

Statistik och Dataanalys I

Föreläsning 16 - Samplingfördelning och konfidensintervall för en andel

Mattias Villani



Statistiska institutionen
Stockholms universitet



mattiasvillani.com



@matvil



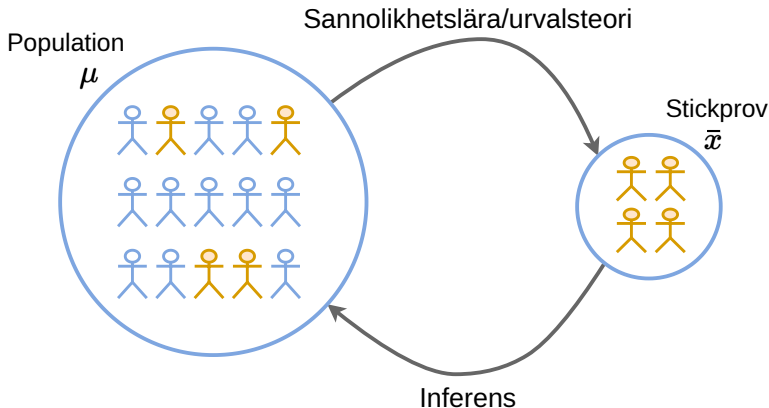
@matvil



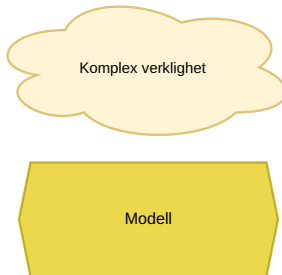
mattiasvillani

- **Sannolikhetsmodeller** och verkligheten.
- **Samplingfördelningen**.
- **Samplingfördelningen** för en **andel**.
- **Samplingfördelningen** för **medelvärdet**.

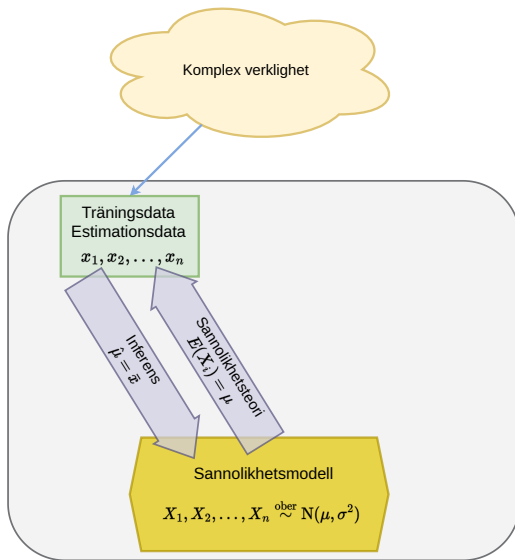
Population och stickprov - ändliga populationer



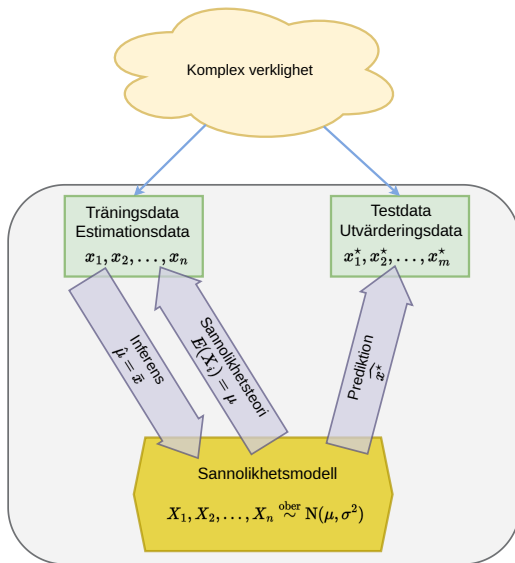
Modeller som en förenkling av verkligheten



