Michela Eleuteri

ESERCIZIARIO DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

Corso di Laurea in Informatica

Parte restante del corso

Limiti con sviluppi di Taylor, numeri complessi, continuità e derivabilità, studi di funzione, integrali

Indice

1 Esercizi riguardanti approssimazione e polinomi di Mac Laurin **5**
1.1 Limiti risolti con l'uso di polinomi di Mac Laurin 5

2 Esercizi riguardanti numeri complessi **19**
2.1 Richiami di teoria 19
2.2 Esercizi proposti 20
2.2.1 Forma algebrica e forma trigonometrica di numeri complessi 20
2.2.2 Rappresentazione di insiemi nel piano di Gauss 26
2.2.3 Radici di numeri complessi 31
2.2.4 Equazioni in campo complesso 38

3 Esercizi riguardanti continuità e derivabilità di funzioni su un intervallo **45**
3.1 Teorema degli zeri e sue conseguenze 45
3.2 Continuità e derivabilità 49
3.3 Convessità e crescenza 63
3.4 Teorema di De l'Hospital 65

4 Esercizi riguardanti domini di funzioni reali di variabile reale **67**
4.1 Richiami di teoria 67
4.2 Esercizi proposti 68

5 Studio del grafico di funzioni: esercizi proposti **79**
5.1 Richiami di teoria 79
5.2 Esercizi proposti 80
5.2.1 Funzioni razionali fratte 80
5.2.2 Funzioni razionali fratte con valori assoluti 85
5.2.3 Funzioni con radici 91
5.2.4 Funzioni con esponenziali 109
5.2.5 Funzioni con esponenziali e valori assoluti 112

5.2.6 Funzioni con logaritmi . . . 133
5.2.7 Funzioni con logaritmi e valori assoluti . . . 135
5.2.8 Funzioni con logaritmi e funzioni trigonometriche . . . 145
5.2.9 Funzioni definite a tratti . . . 149

6 Esercizi riguardanti calcolo di primitive e integrali definiti 153
6.1 Esercizi riguardanti calcolo di primitive . . . 153
6.2 Esercizi riguardanti integrali definiti . . . 164

7 Integrali generalizzati 171
7.1 Esercizi tratti da temi d'esame di anni precedenti . . . 171

CAPITOLO 1

Esercizi riguardanti approssimazione e polinomi di Mac Laurin

1.1. Limiti risolti con l'uso di polinomi di Mac Laurin

❒ **Esercizio 1.1.1.** **(Esame del 22.02.19)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x^3 \sin^2(\sqrt{2x}) \qquad g(x) = 2x^2 - (\cos x)(\log(1 + 2x^2))$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Si ha

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + o(z^2) \qquad \log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + o(z^3)$$

da cui

$$\sin \sqrt{2x} = \sqrt{2x} - \frac{\sqrt{2x}(2x)}{6} + o(x\sqrt{x}) \qquad \sin^2(\sqrt{2x}) = 2x - \frac{4}{3}x^2 + o(x^2)$$

pertanto

$$f(x) = x^3 \left(2x - \frac{4}{3}x^2 + o(x^2)\right) = 2x^4 - \frac{4}{3}x^5 + o(x^5) = 2x^4 + o(x^4)$$

e d'altra parte

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(2x^2 - 2x^4 + o(x^4)\right) \\ &= 2x^2 - 2x^2 + 2x^4 + x^4 + o(x^4) = 3x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Pertanto
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+o(x^4)}{3x^4+o(x^4)}=\frac{2}{3}$$

❒ Esercizio 1.1.2. **(Esame del 10.04.19)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al secondo ordine delle seguenti funzioni:*
$$f(x)=x\arctan x+\log^2(1+x)\qquad\qquad g(x)=\sqrt{2}x^2$$
2) Si calcoli, se esiste
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

Ma il doppio prodotto non si fa mai???

$$\arctan z=z-\frac{z^3}{3}+o(z^3)\qquad \log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+o(z^3)$$
da cui
$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(x+o(x^2)\right)+\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]^2\\ &= x^2+o(x^2)+x^2+o(x^2)\\ &= 2x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

D'altra parte, per quanto riguarda la funzione g, si tratta di un polinomio quindi non deve essere ulteriormente sviluppata.
Allora
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+o(x^2)}{\sqrt{2}x^2}=\sqrt{2}.$$

❒ Esercizio 1.1.3. **(Esame del 18.06.19)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*
$$f(x)=\log(1+x\sin x)-e^{x^2}+1\qquad\qquad g(x)=\sqrt{1-3x^4}-1$$
2) Si calcoli, se esiste
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

