Föreläsning 3

karl.sigfrid@stat.su.se

Frekvenstabeller - en variabel

Class	Count
First	324
Second	285
Third	710
Crew	889

Table 2.2
A frequency table of the *Titanic* passengers.

Class	Percentage (%)
First	14.67
Second	12.91
Third	32.16
Crew	40.26

Table 2.3
A relative frequency table for the same data.

- En frekvenstabell redovisar antalet observationer i varje kategori.
- En relativ frekvenstabell visar andel istället för antal.
- Har vi flera kategoriska variabler kan vi göra en separat frekvenstabell för var och en. Tabeller över enskilda variabler visar dock inte *samband* mellan variabler.

Korstabeller - två kategoriska variabler

- En **korstabell (contingency table)** visar samband mellan två variabler.
- Korstabellen nedan visar resultat ur en svensk studie som undersökte om det finns samband mellan prostatacancer och hur ofta en person äter fisk.

		Prostate Cancer		
		No	**Yes**	**Total**
Fish Consumption	**Never/Seldom**	110	14	**124 (2.0%)**
	Small Part of Diet	2420	201	**2621 (41.8%)**
	Moderate Part	2769	209	**2978 (47.5%)**
	Large Part	507	42	**549 (8.8%)**
	Total	**5806 (92.6%)**	**466 (7.4%)**	**6272 (100%)**

Korstabeller - två kategoriska variabler

- Den ena variabeln delar in deltagarna i **fyra kategorier baserat på diet:** De som aldrig/sällan äter fisk, de som äter lite fisk, de som äter måttligt med fisk, och de som äter mycket fisk.
- Den andra variabeln delar in deltagarna i **två kategorier:** De som diagnostiserades med prostatacancer under studieperioden och de som inte dianostiserades med prostatacancer.

		Prostate Cancer		
		No	**Yes**	**Total**
Fish Consumption	**Never/Seldom**	110	14	**124 (2.0%)**
	Small Part of Diet	2420	201	**2621 (41.8%)**
	Moderate Part	2769	209	**2978 (47.5%)**
	Large Part	507	42	**549 (8.8%)**
	Total	**5806 (92.6%)**	**466 (7.4%)**	**6272 (100%)**

Korstabeller - simultana fördelningar

- I det **gula fältet** ser vi en **simultanfördelning (joint distribution)**. En simultanfördelning delar in observationerna i grupper baserat på två eller fler variabler.
- Om en variabel har 4 kategorier och en annan variabel har 2 kategorier får vi sammanlagt $4 \cdot 2 = 8$ kategorier, en för varje möjlig kombination.

		Prostate Cancer		
		No	**Yes**	**Total**
Fish Consumption	**Never/Seldom**	110	14	**124 (2.0%)**
	Small Part of Diet	2420	201	**2621 (41.8%)**
	Moderate Part	2769	209	**2978 (47.5%)**
	Large Part	507	42	**549 (8.8%)**
	Total	**5806 (92.6%)**	**466 (7.4%)**	**6272 (100%)**

Korstabeller - simultana fördelningar

- Om vi lägger samman talen i det gula fältet blir summan 6272, som är det totala antalet observationer (dvs antalet deltagare i studien).
- Den simultana fördelningen visar exempelvis att det fanns det 110 deltagare i studien som sällan/aldrig åt fisk **och** som inte fick prostatacancer.

		Prostate Cancer		
		No	**Yes**	**Total**
Fish Consumption	**Never/Seldom**	110	14	**124 (2.0%)**
	Small Part of Diet	2420	201	**2621 (41.8%)**
	Moderate Part	2769	209	**2978 (47.5%)**
	Large Part	507	42	**549 (8.8%)**
	Total	**5806 (92.6%)**	**466 (7.4%)**	**6272 (100%)**

Korstabeller - marginalfördelningar

- **Marginalfördelningen** av en kategorisk variabel visar antalet observationer per kategori utan att vi tar någon hänsyn till den andra variabeln.
- I den högra marginalen ser vi marginalfördelningen av variabeln för hur ofta deltagarna åt fisk. Där ser vi bland annat att totalt 124 deltagare sällan eller aldrig åt fisk.

		Prostate Cancer		
		No	Yes	Total
Fish Consumption	Never/Seldom	110	14	**124 (2.0%)**
	Small Part of Diet	2420	201	**2621 (41.8%)**
	Moderate Part	2769	209	**2978 (47.5%)**
	Large Part	507	42	**549 (8.8%)**
	Total	**5806 (92.6%)**	**466 (7.4%)**	**6272 (100%)**

Korstabeller - marginalfördelningar

- I bottenmarginalen ser vi marginalfördelningen för variabeln prostatacancer. Totalt 466 testdeltagare diagnostiserades med prostatacaner under studien.
- Varje marginalfördelning summerar till det totala antalet observationer: $124 + 2621 + 2978 + 549 = 5806 + 466 = 6272$

Fish Consumption	Prostate Cancer: No	Prostate Cancer: Yes	Total
Never/Seldom	110	14	**124 (2.0%)**
Small Part of Diet	2420	201	**2621 (41.8%)**
Moderate Part	2769	209	**2978 (47.5%)**
Large Part	507	42	**549 (8.8%)**
Total	**5806 (92.6%)**	**466 (7.4%)**	**6272 (100%)**

Korstabeller - marginalfördelningar

- Marginalfördelningen för en kategorisk variabel är samma fördelning som den vi ser i frekvenstabellen när vi bara inkluderar en variabel.
- För att bekräfta det skriver vi först ut en korstabell i R.
- Sedan skriver vi ut frekvenstabellerna för de två variablerna var för sig.

```
tally(~ diet + cancer, data=fish, format="count", margins=T)
```

```
           cancer
diet          No  Yes Total
  Never      110   14   124
  Small     2420  201  2621
  Moderate  2769  209  2978
  Large      507   42   549
  Total     5806  466  6272
```

Korstabeller - marginalfördelningar

```
tally(~ diet + cancer, data=fish, format="count", margins=T)
```

```
           cancer
diet          No  Yes Total
  Never      110   14   124
  Small     2420  201  2621
  Moderate  2769  209  2978
  Large      507   42   549
  Total     5806  466  6272
```

```
tally(~ diet, data=fish, format="count", margins=T)
```

```
diet
   Never    Small Moderate    Large    Total
     124     2621     2978      549     6272
```

```
tally(~ cancer, data=fish, format="count", margins=T)
```

```
cancer
   No   Yes Total
 5806   466  6272
```

Korstabeller - relativa fördelningar

- Genom att dela varje frekvens med det totala antalet observationer inom en grupp och multiplicera med 100 kan vi få en **relativ frekvenstabell:**.
- Antalet som åt mycket fisk och som inte fick cancer var exempelvis 507, så motsvarande andel blir

$$\frac{507}{6272} \cdot 100\% = 8.0835\%.$$

Korstabeller - relativa fördelningar

I praktiken räknar vi sällan ut andelarna för hand. Genom att sätta format="percent" kan vi skapa en korstabell med relativa frekvenser med tally-funktionen i R.

```
tally(~ diet + cancer, data=fish, format="percent", margins=T)
```

```
           cancer
diet                 No        Yes      Total
  Never       1.7538265  0.2232143  1.9770408
  Small      38.5841837  3.2047194 41.7889031
  Moderate   44.1485969  3.3322704 47.4808673
  Large       8.0835459  0.6696429  8.7531888
  Total      92.5701531  7.4298469 100.0000000
```

Vi har dock fortfarande inte sett någon tabell som enkelt låter oss se samband mellan variablerna, vilket var syftet med korstabellen.

