Statistik och dataanalys I - F13

Statistiska institutionen

Jonas Bjermo

VT2026

Innehåll föreläsning 13

- **Slumpvariabler** och **sannolikhetsfördelningar**
- Sammanfatta sannolikhetsfördelningar - **väntevärde** och **varians**
- **Kontinuerliga slumpvariable**r - en första titt på **normalfördelningen**.
- **Räkna med slumpvariabler** - skift, skalning, linjärkombination och summor
- **Beroende slumpvariabler** - **korrelation** och **kovarians**

Slumpvariabler

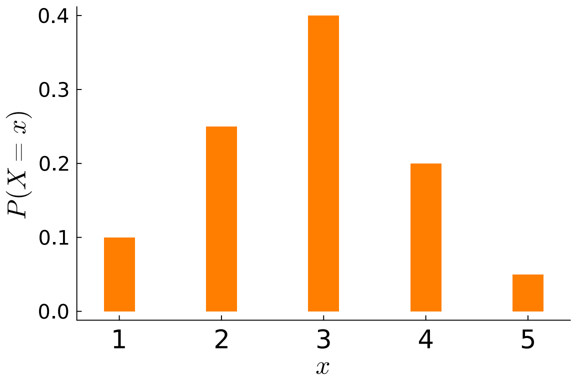
- En **slumpvariabel** mäter ett numeriskt värde från slumpmässigt försök.
  - en prick vid tärningskast → 1, två prickar → 2, ...
  - $X = \begin{cases} 0 & \text{om minusgrader} \\ 1 & \text{om plusgrader} \end{cases}$
- Vi skriver **slumpvariabler** med **stora bokstäver** X och deras numeriska **utfall** med **små bokstäver** x.
- Slumpvariabeln $X = \{\text{"}antalprickar\text{"}\}$ fick utfallet $x = 3$
- En slumpvariabel kan vara:
  - **Diskret** (utfallen går att räkna $0, 1, 2, \ldots, (\infty)$).
    Exempel: Antal prickar på en tärning. Totalt antal slantsinglingar innan första "krona" $0, 1, 2, \ldots, \infty$).
  - **Kontinuerlig** (utfallen går inte att räkna, många decimaler)
    Exempel: Temperatur, längd (med decimaler).

Sannolikhetsfördelning

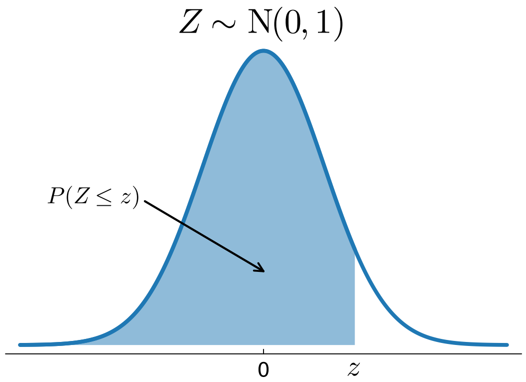
- Varje värde x som slumpvariabeln X kan anta har en **sannolikhet** $P(X = x)$ (eller bara $P(x)$).
- **Sannolikhetsfördelningen** för X är sannolikheterna för alla möjliga utfall. $\sum P(x) = 1$. (Diskret fördelning)

