

Statistik och dataanalys I - F12

Statistiska institutionen

Jonas Bjermo

VT2026

Innehåll föreläsning 12

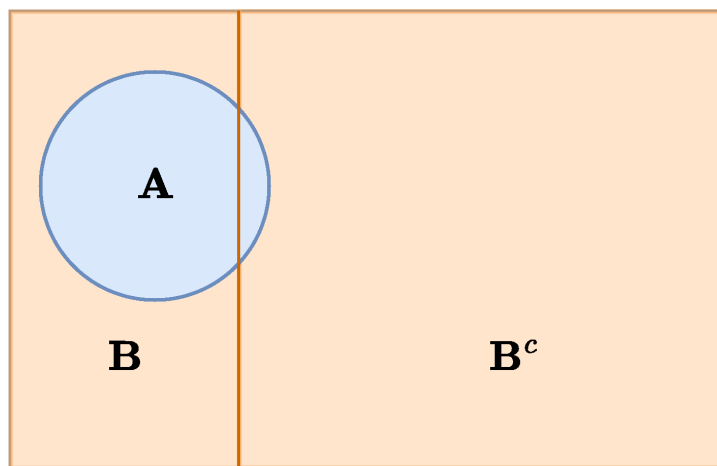
- Betingad sannolikhet
- Lagen om total sannolikhet
- Bayes sats

Betingad sannolikhet

- Betingade sannolikheter använder vi när vi vill svara på frågan: “hur sannolikt är det att A inträffar om jag vet att B inträffar”.
- Vi betecknar denna sannolikhet $P(A|B)$, där tecknet $|$ läses 'givet' eller 'betingat på'.
- Sannolikheten för att B inträffar **givet att A har inträffat**.
- **Exempel:**
 - ▶ Vad är sannolikheten att fotbollslaget A vinner matchen **givet att** lag B gör första målet?
 - ▶ Vad är sannolikheten för att skolrestaurangen serverar ärtsoppa **givet att** det är torsdag?
 - ▶ Vad är sannolikheten för att skolrestaurangen serverar ärtsoppa **givet att** det är tisdag?

Betingad sannolikhet

- **Exempel:** Covid
 - ▶ $A = \{\text{positivt hemtest}\}$, $B = \{\text{har covid}\}$.
 - ▶ Söker: $P(B|A) = P(\text{har covid}|\text{positivt hemtest})$
- Utfallsrummet ges av: $S = \{\{A, B\}, \{A^c, B\}, \{A, B^c\}, \{A^c, B^c\}\}$
- Sannolikheten för att B inträffar **givet att A har inträffat**. Dvs. sannolikheten att vi observerar $\{A, B\}$ när vi vet att A inträffat.

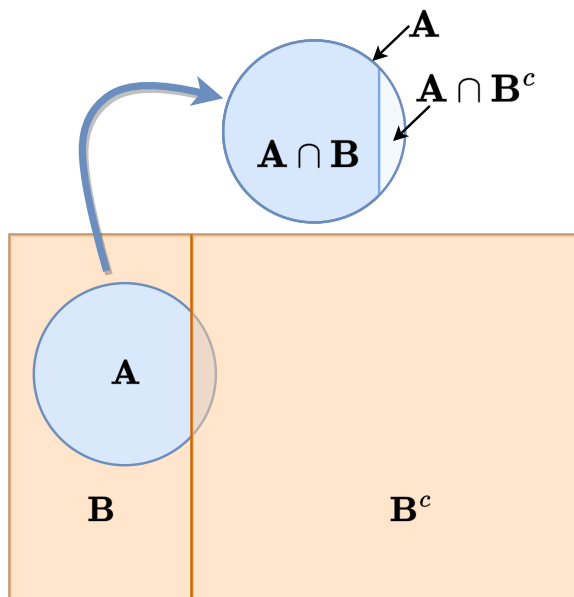


Betingad sannolikhet - världen krymper

- **Betingad sannolikhet**

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- **Betingad på** A innebär att blå cirkeln blir **vårt nya utfallsrum**.
- Inget utanför blå cirkeln kan längre inträffa. S går från hela rektangeln till att bli A .