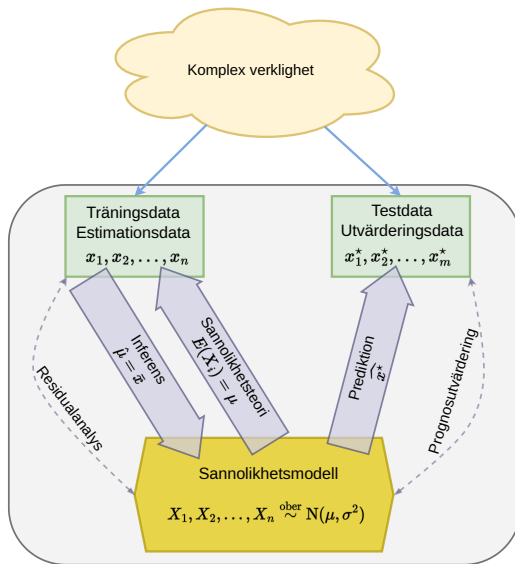
Sannolikhetsmodeller och inferens



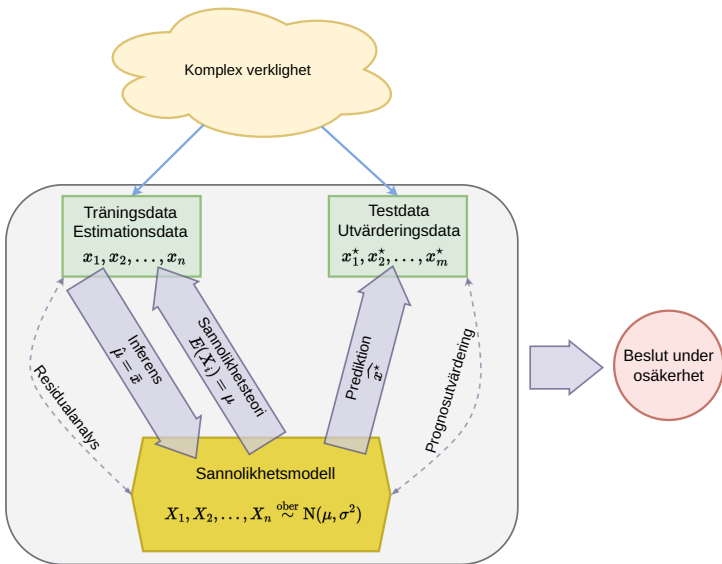
Sannolikhetsmodeller möter verkligheten - prediktion



Modellering är en iterativ process



Slutmålet är ofta beslutsfattande i en osäker värld

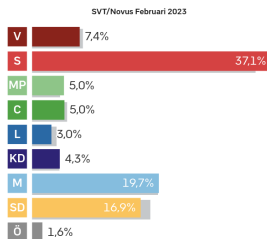


Statistika, estimator och estimat

- **Statistika** - kvantitet som beräknas från ett stickprov.
- Andelen som röstar på socialdemokraterna i en valundersökning.
- Medelvärde \bar{x} av inkomster för personer i ett stickprov.
- Använder en statistika för **skatta en populationsparameter**.
- **Populationsväntevärdet** μ skattas med **estimatorn** \bar{X} .
- För ett givet stickprov x_1, x_2, \dots, x_n får vi ett **estimat** \bar{x} av μ .

Väljarundersökningar

- Vilket parti skulle du rösta på om det var val idag?
- SVT/Novus. **Stickprov** med $n = 3539$ personer.



- Kontaktade via telefon eller sms. Representativt? Bortfall?
- **Populationsparameter**: andelen S-röstare i populationen p .
- **Population**: röstberättigade i Sverige.
- **Estimator** för att skatta p : andelen S-röstare i stickprovet.
- **Estimat** i SVT/Novus undersökning:

$$\hat{p} = \frac{1313}{3539} \approx 0.371 \text{ dvs } 37.1\%$$

Samplingfördelningen

- Men $\hat{p} = 0.371$ är bara ett osäkert estimat från **ett** slumpmässigt valt stickprov.
- Om vi hade frågat 3539 **andra personer** hade vi säkerligen fått ett annat estimat.
- **Samplingfördelningen:**
 - ▶ fördelningen för en **estimator**
 - ▶ **över alla möjliga stickprov** av storleken n .
- **Statistiskt säkerställd** förändring från månaden innan?
- **Konfidsensintervall** för p : med 95% **säkerhet/konfidens** täcker intervallet $(0.355, 0.387)$ den sanna andelen p .

Samplingfördelningen - ändlig population

Samplingfördelning för en andel - Ändlig population

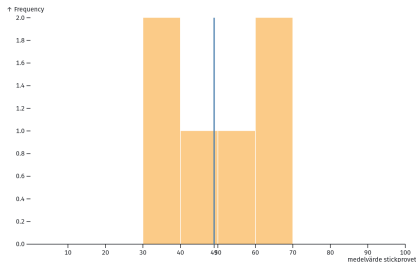
Pop.storlek: N 

Urvalstorlek: n 

Population: [24,79,41,52] med medelvärde 49.000

Det finns totalt $\binom{4}{2} = 6$ möjliga stickprov av storlek $n=2$.