Korstabeller - betingade fördelningar

- För att kunna se samband mellan variablerna introducerar vi begreppet **betingad fördelning (conditional distribution)**.
- En betingad fördelning (conditional distribution) är fördelningen av en variabel **givet** ett värde av en annan variabel.
- Vi kan exempelvis vilja undersöka sambandet mellan prostatacancer och fisk i dieten genom att ställa frågorna:
  - Hur stor andel av de som *aldrig/sällan* åt fisk fick prostatacancer?
  - Hur stor andel av de som åt *lite fisk* fick prostatacancer?
  - Hur stor andel av de som åt *måttligt med fisk* fick prostatacancer?
  - Hur stor andel av de som åt *mycket fisk* fick prostatacancer?

Korstabeller - betingade fördelningar

- När vi ställer de här frågorna är vi intresserade av risken för prostatacancer **betingat på** en viss diet.
- För att få svaren tittar vi på en diet-kategori i taget, där en diet-kategori definieras av hur ofta en person äter fisk.
- Genom att jämföra personer som tillhör olika diet-kategorier kan vi se om det finns samband.

Korstabeller - betingade fördelningar

- När vi räknar ut betingade fördelningar intresserar vi oss bara för den kategori som vi betingar på.
- Vill vi ha fördelningen av variabeln prostatacancer betingat på att deltagaren i studien aldrig/sällan äter fisk ignorerar vi dem som inte tillhör den kategorin.

		Prostate Cancer		
		No	Yes	Total
Fish Consumption	Never/Seldom	110	14	124 (2.0%)
	Small Part of Diet	2420	201	2621 (41.8%)
	Moderate Part	2769	209	2978 (47.5%)
	Large Part	507	42	549 (8.8%)
	Total	5806 (92.6%)	466 (7.4%)	6272 (100%)

Korstabeller - betingade fördelningar

- När vi räknar ut betingade fördelningar intresserar vi oss bara för den kategori som vi betingar på.
- Vill vi ha fördelningen av variabeln prostatacancer betingat på att deltagaren i studien aldrig/sällan äter fisk ignorerar vi dem som inte tillhör den kategorin.

		Prostate Cancer		
		No	Yes	Total
Fish Consumption	Never/Seldom	110	14	124 (2.0%)
	[redacted]			

Korstabeller - betingade fördelningar

- Vi har 14 deltagare fick prostatacancer och 110 som inte fick det.

		Prostate Cancer		
		No	Yes	Total
Fish Consumption	Never/Seldom	110	14	124 (2.0%)
	[redacted]			

Korstabeller - betingade fördelningar

- Vi har 14 deltagare fick prostatacancer och 110 som inte fick det.
- Vi räknar fram den relativa frekvensen på samma sätt som när vi bara har en variabel. Andelen med cancer är $14/124 = 0.1129$ och andelen utan cancer är $110/124 = 0.8871$. Detta är vår betingade fördelning.

		Prostate Cancer		
		No	Yes	Total
Fish Consumption	Never/Seldom	110	14	124 (2.0%)
	[redacted]			

Korstabeller - betingade fördelningar

- Med hjälp av R skapar vi en tabell för fördelningen av variabeln prostatacancer betingat på variabeln diet.
- Vi anger fördelningen i procent.

```
# Tillägget |> t() vänder på tabellen. Testa både med och utan.
tally(~cancer|diet,data=fish,format="percent",margins=T) |>  t()
```

```
          cancer
diet                No        Yes      Total
  Never      88.709677  11.290323 100.000000
  Small      92.331171   7.668829 100.000000
  Moderate   92.981867   7.018133 100.000000
  Large      92.349727   7.650273 100.000000
```

Korstabeller - betingade fördelningar

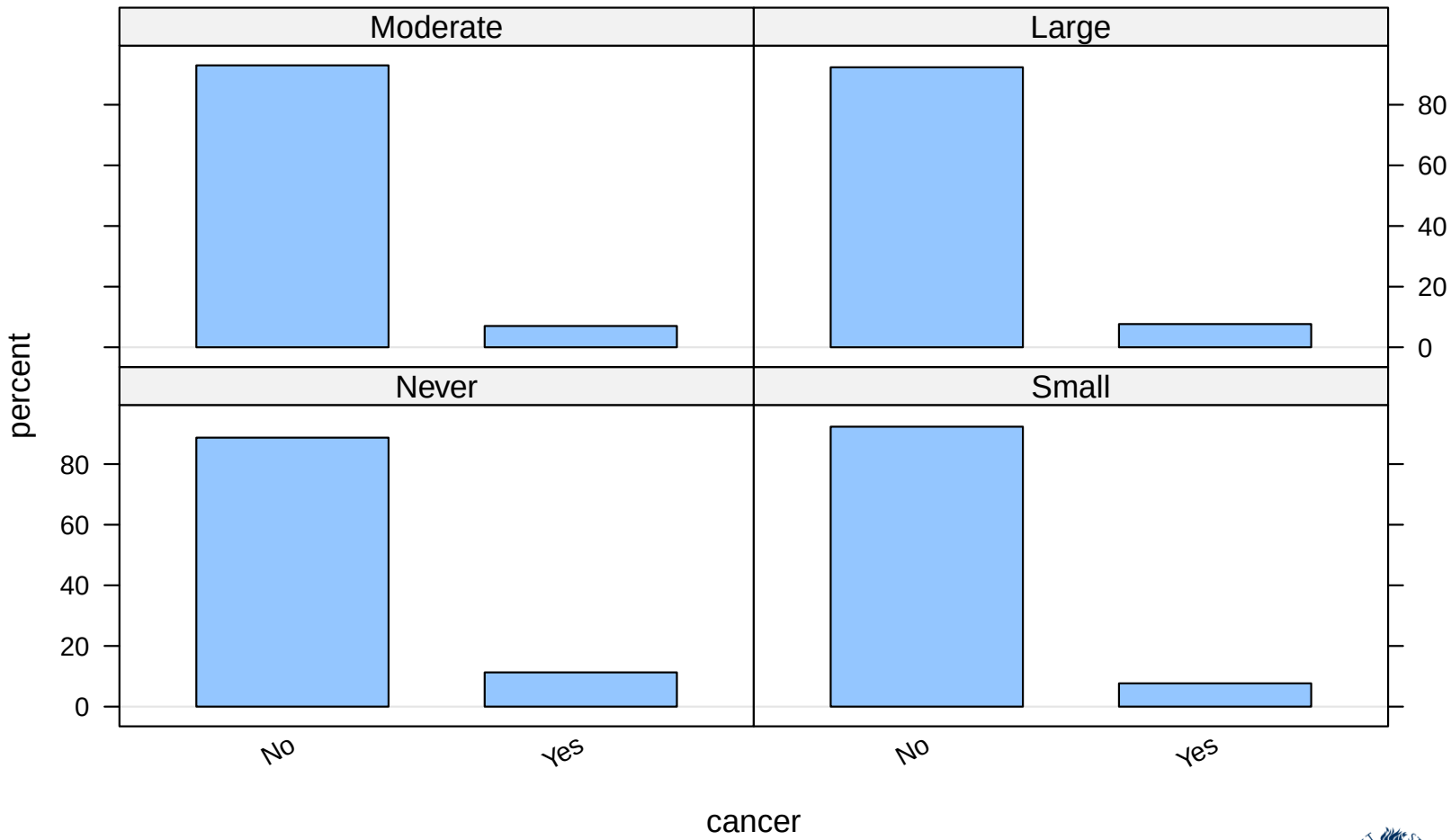
- Notera att **varje rad** summerar till 100 procent. Så ska det vara eftersom varje rad representerar en av de kategorier som vi betingar fördelningen på. Varje rad kan alltså ses som en egen självständig fördelning.
- Nu kan vi se skillnader mellan grupperna. Bland dem som aldrig eller sällan åt fisk hade drygt 11 procent diagnosticerats med prostatacancer. Bland övriga grupper är motsvarande siffra lite över 7 procent.

