Capítulo 8 Estimación

8.1 Introducción

Como se ha establecido en capítulos anteriores, el propósito de la estadística es usar información contenida en una muestra para hacer inferencias acerca de la población de la cual se toma la muestra. Estas muestras pueden ser descritas por medidas numéricas llamadas *parámetros* entonces se utiliza la estadística para encontrar uno o más parámetros relevantes. A esto se le llama estimar un parámetro, por ejemplo la media de una linea de producción o su desviación estándar. El parámetro de interés se llamara *parámetro objetivo* en el experimento, se puede estimar este parámetro de dos formas principales. La primera se conoce como *estimación puntual*, este tipo de estimación ocupa un solo punto, algunos ejemplos son la media muestral o la varianza muestral. La segunda se conoce como *estimación de intervalo*, este tipo de estimación ocupa dos puntos de tal manera que el parámetro de interés quede dentro de este intervalo. No importa el método que se utilice la estimación real se logra con el uso de un *estimador* del parámetro objetivo, definido de la siguiente manera.

Definición 8.1

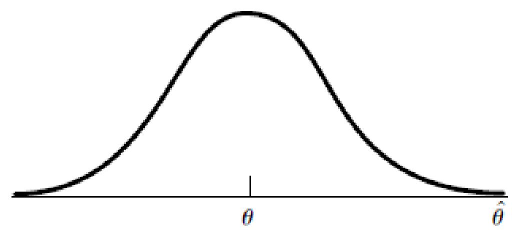
Un *estimador* es una regla, a menudo expresada como una fórmula, que indica cómo calcular el valor de una estimación con base en las mediciones contenidas en una muestra.

Un estimador no es infalible, al igual que hay muchas formas de resolver un problema puede haber muchos estimadores para un parámetro particular. Debido a esto es necesario establecer una medida para distinguir un estimador bueno de uno malo. Esto se vera en la siguiente sección.

8.2 Sesgo y error cuadrático medio de estimadores puntuales

La estimación puntual es similar en muchos aspectos, a disparar a un blanco con un revólver. El estimador, es análogo al revolver, y una estimación particular es comparable con un tiro. La información que proporciona este tiro nos ayuda si no se puede replicar en toda ocasión. En otras palabras no se puede evaluar la bondad de un procedimiento de estimación puntual con base en el valor de una sola estimación. Se necesita evaluar la distribución de este estimador puntual, se puede hacer mediante una distribución de frecuencia de muchas repeticiones del estimador. Se observaría si se agrupa alrededor de el parámetro objetivo o no.

Supongamos que deseamos especificar una estimación puntual para un parámetro poblacional al que llamaremos θ. El estimador de θ estará indicado por el símbolo $\hat{\theta}$. Cuando decimos que la distribución muestral se necesita agrupar alrededor del parámetro objetivo nos referimos a la media o valor esperado de la distribución. En otras palabras se desea que $E(\hat{\theta}) = \theta$. COmo se muestra en la siguiente figura.

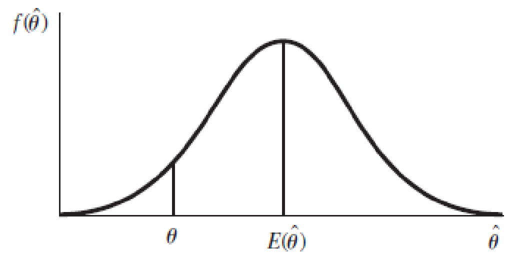


Con esto se llega a la siguiente definición.

Definición 8.2

Si $\hat{\theta}$ es un estimador puntual de un parámetro θ, entonces $\hat{\theta}$ es un *estimador insesgado* si $E(\hat{\theta}) = \theta$. Si $E(\hat{\theta}) \neq \theta$, se dice que $\hat{\theta}$ está *sesgado*.