x	1	2	3	4	5	Σ
P(x)	0.10	0.25	0.40	0.20	0.05	1

Sannolikhetsfördelning



Diskret slumpvariabel

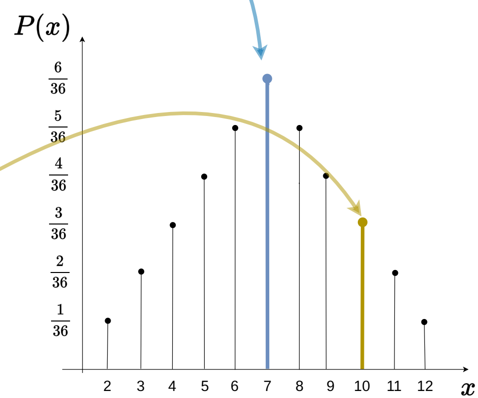


Kontinuerlig slumpvariabel

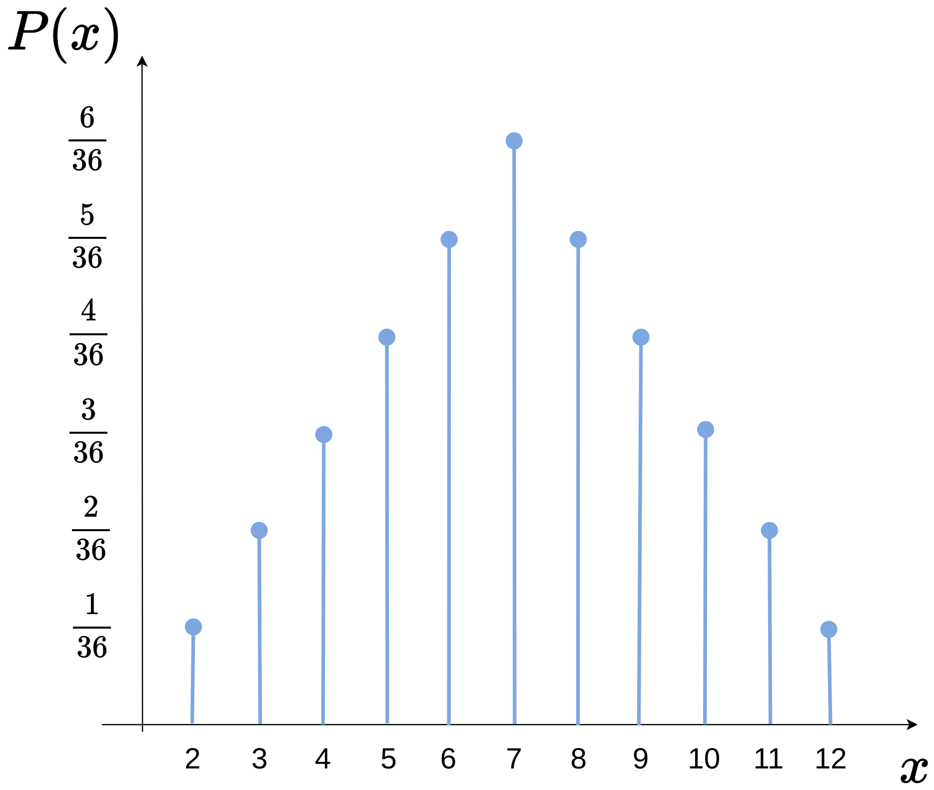
Fördelning av slumpvariabel - två tärningskast

- **Slumpvariabel**: Händelser $\Longrightarrow$ numeriska värden

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12



Fördelning av slumpvariabel - två tärningskast



Väntevärde

- **Medelvärdet** för ett **stickprov**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \ldots + \frac{1}{n}x_n$$

- X är en slumpvariabel med sannolikhetsfördelning $P(X = x)$.

- **Väntevärdet** för **slumpvariabeln** X är (**expected value**)

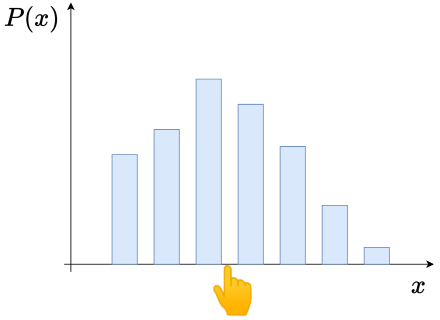
$$E(X) = \sum_{\text{alla } x} x \cdot P(x)$$

- Summan är över alla möjliga värden för X.
- Vi använder ofta grekiska bokstaven μ för $E(X)$. Grekiska bokstaven för m, m som i **mean**.
- Mer utförligt: om X kan anta värdena $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ så är

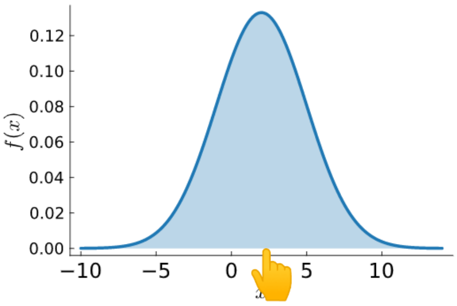
$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(x_i)$$

Väntevärde

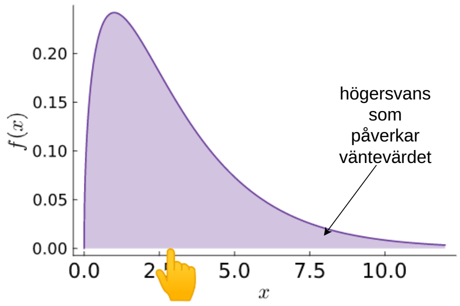
- Väntevärde - sannolikhetsfördelningens **jämviktspunkt**.
- Medelvärdet $\bar{x}$ påverkas mycket av extrema värden.
- Väntevärdet påverkas mycket av fördelningens 'svansar'.



