Exercice 2

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est indiquée dans le tableau ci-après

a) Déterminons les lois marginales de X et Y

X \ Y	1	2	3	4	
1	0,08	0,04	0,16	0,12	0,4
2	0,04	0,02	0,08	0,06	0,2
3	0,08	0,04	0,16	0,12	0,4
	0,2	0,1	0,4	0,3	1

Lois marginale de X

X	1	2	3
$P(X_i = x)$	0,4	0,2	0,4

Loi marginale de Y

y	1	2	3	4
$P(y_i = y)$	0,2	0,1	0,4	0,3

Indiquons si les variables aléatoires sont indépendantes

$P(x_i = 1) = 0,4$

$P(y_i = 1) = 0,2$

$P(x_i = 1) \times P(y_i = 1) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$

$P(x_i = 1, y_i = 1) = 0,08$

$P(x_i = 1, y_i = 1) = P(x_i = 1) \times P(y_i = 1)$

donc x et y sont indépendante.

Exercice 3

La durée de vie d'un certain type de lampe de vidéoprojecteur suit une loi exponentielle de densité de probabilité $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Mq la durée de vie de ces lampes de vidéoprojecteur est sans mémoire

$$P(X > x + x_0 \mid X > x_0) = P(X > x).$$

$$P(X > x + x_0 \mid X > x_0) = \frac{P(X > x + x_0, X > 0)}{P(X > x_0)}$$

$$= \frac{P(X > x + x_0)}{P(X > x_0)}$$

$$P(X > x + x_0) = \int_{x+x_0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y}\, dy = \int_{x+x_0}^{+\infty} f(y)\, dy$$

$$= \lambda \int_{x+x_0}^{+\infty} e^{-\lambda y}\, dy$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \right]_{x+x_0}^{+\infty}$$

$$= \lambda \left[+\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(x+x_0)} \right]$$

$$= e^{-(x+x_0)} = e^{-x} \times e^{-x_0}$$

Suite EXO 3

$$P(X > x_0) = \int_{x_0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = \int_{x_0}^{+\infty} f(y) dy$$

$$= \lambda \left[-\frac{e^{-\lambda y}}{\lambda} \right]_{x_0}^{+\infty} = e^{-x_0}$$

$$P(X > x + x_0 | x > x_0) = \frac{e^{-\lambda(x + x_0)}}{e^{-\lambda(x_0)}} = \frac{e^{-\lambda x} \times \cancel{e^{-\lambda x_0}}}{\cancel{e^{-\lambda x_0}}}$$

$$P(X > x + x_0 | X > x_0) = e^{-\lambda x}$$

$$P(X > x) = \int_{x}^{+\infty} f(y) dy = \int_{x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy$$

$$P(X > x) = e^{-\lambda x} = \left[-e^{-\lambda y} \right]_{x}^{+\infty} = e^{-\lambda x}$$

donc $P(X > x + x_0 | X > x_0) = P(X > x)$

2) Déterminons la durée de vie moyenne d'une lampe en fonction de λ

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^{-\lambda x} \Rightarrow v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$

$$E(X) = \lambda \left[\left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right.$$

$$= \lambda \left[\frac{1}{\lambda} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} \right] = \lambda \left[\frac{1}{\lambda^2} \right] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

3) Oui le fabriquant est honnête.

$E(X) \geq 10000$ or $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

donc $\frac{1}{\lambda} \geq 10000 \Leftrightarrow 1 \geq \lambda \times 10000 = \lambda \leq \frac{1}{1000}$

$\boxed{\lambda = 0,0001}$ ①

• Une lampe sur deux a une durée de vie de moins de 7000 heures. On a donc : $P(X < 7000) = \frac{1}{2}$

or $P(X < 7000) = \int_0^{7000} \lambda e^{-\lambda x} = 1 - e^{-7000\lambda}$

On en déduit que

$1 - e^{-7000\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -e^{-7000\lambda} = \frac{1}{2} - 1 = e^{-7000\lambda} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -7000\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{\ln(1) - \ln(2)}{-7000} = \frac{-\ln(2)}{-7000}$

$= \frac{\ln(2)}{7000} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{7000} \sim 0,00009}$

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{7000} \leq \frac{1}{10000}}$$