	cancer		
diet	No	Yes	Total
Never	88.709677	11.290323	100.000000
Small	92.331171	7.668829	100.000000
Moderate	92.981867	7.018133	100.000000
Large	92.349727	7.650273	100.000000

Kategoriska variabler och samband

Vi kan ge en snabbare överblick av samma information med en graf.

```
bargraph(~cancer|diet, data=fish, type="percent")
```

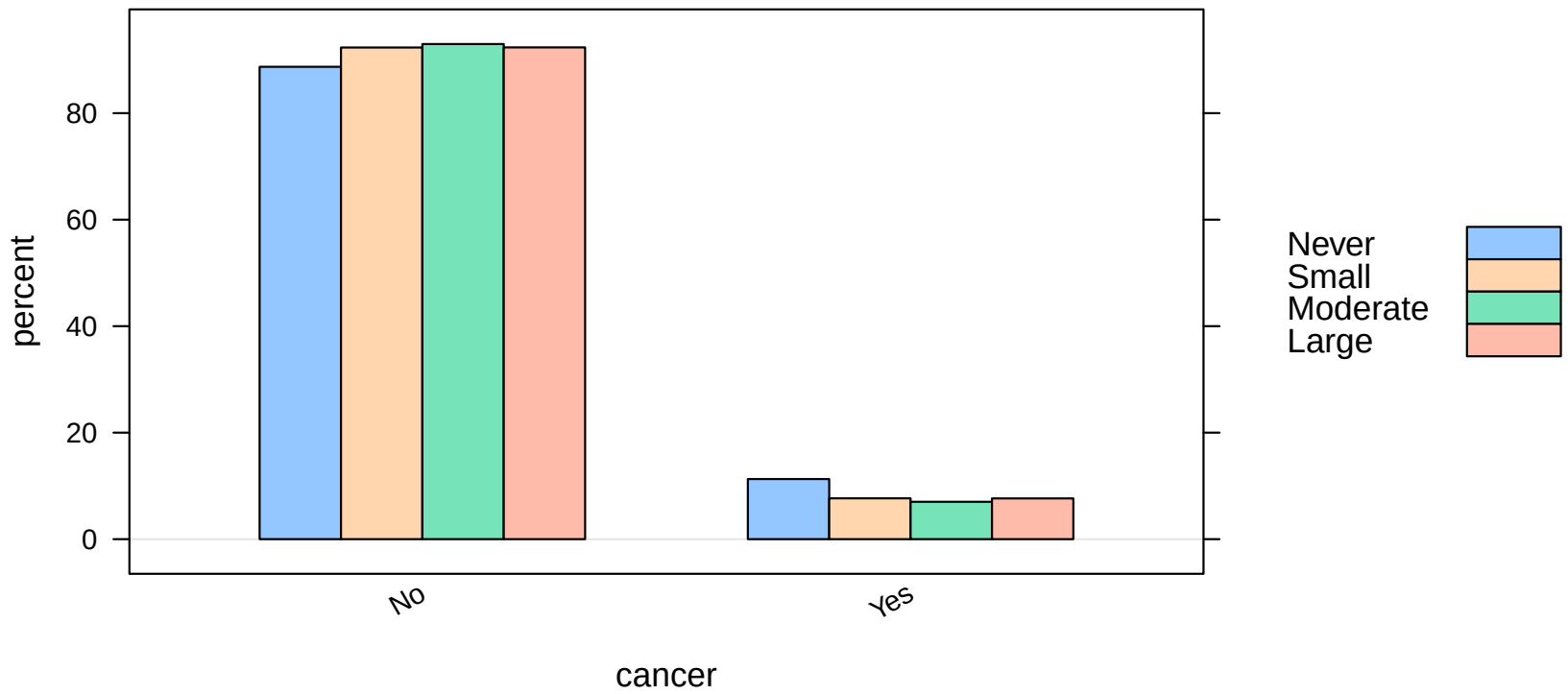


Stockholm University

Kategoriska variabler och samband

Vi kan också gruppera efter variabeln cancer. Färgerna indikerar diet. Två staplar av samma färg är tillsammans 100 procent. Vi ser att cancer förekom något mer bland de deltagare som aldrig eller sällan åt fisk.

```
bargraph(~cancer, groups=diet, data=fish, type="percent")
```



Kategoriska variabler och samband

- Givet en viss diet kan vi nu säga hur stor andel som har diagnosticerats med cancer.
- Betyder det att vi även kan säga hur stor andel av dem som diagnosticerat med cancer som har en viss diet? **Nej, inte utan att räkna ut nya betingade värden**.
- Den här gången vill vi veta hur ofta personer äter fisk
  - betingat på att en person har diagnosticerats med cancer.
  - betingat på att en person inte har diagnosticerats med cancer.

Kategoriska variabler och samband

Vi tar den här gången fram en tabell som är betingad på cancer-variabeln.

```
tally(~ diet | cancer, data=fish, format="percent", margins=T)
```

```
           cancer
diet                No        Yes
  Never       1.894592   3.004292
  Small      41.681020  43.133047
  Moderate   47.692043  44.849785
  Large       8.732346   9.012876
  Total     100.000000 100.000000
```

Räkneexempel: Säg att vi vill räkna ut andelen som aldrig/sällan åt fisk betingat på att de fick cancer. Vi *ignorerar* då alla deltagare som *inte* fick cancer. Antalet deltagare som fick prostatacancer var 466. Antalet av dessa som aldrig/sällan åt fisk var 14. Den procentuella andelen av de som fick cancer som aldrig/sällan åt fisk var alltså $(14/466) * 100\% = 3.004292\%$.

