Michela Eleuteri

ESERCIZIARIO DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

Corso di Laurea in Informatica

Parte propedeutica

Principio di induzione, successioni, serie, notazioni asintotiche, campi ordinati, limiti e derivate

Indice

CAPITOLO 1

Esercizi riguardanti il principio di induzione

1.1. Esercizi che coinvolgono sommatorie

❒ **Esercizio 1.1.1. (Esame del 23.01.19)** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$ *vale la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \tag{1.1.1}$$

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.1). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1(1+1) = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$$

Quindi $1 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \overset{\text{ipotesi}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)\left[\frac{n}{3}+1\right] = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.2.** **(Esame del 14.11.19)** *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2. \tag{1.1.2}$$

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.2). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n=1$ invece che da $n=0$).

● base dell'induzione: per $n=1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2-1 = 1 = 1^2$$

che è vero. Quindi $1 \in S$.

● passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2}$$

Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \overset{\text{ipotesi}}{=} n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.3.** **(Esame del 14.11.19)** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}. \tag{1.1.3}$$

➼ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale la (1.1.3). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 \leq 2 - 1 = 1$$

che è vero. Quindi $1 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{\text{ipotesi}}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} 2 - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{n(n+1)^2} \leq \frac{(n+1)^2 - n(n+1)}{n(n+1)^2} \Leftrightarrow n \leq n^2 + 2n + 1 - n^2 - n \Leftrightarrow 1 \geq 0\end{aligned}$$

che è ovviamente vero. Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n + 1 \in S$. Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.4.** **(Esame del 15.11.19)** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$ *vale l'uguaglianza*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}. \tag{1.1.4}$$

➼ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.4). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da

$n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2}.$$

Quindi $1 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}}$$

Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{\text{ipotesi}}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❐ **Esercizio 1.1.5. (Esame del 15.11.19)** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{n}{2n+1}. \tag{1.1.5}$$

➻ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.5). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}.$$

Quindi $1 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{n}{2n+1}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&\overset{\text{ipotesi}}{=} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.6. (Esame del 07.01.20)** *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

➼ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Usiamo il principio di induzione (prima forma).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2^1 - 1$$

che è vero. Quindi $0 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S\text{, cioè } \sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1}$$

Si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \overset{\text{ipotesi}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2\,2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.1.7.** **(Esame del 18.02.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ vale la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k!) = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots n(n!) = [(n+1)!] - 1. \tag{1.1.6}$$

➻ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.6). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} k(k!) = 1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$$

Quindi $1 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1} k(k!) = (n+2)! - 1}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k!) &= \sum_{k=1}^{n} k(k!) + (n+1)(n+1)! \overset{\text{ipotesi}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)![1 + n + 1] - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n + 1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.8.** **(Esame del 08.09.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

➻ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Usiamo il principio di induzione (prima forma).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} 3^k = 3^0 = 1 = \frac{3^1 - 1}{2}$$

che è vero. Quindi $0 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \frac{3^{n+2} - 1}{2}}$$

Si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} \stackrel{\text{ipotesi}}{=} \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 3^{n+1} = \frac{3}{2}\, 3^{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{3^{n+2} - 1}{2}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.1.9.** **(Esame del 14.12.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$ *vale la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.1.7}$$

➼ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.7). Usiamo il principio di induzione (prima forma) da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

Quindi $1 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{ipotesi}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.10. (Esame del 02.02.21)** *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{k=0}^{n} (3k+1) = \frac{3n^2+5n+2}{2}$$

➼ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale

$$\sum_{k=0}^{n} (3k+1) = \frac{3n^2+5n+2}{2}.$$

Usiamo il principio di induzione (prima forma).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} (3k+1) = 0+1 = 1 = \frac{2}{2}$$

che è vero. Quindi $0 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n} (3k+1) = \frac{3n^2+5n+2}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n+1} (3k+1) = \frac{3(n+1)^2+5(n+1)+2}{2} = \frac{3n^2+11n+10}{2}}$$

Si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} (3k+1) = \sum_{k=0}^{n} (3k+1) + 3(n+1) + 1 \overset{\text{ipotesi}}{=} \frac{3n^2+5n+2}{2} + 3n + 4 = \frac{3n^2+11n+10}{2}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.1.11.** **(Esame del 08.06.21)** *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

➾ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right].$$

Usiamo il principio di induzione (prima forma).
• base dell'induzione: per $n = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

che è vero. Quindi $0 \in S$.
• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right]}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \overset{\text{ipotesi}}{=} 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\ &= 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}(3-1) = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right]\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

1.2. Esercizi che coinvolgono disuguaglianze

❒ **Esercizio 1.2.1.** **(Esame del 08.01.19)** *Dimostrare per induzione che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *vale la formula*

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n\,.$$

➻ **R.** Sia $\mathcal{P}(n) := \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n\right\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1 \geq 0\,.$$

Quindi $\mathcal{P}(0)$ è vera.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ è vera, cioè } \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \geq n}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera, cioè } \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n+1} \geq n+1}$$

Si ha

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n \overset{\text{ipotesi}}{\geq} \frac{3}{2}n \overset{?}{\geq} n+1 \Leftrightarrow n \geq 2\,.$$

Resta da verificare il caso $n = 1$, che al momento rimane fuori sia dalla base dell'induzione che dal passo induttivo. Per $n = 1$ si ha

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} \geq 1\,,$$

quindi anche $\mathcal{P}(1)$ è vera. Allora abbiamo verificato che $\mathcal{P}(0)$ è vera, $\mathcal{P}(1)$ è vera e inoltre, se $\mathcal{P}(n)$ è vera per $n \geq 2$, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.2.2.** **(Esame del 05.06.19)** *Dimostrare per induzione che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *vale la formula*

$$(n+1)! \geq 2^n\,.$$

➻ **R.** Sia $\mathcal{P}(n) := \{(n+1)! \geq 2^n\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma).

- BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$(0+1)! = 1! = 1 \geq 2^0 = 1\,.$$

Quindi $\mathcal{P}(0)$ è vera.

- PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ è vera, cioè } (n+1)! \geq 2^n}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera, cioè } (n+2)! \geq 2^{n+1}}$$

Si ha

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)! \overset{\text{ipotesi}}{\geq} (n+2)\,2^n \overset{?}{\geq} 2^{n+1} \Leftrightarrow n+2 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 0$$

che è ovviamente vera. Quindi abbiamo ottenuto che se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.2.3.** **(Esame del 09.11.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$2^{n-1} \leq n!$$

➻ **R.** Sia $\mathcal{P}(n) := \{2^{n-1} \leq n!\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma).

- BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$2^0 = 1 \leq 1!\,.$$

Quindi $\mathcal{P}(0)$ è vera.

- PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ è vera, cioè } 2^{n-1} \leq n!}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera, cioè } 2^n \leq (n+1)!}$$

Si ha

$$2^n = 2^{n-1}\,2 \overset{\text{ipotesi}}{\leq} 2n! \overset{?}{\leq} (n+1)! \Leftrightarrow n+1 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 1$$

che è vera per ipotesi. Quindi abbiamo ottenuto che se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.

Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.2.4.** **(Esame del 22.02.21)** *Dimostrare per induzione che, per $n \geq 2$ si ha*

$$2^n + 4^n \leq 6^n$$

R. Sia $\mathcal{P}(n) := \{2^n + 4^n \leq 6^n\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 2$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 2$ invece che da $n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 2$ si ha $2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20 \leq 36 = 6^2$ che è vera. Quindi $\mathcal{P}(2)$ è vera.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera, cioè } 2^n + 4^n \leq 6^n}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera, cioè } 2^{n+1} + 4^{n+1} \leq 6^{n+1}}.$$

Si ha

$$2^{n+1} + 4^{n+1} = 2^n\, 2 + 4^n\, 4 \overset{2 \leq 6,\ 4 \leq 6}{\leq} (2^n + 4^n)\, 6 \overset{\text{ipotesi}}{\leq} 6^n\, 6 = 6^{n+1}.$$

Allora abbiamo verificato che se $\mathcal{P}(n)$ è vera per $n \geq 2$, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.2.5.** **(Esame del 22.06.21)** *Sia $\beta \in \mathbb{R}$ tale che $0 < \beta < 1$. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$*

$$(1 - \beta)^n < \frac{1}{1 + n\beta}.$$

R. Sia $\mathcal{P}(n) := \left\{(1-\beta)^n < \frac{1}{1+n\beta}\right\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma), da un certo indice in poi, visto che faremo partire l'induzione da $n = 1$.

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha, essendo $\beta + 1 > 0$

$$(1 - \beta) \overset{?}{<} \frac{1}{1 + \beta} \Leftrightarrow 1 - \beta^2 < 1 \Leftrightarrow \beta^2 > 0$$

che è vero perché consideriamo $\beta \neq 0$. Quindi $\mathcal{P}(1)$ è vera.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera, cioè } (1-\beta)^n < \tfrac{1}{1+n\beta}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera, cioè } (1-\beta)^{n+1} < \tfrac{1}{1+(n+1)\beta}}$$

Si ha

$$\begin{aligned}(1-\beta)^{n+1} &= (1-\beta)^n (1-\beta) \overset{\text{ipotesi}}{<} \frac{1-\beta}{1+n\beta} \overset{?}{<} \frac{1}{1+(n+1)\beta} \\ &\Leftrightarrow (1+(n+1)\beta)(1-\beta) < 1+n\beta \Leftrightarrow (n+1)\beta^2 > 0,\end{aligned}$$

che di nuovo è vero perché $\beta \neq 0$. Quindi abbiamo ottenuto che se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

1.3. Esercizi che riguardano funzioni definite ricorsivamente

❒ **Esercizio 1.3.1. (Esame del 11.09.18)** *Sia $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = 4 \\ F(n+1) = F(n) + n. \end{cases}$$

Usare il principio di induzione per dimostrare che $F(n) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui $F(n) \geq n$. Usiamo il principio di induzione nella forma "quinto assioma di Peano".

- BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = 4 \geq 0.$$

Quindi $0 \in S$.

- PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } F(n) \geq n}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } F(n+1) \geq n+1}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} F(n) + n \overset{\text{ipotesi}}{\geq} n + n = 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$ per tutti gli $n \geq 1$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.3.2.** **(Esame del 13.11.18)** *Sia* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = \alpha\,, \\ F(n+1) = [F(n)]^2 - 3F(n) + 4 \qquad n \geq 1\,. \end{cases}$$

Usando il principio di induzione dimostrare che, se $\alpha > 2$*, allora per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$F(n) > 2\,. \tag{1.3.1}$$

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.3.1). Usiamo il principio di induzione (prima forma o quinto assioma di Peano).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = \alpha > 2\,.$$

Quindi $0 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S, \text{ cioè } F(n) > 2}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } F(n+1) > 2}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} [F(n)]^2 - 3F(n) + 4 \overset{?}{>} 2 \iff [F(n)]^2 - 3F(n) + 2 > 0$$
$$\iff [F(n) - 1]\,[F(n) - 2] > 0 \iff F(n) < 1 \vee F(n) > 2$$

che è vera per l'ipotesi induttiva. Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$. Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.3.3.** **(Esame del 22.02.19)** *Sia* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = \sqrt{\pi}\,, \\ F(n+1) = \sqrt{F(n) + 6} \qquad n \geq 1\,. \end{cases}$$

Usando il principio di induzione dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$F(n) \leq 3\,. \tag{1.3.2}$$

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.3.2). Usiamo il principio di induzione (prima forma o quinto assioma di Peano).

- BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = \sqrt{\pi} \leq 3\,.$$

Quindi $0 \in S$.

- PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S, \text{ cioè } F(n) \leq 3}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } F(n+1) \leq 3}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} \sqrt{F(n)+6} \overset{\text{ipotesi}}{\leq} \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3\,.$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

Esercizio 1.3.4. **(Esame del 17.06.19)** *Sia $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = \pi\,, \\ F(n+1) = \sqrt[3]{[F(n)]^2 + 18} & n \geq 1\,. \end{cases}$$

Usando il principio di induzione dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$F(n) \geq 3\,. \tag{1.3.3}$$

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.3.3). Usiamo il principio di induzione (prima forma o quinto assioma di Peano).

- BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = \pi \geq 3\,.$$

Quindi $0 \in S$.

- PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S, \text{ cioè } F(n) \geq 3}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } F(n+1) \geq 3}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} \sqrt[3]{[F(n)]^2+18} \overset{\text{ipotesi}}{\geq} \sqrt[3]{9+18} = \sqrt[3]{27} = 3\,.$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.3.5.** **(Esame del 09.07.20)** *Sia* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(n) = n + F(n-1) \qquad n \geq 1. \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che

$$F(n) = \frac{n^2+n}{2}. \tag{1.3.4}$$

➻ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.3.4). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n=1$ invece che da $n=0$).

• base dell'induzione: per $n=1$ si ha

$$F(1) = 1 = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Quindi $1 \in S$.

• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } F(n) = \frac{n^2+n}{2}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } F(n+1) = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} n+1+F(n) \overset{\text{ipotesi}}{=} (n+1) + \frac{(n+1)n}{2} = (n+1)\left[1+\frac{n}{2}\right] = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.3.6. (Esame del 06.07.20)** *Sia* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = 15\,, \\ F(n+1) = F(n)^2 - 7F(n) + 16 \qquad n \geq 1\,. \end{cases}$$

Usando il principio di induzione dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ *si ha* $F(n) > 4$.

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale $F(n) > 4$. Usiamo il principio di induzione (prima forma o quinto assioma di Peano).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = 15 > 4\,.$$

Quindi $0 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S, \text{ cioè } F(n) > 4}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } F(n+1) > 4}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} [F(n)]^2 - 7F(n) + 16 \overset{?}{>} 4 \iff [F(n)]^2 - 7F(n) + 12 > 0$$
$$\iff [F(n) - 3]\,[F(n) - 4] > 0 \iff F(n) < 3 \vee F(n) > 4$$

che è vera per l'ipotesi induttiva. Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$. Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.3.7. (Esame del 11.01.21)** *Sia* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = \pi \\ F(n+1) = \dfrac{F(n)^2 - 3}{2} \end{cases}$$

Dimostrare che $F(n) > 3$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale che $F(n) > 3$. Usiamo il principio di induzione (prima forma o quinto assioma di Peano).

• base dell'induzione: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = \pi \geq 3 .$$

Quindi $0 \in S$.

• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S, \text{ cioè } F(n) \geq 3}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } F(n+1) \geq 3}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} \frac{F(n)^2 - 3}{2} \overset{\text{ipotesi}}{\geq} \frac{9-3}{2} = 3$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.

Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

1.4. Esercizi che riguardano questioni di divisibilità

❒ **Esercizio 1.4.1.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \in \mathbb{N}$

$$9^{n+1} + 2^{6n+1}$$

è divisibile per 11.

R. Sia $\mathcal{P}(n) := \{9^{n+1} + 2^{6n+1} \text{ è divisibile per } 11\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma). Osserviamo che dire che il numero $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11 significa che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $9^{n+1} + 2^{6n+1} = 11k$.

• base dell'induzione: per $n = 0$ si ha $9^{0+1} + 2^{0+1} = 11$ che giustamente è divisibile per 11. Quindi $\mathcal{P}(0)$ è vera.

• passo induttivo: $\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera}} \Rightarrow \boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera}}$.

Si ha

$$9^{n+2} + 2^{6(n+1)+1} = 9^{n+1}\, 9 + 2^{6n+1}\, 2^6 \pm 9^{n+1}\, 2^6 = 9^{n+1}[9 - 2^6] + [2^{6n+1} + 9^{n+1}]\, 2^6$$

A questo punto osserviamo che $9 - 2^6 = 55$ quindi il primo termine della somma risulta divisibile per 11; il secondo termine pure risulta divisibile per 11 dall'ipotesi induttiva. Allora tutto il numero $9^{n+2} + 2^{6(n+1)+1}$ è divisibile per 11, quindi abbiamo ottenuto che se $\mathcal{P}(n)$ è vera (cioè

$9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11) allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.4.2. (Esame del 23.11.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ il numero $z(n) := n^3 + 2n$ è divisibile per 3.*

R. Sia $\mathcal{P}(n) := \{z(n) := n^3 + 2n$ è divisibile per $3\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma) da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$). Osserviamo che dire che il numero $z(n)$ è divisibile per 3 significa che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $z(n) = 3k$.
• base dell'induzione: per $n = 1$ si ha $z(1) = 1 + 2 = 3$ che giustamente è divisibile per 3. Quindi $\mathcal{P}(1)$ è vera.
• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera, cioè } z(n) \text{ divisibile per } 3}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera, cioè } z(n+1) \text{ divisibile per } 3}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} z(n+1) &= (n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= [n^3 + 2n] + 3(n^2 + n + 1) \overset{\text{ipotesi}}{=} 3[k + n^2 + n + 1]. \end{aligned}$$

Siccome il numero $k + n^2 + n + 1 \in \mathbb{N}$, abbiamo ottenuto un numero divisibile per 3. Quindi riassumendo, se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

❒ **Esercizio 1.4.3. (Esame del 23.11.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ il numero $\gamma(n) := n^3 + 3n^2 + 5n$ è divisibile per 3.*

R. Sia $\mathcal{P}(n) := \{\gamma(n) := n^3 + 3n^2 + 5n$ è divisibile per $3\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$). Osserviamo che dire che $\mathcal{P}(n)$ è vera, significa dire che $\gamma(n)$ è divisibile per 3, cioè $n^3 + 3n^2 + 5n = 3k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.
• base dell'induzione: per $n = 1$ si ha $\gamma(1) = 1 + 3 + 5 = 9$ che giustamente è divisibile per 3. Quindi $\mathcal{P}(1)$ è vera.

• PASSO INDUTTIVO: $\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera}} \Rightarrow \boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera}}$.
Si ha

$$\begin{aligned} \gamma(n+1) &= (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 3n^2 + 6n + 3 + 5n + 5 \\ &= n^3 + 3n^2 + 5n + [3n^2 + 9n + 9] \overset{\text{ipotesi}}{=} 3k + 3[n^2 + 3n + 3] \end{aligned}$$

Siccome il numero $3k + 3[n^2 + 3n + 3]$ è divisibile per 3, abbiamo ottenuto che se $\mathcal{P}(n)$ è vera (cioè $\gamma(n)$ è divisibile per 3) allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

❒ **Esercizio 1.4.4.** **(Esame del 23.11.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ il numero $\gamma(n) := n^3 + 3n^2 + 2n$ è divisibile per 3.*

R. Sia $\mathcal{P}(n) := \{z(n) := n^3 + 2n$ è divisibile per $3\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma) da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$). Osserviamo che dire che il numero $z(n)$ è divisibile per 3 significa che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $z(n) = 3k$.
• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha $z(1) = 1 + 2 = 3$ che giustamente è divisibile per 3. Quindi $\mathcal{P}(1)$ è vera.
• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera, cioè } z(n) \text{ divisibile per } 3}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera, cioè } z(n+1) \text{ divisibile per } 3}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} z(n+1) &= (n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= [n^3 + 2n] + 3(n^2 + n + 1) \overset{\text{ipotesi}}{=} 3[k + n^2 + n + 1]. \end{aligned}$$

Siccome il numero $k + n^2 + n + 1 \in \mathbb{N}$, abbiamo ottenuto un numero divisibile per 3. Quindi riassumendo, se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

CAPITOLO 2

Esercizi riguardanti limiti di successioni

2.1. Richiami di teoria

➠ (ALGEBRA DEI LIMITI) Se $a_n \to a \in \mathbb{R}$ e $b_n \to b \in \mathbb{R}$ allora

$$\begin{aligned} & a_n \pm b_n \to a \pm b \\ & a_n \, b_n \to a \, b \\ & \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} && (b_n, b \neq 0) \\ & a_n^{b_n} \to a^b && (a, a_n > 0) \end{aligned}$$

➠ (TEOREMA DEL CONFRONTO) Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che definitivamente $a_n \leq b_n$. Allora se $a_n \to +\infty$ allora $b_n \to +\infty$ (e se $b_n \to -\infty$ allora $a_n \to -\infty$).

➠ (TEOREMA DEI DUE CARABINIERI) Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e $a_n \to \ell$ e $c_n \to \ell$ allora $b_n \to \ell$.

➠ Il prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata è una successione infinitesima.

➠ REGOLE DI ARITMETIZZAZIONE (PARZIALE) DEL SIMBOLO DI INFINITO (QUI $a \in \mathbb{R}$):

$a + \infty = +\infty$	$a - \infty = -\infty$	$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$
$a \cdot +\infty = +\infty (a > 0)$	$a \cdot (-\infty) = -\infty (a > 0)$	$a \cdot +\infty = -\infty (a < 0)$	$a \cdot (-\infty) = +\infty (a < 0)$
$\frac{a}{0^+} = +\infty (a > 0)$	$\frac{a}{0^-} = -\infty (a > 0)$	$\frac{a}{0^+} = -\infty (a < 0)$	$\frac{a}{0^-} = +\infty (a < 0)$
$\frac{a}{+\infty} = 0^+ (a \geq 0)$	$\frac{a}{-\infty} = 0^- (a \geq 0)$	$\frac{a}{+\infty} = 0^- (a \leq 0)$	$\frac{a}{-\infty} = 0^+ (a \leq 0)$

➠ FORME DI INDECISIONE: ➠ Si ha

$+\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$1^{\pm\infty}$	0^0	$(+\infty)^0$

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

per ogni successione a_n divergente.

➠ (GERARCHIA DEGLI INFINITI) Vale la seguente gerarchia degli infiniti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \qquad \forall a > 1,\ \alpha > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

2.2. Limiti di successioni: esercizi proposti

2.2.1. Limiti che si risolvono grazie alla gerarchia degli infiniti e ai teoremi di confronto

❒ **Esercizio 2.2.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^3 + 2n\log n + \sqrt{2}}{5n^2 + \arctan n^3 + (-1)^n \sin n}$ **(Esame del 01.02.16)**

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(3^n + (-2)^n)}{n^2 - n(-1)^n}$ **(Esame del 19.07.16)**

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n^2) + n^2}{(-1)^n(-n)^2 \log(1+n)}$ **(Esame del 23.02.17)**

4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(3^n + (-2)^n)}{n^2 - n(-1)^n}$ **(Esame del 25.01.18)**

5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3 + n + 4}{-1 + 2\sqrt{n} + \arctan(n^3)}$ **(Esame del 10.04.19)**

6) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{7n+3(-1)^n}{n^2+1}}$ **(Esame del 05.06.19)**

7) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4+n^2}+\sqrt[4]{3n}}{\sqrt[3]{n^4+n}+2\sqrt{n}-1}$ **(Esame del 17.06.19)**

8) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+2\log n}{n\ \sqrt[3]{n^2-1}+(-1)^n\arctan n}$ **(Esame del 07.01.20)**

9) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+4\log n}{n\ \sqrt[3]{n^2-1}+(-1)^n\sin n}$ **(Esame del 08.09.20)**

10) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n-\sin n}}{n+\cos n}$ **(Esame del 01.02.21)**

11) $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}+\cos n}{n+\cos n}$ **(Esame del 21.02.21)**

R.

1) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+2n\log n+\sqrt{2}}{5n^2+\arctan n^3+(-1)^n\sin n} = \frac{n^3\left(4+\frac{2\log n}{n^2}+\frac{\sqrt{2}}{n^3}\right)}{n^2\left(5+\frac{\arctan n^3}{n^2}+\frac{(-1)^n\sin n}{n^2}\right)} = +\infty$$

dove osserviamo che, per $n\to\infty$

$$\frac{\log n}{n^2}\to 0$$

per la gerarchia degli infiniti; inoltre

$$\frac{\sqrt{2}}{n^3}\to 0 \qquad \frac{\arctan n^3}{n^2}\to 0$$

perché $\arctan n^3 \to \frac{pi}{2}$ e dove infine si usa il teorema dei carabinieri per concludere che

$$\frac{(-1)^n\sin n}{n^2}\to 0.$$

Osserviamo che sarebbe stato un **errore grave** scrivere $\arctan n^3 \sim n^3$ in quanto $n\to\infty$.

2) Osserviamo che, indipendentemente dal suo argomento, $\sin(3^n+(-2)^n)$ è una quantità limitata, quindi si ha, dividendo numeratore e denominatore per n^2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(3^n+(-2)^n)}{n^2-n(-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin(3^n+(-2)^n)}{n}}{1-\frac{(-1)^n}{n}} = 0$$

perché, dal teorema dei due carabinieri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(3^n + (-2)^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

3) Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2) + n^2}{(-1)^n(-n)^2 \log(1+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2) + n^2}{(-1)^n n^2 \log(1+n)} \\
= \ &\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \left(\frac{\cos(n^2)}{n^2}\right)}{n^2 \left[(-1)^n \log(1+n)\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\cos(n^2)}{n^2}\right)}{\left[(-1)^n \log(1+n)\right]}
\end{aligned}$$

A questo punto, il numeratore tende a zero dal teorema dei carabinieri. Il denominatore non ha limite (tende a $+\infty$ o $-\infty$ rispettivamente se n è pari o dispari) però, essendo al denominatore, si ha che complessivamente non si tratta di una forma di indecisione, anzi tutto il limite tende a zero.

