✔ **Definizione 1.1.1.** Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di x_0, si dice che

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

(e si legge che f è "o piccolo" di g per $x \to x_0$) se accade che

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \quad \text{per } x \to x_0.$$

✔ **Osservazione 1.1.3.** Attenzione: la proprietà di una funzione di essere "o piccolo" di un'altra funzione è una proprietà *locale* cioè dipende *fortemente* da dove si fa il limite (che va sempre specificato!). Infatti si ha che

$$\sin x = o(x) \quad \text{per } x \to \infty$$

infatti dal teorema del confronto

$$\frac{\sin x}{x} \to 0 \quad \text{per } x \to \infty$$

perché $\sin x$ è una quantità limitata mentre $1/x$ è una quantità infinitesima. Invece dall'esempio precedente abbiamo visto che

$$\sin x \neq o(x) \quad \text{per } x \to 0.$$

✔ **Osservazione 1.1.4.** $o(1)$ è semplicemente una quantità infinitesima, indipendentemente da dove si fa il limite, perché dalla definizione si ha che

$$\frac{o(1)}{1} \to 0 \quad \text{per } x \to x_0$$

qualunque sia x_0.

➢ **Teorema 1.2.1.** *Vale la seguente equivalenza: per* $x \to x_0$

$$f(x) \sim g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) + o(g(x))$$

➢ DIMOSTRAZIONE Discende immediatamente dalle rispettive definizioni osservando che valgono le seguenti equivalenze per $x \to x_0$

$$\begin{aligned} f(x) \sim g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x)) \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) + o(g(x)) \end{aligned}$$

Teorema 1.4.1. (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO) *Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in(a,b)$. Supponiamo che la funzione f sia derivabile n volte nel punto x_0 ed $n-1$ volte nel resto dell'intervallo (a,b). Posto*

$$P_{n,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= \ f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

si ha per ogni $x_0\in(a,b)$

$$f(x)=P_{n,x_0}(x)+o((x-x_0)^n).$$

Definizione 1.4.1. Si definisce POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE n ASSOCIATO ALLA FUNZIONE f E CENTRATO IN x_0 un polinomio P_{n,x_0} di ordine n tale che

$$f(x)-P_{n,x_0}(x)=o((x-x_0)^n).$$

Il Teorema precedente ci assicura l'esistenza di un tale polinomio, supponendo che la funzione f sia sufficientemente regolare. Vale anche un teorema di unicità (che si trova nella sezione 1.6).

Nel caso particolare $\boxed{x_0=0}$ la formula di Taylor viene spesso chiamata FORMULA DI MAC LAURIN e prende la forma

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

I risultati precedenti si possono riassumere dicendo che la funzione da approssimare è uguale al polinomio approssimante più l'errore di approssimazione che è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)^n$. La quantità $o((x-x_0)^n)$ si dice RESTO SECONDO PEANO e se $x\to x_0$ il resto secondo Peano è tanto più piccolo quanto maggiore è n.

➢ **Teorema 2.5.1.** *Sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ e $n \geq 1$ intero. Allora esistono* esattamente *n radici ennesime complesse $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ di w, cioè tali che $z_k^n = w$ per $k = 0, \ldots, n-1$. Inoltre posto $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, si ha che $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ dove*

$$\begin{cases} \rho_k = r^{1/n} \\ \theta_k = \dfrac{\phi + 2\pi k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

➢ DIMOSTRAZIONE: Se z è una radice ennesima di w, allora per definizione $z^n = w$ pertanto anche $|z^n| = |w|$. Dalla formula delle potenze ennesime, sappiamo che $|z^n| = |z|^n$ pertanto $|z|^n = |w|$. Dato che quest'ultima è un'uguaglianza tra numeri reali, ne deduciamo che

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}.$$

In particolare, se $w = 0$, l'unica radice ennesima di w è zero (come detto l'unico numero di modulo 0). Se invece $w \neq 0$, scriviamo z e w in forma trigonometrica come

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

così che dalla formula di De Moivre ricaviamo

$$\rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

che equivale alle due equazioni reali

$$\cos(n\theta) = \cos\phi \qquad \sin(n\theta) = \sin\phi.$$

Dunque gli angoli $n\theta$ e ϕ hanno lo stesso seno e lo stesso coseno, pertanto differiscono per un multiplo intero di 2π

$$n\theta = \phi + 2m\pi$$

da cui ricaviamo

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi m}{n}.$$

Quindi possiamo porre

$$\begin{cases} \theta_0 = \dfrac{\phi}{n} \\ \theta_1 = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2\pi}{n} \\ \theta_2 = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{4\pi}{n} \\ \vdots \\ \theta_{n-1} = \dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2(n-1)\pi}{n} \end{cases}$$

e per ogni $k = 0, \ldots n-1$

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k).$$

Questi n numeri hanno argomenti diversi e compresi tra 0 e 2π, quindi sono numeri tutti distinti e abbiamo dimostrato che sono le uniche possibili radici di w. Poiché si verifica facilmente che la loro potenza $n-$esima è effettivamente w, il teorema è dimostrato. $\square$

In conclusione, se $w = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$, allora le sue n radici ennesime sono date dalla formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Dunque il simbolo $\sqrt[n]{z}$ non indica un numero complesso ma un insieme di numeri complessi, quindi la radice ennesima non è una **funzione** da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ (semmai una funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{C})$). C'è pertanto una differenza significativa tra trovare le radici ennesime in campo reale e in campo complesso: per esempio in $\mathbb{R}$ si ha $\sqrt{4} = 2$ mentre in $\mathbb{C}$ si ha $\sqrt{4} = \pm 2$.