Diskret slumpvariabel



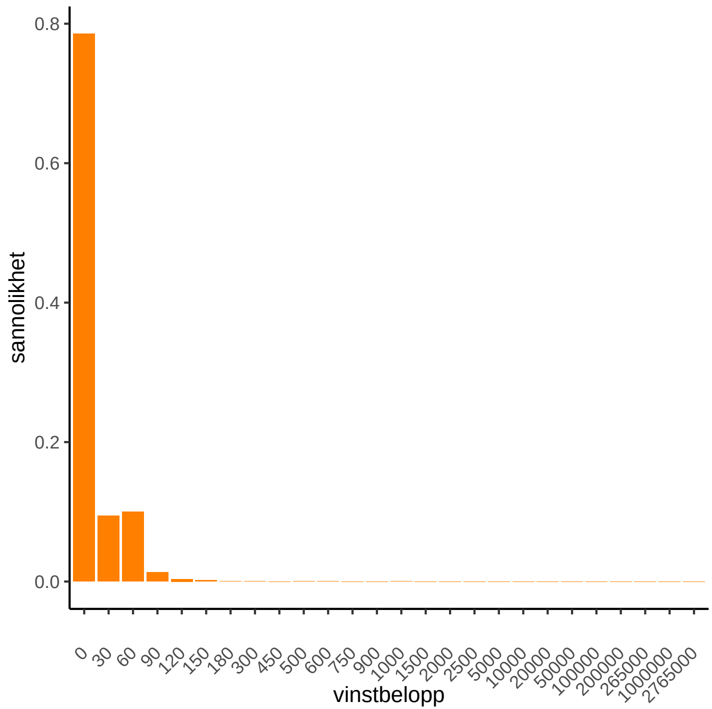
Kontinuerlig symmetrisk slumpvariabel



Kontinuerlig skev slumpvariabel

Förväntad vinst - trisslott

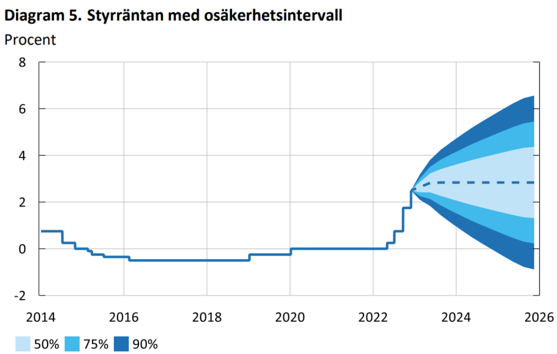
vinst	antal	probs
0	4713000	0.7855000000
30	565563	0.0942605000
60	601056	0.1001760000
90	78000	0.0130000000
120	21600	0.0036000000
150	11280	0.0018800000
180	3600	0.0006000000
300	2790	0.0004650000
450	375	0.0000625000
500	600	0.0001000000
600	600	0.0001000000
750	150	0.0000250000
900	180	0.0000300000
1000	480	0.0000800000
1500	240	0.0000400000
2000	150	0.0000250000
2500	45	0.0000075000
5000	90	0.0000150000
10000	132	0.0000220000
20000	21	0.0000035000
50000	9	0.0000015000
100000	6	0.0000010000
200000	3	0.0000005000
265000	26	0.0000043333
1000000	1	0.0000001667
2765000	3	0.0000005000
summa:	6000000	1

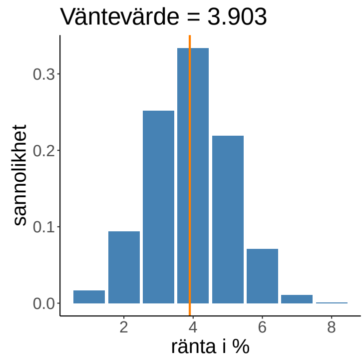


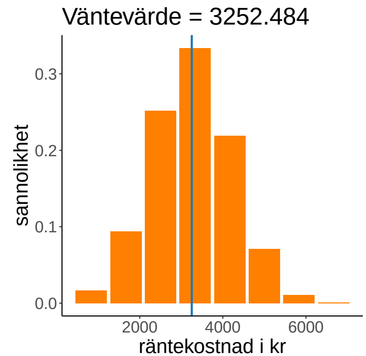
$$E(\text{vinst}) = 0 \cdot 0.7855 + 30 \cdot 0.0942605 + 60 \cdot 0.100176 + \cdots + 2765000 \cdot 0.0000005 = 14.7 \text{ kr}$$

Förväntad räntekostnad i slutet av 2023

- **Antag**: lån på 1 miljon. 1% högre ränta än styrräntan.







bankränta i %	sannolikhet	månadskostnad
1	0.017	833
2	0.094	1667
3	0.252	2500
4	0.334	3333
5	0.219	4167
6	0.071	5000
7	0.011	5833
8	0.001	6667

$$E(\text{bankränta}) = 1 \cdot 0.017 + 2 \cdot 0.094 + \ldots + 8 \cdot 0.001 \approx 3.9\%$$

$$E(\text{kostnad}) = 833 \cdot 0.017 + 1667 \cdot 0.094 + \ldots + 6667 \cdot 0.001 \approx 3252 \text{ kr}$$

Varians - ett mått på spridning

- Väntevärdet μ är bara **ett sammanfattande** mått av sannolikhetsfördelningen.
- Två fördelningar kan ha samma väntevärde men skilja sig i utbredning.
- Vi vill därför ha ett mått på fördelningens **spridning**.
- Medelavvikelse från μ som spridning?
  - Avvikelser från centrum $x - \mu$.
  - **Problem**: Negativa och positiva avvikelser tar ut varandra.
  - **Lösning**: Kvadrera avvikelserna $(x - \mu)^2$ först.
- **Variansen** (σ^2) för en slumpvariabel

$$Var(X) = \sum_{\text{alla x}} (x - \mu)^2 P(x)$$

- **Exempel**: $X =$ räntekostnad. $\mu = E(X) = 3252$.

$$Var(X) = (833 - 3252)^2 \cdot 0.017 + (1667 - 3252)^2 \cdot 0.094 + \ldots + (6667 - 3252)^2 \cdot 0.001 \approx 965553.1 \text{ kr}^2$$

Standardavvikelse - ett mått på medelspridning

- **Variansen** (σ^2) för en slumpvariabel

$$Var(X) = \sum_{\text{alla x}} (x - \mu)^2 P(x)$$

Variansen har enheter i kvadrat. Svårtolkat.

- **Standardavvikelsen** har samma enheter som slumpvariabeln.

