1η εργασία

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

στο MATLAB

Νοέμβριος 2022

2022-2023 | ΑΕΜ: 10265

ΣΤΑΥΡΟΣ ΚΙΗΓΜΑΣ

Φοιτητής ΤΗΜΜΥ ΑΠΘ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή το ζητούμενο ήταν η ελαχιστοποίηση μιας δοσμένης κυρτής συνάρτησης $f(x)$ όταν $x \in [a, b]$. Ως γνωστόν, το πρόβλημα αυτό αποτελεί την βάση των αλγορίθμων εύρεσης ελαχίστου συναρτήσεων με περισσότερες από μία μεταβλητές.

Οι αλγόριθμοι που υλοποιήθηκαν είναι κατά σειρά οι:

- Μέθοδος της Διχοτόμου
- Μέθοδος του Χρυσού Τομέα
- Μέθοδος Fibonacci
- Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου

Οι τρεις πρώτοι αλγόριθμοι δεν χρησιμοποιούν παραγώγους και όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό είναι και πιο γρήγοροι.

Σε καθεμία από τις μεθόδους αρχίζουμε από ένα διάστημα $[a\ b]$ μέσα στο οποίο βρίσκεται το ελάχιστο x^* της $f(x)$. Με τη χρήση ενός ακολουθιακού αλγόριθμου καταλήγουμε σε ένα διάστημα $[a_k\ b_k]$ με προδιαγεγραμμένη ακρίβεια $l > 0$, δηλαδή $b_k - a_k \leq l$.

Οι υπό μελέτη συναρτήσεις είναι οι:

- $f_1(x) = (x-2)^2 + xln(x+3)$
- $f_2(x) = 5^x + (2-\cos(x))^2$
- $f_3(x) = e^x(x^3-1) + (x-1)\sin(x)$

Το αρχικό διάστημα ορίζεται ως το $[-1\ \ 3]$ σύμφωνα με την εκφώνηση της εργασίας.

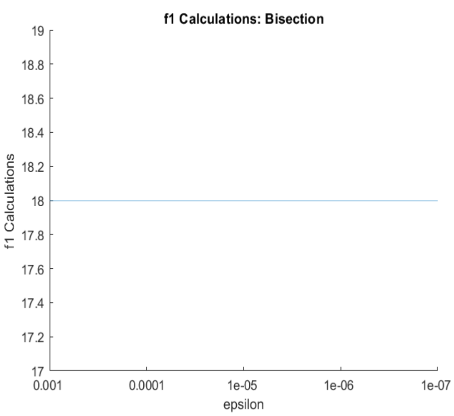
Η υλοποίηση όλων των μεθόδων είναι βασισμένο στο κεφάλαιο 5.1 του βιβλίου *Τεχνικές Βελτιστοποίησης.*