Teorema 3.1.1. (TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI) *Se $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ e $f(a)$ ha segno diverso da $f(b)$ allora esiste un punto $\xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che dall'ipotesi sul segno di $f(a)$ e $f(b)$ segue che

$$f(a)f(b) \leq 0.$$

Procediamo seguendo il cosiddetto METODO DI BISEZIONE. Poniamo

$$a_0 = a, \qquad b_0 = b, \qquad m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Dato che $[f(m_0)]^2 \geq 0$, allora anche $[f(a_0)f(m_0)]\,[f(m_0)f(b_0)] \leq 0$. Allora i due prodotti tra parentesi quadre non possono essere entrambi positivi: se il primo è minore o uguale a zero poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = m_0$, mentre se il primo è positivo poniamo $a_1 = m_0$ e $b_1 = b_0$. In ogni caso abbiamo

$$\begin{cases} a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0 \\ b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2} \\ f(a_0)f(b_0) \leq 0 \qquad f(a_1)f(b_1) \leq 0. \end{cases}$$

Poniamo

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Procedendo per induzione in maniera del tutto simile alla dimostrazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass si trova che esistono due successioni monotone $\{a_n\}_n$ debolmente crescente e $\{b_n\}_n$ debolmente decrescente, che tendono allo stesso limite ξ e tali che, $\forall n$

$$f(a_n)f(b_n) \leq 0. \tag{3.1.1}$$

Dato che $a \leq a_n \leq b$, passando al limite abbiamo anche che $\xi \in [a,b]$, dunque f è continua nel punto ξ. Poiché $a_n \to \xi$ e $b_n \to \xi$, passando al limite in (3.1.1) si ottiene, per la continuità di f

$$[f(\xi)]^2 \leq 0,$$

cioè $f(\xi) = 0$. □

Osservazione 3.1.1. Se una delle ipotesi del teorema viene a mancare, allora la tesi non sussiste più, come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 3.1.2. *La funzione $f(x) = 1/x$ è ben definita e continua nell'insieme $[-1,1]\setminus\{0\}$ e $f(-1)$ ha segno opposto a $f(1)$, però f non si annulla mai. Per altro l'insieme $[-1,1]\setminus\{0\}$ non è un intervallo (e non è nemmeno chiuso).*

Esempio 3.1.3. *Sull'intervallo* $[-1, 1]$ *la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

assume valori di segno opposto agli estremi ma non si annulla mai. Peraltro la funzione non è continua in 0.

Esempio 3.1.4. *Sull'intervallo di numeri razionali* $\mathbb{Q} \cap [1, 2]$ *la funzione continua* $f(x) = x - \sqrt{2}$ *assume valori di segno opposto agli estremi, ma non si annulla mai. Questo dimostra che il teorema precedente si basa sulle proprietà di* $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2.1. (TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI) *Se* $f \in \mathcal{C}^0(I)$ *allora la sua immagine* $f(I)$ *è un intervallo che ha per estremi* $\inf f$ *e* $\sup f$.

Teorema 3.3.1. *Una funzione* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *strettamente monotona in* D *è invertibile in* D*. Inoltre la sua inversa è ancora strettamente monotona.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che f sia strettamente crescente. Allora presi $x_1, x_2 \in D$ dobbiamo provare che $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Se $x_1 \neq x_2$ allora possono accadere solo due casi: $x_1 < x_2$ oppure $x_1 > x_2$. Allora, dalla crescenza (stretta!) di f si ha

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ oppure } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

In entrambi i casi si ottiene $f(x_1) \neq f(x_2)$ da cui la tesi. Il caso in cui f è strettamente decrescente si tratta in modo analogo.
Ora proviamo che f^{-1} è strettamente crescente se f lo è. Sia $y_1 < y_2$; dobbiamo far vedere che $x_1 < x_2$, dove $x_i = f^{-1}(y_i)$, $i = 1, 2$. Supponiamo per assurdo che sia $x_1 \geq x_2$; allora visto che f è strettamente crescente, si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$ cioè $y_1 \geq y_2$, il che è assurdo, da cui la tesi. □

Teorema 3.3.2. *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *con* I *intervallo, una funzione continua su* I*. Allora* f *è invertibile in* I *se e soltanto se è strettamente monotona.*

Teorema 3.3.3. *Una funzione continua e invertibile su un intervallo ha inversa continua.*

Teorema 3.4.1. (TEOREMA DI WEIERSTRASS) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua (quindi le ipotesi del teorema sono: funzione continua su un intervallo chiuso e limitato). Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$ ossia esistono x_m e x_M appartenenti ad $[a, b]$ tali che*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in [a, b].$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che f ha massimo, poi basterà applicare il teorema a $-f$ e ricordare che $\sup A = -\inf(-A)$ e $\inf A = -\sup(-A)$. Sia dunque $M = \sup f$ quindi $M > -\infty$. Ricordiamo che l'estremo superiore per definizione è il minimo dei maggioranti, mentre il massimo è un maggiorante che appartiene all'insieme. Quindi per dimostrare che $M = \max f$ occorre trovare un elemento $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = M$ (l'estremo superiore viene raggiunto da qualche elemento appartenente all'insieme delle immagini di f, perché stiamo facendo il sup di f, cioè stiamo prendendo l'estremo superiore delle immagini di f).
Se $M \in \mathbb{R}$ allora poniamo $y_n = M - \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mentre se $M = +\infty$ poniamo $y_n = n$. In ogni caso $\{y_n\}_n$ è una successione che cresce a M. Dato che $y_n < M = \sup f$, per definizione di estremo superiore esiste qualche valore di f (ovvero qualche punto dell'immagine di f) maggiore di y_n: indichiamo tale valore con $f(x_n)$. Abbiamo dunque per ogni n

