Τεχνητή Νοημοσύνη II

Παύλος Πέππας

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών

και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Επανάληψη Κατηγορηματικής Λογικής (ΚΛ)

Παραδείγματα

- Bird(Tweedy)
  $\forall x(\text{Bird}(x) \Rightarrow \text{Flies}(x))$

- $\forall x \forall y((\text{Mother}(x) = \text{Mother}(y) \land \neg(x=y)) \Rightarrow \text{Siblings}(x,y))$
  Mother(Con) = Mother(Mary)

Επανάληψη Κατηγορηματικής Λογικής (ΚΛ)

Παραδείγματα

- Bird(Tweedy)
  $\forall x(\text{ Bird}(x) \Rightarrow \text{Flies}(x))$

Κατηγόρημα

- $\forall x \forall y((\text{ Mother}(x) = \text{Mother}(y) \wedge \neg(x=y)) \Rightarrow \text{Siblings}(x,y))$
  Mother(Con) = Mother(Mary)

Επανάληψη Κατηγορηματικής Λογικής (ΚΛ)

Παραδείγματα

- Bird(Tweedy)
  $\forall x(Bird(x) \Rightarrow Flies(x))$

- $\forall x \forall y((Mother(x) = Mother(y) \wedge \neg(x=y)) \Rightarrow Siblings(x,y))$
  Mother(Con) = Mother(Mary)

  Συνάρτηση

Επανάληψη Κατηγορηματικής Λογικής (ΚΛ)

Σταθερά

Παραδείγματα

- $Bird(Tweedy)$
  $\forall x(Bird(x) \Rightarrow Flies(x))$

- $\forall x \forall y((Mother(x) = Mother(y) \wedge \neg(x=y)) \Rightarrow Siblings(x,y))$
  $Mother(Con) = Mother(Mary)$

Επανάληψη Κατηγορηματικής Λογικής (ΚΛ)

Παραδείγματα

- Bird(Tweedy)
  $\forall x(\text{Bird}(x) \Rightarrow \text{Flies}(x))$

- $\forall x \forall y((\text{Mother}(x) = \text{Mother}(y) \wedge \neg(x=y)) \Rightarrow \text{Siblings}(x,y))$
  Mother(Con) = Mother(Mary)

M =

{ Κώστας, Νίκος, Μαρία, Βίκυ, Όλγα }	Αδέρφια = { (Κώστας, Μαρία), (Μαρία, Κώστας) }	Μητέρα(Κώστα) = Βίκυ Μητέρα(Μαρία) = Βίκυ Μητέρα(Νίκος) = Όλγα . . .

Mother^{M} = Μητέρα, Siblings^{M} = Αδέρφια , Con^{M} = Κώστας, Marry^{M} = Μαρία

Αλφάβητο ΚΛ

Λογικά Σύμβολα

Τελεστές: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$

Παρενθέσεις: (,)

Μεταβλητές: x_1, x_2, . . ., y, . . . , z, . . .

Ισότητα: =

Σύμβολα Χρήστη

Κατηγορήματα: P, Q, Flies, Bird, . . .

Συναρτήσεις: Mother, Color, . . .

Σταθερές: Jim, Mary, table, . . .

Συντακτικό ΚΛ

Όροι

- Κάθε σταθερά και κάθε μεταβλητή είναι όρος
- Αν τα $t_1, \ldots t_n$ είναι όροι, και το f n-μελής συνάρτηση, τότε και το $f(t_1, \ldots, t_n)$ είναι όρος.

Συντακτικό ΚΛ

<u>**Όροι**</u>

- Κάθε σταθερά και κάθε μεταβλητή είναι όρος
- Αν τα $t_1, \ldots t_n$ είναι όροι, και το f *n*-μελής συνάρτηση, τότε και το $f(t_1, \ldots, t_n)$ είναι όρος.

Παραδείγματα Όρων:

x

john

mother(john)

father(mother(x))

Συντακτικό ΚΛ

Όροι

- Κάθε σταθερά και κάθε μεταβλητή είναι όρος
- Αν τα $t_1, . . . t_n$ είναι όροι, και το f n-μελής συνάρτηση, τότε και το $f(t_1, . . . ,t_n)$ είναι όρος.

Παραδείγματα Όρων:

x

john

mother(john)

father(mother(x))

ground terms

Συντακτικό ΚΛ

Όροι

- Κάθε σταθερά και κάθε μεταβλητή είναι όρος
- Αν τα $t_1, . . . t_n$ είναι όροι, και το f n-μελής συνάρτηση, τότε και το $f(t_1, . . . ,t_n)$ είναι όρος.

Ατομικοί τύποι

- Αν τα $t_1, . . . t_n$ είναι όροι, και το P n-μελές κατηγόρημα, τότε το P$(t_1, . . . ,t_n)$ είναι ατομικός τύπος.
- Αν τα t_1, t_2 είναι όροι, τότε το $t_1 = t_2$ ατομικός τύπος.