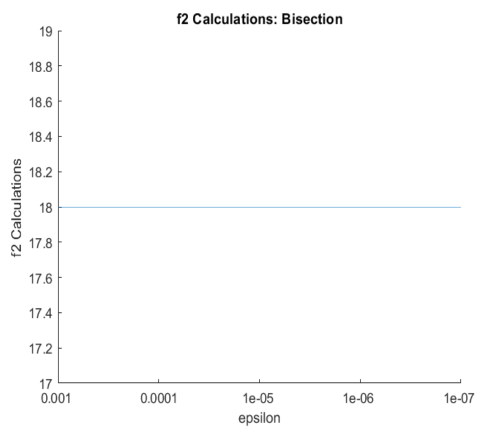
ΘΕΜΑ 1

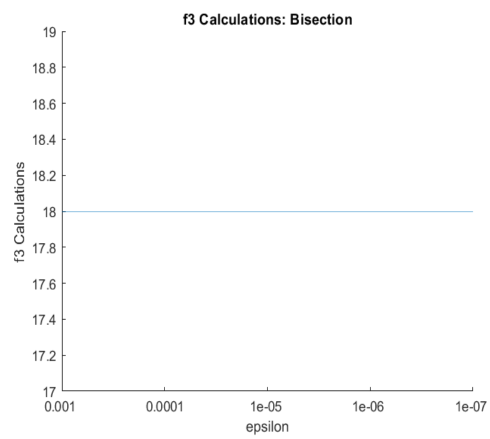
Στο πρώτο θέμα πραγματοποιήθηκε η υλοποίηση της μεθόδου της διχοτόμου χωρίς παραγώγους. Το αντίστοιχο αρχείο είναι το *bisection.m*, ενώ στο *Task1.m* υπάρχει η εκπλήρωση όλων των υποερωτημάτων παράγοντας τα αντίστοιχα γραφήματα.

- ***Υποερώτημα 1***: Θα μελετήσουμε το πλήθος των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης διατηρώντας σταθερό το τελικό εύρος αναζήτησης $l = 0.01$, αλλά μεταβάλλοντας την απόσταση από την διχοτόμο ε.

Όπως φαίνεται οι τιμές του ε που επιλέχθηκαν είναι οι δυνάμεις του 10 με εκθέτη από -3 ως -7.



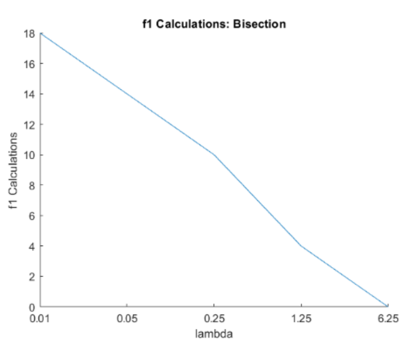


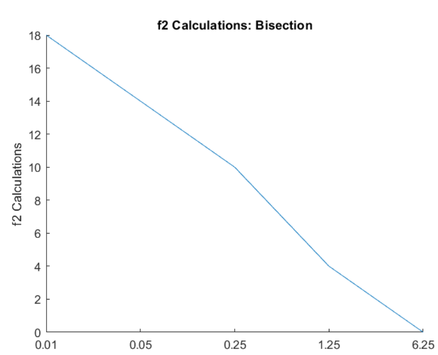


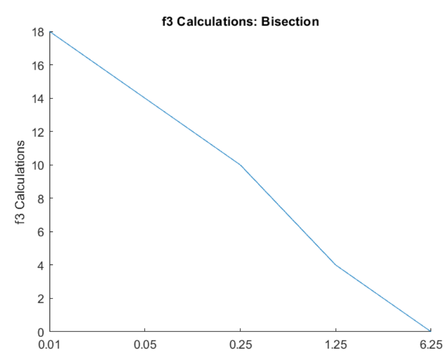
Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Κρατώντας σταθερό το $l = 0.01$ και μεταβάλλοντας το ε, το πλήθος υπολογισμών παραμένει σταθερό.
- Η επιλογή της συνάρτησης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.
- Ενδεχομένως η μεταβολή της τιμής του ε να μην αλλάζει καθόλου το πλήθος υπολογισμών. Αυτό ωστόσο επιζητά περαιτέρω μελέτη.

- ***Υποερώτημα 2***: Θα μελετήσουμε το πλήθος των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης διατηρώντας σταθερή την απόσταση από την διχοτόμο $\varepsilon = 0.001$, αλλά μεταβάλλοντας το τελικό εύρος αναζήτησης l.