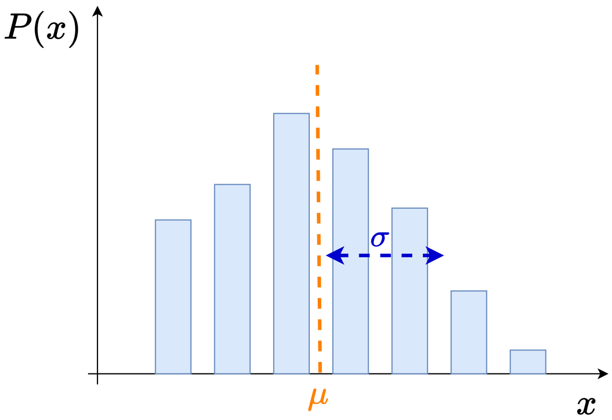
$$\sigma = SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

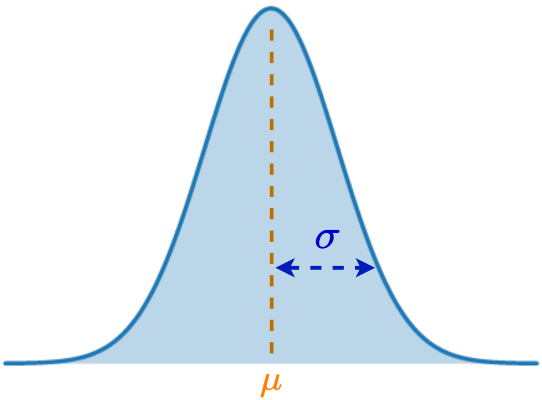
- **Exempel**: X = räntekostnad. Standardavvikelsen betecknas σ.

$$\sigma = \sqrt{965553.1} \approx 982.63\text{kr}$$

- En genomsnittlig avvikelse från väntevärdet är ca. 983 kr.

Väntevärde och standardavvikelse



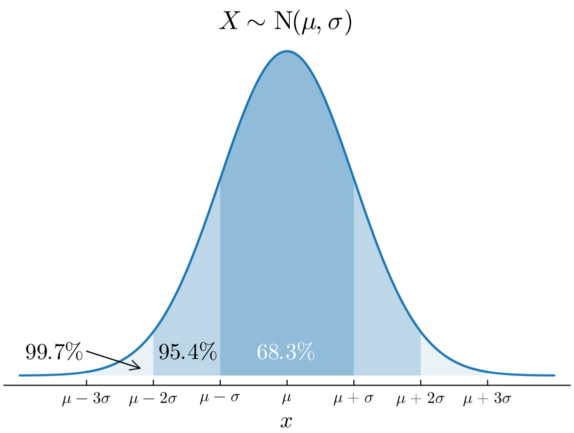


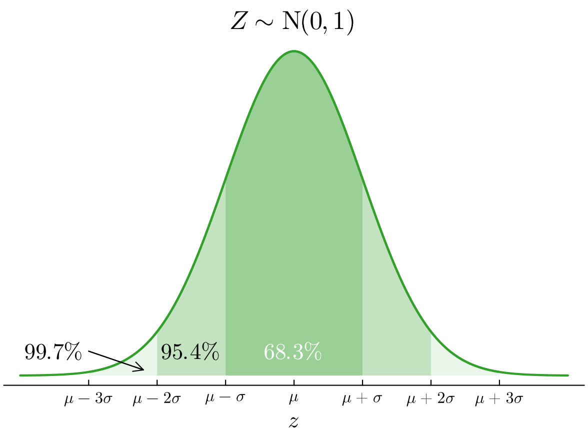
Normalfördelning - 68-95-99.7% regeln

- **Normalfördelning**, $X \sim N(\mu, \sigma)$
  - – Väntevärde $E(X) = \mu$
  - – Standardavvikelse $SD(X) = \sigma$

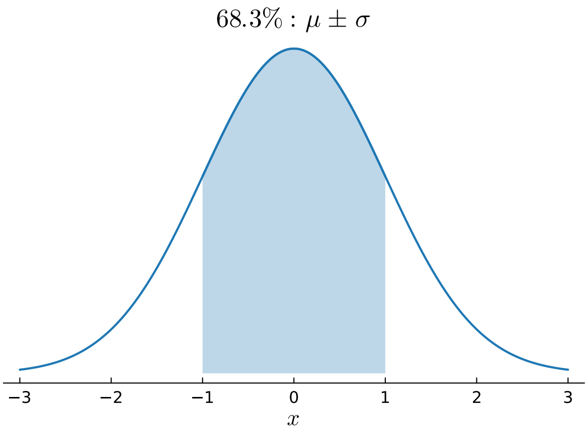
- **Parametrarna** μ och σ är just väntevärdet och standardavvikelsen!