Συντακτικό ΚΛ

Όροι

- Κάθε σταθερά και κάθε μεταβλητή είναι όρος
- Αν τα $t_1, \ldots t_n$ είναι όροι, και το f n-μελής συνάρτηση, τότε και το $f(t_1, \ldots, t_n)$ είναι όρος.

Ατομικοί τύποι

- Αν τα $t_1, \ldots t_n$ είναι όροι, και το P n-μελές κατηγόρημα, τότε το P$(t_1, \ldots, t_n)$ είναι ατομικός τύπος.
- Αν τα t_1, t_2 είναι όροι, τότε το $t_1 = t_2$ ατομικός τύπος.

Παραδείγματα Ατομικών Τύπων:

Siblings(john, con)

cold()

on(x, table)

john = father(mary)

Συντακτικό ΚΛ

Όροι

- Κάθε σταθερά και κάθε μεταβλητή είναι όρος
- Αν τα $t_1, \ldots t_n$ είναι όροι, και το f n-μελής συνάρτηση, τότε και το $f(t_1, \ldots, t_n)$ είναι όρος.

Ατομικοί τύποι

- Αν τα $t_1, \ldots t_n$ είναι όροι, και το P n-μελές κατηγόρημα, τότε το P$(t_1, \ldots, t_n)$ είναι ατομικός τύπος.
- Αν τα t_1, t_2 είναι όροι, τότε το $t_1 = t_2$ ατομικός τύπος.

Παραδείγματα Ατομικών Τύπων:

Siblings(john, con)

cold()

on(x, table)

john = father(mary)

ground atoms

Συντακτικό ΚΛ

<u>Γενικός τύπος (ή απλά «τύπος»)</u>

- Κάθε ατομικός τύπος είναι και γενικός τύπος.
- Αν τα φ, ψ είναι τύποι, τότε και τα $\neg\varphi$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\Rightarrow\psi)$, $(\varphi\Leftrightarrow\psi)$ είναι τύποι.
- Αν το x είναι μεταβλητή και το φ είναι τύπος, τότε και τα $\forall x(\varphi)$, $\exists x(\varphi)$ είναι τύποι.

Πολλές φορές θα απλοποιείται ο συμβολισμός παραλείποντας παρενθέσεις, με την υπόθεση πως η $\neg$ προηγείται των $\wedge$, $\vee$, που προηγούνται των $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Συντακτικό ΚΛ

<u>Γενικός τύπος (ή απλά «τύπος»)</u>

- Κάθε ατομικός τύπος είναι και γενικός τύπος.
- Αν τα ϕ, ψ είναι τύποι, τότε και τα $\neg\phi$, $(\phi\wedge\psi)$, $(\phi\vee\psi)$, $(\phi\Rightarrow\psi)$, $(\phi\Leftrightarrow\psi)$ είναι τύποι.
- Αν το x είναι μεταβλητή και το ϕ είναι τύπος, τότε και τα $\forall x(\phi)$, $\exists x(\phi)$ είναι τύποι.

Πολλές φορές θα απλοποιείται ο συμβολισμός παραλείποντας παρενθέσεις, με την υπόθεση πως η $\neg$ προηγείται των $\wedge$, $\vee$, που προηγούνται των $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Παραδείγματα Γενικών Τύπων:

Siblings(john, con)

$\forall x\ (block(x) \Rightarrow \exists y(\ on(x, y) \wedge \neg block(y)\ )$

summer() $\Rightarrow$ atTheBeach(john)

Ερμηνείες

Μια **ερμηνεία M** για το αλφάβητο A αποτελείται από

- ένα μη-κενό σύνολο |M| που ονομάζεται σύμπαν,
- ένα σύνολο από σχέσεις πάνω στο |M| -- ειδικότερα, μια *n*-μελή σχέση P^M για κάθε n-μελές κατηγόρημα P του A.
- ένα σύνολο από συναρτήσεις πάνω στο |M| -- ειδικότερα, μια *n*-μελή σχέση f^M για κάθε *n*-μελή συνάρτηση *f* του A.
- μια συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε σταθερά *c* του A, ένα στοιχείο c^M του σύμπαντος της M.

Ερμηνείες

Μια **ερμηνεία Μ** για το αλφάβητο Α αποτελείται από

- ένα μη-κενό σύνολο |Μ| που ονομάζεται σύμπαν,
- ένα σύνολο από σχέσεις πάνω στο |Μ| -- ειδικότερα, μια *n*-μελή σχέση P^M για κάθε n-μελές κατηγόρημα P του Α.
- ένα σύνολο από συναρτήσεις πάνω στο |Μ| -- ειδικότερα, μια *n*-μελή σχέση f^M για κάθε *n*-μελή συνάρτηση *f* του Α.
- μια συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε σταθερά *c* του Α, ένα στοιχείο c^M του σύμπαντος της Μ.

