ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
TECHNICAL UNIVERSITY OF CRETE

ΉΜΜΥ

ΠΛΗ 402 - Θεωρία Υπολογισμού

2η Σειρά Ασκήσεων

Συγγραφέας:

Βασιλειάδης Σταύρος

AM:

2019030023

Διδάσκων:

Λαγουδάκης Μιχαήλ

30 Ιουνίου 2025

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ **1**

Κατάλογος συμβόλων και συντομογραφίες

- $\mathcal{L}$ Σύνολο γλωσσών με κάποιες κοινές ιδιότητες (πχ βλ παρακάτω)
- $\mathcal{L}_{reg}$ Σύνολο κανονικών γλωσσών
- $\mathcal{L}_{irr}$ Σύνολο μη κανονικών γλωσσών
- $\mathcal{L}_{fin}$ Σύνολο πεπερασμένων γλωσσών
- $\mathcal{L}_{dcf}$ Σύνολο ντετερμινιστικών ασύμφραστων γλωσσών
- $\mathcal{L}_{ncf}$ Σύνολο μή ντετερμινιστικών ασύμφραστων γλωσσών
- $\mathcal{L}_{cf}$ Σύνολο ασύμφραστων γλωσσών
- G_{cf} Ασύμφραστη γραμματική (αντίστοιχα "ncf", "dcf" όπως οι γλώσσες)
  $G = (V,\ \Sigma,\ R,\ S)$
- CNF Κανονική Μορφή Chomsky
- $\approx L$ Ισοδυναμία γλώσσας κατά Myhill-Nerode
- $\sim M$ Ισοδυναμία DFA κατά Myhill-Nerode
- Σ Αλφάβητο
- Q ή K Σύνολο καταστάσεων (αυτομάτου)
- s Αρχική κατάσταση (αυτομάτου)
- F Σύνολο τελικών καταστάσεων (αυτομάτου)
- Δ Σύνολο σχέσεων μεταβάσεων (αυτομάτου)
- w, x, y, z Συμβολοσειρά / Υποσυμβολοσειρές

- PDA Αυτόματο στοίβας M = $(K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$
- DFA Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο M = (Q, Σ, δ, s, F)
- NFA Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο
- $\varepsilon - NFA$ Μη Ντετερμινιστικό Πεπερασμένο Αυτόματο με κενές μεταβάσεις
- M Αυτόματο
- M' Πρότυπο/Ελάχιστο Αυτόματο

  Εναλλακτικά DFA παραγόμενο ενός άλλου DFA / NFA.
- $\mathbb{N}^0$ Σύνολο φυσικών αριθμών (συμπεριλαμβανομένου και του μηδενός)
- $\aleph_0$ Πληθάριθμος συνόλου φυσικών αριθμών

  Ο ελάχιστος μετρήσιμα άπειρος αριθμός
- $|w|$ πληθάριθμος συνόλου w / συμβολοσειράς w
- $|w|_c$ πληθάριθμος συνόλου w / συμβολοσειράς w για σύμβολο c
- $|w|_{min}$ ελάχιστος δυνατός πληθάριθμος συνόλου w / συμβολοσειράς w
- c Ακριβώς μία εμφάνιση συμβόλου c.

  Αντίστοιχα για $w = cc..c, |w|_c = n$ τότε ακριβώς n εμφανίσεις συμβόλου c
- c^+ Τουλάχιστον μία εμφάνιση συμβόλου c
- c^* Τουλάχιστον μηδέν εμφανίσεις συμβόλου c
- ε ή e Κενό σύμβολο

- $\exists$ — Υπάρχει
- $\forall$ — Για όλα
- $\in$ — Ανήκει στο
- $\ldots$ — "και ούτω καθεξής", συνέχιση ακολουθίας βάση εμφανούς μοτίβου
- $|$ ή $:$ ή $\ni$ — Έτσι Ώστε
- $\mathcal{P}(Q)$ — Δυναμοσύνολο συνόλου Q.
  Για $Q = \{a, b, c\} \overset{\emptyset \subseteq \text{all sets}}{\rightarrow} \mathcal{P}(Q) = \{\emptyset, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$
  Συνεπάγεται ότι $|\mathcal{P}(Q)| = 2^{|Q|}$
- $\mathcal{P}$ ή Q — Λογικές προτάσεις
- T / F — (Λογικό) Αληθές / Ψευδές
- $\cup$ — Ένωση
- $\cap$ — Τομή
- $-$ ή / — Διαφορά
- $\subseteq$ — Υποσύνολο
- $\subset$ — Γνήσιο υποσύνολο
- $\wedge$ — Λογική Σύζευξη
- $\vee$ — Λογική Διάζευξη
- $\neg$ — Λογική Άρνηση
- Σ^* — Σύνολο πεπερασμένου μήκους συμβολοσειρών αλφάβητου Σ συμπεριλαμβανομένης της κενής συμβολοσειράς ε

ΜΕΡΟΣ **2**

Λύσεις Ασκήσεων

1 Άσκηση **1**η - Γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα**:**

[30%] Κατασκευάστε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα για τις παρακάτω γλώσσες:

(α) $L_1 = \{a^n\, b^m \;:\; n,\, m \in \mathbb{N}_\kappa, 3n \leq m \leq 6n\}$

(β) $L_2 = \{w \in \{a,\, b\}^* :$ η w περιέχει ακριβώς 2 περισσότερα a από το τριπλάσιο του πλήθους των $b\}$

Για κάθε μία από τις συμβολοσειρές $aabbbbbbb \in L_1$, $\quad aabaaabaaa \in L_2$ και την αντίστοιχη γραμματική, δώστε το αντίστοιχο συντακτικό δέντρο.

1 - α Απάντηση Υποερωτήματος (α)

Έχουμε CFL $L_1 = \{a^n, b^m : n, m \in \mathbb{N}_0, 3n \leq m \leq 6n\}$ άρα $|w|_{min} = 0$ για $n = 0$ με a να προηγούνται των b. Οπότε: $\xrightarrow{\text{Ελάχιστη περίπτωση}} \varepsilon$ και $\xrightarrow{\text{Ελάχιστη μή κενή περίπτωση}} abbb$.
Αλλά με το ίδιο a έχουμε επίσης: $\rightarrow a\,bbb\,b,\ a\,bbb\,bb,\ a\,bbb\,bbb$.
Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε ότι μπορούμε να έχουμε έως $|w|_a = \aleph_0$ και αντίστοιχα τα b που αναλογούν σε αυτά για να είναι σωστή η συμβολοσειρά. Οτιδήποτε όμως από αυτά είναι ουσιαστικά απλή επανάληψη του κανόνα που δημιουργεί όλες τις ενός a συμβολοσειρές. Άρα δεν χρειαζόμαστε κάποιο επιπρόσθετο κανόνα παραγωγής αλλά έχουμε αναδρομή.
Συμψηφίζοντας τώρα αυτές τις παρατηρήσεις μπορούμε να περάσουμε στην κατασκευή των κανόνων παραγωγής. Θα το προσεγγίσουμε σταδιακά:

- Ελάχιστη περίπτωση:

  $S \rightarrow \varepsilon$

- Ελάχιστα a:

  $S \rightarrow aM \mid \varepsilon$

  $M \rightarrow bbb \mid bbbb \mid bbbbb \mid bbbbbb$

- $|w| = \aleph_0$:

  $S \rightarrow aSM \mid \varepsilon$

  $M \rightarrow bbb \mid bbbb \mid bbbbb \mid bbbbbb$

- Πιο ευανάγνωστη παραλλαγή:

  $S \rightarrow aSbbM|\varepsilon$

  $M \rightarrow b \mid bb \mid bbb \mid bbbb$

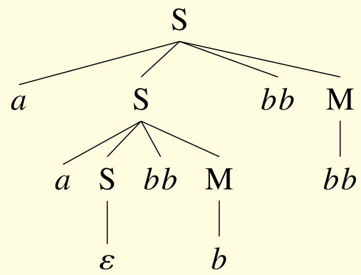
- Καμία αριστερή αναδρομή.

Γραμματική και συντακτικό δένδρο

Είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην πλήρη περιγραφή της γραμματικής μας:

$G_1 = (\{a, b\}, \{\varepsilon\}, \{S \to aSbbM \mid \varepsilon,\ M \to b \mid bb \mid bbb \mid bbbb\}, S)$

Ήρθε η στιγμή να δώσουμε το συντακτικό δένδρο για συμβολοσειρά (τα κενά για ευκολότερη ανάγνωση) $w = aa\,bbb\,bbb\,b$, $|w| = 9$, $|w|_a = 2$, $|w|_b = 7$:



Που δίνει: $a \quad a \quad bb \quad b \quad bb \quad bb$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να το διαβάσουμε ως $a\ (a(\varepsilon)bb(bb))\ bb\ (b)$.

---

1 - β Απάντηση Υποερωτήματος (β)

CFL $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* : |w|_a = 3|w|_b + 2\}$ άρα $|w|_{min} = 2$ και συγκεκριμένα aa.
Στην περίπτωση όμως που έχουμε έστω και ένα b έχουμε: $aaa\,aa\,b$.
Παρατηρούμε ότι η γλώσσα δεν ορίζει συγκεκριμένη σειρά μεταξύ a και b και άρα θα πρέπει να μπορούν να παραχθούν όλοι οι συνδυασμοί και με βάση τη θέση των συμβόλων και άρα επιπρόσθετες συμβολοσειρές: $b\,aaa\,aa$, $a\,b\,aaa\,a$, ..., $aa\,aaa\,b$.

Για να οδηγηθούμε σε κάποιες από αυτές το ελάχιστο aa διαχωρίστηκε, με το b να παρεμβάλλεται ανάμεσα. Με βάση την ελάχιστη περίπτωση καταλαβαίνουμε ότι παρόλα αυτά, τα δύο πρόσθετα a θα πρέπει να απομονωθούν σε δικό τους κανόνα.
Έχουμε όμως $|w|_b \in \aleph_0$ και άρα τα ανάλογα a, υπονοώντας χρήση αναδρομής και συγκεκριμένα όλων των κανόνων παραγωγής εκτός του ελάχιστου aa.
Συμψηφίζοντας μπορούμε να περάσουμε στην κατασκευή των κανόνων παραγωγής:

- Ελάχιστη περίπτωση:

  $S \rightarrow aa$
- Ελάχιστα b:

  $S \rightarrow aaR \mid aRa \mid Raa$

  $R \rightarrow baaa \mid abaa \mid aaba \mid aaab \mid \varepsilon$

- $|w| = \aleph_0$:

  $S \rightarrow aaR \mid aRa \mid Raa$

  $R \rightarrow RbRaaa \mid aRbRaa \mid aaRbR \mid aaaRbR \mid \varepsilon$

- Σύμπτυξη:

  $S \rightarrow RaRaR$

  $M \rightarrow bRaaa \mid abRaa \mid aabRa \mid aaaRbR \mid \varepsilon$

Για να καταλάβουμε για πιο λόγο έφυγε η αναδρομή πριν από το b σε όλες τις παραλλαγές του R εκτός την $aaaRbR$ και άρα να υπάρχει κάποια αιτιολόγηση θα πρέπει να δώσουμε κάποια βασικά παραδείγματα:

- $bb\,aaa\,aaa\,aa \quad : \quad S \rightarrow RaRaR \rightarrow (baaa)aRaR \rightarrow (bRaaa)aRaR \rightarrow (b(bRaaa)aaa)aRaR \rightarrow (b(b\varepsilon aaa)aaa)aRaR \rightarrow (bb\,aaa\,aaa)a\varepsilon a\varepsilon \rightarrow bb\,aaa\,aaa\,aa$
- $a\,bb\,aaa\,aaa\,a \quad : \quad S \rightarrow RaRaR \rightarrow \varepsilon aRa\varepsilon \rightarrow a(bRaaa)a \rightarrow a(b(bRaaa)aaa)a \rightarrow a(b(b\varepsilon aaa)aaa)a \rightarrow a\,bb\,aaa\,aaa\,a$
- $aa\,bbaaa\,aaa \quad : \quad S \rightarrow RaRaR \rightarrow \varepsilon a\varepsilon aR \rightarrow aa(bRaaa) \rightarrow aa(b(bRaaa)aaa) \rightarrow aa(b(b\varepsilon aaa)aaa) \rightarrow aa\,bb\,aaa\,aaa$
- ...
- $aa\,aaa\,bb\,aaa \quad : \quad S \rightarrow RaRaR \rightarrow \varepsilon a\varepsilon aR \rightarrow aa(aaabR) \rightarrow aa(aaab(bRaaa)) \rightarrow aa(aaab(b\varepsilon aaa)) \rightarrow aa\,aaa\,bb\,aaa$
- ...
- $aaa\,aaa\,bb\,aa \quad : \quad S \rightarrow RaRaR \rightarrow Ra\varepsilon a\varepsilon \rightarrow (aaab)aa \rightarrow (aaaRb)aa \rightarrow (aaa(aaaRb)b)aa \rightarrow (aaa(aaa\varepsilon b)b)aa \rightarrow aaa\,aaa\,bb\,aa$
- Χρειαζόμαστε $aaaRb$ και $aaabR$. Θυμόμαστε ότι R δεν είναι παρά αναδρομή στον ίδιο κανόνα. Παρατηρούμε ότι και στα δύο, είναι η ίδια συμβολοσειρά, με αναδρομή πριν ή μετά το b και αντικαθιστούμε κρατώντας σταθερά σύμβολα και τοποθετώντας R στις δύο πλευρές του b παίρνοντας έτσι $aaaRbR$.
- Για να σιγουρευτούμε, αν όντως δεν χρειάζονται κανόνες τύπου "...RbR...", έχουμε αναλύσει όλες τις παραλλαγές για ορθές συμβολοσειρές με δύο b και σταθερές υποσυμβολοσειρές bb, bab, ..., $baaaaaaaab$, καθώς και άλλες, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων βασικών μη ορθών. Δεν τις συμπεριλαμβάνουμε για προφανείς λόγους (άνω των 150 παραλλαγών). Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν γίνεται να μας έχει ξεφύγει κάτι. Υπάρχει και καλύτερος τρόπος να δειχθεί γιατί λειτουργεί αυτή η γραμματική αλλά είναι επίσης φλύαρη.