4) L'idea è che il limite proposto esista e faccia 0. Prima di tutto osserviamo che, indipendentemente dall'argomento, la funzione seno ha valori compresi tra -1 e 1 pertanto in particolare si ha

$$-1 \leq \sin(3^n + (-2)^n) \leq 1.$$

Inoltre anche $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ da cui $-n \leq n(-1)^n \leq n$ e anche $-n \leq -n(-1)^n \leq n$ pertanto (attenti al verso della disuguaglianza!!)

$$\frac{-n}{n^2+n} \leq \frac{n\sin(3^n + (-2)^n)}{n^2 - n(-1)^n} \leq \frac{n}{n^2-n}.$$

A questo punto

$$-\frac{n}{n^2+n} = -\frac{1}{n+1} \to 0 \qquad \text{se } n \to \infty$$

mentre

$$\frac{n}{n^2-n} = \frac{1}{n-1} \to 0 \qquad \text{se } n \to \infty$$

e allora il limite dato esiste e fa 0 dal teorema dei carabinieri.

5) Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3+n+4}{-1+2\sqrt{n}+\arctan(n^3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(3+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}{\sqrt{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}+2+\frac{\arctan(n^3)}{\sqrt{n}}\right)} \\
= &\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{5/2}\left(3+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}{-\frac{1}{\sqrt{n}}+2+\frac{\arctan(n^3)}{\sqrt{n}}}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\arctan(n^3) \to \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ \frac{\arctan(n^3)}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3+n+4}{-1+2\sqrt{n}+\arctan(n^3)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{n^{5/2}}^{\stackrel{+\infty}{\uparrow}}\overbrace{\left(3+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}^{\stackrel{3}{\uparrow}}}{\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{n}}+2+\frac{\arctan(n^3)}{\sqrt{n}}}_{\stackrel{\downarrow}{2}}}=+\infty\,.$$

6) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{7n+3(-1)^n}{n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{n\left(7+\frac{3(-1)^n}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7+\frac{3(-1)^n}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\right)^{1/3}.$$

Osserviamo che

$$\underbrace{\frac{-3}{n}}_{\stackrel{\downarrow}{0}}\le\frac{3(-1)^n}{n}\le\underbrace{\frac{3}{n}}_{\stackrel{\downarrow}{0}}\;\Rightarrow\;\frac{3(-1)^n}{n}\to 0$$

dal teorema dei carabinieri. Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{7n+3(-1)^n}{n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\overbrace{7+\frac{3(-1)^n}{n}}^{\stackrel{7}{\uparrow}}}{\underbrace{n}_{\stackrel{\downarrow}{+\infty}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}_{\stackrel{\downarrow}{1}}}\right)^{1/3}=0\,.$$

7) Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4+n^2}+\sqrt[4]{3n}}{\sqrt[3]{n^4+n}+2\sqrt{n-1}}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2\left(\frac{4}{n^2}+1\right)}+\sqrt[4]{3n}}{\sqrt[3]{n^4\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}+2\sqrt{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}}\\
=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{\frac{4}{n^2}+1}+n^{1/4}\sqrt[4]{3}}{n^{4/3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+2n^{1/2}\sqrt{1-\frac{1}{n}}}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+1}+\frac{\sqrt[4]{3}}{n^{3/4}}\right)}{n^{4/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+\frac{2}{n^{5/6}}\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}\\
=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{4}{n^2}+1}+\frac{\sqrt[4]{3}}{n^{3/4}}}{n^{1/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+\frac{2}{n^{5/6}}\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}\,.&\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\frac{4}{n^2},\,\frac{1}{n^3},\,\frac{1}{n}\to 0\;\Rightarrow\;\sqrt{\frac{4}{n^2}+1},\;\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}},\;\sqrt{1-\frac{1}{n}}\to 1$$

dalla continuità delle radici. Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4+n^2}+\sqrt[4]{3n}}{\sqrt[3]{n^4+n}+2\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{\frac{4}{n^2}+1}+\frac{\sqrt[4]{3}}{n^{3/4}}}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{n^{1/3}}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}}\underbrace{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+\frac{2}{n^{5/6}}\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}_{\substack{\downarrow\\ 1}}}=0\,.$$

8) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+2\log n}{n\,\sqrt[3]{n^2-1}+(-1)^n\arctan n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\left[1+\frac{2\log n}{\sqrt{n}}\right]}{n\,n^{2/3}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}+\frac{(-1)^n\arctan n}{n^{5/3}}\right]}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left[1+\frac{2\log n}{\sqrt{n}}\right]}{n^{7/6}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}+\frac{(-1)^n\arctan n}{n^{5/3}}\right]}=0$$

in quanto

$$\frac{2\log n}{\sqrt{n}}\to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\to 1$$

dalla continuità della funzione radice cubica, e infine

$$\frac{(-1)^n\arctan n}{n^{5/3}}\to 0$$

dal teorema dei carabinieri.

9) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+4\log n}{n\,\sqrt[3]{n^2-1}+(-1)^n\sin n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\left[1+\frac{4\log n}{\sqrt[3]{n}}\right]}{n\,n^{2/3}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}+\frac{(-1)^n\sin n}{n^{5/3}}\right]}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left[1+\frac{2\log n}{\sqrt[3]{n}}\right]}{n^{7/6}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}+\frac{(-1)^n\sin n}{n^{5/3}}\right]}=0$$

in quanto

$$\frac{4\log n}{\sqrt[3]{n}}\to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}} \to 0$$

dalla continuità della funzione radice cubica, e infine

$$\frac{(-1)^n \sin n}{n^{5/3}} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri.

10) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n-\sin n}}{n+\cos n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{\sin n}{n}}}{n\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{\sin n}{n}}}{\sqrt{n}\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)} = 0$$

perché, dal teorema dei carabinieri

$$\frac{\sin n}{n} \to 0 \qquad \frac{\cos n}{n} \to 0$$

11) Osserviamo che

$$\frac{e^{-n}+\cos n}{n+\cos n} = (e^{-n}+\cos n)\,\frac{1}{n+\cos n}.$$

A questo punto

$$-1 \le e^{-n}+\cos n \le\ 2$$

quindi $e^{-n}+\cos n$ è una quantità limitata; d'altra parte

$$\frac{1}{n+\cos n} = \frac{1}{n\left(1+\frac{\cos n}{n}\right)} \to 0$$

perché $\frac{\cos n}{n} \to 0$ dal teorema dei carabinieri.
Dunque il limite dato esiste e fa 0, in quanto è il prodotto di una quantità limitata per una infinitesima.

2.2.2. Forme di indecisione $[\infty^0]$

❒ **Esercizio 2.2.2.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

12) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2 - 2\cos n^2}$ **(Esame del 15.02.18)**

13) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^3 - \sin n^2}$ **(Esame del 11.09.18)**

14) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^5 + \pi}$ **(Esame del 23.11.20)**

15) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2 - n\cos(\pi)}$ **(Esame del 21.06.21)**

➻ **R.**

12) Si tratta di una forma di indecisione $[\infty^0]$. Si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 - 2\cos n^2} = \lim_{n\to\infty} (n^2 - 2\cos n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log(n^2-2\cos n^2)}{n}}.$$

A questo punto

$$\begin{aligned} \log(n^2 - 2\cos n^2) &= \log\left(n^2\left(1 - \frac{2\cos n^2}{n^2}\right)\right) = \log n^2 + \log\left(1 - \frac{2\cos n^2}{n^2}\right) \\ &= 2\log n + \log\left(1 - \frac{2\cos n^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\log(n^2 - 2\cos n^2)}{n} = \frac{2\log n}{n} + \frac{\log\left(1 - \frac{2\cos n^2}{n^2}\right)}{n} \to 0$$

perché somma di due quantità infinitesime: infatti il primo termine tende a zero dalla gerarchia degli infiniti, il secondo tende a zero perché l'argomento del logaritmo tende a 1 (infatti $\frac{2\cos n^2}{n^2} \to 0$ dal teorema dei carabinieri) e quindi si conclude dalla continuità della funzione logaritmo e dal fatto che il termine $\frac{\log\left(1-\frac{2\cos n^2}{n^2}\right)}{n}$ si presenta dunque nella forma $[\frac{0}{\infty}]$ che **NON** è una forma di indecisione. Allora dalla continuità della funzione esponenziale il limite dato esiste e fa 1.

13) Si tratta di forma di indecisione $[\infty^0]$. Analogamente all'esercizio precedente, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - \sin n^2} = \lim_{n\to\infty} (n^3 - \sin n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log(n^3-\sin n^2)}{n}}.$$

A questo punto

$$\begin{aligned}\log(n^3-\sin n^2) &= \log\left(n^3\left(1-\frac{\sin n^2}{n^2}\right)\right)=\log n^3+\log\left(1-\frac{\sin n^2}{n^2}\right)\\ &= 3\log n+\log\left(1-\frac{\sin n^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\log(n^3-\sin n^2)}{n}=\frac{3\log n}{n}+\frac{\log\left(1-\frac{\sin n^2}{n^2}\right)}{n}\to 0$$

perché somma di due quantità infinitesime: infatti il primo termine tende a zero dalla gerarchia degli infiniti, il secondo tende a zero perché l'argomento del logaritmo tende a 1 (infatti $\frac{\sin n^2}{n^2}\to 0$ dal teorema dei carabinieri) e quindi si conclude dalla continuità della funzione logaritmo e dal fatto che il termine $\frac{\log\left(1-\frac{\sin n^2}{n^2}\right)}{n}$ si presenta dunque nella forma $[\frac{0}{\infty}]$ che **NON** è una forma di indecisione. Allora dalla continuità della funzione esponenziale il limite dato esiste e fa 1.

14) Si tratta di forma di indecisione $[\infty^0]$. Si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5+\pi}=\lim_{n\to\infty}(n^5+\pi)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\log(n^5+\pi)}{n}}.$$

A questo punto

$$\begin{aligned}\log(n^5+\pi) &= \log\left(n^5\left(1+\frac{\pi}{n^5}\right)\right)=\log n^5+\log\left(1+\frac{\pi}{n^5}\right)\\ &= 5\log n+\log\left(1+\frac{\pi}{n^5}\right)\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\log(n^5+\pi)}{n}=5\frac{\log n}{n}+\frac{\log\left(1+\frac{\pi}{n^5}\right)}{n}\to 0$$

perché l'argomento del logaritmo tende a 1 (infatti $\frac{\pi}{n^2}\to 0$) e quindi si conclude dalla continuità della funzione logaritmo e dal fatto che il termine $\frac{\log\left(1+\frac{\pi}{n^5}\right)}{n}$ si presenta dunque nella forma $[\frac{0}{\infty}]$ che **NON** è una forma di indecisione. Allora dalla continuità della funzione esponenziale il limite dato esiste e fa 1.

15) Si tratta di forma di indecisione $[\infty^0]$. Si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n\cos(\pi)}=\lim_{n\to\infty}(n^2-n\cos(\pi))^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\log(n^2-n\cos(\pi))}{n}}.$$

A questo punto

$$\begin{aligned}\log(n^2-n\cos(\pi)) &= \log\left(n^2\left(1-\frac{\cos(\pi)}{n}\right)\right)=\log n^2+\log\left(1-\frac{\cos(\pi)}{n}\right)\\ &= 2\log n+\log\left(1-\frac{\cos(\pi)}{n}\right)\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\log(n^2 - n\cos(\pi))}{n} = \frac{2\log n}{n} + \frac{\log\left(1 - \frac{\cos(\pi)}{n}\right)}{n} \to 0$$

perché somma di due quantità infinitesime: infatti il primo termine tende a zero dalla gerarchia degli infiniti, il secondo tende a zero perché l'argomento del logaritmo tende a 1 (infatti $\frac{\cos(\pi)}{n} \to 0$ dal teorema dei carabinieri) e quindi si conclude dalla continuità della funzione logaritmo e dal fatto che il termine $\frac{\log\left(1-\frac{\cos(\pi)}{n}\right)}{n}$ si presenta dunque nella forma $[\frac{0}{\infty}]$ che **NON** è una forma di indecisione. Allora dalla continuità della funzione esponenziale il limite dato esiste e fa 1.

2.2.3. Forme di indecisione $[1^\infty]$

❒ **Esercizio 2.2.3.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

16) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e^{2n}+2}{e^{2n}+1}\right)^{2e^n}$ **(Esame del 15.12.15)**

17) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\log^3 n+3}{\log^3 n+1}\right)^{-\frac{\log^2 n}{2}}$ **(Esame del 15.12.15)**

18) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n}$ **(Esame del 08.01.19)**

19) $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^{n^2/4}$ **(Esame del 23.11.20)**

➼ **R.**

16) Ricordiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad \text{quando } a_n \to \pm\infty\,, \tag{2.2.1}$$

A questo punto, usando il limite (2.2.1) con $a_n = e^{2n}+1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{2n}+2}{e^{2n}+1}\right)^{2e^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{e^{2n}+1}\right)^{e^{2n}+1}\right]^{\frac{2e^n}{e^{2n}+1}} = e^0 = 1$$

visto che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2e^n}{e^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{e^n\left(1+\frac{1}{e^{2n}}\right)} = 0$$

17) Si ha, usando il limite (2.2.1) con $a_n = \dfrac{\log^3 n + 1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log^3 n + 3}{\log^3 n + 1} \right)^{-\frac{\log^2 n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{\log^3 n + 1} \right)^{\frac{\log^3 n + 1}{2}} \right]^{b_n} = e^0 = 1,$$

dove

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{\log^2 n}{\log^3 n + 1} = 0$$

18) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} \right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2 + 1 - 1 - n}{n^2 + 1} \right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{n+1}{n^2+1} \right)^n .$$

quindi scriviamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{n+1}{n^2+1} \right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 - \frac{n+1}{n^2+1} \right)^{-\frac{n^2+1}{n+1}} \right]^{-\frac{n(n+1)}{n^2+1}} .$$

Osserviamo che

$$-\frac{n^2+1}{n+1} \to -\infty \;\Rightarrow\; \left(1 - \frac{n+1}{n^2+1} \right)^{-\frac{n^2+1}{n+1}} \to e$$

usando il limite notevole (2.2.1) con $a_n = -\frac{n^2+1}{n+1}$, e inoltre

$$-\frac{n(n+1)}{n^2+1} = -\frac{n^2+n}{n^2+1} = -\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = -\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to -1.$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2 - n}{n^2 + 1} \right)^n = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left[\left(1 - \frac{n+1}{n^2+1} \right)^{-\frac{n^2+1}{n+1}} \right]}_{\downarrow \atop e}{}^{\overbrace{-\frac{n(n+1)}{n^2+1}}^{\downarrow \atop -1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} .$$

19) Si ha, usando il limite (2.2.1) con $a_n = -4n^2$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right)^{n^2/4} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{4n^2} \right)^{(-4n^2)} \right]^{-1/16} = e^{-1/16}.$$

2.2.4. Limiti che coinvolgono differenze di radici

❒ **Esercizio 2.2.4.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

20) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^4}{\sqrt{n^4-1}} - \dfrac{n^4}{\sqrt{n^4+1}}$ **(Esame del 14.11.19)**

21) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+1}} - \dfrac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}$ **(Esame del 14.11.19)**

22) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log(1+n)}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}$ **(Esame del 09.07.20)**

23) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$ **(Esame del 23.11.20)**

➽ **R.**

20) Riscriviamo il limite dato come

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{\sqrt{n^4-1}} - \frac{n^4}{\sqrt{n^4+1}} = \lim_{n\to+\infty} n^4 \frac{\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}}{\sqrt{n^4-1}\,\sqrt{n^4+1}} \\
= &\lim_{n\to+\infty} n^4 \frac{\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}}{\sqrt{n^8-1}} \frac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}} \\
= &\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+1-n^4+1}{\sqrt{n^8-1}\,[\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n^8-1}\,[\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}]} = 0
\end{aligned}$$

21) Riscriviamo il limite dato come

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}\,\sqrt{n^2-1}} \\
= &\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^4-1}} \frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}} \\
= &\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-1-n^2-1}{\sqrt{n^4-1}\,[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{n^4-1}\,[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}]} = 0
\end{aligned}$$

22) Riscriviamo il limite dato come

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n)}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n)(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1})}{(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1})} \\
= &\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n)(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1})}{n^2-1-n^2-1} = -\infty
\end{aligned}$$

23) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{2}\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

2.2.5. Limiti che coinvolgono le proprietà dei logaritmi

❒ **Esercizio 2.2.5.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

24) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(2\sqrt{n}+e^n)+\frac{1}{2^n}+\cos n}{\log n + n\arctan n}$ **(Esame del 06.05.16)**

25) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log(8+e^{3n})+2n^2}{(-1)^n\sqrt{n}+5n^2}$ **(Esame del 13.11.18)**

26) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1-\sqrt[n]{8}}{3}\right)$ **(Esame del 23.01.19)**

27) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\log(n^3+4)-\log n\right)\cos n$ **(Esame del 22.02.19)**

28) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\log(1+e^{3n})+3n^3}{(-1)^n\sqrt{n}+n^3}$ **(Esame del 23.07.19)**

29) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\sqrt{2n}}}{e^{n^2}}$ **(Esame del 24.06.20)**

R.

24) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(2\sqrt{n}+e^n)+\frac{1}{2^n}+\cos n}{\log n + n\arctan n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left[e^n\left(\frac{2\sqrt{n}}{e^n}+1\right)\right]+\frac{1}{2^n}+\cos n}{n\left[\frac{\log n}{n}+\arctan n\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log e^n + \log\left(\frac{2\sqrt{n}}{e^n}+1\right)+\frac{1}{2^n}+\cos n}{n\left[\frac{\log n}{n}+\arctan n\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + \log\left(\frac{2\sqrt{n}}{e^n}+1\right)+\frac{1}{2^n}+\cos n}{n\left[\frac{\log n}{n}+\arctan n\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[1+\frac{1}{n}\log\left(\frac{2\sqrt{n}}{e^n}+1\right)+\frac{1}{n2^n}+\frac{\cos n}{n}\right]}{n\left[\frac{\log n}{n}+\arctan n\right]} = \frac{2}{\pi}$$

dato che, dalla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{e^n} = 0$$

quindi dalla continuità della funzione logaritmo

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{2\sqrt{n}}{e^n} + 1\right) = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n} = 0 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$$

dove nel secondo caso si è dovuto usare il teorema del confronto o il teorema dei carabinieri. Infine si è usato il fatto che

$$\lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}.$$

25) Si ha, utilizzando le proprietà dei logaritmi,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log(8+e^{3n})+2n^2}{(-1)^n\sqrt{n}+5n^2} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\log\left[e^{3n}\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)\right]+2n^2}{n^2\left[\frac{(-1)^n\,n^{1/2}}{n^2}+5\right]} \\
= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left[\log\left(e^{3n}\right)+\log\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)\right]+2n^2}{n^2\left[\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}+5\right]} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left[3n+\log\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)\right]+2n^2}{n^2\left[\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}+5\right]} \\
= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left[3+\frac{\log\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)}{n}+2\right]}{n^2\left[\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}+5\right]} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)}{n}+5}{\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}+5}\,.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

- $\dfrac{8}{e^{3n}} \to 0 \;\Rightarrow\; \log\left(\dfrac{8}{e^{3n}}+1\right) \to 0$ dalla continuità del logaritmo,
- $\underbrace{\dfrac{-1}{n^{3/2}}}_{\downarrow\atop 0} \le \dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}} \le \underbrace{\dfrac{1}{n^{3/2}}}_{\downarrow\atop 0} \;\Rightarrow\; \dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}} \to 0$ dal teorema dei carabinieri.

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log(8+e^{3n})+2n^2}{(-1)^n\sqrt{n}+5n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{\frac{\log\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)}{n}+5}^{5\atop\uparrow}}{\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}+5}_{\downarrow\atop 5}} = 1\,.$$

26) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1-\sqrt[n]{8}}{3}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1-8^{1/n}}{1/n}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\log 8^{1/n}}-1}{1/n}\right).$$

Ricordiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1 \quad \text{quando } a_n \to 0\,, \tag{2.2.2}$$

quindi scriviamo, utilizzando le proprietà dei logaritmi,

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\log 8^{1/n}}-1}{1/n}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\frac{1}{n}\log 8}-1}{\frac{1}{n}\log 8}\right)\log 8\,.$$

Osserviamo che

- $\dfrac{1}{n}\log 8 \to 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{e^{\frac{1}{n}\log 8}-1}{\frac{1}{n}\log 8} \to 1$ usando il limite notevole (2.2.2) con $a_n = \frac{1}{n}\log 8$.

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1-\sqrt[n]{8}}{3}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\underbrace{\left(\frac{e^{\frac{1}{n}\log 8}-1}{\frac{1}{n}\log 8}\right)}_{\downarrow \atop 1}\log 8 = -\frac{1}{3}\log 8 = -\log\left(8^{1/3}\right) = -\log 2\,.$$

27) Si ha, utilizzando le proprietà dei logaritmi,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\log(n^3+4)-\log n\right)\cos n = \lim_{n\to+\infty}\left(\log(n^3+4)^{1/3}-\log n\right)\cos n$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\log\left(\frac{\sqrt[3]{n^3+4}}{n}\right)\cos n = \lim_{n\to+\infty}\log\left(\frac{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{4}{n^3}\right)}}{n}\right)\cos n$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\log\left(\frac{n\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^3}}}{n}\right)\cos n = \lim_{n\to+\infty}\log\left(\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^3}}\right)\cos n\,.$$

Osserviamo che

- $\dfrac{4}{n^3} \to 0 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{1+\dfrac{4}{n^3}} \to 1 \;\Rightarrow\; \log\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{4}{n^3}}\right) \to 0$ dalla continuità del logaritmo,
- $\cos n$ è una funzione limitata.

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\log(n^3+4)-\log n\right)\cos n = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\log\left(\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^3}}\right)}_{\text{infinitesima}}\underbrace{\cos n}_{\text{limitata}} = 0\,.$$

28) Si ha, utilizzando le proprietà dei logaritmi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\log(1+e^{3n})+3n^3}{(-1)^n\sqrt{n}+n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\log\left[e^{3n}\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)\right]+3n^3}{n^3\left[\frac{(-1)^n n^{1/2}}{n^3}+1\right]}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left[\log\left(e^{3n}\right)+\log\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)\right]+3n^3}{n^3\left[\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}+1\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left[3n+\log\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)\right]+3n^3}{n^3\left[\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}+1\right]}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left[3+\frac{\log\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)}{n}+3\right]}{n^3\left[\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}+1\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)}{n}+6}{\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}+1}\,.$$

Osserviamo che

- $\dfrac{1}{e^{3n}} \to 0 \;\Rightarrow\; \log\left(\dfrac{1}{e^{3n}}+1\right) \to 0$ dalla continuità del logaritmo,
- $\underbrace{\dfrac{-1}{n^{5/2}}}_{\downarrow\atop 0} \le \dfrac{(-1)^n}{n^{5/2}} \le \underbrace{\dfrac{1}{n^{5/2}}}_{\downarrow\atop 0} \;\Rightarrow\; \dfrac{(-1)^n}{n^{5/2}} \to 0$ dal teorema dei carabinieri.

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\log(1+e^{3n})+3n^3}{(-1)^n\sqrt{n}+n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{\frac{\log\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)}{n}+6}^{6\atop\uparrow}}{\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}+1}_{\downarrow\atop 1}} = 6\,.$$

29) Si può riscrivere il limite dato nel modo seguente, usando le proprietà degli esponenziali

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\sqrt{2n}}}{e^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{2n}\log n}}{e^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{2n}\log n-n^2}.$$

A questo punto, osservando che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}\log n - n^2 = \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{\sqrt{2}\log n}{n^{3/2}}-1\right) = -\infty$$

in quanto, dalla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}\log n}{n^{3/2}} = 0,$$

si conclude che il limite dato esiste e fa 0.

2.2.6. Limiti che non sono forme di indecisione

❒ **Esercizio 2.2.6.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

30) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2+1}$ **(Esame del 13.11.17)**

31) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{n^3+1}$ **(Esame del 13.11.17)**

32) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+2}}\right)^{\sqrt{n}}$ **(Esame del 11.01.21)**

33) $\lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{2n}}+1$ **(Esame del 22.06.21)**

R.

30) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} e^{(n^2+1)\log\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$$

perché

$$\lim_{n\to\infty} (n^2+1)\log\frac{1}{\sqrt{n}} = -\infty.$$

Osserviamo che la conclusione poteva essere data immediatamente sfruttando la continuità delle funzioni logaritmo ed esponenziale in quanto il limite dato si presenta nella forma $[0^\infty]$ che **non è** una forma di indecisione.

31) Analogamente all'esercizio precedente si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{n^3+1} = \lim_{n\to+\infty} e^{(n^3+1)\log\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = 0$$

perché

$$\lim_{n\to\infty} (n^3+1)\log\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = -\infty.$$

Osserviamo che la conclusione poteva essere data immediatamente sfruttando la continuità delle funzioni logaritmo ed esponenziale in quanto di nuovo il limite dato si presenta nella forma $[0^\infty]$ che **non è** una forma di indecisione.

32) Si ha
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+2}}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n}\log\frac{1}{\sqrt{n^4+2}}} = 0$$
perché
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\log\frac{1}{\sqrt{n^4+2}} = -\infty.$$
Ancora una volta si osserva che la conclusione poteva essere data immediatamente sfruttando la continuità delle funzioni logaritmo ed esponenziale in quanto di nuovo il limite dato si presenta nella forma $[0^\infty]$ che **non è** una forma di indecisione.

33) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} n^{\sqrt{2n}}+1 = \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{2n}\log n}+1 = +\infty$$
in quanto
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n}\log n = +\infty$$
Si osserva che il limite dato si presenta nella forma $[\infty^\infty]$ che **non è** una forma di indecisione.

2.2.7. Limiti che sfruttano sviluppi asintotici basati sui limiti notevoli

❒ **Esercizio 2.2.7.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

34) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sin^2\frac{n}{\sqrt{n^3+4}}\right)$ **(Esame del 25.02.16)**

35) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+n}{3\sqrt{n}+n^2\sin\frac{1}{n}}$ **(Esame del 23.02.17)**

36) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n^2+\pi)\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)$ **(Esame del 10.09.19)**

37) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+4}{n-4}\right)^{n^2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}$ **(Esame del 15.11.19)**

38) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n-3}\right)^{n^2\sin\frac{1}{n}}$ **(Esame del 15.11.19)**

39) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-4}\right)^{n^2\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ **(Esame del 23.07.20)**

40) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)+\sin(n)}{\log\left(\frac{1}{n}+1\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$ **(Esame del 09.11.20)**

41) $\lim_{n\to+\infty} n^3 \left(\sin \frac{n}{\sqrt{n^6+1}}\right)$ **(Esame del 14.12.20)**

42) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ **(Esame del 06.07.21)**

➻ **R.**

34) Ci sono diversi modi per affrontare l'esercizio. Lo strumento più utile sono gli sviluppi asintotici. Per esempio, se $n \to +\infty$ allora

$$n^3 + 4 \sim n^3 \Rightarrow \sqrt{n^3+4} \sim \sqrt{n^3} = n^{3/2}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sin^2 \frac{n}{\sqrt{n^3+4}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sin^2 \frac{n}{n^{3/2}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

A questo punto osserviamo che se $n \to +\infty$ allora

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$$

e quindi concludendo

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sin^2 \frac{n}{\sqrt{n^3+4}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{n} = +\infty$$

35) Osserviamo prima di tutto che gli sviluppi asintotici in generale non si comportano bene con la somma. Quindi per essere rigorosi, osserviamo che, per $n \to \infty$ si ha

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow n \sin \frac{1}{n} \sim 1.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + n}{3\sqrt{n} + n^2 \sin \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right]}{n\left[\frac{3}{\sqrt{n}} + n \sin\frac{1}{n}\right]} = 1,$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.$$

36) Ricordiamo innanzitutto che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad \text{quando } a_n \to 0\,, \tag{2.2.3}$$

quindi scriviamo

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2+\pi)\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)=\lim_{n\to+\infty}(n^2+\pi)\frac{\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)^3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)^3$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\pi}{(n^{4/3}+\pi)^{3/2}}\frac{\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{\pi}{n^2}\right)}{\left[n^{4/3}\left(1+\frac{\pi}{n^{4/3}}\right)\right]^{3/2}}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}}\right]^3$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{\pi}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{\pi}{n^{4/3}}\right)^{3/2}}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}}\right]^3=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{\pi}{n^2}}{\left(1+\frac{\pi}{n^{4/3}}\right)^{3/2}}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}}\right]^3.$$

Osserviamo che

- $\dfrac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\to 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}}\to 1$ usando il limite notevole (2.2.3) con $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}$.

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2+\pi)\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{\overbrace{1+\frac{\pi}{n^2}}^{\to 1}}{\left(1+\frac{\pi}{n^{4/3}}\right)^{3/2}}}_{\to 1}\underbrace{\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}}\right]^3}_{\to 1}=1\,.$$

37) Osserviamo che se $n\to\infty$ allora $\frac{1}{n}\to 0$ e dunque, dai limiti notevoli

$$n^2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\sim n^2\,\frac{1}{n}=n$$

A questo punto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+4}{n-4}\right)^{n^2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{8}{n-4}\right)^{\frac{n-4}{8}}\right]^{b_n}=e^8$$

dove abbiamo usato il limite (2.2.1) con la scelta $a_n=\frac{n-4}{8}$ e dove si ha, per quanto visto prima

$$b_n:=\frac{8}{n-4}\,n^2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\sim 8$$

38) Osserviamo che se $n \to \infty$ allora $\frac{1}{n} \to 0$ e dunque, dai limiti notevoli

$$n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim n^2 \, \frac{1}{n} = n$$

A questo punto

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+3}{n-3}\right)^{n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{6}{n-3}\right)^{\frac{n-3}{6}}\right]^{b_n} = e^6$$

dove abbiamo usato il limite (2.2.1) con la scelta $a_n = \frac{n-3}{6}$ e dove si ha, per quanto visto prima

$$b_n := \frac{6}{n-3} \, n^2 \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim 6$$

39) Osserviamo che se $n \to \infty$ allora $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ e dunque, dai limiti notevoli

$$n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim n^2 \, \frac{1}{n} = n$$

A questo punto

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-4}\right)^{n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{5}{2n-4}\right)^{\frac{2n-4}{5}}\right]^{b_n} = e^{5/2}$$

dove abbiamo usato il limite (2.2.1) con la scelta $a_n = \frac{2n-4}{5}$ e dove si ha, per quanto visto prima

$$b_n := \frac{5}{2n-4} \, n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{5}{2}$$

40) Il limite dato **non** si presenta in una forma di indecisione. Infatti

$$\log(n+1) + \sin(n) = \log(n+1)\left(1 + \frac{\sin n}{\log(n+1)}\right) \to +\infty$$

in quanto, dal teorema dei carabinieri

$$\frac{\sin n}{\log(n+1)} \to 0;$$

d'altra parte, dai limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n}+1\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\frac{1}{n}} + \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 2$$

dunque

$$\log\left(\frac{1}{n}+1\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{2}{n} \to 0^+$$

e allora complessivamente il limite dato esiste e vale $+\infty$

41) Se $n \to +\infty$ allora
$$n^6 + 1 \sim n^6 \Rightarrow \sqrt{n^6+1} \sim \sqrt{n^6} = n^3$$
da cui
$$\lim_{n\to\infty} n^3 \left(\sin \frac{n}{\sqrt{n^6+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3 \left(\sin \frac{n}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3 \left(\sin \frac{1}{n^2}\right).$$
A questo punto osserviamo che se $n \to +\infty$ allora
$$\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$
e quindi concludendo
$$\lim_{n\to\infty} n^3 \left(\sin \frac{n}{\sqrt{n^6+1}}\right) = +\infty$$
42) Osserviamo che se $n \to \infty$ allora $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ e dunque, dai limiti notevoli
$$n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim n^2 \frac{1}{n} = n$$
A questo punto
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n-3}\right)^{\frac{n-3}{4}}\right]^{b_n} = e^4$$
dove abbiamo usato il limite (2.2.1) con la scelta $a_n = \frac{n-3}{4}$ e dove si ha, per quanto visto prima
$$b_n := \frac{4}{n-3} n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim 4$$

CAPITOLO 3

Notazioni asintotiche

3.1. Esercizi proposti

3.1.1. Notazione "O-grande"

❒ **Definizione 3.1.1.** Date due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, diremo che $f(n) = O(g(n))$ se e solo se esistono due costanti $c > 0$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(n) \leq c\, g(n) \qquad \forall n \geq \bar{n}. \tag{3.1.1}$$

❒ **Esercizio 3.1.2.** *Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.*

1) $n^5 + n^2 = O(e^n)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 14.11.19)**

2) $n^6 + n \cos n = O(e^n)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 14.11.19)**

3) $n^4 + \arctan n\, \cos n = O(2^n)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 18.02.20)**

4) $n^5 + n^2 \cos n = O(2^n)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 09.07.20)**

5) $n^3 + \sqrt{n} \log n = O(e^n)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 23.07.20)**

6) $n^4 + n \log(n^2 + 5) - \cos n = O(2^n)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 09.11.20)**

7) $\arctan(n) + 2 + (-1)^n + \sqrt[3]{n^2} = O(2^n)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 14.12.20)**

8) $3^n + 4n^3 = O(n!)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 01.02.21)**
9) $\log(n) + n + n^2 = O(2^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 08.06.21)**
10) $n^4 + \sqrt{n}\log n^2 = O(2^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 06.07.21)**

R.

1) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + n^2}{e^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^5}{e^n} \to 0 \qquad\qquad \frac{n^2}{e^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^5 + n^2}{e^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ottiene

$$n^5 + n^2 \leq e^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

2) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^6 + n\cos n}{e^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^6}{e^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{n\cos n}{e^n} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^6 + n\cos n}{e^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$n^6 + n\cos n \leq e^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

3) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + \arctan n \cos n}{2^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^4}{2^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{\arctan n \cos n}{2^n} \to 0$$

perché è il prodotto di una quantità limitata per una infinitesima. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^4 + \arctan n \cos n}{2^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$

$$n^4 + \arctan n \cos n \leq 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

4) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + n^2 \cos n}{2^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^5}{2^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{n^2 \cos n}{2^n} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^5 + n^2 \cos n}{2^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$n^5 + n^2 \cos n \leq 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

5) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+\sqrt{n}\log n}{e^n} = 0$$
infatti
$$\frac{n^3}{e^n} \to 0 \qquad\qquad \frac{\sqrt{n}\log n}{e^n} \to 0$$
dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n}:\ \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^3+\sqrt{n}\log n}{e^n} < \varepsilon.$$
Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha
$$n^3+\sqrt{n}\log n \leq\ e^n$$
quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

6) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+n\log(n^2+5)-\cos n}{2^n} = 0$$
infatti
$$\frac{n^4}{2^n} \to 0$$
dalla gerarchia degli infiniti; inoltre, essendo $\log(n^2+5) \sim \log(n^2) = 2\log n$ per $n \to +\infty$, anche
$$\frac{n\log(n^2+5)}{2^n} \to 0$$
dalla gerarchia degli infiniti. Infine
$$\frac{\cos n}{2^n} \to 0$$
dal teorema dei carabinieri. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n}:\ \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^4+n\log(n^2+5)-\cos n}{2^n} < \varepsilon.$$
Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha
$$n^4+n\log(n^2+5)-\cos n \leq\ 2^n$$
quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

7) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(n)+2+(-1)^n+\sqrt[3]{n^2}}{2^n} = 0$$

infatti
$$\frac{\arctan(n)+2+(-1)^n}{2^n} \to 0$$
perché risulta essere il prodotto di una quantità limitata $(\arctan(n)+2+(-1)^n)$ per una quantità infinitesima $(\frac{1}{2^n})$; inoltre
$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2^n} \to 0$$
dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}: \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{\arctan(n)+2+(-1)^n+\sqrt[3]{n^2}}{2^n} < \varepsilon.$$
Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha
$$\arctan(n)+2+(-1)^n+\sqrt[3]{n^2} \leq \ 2^n$$
quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

8) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+4n^3}{n!} = 0$$
infatti
$$\frac{3^n}{n!} \to 0 \qquad \frac{4n^3}{n!} \to 0$$
dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}: \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{3^n+4n^3}{n!} < \varepsilon.$$
Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha
$$3^n + 4n^3 \leq \ n!$$
quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

9) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)+n+n^2}{2^n} = 0$$
infatti
$$\frac{\log(n)}{2^n} \to 0 \qquad \frac{n}{2^n} \to 0 \qquad \frac{n^2}{2^n} \to 0$$
dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}: \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{\log(n)+n+n^2}{2^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$\log(n) + n + n^2 \leq 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

10) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + \sqrt{n}\log n^2}{2^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^4}{2^n} \to 0 \qquad \frac{\sqrt{n}\log n^2}{2^n} = \frac{2\sqrt{n}\log(n)}{2^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^4 + \sqrt{n}\log n^2}{2^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$n^4 + \sqrt{n}\log n^2 \leq 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

3.1.2. Notazione "Ω"

❒ **Definizione 3.1.3.** Date due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, diremo che $f(n) = \Omega(g(n))$ se e solo se esistono due costanti $c > 0$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(n) \geq c\, g(n) \qquad \forall n \geq \bar{n}. \tag{3.1.2}$$

❒ **Esercizio 3.1.4.** *Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.*

11) $n^4 + n\sin n = \Omega(2^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 15.11.19)**
12) $n^6 + n\cos n = \Omega(e^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 15.11.19)**
13) $\arctan n + \sqrt[3]{n^2} = \Omega(n^3)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 07.01.20)**
14) $n^3 + (-1)^n\sqrt{n} = \Omega(e^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 21.01.20)**
15) $\cos n + \sqrt[3]{n^5} = \Omega(n^4)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 08.09.20)**

16)$n\sqrt{n} + 5^n + n^{3/2} = \Omega(e^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 23.11.20)**
17)$n\sqrt{n} + e^n + 4n^3 = \Omega(2^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 23.11.20)**
18)$n + 4^n + 2e^n = \Omega(3^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 23.11.20)**
19)$e^{-n} + \sqrt[3]{n^4} = \Omega(n^{3/2})$	$n \to +\infty$	**(Esame del 11.01.21)**
20)$3^n + e^{-n} = \Omega(2^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 11.01.21)**
21)$4n^{3/2} + 7\sqrt{n+2} = \Omega(n^4)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 08.06.21)**
22)$n^4 + n\cos n = \Omega(4^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 22.06.21)**

R.
11) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + n\sin n}{2^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^4}{2^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{n\sin n}{2^n} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^4 + n\sin n}{2^n} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.
12) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^6 + n\cos n}{e^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^6}{e^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{n\cos n}{e^n} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^6 + n \cos n}{e^n} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

13) Si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\arctan n + \sqrt[3]{n^2}}{n^3} = 0$$

infatti

$$\frac{\arctan n}{n^3} \to 0$$

perché è il prodotto di una quantità limitata per una infinitesima, mentre

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n^3} = \frac{1}{n^{7/3}} \to 0.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{\arctan n + \sqrt[3]{n^2}}{n^3} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

14) Si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + (-1)^n \sqrt{n}}{e^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^3}{e^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{(-1)^n \sqrt{n}}{e^n} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^3 + (-1)^n \sqrt{n}}{e^n} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto anche questa affermazione risulta falsa.

15) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n + \sqrt[3]{n^5}}{n^4} = 0$$

infatti

$$\frac{\cos n}{n^4} \to 0$$

perché è il prodotto di una quantità limitata per una infinitesima, mentre

$$\frac{\sqrt[3]{n^5}}{n^4} = \frac{1}{n^{7/3}} \to 0.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{\cos n + \sqrt[3]{n^5}}{n^4} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

16) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n} + 5^n + n^{3/2}}{e^n} = +\infty$$

infatti

$$\frac{n\sqrt{n}}{e^n} \to 0 \qquad \frac{5^n}{e^n} \to +\infty \qquad \frac{n^{3/2}}{e^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n\sqrt{n} + 5^n + n^{3/2}}{e^n} > M.$$

La Definizione (3.1.2) risulta pertanto verificata con $c = M$ e $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite.

17) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n} + e^n + 4n^3}{2^n} = +\infty$$

infatti

$$\frac{n\sqrt{n}}{2^n} \to 0 \qquad \frac{4n^3}{2^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti ma

$$\frac{e^n}{2^n} = \left(\frac{e}{2}\right)^n \to +\infty$$

perché $e > 2$. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n\sqrt{n} + e^n + 4n^3}{2^n} > M.$$

Scegliendo $M = 1$ si ha

$$n\sqrt{n} + e^n + 4n^3 \geq 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.2) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

18) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + 4^n + 2e^n}{3^n} = +\infty$$

infatti

$$\frac{n}{3^n} \to 0 \qquad \frac{2e^n}{3^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti, in quanto $e < 3$, ma

$$\frac{4^n}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \to +\infty.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n + 4^n + 2e^n}{3^n} > M.$$

Scegliendo $M = 1$ si ha

$$n + 4^n + 2e^n \geq 3^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.2) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

19) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n} + \sqrt[3]{n^4}}{n^{3/2}} = 0$$

infatti

$$\frac{e^{-n}}{n^{3/2}} \to 0$$

perché $e^{-n} \to 0$ (non è nemmeno un infinito) mentre

$$\frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^{3/2}} = \frac{n^{4/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{1/6}} \to 0$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{e^{-n} + \sqrt[3]{n^4}}{n^{3/2}} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, ancora una volta non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

20) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + e^{-n}}{2^n} = +\infty$$

infatti

$$\frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$$

mentre

$$\frac{e^{-n}}{2^n} \to 0$$

perché $e^{-n} \to 0$ (non è nemmeno un infinito). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{3^n + e^{-n}}{2^n} > M.$$

Scegliendo $M = 1$ si ha

$$3^n + e^{-n} \geq 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.2) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

21) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^{3/2} + 7\sqrt{n+2}}{n^4} = 0$$

infatti

$$\frac{4n^{3/2}}{n^4} = \frac{4}{n^{5/2}} \to 0$$

e d'altra parte

$$\frac{7\sqrt{n+2}}{n^4} \sim \frac{7\sqrt{n}}{n^4} \to 0.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{4n^{3/2} + 7\sqrt{n+2}}{n^4} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

22) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + n\cos n}{4^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^4}{4^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{n\cos n}{4^n} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^4 + n\cos n}{4^n} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

16) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n + \sqrt[3]{n^5}}{n^4} = 0$$

infatti

$$\frac{\cos n}{n^4} \to 0$$

perché è il prodotto di una quantità limitata per una infinitesima, mentre

$$\frac{\sqrt[3]{n^5}}{n^4} = \frac{1}{n^{7/3}} \to 0.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{\cos n + \sqrt[3]{n^5}}{n^4} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

3.1.3. Notazione "Θ"

❒ **Definizione 3.1.5.** Date due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, diremo che $f(n) = \Theta(g(n))$ se $f(n) = O(g(n))$ e contemporaneamente $f(n) = \Omega(g(n))$. Questo equivale a chiedere che esistano costanti $c_1 > 0, c_2 > 0$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$c_2\, g(n) \leq \ f(n) \leq \ c_1\, g(n) \qquad \forall n \geq \bar{n}. \tag{3.1.3}$$

❒ **Esercizio 3.1.6.** *Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.*

23) $e^n + 6n^7 = \Theta(n!)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 07.01.20)**

24) $3^n + 4n^3 = \Theta(n!)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 08.09.20)**

25) $\cos n + n^2 + e^{-n^2} = \Theta(n^2)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 23.11.20)**

26) $\sin n + n^4 + e^{-n} = \Theta(n^4)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 23.11.20)**

27) $\sin n + n^2 + e^{-n^2} = \Theta(n^3)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 14.12.20)**

28) $n \arctan(n) + \log(n^3 + 5n + 2) = \Theta(n)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 11.01.21)**

29) $\arctan(n) + (-1)^n + 2n^4 = \Theta(n^4)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 11.01.21)**

➼ **R.**

23) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n + 6n^7}{n!} = 0$$

infatti dalla gerarchia degli infiniti si ha

$$\frac{e^n}{n!} \to 0 \qquad \frac{6n^7}{n!} \to 0.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad -\varepsilon < \frac{e^n + 6n^7}{n!} < \varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c_2 > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

24) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 4n^3}{n!} = 0$$

infatti dalla gerarchia degli infiniti si ha

$$\frac{3^n}{n!} \to 0 \qquad \frac{4n^3}{n!} \to 0.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad -\varepsilon < \frac{3^n + 4n^3}{n!} < \varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c_2 > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

25) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n + n^2 + e^{-n^2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} + \frac{n^2}{n^2} + \frac{e^{-n^2}}{n^2} = 1$$

infatti

$$\frac{\cos n}{n^2} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri; d'altra parte

$$\frac{e^{-n^2}}{n^2} \to 0$$

perché $e^{-n^2} \to 0$. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} :\ \forall n \geq \bar{n} \qquad 1 - \varepsilon < \frac{\cos n + n^2 + e^{-n^2}}{n^2} < 1 + \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1/2$ si ha

$$\frac{1}{2} < \frac{\cos n + n^2 + e^{-n^2}}{n^2} < \frac{3}{2}$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.3) è verificata con $c_2 = 1/2$, $c_1 = 3/2$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

26) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n + n^4 + e^{-n}}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^4} + \frac{n^4}{n^4} + \frac{e^{-n}}{n^4} = 1$$

infatti

$$\frac{\sin n}{n^4} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri; d'altra parte

$$\frac{e^{-n}}{n^4} \to 0$$

perché $e^{-n} \to 0$. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} :\ \forall n \geq \bar{n} \qquad 1 - \varepsilon < \frac{\sin n + n^4 + e^{-n}}{n^2} < 1 + \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1/2$ si ha

$$\frac{1}{2} < \frac{\sin n + n^4 + e^{-n}}{n^4} < \frac{3}{2}$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.3) è verificata con $c_2 = 1/2$, $c_1 = 3/2$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

27) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n + n^2 + e^{-n^2}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} + \frac{e^{-n^2}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^3} + \frac{1}{n} + \frac{e^{-n^2}}{n^3} = 0$$

infatti

$$\frac{\sin n}{n^4} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri; d'altra parte

$$\frac{e^{-n}}{n^4} \to 0$$

perché $e^{-n} \to 0$. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad -\varepsilon < \frac{\sin n + n^2 + e^{-n^2}}{n^3} < \varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c_2 > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.3), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

28) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\arctan(n) + \log(n^3 + 5n + 2)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\arctan(n)}{n} + \frac{\log(n^3 + 5n + 2)}{n^4} = \frac{\pi}{2}$$

infatti, se $n \to \infty$

$$\arctan(n) \to \frac{\pi}{2}$$

mentre

$$\frac{\log(n^3 + 5n + 2)}{n^4} \sim \frac{\log(n^3)}{n^4} = 3\frac{\log(n)}{n^4} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{n\arctan(n) + \log(n^3 + 5n + 2)}{n} < \frac{\pi}{2} + \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$0 < \frac{\pi}{2} - 1 < \frac{n\arctan(n) + \log(n^3 + 5n + 2)}{n} < \frac{\pi}{2} + 1$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.3) è verificata con $c_2 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, $c_1 = \frac{\pi}{2} + 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

29) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\arctan(n) + (-1)^n + 2n^4}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(n)}{n} + \frac{(-1)^n}{n^4} + 2 = 2$$

infatti, se $n \to \infty$
$$\frac{\arctan(n)}{n} \to 0$$
perché prodotto di una quantità limitata per una infinitesima; inoltre
$$\frac{(-1)^n}{n^4} \to 0$$
dal teorema dei carabinieri. Pertanto, dalla definizione di limite risulta che
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad 2 - \varepsilon < \frac{n \arctan(n) + (-1)^n + 2n^4}{n^4} < 2 + \varepsilon.$$
Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha
$$1 < \frac{n \arctan(n) + (-1)^n + 2n^4}{n^4} < 3$$
quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.3) è verificata con $c_2 = 1$, $c_1 = 3$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

CAPITOLO 4

Esercizi riguardanti serie numeriche

4.1. Serie riconducibili a serie geometriche

❒ **Esercizio 4.1.1.** **(Esame del 15.12.15)** *Sia s la somma della serie convergente*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Determinare quanto vale $3s$.

➼ **R.** Data una serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ si sa che

$$s=\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$$

(è importante che la somma parta da $n=0$). Nel nostro caso $q=-1/3$ quindi $s=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$. Allora la somma richiesta $3s$ vale $\frac{9}{4}$.

❒ **Esercizio 4.1.2.** **(Esame del 01.02.16)** *Determinare per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ la seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3-\alpha)^n$$

converge. Per tali valori di α calcolarne la somma.

➼ **R.** Si tratta di una serie geometrica che converge quando la ragione in valore assoluto è minore di 1. Si tratta dunque di risolvere la seguente disequazione in α

$$|3-\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1 < 3-\alpha < 1 \Leftrightarrow -4 < -\alpha < -2 \Leftrightarrow 2 < \alpha < 4.$$

Per tali valori di α possiamo calcolare la somma della serie ottenendo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3-\alpha)^n = \frac{1}{1-(3-\alpha)} = \frac{1}{\alpha-2}$$

❒ **Esercizio 4.1.3. (Esame del 20.12.16)** *Calcolare (in funzione di $x>0$)*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$$

(attenzione! La somma parte da $n=2$).

➼ **R.** Si tratta di una serie geometrica di ragione

$$q = \frac{1}{1+x} < 1$$

quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n - \underbrace{1}_{n=0} - \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{n=1}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} - 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)^2 - x(1+x) - x}{x(1+x)} = \frac{1}{x(1+x)}.$$

❒ **Esercizio 4.1.4 (Esame del 09.11.20).** *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3\pi)^{-n}$$

➼ **R.**
Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3\pi)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3\pi}\right)^n$$

Si tratta dunque di una serie geometrica di ragione $q = -\frac{1}{3\pi}$. Visto che la somma parte da 1, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3\pi)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3\pi}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{3\pi}} - 1 = -\frac{1}{3\pi+1}$$

4.2. Sulla condizione necessaria

❒ **Esercizio 4.2.1.** **(Esame del 18.12.17)** *Posto*

$$a_n := \left(1 + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Stabilire poi (motivando la risposta) come si comporta la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

R. Ci sono diversi modi di risolvere l'esercizio in maniera equivalente. Per esempio

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2 \log\left(1+\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}.$$

Lavoriamo sull'esponente, poi passeremo al limite sfruttando la continuità della funzione esponenziale. Si ha che per $n \to \infty$

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \log\left(1 + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \log\left(1 + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

quindi anche

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{n^2 \log\left(1+\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = +\infty.$$

D'altra parte, la serie data è a termini positivi, ma dal passo precedente, non risulta verificata la condizione necessaria, quindi la serie data diverge.

