ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
TECHNICAL UNIVERSITY OF CRETE

ΉΜΜΥ

ΠΛΗ 402 - Θεωρία Υπολογισμού

1η Σειρά Ασκήσεων

Συγγραφέας:

Βασιλειάδης Σταύρος

ΑΜ:

2019030023

Διδάσκων:

Λαγουδάκης Μιχαήλ

12 Μαΐου 2025

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ **1**

Κατάλογος συμβόλων και συντομογραφίες

- $\mathcal{L}$ Σύνολο γλωσσών με κάποιες κοινές ιδιότητες (πχ βλ παρακάτω)
- $\mathcal{L}_{reg}$ Σύνολο κανονικών γλωσσών
- $\mathcal{L}_{irr}$ Σύνολο μη κανονικών γλωσσών
- $\mathcal{L}_{fin}$ Σύνολο πεπερασμένων γλωσσών
- $\approx L$ Ισοδυναμία γλώσσας κατά Myhill-Nerode
- $\sim M$ Ισοδυναμία DFA κατά Myhill-Nerode
- Σ Αλφάβητο
- Q ή K Σύνολο καταστάσεων (αυτομάτου)
- s Αρχική κατάσταση (αυτομάτου)
- F Σύνολο τελικών καταστάσεων (αυτομάτου)
- Δ Σύνολο σχέσεων μεταβάσεων (αυτομάτου)
- w, x, y, z Συμβολοσειρά / Υποσυμβολοσειρές
- DFA Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο $\mathrm{M} = (\mathrm{Q}, \Sigma, \delta, \mathrm{s}, \mathrm{F})$
- NFA Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο
- $\varepsilon - NFA$ Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο με κενές μεταβάσεις
- M Αυτόματο
- M' Πρότυπο/Ελάχιστο Αυτόματο

  Εναλλακτικά DFA παραγόμενο ενός άλλου DFA / NFA.

- $\mathbb{N}^0$ Σύνολο φυσικών αριθμών (συμπεριλαμβανομένου και του μηδενός)
- $\aleph_0$ Πληθάριθμος συνόλου φυσικών αριθμών
  Ο ελάχιστος μετρήσιμα άπειρος αριθμός
- $|w|$ πληθάριθμος συνόλου w / συμβολοσειράς w
- $|w|_c$ πληθάριθμος συνόλου w / συμβολοσειράς w για σύμβολο c
- $|w|_{min}$ ελάχιστος δυνατός πληθάριθμος συνόλου w / συμβολοσειράς w
- c Ακριβώς μία εμφάνιση συμβόλου c.
  Αντίστοιχα για $w = cc..c$, $|w|_c = n$ τότε ακριβώς n εμφανίσεις συμβόλου c
- c^+ Τουλάχιστον μία εμφάνιση συμβόλου c
- c^* Τουλάχιστον μηδέν εμφανίσεις συμβόλου c
- ε ή e Κενό σύμβολο
- $\exists$ Υπάρχει
- $\forall$ Για όλα
- $\in$ Ανήκει στο
- $\ldots$ "και ούτω καθεξής", συνέχιση ακολουθίας βάση εμφανούς μοτίβου
- $|$ ή $:$ ή $\ni$ Έτσι Ώστε
- $\mathcal{P}(Q)$ Δυναμοσύνολο συνόλου Q.
  Για $Q = \{a, b, c\} \overset{\emptyset \subseteq \text{all sets}}{\rightarrow} \mathcal{P}(Q) = \{\emptyset, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$
  Συνεπάγεται ότι $|\mathcal{P}(Q)| = 2^{|Q|}$

- $\mathcal{P}$ ή $\mathcal{Q}$ κοκ Λογικές προτάσεις
- T / F (Λογικό) Αληθές / Ψευδές
- $\cup$ Ένωση
- $\cap$ Τομή
- $-$ ή / Διαφορά
- $\subseteq$ Υποσύνολο
- $\subset$ Γνήσιο υποσύνολο
- $\wedge$ Λογική Σύζευξη
- $\vee$ Λογική Διάζευξη
- $\neg$ Λογική Άρνηση
- Σ^* Σύνολο πεπερασμένου μήκους συμβολοσειρών αλφάβητου Σ συμπεριλαμβανομένης της κενής συμβολοσειράς ε