Πιθανότατα η καλύτερα αποδεδειγμένη γραμματική είναι η δεύτερη από τις δύο πρόσθετες που θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

- Τέλος αν πούμε ότι η **CFG** μας δεν περιέχει αριστερή αναδρομή.

Γενικά θα πρέπει να έχουμε κατά νου ότι είναι πάρα πολύ χρήσιμο έως και απαραίτητο, εκτός των ελάχιστων περιπτώσεων βάση συνόλου (πχ $\in \mathbb{N}_0$ ή και ελάχιστων περιπτώσεων για μη μηδενικό σύνολο (ουσιαστικά λαμβάνοντας υπόψιν αποδοχή κενής συμβολοσειράς εάν επιτρέπεται και ελάχιστης μή κενής), καλό θα είναι να ελέγχουμε και για διπλές εμφανίσεις των ελάχιστων μή κενών πχ $\{\forall w \neq \varepsilon \mid w_{min} = xy,\ \exists w_{double} = xxyy \cup xyxy \cup xyyx \cup yxxy \cup yxyx \cup yyxx\}$

Υπόψιν ότι εκτός κάποιον πολύ απλών περιπτώσεων, στις **CFL** δεν μπορούμε πάντα να είμαστε σίγουροι ότι η **CFG** μας καλύπτει όλες τις πιθανές ορθές συμβολοσειρές της γλώσσας ή ότι είναι ελάχιστη.

Θα δώσω επίσης άλλες δύο λύσεις, τις δύο εν συντομία μία και η πρώτη έχει ήδη δειχθεί (απλά απλοποιήθηκε):

- Η παρακάτω γραμματική παρόλο που καλύπτει την γλώσσα, χρησιμοποιεί αριστερή αναδρομή κάτι που ενώ δεν αναφέρεται ως περιορισμός στην άσκηση, θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι δεν θα πρέπει να συμπεριλαμβάνουμε στις γραμματικές μας (και είναι ένας λόγος που την αποφύγαμε, επιπροσθέτως στο ότι αυτή που προαναφέραμε αποτελεί ελαχιστοποίηση αυτής και άνευ αριστερής αναδρομής). Το πως καταλήξαμε σε αυτή φαίνεται στα βήματα της προηγούμενης προ σύμπτυξης:
  $G_{2b} = (\{a, b\},\ \{aa, \varepsilon\},\ \{S \to AaAaA,\ A \to Raaa \mid aRaa \mid aaRa \mid aaaR \mid \varepsilon,$
  $R \to RbR\},\ S)$

1. Η παρακάτω γραμματική ίσως είναι η βέλτιστη ως προς την απόδειξη της:

   $G_{2c} = (\{a, b\}, \{aa, \varepsilon\}, \{S \to RaRaR,$

   $R \to bRaaa \mid A_2aR \mid A_1A_1a \mid A_1aA_1 \mid aaaRb \mid$

   $aB_2R \mid A_1A_2 \mid A_2A_1 \mid B_1B_2 \mid B_2B_1 \mid \varepsilon,$

   $A_1 \to ba,\ A_2 \to baa,\ B_1 \to ab,\ B_2 \to aab\},\ S)$

2. Ελαχιστότατη περίπτωση ($|w|_b = 0$): aa

3. Ελάχιστη bb προστιθέμενη σε οποιαδήποτε θέση επί της προηγούμενης ($|w|_b = 1$):

   baaa, abaa, aaba, aaab

4. Άνω ελάχιστης b:

   Τύπος $bb\,aaa\,aaa \to bLaaa$

   Τύπος $b\,a\,b\,aa\,aaa \to R_1 : ba,\ R_2 : baa,\ A : aaa \to R_1R_2A$

   Τύπος $b\,aa\,b\,a\,aaa \to R_1 : ba,\ R_2 : baa,\ A : aaa \to R_2R_1A$

   Τύπος $b\,aaa\,b\ aaa \to R_1 : ba,\ R_2 : baa,\ A : aaa \to baaaL$

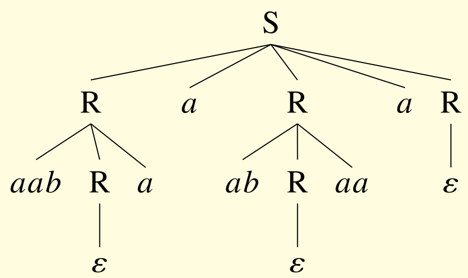
Γραμματική και συντακτικό δένδρο

Είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην πλήρη περιγραφή της γραμματικής μας:

$G_2 = (\{a, b\}, \{aa, \varepsilon\}, \{S \to RaRaR$

$R \to bRaaa \mid abRaa \mid aabRa \mid aaaRbR \mid \varepsilon\}, S)$

Ήρθε η στιγμή να δώσουμε το συντακτικό δένδρο για συμβολοσειρά (τα κενά για ευκολότερη ανάγνωση) $w = aa\,b\,aaa\,b\,aaa$, $|w| = 10$, $|w|_a = 8$, $|w|_b = 2$:



Που δίνει: $aab \quad a \quad a \quad ab \quad aa \quad a$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να το διαβάσουμε ως $(\varepsilon)\, a\, (ab(\varepsilon)aa)\, a\, (b(\varepsilon)aaa)$.

2 Άσκηση **2**η - Αυτόματα στοίβας**:**

[30%] Κατασκευάστε αυτόματα στοίβας για τις παρακάτω γλώσσες:

(α) $L_1 = \{b^n a^k b^k a^n : k, n \in \mathbb{N}^0\}$

(β) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* :$ η w περιέχει διπλάσιο αριθμό b απ'ότι $a\}$

Για κάθε μία από τις συμβολοσειρές $bbbabaaa \in L_1$, $abbbab \in L_2$ δώστε έναν υπολογισμό αποδοχής στο αντίστοιχο αυτόματο στοίβας χρησιμοποιώντας συνολικές καταστάσεις.