Kategoriska variabler och samband

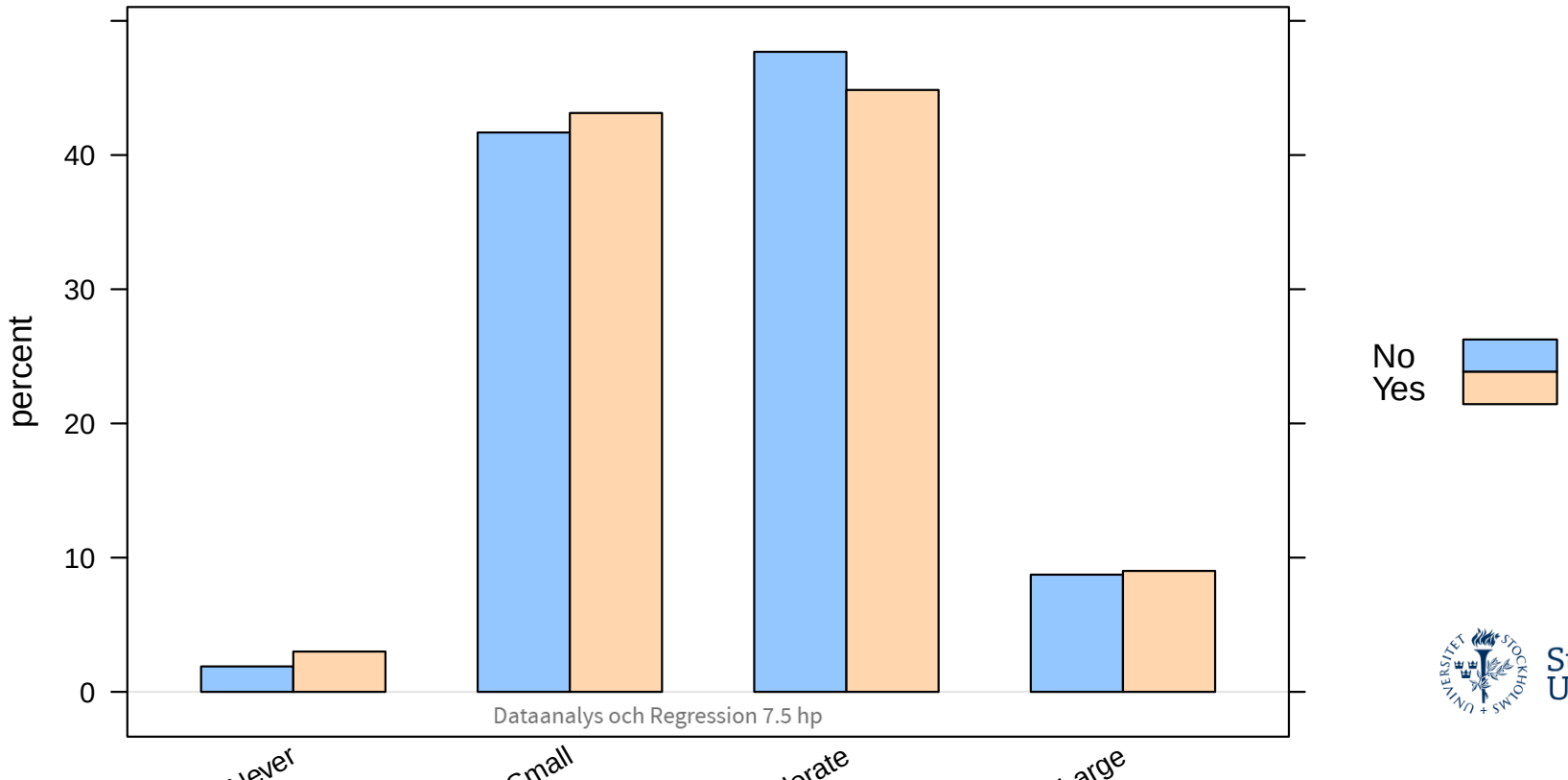
- Notera att det nu är **kolumnerna** som summerar till 100. Det beror på att vi nu har gjort en separat frekvenstabell för varje kolumn.
- Något som framgår här, och som vi inte såg när vi betingade fördelningen på diet, är att det är få av deltagarna som aldrig eller sällan äter fisk.

	cancer	
diet	No	Yes
Never	1.894592	3.004292
Small	41.681020	43.133047
Moderate	47.692043	44.849785
Large	8.732346	9.012876
Total	100.000000	100.000000

Kategoriska variabler och samband

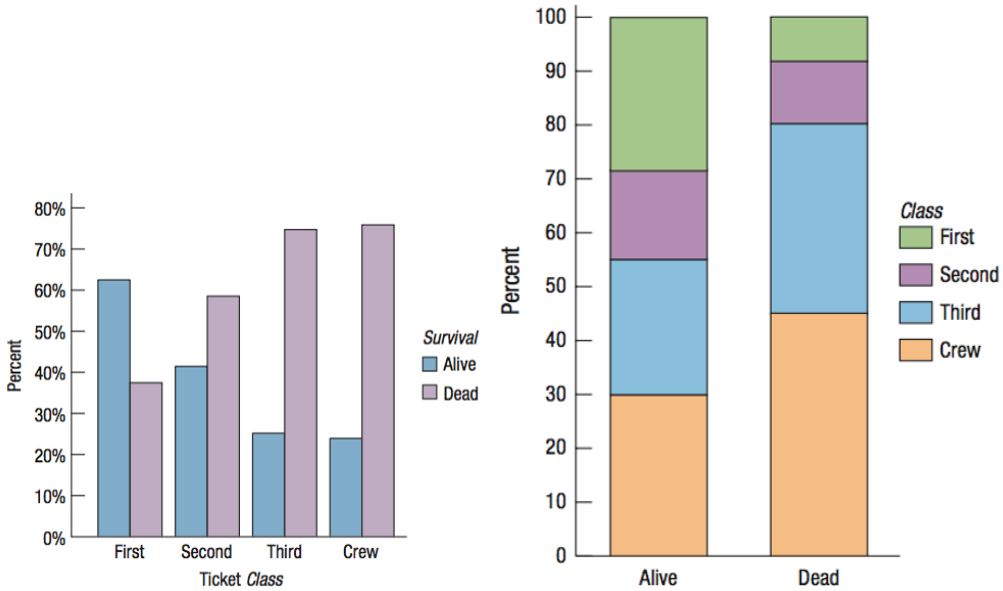
- Vi gör ett stapeldiagram grupperat på cancer-variabeln.
- De blå staplarna summerar till 100 procent, och staplarna i beige summerar också till 100 procent.
- Vi ser att bland de som aldrig eller sällan äter fisk är cancerdiagnoserna något överrepresenterade.

```
bargraph(~diet, groups=cancer, data=fish, type="percent")
```