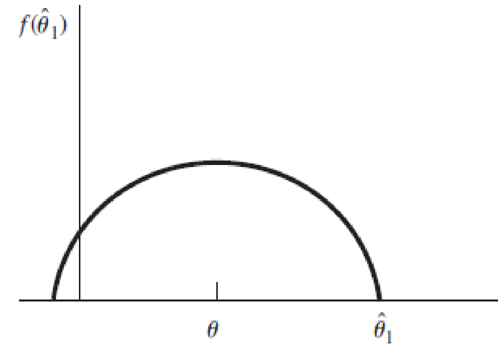
Un ejemplo de un estimador sesfado se muestra en la siguiente figura.



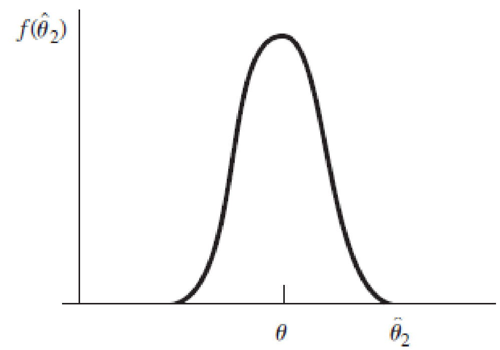
Definición 8.3

El *sesgo* de un estimador puntual $\hat{\theta}$ está dado por $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.

El hecho de que un estimador sea insesgado no es la única medida importante, también necesitamos que la varianza de la distribución del estimador $V(\hat{\theta})$ sea lo más pequeña posible. Esto nos garantiza que, en un muestreo repetido, una fracción más alta de valores de $\hat{\theta}$ estará cerca de θ. En la siguiente figura tenemos una distribución de un estimador insesgado, sin embargo la varianza de este estimador es muy grande.



En la siguiente figura se muestra la distribución de otro estimador insesgado, sin embargo en esta ocasión la varianza es mucho menor y por lo tanto es un mejor estimador.



Más que usar el sesgo y la varianza de un estimador puntual para caracterizar su bondad, podríamos emplear el promedio del cuadrado de la distancia entre el estimador y su parámetro objetivo.

Definición 8.4

El *error cuadrático medio* de un estimador puntual $\hat{\theta}$ es

$$MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

Además se puede demostrar que el error cuadrático medio de un estimador $\hat{\theta}$ es una función de su varianza y su sesgo. En otras palabras que,

$$MSE(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + [B(\hat{\theta})]^2$$

Demostración

De acuerdo a la definición de *error cuadrático medio* se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}) &= E[(\hat{\theta}-\theta)^2] \\ &= E\left[\hat{\theta}^2 - 2\theta\hat{\theta} + \theta^2\right] \\ &= E\left[\hat{\theta}^2\right] - E\left[2\theta\hat{\theta}\right] + E\left[\theta^2\right] \\ &= E\left[\hat{\theta}^2\right] - 2\theta E\left[\hat{\theta}\right] + \theta^2 \end{aligned}$$

De acuerdo a resultados anteriores la varianza del estimador $\hat{\theta}$ se define como, $V(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}^2] - (E[\hat{\theta}])^2$. Usando la definición de sesgo vista anteriormente se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}) &= V(\hat{\theta}) + [B(\hat{\theta})]^2 \\ &= E[\hat{\theta}^2] - (E[\hat{\theta}])^2 + \left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)^2 \\ &= E[\hat{\theta}^2] - (E[\hat{\theta}])^2 + (E[\hat{\theta}])^2 - 2\theta E[\hat{\theta}] + \theta^2 \\ &= E\left[\hat{\theta}^2\right] - 2\theta E\left[\hat{\theta}\right] + \theta^2 \end{aligned}$$

Con esto concluye la demostración.

8.3 Algunos estimadores puntuales insesgados comunes

En esta sección se presentaran algunos estimadores puntuales comunes. Para facilitar las expresiones se usara la notación $\sigma^2_{\hat{\theta}}$ para denotar la varianza de la distribución muestral del estimador $\hat{\theta}$. La desviación estándar de la distribución muestral del estimador $\hat{\theta}$, $\theta_{\hat{\theta}} = \sqrt{\sigma^2_{\hat{\theta}}}$, suele recibir el nombre de *error estándar* del estimador $\hat{\theta}$.