2 - α Απάντηση Υποερωτήματος (β)

Έχουμε να κατασκευάσουμε PDA για CFL $L_1 = \{b^n a^k b^k a^n : k, n \in \mathbb{N}^0\}$
Από τον τύπο δυνάμεθα να εξάγουμε τα εξής δεδομένα, για συμβολοσειρά $w \in L_1$:

- $|w|_{min} = 0 \Longrightarrow n,\ k = 0 \Longrightarrow w = \varepsilon, \quad |w|_{max} = \aleph_0, \quad |w| = 2(n+k) =$ Άρτιο
- $n + k - 2nk = 1 \Longrightarrow |w|_{min} = 2 \Longrightarrow w = ba \cup ab$
- $n, k = 1 \Longrightarrow |w|_{min} = 4 \Longrightarrow w = baba, \qquad L \subseteq \{xx^R | x \in \Sigma^*\}$
- Για μεγαλύτερα n, k έχουμε συμβολοσειρές όπως $bbabaa, baabba, bbaabbaa...$

Από αυτά κάποια δεν μας λένε κάτι ιδιαίτερα χρήσιμο, άλλα όμως μας φανερώνουν την οδό που θα πρέπει να ακολουθήσουμε. Για παράδειγμα, κατά αντιστοιχία με τις αντίστοιχες τεχνικές που ακολουθήσαμε στις λύσεις ασκήσεων κανονικών εκφράσεων, τα διάφορα ελάχιστα μας δίνουν την βάση πάνω στην οποία θα χτιστεί το (PD) αυτόματο.

Ως εκ τούτου έχουμε φαινομενικά τέσσερεις ελάχιστες περιπτώσεις, που η συγκεκριμένη γλώσσα επιτρέπει: $w_0 = \varepsilon \vee w_1 = ab \vee w_2 = ba \vee w_3 = baba$ αλλά προσοχή, το $w = baba$ αποτελεί παρεμβολή του w_1 εντός του w_2 και όχι $(ba)^*$

Αυτό με τη σειρά του δείχνει ότι ουσιαστικά, το w_3 αποτελεί επέκταση της w_2 μετά αρχικού b και άρα δεν είναι μέρος της καθολικής βάσης του αυτομάτου. Θα μας χρειαστεί όμως, αφού δείχνει ότι όταν ο αλγόριθμος θα μπαίνει στη διαδρομή που διαβάζει ba, θα διακλαδώνεται σε δύο εναλλακτικές βάση του αν αυτό που έπεται του b είναι a ή aba.

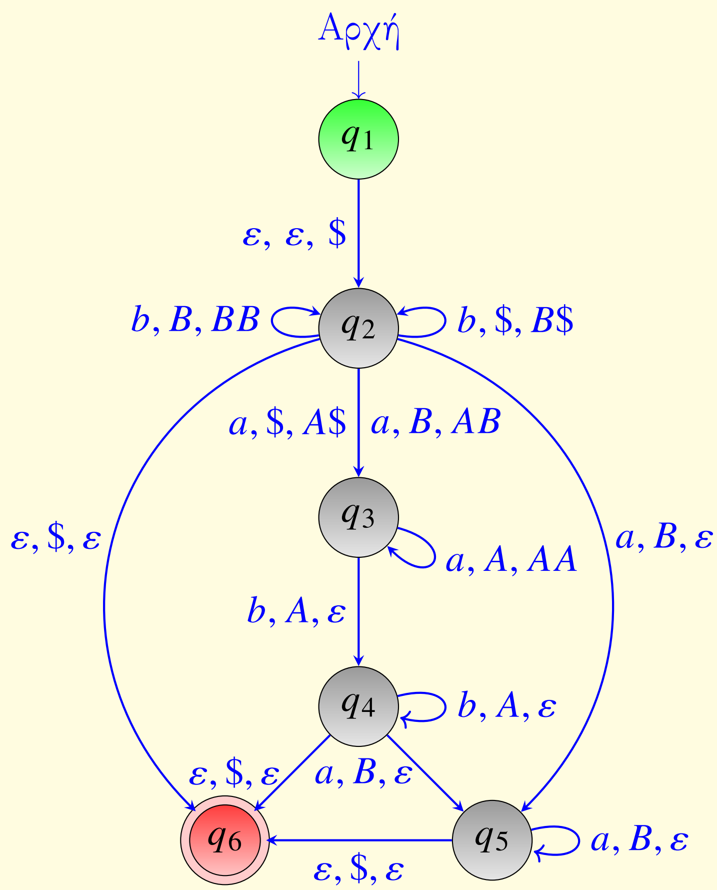
Τέλος αφού $n, k \in \mathbb{N}_{\not{}}$ τότε μπορούν όλοι αυτοί οι χαρακτήρες να είναι (μετρήσιμα) άπειροι αλλά υπό τον όρο ότι τηρείται το γενικό μοτίβο.

Άρα, υποθετικά, έχουμε τρεις αρχικούς κλάδους και σε έναν από αυτούς μία διάσπαση σε δύο. Θα δούμε ότι ακριβώς αυτό συμβαίνει και στην πράξη (τουλάχιστον στη συγκεκριμένη επίλυση) και ότι γενικά είναι καλή πρακτική. Ξεκινάμε κατασκευή αυτομάτου, αρχικά δίνοντας μαθηματική περιγραφή και κατόπιν αντίστοιχο διάγραμμα:

PDA $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

- $K = \{q1, q2, q3, q4, q5, q6\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{A, B, \$\}$
- $\Delta =$
  1. $(q1, \varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (q2, \$)$
  2. $(q2, b, \$) \rightarrow (q2, B\$)$
  3. $(q2, b, B) \rightarrow (q2, BB)$
  4. $(q2, \varepsilon, \$) \rightarrow (q6, \varepsilon)$
  5. $(q2, a, \$) \rightarrow (q3, A\$)$
  6. $(q2, a, B) \rightarrow (q3, AB)$
  7. $(q2, a, B) \rightarrow (q5, \varepsilon)$
  8. $(q3, a, A) \rightarrow (q3, AA)$
  9. $(q3, b, A) \rightarrow (q4, \varepsilon)$
  10. $(q4, b, A) \rightarrow (q1, \varepsilon)$
  11. $(q4, a, B) \rightarrow (q5, \varepsilon)$
  12. $(q4, \varepsilon, \$) \rightarrow (q6, \varepsilon)$
  13. $(q5, a, B) \rightarrow (q5, \varepsilon)$
  14. $(q5, \varepsilon, \$) \rightarrow (q6, \varepsilon)$
- $s = q_1$
- $F = q_6$

DFA $M_{\text{τελικό}}$



Υπολογισμός αποδοχής $bbbabaaa$

$$(q1, bbbabaaa, \varepsilon) \vdash (q2, bbbabaaa, \$) \vdash (q2, bbabaaa, B\$) \vdash (q2, babaaa, BB\$)$$

$$\vdash (q2, abaaa, BBB\$) \vdash \begin{cases} (q3, baaa, ABBB\$) \\ (q5, baaa, BB\$) \nvdash \text{Αποτυχία Κλώνου} \end{cases}$$

$$\vdash (q4, aaa, BBB\$) \vdash (q5, aa, BB\$) \vdash (q5, a, B\$) \vdash (q5, \varepsilon, \$)$$

$$\vdash (q6, \varepsilon, \varepsilon) \qquad \text{Επιτυχής Ανάγνωση}$$

2 - β Απάντηση Υποερωτήματος (β)