Korstabeller och sannolikheter

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	3412	2388	5800
	Has dogs	3431	3587	7018
	Has both	897	577	1474
	Total	7740	6552	14,292

Antal

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	23.9%	16.7%	40.6%
	Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
	Has both	6.3%	4.0%	10.3%
	Total	54.2%	45.8%	100%

Snittsannolikheter (Table %)

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	44.1%	36.4%	40.6%
	Has dogs	44.3%	54.8%	49.1%
	Has both	11.6%	8.8%	10.3%
	Total	100%	100%	100%

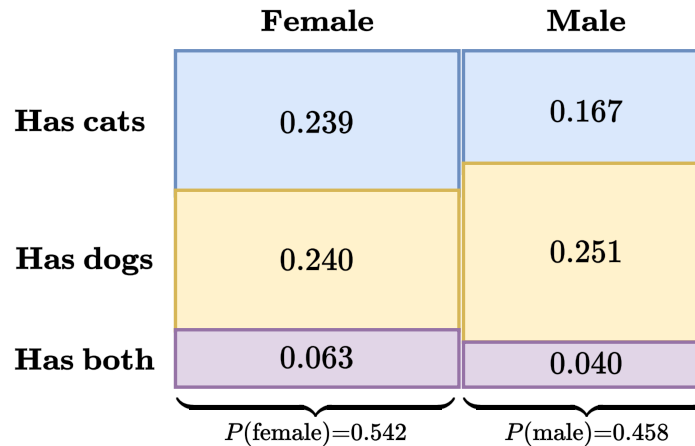
Betingat på kön (Column %)

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	58.8%	41.2%	100%
	Has dogs	48.9%	51.1%	100%
	Has both	60.9%	39.1%	100%
	Total	54.2%	45.8%	100%

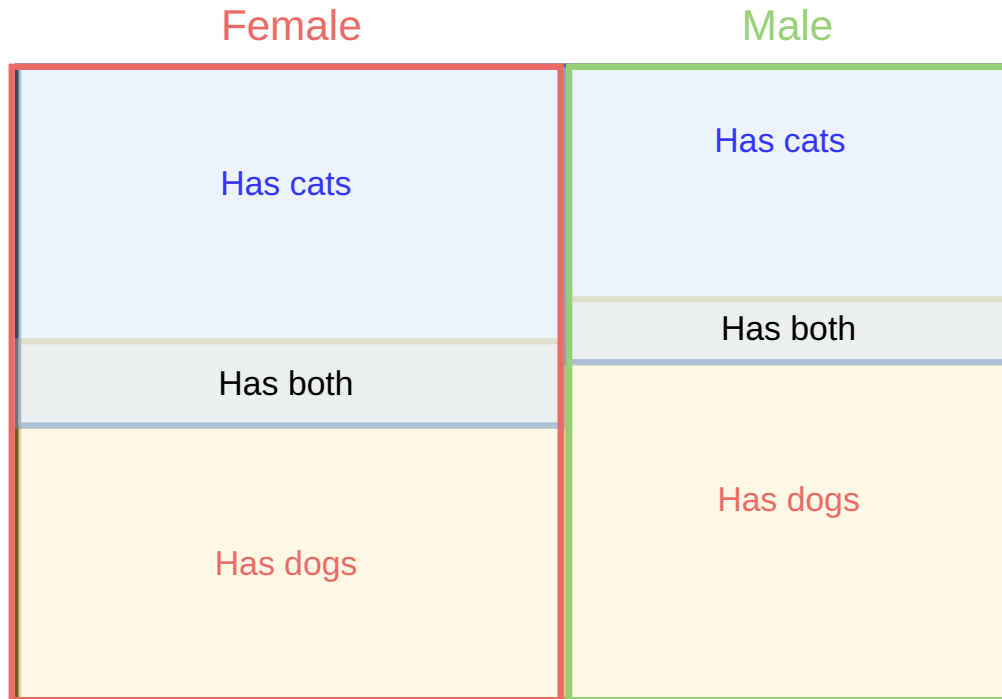
Betingat på husdjur (Row %)

Korstabell och mosaic-plot

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	23.9%	16.7%	40.6%
	Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
	Has both	6.3%	4.0%	10.3%
	Total	54.2%	45.8%	100%



