godtycklig fördelning (med ändligt väntevärde μ) så blir

samplingfördelningen för medelvärdet alltmer koncentrerad kring μ när stickprovsstorleken n ökar.

Stora talens lag - interaktivt