$$y_n < f(x_n) \leq M \qquad a < x_n \leq b.$$

Per il Teorema dei Carabinieri essendo $M = \lim_{n\to\infty} y_n$ si ha $f(x_n) \to M$. Applicando alla successione $\{x_n\}_n$ il Teorema di Bolzano-Weierstrass, (qui abbiamo sfruttato il fatto che $\boxed{[a, b] \text{ è limitato}}$), ne possiamo estrarre una sottosuccessione convergente $x_{k_n} \to x_0$. Dato che $a \leq x_{k_n} \leq b$ per ogni n, anche $x_0 \in [a, b]$ (qui abbiamo sfruttato il fatto che $\boxed{[a, b] \text{ è chiuso}}$). Allora dal fatto che $x_{k_n} \to x_0$ otteniamo che $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$ (qui abbiamo sfruttato il fatto che $\boxed{f \text{ è continua}}$). Ma $\{f(x_{k_n}\}_n$ è un'estratta di $\{f(x_n)\}_n$, quindi $f(x_{k_n}) \to M$ e per l'unicità del limite abbiamo trovato un punto x_0 in cui $f(x_0) = M = \sup f$, cioè l'estremo superiore è anche il massimo (dell'insieme delle immagini di f su $[a, b]$). □

Corollario 3.4.1. (TEOREMA DI LIMITATEZZA) *Se $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ allora f è limitata.*

Osservazione 3.4.2. *Ovviamente il viceversa non vale, controesempio*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Osservazione 3.4.3. Osserviamo che le ipotesi del teorema sono tutte necessarie, nel senso che se si rimuove anche una sola delle ipotesi il teorema fallisce e si possono trovare opportuni controesempi. Infatti la funzione $f(x) = x$ sull'intervallo aperto $(0, 1)$ non ha massimo né minimo (sarebbero 0 e 1 che sono rispettivamente estremo inferiore e superiore ma non sono raggiunti, non essendo f definita in quei punti). Per altro la funzione è continua su $(0, 1)$ però $(0, 1)$ è limitato ma non chiuso.

D'altra parte, la funzione $f(x) = x$ definita su tutto $\mathbb{R}$ non ha ovviamente né massimo né minimo; per altro essa è continua ma l'insieme di definizione non è limitato.
Infine la funzione $f(x) = x$ per $x \in (0, 1)$ e $f(x) = 1/2$ per $x = 0$ e $x = 1$ è la funzione del primo esempio definita anche negli estremi dell'intervallo; per cui ora è una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato ma non è continua. Infatti non ha massimo e minimo (di nuovo 0 è estremo inferiore e 1 estremo superiore ma non sono raggiunti).

✔ **Definizione 4.1.1.** Si dice che M è MASSIMO di f in $[a, b]$ e $x_M \in [a, b]$ è PUNTO DI MASSIMO per f in $[a, b]$ se $f(x_M) = M \geq f(x)$, per ogni $x \in [a, b]$.
Analogamente si dice che m è MINIMO di f in $[a, b]$ e $x_m \in [a, b]$ è PUNTO DI MINIMO per f in $[a, b]$ se $f(x_m) = m \leq f(x)$, per ogni $x \in [a, b]$.
Si dice che M è MASSIMO LOCALE per f e che $x_M \in [a, b]$ è PUNTO DI MASSIMO LOCALE per f se esiste un intervallo $(x_M - \delta, x_M + \delta)$ tale che $M = f(x_M) \geq f(x)$ per ogni $x \in (x_M - \delta, x_M + \delta) \cap [a, b]$.
Analogamente si dice che m è MINIMO LOCALE per f e che $x_m \in [a, b]$ è PUNTO DI MINIMO LOCALE per f se esiste un intervallo $(x_m - \delta, x_m + \delta)$ tale che $m = f(x_m) \leq f(x)$ per ogni $x \in (x_m - \delta, x_m + \delta) \cap [a, b]$.
Si dice infine che M è MASSIMO LOCALE STRETTO per f e che $x_M \in [a, b]$ è PUNTO DI MASSIMO LOCALE STRETTO per f se esiste un intervallo $(x_M - \delta, x_M + \delta)$ tale che $M = f(x_M) > f(x)$ per ogni $x \in ((x_M - \delta, x_M + \delta) \cap [a, b]) \setminus \{x_M\}$.
Analogamente si dice che m è MINIMO LOCALE STRETTO per f e che $x_m \in [a, b]$ è PUNTO DI MINIMO LOCALE STRETTO per f se esiste un intervallo $(x_m - \delta, x_m + \delta)$ tale che $m = f(x_m) < f(x)$ per ogni $x \in ((x_m - \delta, x_m + \delta) \cap [a, b]) \setminus \{x_m\}$.

✔ **Definizione 4.1.2.** *I punti di massimo e/o minimo (locale, stretto e/o globale) si dicono* PUNTI DI ESTREMO.