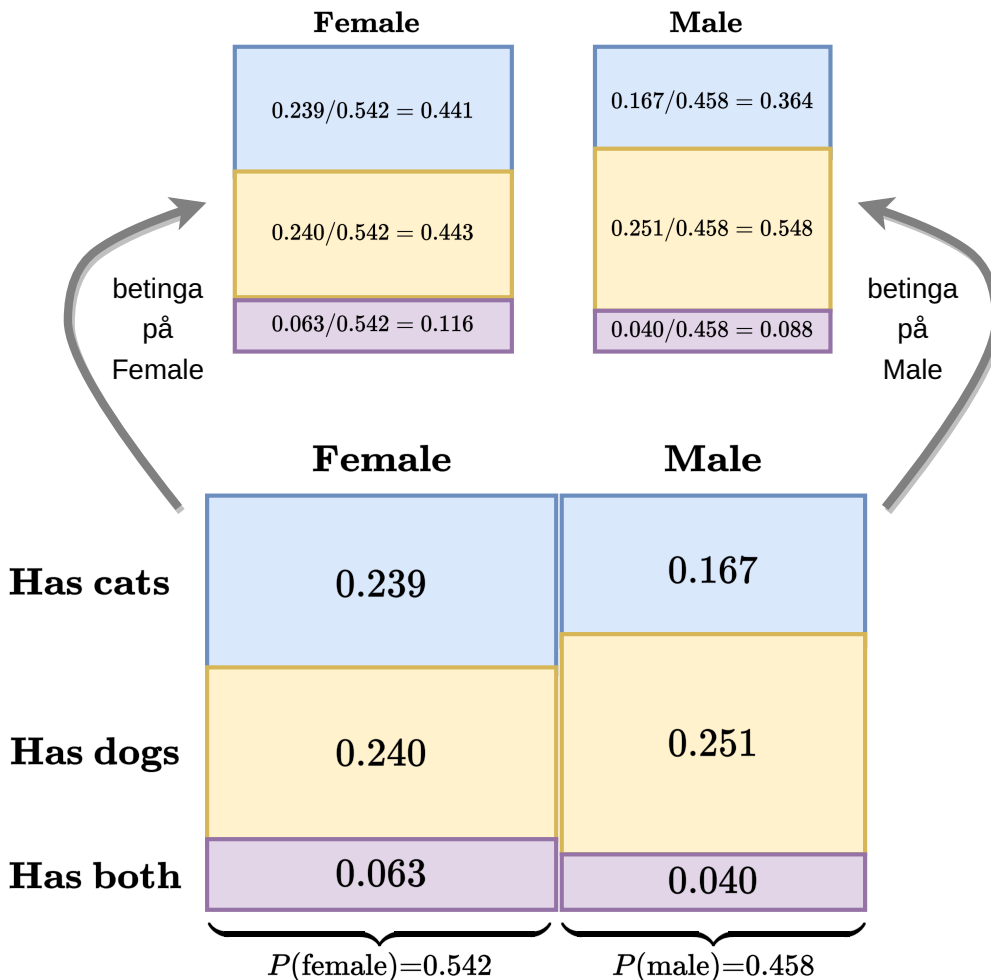
Vennndiagram



Korstabell och betingad sannolikhet

		Gender		
		Female	Male	Total
Pets	Has cats	44.1%	36.4%	40.6%
	Has dogs	44.3%	54.8%	49.1%
	Has both	11.6%	8.8%	10.3%
	Total	100%	100%	100%

Korstabell och betingad sannolikhet



Allmänna multiplikationsregeln

Allmänna multiplikationsregeln

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

- Terminologi:

$$\underbrace{P(A \cap B)}_{\text{snittsannolikhet}} = \underbrace{P(A)}_{\text{marginell sannolikhet}} \cdot \underbrace{P(B|A)}_{\text{betingad sannolikhet}}$$

- A och B är **oberoende händelser** om (och endast om)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Oberoende händelser - variant

A och B är oberoende om (och endast om)