Έχουμε να κατασκευάσουμε PDA για CFL $L_2 = \{w \in \{a,\ b\}^* : |w|_b = 2|w|_a\}$ Από τον τύπο δυνάμεθα να εξάγουμε τα εξής δεδομένα, για συμβολοσειρά $w \in L_1$:

- $|w|_{min} = 0 \Longrightarrow w_{min} = \varepsilon, \quad |w|_{max} = \aleph_0, \quad |w| \equiv |w|_a \pmod 2$
- $\{w \in \{a,\ b\}^+ \mid |w| = 3,\ |w|_a = 1,\ |w|_b = 2\} \Longrightarrow |w| = 3|w|_a$
- $|w| = 3\ :\ abb, bab, bba$
- $|w| > 3\ :\ aabbbb,\ bbbbaa,\ abbbba,\ babbab,\ ababbb,\ bbbaba,\ bbaabb,\ \ldots$
- Κανένας περιορισμός οποιουδήποτε συμβόλου ως προς την θέση.

Έχουμε φαινομενικά τέσσερεις ελάχιστες περιπτώσεις, που η συγκεκριμένη γλώσσα επιτρέπει: $w_0 = \varepsilon \lor w_1 = abb \lor w_2 = bab \lor w_3 = bba$ αλλά όπως ήδη είπαμε δεν υπάρχει περιορισμός ως προς την θέση αντίθετα με το προηγούμενο πρόβλημα στην άσκηση 2.1 (υποερώτημα (α)).

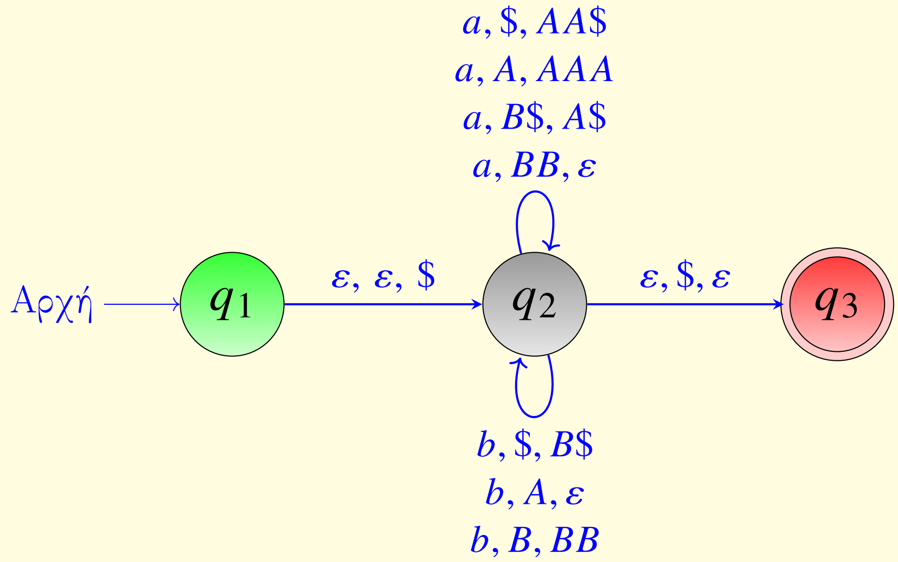
Αυτό με τη σειρά του δείχνει ότι πιθανώς να μην χρειαστεί κάποια διακλάδωση και να μπορούν να γίνουν όλες οι διαδικασίες αναδρομικά στον ίδιο κόμβο.

Άρα, υποθέτουμε ένα κόμβο για όλη την ανάγνωση βασιζόμενοι σε σύνθετες αναδρομές, συν επιπρόσθετους βοηθητικούς κόμβους (Εναρκτήριο με μετάβαση αρχικοποίησης σωρού με δείκτη τελευταίου κελιού και τελικό με μετάβαση προς αυτόν όπου αδειάζει τον δείκτη από τον σωρό). Ξεκινάμε την κατασκευή του αυτομάτου, αρχικά δίνοντας την μαθηματική περιγραφή και κατόπιν το αντίστοιχο διάγραμμα:

PDA $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

- $K = \{q1, q2, q3\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{A, B, \$\}$
- $\Delta =$
  1. $(q1, \varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (q2, \$)$
  2. $(q2, b, \$) \rightarrow (q2, B\$)$
  3. $(q2, b, B) \rightarrow (q2, BB)$
  4. $(q2, b, A) \rightarrow (q2, \varepsilon)$
  5. $(q2, a, \$) \rightarrow (q2, AA\$)$
  6. $(q2, a, A) \rightarrow (q2, AAA)$
  7. $(q2, a, BB) \rightarrow (q2, \varepsilon)$
  8. $(q2, a, B\$) \rightarrow (q2, A\$)$
  9. $(q2, \varepsilon, \$) \rightarrow (q3, \varepsilon)$
- $s = q_1$
- $F = q_3$

DFA $M_{\text{τελικό}}$



Υπολογισμός αποδοχής $abbbab$

$$
\begin{aligned}
(q1, abbbab, \varepsilon) &\vdash (q2, abbbab, \$) \vdash (q2, bbbab, AA\$) \vdash (q2, bbab, A\$) \\
&\vdash (q2, bab, \$) \vdash (q2, ab, B\$) \vdash (q2, b, A\$) \vdash (q2, \varepsilon, \$) \\
&\vdash (q3, \varepsilon, \varepsilon) \qquad \text{Επιτυχής Ανάγνωση}
\end{aligned}
$$

3 Άσκηση **3**η - Γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα

(α) **[5%]** Αποφανθείτε αν ο παρακάτω ισχυρισμός είναι σωστός ή λανθασμένος και αιτιολογήστε:
Η τομή μίας ντετερμινιστικής γλώσσας χωρίς συμφραζόμενα με μία πεπερασμένη γλώσσα είναι πάντα γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

(β) **[5%]** Αποδείξτε εάν η παρακάτω γλώσσα είναι ή δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα:

$$L = \{a^m b^n c^k \ : \ n,\ k,\ m \in \mathbb{N}_0,\ n = 3m + 2k\}$$

3 - α Απάντηση Υποερωτήματος (α)

Η πρόταση "η τομή μίας ντετερμινιστικής γλώσσας χωρίς συμφραζόμενα με μία πεπερασμένη γλώσσα είναι πάντα γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα" είναι αληθής όπως θα αποδείξουμε παρακάτω:

Απόδειξη

- $\mathcal{P} := \{\forall L_{DCF} \in \mathcal{L}_{\text{DCF}},\ \forall L_{REG} \in \mathcal{L}_{\text{REG}} :\ L_{DCF} \cap L_{REG} \ \in\ \mathcal{L}_{\text{CF}}\}$ **(1)**
- $\mathcal{L}_{FIN} \subset \mathcal{L}_{REG} \subset \mathcal{L}_{DCF} \subset \mathcal{L}_{NCF} = \mathcal{L}_{CF}$ **(2)**
- $\forall (A,\ B) \ni A \subset B \to A \cap B = A,\ A \subset B$ **(3)**
- $A \subset B \subset \ldots \subset N \Rightarrow A \subset N$ **(4)**
- $\overset{(2)(4)}{\Longrightarrow} \mathcal{L}_{FIN} \subset \mathcal{L}_{DCF}$ **(5)**
- $\mathcal{L}_{FIN} \cap \mathcal{L}_{DCF} \overset{(3)(5)}{=} \mathcal{L}_{FIN} \subset \mathcal{L}_{DCF} \subset \mathcal{L}_{CF} \overset{(4)}{\Rightarrow} \mathcal{L}_{FIN} \subset \mathcal{L}_{CF} \Rightarrow \mathcal{L}_{FIN} \in \mathcal{L}_{CF}$ **(6)**
- $Q \overset{(6)}{:=} \{\forall L_{DCF} \in \mathcal{L}_{\text{DCF}},\ \forall L_{REG} \in \mathcal{L}_{\text{REG}} :\ L_{DCF} \cap L_{REG} \ \in\ \mathcal{L}_{\text{CF}}\}$ **(7)**
- $\mathcal{P}^{(1)} = Q^{(7)} = \text{True} \Rightarrow \mathcal{P} = \text{True}$

Για να εξηγήσω την λογική, δείξαμε ότι:

1. Τομή μεταξύ ενός συνόλου με ενός υποσυνόλου (γνησίου ή μη) παράγει μόνο το ίδιο το υποσύνολο. Αποδεικνύεται μέσω της απόδειξης για του νόμου της απορρόφησης μεταξύ υποσυνόλου και συνόλου. Θα παραθέσω τις όποιες αποδείξεις παρακάτω.

2. Το χρησιμοποιήσαμε για να δείξουμε ότι τομή πεπερασμένων γλωσσών και ντετερμινιστικών χωρίς συμφραζόμενα γλωσσών, παράγει αποκλειστικά πεπερασμένες γλώσσες. Ο λόγος είναι ότι οι πεπερασμένες είναι υποσύνολο των DCFL.

3. Κατόπιν δείξαμε ότι λόγο του ότι αν έχουμε μία αλυσίδα συνόλων με κάθε επόμενο να είναι υπερσύνολο του κάθε προηγούμενου (έστω και γνήσιο) τότε μπορούμε να πούμε ότι οποιοδήποτε μικρότερο σύνολο είναι εντός οποιουδήποτε μεγαλύτερου. Αποδεικνύεται, διαισθητικά, μέσω του ιδίου παίρνοντας οποιοδήποτε στοιχείο από το οποιοδήποτε μικρότερο σύνολο και δείχνοντας ότι ανήκει σε όλα τα υπερσύνολα.

4. Τα συνδυάσαμε συλλογιζόμενοι ότι τομή πεπερασμένης με DCFL παράγει πεπερασμένη και αφού η πεπερασμένη είναι υποσύνολο κανονικής, που είναι υποσύνολο DCFL, που είναι υποσύνολο CFL, τότε η πεπερασμένη γλώσσα που παίρνουμε ως αποτέλεσμα τομής πεπερασμένης με DCFL, είναι επίσης υποσύνολο CFL γλωσσών και άρα κάθε στοιχείο της είναι και στοιχείο των CFL γλωσσών.

5. Άρα η τομή πεπερασμένης γλώσσας και ντετερμινιστικής γλώσσας χωρίς συμφραζόμενα παράγει πάντα πεπερασμένη γλώσσα και αφού οι πεπερασμένες γλώσσες είναι υποσύνολα των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα, τότε οποιαδήποτε πεπερασμένη γλώσσα, συμπεριλαμβανομένης και αυτής που παράγει τομή πεπερασμένης με DCFL, ανήκει στις γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα.

Απόδειξη $A \subset B \rightarrow A \cap B \Rightarrow A$ και $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$:

1. Ορισμός γνήσιου υποσυνόλου:
   $A \subset B \overset{def}{=} \left[\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)\right] \wedge \left[\exists y(y \in B \wedge y \notin A)\right]$

2. Απόδειξη $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$:
   $B \subset C = \forall x(x \in B \Rightarrow x \in C), \qquad A \subset B = \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$
   $A \subset B \subset C = \left[\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C)\right] \wedge \left[\exists y(y \in C \wedge y \notin B \Rightarrow y \notin A)\right] \Rightarrow$
   $\Rightarrow [\forall x(x \in A \Rightarrow x \in C)] \wedge [\exists y(y \in C \wedge y \notin A)] = A \subset C$

3. Ορισμός τομής:
   $A \cap B \overset{def}{=} \{x \mid x \in A, x \in B\}$

4. Απόδειξη $A \subset B \rightarrow A \cap B = A$:
   $A \cap B = C \rightarrow \forall x\left[(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in C\right]$ αλλά $A \subset B \rightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$
   οπότε στη συγκεκριμένη περίπτωση (και όλες τις αντίστοιχες) έχουμε:
   $A \cap B = C \rightarrow \left[\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C)\right] \wedge \left[\exists y(y \notin A \wedge y \in B \Rightarrow y \notin C)\right] \Rightarrow$
   $\left[\forall x(x \in A \Rightarrow x \in C)\right] \wedge \left[\forall y(y \notin A \Rightarrow y \notin C)\right] \Rightarrow A = C \Rightarrow A \cap B = A$

3 - β Απάντηση Υποερωτήματος (β)

Ζητείται να αποδείξουμε άν η $L = \{a^m b^n c^k \ : \ n,\ k,\ m \in \mathbb{N}_0,\ n = 3m + 2k\}$ είναι CF.

Αυτό μπορεί να γίνει μεταξύ άλλων με απόπειρα κατασκευής CFG της γλώσσαςL, ενώ μία άλλη μέθοδος είναι μέσω λήμματος άντλησης κα.