➽ **R.** Prima di tutto si ha

$$x \sin x = x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

da cui

$$\begin{aligned}\log(1 + x\sin x) &= x\sin x - \frac{(x\sin x)^2}{2} + o((x\sin x)^2) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

da cui

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^4 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

D'altra parte, ricordando che

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

si ottiene

$$(1-3x^4)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-3x^4) + o(x^4)$$

quindi

$$g(x) = -\frac{3}{2}x^4 + o(x^4).$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{9}.$$

❒ **Esercizio 1.1.4.** **(Esame del 19.12.19)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x\cos x - \tan x \qquad\qquad g(x) = x\sin^2 x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

➽ **R.** Si ha

$$f(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -\frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

mentre

$$g(x) = x^3 + o(x^3)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{6}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=-\frac{5}{6}$$

❒ Esercizio 1.1.5. **(Esame del 19.12.19)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x)=\sin x-x\cos x \qquad\qquad g(x)=x\tan^2 x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

➠ **R.** Si ha

$$f(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

mentre

$$g(x)=x\left[x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]^2=x(x^2+o(x^2))=x^3+o(x^3)$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\frac{1}{3}$$

❒ Esercizio 1.1.6. **(Esame del 09.01.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al secondo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x)=\cos x-1-\sin(x^2) \qquad\qquad g(x)=x+2x^2-\log(1+x).$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

➠ **R.** Si ha

$$f(x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x^2+o(x^2)=-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

mentre

$$g(x)=x+2x^2-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=\frac{5}{2}x^2+o(x^2)$$

dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{\frac{5}{2}x^2+o(x^2)}=-\frac{3}{5}$$

❒ **Esercizio 1.1.7. (Esame del 23.01.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = 3x\, e^{x^2} - \sin(2x) - x \qquad\qquad g(x) = x\, \sin(x^2)$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

➻ **R.** Si ha

$$f(x) = 3x(1 + x^2 + o(x^2)) - 2x + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) - x = \frac{13}{3}x^3 + o(x^3)$$

e

$$g(x) = x(x^2 + o(x^2)) = x^3 + o(x^3)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{13}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{13}{3}$$

❒ **Esercizio 1.1.8. (Esame del 20.02.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = \log(1 - x) + \sqrt{1 + x}\sin x \qquad\qquad g(x) = \arctan x - x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

➻ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] + \left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] \\ &= -\frac{5}{8}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

mentre

$$g(x) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{8}x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{15}{8}$$

❐ **Esercizio 1.1.9.** **(Esame del 24.06.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x - e^x \sin x \qquad\qquad g(x) = x^2 \cos 2x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \\ &= x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}\right) = -x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

mentre

$$g(x) = x^2\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^4)\right) = x^2 - 2x^4 + o(x^4)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -1$$

❐ **Esercizio 1.1.10.** **(Esame del 09.07.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x - \sin x \qquad\qquad g(x) = x - \log(1 + x)$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = 0$$

❒ **Esercizio 1.1.11.** **(Esame del 23.07.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = \sqrt{1+2x} + e^{-x} - 2 \qquad\qquad g(x) = x - \sin x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} z^3 + o(z^3)$$

dunque

$$\begin{aligned}(1+2x)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{6}(8x^3) + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

D'altra parte, essendo $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, si ha

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

mentre

$$g(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 2$$

❒ **Esercizio 1.1.12.** **(Esame del 08.09.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al secondo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = \log(1+x) - x - 2x^2 \qquad\qquad g(x) = \sin(x^2) - 1 + \cos x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x - 2x^2 = -\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$$

mentre

$$g(x) = x^2 + o(x^2) - \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = -\frac{5}{3}$$

❒ **Esercizio 1.1.13. (Esame del 14.12.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = (1 - \cos x)^2 \qquad g(x) = 2\log(1 + x^2) + \cos(2x) - 1$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

mentre

$$\begin{aligned} g(x) &= 2\left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4) \\ &= 2x^2 - x^4 + o(x^4) - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{-\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)} = -\frac{3}{4}$$

❒ **Esercizio 1.1.14. (Esame del 21.12.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x(\sin x - \cos x + 1) \qquad g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1 - e^x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R.

1) Ricordiamo che

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^4) \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + o(z^4) \qquad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + o(z^4)$$

quindi

$$f(x) = x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + 1\right) = x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

e

$$g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1 - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{2}{3}.$$

❒ **Esercizio 1.1.15. (Esame del 12.01.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = e^{-x/2}\sin x - \log(1+x) \qquad\qquad g(x) = x - x\cos x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R.