Parámetro objetivo θ	Tamaño(s) muestral(es)	Estimador puntual $\hat{\theta}$	$E(\hat{\theta})$	Error estándar $\sigma_{\hat{\theta}}$
μ	n	$\overline{Y}$	μ	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
p	n	$\hat{p} = \frac{Y}{n}$	p	$\sqrt{\frac{pq}{n}}$
$\mu_1 - \mu_2$	n_1 y n_2	$\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2$	$\mu_1 - \mu_2$	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
$p_1 - p_2$	n_1 y n_2	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$p_1 - p_2$	$\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1} + \frac{p_2q_2}{n_2}}$

Aun cuando la falta de sesgo es con frecuencia una propiedad deseable para un estimador puntual, no todos los estimadores son insesgados. Un ejemplo es la varianza muestral, S'^2, definida de la siguiente manera.

$$S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{n}$$

Este estimador es insesgado, mientras que el estimador de la varianza muestral definida como

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{n-1}$$

es un estimador insesgado de la varianza poblacional. Esto se puede demostrar de la siguiente manera.

Demostración

Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatorias con $E(Y_i) = \mu$ y $V(Y_i) = \sigma^2$. Ahora se puede demostrar que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 &= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\overline{Y}^2 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2\right] &= E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) - nE\left(\overline{Y}^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2) - nE\left(\overline{Y}^2\right) \end{aligned}$$

Observe que $E(Y_i^2)$ es la misma para $i = 1, 2, \ldots, n$. Utilicemos esto y el hecho de que la varianza de una variable aleatorias está dada por $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$ para concluir que $E(Y_i^2) = V(Y_i) + [E(Y_i)]^2 = \sigma^2 + \mu^2$, $E(\overline{Y}^2) = V(\overline{Y}) + [E(\overline{Y})]^2 = \sigma^2/n + \mu^2$ y que,

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2\right] &= \sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \\ &= n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \\ &= n\sigma^2 - \sigma^2 \\ &= (n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

Demostración

Se deduce que

$$\begin{aligned} E(S'^2) &= \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2\right] = \frac{1}{n}(n-1)\sigma^2 \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2 \end{aligned}$$

y que este estimador está sesgado porque $E(S'^2) \neq \sigma^2$. Con esto se puede demostrar que S^2 es insesgado de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2\right] \\ &= \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

Como comentario final, los valores esperado y errores estándar para los estimadores dados en la tabla anterior son válidos cualquiera sea la distribución de la(s) población(es) de donde se tome(n) la(s) muestra(s). Además de acuerdo al límite central los cuatro estimadores poseen distribuciones de probabilidad que son aproximadamente normales para muestras grandes.

En el caso continuo no se obtiene la función de probabilidad condicional de forma sencilla. Esto es porque si Y_1 y Y_2 son continuas, $P(Y_1 = y_1 | Y_2 = y_2)$ no se puede definir por que $(Y_1 = y_1)$ y $(Y_2 = y_2)$ son eventos con probabilidad cero.

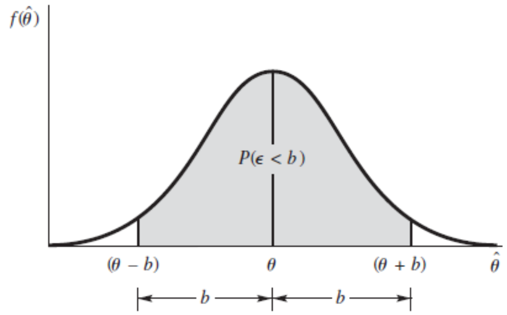
8.4 Evaluación de la bondad de un estimador puntual

Una forma de evaluar la bondad de cualquier procedimiento de estimación puntual usando el error de estimación, este tiene la siguiente definición.