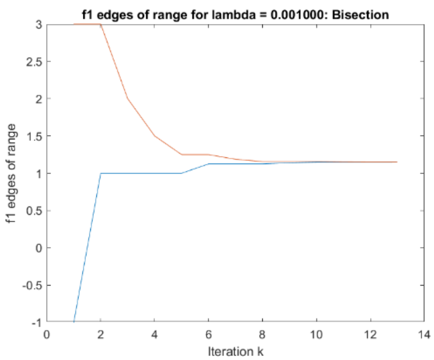


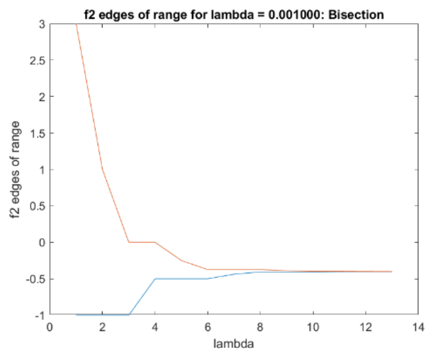


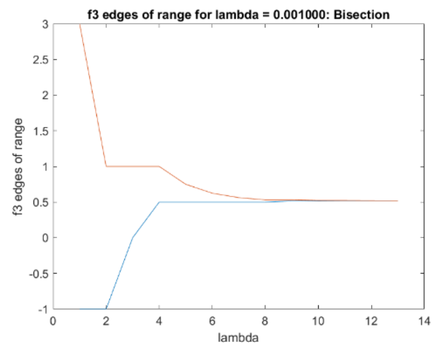


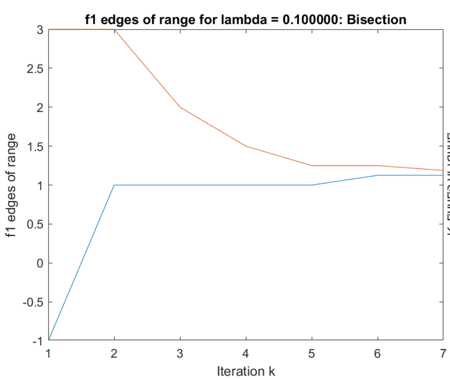
Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

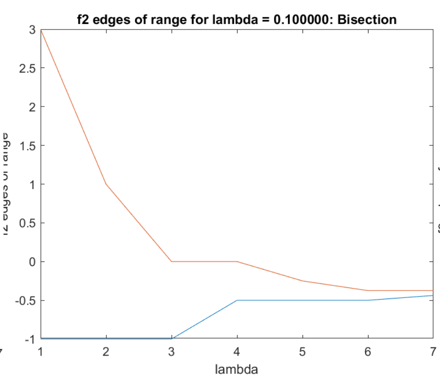
- Κρατώντας σταθερό το $\varepsilon = 0.001$ και αυξάνοντας το l, το πλήθος υπολογισμών μειώνεται.
- Η επιλογή της συνάρτησης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.
- ***Υποερώτημα 3***: Θα μελετήσουμε τα άκρα του διαστήματος $[a_k \; b_k]$