Stickprov	Urval	Medelvärde
1	24,79	51.5
2	24,41	32.5
3	24,52	38
4	79,41	60
5	79,52	65.5
6	41,52	46.5



Samplingfördelningen för en andel

- **En andel är egentligen ett medelvärde** av binära variabler

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{om person } i \text{ röstar på } S \\ 0 & \text{om person } i \text{ inte röstar på } S \end{cases}$$

- **Populationsparameter** med N personer i populationen:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

- **Modell:** $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$.

- $\stackrel{\text{iid}}{\sim}$ betyder 'independent and identically distributed'.

Oberoende och likafördelade.

- **Sampling utan återläggning** \implies egentligen inte oberoende med samma sannolikhet p .
- Oberoende Bernoulli ändå OK modell, **om stickprovet är max 10% av populationen**. Korrektur ändlig population.

Samplingfördelningen för en andel

- Vi skattar p med andelen i stickprovet

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

- Vilken fördelning har \hat{p} ?
- Eftersom $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$ så vet vi att:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Binomial}(n, p)$$

$$E(Y) = np \quad \text{och} \quad SD(Y) = \sqrt{npq}$$

- $\hat{p} = \frac{1}{n} Y$, så [F13 - skalning: $E(aX) = aE(X)$ där $a = \frac{1}{n}$]

$$E(\hat{p}) = \frac{1}{n} E(Y) = \frac{1}{n} np = p$$

och [F13 - skalning: $SD(aX) = |a|SD(X)$]

$$SD(\hat{p}) = \left| \frac{1}{n} \right| \sqrt{npq} = \frac{1}{n} \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Väntevärdesriktig estimator och stora talens lag

- Vi skattar p med andelen i stickprovet

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

- Vi vet nu att

$$E(\hat{p}) = p \quad \text{och} \quad SD(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

- Estimatoren \hat{p} är **väntevärdesriktig** för populationsandelen p

$$E(\hat{p}) = p$$

- **Väntevärdesriktig = korrekt i genomsnitt**, sett över alla möjliga stickprov.

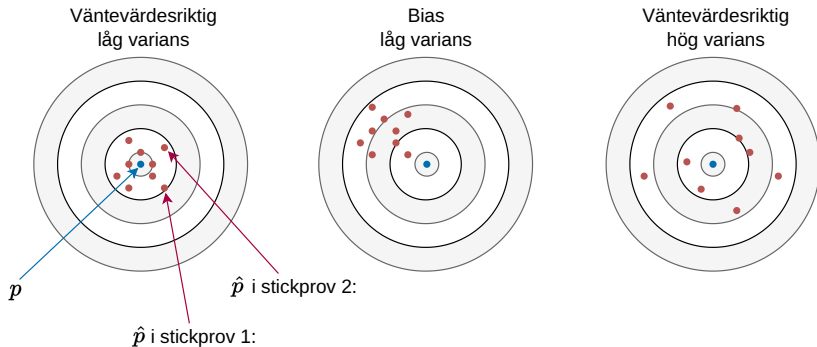
- **Bias**

$$\text{Bias}(\hat{p}) = E(\hat{p}) - p = 0$$

- $SD(\hat{p})$ minskar när stickprovstorleken n ökar.

- **Stora talens lag**: \hat{p} kommer vara nära p i stora stickprov.

Väntevärdesriktighet, bias och varians



Samplingfördelningen för \hat{p} - normalapproximation

- Väntevärde och standardavvikelse för estimatoren \hat{p}

$$E(\hat{p}) = p \quad \text{och} \quad SD(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

- **Normalapproximation**

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

- När är normalapproximationen tillräckligt bra?
 - ▶ stickprovsstorleken $n \geq 30$ (centrala gränsvärdessatsen)
 - ▶ $np \geq 10$ och $nq \geq 10$.
 - ▶ **oberoendeantagandet** måste vara (hyfsat) uppfyllt.
 - ▶ stickprovet är **högst 10% av populationen**.