Αποτίμηση για μια ερμηνεία Μ του αλφαβήτου Α, είναι μια συνάρτηση **v** που αντιστοιχεί κάθε μεταβλητή του Α σε ένα στοιχείο του |Μ|.

Ορισμός Αληθείας του Tarski

$M, v \models t_1 = t_2$ ανν $v(t_1) = v(t_2)$

$M, v \models P(t_1, t_2, \ldots t_n)$ ανν $(v(t_1), v(t_2), \ldots v(t_n)) \in P^{\boldsymbol{M}}$

$M, v \models \neg\phi$ ανν $M, v \not\models \phi$

$M, v \models \phi \wedge \psi$ ανν $M, v \models \phi$ και $M, v \models \psi$

$M, v \models \phi \vee \psi$ ανν $M, v \models \phi$ ή $M, v \models \psi$

$M, v \models \phi \Rightarrow \psi$ ανν $M, v \models \neg\phi$ ή $M, v \models \psi$

$M, v \models \phi \Leftrightarrow \psi$ ανν $M, v \models \phi \Rightarrow \psi$ και $M, v \models \psi \Rightarrow \phi$

$M, v \models \forall x(\phi)$ ανν $M, v[x|c] \models \phi$ για όλα τα $c \in |M|$

$M, v \models \exists x(\phi)$ ανν υπάρχει $c \in |M|$ τέτοιο ώστε $M, v[x|c] \models \phi$

Ικανοποιήσιμοι και Έγκυροι Τύποι

- Ο τύπος φ είναι **ικανοποιήσιμος** ανν υπάρχει ερμηνεία Μ και αποτίμηση v τέτοιες ώστε $M, v \models \phi$.
- Η ερμηνεία Μ είναι **μοντέλο** του τύπου φ ($M \models \phi$) ανν για κάθε αποτίμηση v ισχύει $M, v \models \phi$.
- Ο τύπος φ είναι **έγκυρος** ανν όλες οι ερμηνείες είναι μοντέλα του φ.
- **$T \models \phi$** ανν κάθε μοντέλο του T είναι και μοντέλο του φ.

ΘΕΩΡΗΜΑ: $T \models \phi$ ανν $T \cup \{\neg\phi\}$ είναι μη-ικανοποιήσιμο.

Άσκηση

Κατασκευάστε ερμηνεία M με $|M| = \{ 1, 2 \}$, τέτοια που να επαληθεύει τον τύπο $\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$ και να διαψεύδει τον τύπο $\forall x(P(x)) \vee \forall x(Q(x))$.

Το ίδιο για τους τύπους $\exists x(P(x)) \wedge \exists x(Q(x))$ και $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

Το ίδιο για τους τύπους $\forall x \exists y(P(x,y))$ και $\exists y \forall x(P(x,y))$

Αναπαράσταση Γνώσης σε ΚΛ

Η ερμηνεία του P(x) είναι «ο x είναι πρώτος αριθμός», η ερμηνεία του E(x) είναι «ο x είναι άρτιος αριθμός» και τέλος η ερμηνεία του D(x, y) είναι «ο x διαιρεί τον y ».

Μεταφράστε στα Ελληνικά τους παρακάτω τύπους:

- $\forall x\ (E(x) \Rightarrow \forall y(D(x,y) \Rightarrow E(y)))$
- $\forall x\ (P(x) \Rightarrow \exists y(E(y) \wedge D(x,y)))$
- $\exists x\ (E(x) \wedge P(x)) \wedge \neg \exists y((x \neq y) \wedge E(y) \wedge P(y))\ )$

Προετοιμασία για Μετατροπή σε CNF

Χρήσιμες Ισοδυναμίες

1. $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$
2. $\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$
3. $\neg\neg\phi \equiv \phi$
4. $\phi \wedge (\psi \vee \zeta) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \zeta)$
5. $\phi \vee (\psi \wedge \zeta) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \zeta)$
6. $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
7. $\phi \Leftrightarrow \psi \equiv (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$

Προετοιμασία για Μετατροπή σε CNF

Χρήσιμες Ισοδυναμίες

1. $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$
2. $\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$
3. $\neg\neg\phi \equiv \phi$
4. $\phi \wedge (\psi \vee \zeta) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \zeta)$
5. $\phi \vee (\psi \wedge \zeta) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \zeta)$
6. $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
7. $\phi \Leftrightarrow \psi \equiv (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$
8. $\neg \forall x\, (\phi) \equiv \exists x\, (\neg\phi)$