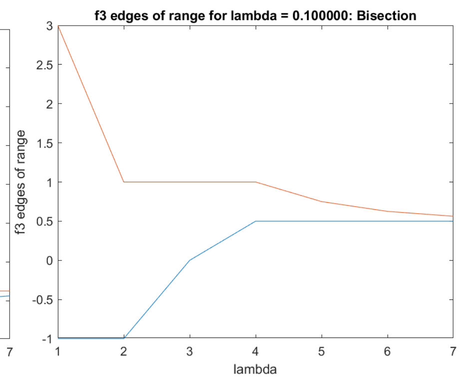












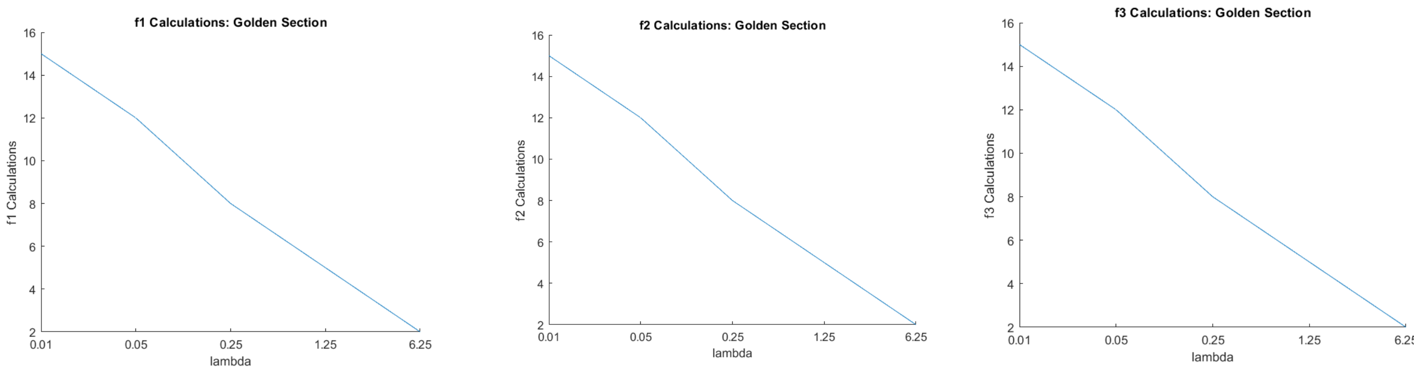
Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Αυξάνοντας το l, οι επαναλήψεις κ μειώνονται. Αυτό οδηγεί σε μικρότερη ακρίβεια της τελικής προσέγγισης. Όπως είπαμε και προηγουμένως, το l δεν επηρεάζει την εύρεση των ενδιάμεσων a_k, b_k, αλλά μόνο το πλήθος των διχοτομήσεων του διαστήματος. Τα άκρα ανά επανάληψη θα είναι ίδια.

ΘΕΜΑ 2

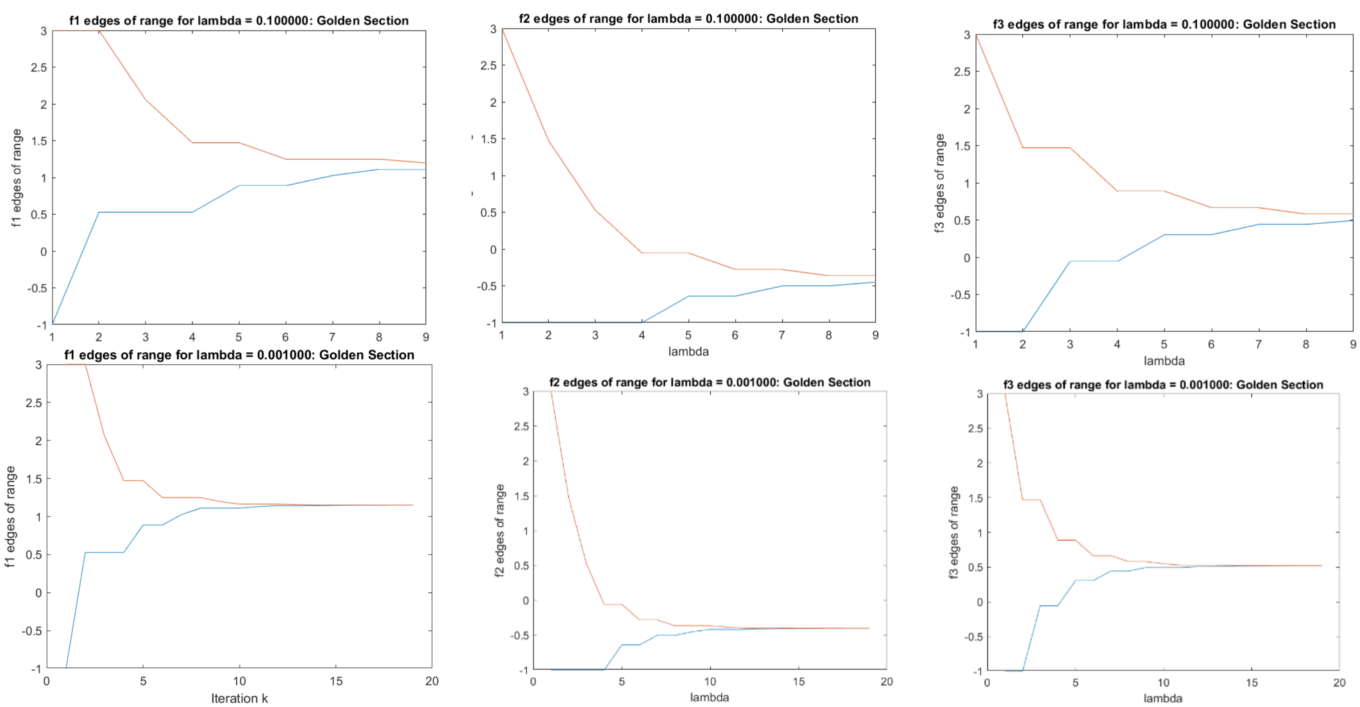
Στο δεύτερο θέμα πραγματοποιήθηκε η υλοποίηση της μεθόδου του χρυσού τομέα χωρίς παραγώγους. Το αντίστοιχο αρχείο είναι το *goldenSection.m*, ενώ στο *Task2.m* υπάρχει η εκπλήρωση όλων των υποερωτημάτων παράγοντας τα αντίστοιχα γραφήματα.