Stora talens lag - andel

Stora talens lag - normalapproximation av andel

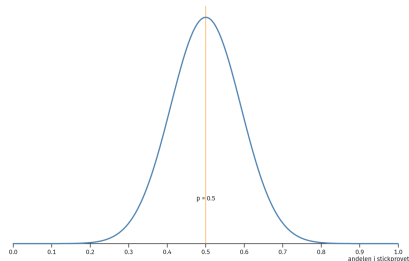
Normalapproximation av samplingfördelningen för en andel

n 
 p 

Stickprovet $n = 30$ är större än 30. ✓

Antal förväntade lyckade $np = 15.0$ är större än 10. ✓

Antal förväntade misslyckade $nq = 15.0$ är större än 10. ✓



Normalapproximation av samplingfördelningen för en andel.

Exempel - röstandel för S

- $\hat{p} = 0.371$, men \hat{p} varierar från stickprov till stickprov.

- **Normalapproximation**

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

- **Standardavvikelse för estimator**

$$SD(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

- Men vi vet inte p ! Lösning: sätt in skattning \hat{p} istället för p .

- **Standardfel för estimator**

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.371(1 - 0.371)}{3539}} \approx 0.0081$$

- Kan vi använda normalapproximation?

- ▶ stickprovsstorleken $n = 3539 \geq 30$. ✓
- ▶ $n\hat{p} = 3539 \cdot 0.371 = 1312.97 \geq 10$ ✓
- ▶ $n\hat{q} = 3539 \cdot (1 - 0.371) = 2226.03 \geq 10$ ✓
- ▶ **Oberoendeantagandet**. Sluppmässigt urval. ✓
- ▶ **Högst 10% av populationen**. Definitivt OK! ✓

Normalapproximation för en andel

■ Normalapproximation

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

■ 68-95-99.7 regeln:

- ▶ $P(\hat{p} \text{ är högst en standardavvikelse från } p) = 0.683$
- ▶ $P(\hat{p} \text{ är högst två standardavvikelser från } p) = 0.954$
- ▶ $P(\hat{p} \text{ är högst tre standardavvikelser från } p) = 0.997$

■ Vanligt att vi vill ha “rundare” sannolikheter:

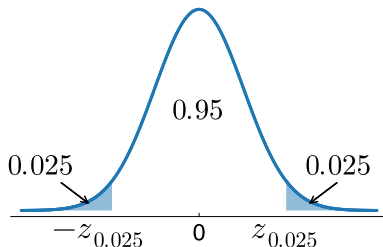
- ▶ $P(\hat{p} \text{ är högst 1.645 standardavvikelser från } p) = 0.90$
- ▶ $P(\hat{p} \text{ är högst 1.96 standardavvikelser från } p) = 0.95$
- ▶ $P(\hat{p} \text{ är högst 2.576 standardavvikelser från } p) = 0.99$

Kritisk värde för 95%-igt konfidensintervall

■ Intervall med sannolikhet 0.95:

- ▶ Sannolikhetsmassa **utanför** intervallet: $\alpha = 0.05$
- ▶ Sannolikhetsmassa **i vardera svans**: $\alpha/2 = 0.025$
- ▶ $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$
- ▶ 2.5% av sannolikhetsmassan till *höger* om $z_{0.025}$.
- ▶ 97.5% av sannolikhetsmassan till *vänster* om $z_{0.025}$.
- ▶ $z_{0.025}$ från Z-tabell, det z där $P(Z \leq z) = 1 - 0.025 = 0.975$

95%-igt intervall: $z_{0.025} = 1.96$

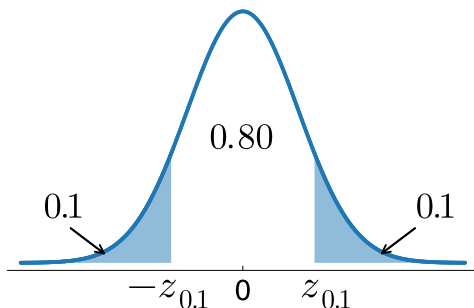


Kritisk värde för 80%-igt konfidensintervall

■ Intervall med sannolikhet 0.8:

- ▶ $\alpha = 0.2$
- ▶ $z_{\alpha/2} = z_{0.1} = 1.282$
- ▶ “värdet som har 10% av sannolikhetsmassan till höger om sig i standard normalfördelning”