Προετοιμασία για Μετατροπή σε CNF

Χρήσιμες Ισοδυναμίες

1. $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$
2. $\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$
3. $\neg\neg\phi \equiv \phi$
4. $\phi \wedge (\psi \vee \zeta) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \zeta)$
5. $\phi \vee (\psi \wedge \zeta) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \zeta)$
6. $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
7. $\phi \Leftrightarrow \psi \equiv (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$
8. $\neg \forall x\, (\phi) \equiv \exists x\, (\neg\phi)$
9. $\neg \exists x\, (\phi) \equiv \forall x\, (\neg\phi)$

Προετοιμασία για Μετατροπή σε CNF

Χρήσιμες Ισοδυναμίες

1. $\neg(\phi\wedge\psi) \equiv (\neg\phi\vee\neg\psi)$
2. $\neg(\phi\vee\psi) \equiv (\neg\phi\wedge\neg\psi)$
3. $\neg\neg\phi \equiv \phi$
4. $\phi\wedge (\psi\vee\zeta) \equiv (\phi\wedge\psi) \vee (\phi\wedge\zeta)$
5. $\phi \vee (\psi\wedge\zeta) \equiv (\phi\vee\psi) \wedge (\phi\vee\zeta)$
6. $\phi\Rightarrow\psi \equiv \neg\phi\vee\psi$
7. $\phi\Leftrightarrow\psi \equiv (\phi\Rightarrow\psi) \wedge (\psi\Rightarrow\phi)$
8. $\neg\forall x\,(\phi) \equiv \exists x\,(\neg\phi)$
9. $\neg\exists x\,(\phi) \equiv \forall x\,(\neg\phi)$
10. $\forall x\,(\phi) \equiv \forall y(\ \phi\,[x|y]\ )$
11. $\exists x\,(\phi) \equiv \exists y(\ \phi\,[x|y]\ )$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

- Οι ισοδυναμίες (10) – (11) ισχύουν μόνο όταν το y δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην φ.

Προετοιμασία για Μετατροπή σε CNF

Χρήσιμες Ισοδυναμίες

1. $\neg(\phi\wedge\psi) \equiv (\neg\phi\vee\neg\psi)$
2. $\neg(\phi\vee\psi) \equiv (\neg\phi\wedge\neg\psi)$
3. $\neg\neg\phi \equiv \phi$
4. $\phi\wedge(\psi\vee\zeta) \equiv (\phi\wedge\psi) \vee (\phi\wedge\zeta)$
5. $\phi \vee (\psi\wedge\zeta) \equiv (\phi\vee\psi) \wedge (\phi\vee\zeta)$
6. $\phi\Rightarrow\psi \equiv \neg\phi\vee\psi$
7. $\phi\Leftrightarrow\psi \equiv (\phi\Rightarrow\psi) \wedge (\psi\Rightarrow\phi)$
8. $\neg\forall x\,(\phi) \equiv \exists x\,(\neg\phi)$
9. $\neg\exists x\,(\phi) \equiv \forall x\,(\neg\phi)$
10. $\forall x\,(\phi) \equiv \forall y(\,\phi\,[x|y]\,)$
11. $\exists x\,(\phi) \equiv \exists y(\,\phi\,[x|y]\,)$
12. $\phi\wedge\forall x\,(\psi) \equiv \forall x(\,\phi\wedge\psi\,)$
13. $\phi\vee\exists x\,(\psi) \equiv \exists x(\,\phi\vee\psi\,)$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

- Οι ισοδυναμίες (10) – (11) ισχύουν μόνο όταν το y δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην φ.

- Οι ισοδυναμίες (12) – (13) ισχύουν μόνο όταν το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην φ.

Προετοιμασία για Μετατροπή σε CNF

<u>Χρήσιμες Ισοδυναμίες</u>

1. $\neg(\phi\wedge\psi) \equiv (\neg\phi\vee\neg\psi)$
2. $\neg(\phi\vee\psi) \equiv (\neg\phi\wedge\neg\psi)$
3. $\neg\neg\phi \equiv \phi$
4. $\phi\wedge (\psi\vee\zeta) \equiv (\phi\wedge\psi) \vee (\phi\wedge\zeta)$
5. $\phi \vee (\psi\wedge\zeta) \equiv (\phi\vee\psi) \wedge (\phi\vee\zeta)$
6. $\phi\Rightarrow\psi \equiv \neg\phi\vee\psi$
7. $\phi\Leftrightarrow\psi \equiv (\phi\Rightarrow\psi) \wedge (\psi\Rightarrow\phi)$
8. $\neg\forall x\,(\phi) \equiv \exists x\,(\neg\phi)$
9. $\neg\exists x\,(\phi) \equiv \forall x\,(\neg\phi)$
10. $\forall x\,(\phi) \equiv \forall y(\,\phi\,[x|y]\,)$
11. $\exists x\,(\phi) \equiv \exists y(\,\phi\,[x|y]\,)$
12. $\phi\wedge\forall x\,(\psi) \equiv \forall x(\,\phi\wedge\psi\,)$
13. $\phi\vee\exists x\,(\psi) \equiv \exists x(\,\phi\vee\psi\,)$
14. $\forall x(\,\phi\wedge\psi\,) \equiv \forall x(\,\phi\,) \wedge \forall z(\,\psi[x|z]\,)$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ:</u>

- Οι ισοδυναμίες (10) – (11) ισχύουν μόνο όταν το y δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην φ.
- Οι ισοδυναμίες (12) – (13) ισχύουν μόνο όταν το x δεν εμφανίζεται ελεύθερο στην φ.
- Η ισοδυναμία (14) ισχύει μόνο όταν το z δεν εμφανίζεται ελεύθερο στα φ, ψ.