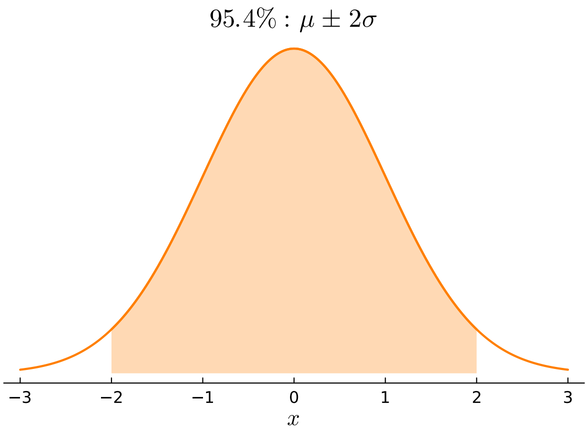
- **68-95-99.7** % regeln

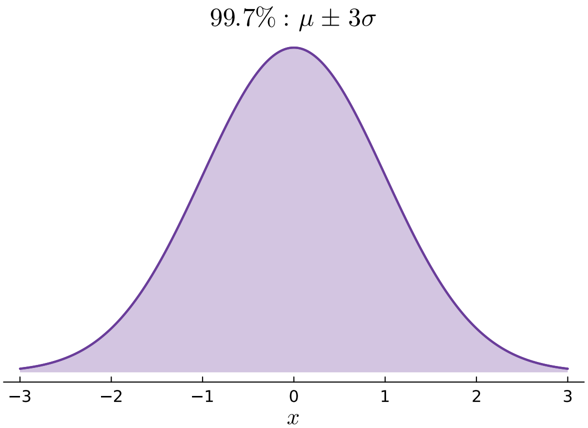




68-95-99.7 % regeln



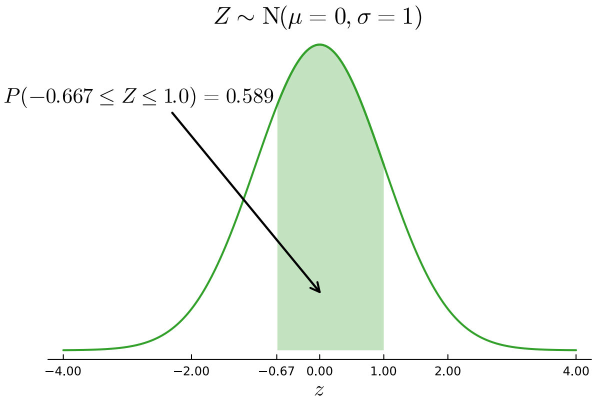




Kontinuerliga slumpvariabler och täthetsfunktionen

- **Kontinuerlig slumpvariabel** kan anta vilka värden som helst, men $P(X = x) = 0$ för alla x!
- **Täthetsfunktion**: $f(x)$. Men ger **inte** sannolikheter
  - $f(x) > 0$ för alla x. Nu är även $f(x) > 1$ möjligt.
  - Arean under $f(x)$ ska vara 1.
- **Täthetsfunktionen** används för att **beräkna sannolikheter**:

$$P(a \leq X \leq b) = \text{arean under } f(x) \text{ mellan } a \text{ och } b$$



- **SDAIII**: beräkna arean under funktionen med integration.

Normalfördelning - interaktivt

Normalfördelningen

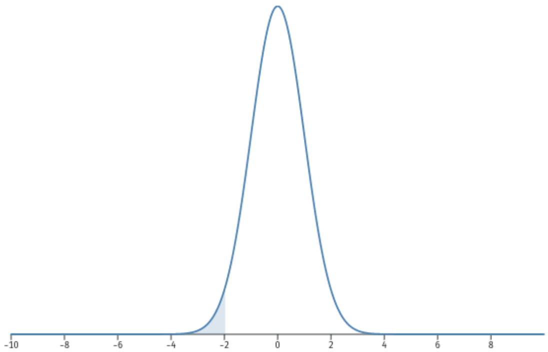
μ :	0	
σ :	1	
Kvantil:	-1.96	

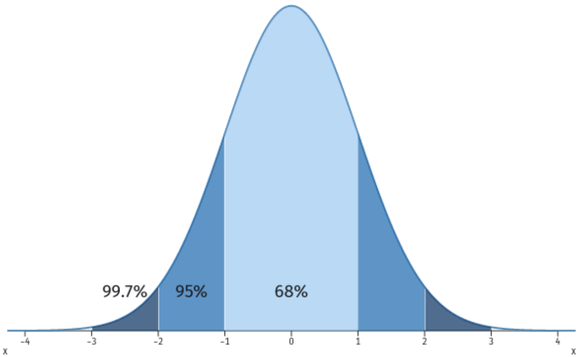
Om $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ så gäller att

$E(X) = \mu = 0.00$

$Var(X) = \sigma^2 = 1.00$

$P(X \leq -1.96) = 0.02500$





Mattias Villani Normalfördelningen

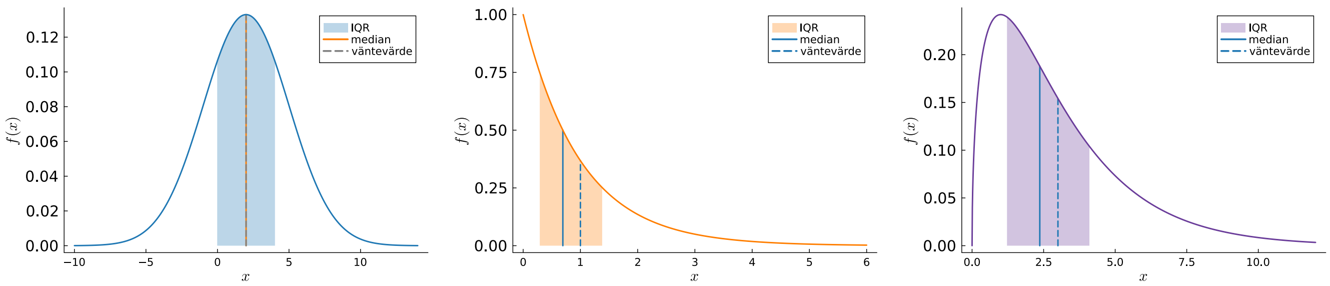
Observable

Median och interkvartilavstånd

- **Median**, m: värde med 50 % av sannolikhetsmassan till vänster.

$$P(X \leq m) = 0.5$$

- 10%-**kvantil**: 10% av sannolikhetsmassan till vänster.
- **Kvartiler**: 25%. 50 %, 75%
- **Interkvartilavstånd (IQR)**: avstånd mellan 25%-kvartil och 75%-kvartil.