80%-igt intervall: $z_{0.1} = 1.282$

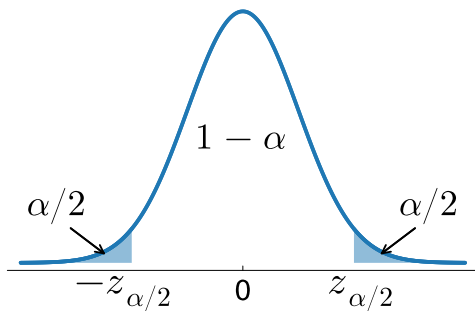


Kritisk värde - konfidensintervall $1 - \alpha$ sannolikhet

■ **Kritiskt värde för ett intervall** med sannolikhet $1 - \alpha$:

- ▶ Sannolikhetsmassa **utanför** intervallet: α
- ▶ Sannolikhetsmassa **i vardera svans**: $\alpha/2$
- ▶ $z_{\alpha/2}$ "har $\alpha/2$ av sannolikhetsmassan till höger om sig i standard normalfördelning"

$1 - \alpha$ intervall



95%-igt konfidensintervall för en andel

■ Normalapproximation

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Approximativt 95%-igt konfidensintervall för andel p

$$\hat{p} \pm z_{0.025} \cdot SE(\hat{p})$$

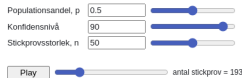
där

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

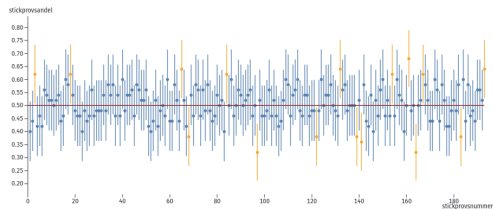
- Intervall från **givet stickprov** antingen täcker eller missar p .
- Ett 95%-igt konfidensintervall kommer innehålla populationsvärdet p **i 95% av alla möjliga stickprov**.
- “Den sanna andelen är i intervallet **med 95% säkerhet**”.

Konfidsensintervall för en andel - interaktivt

Konfidsensintervall för en andel - normalapproximation



Av totalt 193 stickprov innehöll 177 st (**91.710%**) av de 90%-iga konfidsensintervallen den sanna populationsandelen $p = 0.5$.



Konfidsensintervall för en andel

■ Normalapproximation

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Approximativt $(1-\alpha)\%$ -igt konfidsensintervall för andel p

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{p})$$

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

■ **Felmarginal** (eng. margin of error, ME): $z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{p})$

■ Konfidsensintervall:

$$\text{Estimat} \pm \text{Felmarginal}$$

■ Trade-off: **högre konfidensnivå \implies större felmarginal.**

■ SDM-boken: z^* istället för $z_{\alpha/2}$.

SDM-boken avrundar också ofta $z_{0.025} = 1.96$ till $z^* = 2$.

Exempel - röstandel för S

- **Estimat:** $\hat{p} = 0.371$.
- **Standardfel** för estimator

$$SE(\hat{p}) = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0.371(1 - 0.371)}{3539}} \approx 0.0081$$

- 95% konfidensintervall för andelen S-röstare i populationen:

$$\begin{aligned}\hat{p} \pm z_{0.025} \cdot SE(\hat{p}) \\ 0.371 \pm 1.96 \cdot 0.0081 \\ 0.371 \pm 0.015876\end{aligned}$$

vilket ger intervallet (0.355, 0.387).

- Intervallet (0.355, 0.387) innehåller andelen S-röstare, p , med 95% säkerhet. Men kom ihåg vad detta faktiskt betyder!
- Intervall som skapas med formeln $\hat{p} \pm z_{0.025} \cdot SE(\hat{p})$ kommer innehålla p i 95% av alla möjliga stickprov från populationen.

Konfidensintervall för andel i R

■ Socialdemokraternas väljarandel

```
> prop.test(x = 1313, n = 3539)
```

1-sample proportions test with continuity correction

```
data: 1313 out of 3539
X-squared = 235.02, df = 1, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.3551012 0.3871985
sample estimates:
      p
0.3710088
```

■ Överlevande Titanic

```
> library(sda123) # for titanic data with n = 886 passengers
> prop.test(~survived, data = titanic)
```

1-sample proportions test with continuity correction

```
data: titanic$survived [with success = 1]
X-squared = 46.002, df = 1, p-value = 1.181e-11
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.3535443 0.4185986
sample estimates:
      p
0.3855693
```