1) Ricordiamo che

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + o(z^4)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + o(z^4)$$

A questo punto

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x/2}\sin x - \log(1+x) \\
&= \left[1 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{x}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \left(-\frac{x}{2}\right)^3\frac{1}{6} + o(x^3)\right]\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] \\
&= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\
&= -\frac{3}{8}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

mentre

$$g(x) = x(1 - \cos x) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{8}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = -\frac{3}{4}.$$

❐ **Esercizio 1.1.16. (Esame del 02.02.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = e^{x^3} - 1 \qquad\qquad g(x) = x(\cos x - e^{x^2})$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

R.

Ricordiamo che

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad\qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + o(z^4)$$

A questo punto

$$f(x) = x^3 + o(x^3)$$

mentre

$$g(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x^2\right) = -\frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{3}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{2}{3}.$$

❐ **Esercizio 1.1.17. (Esame del 23.02.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x^2 + \log(1+x)\cdot\log(1-x) \qquad\qquad g(x) = x^3\sin x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

R.

1) Ricordiamo che

$$\log(1+z) = z - \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^3}{3} - \tfrac{z^4}{4} + o(z^4) \qquad\qquad \sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^3)$$

A questo punto

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right]\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right] \\ &= x^2 - x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{3} + o(x^4) = -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$g(x) = x^3 \sin x = x^3(x + o(x)) = x^4 + o(x^4)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{5}{12}.$$

❒ **Esercizio 1.1.18.** **(Esame del 09.06.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = e^{3x} - 1 - 2x\cos x - x \qquad\qquad g(x) = x^2 \arctan x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R.

1) Ricordiamo che

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + o(z^3) \qquad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + o(z^2)$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) - 2x\left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] - x \\ &= 3x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) - 2x + x^3 + o(x^3) \\ &= -\frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

e d'altra parte

$$g(x) = x^2(x + o(x)) = x^3 + o(x^3)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9}{2} + \frac{11}{2}x + o(x)}{x + o(x)}$$

e questo limite non esiste perché tende a $-\infty$ se $x \to 0^+$ mentre tende a $+\infty$ se $x \to 0^-$.

❒ **Esercizio 1.1.19.** **(Esame del 23.06.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = e^x \sin x - x \qquad\qquad g(x) = x^{3/2} \log(1+\sqrt{x})$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R.

1) Ricordiamo che

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + o(z^3)$$

A questo punto

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin x - x = \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] - x \\ &= x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} - x + o(x^3) = x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$g(x) = x^{3/2} \log(1+\sqrt{x}) = x^{3/2}\left[\sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{3} + o(x\sqrt{x})\right] = x^2 - \frac{x^{5/2}}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2 - \frac{x^{5/2}}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 1$$

❒ **Esercizio 1.1.20.** **(Esame del 07.07.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x - \sin x \qquad\qquad g(x) = x - \log(1+x)$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[x\, g(x)]}$$

➻ **R.**

1) Ricordiamo che

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + o(z^3)$$

A questo punto

$$f(x) = x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

mentre

$$g(x) = x - \log(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[xg(x)]} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \frac{1}{3}$$

CAPITOLO 2

Esercizi riguardanti numeri complessi

2.1. Richiami di teoria

➠ Se z è un numero complesso, $z = a+ib$ si dice FORMA ALGEBRICA DEL NUMERO COMPLESSO z; inoltre a si dice PARTE REALE DI z e si indica con $\Re(z)$ mentre b si dice PARTE IMMAGINARIA DI z e si indica con $\Im(z)$.

➠ Il QUOZIENTE di numeri complessi si definisce nel modo seguente

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)\,(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

➠ Si dice COMPLESSO CONIUGATO di un numero complesso $z = a+ib$ il numero complesso $\overline{z} = a - ib$. Inoltre MODULO DI z e si indica con $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Quindi $|z|^2 = z\,\overline{z}$; se $z \in \mathbb{R}$ allora il suo modulo coincide con il valore assoluto.

➠ $|z|$ rappresenta la distanza del numero complesso (o del punto nel piano di Gauss) dall'origine. In particolare $|z_1 - z_2|$ rappresenta la *distanza* di due numeri complessi.