ΜΕΡΟΣ **2**

Λύσεις Ασκήσεων

1 Άσκηση **1**η - Κανονικές εκφράσεις**:**

[15%] Γράψτε κανονικές εκφράσεις για τις παρακάτω γλώσσες:

(α) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* : w$ περιέχει ακριβώς ένα a, ακριβώς ένα b και άρτιο πλήθος από $c\}$

(β) $L = \{w \in \{a, b\}^* :$ η w αρχίζει και τελειώνει με το ίδιο σύμβολο, το οποίο έχει περιττό αριθμό εμφανίσεων$\}$

(γ) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* :$ το πλήθος των a στην w είναι 4k + 1 (k ≥ 0) και δεν εμφανίζονται συνεχόμενα $a\}$

1 - α Απάντηση Υποερωτήματος (α)

Έχουμε CFL $L_1 = \{a^n, b^m : n, m \in \mathbb{N}_0, 3n \le m \le 6n\}$ άρα $|w|_{min} = 0$ για $n = 0$ με a να προηγούνται των b. Οπότε: $\xrightarrow{\text{Ελάχιστη περίπτωση}} \varepsilon$ και $\xrightarrow{\text{Ελάχιστη μή κενή περίπτωση}} abbb$. Αλλά με το ίδιο a έχουμε επίσης (με κενά για να είναι ευανάγνωστο): $\rightarrow a\,bbb\,b,\ a\,bbb\,bb,\ a\,bbb\,bbb$.

Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε ότι μπορούμε να έχουμε έως $|w|_a = \aleph_0$ και αντίστοιχα τα b που αναλογούν σε αυτά για να είναι σωστή η συμβολοσειρά. Οτιδήποτε όμως από αυτά είναι ουσιαστικά απλή επανάληψη του κανόνα που δημιουργεί όλες τις ενός a συμβολοσειρές. Άρα δεν χρειαζόμαστε κάποιο επιπρόσθετο κανόνα παραγωγής αλλά έχουμε αναδρομή.

Συμψηφίζοντας τώρα αυτές τις παρατηρήσεις μπορούμε να περάσουμε στην κατασκευή των κανόνων παραγωγής. Θα το προσεγγίσουμε σταδιακά:

- Ελάχιστη περίπτωση:

  $S \rightarrow \varepsilon$

- Ελάχιστα a:

  $S \rightarrow aM \mid \varepsilon$

  $M \rightarrow bbb \mid bbbb \mid bbbbb \mid bbbbbb$

- $|w| = \aleph_0$:

  $S \rightarrow aSM \mid \varepsilon$

  $M \rightarrow bbb \mid bbbb \mid bbbbb \mid bbbbbb$

- Πιο ευανάγνωστη παραλλαγή:

  $S \rightarrow aSbbM|\varepsilon$

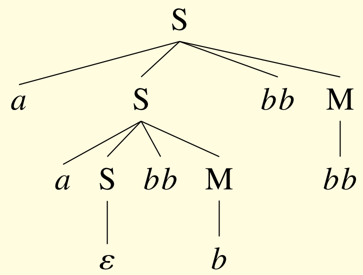
  $M \rightarrow b \mid bb \mid bbb \mid bbbb$

Γραμματική και συντακτικό δένδρο

Είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην πλήρη περιγραφή της γραμματικής μας:

$$G_1 = (\{a, b\}, \{\varepsilon\}, \{S \rightarrow aSbbM \mid \varepsilon,\ M \rightarrow b \mid bb \mid bbb \mid bbbb\}, S)$$

Ήρθε η στιγμή να δώσουμε το συντακτικό δένδρο για συμβολοσειρά (τα κενά για ευκολότερη ανάγνωση) $w = aa\,bbb\,bbb\,b$, $|w| = 9$, $|w|_a = 2$, $|w|_b = 7$:



Που δίνει: $a \quad a \quad bb \quad b \quad bb \quad bb$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να ανταλλάξουμε το ένα M με το άλλο και θα φτάναμε πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα.