$$P(B|A) = P(B)$$

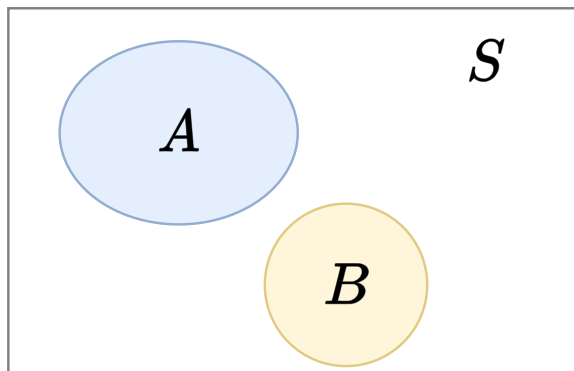
Oberoende händelser

Oberoende händelser - variant

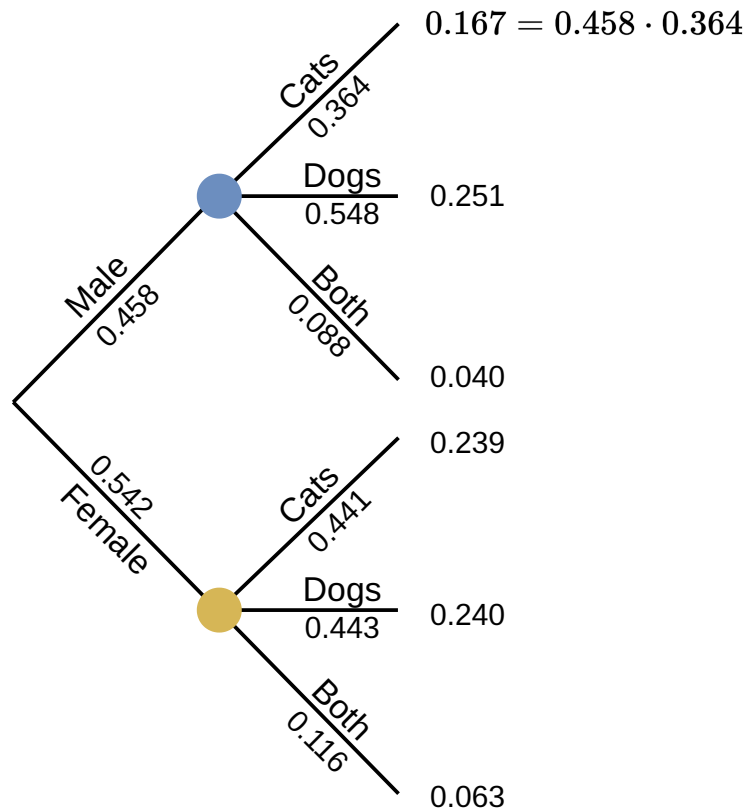
A och B är oberoende om (och endast om)

$$P(B|A) = P(B)$$

- Oberoende händelser - vetskapen om att A har inträffat påverkar inte sannolikheten för B .
- **Oberoende \neq Disjunkta**. Disjunkta händelser kan ju inte inträffa samtidigt!



Betingade sannolikheter, bäst i form av träd



Snitt- och marginella sannolikheter, bäst i tabell

simultansannolikheter (joint) kön och husdjur

		Gender		Total
		Female	Male	
Pets	Has cats	23.9%	16.7%	40.6%
	Has dogs	24.0%	25.1%	49.1%
	Has both	6.3%	4.0%	10.3%
	Total	54.2%	45.8%	100%

marginalsannolikheter husdjur

marginalsannolikheter kön

Bayes sats

- **Allmänna multiplikationsregeln**

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

- **Betingad sannolikhet**

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- **Bayes sats**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- **Bayes sats vänder betingningar.**

Från $P(B|A)$ kan vi beräkna $P(A|B)$.

Exempel: Handskrivna siffror

- Förenkling: skilja på enbart 0:or och 1:or



- A = vit pixel i mitten och B = siffran är en nolla

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

$$P(B) = \frac{\text{antal bilder med nollor}}{\text{totalt antal bilder}}$$

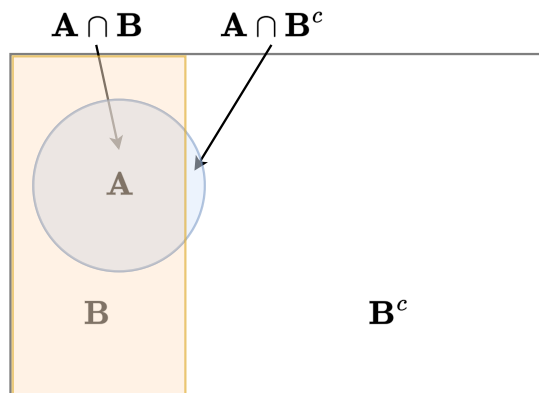
$$P(A) = \frac{\text{antal bilder med vit pixel i mitten}}{\text{totalt antal bilder}}$$

$$P(A|B) = \frac{\text{antal bilder med nolla som också har vit pixel i mitten}}{\text{antal bilder med nollor}}$$

Lagen om total sannolikhet

- Sannolikheten för varje händelse A kan delas upp som:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$



- Allmänna multiplikationsregeln:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \text{ och } P(A \cap B^c) = P(A|B^c)P(B^c)$$

- **Lagen om total sannolikhet:**

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

Bayes sats - via lagen om total sannolikhet

- **Lagen om total sannolikhet**

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

- Bayes sats

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- Bayes sats med lagen om total sannolikhet

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

Tillförlitlighet av hemtest för covid

- Vi utgår från **Bayes sats**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

- Låt $A = \{\text{pos}\}$ och $B = \{\text{covid}\}$

$$P(\text{covid}|\text{pos}) = \frac{P(\text{pos}|\text{covid})P(\text{covid})}{P(\text{pos}|\text{covid})P(\text{covid}) + P(\text{pos}|\text{ej covid})P(\text{ej covid})}$$

- **Notera:** $P(\text{neg}|\text{ej covid}) = 1 - P(\text{pos}|\text{ej covid})$