Skifta slumpvariabler

- **Exempel**: X ränta i procent på mitt banklån. $E(X) = 3.9\%$.
- Sämre förhandlare: bankräntan 2% högre än min.
- Din ränta: Y=X+2. Vi **skiftar/förskjuter** slumpvariabeln.
- Måste vi göra om alla beräkningar för dig? Nej.

$$E(Y) = E(X) + 2 = 3.9 + 2 = 5.9\%$$

Väntevärde - skiftade slumpvariabler

$$E(X \pm c) = E(X) \pm c \qquad \text{för godtycklig konstant } c$$

- Variansen **ändras inte** av ett skift.

Varians - skiftade slumpvariabler

$$Var(X \pm c) = Var(X) \qquad \text{för godtycklig konstant } c$$

Skala slumpvariabler

- **Exempel**: får dra av 30% på skatten för räntekostnad.
- Räntekostnad efter skatt: $Y = 0.7 \cdot X$. Vi **skalar** slumpvariabeln.

Väntevärde - skalning

$E(aX) = a \cdot E(X)$ för godtycklig konstant a

Varians - skalning

$Var(aX) = a^2 \cdot Var(X)$ för godtycklig konstant a

Standardavvikelse - skalning

$SD(aX) = |a| \cdot SD(X)$ för godtycklig konstant a

- $E(Y) = E(0.7 \cdot X) = 0.7 \cdot E(X) = 0.7 \cdot 3252 = 2276.4$ kr
- $SD(Y) = SD(0.7 \cdot X) = |0.7| \cdot SD(X) = 0.7 \cdot 982.63 \approx 687.84$ kr

Linjärkombinationer av slumpvariabler

- **Linjärkombination** av slumpvariabel = **skift och skalning**.

$$Y = c + aX$$

Väntevärde - linjärkombination

$E(c \pm aX) = c \pm aE(X)$ för konstanter a och c

Varians - linjärkombination

$Var(c \pm aX) = a^2 \cdot Var(X)$ för konstanter a och c

- **Exempel**: ett företags produktionskostnader
  - X antal efterfrågade enheter (slumpvariabel).
  - Fast produktionskostnad c
  - Rörlig produktionskostnad per enhet a
  - Produktionskostnad: $Y = c + aX$

Standardisering

- Om $X \sim N(\mu, \sigma)$ så gäller att

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

- **Standardisering**: från allmän normalfördelning till standard normal genom **skift** och **skalning**

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

- Beräkna sannolikheter för $X \sim N(\mu, \sigma)$ från standard normal $P(X \leq x) = P(X - \mu \leq x - \mu) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

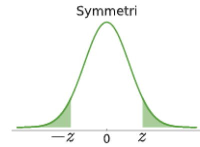
- **Exempel**: $X \sim N(2, 3)$, vad är sannolikheten att $X \leq 5$?

$$P(X \leq 5) = P\left(\frac{X - 2}{3} \leq \frac{5 - 2}{3}\right) = P\left(Z \leq 1\right) = 0.841$$

Frame Normalfördelning - Z-tabell

Normalfördelning

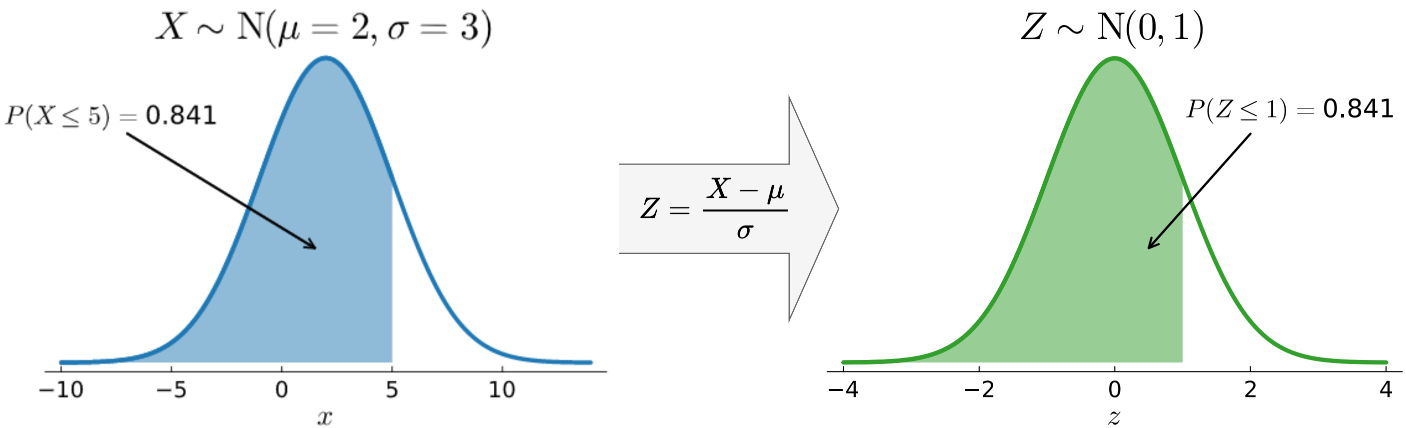
Tabellen ger sannolikheten $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ för olika z där Z är standardnormal, $Z \sim N(0,1)$.
Sannolikheter i den vänstra svansen fås genom symmetri: $P(Z \leq -z) = 1 - P(Z \leq z)$.