1 - β Απάντηση Υποερωτήματος (β)

Έχουμε CFL $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* : |w|_a = 3 \times |w|_b + 2\}$ άρα $|w|_{min} = 2$ και συγκεκριμένα aa.

Στην περίπτωση όμως που έχουμε έστω και ένα b έχουμε: $aaa\,aa\,b$. Παρατηρούμε όμως ότι η γλώσσα δεν ορίζει συγκεκριμένη σειρά μεταξύ a και b και άρα θα πρέπει να μπορούν να παραχθούν όλοι οι συνδυασμοί και με βάση τη θέση των συμβόλων και άρα επιπρόσθετες συμβολοσειρές: $b\,aaa\,aa$, $a\,b\,aaa\,a$, $aa\,b\,aaa$, $aaa\,b\,aa$, $aaa\,a\,b\,a$.

Για να οδηγηθούμε όμως σε κάποιες από αυτές το ελάχιστο aa διαχωρίστηκε, με το b να παρεμβάλλεται ανάμεσα. Με βάση την ελάχιστη περίπτωση καταλαβαίνουμε ότι, παρόλα αυτά, τα δύο παραπάνω a (από το τριπλάσιο των b) μάλλον θα πρέπει να απομονωθούν από τα υπόλοιπα σύμβολα της λέξης σε δικό τους κανόνα.

Μπορούμε όμως να έχουμε έως $|w|_b = \aleph_0$ και αντίστοιχα τα a που αναλογούν σε αυτά για αν είναι σωστή η συμβολοσειρά. Αυτό, εφόσον είναι εφικτό, υπονοεί χρήση αναδρομής και συγκεκριμένα όλων των κανόνων παραγωγής εκτός του ελάχιστου aa.

Συμψηφίζοντας τώρα αυτές τις παρατηρήσεις μπορούμε να περάσουμε στην κατασκευή των κανόνων παραγωγής. Θα το προσεγγίσουμε σταδιακά:

- Ελάχιστη περίπτωση:

  $S \to aa$

- Ελάχιστα b:

  $S \to aa \mid aMa \mid MaaM$

  $M \to A_1bA_2 \mid A_2bA_1 \mid A_1A_2b \mid bA_1A_2$

  $A_1 \to a$

  $A_2 \to aa$

- $|w| = \aleph_0$:

  $S \to aa \,|\, aMa \,|\, MaaM$

  $M \to A_1bMA_2 \,|\, A_2bMA_1 \,|\, A_1A_2bM \,|\, MbA_1A_2 \,|\, \varepsilon$

  $A_1 \to a$

  $A_2 \to aa$

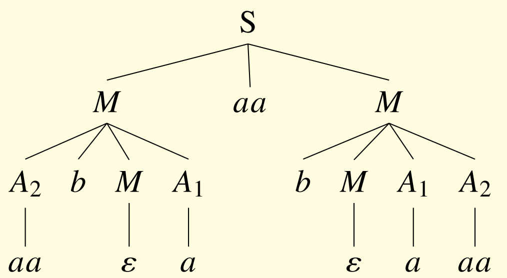
Γραμματική και συντακτικό δένδρο

Είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην πλήρη περιγραφή της γραμματικής μας:

$G_2 = (\{a, b\}, \{aa, \varepsilon\}, \{S \to aa \,|\, aMa \,|\, MaaM$

$M \to A_1bMA_2 \,|\, A_2bMA_1 \,|\, A_1A_2bM \,|\, MbA_1A_2 \,|\, \varepsilon,\ A_1 \to a,\ A_2 \to aa\}, S)$

Ήρθε η στιγμή να δώσουμε το συντακτικό δένδρο για συμβολοσειρά (τα κενά για ευκολότερη ανάγνωση) $w = aa\,b\,aaa\,b\,aaa$, $|w| = 10$, $|w|_a = 8$, $|w|_b = 2$:



Που δίνει: $aa \quad b \quad a \quad aa \quad b \quad a \quad aa$

2 Άσκηση **2**η **-** Πεπερασμένα αυτόματα**:**

[30%] Κατασκευάστε αυτόματα στοίβας για τις παρακάτω γλώσσες:

(α) $L_1 = \{b^n a^k b^k a^n : k, n \in \mathbb{N}^0\}$

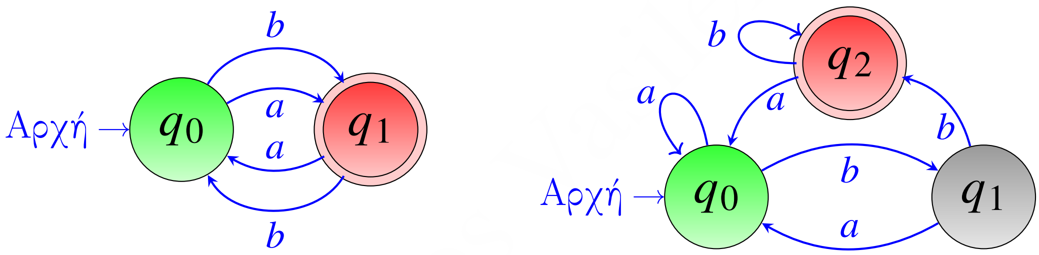
(β) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* :$ η w περιέχει διπλάσιο αριθμό b απ'ότι $a\}$

2 - α Απάντηση Υποερωτήματος (α)

Έχουμε $L = \{w \in \{a,\ b\}^* \mid (\forall n \in \mathbb{N}^0)\ [\exists w \ni (\bigcup_{k=|w|-1}^{|w|} w_k = bb \wedge |w| = 2n+1)\,]\,\}$, όθεν $|w|_{min} = 3$.

Προς εύρεση αυτομάτου αναγνωρίζων τη δοθέντα γλώσσα το πρόβλημα θα αποδομηθεί βάση περιορισμών και θα κατασκευασθούν αυτόματα που αναγνωρίζουν έκαστη εκ των δύο συνθηκών απομονωμένα.

- Το 1ο αυτόματο M_1 θα αναγνωρίζει λέξη περιττού πλήθους χαρακτήρων.
- Το 2ο αυτόματο M_2 θα αναγνωρίζει συμβολοσειρά, λήγουσα σε bb.



(a) DFA M_1 :
$L = \{\, w \in \{a,b\}^* \,|\, |w| = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}^0\}$

(b) DFA M_2 :
$L = \{\, w \in \{a,b\}^* | y = bb, \forall x \in \{a,b\}^*, w = xy\}$

Figure 2.1: Αποδόμηση προβλήματος (2-α)

Είμαστε έτοιμοι να συνθέσουμε το τελικό αυτόματο M_{T} με $Q_{\mathrm{T}} = Q_1 \times Q_2 = \{(q_1,\ q_2) \mid q_1 \in Q_1 \in M1, q_2 \in Q_2 \in M2\}$, όθεν επίσης δείχνει ότι έχουμε $|Q_1| \cdot |Q_2| = |Q_{\mathrm{T}}|_{max} \Longrightarrow 2 \cdot 3 = 6$:

Κόμβοι:

- $q_T^0 = (q_1^0, q_2^0)$
- $q_T^1 = (q_1^0, q_2^1)$
- $q_T^2 = (q_1^0, q_2^2)$
- $q_T^3 = (q_1^1, q_2^0)$
- $q_T^4 = (q_1^1, q_2^1)$
- $q_T^5 = (q_1^1, q_2^2)$

Μεταβάσεις:

- $q_T^0 = (q_1^0, q_2^0) \rightarrow^{\boldsymbol{a}} (q_1^1, q_2^0) = q_T^3$
- $q_T^1 = (q_1^0, q_2^1) \rightarrow^{\boldsymbol{a}} (q_1^1, q_2^0) = q_T^3$
- $q_T^2 = (q_1^0, q_2^2) \rightarrow^{\boldsymbol{a}} (q_1^1, q_2^0) = q_T^3$
- $q_T^3 = (q_1^1, q_2^0) \rightarrow^{\boldsymbol{a}} (q_1^0, q_2^0) = q_T^0$
- $q_T^4 = (q_1^1, q_2^1) \rightarrow^{\boldsymbol{a}} (q_1^0, q_2^0) = q_T^0$
- $q_T^5 = (q_1^1, q_2^2) \rightarrow^{\boldsymbol{a}} (q_1^0, q_2^0) = q_T^0$
- $q_T^0 = (q_1^0, q_2^0) \rightarrow^{\boldsymbol{b}} (q_1^1, q_2^1) = q_T^4$
- $q_T^1 = (q_1^0, q_2^1) \rightarrow^{\boldsymbol{b}} (q_1^1, q_2^2) = q_T^5$
- $q_T^2 = (q_1^0, q_2^2) \rightarrow^{\boldsymbol{b}} (q_1^1, q_2^2) = q_T^5$
- $q_T^3 = (q_1^1, q_2^0) \rightarrow^{\boldsymbol{b}} (q_1^0, q_2^1) = q_T^1$
- $q_T^4 = (q_1^1, q_2^1) \rightarrow^{\boldsymbol{b}} (q_1^0, q_2^2) = q_T^2$
- $q_T^5 = (q_1^1, q_2^2) \rightarrow^{\boldsymbol{b}} (q_1^0, q_2^2) = q_T^2$

Έχουμε DFA M_{T} με εξής μη ενδιαμέσους κόμβους:

αρχικό $s_{\mathrm{T}} \in M_{\mathrm{T}} = \{(q_1,\ q_2) \mid q_1 = s_1 \in M_1, q_2 = s_2 \in M_2\} \Longrightarrow q_{\mathrm{T}}^0 = q_1^0, q_2^0$,

τελικό $F_{\mathrm{T}} \in M_{\mathrm{T}} = \{(q_1,\ q_2) \mid q_1 \in F_1 \in M_1, q_2 \in F_2 \in M_2\} \Longrightarrow q_{\mathrm{T}}^5 = q_1^1, q_2^2$

DFA $M_{\mathrm{T}} = (\ \{\, q0,\ q1,\ q2,\ q3,\ q4,\ q5\,\}, \{\, a,\ b\,\},$

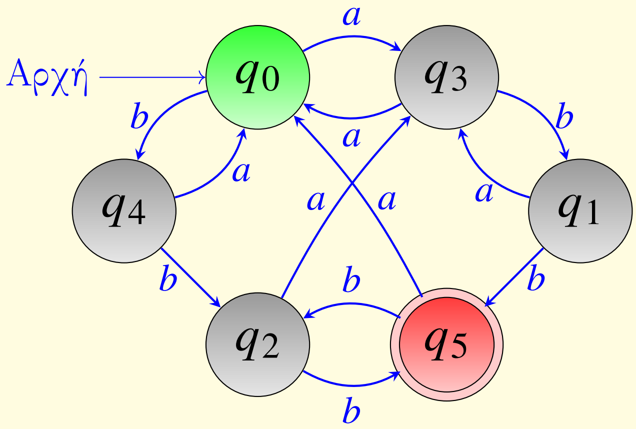
$\{\, \delta(q0,\ a) = q3,\ \delta(q0, b) = q4,\ \delta(q1, a) = q3,\ \delta(q1, b) = q5,$

$\delta(q2, a) = q3,\ \delta(q2, b) = q5,\ \delta(q3, a) = q0,\ \delta(q3, b) = q1,$

$\delta(q4, a) = q0,\ \delta(q4, b) = q2,\ \delta(q5, a) = q0,\ \delta(q5, b) = q2\,\},$

$q0,\ \{\, q5\,\}\ )$

DFA M_{T}



2 - β Απάντηση Υποερωτήματος (β)

Έχουμε να κατασκευάσουμε PDA για CFL $L_1 = \{b^n a^k b^k a^n : k, n \in \mathbb{N}^0\}$
Από τον τύπο δυνάμεθα να εξάγουμε τα εξής δεδομένα, για συμβολοσειρά $w \in L_1$:

- $|w|_{min} = 0 \Longrightarrow n,\ k = 0 \Longrightarrow w = \varepsilon, \quad |w|_{max} = \aleph_0, \quad |w| = 2(n+k) =$ Άρτιο
- $n + k - 2nk = 1 \Longrightarrow |w|_{min} = 2 \Longrightarrow w = ba \cup ab$
- $n, k = 1 \Longrightarrow |w|_{min} = 4 \Longrightarrow w = baba, \qquad L \subseteq \{xx^R | x \in \Sigma^*\}$
- Για μεγαλύτερα n, k έχουμε συμβολοσειρές όπως $bbabaa, baabba, bbaabbaa...$

Από αυτά κάποια δεν μας λένε κάτι ιδιαίτερα χρήσιμο, άλλα όμως μας φανερώνουν την οδό που θα πρέπει να ακολουθήσουμε. Για παράδειγμα, κατά αντιστοιχία με τις αντίστοιχες τεχνικές που ακολουθήσαμε στις λύσεις ασκήσεων κανονικών εκφράσεων, τα διάφορα ελάχιστα μας δίνουν την βάση πάνω στην οποία θα χτιστεί το (PD) αυτόματο.

Ως εκ τούτου έχουμε φαινομενικά τέσσερεις ελάχιστες περιπτώσεις, που η συγκεκριμένη γλώσσα επιτρέπει: $w_0 = \varepsilon \vee w_1 = ab \vee w_2 = ba \vee w_3 = baba$ αλλά προσοχή, το $w = baba$ αποτελεί παρεμβολή του w_1 εντός του w_2 και όχι $(ba)^*$

Αυτό με τη σειρά του δείχνει ότι ουσιαστικά, το w_3 αποτελεί επέκταση της w_2 μετά αρχικού b και άρα δεν είναι μέρος της καθολικής βάσης του αυτομάτου. Θα μας χρειαστεί όμως, αφού δείχνει ότι όταν ο αλγόριθμος θα μπαίνει στη διαδρομή που διαβάζει ba, θα διακλαδώνεται σε δύο εναλλακτικές βάση του αν αυτό που έπεται του b είναι a ή aba.

Τέλος αφού $n, k \in \mathbb{N}_{\not\!\!\!}$ τότε μπορούν όλοι αυτοί οι χαρακτήρες να είναι (μετρήσιμα) άπειροι αλλά υπό τον όρο ότι τηρείται το γενικό μοτίβο.

Άρα, θεωρητικά, έχουμε 3 αρχικούς κλάδους και και σε έναν από αυτούς άλλη μία διάσπαση σε δύο. Θα δούμε τελικά ότι ακριβώς αυτό συμβαίνει και στην πράξη (τουλάχιστον στη συγκεκριμένη επίλυση) και ότι γενικά είναι καλή πρακτική. Ξεκινάμε την κατασκευή του αυτομάτου, αρχικά δίνοντας την μαθηματική περιγραφή και κατόπιν το αντίστοιχο διάγραμμα:

PDA $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

- $K = \{q1, q2, q3, q4, q5, q6\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{A, B, \$\}$
- $\Delta =$
  1. $(q1, \varepsilon, \varepsilon) \to (q2, \$)$
  2. $(q2, b, \$) \to (q2, B\$)$
  3. $(q2, b, B) \to (q2, BB)$
  4. $(q2, \varepsilon, \$) \to (q6, \varepsilon)$
  5. $(q2, a, \$) \to (q3, A\$)$
  6. $(q2, a, B) \to (q3, AB)$
  7. $(q2, a, B) \to (q5, \varepsilon)$
  8. $(q3, a, A) \to (q3, AA)$
  9. $(q3, b, A) \to (q4, \varepsilon)$
  10. $(q4, b, A) \to (q1, \varepsilon)$
  11. $(q4, a, B) \to (q5, \varepsilon)$
  12. $(q4, \varepsilon, \$) \to (q6, \varepsilon)$
  13. $(q5, a, B) \to (q5, \varepsilon)$
  14. $(q5, \varepsilon, \$) \to (q6, \varepsilon)$
- $s = q_1$
- $F = q_6$

DFA $M_{\text{τελικό}}$