Skolemization

Σε έναν τύπο φ με ποσοδείκτη $\exists$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον ποσοδείκτη και την μεταβλητή y που τον συνοδεύει, χρησιμοποιώντας ένα νέο συναρτησιακό σύμβολο f με παραμέτρους όλες τις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, των ποσοδεικτών $\forall$ στην εμβέλεια των οποίων βρίσκεται η y (υπενθυμίζουμε ότι συναρτήσεις χωρίς παραμέτρους είναι ισοδύναμες με σταθερές).

<u>Παραδείγματα</u>

- $\exists y \forall x\, R(x,y)$ μετατρέπεται σε $\forall x\, R(x,\mathbf{a})$

Skolemization

Σε έναν τύπο φ με ποσοδείκτη $\exists$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον ποσοδείκτη και την μεταβλητή y που τον συνοδεύει, χρησιμοποιώντας ένα νέο συναρτησιακό σύμβολο f με παραμέτρους όλες τις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, των ποσοδεικτών $\forall$ στην εμβέλεια των οποίων βρίσκεται η y (υπενθυμίζουμε ότι συναρτήσεις χωρίς παραμέτρους είναι ισοδύναμες με σταθερές).

Παραδείγματα

- $\exists y \forall x\, R(x,y)$ μετατρέπεται σε $\forall x\, R(x,\mathbf{a})$

- $\forall x \exists y\, (P(y) \Rightarrow R(x,y))$ μετατρέπεται σε $\forall x(P(\mathbf{f(x)}) \Rightarrow R(x,\mathbf{f(x)}))$

Skolemization

Σε έναν τύπο φ με ποσοδείκτη $\exists$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον ποσοδείκτη και την μεταβλητή y που τον συνοδεύει, χρησιμοποιώντας ένα νέο συναρτησιακό σύμβολο f με παραμέτρους όλες τις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, των ποσοδεικτών $\forall$ στην εμβέλεια των οποίων βρίσκεται η y (υπενθυμίζουμε ότι συναρτήσεις χωρίς παραμέτρους είναι ισοδύναμες με σταθερές).

<u>Παράδειγματα</u>

- $\exists y \forall x\, R(x,y)$ μετατρέπεται σε $\forall x\, R(x,\mathbf{a})$

- $\forall x \exists y\, (\, P(y) \Rightarrow R(x,y)\,)$ μετατρέπεται σε $\forall x (\, P(\mathbf{f(x)}) \Rightarrow R(x,\mathbf{f(x)})\,)$

- $\forall x \exists y \forall z \exists r\, (\, P(x,y) \Rightarrow R(y,z,r)\,)$ μετατρέπεται σε $\forall x \forall z\, (\, P(x,\mathbf{f(x)}) \Rightarrow R(\mathbf{f(x)},z,\mathbf{g(x,z)})\,)$

Skolemization

Σε έναν τύπο φ με ποσοδείκτη $\exists$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον ποσοδείκτη και την μεταβλητή y που τον συνοδεύει, χρησιμοποιώντας ένα νέο συναρτησιακό σύμβολο f με παραμέτρους όλες τις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, των ποσοδεικτών $\forall$ στην εμβέλεια των οποίων βρίσκεται η y (υπενθυμίζουμε ότι συναρτήσεις χωρίς παραμέτρους είναι ισοδύναμες με σταθερές).

<u>Παράδειγματα</u>

- $\exists y \forall x\ R(x,y)$ μετατρέπεται σε $\forall x\ R(x,\mathbf{a})$

- $\forall x \exists y\ (P(y) \Rightarrow R(x,y))$ μετατρέπεται σε $\forall x (P(\mathbf{f(x)}) \Rightarrow R(x,\mathbf{f(x)}))$

- $\forall x \exists y \forall z \exists r\ (P(x,y) \Rightarrow R(y,z,r))$ μετατρέπεται σε $\forall x \forall z\ (P(x,\mathbf{f(x)}) \Rightarrow R(\mathbf{f(x)},z,\mathbf{g(x,z)}))$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>:
Όταν ένας τύπος φ μετατρέπεται μέσω Skolemization σε ένα νέο τύπο ψ, οι δύο τύποι δεν είναι απαραίτητα ισοδύναμοι. Ωστόσο ο φ είναι ικανοποιήσιμος ανν ο ψ είναι ικανοποιήσιμος.