❒ **Esercizio 4.2.2. (Esame del 11.01.18)** *Sia data la successione*

$$a_n = \log(2^n + \sqrt{4^n + n^4})$$

1) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

2) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

R.

1) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \log(2^n + \sqrt{4^n + n^4}) = \lim_{n\to\infty} \log\left(2^n\left(1+\sqrt{1+\frac{n^4}{2^n}}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\log 2 + \log\left(1+\sqrt{1+\frac{n^4}{2^n}}\right) = +\infty$$

in quanto, dalla gerarchia degli infiniti, per $n \to \infty$

$$\frac{n^4}{2^n} \to 0$$

e dunque dalla continuità della funzione logaritmo

$$\log\left(1+\sqrt{1+\frac{n^4}{2^n}}\right) \to \log 2.$$

2) Dai conti fatti in precedenza, osserviamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge dalla condizione necessaria.

❒ **Esercizio 4.2.3 (Esame del 23.01.19).** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1+n^{-1/3}\right).$$

R. La serie è a termini di segno alternato. Osserviamo tuttavia che

$$(-1)^n \left(1+n^{-1/3}\right) = (-1)^n \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \to \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Dunque la serie data non converge perché non è verificata la condizione necessaria per la convergenza.

❒ **Esercizio 4.2.4** (**Esame del 22.02.19**). *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\pi}\left(\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\right).$$

➻ **R.** Osserviamo che, utilizzando il limite notevole del seno,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\pi}\left(\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty} n^{\pi}\left(\frac{1}{n}+\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty} n^{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(1+\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)$$
$$=\underbrace{n^{\pi-1}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\underbrace{\left(1+\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)}_{\substack{\downarrow\\2}}=+\infty\,.$$

Dunque la serie data non converge perché non è verificata la condizione necessaria per la convergenza.

❒ **Esercizio 4.2.5** (**Esame del 18.02.20**). *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+2^{-n})$$

➻ **R.** La serie è a termini di segno alternato. Osserviamo tuttavia che

$$(-1)^n\left(1+2^{-n}\right)\to\begin{cases}1 & \text{se } n \text{ è pari,}\\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari.}\end{cases}$$

Dunque la serie data non converge perché non è verificata la condizione necessaria per la convergenza.

❒ **Esercizio 4.2.6** (**Esame del 11.01.21**). *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^2+3n+2}$$

➻ **R.**

Calcoliamo
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+3n+2} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log(n^2+3n+2)}.$$
A questo punto, essendo per $n \to +\infty$
$$\log(n^2+3n+2) \sim \log(n^2) = 2\log n,$$
dalla gerarchia degli infiniti si ha che
$$\frac{1}{n}\log(n^2+3n+2) \sim \frac{2\log n}{n^2} \to 0$$
e dalla continuità della funzione esponenziale si ottiene che
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+3n+2} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log(n^2+3n+2)} = 1.$$
Pertanto la serie data non converge perché non è verificata la condizione necessaria per la convergenza.

4.3. Serie a termini non negativi: criterio del confronto

❒ **Esercizio 4.3.1.** **(Esame del 29.06.16)** *Studiare la convergenza della seguente serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n| + e^{-n}}{n^{17/5}}.$$

R. Si tratta innanzitutto di una serie a termini positivi. Possiamo utilizzare il criterio del confronto osservando che
$$|\sin n| + e^{-n} \leq 2$$
quindi la serie di partenza può essere maggiorata con la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{17/5}}$$
che è la serie armonica generalizzata di esponente $17/5 > 1$ pertanto converge. Allora anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.3.2.** **(Esame del 12.09.17)** *Studiare la convergenza della serie numerica*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right| \sin\frac{1}{n^3}$$

➭ **R.** Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di provare ad applicare il criterio del confronto. Tenendo conto del fatto che $\sin x \leq x$ per $x > 0$ e che $\cos z \leq 1$ per ogni argomento z, si ottiene

$$\left|\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right| \sin\frac{1}{n^3} \leq \sin\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

e pertanto dal criterio del confronto, la serie data viene maggiorata dalla serie armonica generalizzata di esponente 3 che converge e pertanto anche la serie di partenza converge.

4.4. Serie a termini non negativi: criterio del confronto asintotico

❒ **Esercizio 4.4.1. (Esame del 19.09.16)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{n^{\pi+e}}.$$

➭ **R.** Si tratta innanzitutto di una serie a termini positivi. Possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico. Si ha che $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$ quindi siccome $n \to \infty$ allora $\frac{1}{n} \to 0$ e pertanto

$$\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Allora la serie data si comporta, per il criterio del confronto asintotico, come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi+e+1/3}}$$

che è la serie armonica generalizzata di esponente $\pi + e + 1/3 > 1$ pertanto converge. Allora anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.4.2. (Esame del 03.02.17)** *Posto*

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{n}$$

1) si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

2) Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

R. 1) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{n} \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2-n^2-1}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = 0$$

2) Dai conti precedenti si ha che

$$a_n \sim \frac{1}{2n^2}$$

quindi essendo $a_n \geq 0$, posso applicare il criterio del confronto asintotico per dedurre che la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha > 1$ quindi converge.

❒ **Esercizio 4.4.3. (Esame del 23.02.17)** *Si studi il comportamento della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{n}\left(\cos\frac{1}{n^2}-1\right)$$

R. Si tratta di una serie sempre a termini negativi, quindi può essere trattata con i metodi che si usando per le serie a termini non negativi, in particolare possiamo usare il criterio del confronto asintotico.

Dai limiti notevoli si ha che

$$\cos z \sim 1-\frac{z^2}{2} \qquad z\to 0$$

quindi essendo $n\to\infty$ si ha che $1/n \to 0^+$ e pertanto si può dire che

$$\cos\frac{1}{n^2} \sim 1-\frac{1}{2n^4}.$$

Pertanto, dal criterio del confronto asintotico, si ha che la serie data si comporta come (nel senso che ha lo stesso carattere) la seguente serie numerica

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{n}\frac{1}{2n^4} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

che converge (serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1). Quindi dal criterio del confronto asintotico, anche la serie data converge.

❒ **Esercizio 4.4.4.** **(Esame del 13.11.17)** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^{5/3}(\log n + 3n)}.$$

Dire se tale serie si comporta come la seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}\right)2^{\sin n}}{n^{5/3}(\log n + 3n)}$$

motivando la risposta.

R. si tratta di una serie a termini positivi, quindi ad esempio possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Per $\boxed{n \to \infty}$ si ha

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^{5/3}(\log n + 3n)} \sim \frac{n}{n^{5/3}\,3n} = \frac{1}{3n^{5/3}}$$

perché per $\boxed{n \to \infty}$

$$\sqrt{n^2+1} \sim n \qquad \log n + 3n \sim 3n,$$

quindi la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $5/3 > 1$ e pertanto converge.

Per quanto riguarda la seconda serie, osserviamo che

$$\frac{1}{2} \leq 2^{\sin n} \leq 2,$$

quindi anche la seconda serie è a termini positivi. A questo punto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}\right)2^{\sin n}}{n^{5/3}(\log n + 3n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}\right)2}{n^{5/3}(\log n + 3n)}$$

e la serie a secondo membro è un multiplo della serie di partenza, che converge dal punto precedente. Allora anche la seconda serie converge per il criterio del confronto.

Osserviamo che la condizione necessaria non avrebbe dato informazioni utili: infatti, posto

$$a_n := \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^{5/3}(\log n + 3n)},$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

dai calcoli precedenti.

❐ **Esercizio 4.4.5.** **(Esame del 11.01.18)** *Sia data la successione*

$$b_n = \frac{\log(2^n + \sqrt{4^n + n^4})}{n^2}.$$

1) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} b_n.$$

2) Studiare il comportamento delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

R.

1) Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \log(2^n + \sqrt{4^n + n^4}) &= \lim_{n\to\infty} \log\left(2^n\left(1 + \sqrt{1 + \frac{n^4}{2^n}}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\log 2 + \log\left(1 + \sqrt{1 + \frac{n^4}{2^n}}\right) = +\infty\end{aligned}$$

in quanto, dalla gerarchia degli infiniti, per $n \to \infty$

$$\frac{n^4}{2^n} \to 0$$

e dunque dalla continuità della funzione logaritmo

$$\log\left(1 + \sqrt{1 + \frac{n^4}{2^n}}\right) \to \log 2.$$

A questo punto

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

2) Si tratta di una serie a termini positivi. Si osserva che $b_n \sim \frac{\log 2}{n}$ quindi, dal criterio del confronto asintotico, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ si comporta come la serie armonica e pertanto diverge.

❒ **Esercizio 4.4.6. (Esame del 10.07.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right)$$

➽ **R.**

La serie data è a termini positivi, proviamo ad applicare il criterio del confronto asintotico. Si ha per $n \to \infty$ che $\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \to 0$ e dunque, applicando i limiti notevoli

$$\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right) \sim \left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)^2 = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

La serie data allora si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$ e pertanto converge dal criterio del confronto asintotico.

❒ **Esercizio 4.4.7 (Esame del 13.11.18).** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin^3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right).$$

➽ **R.** Siccome $0 < \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \leq 1 < \pi$ allora sicuramente $\sin\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right) > 0$, perciò la serie è a termini positivi. Osserviamo poi che se $n \to +\infty$ allora $\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \to 0$, quindi dai limiti notevoli si ha

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}.$$

Pertanto

$$n \sin^3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right) \sim n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right)^3 = n\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)^3 = n \cdot \frac{1}{n^{9/4}} = \frac{1}{n^{5/4}}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza si comporta come la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/4}},$$

che converge avendo esponente $\frac{5}{4} > 1$.

❒ **Esercizio 4.4.8** (**Esame del 10.04.19**). *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)}{n^{4+\pi}} .$$

R. Siccome $1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}} > 1$ allora sicuramente $\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) > 0$, perciò la serie è a termini positivi. Osserviamo poi che se $n \to +\infty$ allora $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \to 0$, quindi dai limiti notevoli si ha

$$\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n}} .$$

Pertanto

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)}{n^{4+\pi}} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}{n^{4+\pi}} = \frac{1}{n^{1/4}\cdot n^{4+\pi}} = \frac{1}{n^{17/4+\pi}} .$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza si comporta come la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{17/4+\pi}} ,$$

che converge avendo esponente $\frac{17}{4}+\pi > 1$.

❒ **Esercizio 4.4.9** (**Esame del 05.06.19**). *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{4n}{\pi+4n^3}\right) .$$

R. Siccome $0 \le \frac{4n}{\pi+4n^3} < 1 < \pi$ (poiché il denominatore è sempre maggiore del numeratore) allora sicuramente $\sin\left(\frac{4n}{\pi+4n^3}\right) \ge 0$, perciò la serie è a termini non negativi. Inoltre, siccome il primo termine è nullo (e solo lui), possiamo considerare direttamente la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{4n}{\pi+4n^3}\right) .$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{\pi+4n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{4n^3\left(\frac{\pi}{n^3}+1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2 \underbrace{\left(\frac{\pi}{n^3}+1\right)}_{\downarrow \atop 1}} = 0,$$

quindi dai limiti notevoli si ha

$$\sin\left(\frac{4n}{\pi+4n^3}\right) \sim \frac{4n}{\pi+4n^3} = \frac{1}{n^2\left(\frac{\pi}{n^3}+1\right)} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza si comporta come la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

che converge avendo esponente $2 > 1$.

❒ **Esercizio 4.4.10** **(Esame del 14.11.19).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{2n+5}{\sqrt[3]{n^5-\log n}}\right)$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Se $n \to +\infty$ allora, usando anche la gerarchia degli infiniti

$$\frac{2n+5}{\sqrt[3]{n^5-\log n}} \sim \frac{2n}{n^{5/3}} = \frac{2}{n^{2/3}} \to 0$$

quindi possiamo usare il confronto asintotico $\sin z \sim z$ quando $z \to 0$ ottenendo

$$\sin^2\left(\frac{2n+5}{\sqrt[3]{n^5-\log n}}\right) \sim \left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)^2 = \frac{4}{n^{4/3}}$$

In conclusione, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta (a meno di una costante) come la serie armonica generalizzata di esponente $4/3 > 1$ e quindi converge.

❒ **Esercizio 4.4.11** **(Esame del 14.11.19).**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3\left(\frac{2\sqrt{n}+5}{\sqrt[3]{n^6-\log n}}\right)$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Se $n \to +\infty$ allora, usando anche la gerarchia degli infiniti

$$\frac{2\sqrt{n}+5}{\sqrt[3]{n^6-\log n}} \sim \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^{3/2}} \to 0$$

quindi possiamo usare il confronto asintotico $\sin z \sim z$ quando $z \to 0$ ottenendo

$$\sin^3\left(\frac{2\sqrt{n}+5}{\sqrt[3]{n^6-\log n}}\right) \sim \left(\frac{2}{n^{3/2}}\right)^3 = \frac{8}{n^{27/8}}$$

In conclusione, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta (a meno di una costante) come la serie armonica generalizzata di esponente $27/8 > 1$ e quindi converge.

❒ **Esercizio 4.4.12** **(Esame del 09.07.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4-\sqrt{n}}}\right)$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Se $n \to +\infty$ allora, usando anche la gerarchia degli infiniti

$$\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4-\sqrt{n}}} \sim \frac{n}{n^{4/3}} = \frac{1}{n^{1/3}} \to 0$$

quindi possiamo usare il confronto asintotico $\sin z \sim z$ quando $z \to 0$ ottenendo

$$\sin^2\left(\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4-\sqrt{n}}}\right) \sim \left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)^2 = \frac{1}{n^{2/3}}$$

In conclusione, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta (a meno di una costante) come la serie armonica generalizzata di esponente $2/3 < 1$ e quindi diverge.

❒ **Esercizio 4.4.13** **(Esame del 23.11.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^{5/2}+e^{-n^2}}$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n \to 0$

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

D'altra parte, per $n \to +\infty$, si ha anche

$$n^{5/2} + e^{-n^2} \sim n^{5/2}$$

in quanto $e^{-n^2} \to 0$; quindi globalmente

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^{5/2}+e^{-n^2}} \sim \frac{1}{n^{5/2+2}} = \frac{1}{n^{9/2}}.$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $9/2 > 1$ che converge.

❒ **Esercizio 4.4.14** **(Esame del 23.11.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n^2}-1}{n\sqrt{n}+\sin^2(n^2)}$$

R.
Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n^2 \to 0$

$$e^{1/n^2}-1 \sim \frac{1}{n^2}.$$

D'altra parte, per $n \to +\infty$, si ha anche

$$n\sqrt{n}+\sin^2(n^2) \sim n\sqrt{n} = n^{3/2}$$

in quanto $\sin^2(n^2)$ è una quantità limitata; quindi globalmente

$$\frac{e^{1/n^2}-1}{n\sqrt{n}+\sin^2(n^2)} \sim \frac{1}{n^{3/2+2}} = \frac{1}{n^{7/2}}.$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $7/2 > 1$ che converge.

❒ **Esercizio 4.4.15** **(Esame del 23.11.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3+\arctan(n^2)}$$

R.
Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n^2 \to 0$

$$\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

D'altra parte, per $n \to +\infty$, si ha anche

$$n^3 + \arctan(n^2) \sim n^3$$

in quanto $\arctan(n^2)$ è una quantità limitata; quindi globalmente

$$\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^3 + \arctan(n^2)} \sim \frac{1}{n^5}.$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $5 > 1$ che converge.

❐ **Esercizio 4.4.16** **(Esame del 01.02.21).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\log\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)}$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $2/n^2 \to 0$

$$\log\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \sim \frac{2}{n^2},$$

quindi, dalla continuità della funzione logaritmo

$$\sqrt{\log\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)} \sim \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta, a meno di una costante, come la serie armonica che diverge.

❐ **Esercizio 4.4.17** **(Esame del 22.02.21).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n\sqrt{n}}$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n \to 0$

$$e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n},$$

e pertanto

$$\frac{e^{1/n}-1}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{5/2}}$$

quindi, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $5/2 > 1$ e pertanto converge.

4.5. Serie a termini non negativi: criterio del rapporto

❒ **Esercizio 4.5.1.** **(Esame del 12.01.16)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$$

➻ **R.**
Per questa serie utilizziamo il criterio del rapporto. Posto

$$a_n = \frac{n!3^n}{n^n}$$

andiamo a studiare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!3^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!\,3\,3^n\,n^n}{(n+1)\,(n+1)^n\,n!\,3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1$$

quindi dal criterio del rapporto la serie data diverge.

❒ **Esercizio 4.5.2.** **(Esame del 19.07.16)** *Data la successione* $a_n = \dfrac{3^n}{n!+(n+1)!}$, *determinare quanto vale* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. *Studiare poi la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

➻ **R.** Si vede immediatamente che a_n è a termini positivi. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!+(n+2)!}\,\frac{n!+(n+1)!}{3^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n![1+n+1]}{(n+1)![1+n+2]} = \frac{3(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 0.\end{aligned}$$

A questo punto, dal criterio del rapporto, essendo $0 < 1$ si ha che la serie data converge.

❐ **Esercizio 4.5.3.** **(Esame del 15.02.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{2^{\sqrt{n}}(n+3)!}$$

➻ **R.**
Causa presenza del fattoriale, proviamo ad usare il criterio del rapporto (si può usare in quanto la serie è a termini positivi). Poniamo
$$a_n := \frac{n^{n+1}}{2^{\sqrt{n}}(n+3)!}.$$
Andiamo a calcolare
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2}\,2^{\sqrt{n}}\,(n+3)!}{2^{\sqrt{n+1}}\,(n+4)!\,n^{n+1}} = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{1}{n+4}\,\frac{1}{2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}.$$
Osserviamo che
$$2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 2^{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}} = e^{\frac{\log 2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}} \to 1$$
quindi globalmente, sfruttando il limite notevole $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ si ottiene
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to e > 1,$$
pertanto la serie data diverge.

❐ **Esercizio 4.5.4.** **(Esame del 12.06.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n+1}$$

➻ **R.**
Si tratta di una serie a termini positivi. Proviamo a usare il criterio del rapporto. Osserviamo prima di tutto che
$$a_n := \frac{(n!)^2}{n^n+1} \sim b_n := \frac{(n!)^2}{n^n}$$
quindi applichiamo il criterio del rapporto alla serie di termine generale b_n. Si ha
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to +\infty$$

in quanto $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 1/e$, quindi dal criterio del rapporto la serie data diverge.

❒ **Esercizio 4.5.5. (Esame del 26.06.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (2n)!}{n^{2n}}$$

➠ **R.**

Proviamo ad applicare il criterio del rapporto, essendo una serie a termini positivi. Posto

$$a_n = \frac{4^n (2n)!}{n^{2n}},$$

proviamo a calcolare

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}\,(2n+2)!}{(n+1)^{2(n+1)}} \frac{n^{2n}}{4^n\,(2n!)} = 4\,(2n+2)\,(2n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \frac{1}{(n+1)^2} \to \frac{16}{e^2} > 1$$

quindi la serie data diverge, dal criterio del rapporto.

❒ **Esercizio 4.5.6. (Esame del 10.07.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n-1)^n}$$

➠ **R.**

Proviamo ad applicare il criterio del rapporto, essendo la serie data a termini positivi. Posto

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!(2n-1)^n},$$

proviamo a calcolare

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+1)^{n+1}} \frac{(2n-1)^n\,n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n \frac{1}{2n+1} \to \frac{2}{e} < 1$$

avendo sfruttato il limite notevole

$$\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n = \left[\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{-\frac{2n+1}{2}}\right]^{\frac{-2n}{2n+1}} \to e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Quindi la serie data converge dal criterio del rapporto.

❒ **Esercizio 4.5.7. (Esame del 11.09.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{\sqrt{n}}(n+1)!}$$

R.
Causa presenza del fattoriale, proviamo ad usare il criterio del rapporto (si può usare in quanto la serie è a termini positivi). Poniamo

$$a_n := \frac{n^n}{3^{\sqrt{n}}(n+1)!}.$$

Andiamo a calcolare

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\, 3^{\sqrt{n}}\, (n+1)!}{3^{\sqrt{n+1}}\, (n+2)!\, n^n} = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n+2}\, \frac{1}{3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}.$$

Osserviamo che

$$3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 3^{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}} = e^{\frac{\log 3}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}} \to 1$$

quindi globalmente, sfruttando il limite notevole $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ si ottiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to e > 1,$$

pertanto la serie data diverge.

❒ **Esercizio 4.5.8 (Esame del 10.09.19).** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

R.
La serie è a termini positivi. Causa presenza del fattoriale, proviamo ad utilizzare il criterio del rapporto. Poniamo

$$a_n := \frac{n^{-n/2}}{\sqrt{n!}}$$

e andiamo a calcolare

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{-(n+1)/2}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{n^{-n/2}} = \frac{(n+1)^{-n/2}(n+1)^{-1/2}}{\sqrt{(n+1)}\sqrt{n!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{n^{-n/2}} = \frac{(n+1)^{-1/2}}{\sqrt{(n+1)}} \cdot \frac{(n+1)^{-n/2}}{n^{-n/2}}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n/2}.$$

Osserviamo che

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n/2} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,,$$

dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\downarrow \atop 0} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2}}_{\downarrow \atop \frac{1}{\sqrt{e}}} = 0 < 1\,.$$

Pertanto la serie data converge.

❒ **Esercizio 4.5.9 (Esame del 15.11.19).** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/2)^{n/2}}{\sqrt{n!}}$$

➠ **R.**

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del rapporto. Poniamo

$$b_n := \frac{(n/2)^{n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

Si ha

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{(n+1)!}} \frac{\sqrt{n!}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2} \frac{(n+1)^{1/2}}{\sqrt{n+1}} \frac{2^{n/2}}{2^{n/2}\sqrt{2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \to \sqrt{\frac{e}{2}} > 1$$

in quanto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, quindi dal criterio del rapporto la serie data diverge.

❒ **Esercizio 4.5.10 (Esame del 06.07.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/3)^{n/3}}{\sqrt[3]{n!}}$$

➠ **R.**

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del rapporto. Poniamo

$$a_n := \frac{(n/3)^{n/3}}{\sqrt[3]{n!}}.$$

Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)^{\frac{n+1}{3}}}{\sqrt[3]{(n+1)!}} \frac{\sqrt[3]{n!}}{\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{n}{3}}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/3} \frac{(n+1)^{1/3}}{\sqrt[3]{n+1}} \frac{3^{n/3}}{3^{n/3}\sqrt[3]{3}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/3} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \to \sqrt[3]{\frac{e}{3}} < 1$$

in quanto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, quindi dal criterio del rapporto la serie data converge.

4.6. Serie a termini di segno alternato: criterio di Leibniz

❒ **Esercizio 4.6.1. (Esame del 15.12.15)** *Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}}$$

➻ **R.** Si tratta di una serie a termini di segno alternato. La scriviamo come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}}.$$

L'idea è quella di usare il criterio di Leibniz. Posto

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}},$$

Pertanto è possibile applicare il criterio di Leibniz e la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.6.2. (Esame del 12.01.17)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}}$$

➻ **R.** Si tratta di una serie a termini di segno alternato. Il fatto che ci sia $(-1)^{n+1}$ oppure $(-1)^n$ non cambia nulla: eventualmente si scrive $(-1)^{n+1} = (-1)^n(-1)$ e si studia la convergenza della serie

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}}$$

il cui comportamento è senz'altro paragonabile a quello della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}}$$

(in particolare, se converge la prima, converge anche la seconda). Studiamo dunque quest'ultima. Poniamo

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n} + 2\sqrt[5]{n}}.$$

Sicuramente $a_n > 0$ e anche $a_n \to 0$. Inoltre siccome la successione $\sqrt{n} + 2\sqrt[5]{n}$ è crescente (basta applicare la definizione), si ha che a_n è decrescente. Sono dunque verificate le ipotesi del criterio di Leibniz e la serie converge, quindi anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.6.3. (Esame del 26.06.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n-1}}$$

➼ **R.**

Si tratta di una serie a termini di segno alternato. Proviamo ad applicare il criterio di Leibniz. Poniamo

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}.$$

Si ha $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$ e anche a_n decrescente. Infatti banalmente $3n - 1 \leq 3(n+1) - 1$ e anche applicando la radice terza, la funzione al denominatore rimane (debolmente) crescente dunque a_n è debolmente decrescente. Allora dal criterio di Leibniz la serie data converge.

❒ **Esercizio 4.6.4** (**Esame del 14.12.20**). *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{4n+2}}$$

➼ **R.**

Si tratta di una serie a termini di segno alternato. L'idea è quella di usare il criterio di Leibniz. Poniamo

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[3]{4n+2}}$$

Si verifica facilmente che $a_n > 0$, $a_n \to 0$ e a_n è debolmente decrescente. Dunque dal criterio di Leibniz la serie data converge.