- ***Υποερώτημα 1***: Θα μελετήσουμε το πλήθος των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλοντας το τελικό εύρος αναζήτησης l.



Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Αυξάνοντας το l, το πλήθος υπολογισμών μειώνεται.
- Η επιλογή της συνάρτησης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.
- ***Υποερώτημα 2***: Θα μελετήσουμε τα άκρα του διαστήματος $[a_k\ b_k]$



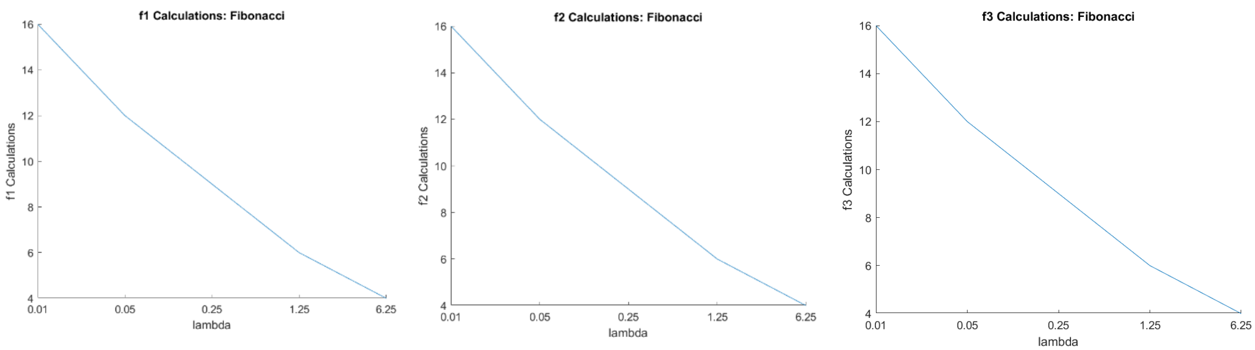
Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Αυξάνοντας το l, οι επαναλήψεις κ μειώνονται. Αυτό οδηγεί σε μικρότερη ακρίβεια της τελικής προσέγγισης. Όπως είπαμε και προηγουμένως, το l δεν επηρεάζει την εύρεση των ενδιάμεσων a_k, b_k, αλλά μόνο το πλήθος των διχοτομήσεων του διαστήματος. Τα άκρα ανά επανάληψη θα είναι ίδια.

ΘΕΜΑ 3

Στο τρίτο θέμα πραγματοποιήθηκε η υλοποίηση της μεθόδου Fibonacci χωρίς παραγώγους. Το αντίστοιχο αρχείο είναι το *fibonacci.m*, ενώ στο *Task3.m* υπάρχει η εκπλήρωση όλων των υποερωτημάτων παράγοντας τα αντίστοιχα γραφήματα. Συμπληρωματικά δημιουργήθηκε το αρχείο *fibonacciSequenceDynamic.m* το οποίο υπολογίζει οποιονδήποτε αριθμό της ακολουθίας του Φιμπονάτσι με δυναμικό προγραμματισμό.