Definición 8.5

El *error de estimación* ϵ es la distancia entre un estimador y su parámetro objetivo. Esto es, $\epsilon = |\hat{\theta} - \theta|$.

Como $\hat{\theta}$ es una variable aleatorias entonces el error de estimación también es una cantidad aleatorias. Como es una cantidad aleatoria entonces se pueden plantear enunciados de probabilidad acerca esta cantidad. Supongamos que $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ tiene una distribución muestral como se muestra en la siguiente figura.



Observe que se seleccionaron dos puntos, $(\theta - b)$ y $(\theta + b)$, situados cerca de las colas de la densidad de probabilidad. La probabilidad de que el error de estimación ϵ sea menor que b está representada por el área sombreada. Esto es,

$$P(|\hat{\theta} - \theta| < b) = P[-b < (\hat{\theta} - \theta) < b] = P(\theta - b < \hat{\theta} < \theta + b)$$

Con esto se puede ver que es posible encontrar un valor de b de tal manera que el estimador $\hat{\theta}$ caiga dentro de b unidades de θ, el parámetro objetivo. No importa que no conozcamos la distribución de probabilidad de $\hat{\theta}$, si $\hat{\theta}$ es insesgado se puede hallar un límite aproximado en ϵ al expresar b como un múltiplo del error estándar de $\hat{\theta}$. Por ejemplo, para $k \geq 1$, si hacemos que $b = k\sigma_{\hat{\theta}}$, sabemos por el teorema de Tchebysheff que ϵ será menor que $k\sigma_{\hat{\theta}}$ con probabilidad de al menos $1 - 1/k^2$.

8.5 Intervalos de Confianza

Un *estimador de intervalo* es una regla que especifica el método para usar las mediciones muestrales en el cálculo de dos números que forman los puntos extremos del intervalo. Este intervalo necesita tener dos propiedades, la primera es que contenga el parámetro objetivo θ, la segunda es que su amplitud sea relativamente pequeña. Estos intervalos suelen recibir el nombre de *intervalos de confianza*. Los puntos extremos superior e inferior de un intervalo de confianza se denominan *límites de confianza superior e inferior*, respectivamente. La probabilidad de que un intervalo de confianza (aleatorio por que son funciones de mediciones muestrales) incluya a θ (una cantidad fija) se llama *coeficiente de confianza*. Desde un punto de vista práctico, el coeficiente de confianza identifica la fracción de veces, en muestreo repetido, que los intervalos construidos contienen al parámetro objetivo θ. Si sabemos que el coeficiente de confianza asociado con nuestro estimador es alto, podemos estar suficientemente seguros de que cualquier intervalo de confianza, construido con el uso de los resultados de una sola muestra, contendrá a θ.
Suponga que $\hat{\theta}_L$ y $\hat{\theta}_U$ son los límites de confianza (aleatorios) superior e inferior, respectivamente, para un parámetro θ. Entonces, si

$$P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha$$

la probabilidad $(1 - \alpha)$ es el *coeficiente de confianza*. El intervalo aleatorio resultante definido por $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ se denomina *intervalo de confianza bilateral*. También es posible formar un *intervalo de confianza unilateral* tal que

$$P(\hat{\theta}_L \leq \theta) = 1 - \alpha$$

Aun cuando sólo $\hat{\theta}_L$ es aleatorio en este caso, el intervalo de confianza es $[\hat{\theta}_L, \infty)$. Del mismo modos, podríamos tener un intervalo de confianza unilateral superior tal que

$$P(\theta \leq \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha$$

El intervalo de confianza implicado aquí es $(-\infty, \hat{\theta}_U]$.

Un método muy útil para encontrar intervalos de confianza se llama *método del pivote*. Éste consiste en determinar una cantidad que actúe como pivote y que posea las dos características siguiente:

1. Que sea una función de las medidas muestrales y el parámetro desconocido θ, donde θ sea la *única* cantidad desconocida.