✎ **Teorema 4.1.1.** (FERMAT) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Se x_0 è punto di estremo locale allora $f'(x_0) = 0$.*

✎ DIMOSTRAZIONE. Sostituendo eventualmente f con $-f$ possiamo supporre che x_0 sia di minimo locale. Allora esiste un opportuno intorno U di x_0 tale che

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in U.$$

Quindi se $x < x_0$ allora $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ mentre $x > x_0$ allora $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ da cui si ottiene $f'_-(x_0) \leq 0$ e $f'_+(x_0) \geq 0$. Dal fatto che f è derivabile in x_0 segue che $f'(x_0) = 0$. □

✔ **Definizione 4.1.9.** I punti in cui f' si annulla si dicono PUNTI STAZIONARI per f.

Osservazione 4.1.10. 1) Il Teorema di Fermat non si può invertire, cioè se $f'(x_0) = 0$ non è detto che x_0 sia punto di estremo locale. Controesempio $f(x) = x^3$.
2) Il Teorema di Fermat ci dice che se f è derivabile in x_0 e x_0 è punto di estremo locale appartenente all'intervallo aperto (a, b) allora è stazionario. Tuttavia può anche accadere che x_0 sia punto di estremo locale senza che f sia derivabile, ad esempio come già osservato $f(x) = |x|$ ha un punto di minimo globale in $x_0 = 0$ ma non è derivabile in $x_0 = 0$
3) Un'altra ipotesi che va sottolineata è il fatto di aver supposto x_0 interno al dominio di f. Il risultato sarebbe infatti falso altrimenti. Controesempio: $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$. In questo caso $x_0 = 1$ è punto di massimo globale ma $f'(x_0) = 1$.

Teorema 4.2.1. (Teorema di Rolle) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che*

1) f è continua in $[a, b]$;
2) f è derivabile in (a, b);
3) $f(a) = f(b)$.
Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Essendo $[a, b]$ chiuso e limitato e f continua, dall'$\boxed{\text{ipotesi 1)}}$ si può applicare il Teorema di Weierstrass, per cui esistono x_m e x_M punti di minimo e massimo rispettivamente per f, cioè tali che

$$m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M \qquad \forall x \in [a, b].$$

Se $x_m = a$ e $x_M = b$ (o viceversa) allora si avrebbe $f(x_m) = m = M = f(x_M)$ (dall'$\boxed{\text{ipotesi 3)}}$) quindi la funzione f sarebbe costante e pertanto la sua derivata nulla, cioè $f'(c) = 0$ per ogni $c \in (a, b)$.
Supponiamo dunque che almeno uno tra x_m e x_M sia interno all'intervallo (a, b), per esempio x_m. Essendo f una funzione derivabile (per l'$\boxed{\text{ipotesi 2)}}$) e x_m un punto di estremo locale interno all'intervallo, per il Teorema di Fermat $f'(x_m) = 0$ che è quello che volevamo dimostrare. □

Osservazione 4.2.1. Le ipotesi del Teorema di Rolle sono tutte necessarie, nel senso che se ne rimuoviamo una, il teorema cessa di essere valido, come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 4.2.2. *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

Allora f è derivabile in $(0, 1)$ (quindi vale l'ipotesi 2)), inoltre $f(0) = f(1)$ (quindi vale l'ipotesi 3)) ma non vale l'ipotesi 1), perché la funzione f non è continua. Si vede peraltro che non esistono punti stazionari, cioè punti in cui la derivata di f si annulla.

Esempio 4.2.3. *Consideriamo la funzione $f(x) = x$ su $[0,1]$. Allora f è continua in $[0,1]$ (quindi vale l'ipotesi 1)), f risulta derivabile in $(0,1)$ (quindi vale l'ipotesi 2)) ma naturalmente $f(0) \neq f(1)$ (cioè non vale l'ipotesi 3)), per altro anche in questo caso non esistono punti stazionari (in cui la derivata si annulla e la retta tangente nel punto è orizzontale).*

Esempio 4.2.4. *Consideriamo la funzione $f(x) = |x|$ su $[-1,1]$. Allora f è continua su $[-1,1]$ (quindi vale l'ipotesi 1)), inoltre $f(-1) = f(1)$ (quindi l'ipotesi 3) vale) ma non vale l'ipotesi 2), perché la funzione f non è derivabile. Si vede peraltro che non esistono punti stazionari, cioè punti in cui la derivata di f si annulla.*

Teorema 4.2.2. (Teorema di Cauchy) *Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che:*

1) f, g sono continue in $[a,b]$;
2) f, g sono derivabili in (a,b).
Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Quando $g(x) \neq 0$ per $x \in (a,b)$ allora la tesi del teorema si riscrive come

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dimostrazione. Definiamo

$$w(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

Allora w è continua in $[a,b]$ (visto che, per l'$\boxed{\text{ipotesi 1)}}$, f, g sono continue in $[a,b]$); w è anche derivabile in (a,b) (visto che, per l'$\boxed{\text{ipotesi 2)}}$, f, g sono derivabili in (a,b)). Inoltre

$$w(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$
$$w(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b),$$

quindi $w(a) = w(b)$. Applicando quindi il Teorema di Rolle alla funzione $w(x)$ si ottiene che esiste $c \in (a,b)$ tale che $w'(c) = 0$ cioè quello che volevamo dimostrare. □
Scegliendo una funzione w in maniera opportuna abbiamo il seguente teorema.