Προετοιμασία για Αναγωγή σε ΚΛ

1. Απαλοιφή των $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
2. Μετακίνηση $\neg$ δίπλα στα κατηγορήματα.
3. Μετονομασία μεταβλητών.
4. Απαλοιφή $\exists$.
5. Μετακίνηση ποσοδεικτών στην αρχή της πρότασης.
6. Επιμερισμός $\vee$ και $\wedge$

Άσκηση

Μετατρέψτε τους παρακάτω τύπους σε CNF:

- $\forall x \, (Q(x) \Rightarrow \exists y P(x,y)) \Rightarrow (Q(c) \Rightarrow P(c,c))$
- $\forall x \, (P(x) \Rightarrow \exists y (E(y) \wedge D(x,y)))$
- $\exists x \forall z (P(x,z) \wedge \forall x (Q(x,z))) \Leftrightarrow \exists x (P(x,x))$

Κανόνας Αναγωγής

ΘΕΩΡΗΜΑ:
Αν τα c_1, c_2 είναι μη-κενά clauses που δεν διαφωνούν σε κανένα literal, τότε για κάθε νέο literal x,

$$\{\ c_1 \cup \{x\},\ \ c_2 \cup \{\neg x\}\ \} \vDash\ c_1 \cup c_2$$

Απόδειξη.
Έστω M τυχαία ερμηνεία τέτοια ώστε $M \vDash c_1 \cup \{x\}$ και $M \vDash c_2 \cup \{\neg x\}$. Αν $M \vDash x$ τότε προκύπτει πως $M \vDash c_2$ και επομένως $M \vDash c_1 \cup c_2$.

Αν από την άλλη $M \vDash \neg x$ τότε προκύπτει πως $M \vDash c_1$. Επομένως και πάλι $M \vDash c_1 \cup c_2$. ☐

Κανόνας Αναγωγής

ΘΕΩΡΗΜΑ:
Αν τα c_1, c_2 είναι μη-κενά clauses που δεν διαφωνούν σε κανένα literal, τότε για κάθε νέο literal x,

$$\{\ c_1 \cup \{x\},\ \ c_2 \cup \{\neg x\}\ \} \vDash\ c_1 \cup c_2$$

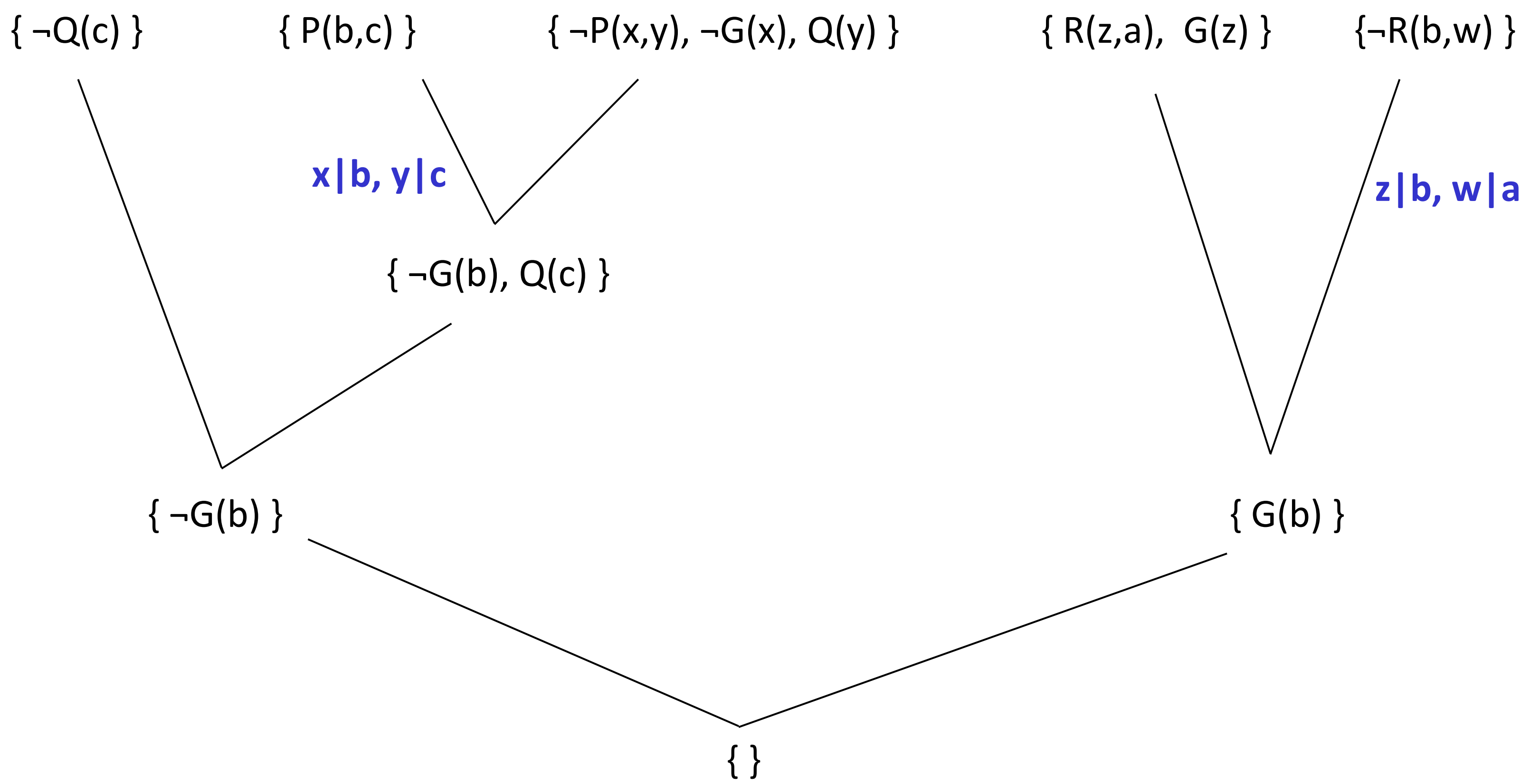
Απόδειξη.
Έστω M τυχαία ερμηνεία τέτοια ώστε $M \vDash c_1 \cup \{x\}$ και $M \vDash c_2 \cup \{\neg x\}$. Αν $M \vDash x$ τότε προκύπτει πως $M \vDash c_2$ και επομένως $M \vDash c_1 \cup c_2$.