2. Que su distribución de probabilidad no depende del parámetro θ.

8.6 Intervalos de confianza en una muestra grande

En la sección 8.3 se presentaron algunos estimadores puntuales insesgados para los parámetros μ, p, $\mu_1 - \mu_2$ y $p_1 - p_2$. Se sabe que para muestras grandes todos estos estimadores tienen distribuciones muestrales aproximadamente normales con errores estándar dados en la tabla de la misma sección. Si el parámetro objetivo lo denotamos como θ, entonces para muestras grandes,

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

posee distribución normal estándar. Debido a esto se puede usar a Z como cantidad pivote y el método del pivote para desarrollar intervalos de confianza para el parámetro objetivo θ. Esto se ejemplifica de la siguiente manera.

Ejemplo

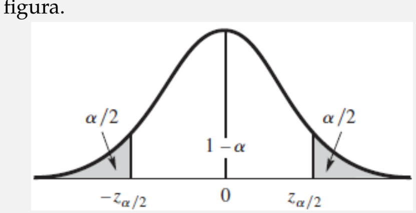
Sea $\hat{\theta}$ un estadístico que está normalmente distribuido con medio θ y error estándar $\sigma_{\hat{\theta}}$. Entonces la cantidad,

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

tiene una distribución normal estándar. Ahora seleccionamos dos valores de las colas de esta distribución, $z_{\alpha/2}$ y $-z_{\alpha/2}$ tales que,

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Esta probabilidad esta representada en el área de la siguiente figura.



Sustituyendo por Z en el enunciado de probabilidad se tiene lo siguiente,

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Multiplicando por $\sigma_{\hat{\theta}}$, obtenemos

$$P(-z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} \leq \hat{\theta} - \theta \leq z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}) = 1 - \alpha$$

Restando $\hat{\theta}$ de cada término de la desigualdad y multiplicando por .1 se tiene lo siguiente.

$$P(-\hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} \leq -\theta \leq -\hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}) = 1 - \alpha$$
$$P(\hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} \geq \theta \geq \hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}) = 1 - \alpha$$

Entonces, los puntos extremos para un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)\%$ para θ están dados por

$$\hat{\theta}_L = \hat{\theta} - z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} \qquad \hat{\theta}_U = \hat{\theta} + z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}}$$

Con esto se pueden determinar de manera similar los límites superior e inferior individuales.

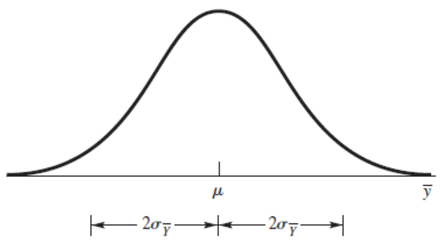
límite inferior al $100(1 - \alpha)\%$ para $\theta = \hat{\theta} - z_\alpha \sigma_{\hat{\theta}}$

límite superior al $100(1 - \alpha)\%$ para $\theta = \hat{\theta} + z_\alpha \sigma_{\hat{\theta}}$

Este intervalo función para cualquier estimado visto en la tabla de la sección anterior si la muestra es suficientemente grande.

8.7 Selección del tamaño muestral

El diseño de un experimento es en esencia un plan para adquirir una cantidad de información. Por lo que el procedimiento de muestro o *diseño experimental* afecta la cantidad de información por medición. Este, junto con el tamaño muestral n controlo la cantidad de información relevante en una muestra. Entonces la selección del tamaño muestral n es muy importante para una investigación estadística. Primero se necesita conocer que se quiere obtener de la muestra, si se desea que una estimación sea lo más precisa que se pueda entonces se puede encontrar un método para que el tamaño de n corresponda con una medida de probabilidad. Para hacer esto se necesita especificar un límite en el error de estimación. De capítulos anteriores se sabe que si un estimador es insesgado y se agrupa alrededor del parámetro objetivo entonces aproximadamente 95% de las medidas muestrales estarán a no más de $2\sigma_{\hat{\theta}}$ de θ en muestreo repetido. De esta manera se puede establecer una medida deseada para que el estimador este a esa distancia de la media con una alta probabilidad. En la siguiente figura se observa como para el caso del estimador $\overline{Y}$ la mayoría de las medias muestrales están a $2\sigma_{\overline{Y}}$