Andra decimalen i z

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

Standardisering



Normalfördelning i R

- $X \sim N(\mu, \sigma)$

Beräkning	R kommando
$f(2)$	`dnorm(x = 2, mean = 1, sd = 1.5)`
$P(X \leq 2)$	`pnorm(q = 2, mean = 1, sd = 1.5)`
Kvantil	`qnorm(p = 0.5, mean = 1, sd = 1.5)`
10 slumptal	`rnorm(n = 10, mean = 1, sd = 1.5)`

Väntevärde - summa av slumpvariabler

- X och Y är två olika slumpvaribler
  - X antal prickar på 1:a tärningen
  - Y antal prickar på 2:a tärningen
  - $X + Y$ = totalt antal prickar på båda tärningarna.

Väntevärde - summa av slumpvariabler

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Varians - summa av oberoende slumpvariabler

- För **variansen** måste vi vara försiktiga med eventuella **beroenden mellan variabler**.
- **Vadslagning**:
  - X är din vinst/förlust i ett vad.
  - Y är din motståndares vinst/förlust.
  - $X + Y = 0$, dvs. har ingen varians alls! Perfekt beroende.
- **Aktieportfölj**:
  - X är avkastning aktie.
  - Y är avkastning på annan aktie.
  - Total avkastning: $X + Y$. Varians?
- Om vi antar att X och Y är **oberoende** blir variansen enkel:

Varians - summa av oberoende slumpvariabler

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Väntevärde och varians - många oberoende variabler

- Låt X_1,X_2 och X_3 vara tre oberoende slumpvariabler.

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$$

$$Var(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3)$$

Väntevärde - summa av slumpvariabler

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$

Varians - summa av oberoende slumpvariabler

$$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n)$$

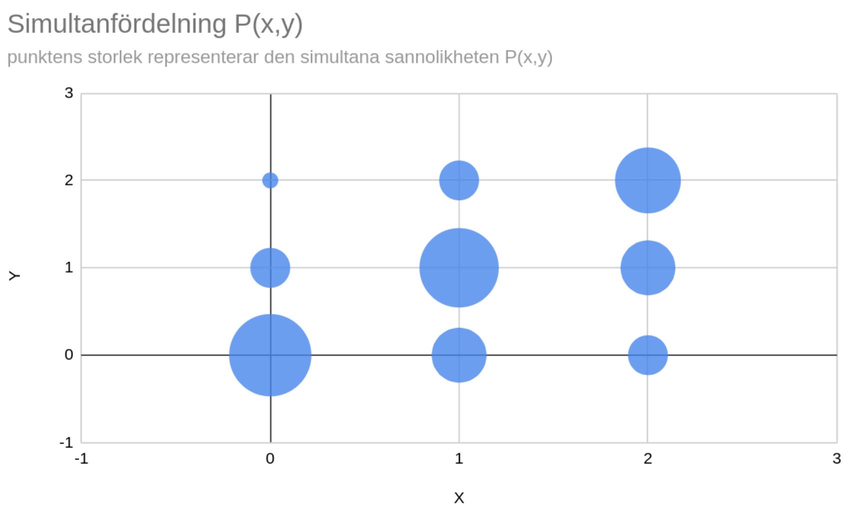
Simultanfördelning - två diskreta variabler

- X och Y diskreta variabler, t. ex.
  - $X =$ antal mål som hemmalaget gör
  - $Y =$ antal mål som bortalaget gör

		Y			
		0	1	2	**Marginal X**
	0	0.25	0.05	0.02	0.32
X	1	0.1	0.23	0.05	0.38
	2	0.05	0.1	0.15	0.3
Marginal Y		0.4	0.38	0.22	1

Varje marginalfördelning måste också summera till 1.

Summan av alla simultansannolikheter måste vara 1



Simultanfördelning - två diskreta variabler

			Y		
		0	1	2	**Marginal X**
	0	0.25	0.05	0.02	0.32
X	1	0.1	0.23	0.05	0.38
	2	0.05	0.1	0.15	0.3
Marginal Y		0.4	0.38	0.22	1

- **Väntevärden**

$$E(X) = \sum_{\text{alla x}} x \cdot P(x) = 0 \cdot 0.32 + 1 \cdot 0.38 + 2 \cdot 0.30 = 0.98$$

$$E(Y) = \sum_{\text{alla y}} y \cdot P(y) = 0 \cdot 0.40 + 1 \cdot 0.38 + 2 \cdot 0.22 = 0.82$$