➠ $|z - z_0| = r$ rappresenta nel piano di Gauss una circonferenza di centro il numero complesso z_0 e raggio r; quindi $|z - z_0| < r$ rappresenta il cerchio di centro z_0 e raggio r (privato della circonferenza che è il suo bordo) mentre $|z-z_0| \leq r$ rappresenta il cerchio di centro z_0 e raggio r, bordo incluso. Pertanto in quest'ottica, i numeri complessi di modulo r sono i punti della circonferenza centrata nell'origine e raggio r.

➠ $|z-z_0| = |z-z_1|$ si interpreta come il luogo dei punti del piano *equidistanti* dai punti z_0 e z_1: si tratta pertanto dell'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1. Di conseguenza $|z-z_0| < |z-z_1|$ rappresenta il semipiano (delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1) che contiene z_0 e viceversa $|z-z_0| > |z-z_1|$ rappresenta il semipiano (delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1) che contiene z_1. Se la disuguaglianza è stretta allora l'asse non è compreso, se larga l'asse è compreso.

➠ Si dice che $z \in \mathbb{C}$ è scritto in FORMA TRIGONOMETRICA se sono evidenziati i valori di $\rho \geq 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ per cui si abbia

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

➠ Il prodotto di due numeri complessi $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ di dati moduli ρ, r e argomenti θ, ϕ sono dati da

$$z\,w = (\rho\,r)\,[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)]$$

e se $w \neq 0$ il loro quoziente è dato da

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r}\,(\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi))\,.$$

➠ Se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ allora $\forall n \in \mathbb{Z}$ le sue potenze sono date dalla formula

$$z^n = \rho^n\,\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right).$$

➠ Dato un numero complesso w, diremo che z è una RADICE N-ESIMA COMPLESSA di w se risulta $z^n = w$.

➠ Sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ e $n \geq 1$ intero. Allora esistono esattamente n radici ennesime complesse $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ di w, cioè tali che $z_k^n = w$ per $k = 0, \ldots, n-1$. Inoltre posto $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, si ha che $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ dove

$$\begin{cases} \rho_k = r^{1/n} \\ \theta_k = \dfrac{\phi + 2\pi k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

2.2. Esercizi proposti

2.2.1. Forma algebrica e forma trigonometrica di numeri complessi

❒ **Esercizio 2.2.1.** **(Esame del 09.01.18)** *Scrivere in forma algebrica e trigonometrica il seguente numero complesso*

$$w = (2-2i)^4.$$

➾ **R.** Prima di tutto si ha

$$w = 2^4(1-i)^4.$$

Poniamo
$$z := 1 - i.$$
In forma trigonometrica
$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right]$$
e quindi
$$\begin{aligned}(1-i)^4 = z^4 &= (\sqrt{2})^4\left[\cos\left(\frac{7}{4}4\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}4\pi\right)\right] = 4(\cos(7\pi) + i\sin(7\pi)) \\ &= 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4\end{aligned}$$
da cui
$$w = -64.$$

❒ **Esercizio 2.2.2.** **(Esame del 05.06.19)** *Calcolare*
$$\frac{z^3 - i\overline{z}}{z - |z|}$$
con
$$z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

➽ **R.** Possiamo riscrivere
$$z = a + ib = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$
Troviamo ora z^3, $\overline{z}$ e $|z|$. Si ha immediatamente.
$$\overline{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$
Per trovare z^3 scriviamo z in forma trigonometrica. Si ha
$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$
$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \varphi = \frac{7}{4}\pi$$
da cui
$$z = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi.$$
Dalla formula di De Moivre
$$\begin{aligned}z^3 &= 1^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(3\cdot\frac{7}{4}\pi\right)\right) = \cos\frac{21}{4}\pi + i\sin\frac{21}{4}\pi \\ &= \cos\left(\frac{5}{4}\pi + 4\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi + 4\pi\right) = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.\end{aligned}$$

Andiamo a sostituire nell'espressione. Otteniamo

$$\frac{z^3 - i\overline{z}}{z - |z|} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i - i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i - 1} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i} = \frac{-\sqrt{2}i}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i}.$$

Infine moltiplichiamo per il coniugato del denominatore per ottenere la forma algebrica:

$$\frac{z^3 - i\overline{z}}{z - |z|} = \frac{-\sqrt{2}i}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i} = \frac{-i + \sqrt{2}\,i + 1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{-i + \sqrt{2}\,i + 1}{\frac{1}{2} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-i + \sqrt{2}\,i + 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)\,i}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i.$$