Para muestras grandes se asume que se esta trabajando con una población con distribución normal. Entonces después de especificar un límite desead en el error de estimación y un nivel de confianza asociado $1-\alpha$, por ejemplo si el parámetro es θ y el límite deseado es B entonces se tiene que igualar lo siguiente.

$$z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{\theta}} = B$$

donde, como en la sección anterior,

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

8.8 Intervalos de confianza para una muestra pequeña para μ y $\mu_1 - \mu_2$

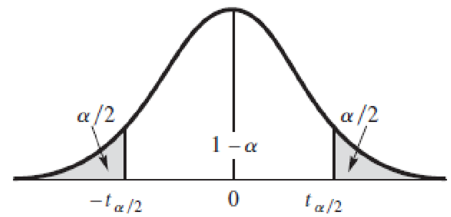
Como se ha visto a lo largo del capítulo, para estimar el parámetro objetivo μ o la media de una población se puede usar el estimador insesgado conocido como la media muestral $\overline{Y}$. Además se tiene que la distribución de este estimador es aproximadamente normal, sin importar la distribución de la población del cual se tomo la muestra. Supongamos que se $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ representa una muestra aleatoria seleccionada de una población normal con media muestral $\overline{Y}$ y varianza muestral S^2, además se supone que el tamaño de la muestra n no es lo suficientemente grande para aplicar los métodos de la sección anterior. Entonces si se quiere construir un intervalo de confianza se necesita encontrar otro pivote, en este caso de acuerdo a los teoremas 7.1 y 7.3 y la definición 7.2 se puede ocupar el siguiente estadístico.

$$T = \frac{\overline{Y} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

Este estadístico tiene una distribución t con $(n-1)$ grados de libertad y lo podemos ocupar como pivote para formar un intervalo de confianza para μ. De la misma manera que se hizo en la última sección se necesitan elegir valores $t_{\alpha/2}$ y $-t_{\alpha/2}$ de tal manera que

$$P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Esta probabilidad es el área sombreada de la siguiente figura,



El intervalo de confianza para μ se obtiene al manipular las desigualdades del enunciado de probabilidad de manera similar a la sección anterior.

$$P\left(\left(-t_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}\right)\right) = 1-\alpha$$
$$P\left(-t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \leq \overline{Y} - \mu \leq t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1-\alpha$$
$$P\left(\overline{Y} - t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu \leq \overline{Y} + t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1-\alpha$$

Entonces el intervalo de confianza para μ esta dado por

$$\overline{Y} \pm t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

También se pueden obtener los límites de confianza *unilaterales*. Además observe que t_α es tal que,

$$P(T \leq t_\alpha) = 1-\alpha$$
$$P\left[\overline{Y} - t_\alpha(S/\sqrt{n}) \leq \mu\right] = 1-\alpha$$

Entonces, $\overline{Y} - t_\alpha(S/\sqrt{n})$ es un límite de confianza inferior de $100(1-\alpha)\%$ para μ. De la misma manera $\overline{Y} + t_\alpha(s/\sqrt{n})$ para μ.
Ahora suponga que estamos interesados en comparar dos medias de dos poblaciones μ_1 y μ_2 cada una con varianza σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente. Si las muestras son independientes, los intervalos de confianza para $\mu_1-\mu_2$ basados en una variable aleatoria con distribución t se pueden construir si suponemos que las dos poblaciones tienen una varianza común pero desconocida $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$.
Si $\overline{Y}_1$ y $\overline{Y}_2$ son las medias muestrales respectivas obtenidas de muestras aleatorias independientes de poblaciones normales, el intervalo de confianza de muestra grande para $(\mu_1 - \mu_2)$ se desarrolla usando

$$Z = \frac{(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$
$$Z = \frac{(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

como cantidad pivote. Como suponemos que las poblaciones están distribuidas normalmente entonces Z tiene distribución normal estándar. Debido a que σ es desconocida, se necesita encontrar un estimador de la varianza común σ^2 para generar una cantidad con distribución t. Es estimador insesgado usual de la varianza común σ^2 se obtiene al agrupar los datos muestrales para obtener el estimador ponderado S_p^2.