Teorema 4.2.3. (Teorema del valor medio o di Lagrange) *Sia f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si dimostra banalmente dal Teorema di Cauchy prendendo $g(x) = x$. Alternativamente si può considerare la funzione

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Si tratta di una retta (quindi una funzione continua e derivabile in ogni punto) che congiunge i due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ appartenenti al grafico di f. La funzione $h(x) = r(x) - f(x)$ è tale che $h(a) = h(b) = 0$. La funzione h è continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b) perché lo sono sia r (perché è una retta) che f (per ipotesi). Quindi possiamo applicare direttamente il Teorema di Rolle e ottenere l'esistenza di un punto $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$. □

➢ **Teorema 4.3.1.** (TEST DI MONOTONIA) *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *derivabile. Allora* $\forall x \in (a, b)$*:*

f *crescente* $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$
f *decrescente* $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$.

➢ Per semplicità dimostriamo solo la prima implicazione, potendo dedurre la seconda dalla prima considerando $-f$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia f debolmente crescente. Dimostriamo che $f'(x) \geq 0$. Per la monotonia di f si ha

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Inoltre essendo f derivabile, $f'(x_0) = f'_+(x_0)$ (a meno che x_0 non sia l'estremo destro del dominio di f, nel qual caso si lavora con la derivata sinistra). Dunque

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia ora $f'(x) \geq 0$. Utilizzando il Teorema di Lagrange mostriamo che f è debolmente crescente. Siano $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$. Per il Teorema di Lagrange esiste $z \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = f'(z)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

cioè f monotona debolmente crescente. □

Con la stessa dimostrazione si arriva al seguente risultato.

➢ **Teorema 4.3.2.** (CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI A DERIVATA NULLA) *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$*. Allora*

$$f' = 0 \text{ in } (a, b) \Leftrightarrow \ f \text{ è costante in } (a, b).$$

➢ **Proposizione 4.3.3.** *Sia f continua su (a,b) e tale che $f'(x) > 0$ (rispettivamente $f'(x) < 0$) per ogni x interno ad (a,b). Allora f risulta strettamente crescente (rispettivamente strettamente decrescente) su (a,b).*

Questa proposizione ci fornisce **il più importante criterio di iniettività** disponibile. Questo vale purché f sia continua e definita su un intervallo.

➢ **Teorema 4.5.1.** (Teorema di de l'Hôpital) *Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili con $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ e sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Se*

$$(i)\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \text{ oppure } \pm\infty$$
$$(ii)\ \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Allora

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

➢ La dimostrazione dovrebbe distinguere vari casi. Diamo solo un'idea di come si procede lavorando solo nel caso di forma di indecisione $[\frac{0}{0}]$ e solo nel caso L finito. Gli altri casi si ottengono operando le opportune modifiche.
Dall'ipotesi (ii), fissato $\varepsilon > 0$, esiste t_0 tale che se $t \in (a, t_0)$ allora

$$L - \varepsilon < \frac{f'(t)}{g'(t)} < L + \varepsilon. \tag{4.5.1}$$

Sia ora $a < y < x < t_0$. Nell'intervallo $[y, x]$ f e g verificano le ipotesi del Teorema di Cauchy e quindi esiste $c \in (y, x)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Quindi siccome $c \in (a, t_0)$, dalla (4.5.1) si ha

$$L - \varepsilon < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < L + \varepsilon.$$

Passiamo ora al limite per $y \to a^+$. Allora dalla (i) si ricava che, per ogni $x \in (a, t_0)$

$$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon$$

e la tesi viene applicando la definizione di limite. □

➢ **Proposizione 4.5.7.** (LIMITE DESTRO (SINISTRO) DELLA DERIVATA E DERIVATA DESTRA (SINISTRA)) *Sia f una funzione definita in un intorno di x_0 e ivi continua, e inoltre derivabile per $x \neq x_0$. Supponiamo che esista (finito o infinito)*

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \alpha_- \qquad \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \alpha_+$$

Allora esistono

$$f'_-(x_0) = \alpha_- \qquad f'_+(x_0) = \alpha_+.$$

In particolare f risulta derivabile in x_0 se e solo se $\alpha_- = \alpha_+$.

➢ DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il Teorema di de l'Hôpital al limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

che si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$ (perché f è continua quindi $f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$. Allora si ottiene

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} f'(x) = \alpha_-$$

e analogamente da destra. L'ultima affermazione segue dal fatto che la derivata, se esiste, è il limite sia da sinistra che da destra del rapporto incrementale. □

✔ **Definizione 4.6.1.** Una figura F si dice CONVESSA se per ogni $P_1, P_2 \in F$, tutto il segmento congiungente i due punti è tutto contenuto in F.

✔ **Definizione 4.6.2.** Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Si chiama EPIGRAFICO di f l'insieme

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \text{ e } y \geq f(x)\}.$$

Si dice che f è CONVESSA se il suo epigrafico è un insieme convesso. Si dice che f è CONCAVA se $-f$ è convessa.

Si dimostra che la definizione precedente è equivalente alla seguente.

✔ **Definizione 4.6.3.** Se $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo. Allora si dice che f è CONVESSA (rispettivamente CONCAVA) in I se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ non ha punti sotto (rispettivamente sopra) il grafico di f.

Alternativamente questa ultima condizione si scrive

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad t \in [0, 1]$$

Se le disuguaglianze sono strette si dice che f è STRETTAMENTE CONVESSA (CONCAVA).