- **Prevalens:** $P(\text{covid})$ - andel med covid i populationen.
- **Sensitivitet:** $P(\text{pos}|\text{covid})$ - hur känsligt är testet för att upptäcka covid? (true positive)
- **Specificitet:** $P(\text{neg}|\text{ej covid})$ - är testet specifikt för covid, eller reagerar det även på annat? (true negative)

Tillförlitlighet av hemtest för covid

antigentest för detektering av Covid-19 är ett CE-certifierat test för självprovtagning som kan indikera pågående infektion av coronavirus. Snabbtest som utförs genom nästopnsning i främre näsan. Med hög **specificitet på 99,20 %** samt hög **sensitivitet på 96,77 %**. Passar för screening av symptomfria individer exempelvis på arbetsplatser.

- **Sensitivitet:** $P(\text{pos test} | \text{covid}) = 0.9677$
- **Specificitet:** $P(\text{neg test} | \text{inte covid}) = 0.9920$

Bayes sats

Den här widgeten låter dig undersöka hur tillförlitliga hemtest för Covid är genom att beräkna den betingade sannolikheten $P(\text{covid} | \text{positivt test})$ med hjälp av Bayes sats. Du kan också använda widgeten till andra problem, genom att ge händelserna covid och pos andra namn.

Event A:	<input type="text" value="cov"/>
Event B:	<input type="text" value="pos"/>
$P(\text{pos} \text{cov})$	<input type="text" value="0.9677"/>
$P(\text{not pos} \text{not cov})$	<input type="text" value="0.992"/>
$P(\text{cov})$	<input type="text" value="0.05"/>

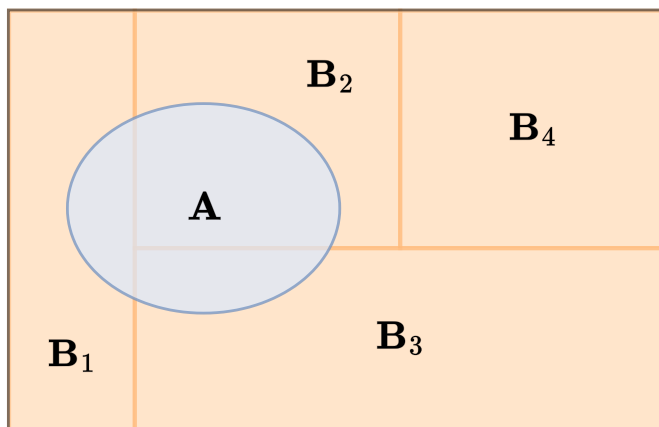
$$P(\text{cov} | \text{pos}) = 0.8642$$

Mattias Villani Bayes' theorem for events

Observable

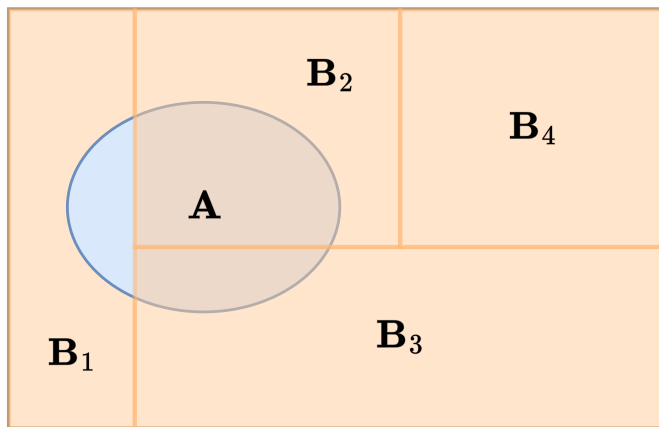
- Notera dock att vanligtvis är $P(\text{covid} | \text{symptom})$ större än prevalensen $P(\text{covid})$. Man testar sig pga symptom. Se slutet av denna notebook.

Lagen om total sannolikhet - allmän version



$$P(A) = \sum_{j=1}^K P(A|B_j)p(B_j)$$

Bayes sats - allmän version



$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{j=1}^K P(A|B_j)p(B_j)}$$

- **Exempel:** handskrivna siffror.

- ▶ $B_0 = \text{nolla}, B_1 = \text{etta}, B_2 = \text{tvåa}, \dots, B_9 = \text{nia}.$
- ▶ $A = \text{vit pixel i mitten}$

Credits

Dessa slides är gjorda utifrån slides som skapades för kursen statistik och dataanalys 1 av Mattias Villani HT 2023, och har modifierats av Oscar Oelrich VT 2024, Oskar Gustafsson för VT 2025, och Jonas Bjermo VT 2026.