4.7. Serie a termini di segno qualunque: criterio della convergenza assoluta

❒ **Esercizio 4.7.1. (Esame del 12.01.16)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2 + 3n + 2}$$

R.
Posto

$$a_n = \frac{\cos n}{n^2 + 3n + 2},$$

si verifica rapidamente dal teorema dei carabinieri che $a_n \to 0$ quindi dalla condizione necessaria non si può concludere nulla a priori sulla convergenza della serie.
Studiamo la serie attraverso il criterio della convergenza assoluta. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2 + 3n + 2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2 + 3n + 2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}.$$

L'ultima serie è a termini positivi ed essendo $n^2 + 3n + 2 \sim n^2$ per $n \to \infty$ allora essa si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente 2 e quindi converge.
Dal criterio della convergenza assoluta, anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.7.2. (Esame del 19.07.17)** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n + 2}{n^{15} + 3}$$

R. Osserviamo che $1 < \cos n + 2 < 3$ in quanto $-1 < \cos n < 1$. L'idea è quella di usare il criterio della convergenza assoluta. Si ha

$$\left| (-1)^n \frac{\cos n + 2}{n^{15} + 3} \right| = \frac{\cos n + 2}{n^{15} + 3} \leq \frac{3}{n^{15} + 3} \sim \frac{3}{n^{15}}$$

quindi la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n^{15} + 3}$$

si comporta (a meno di una costante) come la serie armonica generalizzata di esponente 15 che ovviamente converge. Allora dal criterio del confronto anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n + 2}{n^{15} + 3}$$

converge e infine dal crtierio della convergenza assoluta anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.7.3. (Esame del 15.02.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)\log(2n)}{n^3\sqrt{n+2}}$$

R.

Si tratta di una serie a termini di segno alternato; causa presenza di una potenza di n abbastanza grande al denominatore, proviamo ad usare il criterio della convergenza assoluta. Si ha, usando il fatto che $\log(2n) \leq 2n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\left|(-1)^n \frac{(n+1)\log(2n)}{n^3\sqrt{n+2}}\right| \leq \frac{(n+1)\log(2n)}{n^3\sqrt{n+2}} \leq \frac{2n(n+1)}{n^3\sqrt{n+2}} \sim \frac{2n^2}{n^3\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{3/2}}.$$

Allora, dal criterio del confronto asintotico, la serie che maggiora la nostra serie dei valori assoluti si comporta come una serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$ pertanto converge. Allora anche la serie dei valori assoluti converge e dal criterio della convergenza assoluta anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.7.4. (Esame del 12.06.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,[\sin(n^{4/5})]\,\left(e^{1/n^3} - 1\right)$$

R.

1) La serie data non è a termini positivi, in quanto il termine $\sin(n^{4/5})$ oscilla tra -1 e 1 (notare che $\sin(n^{4/5}) \neq \sin(1/n^{4/5})$). Quindi proviamo a usare il criterio della convergenza assoluta. Si ha

$$\left|\sqrt{n}[\sin(n^{4/5})](e^{1/n^3} - 1)\right| \leq \sqrt{n}\,(e^{1/n^3} - 1) \sim \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$$

quindi la serie dei valori assoluti è maggiorata da una serie che si comporta come una serie armonica generalizzata di esponente $5/2$ e pertanto converge. Allora dal criterio del confronto asintotico (e dal criterio del confronto) anche la serie dei valori assoluti converge e pertanto, dal criterio della convergenza assoluta, anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.7.5. (Esame del 11.09.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+\pi)\log(\pi n)}{n^{\pi}\sqrt{n+\pi}}$$

R.

Si tratta di una serie a termini di segno alternato; causa presenza di una potenza di n abbastanza grande al denominatore, proviamo ad usare il criterio della convergenza assoluta. Si ha, usando il fatto che $\log(\pi\, n) \leq \pi\, n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\left|(-1)^n \frac{(n+\pi)\log(\pi\, n)}{n^{\pi}\sqrt{n+\pi}}\right| \leq \frac{(n+\pi)\log(\pi\, n)}{n^{\pi}\sqrt{n+\pi}} \leq \frac{\pi\, n(n+\pi)}{n^{\pi}\sqrt{n+\pi}} \sim \frac{\pi\, n^2}{n^{\pi}\sqrt{n}} = \frac{\pi}{n^{\pi-3/2}}.$$

Allora, dal criterio del confronto asintotico, la serie che maggiora la nostra serie dei valori assoluti si comporta come una serie armonica generalizzata di esponente $\pi - 3/2 > 1$ pertanto converge. Allora anche la serie dei valori assoluti converge e dal criterio della convergenza assoluta anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.7.6 (Esame del 21.01.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n^n}$$

R.

Ci sono diversi modi di risolvere l'esercizio. Innanzitutto notiamo che si tratta di una serie a termini oscillanti. A causa del termine n^n al denominatore, tentiamo di usare il criterio della convergenza assoluta.

Studiamo dunque la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^n}$$

che è una serie a termini positivi, con il criterio del rapporto. Poniamo

$$a_n = \frac{n-1}{n^n}.$$

Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n-1} = \frac{n}{(n+1)(n-1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0 < 1$$

in quanto

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \to e \qquad\qquad \frac{n}{(n+1)(n-1)} \to 0.$$

Allora dal criterio del rapporto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^n}$$

converge e dunque, dal criterio della convergenza assoluta, anche la serie di partenza converge.

4.8. Serie dipendenti da un parametro

❒ **Esercizio 4.8.1.** **(Esame del 06.05.16)** *Sia data la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1) Dire se converge per il valore $\alpha = 2$, motivando la risposta.

2) Determinare i valori di α per cui essa diverge.

R. Per ogni valore di α la serie data è a termini positivi per cui possiamo usare il criterio del confronto asintotico.

1) Se $n \to \infty$ allora $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ e pertanto

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

da cui la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sqrt{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-3/2}}$$

che diverge in quanto serie armonica generalizzata di esponente minore o uguale a 1. Pertanto se $\alpha = 2$ la serie di partenza diverge.

2) Ripetendo analogo ragionamento si ottiene che, per il criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \sqrt{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$

che diverge se

$$\frac{1}{2} - \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq -\frac{1}{2}.$$

❒ **Esercizio 4.8.2. (Esame del 08.06.17)** *Determinare l'insieme dei numeri* $\alpha \in \mathbb{R}$ *per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3\sqrt{n} + n^2)(e^{1/\sqrt{n}} - 1)^{\alpha}$$

converge.

➼ **R.** Si tratta di una serie a termini non negativi, quindi provo a usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to \infty$ si ha

$$3\sqrt{n} + n^2 \sim n^2 \qquad e^{1/\sqrt{n}} - 1 \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

dunque la serie data si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2-2}}.$$

Si tratta di una serie armonica generalizzata di esponente $\frac{\alpha}{2} - 2$ che converge se $\frac{\alpha}{2} - 2 > 1$ cioè $\alpha > 6$

❒ **Esercizio 4.8.3** (**Esame del 08.01.19**). *Determinare l'insieme dei numeri reali* $\alpha > 0$ *tali per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \log\left(1 + n^{-1/3}\right)}$$

risulta convergente.

➼ **R.** Siccome $1 + n^{-1/3} > 1$ allora sicuramente $\log\left(1 + n^{-1/3}\right) > 0$, perciò la serie è a termini positivi. Osserviamo poi che se $n \to +\infty$ allora $n^{-1/3} \to 0$, quindi dai limiti notevoli si ha

$$\log\left(1 + n^{-1/3}\right) \sim n^{-1/3}.$$

Pertanto

$$\frac{1}{n^{\alpha} \log\left(1 + n^{-1/3}\right)} \sim \frac{1}{n^{\alpha} \cdot n^{-1/3}} = \frac{1}{n^{\alpha - 1/3}}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza si comporta come la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha - 1/3}},$$

che converge se $\alpha - 1/3 > 1$ cioè se $\alpha > 4/3$.

❒ **Esercizio 4.8.4 (Esame del 17.06.19).** *Determinare l'insieme dei numeri reali α tali per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}}$$

risulta convergente.

R. Siccome $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 < \pi$ allora sicuramente $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, perciò la serie è a termini positivi. Conviene spezzare la serie nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^{\alpha+5}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}} =: I + II\,.$$

Per il primo termine si ha

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+4}}\,,$$

che essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha+4$ converge solo se $\alpha+4 > 1$ cioè se $\alpha > -3$. Per quanto riguarda il secondo termine osserviamo che se $n \to +\infty$ allora $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, quindi dai limiti notevoli si ha

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Pertanto

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}} = \frac{\frac{1}{n}}{n^{\alpha+5}} = \frac{1}{n \cdot n^{\alpha+5}} = \frac{1}{n^{\alpha+6}}\,.$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie II si comporta come la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+6}}\,,$$

che converge se $\alpha + 6 > 1$ cioè se $\alpha > -5$. Quindi la serie di partenza è tale che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+4}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+6}}\,,$$

e converge solo se entrambe le serie convergono. Facendo l'intersezione delle due condizioni $\alpha > -3$ e $\alpha > -5$ si ottiene che la serie di partenza converge se $\alpha > -3$.

❒ **Esercizio 4.8.5** (**Esame del 22.07.19**). *Determinare l'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ tali per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}}\right)$$

risulta convergente.

➻ **R.** La serie è a termini positivi. Osserviamo poi che se $n \to +\infty$ allora $\frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}} \to 0$ essendo $\alpha > 0$, quindi dai limiti notevoli si ha

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}}.$$

Pertanto

$$n \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}}\right) \sim n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}}\right)^2 = n\left(\frac{1}{n^{\alpha/3}}\right)^2 = n \cdot \frac{1}{n^{2\alpha/3}} = \frac{1}{n^{2\alpha/3-1}}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza si comporta come la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha/3-1}},$$

che converge se $\frac{2}{3}\alpha - 1 > 1$ cioè se $\alpha > 3$.

❒ **Esercizio 4.8.6** (**Esame del 07.01.20**). *Studiare, al variare del parametro $\alpha > 0$, il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 2\log n}{n^\alpha \sqrt[3]{n^2+1}}$$

➻ **R.**
Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha (usando anche la gerarchia degli infiniti)

$$\frac{\sqrt{n} + 2\log n}{n^\alpha \sqrt[3]{n^2+1}} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha\, n^{2/3}} = \frac{1}{n^{\alpha+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{\alpha+1/6}}$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha + 1/6$ che converge quando

$$\alpha + \frac{1}{6} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \frac{5}{6}.$$

❐ **Esercizio 4.8.7** **(Esame del 24.06.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica al variare del parametro* $\beta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^\beta}$$

➽ **R.**

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha

$$\frac{n^3 - 1}{n^\beta} \sim \frac{n^3}{n^\beta} = \frac{1}{n^{\beta-3}}$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $\beta - 3$ che converge quando

$$\beta - 3 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta > 4.$$

❐ **Esercizio 4.8.8** **(Esame del 08.09.20).** *Studiare, al variare del parametro* $\alpha > 0$, *il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + 1/n)}{(n+1)^\alpha \sqrt[3]{n^4 + 1}}$$

➽ **R.**

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n \to 0$

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

D'altra parte, per $n \to +\infty$, si ha anche

$$(n+1)^\alpha \sqrt[3]{n^4 + 1} \sim n^\alpha \, n^{4/3} = n^{\alpha + 4/3}$$

quindi globalmente

$$\frac{\log(1 + 1/n)}{(n+1)^\alpha \sqrt[3]{n^4 + 1}} \sim \frac{1}{n^{\alpha + 7/3}}.$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha + 7/3$ che converge quando

$$\alpha + 7/3 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > -4/3.$$

Visto che per ipotesi $\alpha > 0$, si ha che la serie data converge per tutti i valori di $\alpha > 0$.

❒ **Esercizio 4.8.9 (Esame del 08.06.21).** *Determinare per quali valori del parametro $\alpha > 0$ converge la serie seguente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n^\alpha} - 1}{n^3}$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n^\alpha \to 0$

$$e^{1/n^\alpha} - 1 \sim \frac{1}{n^\alpha},$$

e pertanto

$$\frac{e^{1/n^\alpha} - 1}{n^3} \sim \frac{1}{n^{3+\alpha}}$$

quindi, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $3+\alpha$ e pertanto converge se

$$3 + \alpha > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > -2$$

Siccome per ipotesi deve essere $\alpha > 0$, si ha che la serie data converge per ogni valore di $\alpha > 0$.

❒ **Esercizio 4.8.10 (Esame del 22.06.21).** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{(n^\alpha + 5)}$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha

$$\frac{n^3 - 1}{(n^\alpha + 5)} \sim \frac{n^3}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-3}}$$

quindi, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha - 3$ e pertanto converge se

$$\alpha - 3 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 4.$$

CAPITOLO 5

Campi ordinati

5.1. Richiami di teoria

➠ CARATTERIZZAZIONI DI ESTREMO SUPERIORE ED ESTREMO INFERIORE

$$\xi = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq \xi \\ \forall \lambda < \xi, \quad \exists \bar{a} \in A, \quad \lambda < \bar{a} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

$$\eta = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \quad \eta \leq a \\ \forall \lambda > \eta, \quad \exists \bar{a} \in A, \quad \lambda > \bar{a}. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

➠ Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si ha

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \qquad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}. \tag{5.1.3}$$

5.2. Esercizi proposti

❒ **Esercizio 5.2.1.** **(Esame del 13.11.18)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2}{n+1} - 1 : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrare che $\sup A = \max A = 1$

➫ **R.**

• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\xi = 1$ è un maggiorante. Occorre far vedere che

$$\frac{2}{n+1} - 1 \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq 0$. Ma questo è certamente vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.
• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\xi = 1$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{2}{\bar{n}+1} - 1 = 1\,.$$

Risolvendo l'equazione si trova $\bar{n} = 0$, che corrisponde ad un valore accettabile. Quindi $\boxed{\xi = 1 = \sup A = \max A}$ perché $1 \in A$ (ed è raggiunto per $n = 0$).

❒ **Esercizio 5.2.2.** **(Esame del 08.01.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2\sqrt{n} - n}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrare che $\sup A = \max A = \frac{1}{2}$.

➻ **R.**
• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\xi = \frac{1}{2}$ è un maggiorante. Occorre far vedere che

$$\frac{2\sqrt{n} - n}{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

ma questo è sicuramente vero per quanto osservato al passo precedente.
• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\xi = \frac{1}{2}$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{2\sqrt{\bar{n}} - \bar{n}}{\bar{n}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Dal passo 0 si vede che $\bar{n} = 1$. Quindi $\boxed{\xi = \frac{1}{2} = \sup A = \max A}$ perché $\frac{1}{2} \in A$ (ed è raggiunto per $n = 1$).

❒ **Esercizio 5.2.3.** **(Esame del 23.01.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \log\left(\frac{n+2}{2n+1}\right) \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrare che $\inf A = \log \frac{1}{2}$ *mentre* $\min A$ *non esiste.*

➼ **R.**

• PASSO 1: dimostriamo che $\eta = \log \frac{1}{2}$ è un minorante. Occorre far vedere che

$$\log\left(\frac{n+2}{2n+1}\right) \geq \log\frac{1}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

ovvero che

$$\frac{n+2}{2n+1} \geq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 2(n+2) \geq 2n+1 \;\Leftrightarrow\; 4 \geq 1 \quad \text{VERO}\,.$$

• PASSO 2: vediamo se $\eta = \log\frac{1}{2}$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\log\left(\frac{\bar{n}+2}{2\bar{n}+1}\right) = \log\frac{1}{2}\,,$$

ovvero tale che

$$\frac{\bar{n}+2}{2\bar{n}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Risolvendo l'equazione si trova $4 = 1$, quindi non esiste nessun $\bar{n}$ che realizzi l'uguaglianza. Perciò $\log\frac{1}{2} \notin A$.

• PASSO 3: dai passi 1 e 2 abbiamo provato che $\eta = \log\frac{1}{2}$ è un minorante di A che non appartiene all'insieme. Per dimostrare che si ha $\eta = \inf A$ occorre far vedere che è il massimo dei minoranti, cioè che preso un qualunque numero maggiore di $\log\frac{1}{2}$ esso non è un minorante. Cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\log\left(\frac{n_0+2}{2n_0+1}\right) < \log\frac{1}{2} + \varepsilon\,. \tag{3.1}$$

Per fare ciò conviene ricordare che $\log\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)$, perciò dalla definizione di limite si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\left|\log\left(\frac{\bar{n}+2}{2\bar{n}+1}\right) - \log\frac{1}{2}\right| = \log\left(\frac{\bar{n}+2}{2\bar{n}+1}\right) - \log\frac{1}{2} < \varepsilon$$

dove abbiamo potuto togliere il valore assoluto essendo la successione decrescente. Ma allora (3.1) è verificata scegliendo $n_0 \geq \bar{n}$. Quindi $\boxed{\inf A = \log\frac{1}{2}}$, mentre $\boxed{\min A \text{ non esiste}}$.

❒ **Esercizio 5.2.4. (Esame del 23.02.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n + 1}{n + (-1)^{n+1}} : n \in \mathbb{N},\; n > 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\inf A = \min A = 0$.

➼ **R.**
Innanzitutto, posto $a_n = \frac{(-1)^n+1}{n+(-1)^{n+1}}$, possiamo riscrivere nel seguente modo:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n-1} & n \text{ pari,} \\ 0 & n \text{ dispari, } n > 1. \end{cases}$$

Quindi, tenendo conto del fatto che se n è pari allora $n = 2k$ con $k = 1, 2, \ldots$, possiamo riscrivere A come

$$A = \left\{ \frac{2}{2k-1} : k = 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\}.$$

• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\eta = 0$ è un minorante. Siccome banalmente $0 \geq 0$, rimane da far vedere che

$$\frac{2}{2k-1} \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \ldots.$$

Ma anche questo è certamente vero.
• <u>PASSO 2:</u> banalmente $\eta = 0$ appartiene all'insieme (viene raggiunto da tutti gli input dispari). Quindi $\boxed{\eta = 0 = \inf A = \min A}$ perché $0 \in A$.

❒ **Esercizio 5.2.5. (Esame del 10.04.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{1}{n+1} - 2 : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrare che $\inf A = -2$ *e che il minimo non esiste.*

➼ **R.**
• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\eta = -2$ è un minorante. Occorre far vedere che

$$\frac{1}{n+1} - 2 \geq -2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq 0$. Ma questo è certamente vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.
• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\eta = -2$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{1}{\bar{n}+1} - 2 = -2.$$

Risolvendo l'equazione si trova $1 = 0$, quindi non esiste nessun $\bar{n}$ che realizzi l'uguaglianza. Perciò $-2 \notin A$.
• <u>PASSO 3:</u> dai passi 1 e 2 abbiamo provato che $\eta = -2$ è un minorante di A che non appartiene all'insieme. Per dimostrare che si ha $\eta = \inf A$ occorre far vedere che è il massimo dei minoranti,

cioè che preso un qualunque numero maggiore di -2 esso non è un minorante. Cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{n_0+1} - 2 < -2 + \varepsilon\,.$$

D'altra parte

$$\frac{1}{n_0+1} - 2 < -2 + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n_0 + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; n_0 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

che è vero per la proprietà di Archimede. Quindi $\boxed{\inf A = -2}$, mentre $\boxed{\min A \text{ non esiste}}$.

❒ **Esercizio 5.2.6. (Esame del 05.06.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{n-3}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrare che $\inf A = \min A = -1$.

R.

• PASSO 1: dimostriamo che $\eta = -1$ è un minorante. Occorre far vedere che

$$\frac{n-3}{n+3} \geq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq 0$. Ma questo è certamente vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

• PASSO 2: vediamo se $\eta = -1$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{\bar{n}-3}{\bar{n}+3} = -1\,.$$

Risolvendo l'equazione si trova $\bar{n} = 0$, che corrisponde ad un valore accettabile. Quindi $\boxed{\eta = -1 = \inf A = \min A}$ perché $-1 \in A$ (ed è raggiunto per $n = 0$).

❒ **Esercizio 5.2.7. (Esame del 17.06.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : 4^x + 2^{x+1} - 4 \geq 0 \right\}.$$

Dimostrare che $\inf A = \min A = \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right)$, $\sup A = +\infty$ *mentre* $\max A$ *non esiste.*

R.

• PASSO 1: dimostriamo che $\eta = \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right)$ è un minorante. Occorre far vedere che

$$4^x + 2^{x+1} - 4 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Basta infatti risolvere la disequazione

$$2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 4 \geq 0 \,.$$

Sostituendo $t = 2^x$ si ha

$$t^2 + 2t - 4 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; t \leq -1 - \sqrt{5} \vee t \geq -1 + \sqrt{5} \,,$$

ovvero in termini di x

$$2^x \leq -1 - \sqrt{5} \;\vee\; 2^x \geq -1 + \sqrt{5} \,.$$

Siccome $2^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la prima alternativa non è sicuramente mai verificata, e quindi la soluzione si riduce a

$$x \geq \log_2 \left(-1 + \sqrt{5}\right) .$$

Quindi possiamo riscrivere A come

$$A = \left[\log_2 \left(-1 + \sqrt{5}\right), +\infty\right) .$$

A questo punto $\eta = \log_2 \left(-1 + \sqrt{5}\right)$ è senz'altro un minorante per A.
Dimostriamo ora che l'insieme A non è limitato superiormente. Questo ci permetterà di concludere che $\sup A = +\infty$ mentre $\max A$ non esiste. Dire che un insieme non è limitato superiormente significa dire che l'insieme dei maggioranti è vuoto, cioè che per ogni $M > 0$ esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $4^{\bar{x}} + 2^{\bar{x}+1} - 4 \geq 0$ e $\bar{x} > M$. In virtù di quanto visto al passo precedente basta prendere
$\bar{x} = \log_2 \left(-1 + \sqrt{5}\right)$ se $M < \log_2 \left(-1 + \sqrt{5}\right)$,
$\bar{x} = M + 1$ se $M \geq \log_2 \left(-1 + \sqrt{5}\right)$.
Quindi $\boxed{\sup A = +\infty}$ mentre $\boxed{\max A \text{ non esiste}}$.
• PASSO 2: vediamo se $\eta = \log_2 \left(-1 + \sqrt{5}\right)$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{x}$ tale che

$$4^{\bar{x}} + 2^{\bar{x}+1} - 4 \geq 0 \quad \text{e} \quad \bar{x} = \log_2 \left(-1 + \sqrt{5}\right) .$$

Ma questo è sicuramente vero per quanto detto in precedenza. Quindi $\boxed{\eta = \log_2 \left(-1 + \sqrt{5}\right) = \inf A = \min A}$ perché $\log_2 \left(-1 + \sqrt{5}\right) \in A$.

❒ **Esercizio 5.2.8. (Esame del 23.07.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{\pi}{n+2} - 1 : \, n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Dimostrare che $\sup A = \max A = \frac{\pi}{2} - 1$.

➾ **R.**

• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\xi = \frac{\pi}{2} - 1$ è un maggiorante. Occorre far vedere che

$$\frac{\pi}{n+2} - 1 \leq \frac{\pi}{2} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq 0$. Ma questo è certamente vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\xi = \frac{\pi}{2} - 1$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{\pi}{\bar{n}+2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1\,.$$

Risolvendo l'equazione si trova $\bar{n} = 0$, che corrisponde ad un valore accettabile. Quindi $\boxed{\xi = \frac{\pi}{2} - 1 = \sup A = \max A}$ perché $\frac{\pi}{2} - 1 \in A$ (ed è raggiunto per $n = 0$).

❒ **Esercizio 5.2.9. (Esame del 10.09.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2^n}{(-2)^n + 4} \, : \, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Dimostrare che $\max A = 1$.

➾ **R.**

• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\xi = 1$ è un maggiorante. Occorre far vedere che

$$\frac{2^n}{(-2)^n + 4} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\, n \neq 0\,.$$

Innanzitutto, posto $a_n = \frac{2^n}{(-2)^n+4}$, possiamo riscrivere nel seguente modo:

$$a_n = \frac{2^n}{(-1)^n \cdot 2^n + 4} = \begin{cases} \dfrac{2^n}{2^n + 4} & n \text{ pari,} \\ \dfrac{2^n}{-2^n + 4} & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Per n pari il denominatore è sempre positivo, quindi si ha

$$\frac{2^n}{2^n + 4} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq 4 \quad \text{VERO.}$$

Per n dispari si ha

$$\frac{2^n}{-2^n + 4} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{2^n}{-2^n + 4} - 1 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2^n + 2^n - 4}{-2^n + 4} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2^{n+1} - 4}{2^n - 4} \geq 0$$

$$\begin{aligned} N &\geq 0: \quad 2^{n+1} \geq 4 = 2^2 \Leftrightarrow n+1 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 1 \\ D &> 0: \quad 2^n > 4 = 2^2 \Leftrightarrow n > 2 \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{2^{n+1}-4}{2^n-4} \geq 0 \ \Leftrightarrow \ n \leq 1 \vee n > 2\,,$$

ovvero per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 2$. Ma siccome stiamo considerando n dispari, la disuguaglianza è sempre verificata.

• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\xi = 1$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{2^{\bar{n}}}{(-2)^{\bar{n}}+4} = 1\,.$$

Per $\bar{n}$ pari si ha

$$\frac{2^{\bar{n}}}{2^{\bar{n}}+4} = 1 \ \Leftrightarrow \ 2^{\bar{n}} = 2^{\bar{n}}+4 \ \Leftrightarrow \ 0 = 4\,,$$

quindi non si verifica mai. Per n dispari si ha

$$\frac{2^{\bar{n}}}{-2^{\bar{n}}+4} = 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{2^{\bar{n}}}{-2^{\bar{n}}+4} - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{2^{\bar{n}+1}-4}{-2^{\bar{n}}+4} = 0 \ \Leftrightarrow \ 2^{\bar{n}+1} = 4 = 2^2 \ \Leftrightarrow \ \bar{n}+1 = 2\,.$$

Risolvendo l'equazione si trova $\bar{n} = 1$, che corrisponde ad un valore accettabile. Quindi $\boxed{\xi = 1 = \max A}$ perché $1 \in A$ (ed è raggiunto per $n = 1$).

❒ **Esercizio 5.2.10.** **(Esame del 14.11.19)** *Sia*

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} : n \geq 1 \right\}.$$

Dimostare che $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$ *e* $\inf A = \min A = -1$.

➼ **R.**

• <u>PASSO 1:</u> Dimostriamo che $\xi = \frac{3}{2}$ ed $\eta = -1$ sono rispettivamente un maggiorante e un minorante dell'insieme A. Occorre far vedere che

$$-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} \leq \frac{3}{2} \qquad \forall n \geq 1.$$

Se n è pari, $n \geq 2$

$$\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} = 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$$

e anche

$$1 + \frac{1}{n} \geq 0 > -1.$$

Se invece n è dispari
$$-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} = -\frac{1}{n} \geq -1$$
perché $n \geq 1$ e d'altra parte
$$-\frac{1}{n} \leq 0 < \frac{3}{2}.$$
Quindi siamo riusciti a dimostrare che $\xi = \frac{3}{2}$ è maggiorante per A e $\eta = -1$ è minorante per A.

• <u>passo 2:</u> vediamo se $\xi = \frac{3}{2}$ e $\eta = -1$ appartengono ad A. Osservando le disuguaglianze viste in precedenza, è facile vedere che se $\bar{n} = 2$ allora
$$\frac{(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}} + \frac{1+(-1)^{\bar{n}}}{2} = 1 + \frac{1}{\bar{n}} = \frac{3}{2} \in A$$
e d'altra parte, se $\bar{n} = 1$ allora
$$\frac{(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}} + \frac{1+(-1)^{\bar{n}}}{2} = -\frac{1}{\bar{n}} = -1 \in A$$
Pertanto $\xi = \frac{3}{2}$ è maggiorante per A che appartiene all'insieme e dunque $\max A = \frac{3}{2}$ e $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$. D'altra parte $\eta = -1$ è minorante per A che appartiene all'insieme, dunque $\min A = -1$ e di conseguenza $\inf A = \min A = -1$, che era quello che volevamo dimostrare.

❒ **Esercizio 5.2.11. (Esame del 15.11.19)** *Sia*
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x \geq 0\}.$$
Dimostrare che $\sup A = +\infty$ *e* $\max A$ *non esiste, mentre* $\inf A = \min A = -1$.

➻ **R.**

Prima di tutto riscriviamo l'insieme A risolvendo la disequazione. Si ha
$$x^3 - x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2-1) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq x \leq 0 \vee x \geq 1$$
Quindi
$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty[\}$$
• <u>passo 1:</u> dimostriamo che A non è limitato superiormente. Per definizione, per ogni $M \in \mathbb{R}$ occorre trovare $\bar{x} \in A$ tale che $\bar{x} \geq M$. A tal proposito basta prendere $\bar{x} = 1$ se $M \leq 1$ e $\bar{x} = M + 1$ se $M > 1$.

Quindi $\sup A = +\infty$ e ovviamente $\max A$ non esiste.

Dimostriamo invece che -1 è minorante per A. Occorre dimostrare che per ogni $x \in A$ si ha

$x \geq 1$ e questo è ovvio da come è stato riscritto l'insieme A.

• PASSO 2: visto che $-1 \in A$, si ha che -1 è un minorante che appartiene all'insieme, quindi per definizione $\min A = -1$ e di conseguenza anche $\inf A = \min A = -1$ che è quello che volevamo dimostrare.

❐ **Esercizio 5.2.12. (Esame del 07.01.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{n}{(-1)^n + 2n} : n \in \mathbb{N}, \;\; n \geq 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\sup A = \max A = 1$.

R.

• PASSO 1: prima di tutto dimostriamo che $\xi = 1$ è maggiorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\frac{n}{(-1)^n + 2n} \leq 1.$$

A questo punto, se n è pari, si ha

$$\frac{n}{(-1)^n + 2n} = \frac{n}{1 + 2n} \leq 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; n \leq 1 + 2n \;\; \Leftrightarrow \;\; n + 1 \geq 0$$

che è banalmente verificato. D'altra parte, se n è dispari (osserviamo che $2n - 1 > 0$ perché $n \geq 1$)

$$\frac{n}{(-1)^n + 2n} = \frac{n}{-1 + 2n} \leq 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; n \leq 2n - 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; n \geq 1$$

che è verificato per ipotesi. Dunque $\xi = 1$ è maggiorante per A.

• PASSO 2: proviamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{\bar{n}}{(-1)^{\bar{n}} + 2\bar{n}} = 1$$

Osservando le disuguaglianze provate al passo precedente, è facile vedere che se $\bar{n} = 1$, allora

$$\frac{\bar{n}}{(-1)^{\bar{n}} + 2\bar{n}} = \frac{\bar{n}}{2\bar{n} - 1} = 1$$

Quindi $\xi = 1$ è è un maggiorante che appartiene all'insieme, quindi per definizione $\max A = 1$ e di conseguenza anche $\sup A = \max A = 1$ che è quello che volevamo dimostrare.

❒ **Esercizio 5.2.13.** **(Esame del 21.01.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ e^{(1+2(-1)^n)/n} : n \geq 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\min A = \inf A = e^{-1} = 1/e$.

R.

• PASSO 1: prima di tutto dimostriamo che $\eta = 1/e$ è minorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} \geq 1/e = e^{-1}.$$

A questo punto, se n è pari, si ha, dalla monotonia della funzione esponenziale

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = e^{3/n} \geq e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{n} \geq -1$$

che è banalmente verificato. D'altra parte, se n è dispari

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = e^{-1/n} \geq e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{n} \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 1$$

che è verificato per ipotesi. Dunque $\eta = 1/e$ è minorante per A.

• PASSO 2: proviamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = 1/e$$

Osservando le disuguaglianze provate al passo precedente, è facile vedere che se $\bar{n} = 1$, allora

$$e^{(1+2(-1)^{\bar{n}})/\bar{n}} = e^{-1}$$

Quindi $\eta = 1/e$ è è un minorante che appartiene all'insieme, quindi per definizione $\min A = 1/e$ e di conseguenza anche $\inf A = \min A = 1/e$ che è quello che volevamo dimostrare.

❒ **Esercizio 5.2.14.** **(Esame del 18.02.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ e^{(1+2(-1)^n)/n} : n \geq 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\max A = \sup A = e^{3/2}$.

R.

• PASSO 1: prima di tutto dimostriamo che $\xi = e^{3/2}$ è minorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} \leq e^{3/2}.$$

A questo punto, se n è pari, si ha, dalla monotonia della funzione esponenziale

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = e^{3/n} \leq e^{3/2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{n} \leq e^{3/2} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2$$

che è verificato perché n è pari. D'altra parte, se n è dispari

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = e^{-1/n} \leq e^{3/2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -2/3$$

che è banalmente verificato. Dunque $\xi = e^{3/2}$ è maggiorante per A.

• PASSO 2: proviamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = e^{3/2}$$

Osservando le disuguaglianze provate al passo precedente, è facile vedere che se $\bar{n} = 2$, allora

$$e^{(1+2(-1)^{\bar{n}})/\bar{n}} = e^{3/2}$$

Quindi$\xi = e^{3/2}$ è maggiorante per A che appartiene all'insieme, quindi per definizione $\max A = e^{3/2}$ e di conseguenza anche $\sup A = \max A = e^{3/2}$ che è quello che volevamo dimostrare.

❒ **Esercizio 5.2.15.** **(Esame del 24.06.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2 - 3(-1)^n}} \,:\, n \geq 1 \right\}$$

Dimostrare che $\inf A = -1$ *e che il minimo non esiste.*

R.

• PASSO 1: prima di tutto dimostriamo che $\eta = -1$ è un minorante per A. Occorre far vedere che

$$-1 \leq \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2 - 3(-1)^n}} \qquad \forall n \geq 1.$$

Se n è pari, questo è ovvio perché a secondo membro cè una quantità positiva. Se invece n è dispari, occorre mostrare che

$$-1 \leq \frac{-n}{\sqrt{n^2+3}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n^2+3} \geq n \quad \Leftrightarrow \quad n^2+3 \geq n^2$$

e questo risulta verificato.

• PASSO 2: facciamo vedere che non esiste $\bar{n} \geq 1$ tale che si abbia

$$-1 = \frac{(-1)^{\bar{n}} \bar{n}}{\sqrt{\bar{n}^2 - 3(-1)^{\bar{n}}}}.$$

Se tale $\bar{n}$ esistesse, non potrebbe essere pari, perché, come prima, a destra avremmo una quantità positiva. Se invece tale $\bar{n}$ fosse dispari, si dovrebbe avere

$$-\frac{\bar{n}}{\sqrt{\bar{n}^2+3}} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{n} = \sqrt{\bar{n}^2+3} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{n}^2 = \bar{n}^2 + 3$$

e questo è assurdo. Quindi si può concludere che $\min A$ non esiste.

• <u>PASSO 3:</u> mostriamo che $-1 = \inf A$ usando la caratterizzazione dell'estremo inferiore. Posto

$$a_n := \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2 - 3(-1)^n}},$$

dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < -1 + \varepsilon.$$

D'altra parte osserviamo che, se n è dispari

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -1$$

quindi, dalla definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : |a_n + 1| < \varepsilon.$$

In particolare questo permette di concludere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : a_n < -1 + \varepsilon$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

❒ **Esercizio 5.2.16. (Esame del 09.07.20)** *Sia*

$$A = \left\{ \frac{n^2 + (-1)^n}{\pi} : n \geq 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\sup A = +\infty$. *Esiste* $\max A$? *Motivare adeguatamente la risposta.*

R.

Dire che $\sup A = +\infty$ significa dimostrare che A non è limitato superiormente. Posto

$$a_n := \frac{n^2 + (-1)^n}{\pi}$$

la tesi equivale a dimostrare che

$$\forall M > 0, \ \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} > M.$$

D'altra parte

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

e quindi, dalla definizione di limite

$$\forall M > 0, \ \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \ \ a_n > M$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite.
D'altra parte $\max A$ non esiste perché, per definizione il massimo è un maggiorante che appartiene all'insieme e ovviamente $+\infty \notin A$.

❐ **Esercizio 5.2.17.** **(Esame del 08.09.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n + 2n}{n} : n \in \mathbb{N}, \ \ n \geq 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\sup A = \max A = 5/2$.

R.

• <u>PASSO 1:</u> prima di tutto dimostriamo che $\xi = 5/2$ è maggiorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\frac{(-1)^n + 2n}{n} \leq \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(-1)^n}{n} + 2 \leq \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

A questo punto, se n è dispari, si ha che la tesi è banalmente verificata. D'altra parte, se n è pari, questo equivale a chiedere $2 \leq n$ che è ok per ipotesi.
Dunque $\xi = 5/2$ è maggiorante per A.

• <u>PASSO 2:</u> proviamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{(-1)^{\bar{n}} + 2\bar{n}}{\bar{n}} = \frac{5}{2}.$$

Osservando le disuguaglianze provate al passo precedente, è facile vedere che se $\bar{n} = 2$, allora

$$\frac{(-1)^{\bar{n}} + 2\bar{n}}{\bar{n}} = \frac{(-1)^2 + 4}{2} = \frac{5}{2}.$$

Quindi $\xi = \frac{5}{2}$ è è un maggiorante che appartiene all'insieme, quindi per definizione $\max A = \frac{5}{2}$ e di conseguenza anche $\sup A = \max A = \frac{5}{2}$ che è quello che volevamo dimostrare.

❒ **Esercizio 5.2.18. (Esame del 09.11.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ (-1)^n\, n + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Dimostrare che $\inf A = -\infty$ *e che il minimo di* A *non esiste.*

➼ **R.**

Dire che $\inf A = -\infty$ significa dimostrare che A non è limitato inferiormente. Posto

$$a_n := (-1)^n\, n + \frac{1}{n}$$

la tesi equivale a dimostrare che

$$\forall M > 0, \;\; \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < -M.$$

D'altra parte, se n è dispari

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

e quindi, dalla definizione di limite

$$\forall M > 0, \;\; \exists \bar{n} \;\text{ dispari }\; : \forall n \geq \bar{n} \;\text{ dispari }\;\; a_n < -M$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite.
D'altra parte $\min A$ non esiste perché, per definizione il minimo è un minorante che appartiene all'insieme e ovviamente $-\infty \notin A$.

❒ **Esercizio 5.2.19. (Esame del 23.11.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2n}{n+\pi} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dimostrare che $\sup A = 2$ *e* $\max A$ *non esiste (si consiglia di usare la definizione di limite).*

➼ **R.**

• <u>PASSO 1:</u> prima di tutto dimostriamo che $\xi = 2$ è maggiorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{2n}{n+\pi} \leq 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; 2n \leq 2n + 2\pi$$

e questo è sempre verificato.
Dunque $\xi = 2$ è maggiorante per A.

• <u>PASSO 2:</u> proviamo che non esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che
$$\frac{2\bar{n}}{\bar{n} + 2\pi} = 2.$$
Infatti, se così fosse, si dovrebbe avere $2\bar{n} = 2\bar{n} + 2\pi$ cioè $2\pi = 0$ che è assurdo.
Allora $\max A$ non esiste.
• <u>PASSO 3:</u> dimostriamo che $\sup A = 2$ usando la caratterizzazione dell'estremo superiore. Dobbiamo far vedere che
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{n} : \ a_{\bar{n}} > 2 - \varepsilon.$$
D'altra parte si osserva che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n + \pi} = 2$$
quindi, dalla definizione di limite
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : \ |a_n - 2| < \varepsilon$$
che in particolare porta a $a_n > 2 - \varepsilon$ e la tesi è ottenuta con $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite.
Quindi $\sup A = 2$ e $\max A$ non esiste.

❒ **Esercizio 5.2.20. (Esame del 14.12.20)** *Sia dato l'insieme*
$$A = \left\{ \frac{(-1)^n - n}{2n} : n \geq 1 \right\}$$
Dimostrare che $\inf A = \min A = -1$

R.
• <u>PASSO 1:</u> prima di tutto dimostriamo che $\eta = -1$ è minorante per A. Posto $a_n = \frac{(-1)^n - n}{2n}$ occorre far vedere che
$$-1 \leq \frac{(-1)^n - n}{2n}.$$
Ora, se n è pari, allora
$$-1 \leq \frac{1-n}{2n} \ \Leftrightarrow \ -2n \leq 1 - n \ \Leftrightarrow \ n \geq -1$$
che è sempre verificato. D'altra parte, se n è dispari
$$-1 \leq \frac{-1-n}{2n} \ \Leftrightarrow \ 1 \geq \frac{1+n}{2n} \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ n \geq 1$$
che è ok per ipotesi.
• <u>PASSO 2:</u> facciamo vedere che esiste $\bar{n}$ tale che $a_{\bar{n}} = -1$. Seguendo i conti precedenti, è facile vedere che se $\bar{n} = 1$ allora
$$a_1 = \frac{-1-1}{2} = -1.$$

Quindi -1 è un minorante che appartiene all'insieme e dunque $\min A = -1$. A questo punto allora anche $\inf A = \min A = -1$.

❒ **Esercizio 5.2.21. (Esame del 14.12.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{-n + (-1)^n}{3n} : n \geq 1 \right\}$$

Dimostrare che $\inf A = \min A = -2/3$

➼ **R.**

• PASSO 1: prima di tutto dimostriamo che $\eta = -2/3$ è minorante per A. Posto $a_n = \frac{-n+(-1)^n}{3n}$ occorre far vedere che

$$-\frac{2}{3} \leq a_n.$$

Ora, se n è pari, questo equivale a

$$-\frac{2}{3} \leq \frac{-n+1}{3n} \quad \Leftrightarrow \quad 2n \geq n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -1$$

che è sempre verificato. D'altra parte, se n è dispari

$$-\frac{2}{3} \leq \frac{-1-n}{3n} \quad \Leftrightarrow \quad -2n \leq -n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 1$$

che è ok per ipotesi.

• PASSO 2: facciamo vedere che esiste $\bar{n}$ tale che $a_{\bar{n}} = -2/3$. Seguendo i conti precedenti, è facile vedere che se $\bar{n} = 1$ allora

$$a_1 = \frac{-1-1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Quindi $-2/3$ è un minorante che appartiene all'insieme e dunque $\min A = -2/3$. A questo punto allora anche $\inf A = \min A = -2/3$.

❒ **Esercizio 5.2.22. (Esame del 11.01.21)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2 + n^5}{5(n+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dimostrare che $\sup A = +\infty$ *e che* $\max A$ *non esiste.*

➼ **R.**

Dire che $\sup A = +\infty$ significa dimostrare che A non è limitato superiormente. Posto

$$a_n := \frac{2+n^5}{5(n+1)}$$

la tesi equivale a dimostrare che

$$\forall M > 0, \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} > M.$$

D'altra parte

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

e quindi, dalla definizione di limite

$$\forall M > 0, \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \ \ a_n > M$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite.
D'altra parte $\max A$ non esiste perché, per definizione il massimo è un maggiorante che appartiene all'insieme e ovviamente $+\infty \notin A$.

❒ **Esercizio 5.2.23. (Esame del 01.02.21)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2}{5(n+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dimostrare che $\inf A = 0$ *e che* $\min A$ *non esiste.*

➼ **R.**

• <u>PASSO 1:</u> prima di tutto dimostriamo che $\eta = 0$ è un minorante per A. Occorre far vedere che

$$0 \leq \frac{2}{5(n+1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e questo risulta banalmente verificato.
• <u>PASSO 2:</u> è facile vedere che non esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che si abbia

$$0 = \frac{2}{5(n+1)}$$

quindi si può concludere che $\min A$ non esiste.
• <u>PASSO 3:</u> mostriamo che $0 = \inf A$ usando la caratterizzazione dell'estremo inferiore. Posto

$$a_n := \frac{2}{5(n+1)},$$

dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < \varepsilon.$$

D'altra parte osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

quindi, dalla definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : |a_n| < \varepsilon.$$

In particolare questo permette di concludere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : a_n < \varepsilon$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

❒ **Esercizio 5.2.24. (Esame del 22.02.21)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2+n(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dimostrare che $\max A = \sup A = 2$ *mentre* $\inf A = -1$ *e che* $\min A$ *non esiste.*

R.

• <u>passo 1:</u> Dimostriamo che $\xi = 2$ ed $\eta = -1$ sono rispettivamente un maggiorante e un minorante dell'insieme A. Occorre far vedere che

$$-1 \leq \frac{2+n(-1)^n}{n+1} \leq 2 \qquad \forall n \geq 1.$$

Se n è pari

$$\frac{2+n(-1)^n}{n+1} = \frac{2+n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \leq 2 \ \ \Leftrightarrow \ \ n \geq 0$$

che naturalmente è ok dall'ipotesi, e inoltre

$$-1 \leq 1 + \frac{1}{n+1}$$

che è banalmente verificato.
Se invece n è dispari

$$-1 \leq \frac{2-n}{n+1}$$

è banalmente verificato, perché equivale a chiedere $2 \geq -1$ mentre

$$\frac{2-n}{n+1} \leq 2 \ \ \Leftrightarrow \ \ 3n \geq 0$$

e anche questo è banalmente verificato.
Quindi siamo riusciti a dimostrare che $\xi = 2$ è maggiorante per A e $\eta = -1$ è minorante per A.
• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\xi = 2$ e $\eta = -1$ appartengono ad A. Osservando le disuguaglianze viste in precedenza, è facile vedere che se $\bar{n} = 0$ allora

$$\frac{2 + \bar{n}(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n} + 1} = 2 \in A$$

mentre non esiste $\bar{n} \in A$ tale che

$$\frac{2 + \bar{n}(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n} + 1} = -1.$$

Infatti se esistesse un tale $\bar{n}$ e fosse dispari, si dovrebbe avere

$$\frac{2 - \bar{n}}{\bar{n} + 1} = -1$$

e questo è assurdo. Invece se esistesse un tale $\bar{n}$ e fosse pari, si dovrebbe avere

$$\frac{2 + \bar{n}}{\bar{n} + 1} = -1$$

cioè $\bar{n} = -1/2$ e anche questo ovviamente è assurdo.
Pertanto $\xi = 2$ è maggiorante per A che appartiene all'insieme e dunque $\max A = 2$ e $\sup A = \max A = 2$. D'altra parte $\min A$ non esiste.
• <u>PASSO 3:</u> mostriamo che $-1 = \inf A$ usando la caratterizzazione dell'estremo inferiore. Posto

$$a_n := \frac{2 + n(-1)^n}{n + 1},$$

dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < -1 + \varepsilon.$$

D'altra parte osserviamo che se n è dispari

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -1$$

quindi, dalla definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : |a_n + 1| < \varepsilon.$$

In particolare questo permette di concludere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : a_n < -1 + \varepsilon$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

❒ **Esercizio 5.2.25. (Esame del 08.06.21)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dimostrare che $\max A = \sup A = \pi$ *mentre* $\inf A = 0$ *e che* $\min A$ *non esiste.*

R.

• <u>PASSO 1:</u> Dimostriamo che $\xi = \pi$ ed $\eta = 0$ sono rispettivamente un maggiorante e un minorante dell'insieme A. Occorre far vedere che

$$0 \leq \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} \leq \pi \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La disuguaglianza di sinistra è banalmente verificata mentre per quella di destra si ha

$$\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} \leq \pi \;\;\Leftrightarrow\;\; \sqrt{n^2+1} \geq 1 \;\;\Leftrightarrow\;\; n \geq 0$$

che è banalmente verificato.
Quindi siamo riusciti a dimostrare che $\xi = \pi$ è maggiorante per A e $\eta = 0$ è minorante per A.
• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\xi = \pi$ e $\eta = 0$ appartengono ad A. Osservando le disuguaglianze viste in precedenza, è facile vedere che se $\bar{n} = 0$ allora

$$\frac{\pi}{\sqrt{0^2+1}} = \pi \in A$$

mentre ovviamente non esiste $\bar{n} \in A$ tale che

$$\frac{\pi}{\sqrt{\bar{n}^2+1}} = 0.$$

Pertanto $\xi = \pi$ è maggiorante per A che appartiene all'insieme e dunque $\max A = \pi$ e $\sup A = \max A = \pi$. D'altra parte $\min A$ non esiste.
• <u>PASSO 3:</u> mostriamo che $0 = \inf A$ usando la caratterizzazione dell'estremo inferiore. Posto

$$a_n := \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}},$$

dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < \varepsilon.$$

D'altra parte osserviamo che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

quindi, dalla definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : |a_n| < \varepsilon.$$

In particolare questo permette di concludere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : a_n < \varepsilon$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

❒ **Esercizio 5.2.26. (Esame del 06.07.21)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2n + n(-1)^n - 1}{3n+1} \ : \ n \geq 1 \right\}$$

Dimostrare che $\sup A = 1$ *e che* $\max A$ *non esiste.*

R.

• PASSO 1:

Prima di tutto dimostriamo che $\xi = 1$ è maggiorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{2n + n(-1)^n - 1}{3n+1} \leq 1 \qquad \forall n \geq 1.$$

A questo punto, se n è dispari, questo coincide col provare che

$$\frac{2n - n - 1}{3n+1} \leq 1 \ \Leftrightarrow \ n - 1 \leq 3n + 1 \ \Leftrightarrow \ 2n + 2 \geq 0$$

che è sicuramente verificato. D'altra parte se n è pari, si deve verificare che

$$\frac{3n-1}{3n+1} \leq 1 \ \Leftrightarrow \ 2 \geq 0$$

ovviamente verificato.

Dunque $\xi = 1$ è maggiorante per A.

• PASSO 2: proviamo che non esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{2\bar{n} + \bar{n}(-1)^{\bar{n}} - 1}{3\bar{n}+1} = 1.$$

Infatti, se $\bar{n}$ fosse dispari, si dovrebbe avere $\bar{n} - 1 = 3\bar{n} + 1$ che è assurdo.

Se invece $\bar{n}$ fosse pari, si dovrebbe verificare $3\bar{n} - 1 = 3\bar{n} + 1$ che è ugualmente assurdo

Allora $\max A$ non esiste.

• <u>PASSO 3:</u> dimostriamo che $\sup A = 1$ usando la caratterizzazione dell'estremo superiore. Dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} :\ a_{\bar{n}} > 1 - \varepsilon.$$

D'altra parte si osserva che, se n è pari

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

quindi, dalla definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} :\ \forall n \geq \bar{n} :\ |a_n - 1| < \varepsilon$$

che in particolare porta a $a_n > 1 - \varepsilon$ e la tesi è ottenuta con $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite. Quindi $\sup A = 1$ e $\max A$ non esiste.