✔ **Definizione 4.6.9.** Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in (a, b)$ un punto di derivabilità o un punto per cui $f'(x_0) = \pm\infty$. Allora x_0 si dice PUNTO DI FLESSO per f se esiste un intorno destro di x_0, per esempio del tipo $(x_0, x_0 + h)$ con $h > 0$ in cui f è convessa e un intorno sinistro di x_0, per esempio del tipo $(x_0 - h, x_0)$, $h > 0$ in cui f è concava; e/o viceversa.

Significato geometrico del flesso: attraversa la propria retta tangente.

✔ **Definizione 6.1.1.** Chiameremo SUDDIVISIONE o PARTIZIONE di $[a,b]$ ogni insieme finito

$$\mathscr{A} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Presenteremo due definizioni equivalenti della nozione di integrabilità.

- <u>PRIMO MODO: SOMME DI CAUCHY-RIEMANN</u>

Per semplicità (comunque senza perdita di generalità) in questa prima parte considereremo solo suddivisioni equispaziate, cioè tali che

$$x_j = a + j\,h \qquad h = \frac{b-a}{n} \qquad j = 0, \ldots, n.$$

In ciascuno degli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$ scegliamo un punto arbitrario ξ_j (per $j = 1, 2, \ldots n$). Consideriamo la seguente somma (detta SOMMA DI CAUCHY-RIEMANN)

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j).$$

L'idea è quella di passare al limite per $n \to \infty$.
Si arriva così alla seguente definizione.

✔ **Definizione 6.1.2.** Diciamo che la funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è INTEGRABILE se detta S_n una qualsiasi successione di somme di Cauchy-Riemann, al variare di $n \in \mathbb{N}$ esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

e tale limite non dipende da come abbiamo scelto i punti ξ_j. In tal caso si pone

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Il simbolo di integrale ricorda l'idea di "somma"; il "dx" ricorda la lunghezza di un piccolo intervallo della suddivisione lungo x.

• <u>SECONDO MODO: SOMME SUPERIORI E SOMME INFERIORI</u>

✔ **Definizione 6.1.5.** Per ogni suddivisione $\mathscr{A}$ di $[a,b]$, le quantità

$$s(f,\mathscr{A}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
$$S(f,\mathscr{A}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

verranno rispettivamente chiamate SOMMA INFERIORE E SOMMA SUPERIORE di f rispetto alla suddivisione $\mathscr{A}$. Infine, le quantità

$$s(f) = \sup\{s(f,\mathscr{A}) : \mathscr{A} \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$
$$S(f) = \inf\{S(f,\mathscr{A}) : \mathscr{A} \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$

verranno rispettivamente chiamate *integrale inferiore e integrale superiore (secondo Riemann)* di f su $[a,b]$.
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA: se f è una funzione positiva, integrabile su $[a,b]$, allora $s(f,\mathscr{A})$ rappresenta l'area del plurirettangolo inscritto nel sottografico di f mentre $S(f,\mathscr{A})$ rappresenta l'area del plurirettangolo circoscritto al sottografico di f

✔ **Definizione 6.1.6.** Una funzione limitata f si dice *integrabile (secondo Riemann)* su $[a,b]$ se si ha

$$s(f) = S(f),$$

ed in tal caso il comune valore di $s(f)$ ed $S(f)$ viene detto INTEGRALE DI f SU $[a,b]$ e viene indicato con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

➢ **Teorema 6.2.1.** *Ogni funzione monotona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (limitata) è integrabile.*

➢ DIMOSTRAZIONE Supponiamo per semplicità f debolmente crescente (l'altro caso si tratta in maniera analoga). Fissato $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathscr{A}_n$ la suddivisione in n intervalli di uguale ampiezza

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}.$$

Allora per l'ipotesi di monotonia di f si ha

$$\inf_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_{i-1}) \qquad \sup_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_i).$$

Allora

$$s(f,\mathscr{A}_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{n}\left(f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$
$$S(f,\mathscr{A}_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

Dunque

$$\triangle S(f,\mathscr{A}_n) = S(f,\mathscr{A}) - s(f,\mathscr{A}) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

e l'integrabilità segue dal teorema precedente. □

➢ **Teorema 6.2.2.**

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.
Se $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $f_2 : [b,c] \to \mathbb{R}$ sono integrabili, allora la funzione

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in [a,b) \\ f_2(x) & x \in (b,c] \\ k & x = b \end{cases}$$

(dove k è un qualunque numero reale) è integrabile in $[a,c]$.

✔ **Esempio 6.2.4.** *Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la* FUNZIONE DI DIRICHLET *definita come*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

➢ **Proposizione 6.2.6.** *Se f è una funzione continua e non negativa su un intervallo $[a,b]$ non ridotto a un punto, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \ \forall\, x \in [a,b].$$

➢ DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = \kappa > 0$. Per il teorema di permanenza del segno, esiste $[a',b'] \subset [a,b]$ anch'esso non ridotto a un punto che contiene x_0 e tale che $f(x) \geq \frac{\kappa}{2}$ per ogni $x \in [a',b']$.
Consideriamo la suddivisione che contiene solo i punti a, a', b', b. Dato che f è integrabile, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = s(f) \geq s(f,\mathscr{A}) = (a'-a)\inf_{[a,a']} f + (b'-a')\inf_{[a',b']} f + (b-b')\inf_{[b,b']} f \geq (b'-a')\frac{\kappa}{2} > 0,$$

perché f è non negativa e $f(x) \geq \frac{\kappa}{2}$ se $x \in [a',b']$. Da cui l'assurdo. □

✔ **Osservazione 6.3.3.** Da quanto visto finora, si ha che, fissato l'intervallo $[a,b]$, l'applicazione

$$f \mapsto \mathscr{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

che ad ogni funzione integrabile f associa il suo integrale, è un'applicazione lineare non decrescente, cioè verifica le ipotesi:
a) $\mathscr{I}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathscr{I}(f) + \beta\mathscr{I}(g)$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed ogni f, g
b) $\mathscr{I}(f) \leq \mathscr{I}(g)$ per ogni $f \leq g$.