Αν από την άλλη $M \vDash \neg x$ τότε προκύπτει πως $M \vDash c_1$. Επομένως και πάλι $M \vDash c_1 \cup c_2$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ:
Ένα σύνολο τύπων T είναι μη-ικανοποιήσιμο ανν από το T προκύπτει το κενό clause μέσω αναγωγής.

Αναγωγή σε ΚΛ

Κατά την αναγωγή σε ΚΛ, κάθε literal με μεταβλητές ουσιαστικά αντιπροσωπεύει όλα του τα στιγμιότυπα.



Αναγωγή με Ισότητα - Προβλήματα

<u>Παράδειγμα 1:</u>

Έστω a, b, c τρεις σταθερές, και S το παρακάτω σύνολο προτάσεων κατηγορηματικής λογικής:

$$S = \{ a = b, b = c, \neg(a=c) \}$$

Προφανώς το S είναι μη-ικανοποιήσιμο. Ωστόσο η αναγωγή δεν παράγει το κενό σύνολο.

Αναγωγή με Ισότητα - Προβλήματα

Παράδειγμα 1:

Έστω a, b, c τρεις σταθερές, και S το παρακάτω σύνολο προτάσεων κατηγορηματικής λογικής:

$$S = \{ a = b,\ b = c,\ \neg(a=c) \}$$

Προφανώς το S είναι μη-ικανοποιήσιμο. Ωστόσο η αναγωγή δεν παράγει το κενό σύνολο.

Παράδειγμα 2:

Έστω a, b τρεις σταθερές, P κατηγόρημα και S το παρακάτω σύνολο προτάσεων κατηγορηματικής λογικής:

$$S = \{ a = b,\ P(a),\ \neg P(b) \}$$

Προφανώς το S είναι μη-ικανοποιήσιμο. Ωστόσο η αναγωγή δεν παράγει το κενό σύνολο.

Αναγωγή με Ισότητα – Λύση

Για τον σωστό χειρισμό της ισότητας προσθέτουμε στην βάση γνώσης μας τα ακόλουθα αξιώματα:

E1. $\forall x \, (x = x)$

E2. $\forall x \forall y \, (x=y \Rightarrow y=x)$

E3. $\forall x \forall y \forall z \, (x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z)$

Αναγωγή με Ισότητα – Λύση

Για τον σωστό χειρισμό της ισότητας προσθέτουμε στην βάση γνώσης μας τα ακόλουθα αξιώματα:

E1. $\forall x\ (x = x)$

E2. $\forall x \forall y\ (x=y \Rightarrow y=x)$

E3. $\forall x \forall y \forall z\ (x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z)$

Επίσης, για κάθε συνάρτηση *f* με n μεταβλητές προσθέτουμε το αξίωμα

E4.*f*. $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \forall y_1 \ldots \forall y_n\ (x_1=y_1 \wedge \ldots \wedge x_n=y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))$

και για κάθε κατηγόρημα P με n όρους προσθέτουμε το αξίωμα

E5.P. $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \forall y_1 \ldots \forall y_n\ (x_1=y_1 \wedge \ldots \wedge x_n=y_n \Rightarrow P(x_1, \ldots, x_n) \equiv P(y_1, \ldots, y_n))$