Kategoriska variabler och samband - fler exempel

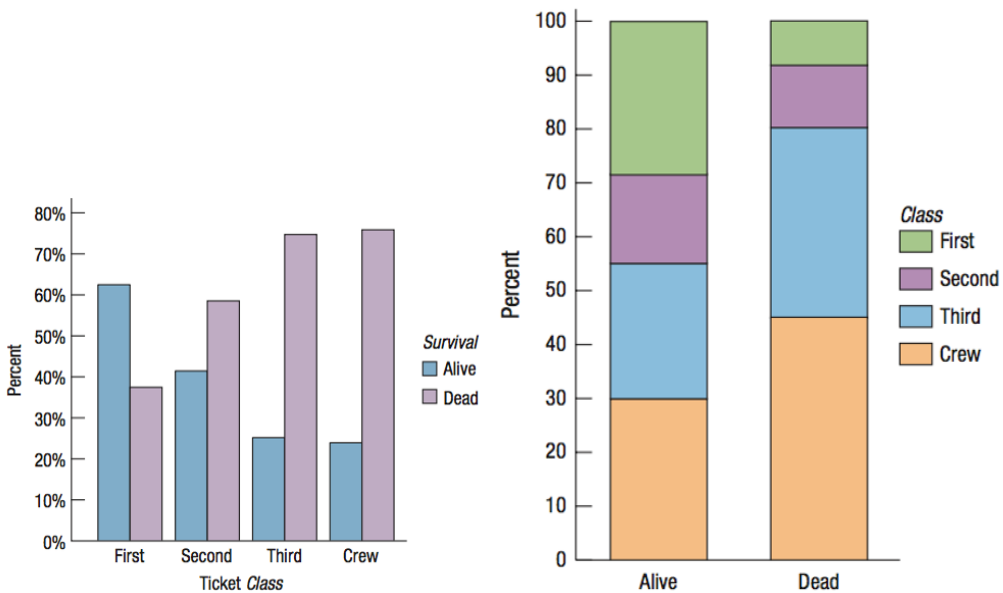
- Stapeldiagrammet till vänster är betingat på variabeln *Class*. Det hjälper oss att besvara frågan om hur stor andel som överlevde inom varje biljettklass.
- Stapeldiagrammet till höger är betingat på variabeln *Survived*. Det hjälper oss att besvara frågan om hur stor andel av dem som överleve, respektive av dem som inte överlevde, som reste i en viss klass.



Stockholm University

Kategoriska variabler och samband - fler exempel

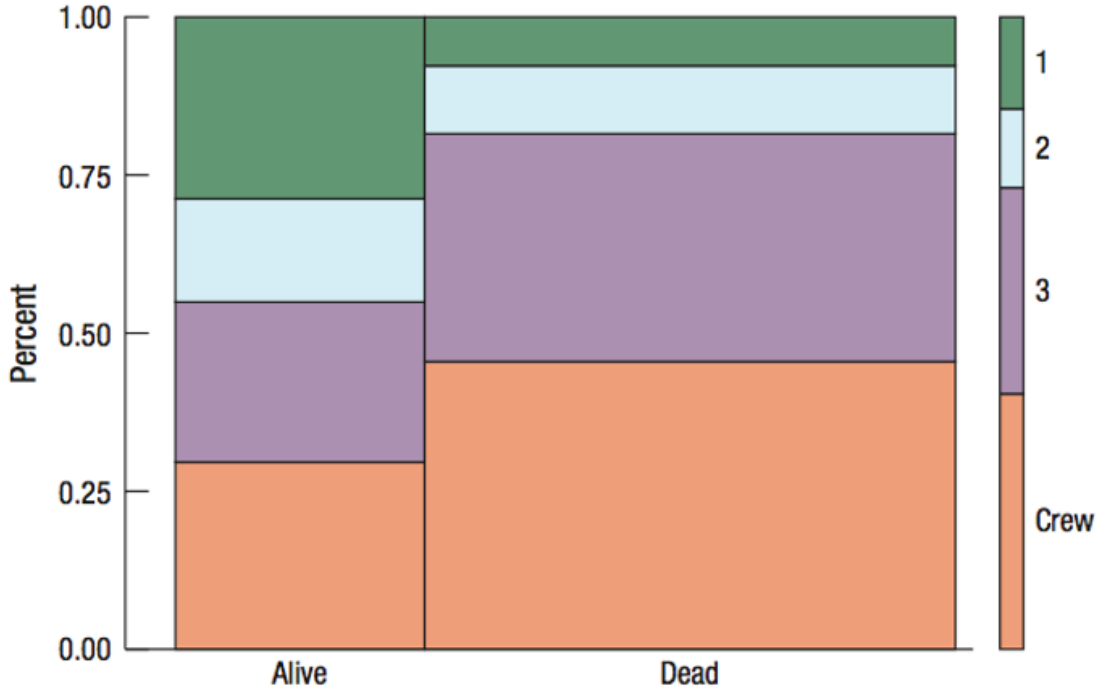
- Stapeldiagrammet till vänster ger en bild av andelen som överlevde katastrofen, men ingen information om hur många som ingick i varje klass.
- Stapeldiagrammet till höger ger en bild av hur många som reste i respektive klass, men ingen information om andelen som överlevde.



Stockholm University

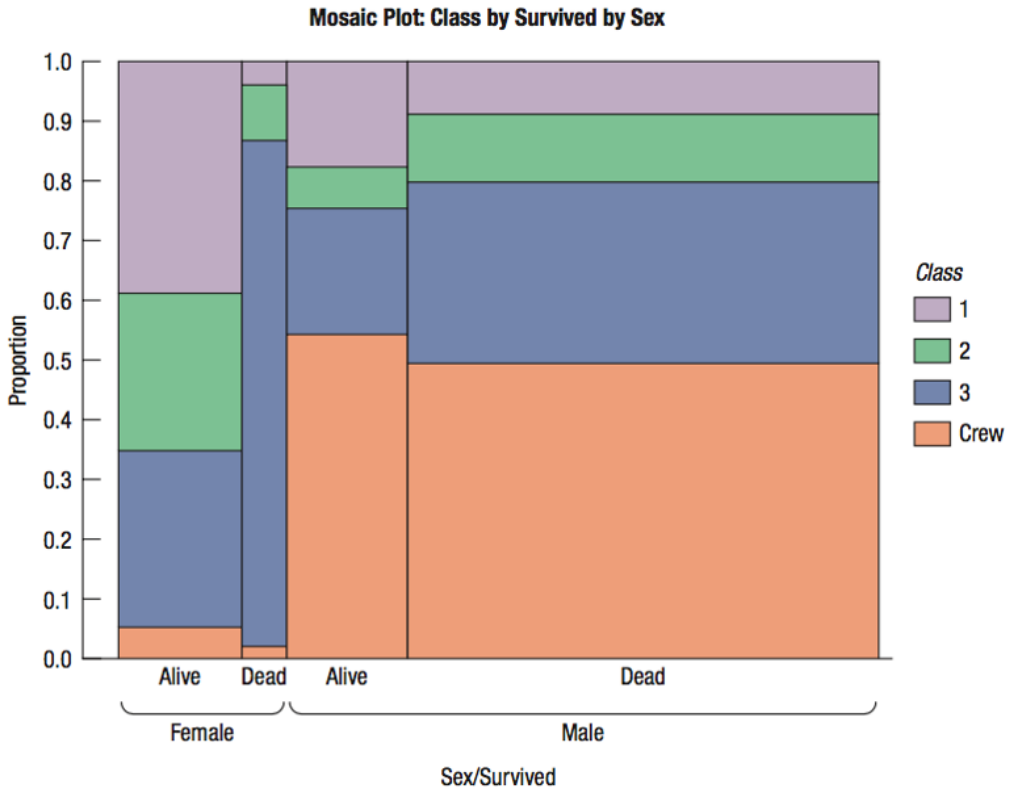
Kategoriska variabler och samband - mosaic plot