✔ **Definizione 6.3.4.** Data una funzione integrabile $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, chiameremo *media di f su $[a,b]$* la quantità $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Teorema 6.3.1. (TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora si ha*

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f.$$

Nel caso in cui la funzione f sia continua, esiste $z \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(z). \tag{6.3.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo per ogni $x \in [a,b]$
$$\inf_{[a,b]} f \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} f,$$
dalle proprietà dell'integrale appena enunciate si ottiene la prima parte.
Per quanto riguarda la seconda parte, essendo f continua per il Teorema di Weierstrass ha massimo M e minimo m rispettivamente. Dalle proprietà di monotonia si ottiene
$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dx = M$$
quindi il valore $\int_a^b f(x)\,dx$ sta tra m e M. Per la proprietà dei valori intermedi esiste z tale che
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(z)$$
per qualche $z \in [a,b]$ $\square$

Definizione 6.4.1. Se f è una funzione definita su un intervallo $[a,b]$, si dice che $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ è UNA PRIMITIVA DI f se G è derivabile su $[a,b]$ e si ha $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Proposizione 6.4.2. *Due primitive di una stessa funzione sullo stesso intervallo differiscono per una costante.*

DIMOSTRAZIONE. Siano G_1 e G_2 due primitive di una funzione f in $[a,b]$. Allora si ha per definizione che $G_1' - G_2' = 0$ in $[a,b]$ cioè $(G_1 - G_2)' = 0$ dunque $G_1 - G_2 = C$ con C costante reale (che era quello che volevamo dimostrare).

Osservazione 6.4.4. Esistono funzioni che non hanno primitive. Ad esempio la funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$
è una di queste. Infatti, se per assurdo F fosse una primitiva di f su tutto $\mathbb{R}$ si avrebbe
$$F'(x) = 0 \ \ \forall x < 0, \qquad F'(x) = 0 \ \ \forall x > 0,$$
per cui esisterebbero due costanti c_1 e c_2 tali che
$$F(x) = c_1 \ \ \forall x < 0, \qquad F(x) = c_2 \ \ \forall x > 0.$$
Ma dovendo essere F derivabile (e quindi continua) su tutto $\mathbb{R}$, deve essere $c_1 = c_2 = F(0)$ e quindi $F(x) = c_1$ for all $x \in \mathbb{R}$. In particolare $F' \equiv 0$ ma ciò contraddice il fatto che per definizione di primitiva dovrebbe essere $F'(0) = f(0) = 1$.

Definizione 6.4.5. Si dice INTEGRALE INDEFINITO DI f, e si indica con il simbolo

$$\int f(x)\,dx,$$

l'insieme di tutte le primitive di una funzione f rispetto alal variabile x, cioè tutte le funzioni $F(x)$ tali che $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.

Teorema 6.5.1. (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE) *Sia f una funzione continua su $[a,b]$ e sia G una sua primitiva. Allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b = G(x)\Big|_a^b.$$

DIMOSTRAZIONE. Si consideri una partizione di $[a,b]$ e sia $a = x_0$ e $b = x_n$. Allora si ha

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= G(x_n) - G(x_0) = [G(x_n) - G(x_{n-1})] + [G(x_{n-1}) - G(x_{n-2})] \\ &\quad + \cdots + [G(x_2) - G(x_1)] + [G(x_1) - G(x_0)] = \sum_{j=1}^{n}[G(x_j) - G(x_{j-1})] \end{aligned}$$

Applichiamo il Teorema di Lagrange alla funzione $G(x)$ su ciascuno degli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$; allora esiste $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tale che

$$G(x_j) - G(x_{j-1}) = (x_j - x_{j-1})\,G'(\xi_j) = (x_j - x_{j-1})\,f(\xi_j)$$

perché per ipotesi G è una primitiva di f e dunque $G'(\xi_j) = f(\xi_j)$. Allora

$$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})\ f(\xi_j) = S_n$$

dove S_n è una somma $n-$esima di Cauchy-Riemann per f. Questo vale per ogni n, quindi passando al limite si ottiene

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Siccome f è integrabile perché continua, allora questo procedimento va bene per ogni S_n. □

Definizione 6.5.1. La quantità $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è detta INTEGRALE DEFINITO di f da a a b.

Definizione 7.1.1. Se esiste finito il limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx \tag{7.1.1}$$

diremo che f è INTEGRABILE (IN SENSO GENERALIZZATO O IMPROPRIO) su $[a,b)$ ed il limite (7.1.1) verrà indicato con la scrittura

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{7.1.2}$$

e diremo che l'integrale (7.1.2) è CONVERGENTE. Se invece il limite (7.1.1) esiste ed è uguale a $+\infty$ $[\![-\infty\,]\!]$diremo che l'integrale improprio è DIVERGENTE POSITIVAMENTE [[NEGATIVAMENTE]]e scriveremo

$$\int_a^b f(x)\, dx = +\infty \qquad [\![-\infty\,]\!].$$

Infine se il limite (7.1.1) non esiste, diremo che l'integrale $\int_a^v f(x)\, dx$ NON HA SENSO (O NON ESISTE).