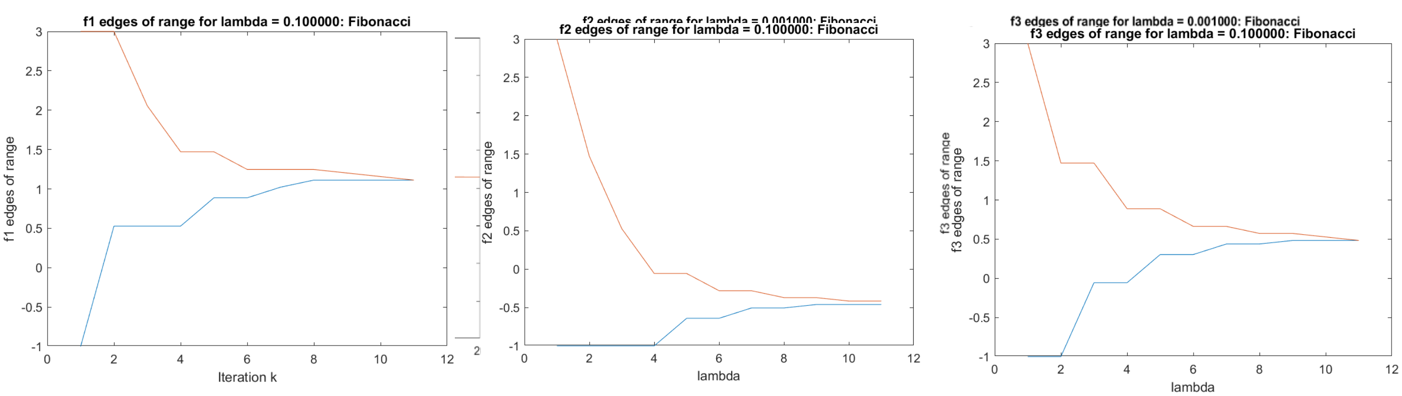
- ***Υποερώτημα 1***: Θα μελετήσουμε το πλήθος των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλοντας το τελικό εύρος αναζήτησης l.



Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Αυξάνοντας το l, το πλήθος υπολογισμών μειώνεται.
- Η επιλογή της συνάρτησης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

- ***Υποερώτημα 2***: Θα μελετήσουμε τα άκρα του διαστήματος $[a_k\ b_k]$



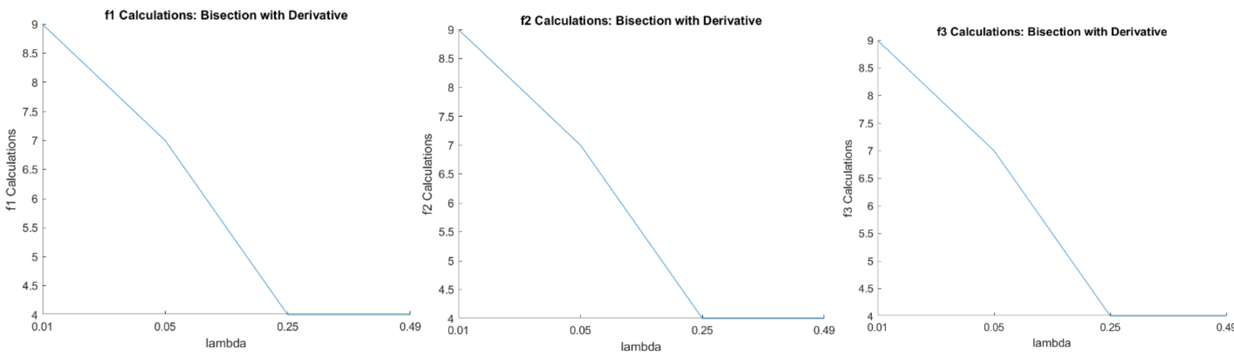
Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Παρόμοια, αυξάνοντας το l, οι επαναλήψεις κ μειώνονται. Αυτό είπαμε οδηγεί σε μικρότερη ακρίβεια της τελικής προσέγγισης. Το l δεν επηρεάζει την εύρεση των ενδιάμεσων a_k, b_k, αλλά μόνο το πλήθος των διχοτομήσεων του διαστήματος. Τα άκρα ανά επανάληψη θα είναι τα ίδια.