En **mosaic plot** ger en mer komplett bild av en simultan fördelning än ett vanligt stapeldiagram. Varje ruta har en **area** som motsvarar andelen observationer som rutan representerar.



Kategoriska variabler och samband - mosaic plot

En mosaic plot kan dessutom visa fler än två variabler i samma bild. Den här grafen visar variablerna *Class*, *Survived* och *Gender*.

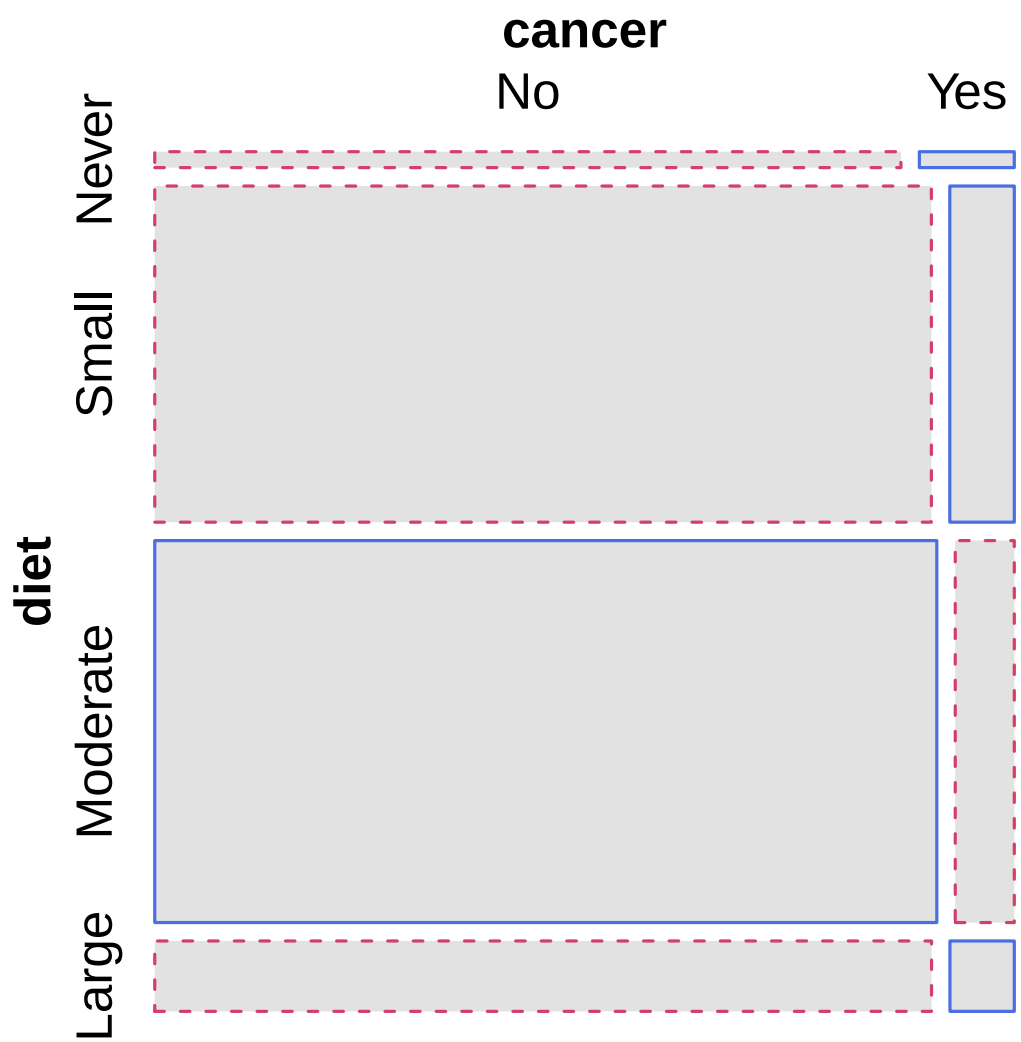


Stockholm University

Kategoriska variabler och samband - mosaic plot

Mosaic plot över deltagarna i studien om fisk och prostatacancer.

```
mosaic(~diet + cancer, data=fish, shade=TRUE,
       gp=shading_Friendly2, legend=FALSE) #Kräver paketet vcd
```



Stockholm University

Kategoriska variabler och samband - fisk och cancer

- Det är tydligt att deltagare i studien som diagnosticerades med cancer var överrepresenterade bland dem som aldrig åt fisk.
- Betyder det att vi har hittat ett samband? Ja och nej.
  - Ja, **bland deltagarna** i studien finns ett samband.
  - Nej, vi kan inte utan vidare säga att det finns ett samband som gäller för **hela befolkningen**.
- Det finns bara 14 deltagare i studien som fick prostatacancer och som aldrig/sällan äter fisk. Det är ett litet underlag om vi vill dra slutsatser som gäller hela befolkningen.
- Det kan vara slumpen som gör att vi ser ut att ha ett samband mellan två variabler.

Kategoriska variabler och samband - mardrömmar

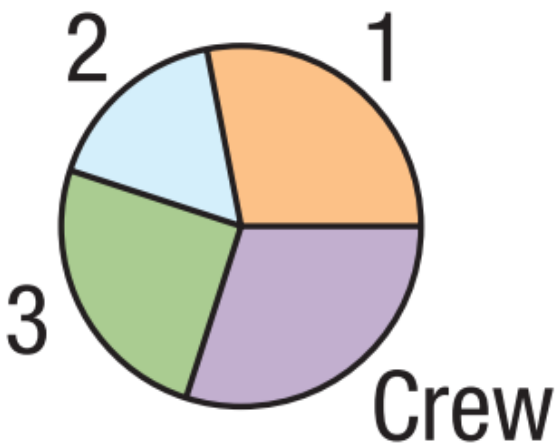
- När vi försöker avgöra om ett samband mellan två variabler i vårt datamaterial beror på slumpen eller om det beror på att de faktiskt finns ett mer generellt samband, då är vi inne på ett statistikområde som kallas **inferens**.
- Formella metoder för inferens ingår i del 2 av kursen, men redan nu kan vi ge en mer allmän bild av vad det är.