In modo analogo si definisce l'integrabilità generalizzata per le funzioni $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ continue (che quindi sono integrabili sugli intervalli del tipo $[\alpha, b]$ per ogni $\alpha > a$), e tali per cui si abbia $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, ponendo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx \tag{7.1.3}$$

Definizione 7.1.2. Se f è definita su (a,b) ed è integrabile su $[\alpha,\beta]$ per ogni $a < \alpha < \beta < b$, scelto un punto $c \in (a,b)$, diremo che f è INTEGRABILE (IN SENSO GENERALIZZATO) su (a,b) se essa è integrabile su $(a,c]$ e su $[c,b)$ nel senso delle (7.1.1) e (7.1.3), ed in tal caso porremo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Se uno solo degli integrali $\int_a^c f(x)\, dx$ o $\int_c^b f(x)\, dx$ è divergente positivamente [[negativamente]], o se sono entrambi divergenti positivamente [[entrambi divergenti negativamente]], diremo che $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge positivamente [[negativamente]]. In tutti gli altri casi, diremo che $\int_a^b f(x)\, dx$ non ha senso (o non esiste).

Esempio 7.1.7. *Consideriamo la funzione* $\frac{1}{x^\alpha}$ *definita in* $(0,1]$: *dato che è positiva, l'integrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *ha sempre senso. Se* $\alpha \leq 0$ *la funzione risulta integrabile nel senso di Riemann (non serve quello generalizzato); se invece* $\alpha > 0$ *si ha, per ogni* $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} -\log\varepsilon & \text{se } \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

per cui passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$, *si ottiene che*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 1$$

e che se $\alpha < 1$ *l'integrale (generalizzato se* $\alpha > 0$*) vale* $\frac{1}{1-\alpha}$.

Teorema 7.2.1. CRITERIO DEL CONFRONTO *Se* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *in* $[a,b)$ *allora*

g *integrabile* $\Rightarrow$ f *integrabile*
f *non integrabile* $\Rightarrow$ g *non integrabile*

Teorema 7.2.2. CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO *Se* $f > 0$ *e* $g > 0$ *e* $f \sim g$ *per* $x \to b^-$ *allora*

f *integrabile* $\Leftrightarrow$ g *integrabile*

Teorema 7.2.3. CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x) < +\infty$$

✔ **Definizione 7.3.1.** Se il limite precedente esiste finito, allora f si dice INTEGRABILE IN $[a,+\infty)$ oppure si dice che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ È CONVERGENTE. Se il precedente limite è uguale a $+\infty$ $[\![-\infty$ $]\!]$diremo che l'integrale improprio è DIVERGENTE POSITIVAMENTE $[\![$NEGATIVAMENTE $]\!]$. Infine in tutti gli altri casi diremo che L'INTEGRALE GENERALIZZATO NON ESISTE.

Analogamente se $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ è continua si pone

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\omega\to-\infty}\int_{\omega}^{b} f(x)\,dx$$

ed infine se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è continua si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

✔ **Esempio 7.3.2.** *La funzione* $f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$, *definita in* $[1,+\infty)$, *ha evidentemente integrale divergente positivamente se* $\alpha\le 0$ *(infatti avremmo* $f(x)\ge 1$ *per ogni* x*); se invece è* $\alpha>0$, *si ha per ogni* $y>1$

$$\int_1^y \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \log y & \text{se } \alpha = 1 \\ \dfrac{y^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1, \end{cases}$$

per cui, passando al limite per $y\to+\infty$, *si ottiene che*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1,$$

e che se $\alpha>1$, *l'integrale generalizzato vale* $\dfrac{1}{\alpha-1}$.

➢ **Teorema 7.4.1.** (CRITERIO DEL CONFRONTO) *Se* $0\le f(x)\le g(x)$ *in* $[a,+\infty)$ *allora*

g *integrabile* $\Rightarrow$ f *integrabile*
f *non integrabile* $\Rightarrow$ g *non integrabile*

➢ **Teorema 7.4.2.** (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO) *Se* $f>0$ *e* $g>0$ *e* $f\sim g$ *per* $x\to+\infty$ *allora*

f *integrabile* $\Leftrightarrow$ g *integrabile*

Teorema 7.4.3. (CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA)

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty \;\Rightarrow\; \int_a^{+\infty} f(x) < +\infty$$

Esempio 7.4.1. Se consideriamo la funzione $f(x) = 1/(x \log^\beta x)$, definita in $[e, +\infty)$ (con $\beta > 0$), si ha che f è positiva, e per ogni $y > e$

$$\int_e^y f(x)\, dx = \begin{cases} \log\log y & \text{se } \beta = 1 \\ \dfrac{(\log y)^{1-\beta} - 1}{1-\beta} & \text{se } \beta \neq 1, \end{cases}$$

per cui, passando al limite per $y \to +\infty$, si ottiene che

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \log^\beta x}\, dx < +\infty \Leftrightarrow \beta > 1,$$

e che se $\beta > 1$ l'integrale generalizzato vale $1/(\beta - 1)$.