Απόδειξη με απόπειρα κατασκευής **CFG**

- Προτεραιότητα συμβόλων: $w = \{xyz \,|\, x = \{a\}^m,\ y = \{b\}^{3m+2k},\ z = \{c\}^k\}$.
- Λόγο συγκεκριμένης προτεραιότητας τα σύμβολα δεν αναμιγνύονται πχ δεν υπάρχει bbabbcb παρόλο που η αναλογία συμβόλων είναι ορθή). Ακριανά σύμβολα $(a,\ c)$ καθορίζουν το πλήθος των μεσαίων (b). Άρα μπορούμε να σπάσουμε όλες τις συμβολοσειρές της γλώσσας σε δύο μέρη: ένα αριστερό:
  $L_{LHS} = \{w = \{a^m\, b^{3m}\}^* \ : \ m \in \mathbb{N}_0\}$
  και ένα δεξιό:
  $L_{RHS} = \{w = \{b^{2k}\, c^k\}^* \ : \ k \in \mathbb{N}_0\}$
  Η λύση θα είναι η σύνθεση αυτών τον δύο και συγκεκριμένα:
  $\{w \in L,\ w_1 \in L_{LHS},\ w_2 \in L_{RHS} \,|\, w = w_1 w_2\}$
- Για $L_{LHS} \ : \ S \rightarrow \varepsilon \,|\, A, \quad A \rightarrow \varepsilon \,|\, aAbbb$
- Για $L_{RHS} \ : \ S \rightarrow \varepsilon \,|\, C, \quad C \rightarrow \varepsilon \,|\, bbCc$
- Άρα : $S \rightarrow \varepsilon \,|\, AC, \quad A \rightarrow \varepsilon \,|\, aAbbb, \quad C \rightarrow \varepsilon \,|\, bbCc$
- $G = (\{a,\ b,\ c\}, \quad \{\varepsilon\},$
  $\{S \rightarrow \varepsilon \,|\, AC,\ A \rightarrow \varepsilon \,|\, aAbbb,\ C \rightarrow \varepsilon \,|\, bbCc\}, \quad S)$

4 Άσκηση 4η - Αναγνώριση γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα:

[30%] Έστω η γραμματική χωρίς συμφραζόμενα

$G = (V, \Sigma, R, S)$, όπου $V = \{S, A, L, D, a, b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ και

$R = \{S \to A,\ S \to L,\ A \to LbADa,\ A \to LaD,\ L \to Da,\ L \to e,\ D \to b\}$.

(α) Μετατρέψτε τη γραμματική G σε κανονική μορφή Chomsky.

(β) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για συντακτική ανάλυση στη συμβολοσειρά $w = babba$. Δώστε τον πλήρη πίνακα N καθώς και όλα τα συντακτικά δέντρα της w.

4 - α Απάντηση Υποερωτήματος (α)

Ζητούμενο η μετατροπή σε κανονική μορφή Chomsky (CNF) CFG's:
$G = (V, \Sigma, R, S)$, όπου $V = \{S, A, L, D, a, b\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ και
$R = \{S \to A, S \to L, A \to LbADa, A \to LaD, L \to Da, L \to e, D \to b\}$.

Καταρχήν να θυμηθούμε τον ορισμό του τί εννοούμε "κανονική μορφή Chomsky":

- Ξεκινώντας να αναφέρω ότι, ότι γράφουμε από εδώ και έπειτα εκτός την δοθέντα CFG, θα είναι με βάση της εναλλακτικής μαθηματικής περιγραφής CFG / CNF που θεωρεί ότι το V ως σύνολο μη τερματικών συμβόλων.
  Δηλαδή $V \cap \Sigma = \varnothing$, όπως περιγράφεται σε εξίσου μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας (πχ Sipser). Υπό αυτό το πρίσμα το V μεταφράζεται ως "(V)ariables" σε αντίθεση με όταν ισχύει $V \cap \Sigma = \Sigma$ όπου μεταφράζεται ως "(V)ocabulary". Αυτό διαφέρει από την περιγραφή που δίδεται στο μάθημα, αλλά δεν είναι λιγότερο ή περισσότερο ορθή, απλά διαφορετική.
- $A, B, C \in V$
- $a \in \Sigma$
- Επιτρέπονται μόνο οι παρακάτω τύπου παραγωγές:
  1. $A \to BC$
  2. $A \to a$
  3. Σε ειδικές περιπτώσεις απαιτείται δημιουργία νέου εναρκτήριου κανόνα παραγωγής $S_0 \to S$
  4. $\varepsilon \in L(G) \Leftrightarrow S \to \varepsilon$ ή $S_0 \to S|\varepsilon$ εάν το S εμφανίζεται στην παραγωγή κάποιου κανόνα.

Μετατροπή $CFG \rightarrow CNF$ **1/3**

- Εισαγωγή νέας κατάστασης
  1. Στη συγκεκριμένη γραμματική ισχύει $S \in S, S \rightarrow L \rightarrow \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \in L(G)$ αλλά το S δεν υπάρχει στη δεξιά μεριά κανενός κανόνα παραγωγής και άρα δεν απαιτείτε κατασκευή νέου κανόνα παραγωγής $S_0 \rightarrow S \mid \varepsilon$.

- Απαλοιφή κενής παραγωγής

  1. $S \rightarrow A \mid L$
  2. $A \rightarrow LbADa \mid LaD$
  3. $L \rightarrow Da \mid \boldsymbol{\varepsilon}$
  4. $D \rightarrow b$

  1. $S \rightarrow A \mid L \mid \boldsymbol{\varepsilon}$
  2. $A \rightarrow LbADa \mid LaD \mid \boldsymbol{bADa} \mid \boldsymbol{aD}$
  3. $L \rightarrow Da$
  4. $D \rightarrow b$

- Απαλοιφή μοναδιαίων παραγωγών (μη τερματικών συμβόλων)

  1. $S \rightarrow \boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{L} \mid \varepsilon$
  2. $A \rightarrow LbADa \mid LaD \mid bADa \mid aD$
  3. $L \rightarrow Da$
  4. $D \rightarrow b$

  1. $S \rightarrow \boldsymbol{LbADa} \mid \boldsymbol{LaD} \mid \boldsymbol{bADa} \mid \boldsymbol{aD} \mid \boldsymbol{Da} \mid \varepsilon$
  2. $A \rightarrow LbADa \mid LaD \mid bADa \mid aD$
  3. $L \rightarrow Da$
  4. $D \rightarrow b$

- Απαλοιφή μη προσβάσιμων συμβόλων
  1. Όλα τα σύμβολα είναι προσβάσιμα $\rightarrow$ καμία αλλαγή.

Μετατροπή $CFG \rightarrow CNF$ 2/3

- Απομόνωση τερματικών συμβόλων

1. $S \rightarrow LbADa \mid LaD \mid bADa \mid aD \mid Da \mid \varepsilon$
2. $A \rightarrow LbADa \mid LaD \mid bADa \mid aD$
3. $L \rightarrow Da$
4. $D \rightarrow b$

1. $S \rightarrow LDADD_a \mid LD_aD \mid DADD_a \mid D_aD \mid DD_a \mid \varepsilon$
2. $A \rightarrow LDADD_a \mid LD_aD \mid DADD_a \mid D_aD$
3. $L \rightarrow DD_a$
4. $D \rightarrow b$
5. $D_a \rightarrow a$

- Απαλοιφή τριαδικών+ παραγωγών (1ο πέρασμα)

1. $S \rightarrow LDADD_a \mid LD_aD \mid DADD_a \mid D_aD \mid DD_a \mid \varepsilon$
2. $A \rightarrow LDADD_a \mid LD_aD \mid DADD_a \mid D_aD$
3. $L \rightarrow DD_a$
4. $D \rightarrow b$
5. $D_a \rightarrow a$