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_p^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Para completar una cantidad con distribución t se necesita una distribución χ^2, por fortuna se puede crear una usando el estimador ponderado.

$$W = \frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2}$$

Entonces W tiene distribución χ^2 con $(n_1-1)+(n_2-1) = n_1+n_2-2$ grados de libertad. Usando estas dos cantidades se puede forma la siguiente cantidad pivote.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{W/v}} = \frac{\left[\frac{(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}\right]}{\sqrt{\frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2(n_1+n_2-2)}}}$$
$$= \frac{(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

T entonces tiene una distribución t con (n_1+n_2-2) grados de libertad. Así como se hizo con μ se puede demostrar que el intervalo de confianza para $(\mu_1 - \mu_2)$ tiene la forma

$$(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2) \pm t_{\alpha/2}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

donde $t_{\alpha/2}$ se determina a partir de la distribución t con (n_1+n_2-2) grados de libertad.

Resumen de intervalos de confianza de muestra pequeña para medias de distribuciones normales con varianza(s) desconocida(s)

Parámetro	*Intervalo de confianza* (v = *grados de libertad*)
μ	$\overline{Y} \pm t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right), v = n-1$
$\mu_1 - \mu_2$	$(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_1) \pm t_{\alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$, donde $v = n_1 + n_2 - 2$ y $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ (requiere que las muestras sean independientes y la suposición de que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

8.9 Intervalos de confianza para σ^2

La varianza poblacional σ^2 cuantifica la cantidad de variabilidad en la población. Por lo general el valor real de esta cantidad es desconocido y por lo tanto se tiene que calcular un estimador. Se ha demostrado antes que S^2 es un estimador insesgado para σ^2. De secciones pasadas se puede ver que se necesita información acerca de σ^2 para intervalos de confianza para la media y una comparación de medias, por lo que es de interés desarrollar un intervalo de confianza para σ^2.

Supongamos que tenemos una muestra aleatoria $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ de una distribución normal con media μ y varianza σ^2, ambas desconocidas. Del Teorema 7.3 sabemos que

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

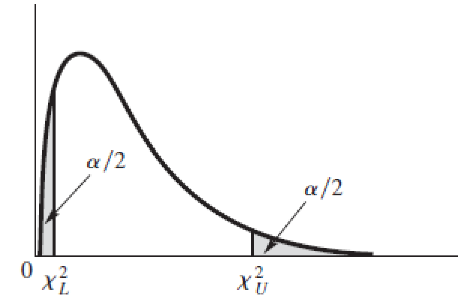
tiene una distribución χ^2 con $(n-1)$ graos de libertad. Se puede aplicar el método del pivote para hallar dos números χ_L^2 y χ_U^2 tales que

$$P\left[\chi_L^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_U^2\right] = 1-\alpha$$

para cualquier coeficiente de confianza $(1-\alpha)$. La función de densidad χ^2 no es simétrica entonces a veces es difícil encontrar el intervalo más corto que incluya σ^2. Se puede elegir los límite de tal manera que se cumpla,

$$P\left[\chi_{1-(\alpha/2)}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha/2}^2\right] = 1-\alpha$$

Esta probabilidad es el área sombreada de la siguiente figura.



Al reordenar la desigualdad en el enunciado de probabilidad nos lleva a lo siguiente.

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{(\alpha/2)}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-(\alpha/2)}^2}\right] = 1-\alpha$$

El intervalo de confianza para σ^2 es el siguiente.

Un intervalo de confianza 100(1 - α)% para σ^2

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{(\alpha/2)}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-(\alpha/2)}^2}\right)$$