- **Varianser**

$$V(X) = \sum_{\text{alla x}} (x - E(X))^2 \cdot P(x) = (0 - 0.98)^2 \cdot 0.32 + (1 - 0.98)^2 \cdot 0.38 + (2 - 0.98)^2 \cdot 0.30 = 0.62$$

$$V(Y) = \sum_{\text{alla y}} (y - E(Y))^2 \cdot P(y) = (0 - 0.82)^2 \cdot 0.40 + (1 - 0.82)^2 \cdot 0.38 + (2 - 0.82)^2 \cdot 0.22 = 0.59$$

Simultanfördelning - två diskreta variabler

			Y		
		0	1	2	**Marginal X**
	0	0.25	0.05	0.02	0.32
X	1	0.1	0.23	0.05	0.38
	2	0.05	0.1	0.15	0.3
Marginal Y		0.4	0.38	0.22	1

- **Kovarians** mellan X och Y

$$Cov(X,Y) = \sum_{\text{alla (x,y) par}} (x - E(X))(y - E(Y)) \cdot P(x,y)$$

där

$$Cov(X,Y) = (0-0.98)(0-0.82)\cdot 0.25 + (1-0.98)(0-0.82)\cdot 0.10 + (2-0.98)(0-0.82)\cdot 0.05$$

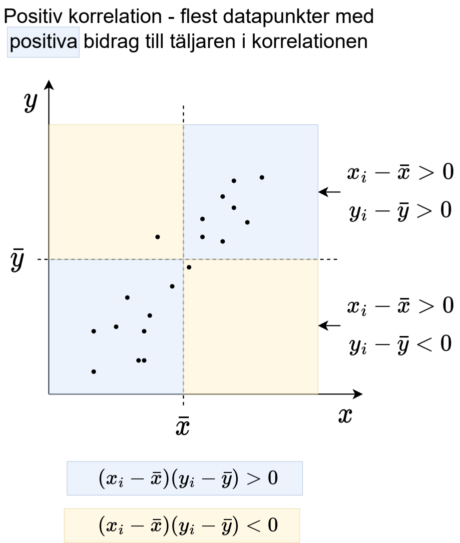
$$+\ldots+(2-0.98)(2-0.82)\cdot 0.15 = 0.326$$

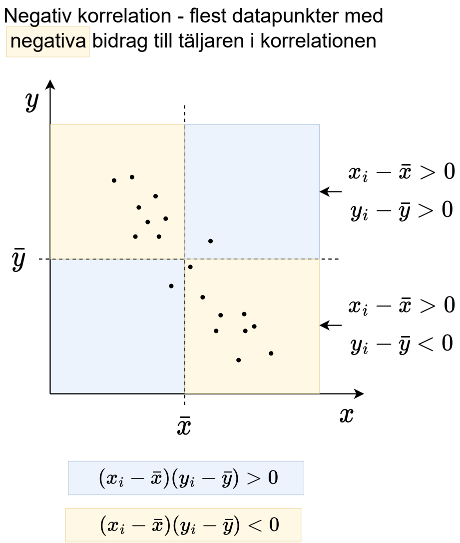
- **Korrelation** mellan X och Y

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{SD(X)\cdot SD(Y)} = \frac{0.326}{\sqrt{0.62}\sqrt{0.588}} = 0.54$$

Korrelation kontinuerliga variabler - Stickprov

- **Korrelation**: linjärt beroende mellan variabler.





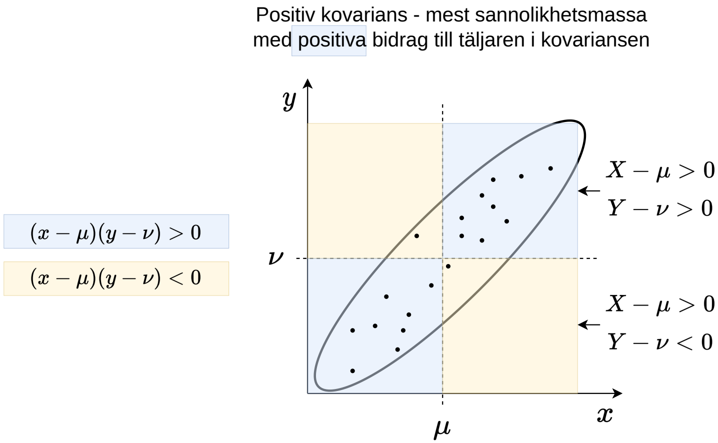
- **Stickprovskovarians**:

$$s_{xy} = Cov(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

Korrelation kontinuerliga variabler - Sannolikhetsmodell

- Låt X ha väntevärde μ och Y väntevärde ν
- **Kovarians**: linjärt beroende mellan slumpvariabler.

$$Cov(X,Y) = E\left((X-\mu)(Y-\nu)\right)$$



- **Korrelation** $(-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1)$

$$Corr(X,Y) = \rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Variansen av en summan av beroende variabler

Varians - summa av beroende slumpvariabler

$$V(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

- **Positiv kovarians** - **variansen** för summan**större** än vid oberoende.
- **Negativ kovarians** - **variansen** för summan **mindre** än vid oberoende
- Säker aktieportfölj: välj aktier vars priser tenderar att röra sig i olika riktningar. Negativ kovarians.

Credits

Dessa slides är gjorda utifrån slides som skapades för kursen statistik och dataanalys 1 av Mattias Villani HT 2023, och har modifierats av Oscar Oelrich VT 2024, Oskar Gustafsson för VT 2025, och Jonas Bjermo VT 2026.