ΘΕΜΑ 4

Στο τρίτο θέμα πραγματοποιήθηκε η υλοποίηση της μεθόδου της διχοτόμου με παραγώγους. Το αντίστοιχο αρχείο είναι το *bisectionDerivative.m*, ενώ στο *Task4.m* υπάρχει η εκπλήρωση όλων των υποερωτημάτων παράγοντας τα αντίστοιχα γραφήματα.

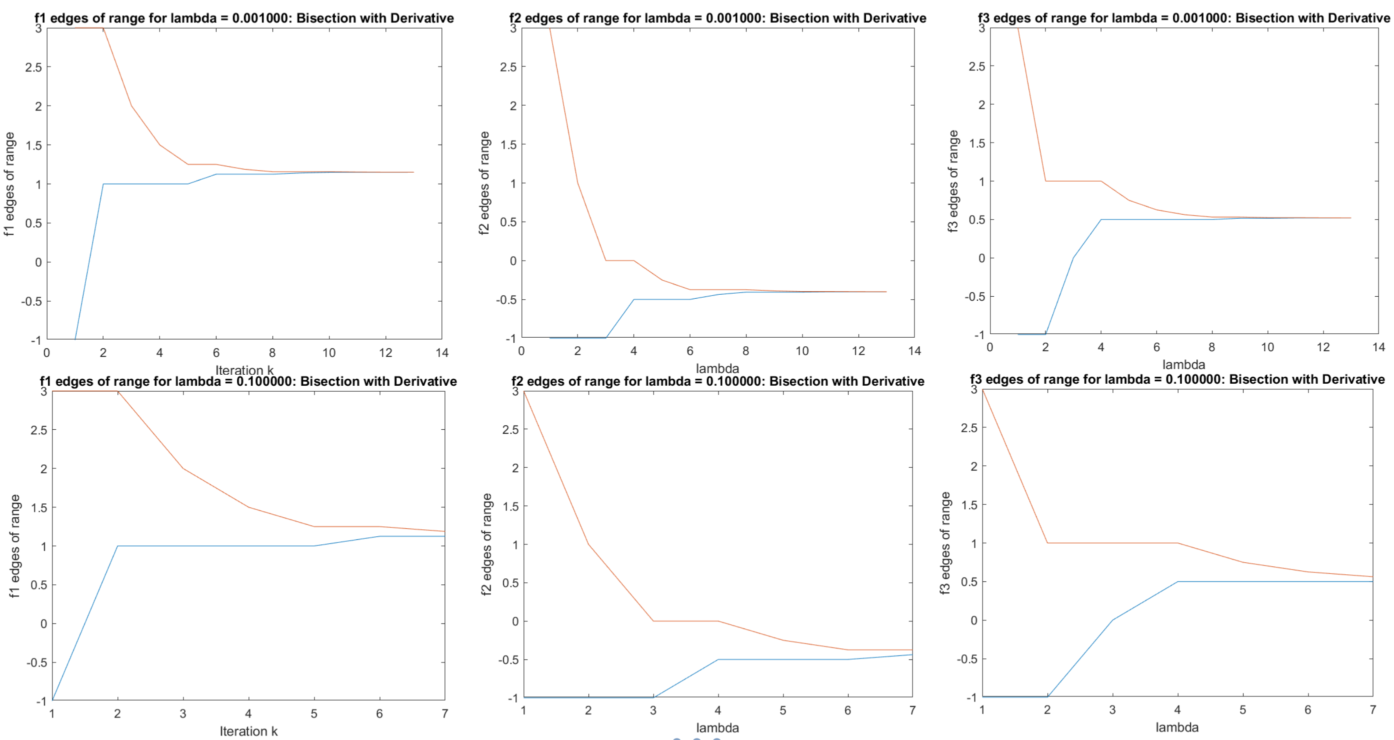
- ***Υποερώτημα 1***: Θα μελετήσουμε το πλήθος των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλοντας το τελικό εύρος αναζήτησης l.



Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Αυξάνοντας το l, το πλήθος υπολογισμών μειώνεται.
- Η επιλογή της συνάρτησης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.
- Το l πρέπει να είναι μικρότερο του 0.5, σύμφωνα με τον περιορισμό του βιβλίου.

- ***Υποερώτημα 2***: Θα μελετήσουμε τα άκρα του διαστήματος $[a_k \ b_k]$



Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις:

- Ακριβώς όπως και πριν, αυξάνοντας το l, οι επαναλήψεις κ μειώνονται. Άρα προκύπτει μικρότερη ακρίβεια της τελικής προσέγγισης. Το l δεν επηρεάζει την εύρεση των ενδιάμεσων a_k, b_k, αλλά μόνο το πλήθος των διχοτομήσεων του διαστήματος. Τα άκρα ανά επανάληψη θα είναι ίδια.

ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΣ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ

Κατά την υλοποίηση των μεθόδων φροντίστηκε να γίνεται χρήση των ίδιων τιμών ε και l, έτσι ώστε να είναι δυνατός και να έχει νόημα ο συγκριτικός σχολιασμός.

Αρχικά, θα γίνει σύγκριση πάνω στο πλήθος υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης.

lambda	*epsilon*	*bisection*	*goldenSection*	*fibonacci*	*bisectionDerivative*
0.01	0.001	18	15	16	9
6.25	0.001	0	2	4	4

Γενικά, η μέθοδος της διχοτόμου με παραγώγους έχει τις λιγότερες κλήσεις της αντικειμενικής συνάρτησης, ενώ αυτή της διχοτόμου χωρίς παραγώγους τις περισσότερες. Για μεγάλα l αυτό διαφοροποιείται, αλλά γενικά οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται για αρκετά μικρά l, ώστε να υπάρχει μεγάλη ακρίβεια.

Στη συνέχεια μπορούμε να μελετήσουμε την ακρίβεια υπολογίζοντας το τελικό εύρος.

lambda	*epsilon*	*bisection*	*goldenSection*	*fibonacci*	*bisectionDerivative*
0.0001	0.00001	-0.000081	-0.000070	-0.000053	-0.000061
0.001	0.00001	-0.000997	-0.000679	-0.000591	-0.000997
0.01	0.00001	-0.000997	-0.000679	-0.000591	-0.000997
0.1	0.00001	-0.062520	-0.085015	-0.044944	-0.062500

Οι τιμές των l και ε είναι παρόμοιες με αυτές των διαγραμμάτων. Οι μέθοδος της διχοτόμου είναι σχεδόν ίδια με την αντίστοιχη με παράγωγο, με την δεύτερη να είναι λίγο καλύτερη. Ωστόσο η καλύτερη φαίνεται να είναι η μέθοδος fibonacci σχετικά με την ακρίβεια.

Αν έπρεπε για κάποιο λόγο να επιλεχτεί μια μέθοδος θα σκεφτόμασταν ότι:

- Η μέθοδος της διχοτόμου με παραγώγους έχει την καλύτερη ακρίβεια και μικρό πλήθος υπολογισμών, αλλά κάνει χρήση παραγωγού.
- Η απλή μέθοδος της διχοτόμου είναι η απλούστερη σε υλοποίηση, αλλά κρύβει πολλούς υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης,.
- Η μέθοδος Fibonacci έχει αρίστη ακρίβεια, αλλά υστερεί στο πλήθος υπολογισμών και επιπλέον χρειάζεται να υπολογιστεί η ακολουθία.
- Η μέθοδος του χρυσού τομέα είναι μέτρια από κάθε άποψη.