1. $S \rightarrow LX_1X_2 \mid LX_3 \mid X_1X_2 \mid D_aD \mid DD_a \mid \varepsilon$
2. $A \rightarrow LX_1X_2 \mid LX_3 \mid X_1X_2 \mid D_aD$
3. $L \rightarrow DD_a$
4. $D \rightarrow b$
5. $D_a \rightarrow a$
6. $X_1 \rightarrow DA$
7. $X_2 \rightarrow DD_a$
8. $X_3 \rightarrow D_aD$

Μετατροπή $CFG \rightarrow CNF$ 3/3

- Απαλοιφή τριαδικών+ παραγωγών (2ο πέρασμα)

1. $S \rightarrow \boldsymbol{LX_1X_2} \mid LX_3 \mid X_1X_2 \mid D_aD \mid DD_a \mid \varepsilon$
2. $A \rightarrow \boldsymbol{LX_1X_2} \mid LX_3 \mid X_1X_2 \mid D_aD$
3. $L \rightarrow DD_a$
4. $D \rightarrow b$
5. $D_a \rightarrow a$
6. $X_1 \rightarrow DA$
7. $X_2 \rightarrow DD_a$
8. $X_3 \rightarrow D_aD$

1. $S \rightarrow \boldsymbol{LX_4} \mid LX_3 \mid X_1X_2 \mid D_aD \mid DD_a \mid \varepsilon$
2. $A \rightarrow \boldsymbol{LX_4} \mid LX_3 \mid X_1X_2 \mid D_aD$
3. $L \rightarrow DD_a$
4. $D \rightarrow b$
5. $D_a \rightarrow a$
6. $X_1 \rightarrow DA$
7. $X_2 \rightarrow DD_a$
8. $X_3 \rightarrow D_aD$
9. $\boldsymbol{X_4 \rightarrow X_1X_2}$

- $G_{CNF} = (\{S, A, L, D, D_a, X_1, X_2, X_3, X_4\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow LX_4, S \rightarrow X_1X_2, S \rightarrow LX_3, S \rightarrow D_aD, S \rightarrow DD_a, A \rightarrow LX_4, A \rightarrow X_1X_2, A \rightarrow LX_3, A \rightarrow D_aD, L \rightarrow DD_a, D \rightarrow b, D_a \rightarrow a, X_1 \rightarrow DA, X_2 \rightarrow DD_a, X_3 \rightarrow D_aD, X_4 \rightarrow X_1X_2\}, S)$

4 - β Απάντηση Υποερωτήματος (β)

Χρησιμοποιούμαι το παρακάτω ως αναφορά για τους κανόνες παραγωγής καθώς με αρίθμηση για να μπορούμε να διαχωρίσουμε αυτούς που ξεκινάνε από ίδιο μη τερματικό σύμβολο:

1. $S \rightarrow LX_4$
2. $S \rightarrow LX_3$
3. $S \rightarrow X_1X_2$
4. $S \rightarrow D_aD$
5. $S \rightarrow DD_a$
6. $S \rightarrow \varepsilon$
7. $A \rightarrow LX_4$
8. $A \rightarrow LX_3$
9. $A \rightarrow X_1X_2$
10. $A \rightarrow D_aD$
11. $L \rightarrow DD_a$
12. $D \rightarrow b$
13. $D_a \rightarrow a$
14. $X_1 \rightarrow DA$
15. $X_2 \rightarrow DD_a$
16. $X_3 \rightarrow D_aD$
17. $X_4 \rightarrow X_1X_2$

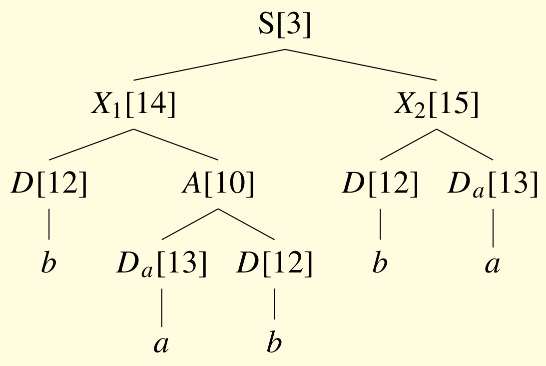
Πίνακας συντακτικής ανάλυσης για $w = babba$

- Κατασκευάζουμε πίνακα $|w|$ στηλών και για κάθε στήλη $n =\in [1, |w|_{max}]$ ξεκινώντας να μετράμε από αριστερά ως 1η, έχουμε n κελιά.
- Στο κορυφαίο κελί κάθε στήλης (δηλαδή το n), τοποθετούμε το αντίστοιχο σύμβολο της λέξης (δηλαδή το w_n).
- Κάθε ένα από αυτά τα σύμβολα ουσιαστικά αποτελεί κανόνα παραγωγής τερματικού συμβόλου.
- Ανά στήλη, σε κελί k, $k \in [2, n]$ με k_{max} να βρίσκεται στη βάση του πίνακα και k_{min} ακριβώς στο κελί κάτω από αυτό στην κορυφή της στήλης του, τοποθετούμε τους κανόνες παραγωγής (τα μη τερματικά σύμβολα) τα οποία δύνανται να οδηγήσουν σε αριστερότερο τμήμα της w μήκους υποσυμβολοσειράς x με $|x| = k$, $x = \sum_{i=1}^{k} w_i$
- Όταν ολοκληρώσουμε περιμένουμε να βρούμε στη κάτω δεξιά γωνία κάποια κανόνα παραγωγής, από το αρχικό (μη τερματικό προφανώς) σύμβολο. Εάν αυτό υπάρχει τότε $w \in G$, ειδάλλως $w \notin G$.

				a
			b	L[11], X_2[15], S[5]
		b	$\emptyset$	$\emptyset$
	a	S[4], A[10], X_3[16]	$\emptyset$	$\emptyset$
b	L[11], X_2[15], S[5]	X_1[14]	$\emptyset$	A[9], S[3], X_4[17]

Δέντρο συντακτικής ανάλυσης για $w = babba$

- Κατασκευάζουμε δέντρο συντακτικής ανάλυσης βάση αντίστροφης χρήσης των αποτελεσμάτων του πίνακα, δηλαδή ξεκινώντας από την κάτω δεξιά γωνία και συγκεκριμένα την αντίστοιχη εκδοχή αρχικού σύμβολου εφόσον η w όντως ανήκει στη γραμματική μας.
- Σε κάθε βήμα ακολουθούμε κλάδο βάση κανόνων παραγωγής αυτής της εκδοχής συμβόλου και ακολουθείτε από την εκάστοτε εκδοχή επόμενων με τερματικών συμβόλων που έχουν βρεθεί στο αντίστοιχο βήμα στο πίνακα, έως να φτάσουμε διαδοχικά στα κατάλληλα τερματικά σύμβολα που κατασκευάζουν τη λέξη που μας δόθηκε.



Που δίνει: b a b b a