CAPITOLO 6

Esercizi riguardanti limiti di funzioni

6.1. Uso della gerarchia degli infiniti

❒ **Esercizio 6.1.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+\sqrt[3]{x})e^{2x}}{x(e^x-1)\log x}$ **(Esame del 12.01.16)**

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2e^x+x^3+\sin x}{7e^x+\sqrt{x^6+1}}$ **(Esame del 19.07.16)**

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}+x^2+\arctan x}{e^x+1}$ **(Esame del 22.02.19)**

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+3^x+x^3}{x^4+4^x}$ **(Esame del 14.11.19)**

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3+2^x+x^2}{1+x^3+2^x}$ **(Esame del 14.11.19)**

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+e^x+x^3}{x^4+e^x}$ **(Esame del 09.07.20)**

R.

1) Osserviamo che se $x\to+\infty$ allora

$$x+\sqrt[3]{x}\sim x \qquad \text{e} \qquad e^x-1\sim e^x$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+\sqrt[3]{x})e^{2x}}{x(e^x-1)\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,e^{2x}}{x\,e^x\,\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\log x} = +\infty$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la gerarchia degli infiniti.

2) Osserviamo innanzitutto che
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
quindi tra i vari termini che compaiono nel limite, l'esponenziale **non è** un infinito di ordine superiore alle potenze. Pertanto si ha
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x+x^3+\sin x}{7e^x+\sqrt{x^6+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left[\frac{2e^x}{x^3}+1+\frac{\sin x}{x^3}\right]}{7e^x+|x^3|\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left[\frac{2e^x}{x^3}+1+\frac{\sin x}{x^3}\right]}{-x^3\left[-\frac{7e^x}{x^3}+\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}\right]} = -1,$$
dove abbiamo usato il teorema dei carabinieri, la gerarchia degli infiniti e il fatto che quando un termine esce dalla radice quadrata, deve comparire con il valore assoluto.

3) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Raccogliamo gli infiniti dominanti. Osserviamo che a numeratore per $x\to+\infty$ si ha $e^{-x}\to 0$ e $\arctan x\to\frac{\pi}{2}$, dunque l'infinito dominante è x^2. Si ha dunque
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+x^2+\arctan x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{e^{-x}}{x^2}+1+\frac{\arctan x}{x^2}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\cdot\frac{\frac{1}{e^x x^2}+1+\frac{\arctan x}{x^2}}{1+\frac{1}{e^x}}.$$
Dalla gerarchia degli infiniti si deduce
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0,$$
da cui
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+x^2+\arctan x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x^2}{e^x}}_{\downarrow\atop 0}\cdot\frac{\overbrace{\frac{1}{e^x x^2}+1+\frac{\arctan x}{x^2}}^{1\atop\uparrow}}{\underbrace{1+\frac{1}{e^x}}_{\downarrow\atop 1}} = 0.$$

4) Osserviamo che
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+3^x+x^3}{x^4+4^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{3^x}{x^3}+1\right)}{x^4\left(1+\frac{4^x}{x^4}\right)} = 0$$
dato che, per $x\to-\infty$ si ha
$$3^x\to 0 \qquad 4^x\to 0$$
pertanto, anche
$$\frac{3^x}{x^3}\to 0 \qquad \frac{4^x}{x^4}\to 0$$

(non si tratta di forme di indecisione). Il limite dato dunque esiste e fa 0.

5) Osserviamo che
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3+2^x+x^2}{1+x^3+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}+\frac{2^x}{x^2}+1\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3}+1+\frac{2^x}{x^3}\right)}=0$$
dato che, per $x\to-\infty$ si ha
$$2^x\to 0$$
pertanto, anche
$$\frac{2^x}{x^2}\to 0 \qquad \frac{2^x}{x^3}\to 0$$
(non si tratta di forme di indecisione). Anche questo limite dunque esiste e fa 0.

6) Si ha
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+e^x+x^3}{x^4+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{e^x}{x^3}+1\right)}{x^4\left(1+\frac{e^x}{x^4}\right)}=0$$
dato che, per $x\to-\infty$ anche
$$e^x\to 0$$
pertanto
$$\frac{e^x}{x^3}\to 0 \qquad \frac{e^x}{x^4}\to 0$$
(non si tratta di forme di indecisione). Anche questo limite dunque esiste e fa 0.

6.2. Uso dei limiti notevoli

❒ **Esercizio 6.2.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

7) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-e^{2x}}{\sin(3x)}$ **(Esame del 07.06.16)**

8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+e^{-x}}{2-\sqrt{x}}\log\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ **(Esame del 29.06.16)**

9) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{3/2}-\log(1+x^2)+x\sqrt{x}}{\arctan x^{3/2}+x^2}$ **(Esame del 08.06.17)**

10) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}(e^{x\sqrt{x}}-1)\arctan(x+1)}{1-\cos(\pi x)}$ **(Esame del 13.11.17)**

11) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{(x-1)}\right)^{3x}$ **(Esame del 25.01.18)**

12) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x\log(1+x)}$ **(Esame del 15.02.18)**

13) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x)(\sqrt[3]{1+6x}-1)+\sin x^2}{x^3+\sqrt{x^2\sin x}\,[\log(1+\sqrt[3]{x})]}$ **(Esame del 12.06.18)**

14) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x}\sin x^{3/2}}$ **(Esame del 11.09.18)**

15) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(x^4+x^{9/2}\right)}{x^3\sin^2\left(\sqrt{2x}\right)}$ **(Esame del 13.11.18)**

16) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$ **(Esame del 23.01.19)**

17) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x\,(x^2+1)}e^{2x}}{\tan\sqrt[3]{x}}$ **(Esame del 10.04.19)**

18) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x+x^2-\sin x}{x^3+\log(1+x)}$ **(Esame del 05.06.19)**

19) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^2-\pi}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ **(Esame del 17.06.19)**

20) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(x^2+x^{5/2}\right)}{x^{3/2}\arctan\left(\sqrt{2x}\right)}$ **(Esame del 23.07.19)**

21) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\arctan\left(x^2+2\right)}$ **(Esame del 10.09.19)**

22) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin^2(2\sqrt{x})}$ **(Esame del 15.11.19)**

23) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ **(Esame del 07.01.20)**

24) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{\sqrt{x^4+3x}\,\sin\frac{2}{x}}$ **(Esame del 24.06.20)**

25) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+4x)^{\frac{1}{x^2}}$ **(Esame del 08.09.20)**

26) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan x+x^3}{x^2-\pi}\left(e^{1/x}-1\right)$ **(Esame del 23.11.20)**

27) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x-3}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ **(Esame del 23.11.20)**

28) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x+5}\sin\frac{1}{x^{3/2}}$ **(Esame del 23.11.20)**

29) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (3x+x^2)\left(e^{1/x^2}-1\right)$ **(Esame del 14.12.20)**

30) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+x\sqrt{x})^{1/x^3}$ **(Esame del 11.01.21)**

31) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{e^{x^5}-1}}{\log(1+x^2\sqrt{x})}$ **(Esame del 01.02.21)**

32) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+\arctan x)^{1/x}$ **(Esame del 22.02.21)**

33) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/2}-1}{e^{2x}-1}$ **(Esame del 08.06.21)**

34) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x^2\ \sin\frac{2}{x}}$ **(Esame del 22.06.21)**

35) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/2}-1}{\arctan^2(3\sqrt{x})}$ **(Esame del 06.07.21)**

R.

7) Si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{2x}}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\downarrow\atop 1}\underbrace{\frac{3x}{\sin(3x)}}_{\downarrow\atop 1}\frac{1}{3}+\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{1-e^{2x}}{-2x}}_{\downarrow\atop 1}\underbrace{\frac{3x}{\sin(3x)}}_{\downarrow\atop 1}\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3},$$

dove abbiamo potuto spezzare il limite della somma nella somma dei limiti non essendoci forme di indecisione.

8) Osserviamo prima di tutto che

$$\log(1+z)\sim z \qquad z\to 0$$

dunque nel nostro caso, visto che se $x\to+\infty$ si ha che $\frac{1}{x\sqrt{x}}\to 0$, allora

$$\log\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\sim\frac{1}{x\sqrt{x}} \qquad x\to+\infty.$$

A questo punto allora (osserviamo che $e^{-x}\to 0$ se $x\to+\infty$ quindi non è un infinito di ordine superiore alle potenze di x)

$$\frac{3x^2+e^{-x}}{2-\sqrt{x}}\log\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\sim\frac{3x^2+e^{-x}}{2-\sqrt{x}}\,\frac{1}{x\sqrt{x}}\sim\frac{3x^2}{-x^2}=-3$$

quindi il limite proposto esiste e vale -3.

9) Si ha (dividendo numeratore e denominatore per $x^{3/2}$)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{3/2}-\log(1+x^2)+x\sqrt{x}}{\arctan x^{3/2}+x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x^{3/2}}{x^{3/2}}-\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\sqrt{x}+1}{\frac{\arctan x^{3/2}}{x^{3/2}}+\sqrt{x}}=2$$

perché si conclude dai limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^{3/2}}{x^{3/2}} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x^{3/2}}{x^{3/2}} = 1.$$

10) Si osserva che $\boxed{\text{se } x \to 0^+}$

$$e^{x\sqrt{x}} - 1 \sim x\sqrt{x} \qquad \arctan(x+1) \sim \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \qquad 1-\cos(\pi x) \sim \frac{\pi^2 x^2}{2}$$

quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}(e^{x\sqrt{x}}-1)\arctan(x+1)}{1-\cos(\pi x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\,\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi^2 x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}$$

11) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty} e^{3x\log\left(1+\frac{2}{x-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{3x\frac{2}{x-1}} = e^6$$

dove abbiamo usato il fatto che, se $x \to +\infty$ allora $\frac{2}{x-1} \to 0$ e pertanto siamo in grado di usare lo sviluppo asintotico

$$\log\left(1+\frac{2}{x-1}\right) \sim \frac{2}{x-1}$$

usando poi anche il fatto che, se $x \to +\infty$

$$3x\frac{2}{x-1} \to 6.$$

12) Innanzitutto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x\log(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{2}\log(1+x\sin x)-1}}{x\log(1+x)}.$$

A questo punto, se $x \to 0^+$ allora $x\sin x \to 0$ quindi

$$\log(1+x\sin x) \sim x\sin x$$

da cui

$$e^{\frac{1}{2}\log(1+x\sin x)-1} \sim e^{\frac{x\sin x}{2}-1} \sim \frac{x\sin x}{2} \sim \frac{x^2}{2}.$$

D'altra parte, anche $\log(1+x) \sim x$ da cui globalmente il limite dato esiste e fa $1/2$.

13) Ragionando come nell'esercizio precedente, visto che di nuovo $x \to 0$

$$\sqrt[3]{1+6x} - 1 = e^{\frac{1}{3}(\log(1+6x))} - 1 \sim e^{2x} - 1 \sim 2x$$

e inoltre

$$\arctan x \sim x \qquad \sin x^2 \sim x^2 \qquad \sqrt{x^2\sin x}\,\log(1+\sqrt[3]{x}) \sim \sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{x} = x^{11/6}$$

che quindi va a zero più lentamente di x^3. Pertanto possiamo concludere che

$$x^3 + \sqrt{x^2 \sin x}[\log(1+\sqrt[3]{x})] \sim x^{11/6}$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + \sqrt{x^2 \sin x}[\log(1+\sqrt[3]{x})]}{x^{11/6}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x^{11/6}} + \frac{\sqrt{x^2 \sin x}[\log(1+\sqrt[3]{x})]}{x^{11/6}} = 1$$

e allora

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x)(\sqrt[3]{1+6x}-1)+\sin x^2}{x^3 + \sqrt{x^2 \sin x}\ [\log(1+\sqrt[3]{x})]} \\
= & \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x)(\sqrt[3]{1+6x}-1)}{x^3 + \sqrt{x^2 \sin x}\ [\log(1+\sqrt[3]{x})]} + \frac{\sin x^2}{x^3 + \sqrt{x^2 \sin x}\ [\log(1+\sqrt[3]{x})]} \\
= & \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{x^{11/6}} + \frac{x^2}{x^{11/6}} = 0.
\end{aligned}$$

Il limite dato allora esiste e fa 0.

14) Ragionando come sopra, visto che di nuovo $x \to 0^+$

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = e^{\frac{1}{2}(\log(1+x^2))} - 1 \sim e^{\frac{x^2}{2}} - 1 \sim \frac{x^2}{2}$$

e inoltre $\sin x^{3/2} \sim x^{3/2}$. Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x}\sin x^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

15) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per $x \to 0^+$ si ha $x^4 + x^{9/2} \to 0$ e $\sqrt{2x} \to 0$, pertanto si possono usare le seguenti relazioni asintotiche

$$\arctan\left(x^4 + x^{9/2}\right) \sim x^4 + x^{9/2}, \qquad \sin(\sqrt{2x}) \sim \sqrt{2x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(x^4 + x^{9/2}\right)}{x^3 \sin^2\left(\sqrt{2x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 + x^{9/2}}{x^3\left(\sqrt{2x}\right)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 + x^{9/2}}{x^3 \cdot 2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 + x^{9/2}}{2x^4}.$$

Siccome vicino a zero contano le potenze piccole, raccogliamo l'infinitesimo di ordine inferiore e otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(x^4 + x^{9/2}\right)}{x^3 \sin^2\left(\sqrt{2x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 + x^{9/2}}{2x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4\left(1+\frac{x^{9/2}}{x^4}\right)}{2x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{1+x^{1/2}}^{\uparrow 1}}{2} = \frac{1}{2}.$$

16) Il limite si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$. Si ha, usando la definizione di logaritmo,

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\log\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}\right]} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{2x}\log(1+\sin x)}.$$

Studiamo a parte l'esponente. Per $x \to 0$ (e quindi anche per $x \to 0^+$) vale la relazione asintotica

$$\sin x \sim x,$$

da cui

$$\log(1+\sin x) \sim \log(1+x) \sim x.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x}\log(1+\sin x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x}\cdot x = \frac{1}{2},$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\overbrace{\frac{1}{2x}\log(1+\sin x)}^{\to \frac{1}{2}}} = \sqrt{e}.$$

17) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per $x \to 0^+$ si ha $\sqrt[3]{x} \to 0$, pertanto si può usare la seguente relazione asintotica

$$\tan\sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x\,(x^2+1)}e^{2x}}{\tan\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x\,(x^2+1)}e^{2x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{1/2}\sqrt{x^2+1}\,e^{2x}}{x^{1/3}} = \lim_{x\to 0^+}\underbrace{x^{1/6}}_{\to 0}\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to 1}\underbrace{e^{2x}}_{\to 1} = 0.$$

18) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per $x \to 0$ si possono usare le seguenti relazioni asintotiche

$$\tan x \sim x, \qquad \sin x \sim x, \qquad \log(1+x) \sim x.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x + x^2 - \sin x}{x^3+\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-x}{x^3+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3+x}.$$

Siccome vicino a zero contano le potenze piccole, raccogliamo l'infinitesimo di ordine inferiore e otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x + x^2 - \sin x}{x^3+\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\,(x^2+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x}^{\to 0}}{\underbrace{x^2+1}_{\to 1}} = 0.$$

19) Osserviamo innanzitutto che per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x} \to 0$, pertanto si può utilizzare la seguente relazione asintotica
$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}.$$
Si ha dunque
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^2-\pi}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^2-\pi}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^3-\pi x}.$$
Raccogliamo ora gli infiniti dominanti. Osserviamo che a numeratore per $x \to +\infty$ si ha $e^{-x} \to 0$, dunque l'infinito dominante è x^3. Si ha dunque
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^2-\pi}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^3-\pi x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{4e^{-x}}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{\pi}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{1+\frac{4}{e^x x^3}}^{\stackrel{1}{\uparrow}}}{\underbrace{1-\frac{\pi}{x^2}}_{\stackrel{\downarrow}{1}}} = 1.$$

20) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per $x \to 0^+$ si ha $x^2 + x^{5/2} \to 0$ e $\sqrt{2x} \to 0$, pertanto si possono usare le seguenti relazioni asintotiche
$$\sin\left(x^2+x^{5/2}\right) \sim x^2+x^{5/2}, \qquad \arctan(\sqrt{2x}) \sim \sqrt{2x}.$$
Si ha dunque
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin\left(x^2+x^{5/2}\right)}{x^{3/2}\arctan\left(\sqrt{2x}\right)} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+x^{5/2}}{x^{3/2}\sqrt{2x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+x^{5/2}}{\sqrt{2}x^2}.$$
Siccome vicino a zero contano le potenze piccole, raccogliamo l'infinitesimo di ordine inferiore e otteniamo
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin\left(x^2+x^{5/2}\right)}{x^{3/2}\arctan\left(\sqrt{2x}\right)} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+x^{5/2}}{\sqrt{2}x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2\left(1+\frac{x^{5/2}}{x^2}\right)}{\sqrt{2}x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{1+x^{1/2}}^{\stackrel{1}{\uparrow}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

21) L'argomento del logaritmo si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Osserviamo però che
$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x}+\frac{1}{x} = 1+\frac{1}{x},$$
quindi possiamo riscrivere
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\arctan\left(x^2+2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\arctan\left(x^2+2\right)}.$$

Il numeratore si presenta ora nella forma di indecisione $[\infty \cdot 0]$, mentre $\arctan(x^2+2) \to \frac{\pi}{2}$. Per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x} \to 0$, pertanto si può utilizzare la seguente relazione asintotica

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\arctan\left(x^2+2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \cdot \frac{1}{x}}{\arctan\left(x^2+2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x^2}^{\substack{+\infty \\ \uparrow}}}{\underbrace{\arctan\left(x^2+2\right)}_{\substack{\downarrow \\ \frac{\pi}{2}}}} = +\infty.$$

22) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin^2(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{3}\log(x+1)}-1}{\sin^2(2\sqrt{x})}.$$

A questo punto, dai limiti notevoli, si ha per $x \to 0^+$

$$e^{\frac{1}{3}\log(x+1)} - 1 \sim \frac{1}{3}\log(x+1) \sim \frac{1}{3}x$$

e anche

$$\sin^2(2\sqrt{x}) \sim (2\sqrt{x})^2 = 4x$$

da cui

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin^2(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{3}\log(x+1)}-1}{\sin^2(2\sqrt{x})} = \frac{1}{12}$$

23) Il limite si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$. Si ha, usando la definizione di logaritmo,

$$\lim_{x\to0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\log(1+3x)}$$

A questo punto, dai limiti notevoli

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\log\left(1+3x\right) \sim \frac{3x}{\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} \to 0$$

da cui, per la continuità della funzione esponenziale, il limite dato esiste e fa 1.

24) Osserviamo che per $x \to +\infty$

$$\frac{4x+2}{4x-1} \to 1$$

mentre dai limiti notevoli, sempre per $x \to +\infty$

$$\sqrt{x^4+3x}\ \sin\frac{2}{x} \sim x^2\,\frac{2}{x} = 2x \to +\infty$$

quindi il limite dato si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$.
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{\sqrt{x^4+3x}\ \sin\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{3}}\right]^{\frac{3}{4x-1}\sqrt{x^4+3x}\ \sin\frac{2}{x}}$$

A questo punto, per quanto osservato prima

$$\frac{3}{4x-1}\sqrt{x^4+3x}\ \sin\frac{2}{x} \sim \frac{3}{4x}\,2x \to \frac{3}{2}$$

dunque, visto che

$$\left(1+\frac{3}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{3}} \to e$$

il limite dato esiste e fa $e^{3/2}$.

25) Il limite si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$. Si ha, usando la definizione di logaritmo,

$$\lim_{x\to0^+}(1+4x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x^2}\log(1+4x)}$$

A questo punto, dai limiti notevoli, visto che se $z\to0^+$ allora $\log(1+z)\sim z$

$$\frac{1}{x^2}\log(1+4x) \sim \frac{4x}{x^2} \sim \frac{4}{x} \to +\infty$$

quindi il limite dato esiste e fa $+\infty$.

26) Osserviamo innanzitutto che per $x\to+\infty$ si ha $\frac{1}{x}\to0$, pertanto si può utilizzare la seguente relazione asintotica

$$e^{1/x}-1 \sim \frac{1}{x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan n + x^3}{x^2-\pi}(e^{1/x}-1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x + x^3}{x^2-\pi}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x + x^3}{x^3-\pi x}.$$

Raccogliamo ora gli infiniti dominanti. Osserviamo che a numeratore l'infinito dominante è x^3 perché $\arctan x$ è una quantità limitata. Si ha dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x + x^3}{x^2-\pi}(e^{1/x}-1) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x + x^3}{x^3-\pi x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\frac{\arctan x}{x^3}+1\right)}{x^3\left(1-\frac{\pi}{x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\frac{\arctan x}{x^3}+1}^{\stackrel{1}{\uparrow}}}{\underbrace{1-\frac{\pi}{x^2}}_{\stackrel{\downarrow}{1}}} = 1.\end{aligned}$$

27) Osserviamo innanzitutto che per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x} \to 0$, pertanto si può utilizzare la seguente relazione asintotica

$$\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x-3}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x-3}\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x^3-3x^2}.$$

Raccogliamo ora gli infiniti dominanti. Osserviamo che a numeratore per $x \to +\infty$ si ha $e^{-x} \to 0$, dunque l'infinito dominante è x^3. Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x-3}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x^3-3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{e^{-x}}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{1+\dfrac{1}{e^x x^3}}^{\downarrow\, 1}}{\underbrace{1-\dfrac{3}{x}}_{\downarrow\, 1}} = 1.$$

28) Osserviamo innanzitutto che per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x^{3/2}} \to 0$, pertanto si può utilizzare la seguente relazione asintotica

$$\sin\frac{1}{x^{3/2}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x+5}\sin\frac{1}{x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x+5}\cdot\frac{1}{x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x^{5/2}+5x^{3/2}}.$$

Raccogliamo ora gli infiniti dominanti. Osserviamo che a numeratore l'infinito dominante è $x^{5/2}$ perché $\sin x$ è una quantità limitata. Si ha dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x+5}\sin\frac{1}{x^{3/2}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x^{5/2}+5x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}\left(1+\frac{\sin x}{x^{5/2}}\right)}{x^{5/2}\left(1+\frac{5}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{1+\dfrac{\sin x}{x^{5/2}}}^{\downarrow\, 1}}{\underbrace{1+\dfrac{5}{x}}_{\downarrow\, 1}} = 1.\end{aligned}$$

29) Osserviamo innanzitutto che per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x^2} \to 0$, pertanto si può utilizzare la seguente relazione asintotica

$$e^{1/x^2}-1 \sim \frac{1}{x^2}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty}(3x+x^2)\left(e^{1/x^2}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}(3x+x^2)\,\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}+1=1$$

30) Il limite si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$. Si ha, usando la definizione di logaritmo,

$$\lim_{x\to0^+}\left(1+x\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x^3}\log\left(1+x\sqrt{x}\right)}$$

A questo punto, dai limiti notevoli, visto che se $z\to0^+$ allora $\log(1+z)\sim z$

$$\frac{1}{x^3}\log\left(1+x\sqrt{x}\right)\sim\frac{x\sqrt{x}}{x^3}\sim\frac{1}{x\sqrt{x}}\to+\infty$$

quindi il limite dato esiste e fa $+\infty$.

31) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per $x\to0^+$ si ha $x^5\to0$ e $x^2\sqrt{x}\to0$, pertanto si possono usare le seguenti relazioni asintotiche

$$e^{x^5}-1\sim x^5,\qquad\log\left(1+x^2\sqrt{x}\right)\sim x^2\sqrt{x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{e^{x^5}-1}}{\log\left(1+x^2\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^5}}{x^2\sqrt{x}}=1.$$

32) Il limite si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$. Si ha, usando la definizione di logaritmo,

$$\lim_{x\to0^+}(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}\log(1+\arctan x)}$$

A questo punto, dai limiti notevoli, visto che se $z\to0^+$ allora $\arctan z\sim z$ e $\log(1+z)\sim z$

$$\frac{1}{x}\log\left(1+\arctan x\right)\sim\frac{\arctan x}{x}\sim1$$

da cui, per la continuità della funzione esponenziale, il limite dato esiste e fa e.

33) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1+x)^{1/2}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{2}\log(x+1)}-1}{e^{2x}-1}.$$

A questo punto, dai limiti notevoli, si ha per $x\to0^+$

$$e^{\frac{1}{2}\log(x+1)}-1\sim\frac{1}{2}\log(x+1)\sim\frac{1}{2}x$$

e anche

$$e^{2x} - 1 \sim 2x$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/2}-1}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x+1)}-1}{e^{2x}-1} = \frac{1}{4}$$

34) Osserviamo che per $x \to +\infty$

$$\frac{2x+1}{2x-1} \to 1$$

mentre dai limiti notevoli, sempre per $x \to +\infty$

$$x^2 \ \sin\frac{2}{x} \sim x^2\,\frac{2}{x} = 2x \to +\infty$$

quindi il limite dato si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$.
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x^2\ \sin\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x-1}x^2\ \sin\frac{2}{x}}$$

A questo punto, per quanto osservato prima

$$\frac{2}{2x-1}x^2 \ \sin\frac{2}{x} \sim \frac{2}{2x}\,2x \to 2$$

dunque, visto che

$$\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}} \to e$$

il limite dato esiste e fa e^2.

35) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/2}-1}{\arctan^2(3\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x+1)}-1}{\arctan^2(3\sqrt{x})}.$$

A questo punto, dai limiti notevoli, si ha per $x \to 0^+$

$$e^{\frac{1}{2}\log(x+1)} - 1 \sim \frac{1}{2}\log(x+1) \sim \frac{1}{2}x$$

e anche

$$\arctan^2(3\sqrt{x}) \sim (3\sqrt{x})^2 = 9x$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/2}-1}{\arctan^2(3\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x+1)}-1}{\arctan^2(3\sqrt{x})} = \frac{1}{18}.$$

6.3. Limiti che coinvolgono differenza di radici

❒ **Esercizio 6.3.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

36) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}$ **(Esame del 15.12.15)**

37) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+3x-7}-3x$ **(Esame del 15.12.15)**

38) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x+\log x)e^{3x}}{\pi x^2+\sqrt{x}e^{2x}}$ **(Esame del 06.05.16)**

39) $\lim_{x\to+\infty} (2x^2+3)\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1\right)$ **(Esame del 07.06.16)**

40) $\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$ **(Esame del 21.01.20)**

R.

36) Andiamo ad effettuare il seguente cambio di variabile $x=-z$ in modo tale che se $x\to-\infty$ allora $z\to+\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}=\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{-z+\sqrt{z^2+2}}\frac{\sqrt{z^2+2}+z}{\sqrt{z^2+2}+z}=\lim_{z\to+\infty}\frac{\sqrt{z^2+2}+z}{2}=+\infty.$$

37) Possiamo risolvere l'esercizio in due modi.

PRIMO MODO: si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x-7}-3x &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+3x-7}-3x)\frac{\sqrt{2x^2+3x-7}+3x}{\sqrt{2x^2+3x-7}+3x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-7-9x^2}{|x|\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+3x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-7x^2\left(1-\frac{3}{7x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+3x}=-\infty\end{aligned}$$

SECONDO MODO: si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x-7}-3x=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-3x=\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-3\right]=-\infty,$$

dove abbiamo potuto scrivere $|x|=x$ perché $x\to+\infty$.

38) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+\log x)e^{3x}}{\pi x^2+\sqrt{x}e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{\log x}{x}\right)e^{3x}}{\sqrt{x}e^{2x}\left(\frac{\pi x\sqrt{x}}{e^{2x}}+1\right)}=\frac{x\sqrt{x}e^{x}\left(1+\frac{\log x}{x}\right)}{\left(\frac{\pi x\sqrt{x}}{e^{2x}}+1\right)}=+\infty$$

in quanto, dalla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x\sqrt{x}}{e^{2x}}=0$$

39) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(2x^2+3)\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}(2x^2+3)\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1\right)\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(2x^2+3)\frac{3}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{9}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{6}{2}=3$$

40) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\frac{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\frac{\frac{3}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=\frac{3}{2}$$

6.4. Altre tipologie di limiti

6.4.1. Uso delle proprietà dei logaritmi

❒ **Esercizio 6.4.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

41) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^x+\sqrt{4^x+x^4})}{x}$ **(Esame del 01.02.16)**

42) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$ **(Esame del 28.06.17)**

➻ **R.**

41) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(e^x+\sqrt{4^x+x^4}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(e^x+\sqrt{4^x\left(1+\frac{x^4}{4^x}\right)}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(e^x+2^x\sqrt{1+\frac{x^4}{4^x}}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left[e^x\left(1+\frac{2^x}{e^x}\sqrt{1+\frac{x^4}{4^x}}\right)\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log e^x+\log\left(1+\frac{2^x}{e^x}\sqrt{1+\frac{x^4}{4^x}}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\log\left(1+\frac{2^x}{e^x}\sqrt{1+\frac{x^4}{4^x}}\right)}{x}=1$$

in quanto, per la gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{e^x}=0\qquad\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{4^x}=0.$$

42) Stavolta, siccome $x\to+\infty$, si tratta di una forma di indecisione, che **NON** possiamo gestire tramite la gerarchia degli infiniti in quanto l'argomento del logaritmo è un esponenziale e non una potenza. Usiamo invece le proprietà dei logaritmi in questo modo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2e^x\left(\frac{1}{2e^x}+1\right)}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\log e}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}+\frac{\log\left(\frac{1}{2e^x}+1\right)}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

A questo punto, siccome $\log e=1$, il primo termine tende a 2, in quanto $\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\to 0$, invece il secondo termine tende a 0, in quanto $\log\left(\frac{1}{2e^x}+1\right)\to 0$ mentre $x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\to+\infty$. Osserviamo che abbiamo potuto porre $|x|=x$ in quanto $x\to+\infty$ e quindi definitivamente $x>0$. Si può dunque concludere che il limite dato esiste e fa 2.

6.4.2. Limiti che si risolvono grazie a un cambio di variabile

❒ **Esercizio 6.4.2.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

43) $\displaystyle\lim_{x\to1^-}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ **(Esame del 19.07.17)**

R.

43) Operiamo il seguente cambio di variabile $x-1=z$. Si ha allora

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right)}.$$

Dalle proprietà delle funzioni trigonometriche si ottiene

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right).$$

Pertanto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{z\to 0}(-z)\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)} = \frac{2}{\pi}$$

dove abbiamo usato il limite notevole

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{\frac{\pi}{2}z} = 1.$$

6.4.3. Limiti che non si presentano come forme di indecisione

❒ **Esercizio 6.4.3.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

44) $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}}{x}$ **(Esame del 08.06.17)**

45) $\lim_{x\to -\infty}\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$ **(Esame del 28.06.17)**

46) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$ **(Esame del 28.06.17)**

R.

12) Si ha banalmente

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\,x\,\sin\frac{1}{x} = 0$$

perché

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

perché prodotto di una quantità limitata per una infinitesima.

14) Se $x\to -\infty$, allora $e^x\to 0$ e dalla continuità della funzione logaritmo, il numeratore tende a zero, mentre il denominatore tende a $+\infty$. Non si tratta dunque di una forma di indecisione. Il limite dato esiste e fa 0.

16) Se $x \to 0^+$ allora calcolando direttamente, dalla continuità delle funzioni coinvolte si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + 2e^x)}{\sqrt{1 + x^2}} = \log 3.$$

CAPITOLO 7

Calcolo differenziale: esercizi

7.1. Calcolo di derivate di funzioni composte

❐ **Esercizio 7.1.1. (Esame del 07.06.16)** *Calcolare la derivata di*

$$f(x) = \frac{x^{\sin x}}{\arctan(\log x)}$$

➻ **R.** Posto $x^{\sin x} = e^{\sin x \log x}$ si ha

$$f'(x) = \frac{x^{\sin x}\left[\cos x \log x + \sin x \frac{1}{x}\right] \arctan(\log x) - x^{\sin x}\left[\frac{1}{1+\log^2 x}\frac{1}{x}\right]}{\arctan^2(\log x)}.$$

❐ **Esercizio 7.1.2. (Esame del 19.07.16)** *Sia data la funzione*

$$f(x) = \frac{\log(1+\sin^2(3x))}{1+e^{x^2-1}}$$

Calcolare $f'(\pi)$.

➻ **R.** Applicando la formula della derivata del quoziente di funzioni e della derivata della funzione composta si ha che

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+\sin^2(3x)} 2\sin(3x)\cos(3x)3\right)(1+e^{x^2-1}) - 2x(e^{x^2-1})\log(1+\sin^2(3x))}{(1+e^{x^2-1})^2}$$

da cui in modo evidente si ottiene $f'(\pi) = 0$.

❐ **Esercizio 7.1.3. (Esame del 12.01.17)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{\log(1+\sin^2(2x)) - x}{1+e^{x^2-1}}$$

Si noti che con la scrittura $\sin^2(2x)$ *si intende naturalmente* $[\sin(2x)]^2$.

➾ **R.** Applicando la formula della derivata del quoziente di funzioni e della derivata della funzione composta si ha che

$$f'(x) = \frac{\frac{4\sin(2x)\cos(2x)}{1+\sin^2(2x)}(1+e^{x^2-1}) + \log(1+\sin^2(2x))e^{x^2-1}(2x)}{(1+e^{x^2-1})^2}.$$

❐ **Esercizio 7.1.4. (Esame del 18.12.17)** *Calcolare la derivata di*

$$f(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\ \cos x\right)^x.$$

➾ **R.** Si nota che l'espressione della funzione $f(x)$ può essere semplificata. Infatti si ha, dalle proprietà delle potenze

$$f(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^x (\cos x)^x = e\,(\cos x)^x.$$

A questo punto occorre fare la derivata del termine $(\cos x)^x$ che contiene la x sia nella base che nell'esponente. Pertanto **non si può usare** la formula $\frac{d}{dx}([g(x)]^\alpha) = \alpha(g(x))^{\alpha-1}$ perché questa vale se $\alpha \in \mathbb{R}$ e **non si può usare** la formula $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log a$ perché anche in questo caso $a \in \mathbb{R}$ e in entrambi i casi α, a non devono contenere la variabile rispetto alla quale si va a derivare. Quindi la strada corretta da seguire è quella di trasformare il termine $(\cos x)^x$ in un esponenziale usando poi la regola della catena. Si ha

$$f(x) = e\,(\cos x)^x = e\,e^{x\log(\cos x)} = e^{1+x\log(\cos x)}.$$

Da cui

$$f'(x) = e^{1+x\log(\cos x)}\left[\log(\cos x) + x\frac{1}{\cos x}(-\sin x)\right] = e^{1+x\log(\cos x)}\,[\log(\cos x) - x\tan x]$$

L'esercizio naturalmente poteva essere risolto anche senza la semplificazione iniziale, utilizzando le stesse regole. In questo caso si aveva

$$f(x) = \exp\left(x\log\left[e^{\frac{1}{x}}\cos x\right]\right)$$

da cui

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(x\log\left[e^{\frac{1}{x}}\cos x\right]\right)\left\{\log\left[e^{\frac{1}{x}}\cos x\right] + x\frac{1}{e^{1/x}\cos x}\left[e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos x - \sin x e^{1/x}\right]\right\} \\ &= e^{1+x\log(\cos x)}\left[\log e^{1/x} + \log(\cos x) + \frac{x\left[-\frac{1}{x^2}\cos x\right] - \sin x}{\cos x}\right] \\ &= e^{1+x\log(\cos x)}\left[\log(\cos x) - x\tan x\right]. \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 7.1.5. (Esame del 13.11.18)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = x^3\sin^2(\sqrt{2x}) + \arctan(x^2+1)$$

➾ **R.** Applicando la formula della derivata della funzione composta si ha che

$$f'(x) = 3x^2\ \sin^2(\sqrt{2x}) + x^3\, 2\ \sin(\sqrt{2x})\ \cos(\sqrt{2x})\ \frac{1}{2\sqrt{2x}}\,2 + \frac{2x}{1+(x^2+1)^2}$$

❒ **Esercizio 7.1.6. (Esame del 23.01.19)** *Siano date le due funzioni* $f(x) = x^4+2$ *e* $g(y) = 4\log(\sqrt{y})$, *calcolare la derivata della funzione* $h(x) = (g\circ f)(x)$

➾ **R.** Esplicitiamo la formula della funzione composta. Si ha

$$h(x) = (g\circ f)(x) = 4\log\sqrt{x^4+2}.$$

Si ha pertanto

$$h'(x) = \frac{4}{\sqrt{x^4+2}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^4+2}}\,4x^3 = \frac{8x^3}{(x^4+2)}.$$

Risultati analoghi potevano essere ottenuti considerando che

$$f'(x) = 4x^3 \qquad\qquad g'(y) = \frac{4}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{2}{y}$$

da cui

$$h'(x) = g'(f(x))\,f'(x).$$

❒ **Esercizio 7.1.7. (Esame del 22.02.19)** *Sia data la funzione* $f(x) = \sqrt{x^2+1}(3x^2 + \cos(\pi x^3))$. *Calcolare* $f'(x)$.

➾ **R.** Si tratta innanzitutto della derivata di un prodotto. Posto $f(x) = g(x)h(x)$ con $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ e $h(x) = 3x^2 + \cos(\pi x^3)$, si ha innanzitutto $f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$. Dalle regole di derivazione della funzione composta si ha

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(3x^2 + \cos(\pi x^3)) + \sqrt{x^2+1}(6x - \sin(\pi x^3)3x^2\pi).$$

❒ **Esercizio 7.1.8. (Esame del 10.04.19)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = x^{3/2}\cos^3(\sqrt[3]{4x}) + \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$$

➾ **R.** Posto $f(x) = g(x)h(x) + \ell(x)$ con $g(x) = x^{3/2}$, $h(x) = \cos^3(\sqrt[3]{4x})$ e $\ell(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$, si ha innanzitutto $f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x) + \ell'(x)$. Dalle regole di derivazione della funzione composta si ha dunque

$$f'(x) = (\frac{3}{2}\sqrt{x})\cos^3(\sqrt[3]{4x}) - x^{3/2}\,3\cos^2(\sqrt[3]{4x})\,\sin(\sqrt[3]{4x})\,\frac{1}{3}(4x)^{-2/3} - \frac{1}{2}(1+x^3)^{-3/2}.$$

❒ **Esercizio 7.1.9. (Esame del 17.06.19)** *Calcolare la derivata di*

$$f(x) = \arctan(1 + \sqrt{x^2+2}) + \log^2(1 + x^2 + x^4)$$

➾ **R.** Dalle regole di derivazione della funzione composta si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1+\sqrt{x^2+2})^2}\,\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\,2x + 2\log(1+x^2+x^4)\,\frac{1}{1+x^2+x^4}\,(2x+4x^3).$$

❒ **Esercizio 7.1.10. (Esame del 22.07.19)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = x^5\cos^2(\sqrt[3]{x}) + \arctan(x^4+1)$$

➾ **R.** Dalle regole di derivazione della funzione composta si ha

$$f'(x) = 5x^4\,\cos^2(\sqrt[3]{x}) + x^5\,2\cos(\sqrt[3]{x})(-\sin(\sqrt[3]{x}))\,\frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{1+(x^4+1)^2}(4x^3).$$

❒ **Esercizio 7.1.11. (Esame del 10.09.19)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \left(\frac{1}{4x} - 2x\right)e^{1/x^2}$$

➼ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{4x^2} - 2\right) e^{1/x^2} + \left(\frac{1}{4x} - 2x\right) e^{1/x^2} \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

❒ **Esercizio 7.1.12. (Esame del 14.11.19)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{3^x \arctan(x^4+1)}{(1+x)^2+1}$$

➼ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{[3^x \log 3 \arctan(x^4+1) + 3^x \frac{1}{1+(x^4+1)^2} 4x^3]((1+x)^2+1) - 2(1+x)(3^x \arctan(x^4+1))}{[(1+x)^2+1]^2}$$

❒ **Esercizio 7.1.13. (Esame del 15.11.19)** *Calcolare la derivata della seguente funzione*

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3+1}(x^2 + \pi \sin(\pi \sqrt[3]{x}))$$

➼ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x^3+1)^{-4/5}\, 3x^2\, (x^2 + \pi \sin(\pi \sqrt[3]{x})) + (x^3+1)^{1/5} \left(2x + \pi \cos(\pi \sqrt[3]{x})\, \pi\, \frac{1}{3} x^{-2/3}\right)$$

❒ **Esercizio 7.1.14. (Esame del 21.01.20)** *Calcolare la derivata della seguente funzione*

$$f(x) = \frac{(\cos x)^x \sqrt{1+x} - e^{x/2}}{x^2}$$

➼ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{x^4}\Bigg\{ &\left[(\cos x)^x \left(\log(\cos x) + x\frac{1}{\cos x}(-\sin x)\right) \sqrt{1+x} + (\cos x)^x \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}e^{x/2}\right] x^2 \\ &-2x\left[(\cos x)^x \sqrt{1+x} - e^{x/2}\right]\Bigg\} \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 7.1.15. (Esame del 09.07.20)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})\ \log(x^4+1)}{2^{2x}}$$

➻ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{\left[-\sin(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\log(x^4+1) + \cos(\sqrt{x})\frac{1}{x^4+1}(4x^3)\right]2^{2x} - 2^{2x}\log 4(\cos(\sqrt{x})\log(x^4+1)}{16^x}$$

❒ **Esercizio 7.1.16. (Esame del 23.07.20)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{5^x\ \log(x^4+1)}{\sqrt{x^2+3}}$$

➻ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{[5^x\log 5\ \log(x^4+1) + 5^x\frac{1}{x^4+1}(4x^3)]\sqrt{x^2+3} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}2x[5^x\log(x^4+1)]}{x^2+3}$$

❒ **Esercizio 7.1.17. (Esame del 08.09.20)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{\log(1+\sqrt[4]{x}) + x^7}{\sin^2 x + 3^x}$$

➻ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}\,\frac{1}{4}\,x^{-3/4} + 7x^6\right](\sin^2 x + 3^x) - [2\sin x\cos x + 3^x\log 3](\log(1+\sqrt[4]{x}) + x^7)}{[\sin^2 x + 3^x]^2}$$

❒ **Esercizio 7.1.18. (Esame del 09.11.20)** *Sia* $f(x) = (\sin x)^x$ *per* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. *Determinare* $f'(\pi/3)$.

➻ **R.** Si ha

$$f'(x) = (\sin x)^x\left[\log\sin x + \frac{x}{\sin x}(-\cos x)\right]$$

da cui

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\pi/3}\left(\log\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

❐ **Esercizio 7.1.19. (Esame del 11.01.21)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{\cos^2(2x) + \log(3x^2 + e^x)}{x^4 + 4}$$

➼ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{[-4\cos(2x)\sin(2x) + \frac{1}{3x^2+e^x}(6x + e^x)](x^4+4) - 4x^3[\cos^2(2x) + \log(3x^2 + e^x)]}{(x^4+4)^2}$$

❐ **Esercizio 7.1.20. (Esame del 22.02.21)** *Calcolare la derivata della seguente funzione*

$$f(x) = x^{2x+1}$$

➼ **R.** Si ha che

$$f(x) = x^{2x+1} = e^{(2x+1)\log x}$$

dunque

$$f'(x) = x^{2x+1}\left[2\log x + \frac{2x+1}{x}\right]$$

❐ **Esercizio 7.1.21. (Esame del 08.06.21)** *Siano date le funzioni*

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 1} \qquad g(y) = \sin(y + 3)$$

Calcolare la derivata della funzione composta $g \circ f$

➼ **R.** Si ha

$$h(x) = (g \circ f)(x) = \sin(\sqrt{x^4 + 1} + 3)$$

da cui

$$h'(x) = \cos(\sqrt{x^4+1} + 3)\left[\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}4x^3\right]$$

❒ **Esercizio 7.1.22. (Esame del 06.07.21)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{3^x \log(x^5+1)}{\sqrt{x^2+\pi}}$$

➼ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{[3^x \log 3 \, \log(x^5+1) + 3^x \frac{1}{x^5+1}(5x^4)]\sqrt{x^2+\pi} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+\pi}} 2x[3^x \log(x^5+1)]}{x^2+\pi}$$

7.2. Calcolo di derivate di funzioni inverse

❒ **Esercizio 7.2.1. (Esame del 05.06.19)** *Sia* $f(x) = x^4 e^{2x-1}$ *per* $x \geq 0$. *Se* f^{-1} *è la funzione inversa di* f, *determinare* $(f^{-1})'(e)$

➼ **R.**
Innanzitutto si osserva che $f(x_0) = e$ se $x_0 = 1$. Quindi, posto che

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)}$$

dato che $f'(x) = 4x^3 e^{2x-1} + 2x^4 e^{2x-1}$, allora $f'(1) = 6e$ quindi

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6e}.$$

❒ **Esercizio 7.2.2. (Esame del 07.01.20)** *Sia* $f(x) = 3x + \sin x$ *e sia* g *la funzione inversa di* f. *Determinare* $g'(3\pi)$.

➼ **R.** Innanzitutto si osserva che $f(x_0) = 3\pi$ se $x_0 = \pi$. Quindi, posto che

$$g'(3\pi) = \frac{1}{f'(\pi)}$$

dato che $f'(x) = 3 + \cos x$, allora $f'(\pi) = 2$ quindi

$$g'(3\pi) = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{2}.$$

❐ **Esercizio 7.2.3. (Esame del 14.12.20)** *Sia data una funzione* $f(x) = 2x^3 - x$ *e sia* f^{-1} *la sua funzione inversa. Determinare la pendenza della retta tangente al grafico di* f^{-1} *nel punto* $(1, 1)$.

➾ **R.** La pendenza della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(1, 1)$ coincide con il valore della derivata di f^{-1} calcolata nel punto 1. D'altra parte, dalle regole di derivazione della funzione inversa, si ha

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)}$$

e visto che si ha $f'(x) = 6x^2 - 1$ allora $f'(1) = 5$ e

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$$

7.3. Rette tangenti al grafico di funzioni

❐ **Esercizio 7.3.1. (Esame del 18.02.20)** *Sia* $f(x) = \sin \pi x + x^2$ *per* $x \in \mathbb{R}$. *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di* f *nel punto di ascissa* $x = 1$.

➾ **R.** Osserviamo prima di tutto che $f(1) = 1$. Quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1 ha equazione

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1).$$

Dato che $f'(x) = \cos(\pi x)\pi + 2x$ da cui $f'(1) = 2 - \pi$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = 1 + (2 - \pi)(x - 1)$$

❐ **Esercizio 7.3.2. (Esame del 23.11.20)** *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = 4e^x \cos(x^3 + \pi)$ *nel punto di ascissa* $x_0 = 0$. *Si ricorda che* $\cos(\pi) = -1$.

➾ **R.** Osserviamo prima di tutto che $f(0) = -4$. Quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 ha equazione

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0).$$

Dato che $f'(x) = 4e^x \cos(x^3 + \pi) - 4e^x \sin(x^3 + \pi)\, 3x^2$ da cui $f'(0) = -4$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = -4 - 4x$$

❒ **Esercizio 7.3.3. (Esame del 23.11.20)** *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = 2x \cos(x^{3/2})$ *nel punto di ascissa* $x_0 = 0$.

➫ **R.** Osserviamo prima di tutto che $f(0) = 0$. Quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 ha equazione

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0).$$

Dato che $f'(x) = 2\cos(x^{3/2}) - 2x \sin(x^{3/2}) 3/2\sqrt{x}$ da cui $f'(0) = 2$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = 2x$$

❒ **Esercizio 7.3.4. (Esame del 23.11.20)** *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = 2e^x \cos(x^2)$ *nel punto di ascissa* $x_0 = 0$.

➫ **R.** Osserviamo prima di tutto che $f(0) = 2$. Quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1 ha equazione

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0).$$

Dato che $f'(x) = 2e^x \cos(x^2) - 2e^x \sin(x^2) 2x$ da cui $f'(0) = 2$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = 2 + 2x$$

7.4. Rette tangenti al grafico di funzioni composte

❒ **Esercizio 7.4.1. (Esame del 02.09.16)** *Sia* $f(t) = t^2$ *e* $g(s) = e^s$. *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione composta* $g \circ f$ *nel punto di ascissa* $t_0 = 1$.

R. Scriviamo innanzitutto la funzione composta $h = g \circ f$ dove $h(t) = e^{t^2}$. A questo punto, l'equazione della retta tangente cercata risulta

$$y = y_0 + h'(t_0)(t - t_0)$$

dove $t_0 = 1$, $y_0 = h(t_0) = e$, $h'(t_0) = 2t_0 e^{t_0} = 2e$. L'equazione richiesta è dunque $y = 2et - e$.

7.5. Rette tangenti al grafico di funzioni inverse

❒ **Esercizio 7.5.1. (Esame del 08.01.19)** *Sia $f(x) = \log(1 + x) + x + 2$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto $(2, f^{-1}(2))$.*

R.
Osserviamo prima di tutto che $f(x_0) = 2$ se $x_0 = 0$. Quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel suo punto di ascissa 2 ha equazione

$$y = f^{-1}(2) + (f^{-1})'(2)(x - 2) = 0 + \frac{1}{f'(0)}(x - 2).$$

Dato che $f'(x) = \frac{1}{1+x} + 1$ si ha $f'(0) = 2$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = \frac{x - 2}{2}.$$

❒ **Esercizio 7.5.2. (Esame del 24.06.20)** *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x + 2e^x$. Sia f^{-1} la sua funzione inversa di f. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(2, 0)$.*

R. L'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel suo punto di ascissa 2 ha equazione

$$y = f^{-1}(2) + (f^{-1})'(2)(x - 2) = 0 + \frac{1}{f'(0)}(x - 2).$$

Dato che $f'(x) = 1 + 2e^x$ si ha $f'(0) = 3$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = \frac{x - 2}{3}.$$

❒ **Esercizio 7.5.3. (Esame del 22.06.21)** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = x + 3e^x$. *Sia* f^{-1} *la sua funzione inversa di* f. *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di* f^{-1} *nel punto* $(3, 0)$.

➾ **R.** L'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel suo punto di ascissa 3 ha equazione

$$y = f^{-1}(3) + (f^{-1})'(3)(x - 3) = 0 + \frac{1}{f'(0)}(x - 3).$$

Dato che $f'(x) = 1 + 3e^x$ si ha $f'(0) = 4$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = \frac{x - 3}{4}.$$