Αναγωγή με Ισότητα – Λύση

Για τον σωστό χειρισμό της ισότητας προσθέτουμε στην βάση γνώσης μας τα ακόλουθα αξιώματα:

E1. $\forall x\ (x = x)$

E2. $\forall x \forall y\ (x=y \Rightarrow y=x)$

E3. $\forall x \forall y \forall z\ (x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z)$

Επίσης, για κάθε συνάρτηση *f* με n μεταβλητές προσθέτουμε το αξίωμα

E4.*f*. $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \forall y_1 \ldots \forall y_n\ (x_1=y_1 \wedge \ldots \wedge x_n=y_n \Rightarrow f(x_1 , \ldots , x_n) = f(y_1 , \ldots , y_n))$

και για κάθε κατηγόρημα P με n όρους προσθέτουμε το αξίωμα

E5.P. $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \forall y_1 \ldots \forall y_n\ (x_1=y_1 \wedge \ldots \wedge x_n=y_n \wedge P(x_1 , \ldots , x_n) \Rightarrow P(y_1 , \ldots , y_n))$

Στην συνέχεια η ισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αναγωγή σαν ένα κοινό κατηγόρημα.

Παράδειγμα Αναγωγής με Ισότητα

Αποδείξτε με αναγωγή πως το σύνολο S = { father(John) = Bill, ∀x (married(father(x), mother(x)), ¬married(Bill, mother(John)) } είναι μη-ικανοποιήσιμο:

Παράδειγμα Αναγωγής με Ισότητα

Αποδείξτε με αναγωγή πως το σύνολο S = { father(John) = Bill, $\forall$x (married(father(x), mother(x)), ¬married(Bill, mother(John)) } είναι μη-ικανοποιήσιμο:

Απαρίθμηση προτάσεων S ως clauses:

1. { father(John)=Bill }
2. { married(father(x_1), mother(x_1)) }
3. { ¬married(Bill, mother(John)) }

Παράδειγμα Αναγωγής με Ισότητα

Αποδείξτε με αναγωγή πως το σύνολο S = { father(John) = Bill, ∀x (married(father(x), mother(x)), ¬married(Bill, mother(John)) } είναι μη-ικανοποιήσιμο:

Απαρίθμηση προτάσεων S ως clauses:

1. { father(John)=Bill }
2. { married(father(x_1), mother(x_1)) }
3. { ¬married(Bill, mother(John)) }

Προσθήκη αξιωμάτων ισότητας στην Βάση Γνώσης

(το (E5.P) "σπάει" σε 2 clauses κατά την μετατροπή σε CNF)

E1. { x_2 = x_2 }

E2. { ¬(x_3=y_3), y_3=x_3 }

E3. { ¬(x_4=y_4), ¬(y_4=z_4), x_4=z_4 }

E4.*m*. { ¬(x_5=y_5), mother(x_5) = mother(y_5) }

E4.*f*. { ¬(x_6=y_6), father(x_6) = father(y_6) }

E5.*m* { ¬(x_7=y_7), ¬(x_8=y_8), ¬married(x_7,x_8), married(y_7,y_8)) }

Παράδειγμα Αναγωγής με Ισότητα

Αποδείξτε με αναγωγή πως το σύνολο S = { father(John) = Bill, $\forall$x (married(father(x), mother(x)), ¬married(Bill, mother(John)) } είναι μη-ικανοποιήσιμο:

Απαρίθμηση προτάσεων S ως clauses:

1. { father(John)=Bill }
2. { married(father(x_1), mother(x_1)) }
3. { ¬married(Bill, mother(John)) }

Προσθήκη αξιωμάτων ισότητας στην Βάση Γνώσης

(το (E5.P) "σπάει" σε 2 clauses κατά την μετατροπή σε CNF)

E1. { x_2 = x_2 }

E2. { ¬(x_3=y_3), y_3=x_3 }

E3. { ¬(x_4=y_4), ¬(y_4=z_4), x_4=z_4 }

E4.*m*. { ¬(x_5=y_5), mother(x_5) = mother(y_5) }

E4.*f*. { ¬(x_6=y_6), father(x_6) = father(y_6) }

E5.*m* { ¬(x_7=y_7), ¬(x_8=y_8), ¬married(x_7,x_8), married(y_7,y_8)) }

Αναγωγή

4. { ¬(x_7=Bill), ¬(x_8=mother(John)), ¬married(x_7,x_8) }, (3), (E5.m), όπου y_7/Bill, y_8/mother(John)

5. { ¬(x_8=mother(John)), ¬married(father(John), x_8) }, (1), (4), όπου x_7/father(John)

6. { ¬(mother(John)=mother(John)) }, (2), (5), όπου x_1/John, x_8/mother(John)

7. { }, (6), (E1), όπου x2/mother(John)