Kategoriska variabler och samband - Titanic

- En forskare skulle kunna ställa frågan: Finns det ett samband mellan vilka som överlevde Titanic-katastrofen och vilket typ av biljett de reste med?
- Vi kan se i vårt datamaterial att en större andel som reste i första klass överlevde jämfört med de som reste i tredje klass. Kan vi säga säkert att någon som reste första klass hade större möjligheter att överleva, eller kan det ha varit slumpen som gjorde att en större andel ur första klass klarade sig?
- I kursboken (sid 48-49) beskrivs en metod som skulle kunna användas för att ge svar på frågan.

Kategoriska variabler och samband - Titanic

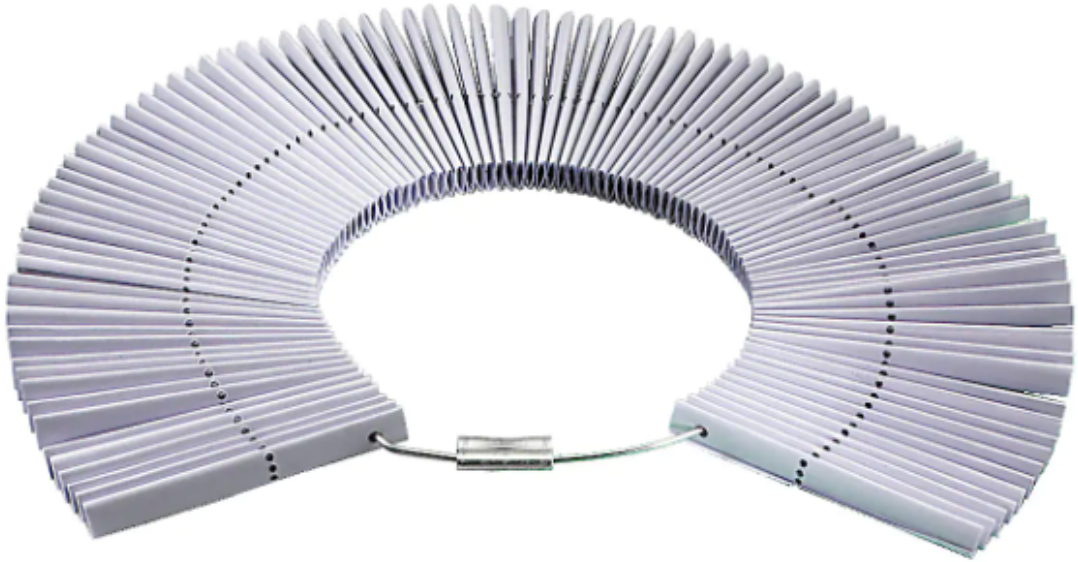
- Pajdiagrammet visar den faktiska fördelningen bland dem som överlevde.
- 1 står för 1:a klass, 2 för andra klass, 3 för tredje klass och Crew för besättning.



Kategoriska variabler och samband - Titanic

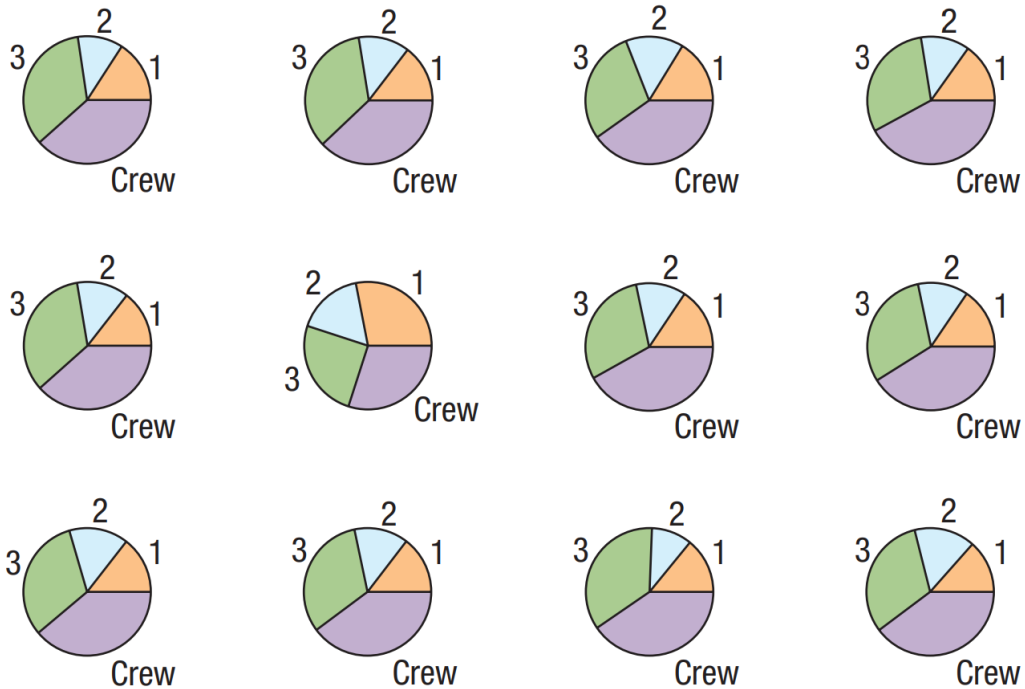
- En vanlig metod för att avgöra om det finns ett verkligt samband mellan två variabler är att ställa upp en **hypotes** om att det **inte** finns något samband mellan variablerna.
- I det här fallet skulle hypotesen vara att det saknas samband mellan biljettyp och överlevnad.
- Om hypotesen stämmer borde de 712 platserna i livbåtarna vara fördelade slumpvis mellan de 2208 passagerarna.

Kategoriska variabler och samband - Titanic



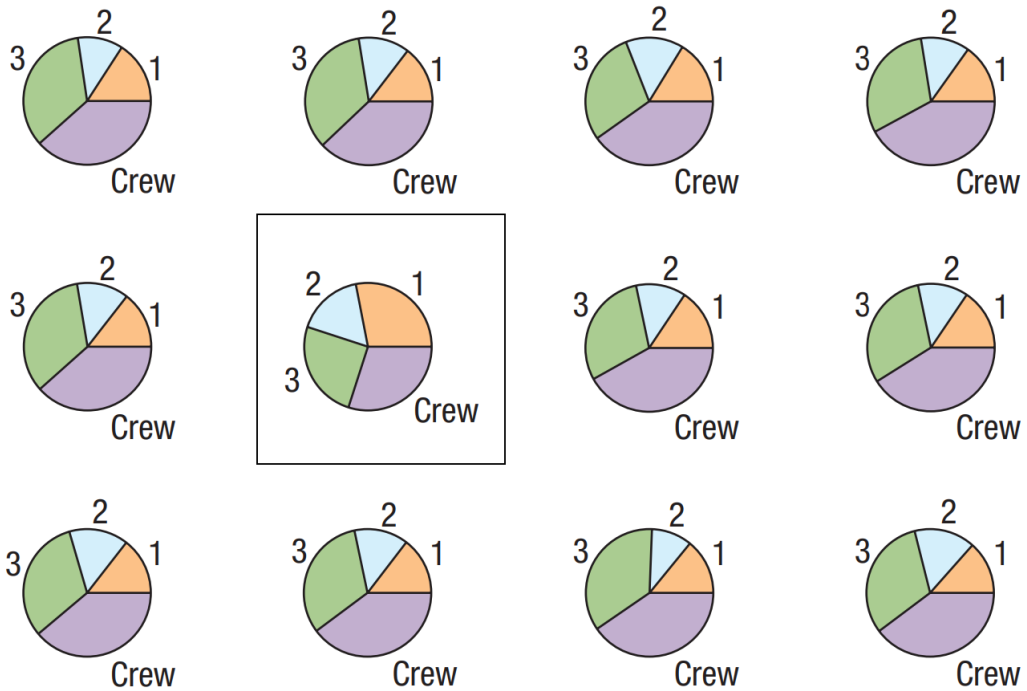
Kategoriska variabler och samband - mardrömmar

- Vi upprepar vår procedur att fördela platserna i livbåtarna flera gånger.
- Varje gång gör vi ett nytt pajdiagram som visar utfallet.



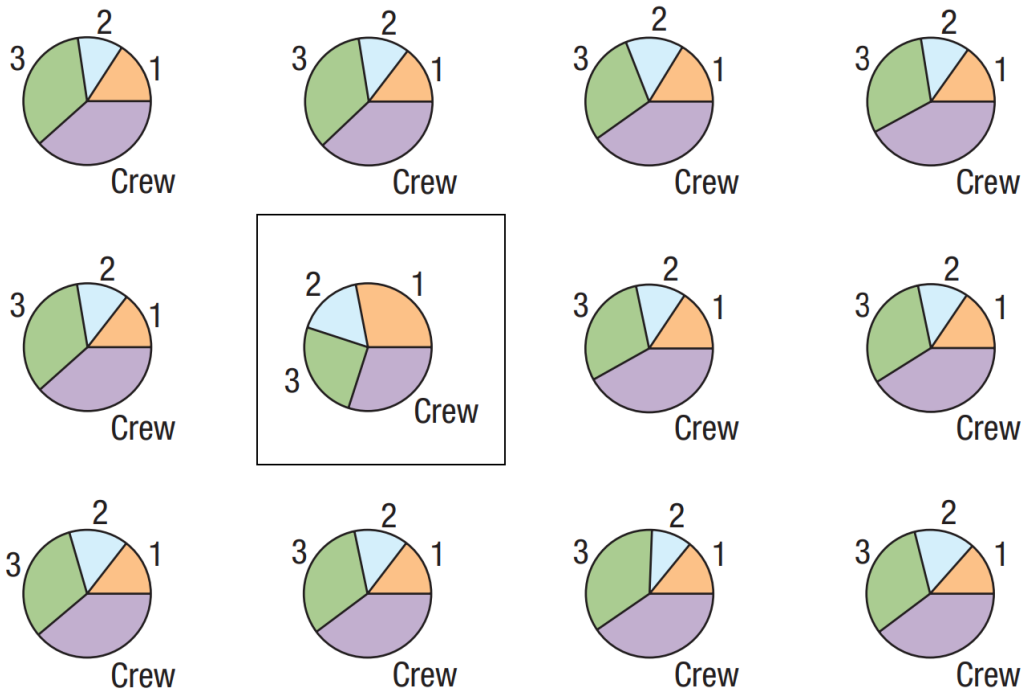
Kategoriska variabler och samband - Titanic

- Ser den verkliga fördelningen ut som om den är resultatet av samma slumpvisa process som använts för att skapa de övriga fördelningarna?



Kategoriska variabler och samband - Titanic

- Om den verkliga fördelningen är resultatet av samma slumpprocess som övriga fördelningar på bilden, då är det ett väldigt sällsynt (osannlikt) utfall.



Kategoriska variabler och samband - kausalitet

- Anta att vi har konstaterat att det fanns ett samband mellan biljettyp och överlevnad, betyder det att en förstaklassbiljett **medförde** att du hade en bättre chans att få en plats i en livbåt?
- **Nej, ett samband är inte samma sak som kausalitet!**
- Det kan finnas **andra orsaker** till sambandet än att den ena variabeln påverkar den andra. Kanske var social ställning den underliggande faktor?
- I fallet med cancer och fisk, kanske är det så att människor som är hälsomedvetna oftare äter fisk, samtidigt som de också äter mer grönsaker och ägnar sig mer åt fysisk aktivitet.

Kategoriska variabler och samband - kausalitet

Att fundera över

- Om det finns ett samband mellan **fler tv-apparater** i ett land och **högre medellivslängd**, beror det på att tv-tittande är nyttigt eller finns det någon annan bakomliggande variabel som spelar in?
- När du tittar på ett dataset, var medveten om att det alltid finns **dolda variabler (lurking variables)**, det vill säga variabler som inte är inkluderade i datamaterialet.

Kategoriska variabler och samband - Simpson's paradox

Simpson's paradox innebär att ett samband mellan två variabler kan försvinna när datamaterialet **delas in i olika grupper**. På sid 106 i kursboken hittar vi en korstabell som tycks peka på att män hade lättare än kvinnor att bli antagna som doktorander på UC Berkeley.

	Admit	Reject	%Admit
Men	1158	1493	43.7%
Women	557	1278	30.4%

Över 40 procent av männen som söktes blev antagna men bara 30 procent av kvinnorna. Det ser ut som att kvinnor blev negativt särbehandlade.

Kategoriska variabler och samband - Simpson's paradox

När vi ser samma siffror nedbrutna per fakultet (school) blir bilden en annan.

School	Male Admits	Female Admits	Male%	Female%
A	512	89	62.1%	82.4%
B	313	17	60.2%	68.0%
C	120	202	36.9%	34.1%
D	138	131	33.1%	34.9%
E	53	94	27.7%	23.9%
F	22	24	5.9%	7.0%

På fyra av de sex fakulteterna var det en större andel av de sökande kvinnorna än av de sökande männen som kom in. Hur går det ihop?

Kategoriska variabler och samband - Simpson's paradox

School	Male Admits	Female Admits	Male%	Female%
A	512	89	62.1%	82.4%
B	313	17	60.2%	68.0%
C	120	202	36.9%	34.1%
D	138	131	33.1%	34.9%
E	53	94	27.7%	23.9%
F	22	24	5.9%	7.0%

- Fler män sökte till school A och B, där det var lättare att komma in.
- Fler kvinnor sökte till school E och F, där det var svårare att komma in.

Kvinnor hade lägre antagningsgrad på grund av att de sökte program som var svårare att komma in på.