❐ **Esercizio 2.2.3.** (**Esame del 09.01.20**) *Ridurre in forma algebrica il seguente numero complesso*

$$z = (\sqrt{3} + i)^3$$

➼ **R.** Posto $z = \sqrt{3} + i$ si ha

$$|z| = 2 \qquad \arg(z) = \frac{\pi}{6} \qquad \text{da cui} \qquad z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

e quindi

$$z^3 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i.$$

❐ **Esercizio 2.2.4.** (**Esame del 20.02.20**) *Dire quale dei seguenti numeri è sempre un numero reale per qualsiasi $z \in \mathbb{C}$, motivando adeguatamente la risposta.*

$$(a) z - iz \qquad (b) z - \overline{z} \qquad (c) z\,\overline{z} \qquad (d) z + i\overline{z}$$

➼ **R.** Posto $z = a + ib$ si ha

$$(a) z - iz = (a + ib) - i(a + ib) = a + ib - ai + b = (a + b) + i(b - a)$$

$$(b) z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = a - a + ib + ib = 2ib$$

$$(c) z\,\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

$$(d) z + i\overline{z} = (a + ib) + i(a - ib) = a + ib + ai + b = (a + b) + i(a + b)$$

Dunque la risposta esatta è la (c).

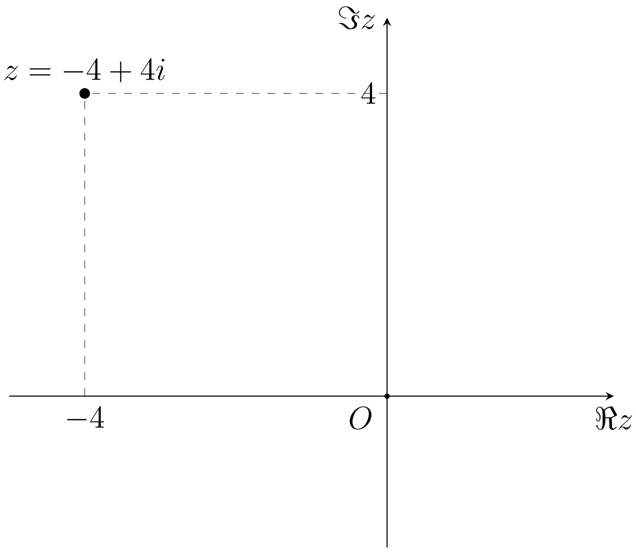
❒ **Esercizio 2.2.5.** **(Esame del 24.06.20)** *Ridurre nella forma $z = a + ib$ e disegnare nel piano di Gauss il numero complesso $z = (1 - i)^5$.*

➼ **R.** Posto $z = 1 - i$ si ha

$$|z| = \sqrt{2} \qquad \arg(z) = \frac{7}{4}\pi \qquad \text{da cui} \qquad z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

e quindi

$$z^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{35}{4}\pi + i\sin\frac{35}{4}\pi\right) = -4 + 4i.$$



❒ **Esercizio 2.2.6.** **(Esame del 08.09.20)** *Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Le seguenti espressioni, tranne una, sono sempre numeri reali. Quale non è necessariamente reale?*

$$(a)\frac{z}{\overline{z}} \qquad (b)|\overline{z}| \qquad (c)z + \overline{z} \qquad (d)z\,\overline{z}$$

➼ **R.** Posto $z = a + ib$ si ha

$$(a)\frac{z}{\overline{z}} = \frac{a+ib}{a-ib}\,\frac{a+ib}{a+ib} = \frac{(a+ib)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2 - b^2 + 2aib}{a^2+b^2}$$

$$(b)|\overline{z}| = \sqrt{a^b + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$(c)z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a$$

$$(d)z\,\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

Quindi la risposta esatta è la (a).

❐ Esercizio 2.2.7. (Esame del 21.12.20) *Sostituite $z = -3 - 4i$ nell'espressione*

$$\frac{z|z| + i\overline{z}}{2i + \overline{z}},$$

ed esprimete il risultato in forma algebrica.

R. Si ha

$$\overline{z} = -3 + 4i \qquad |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

da cui

$$\begin{aligned}\frac{z|z| + i\overline{z}}{2i + \overline{z}} &= \frac{(-3-4i)5 + i(-3+4i)}{2i - 3 + 4i} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{-19-23i}{1-2i}\,\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1}{3}\,\frac{19+38i+23i-46}{5} = \frac{27+61i}{15} = \frac{27}{15} + \frac{61}{15}i.\end{aligned}$$

$-\frac{27}{15}$

❐ Esercizio 2.2.8. (Esame del 21.12.20) *Sostituite $z = 1 - 2i$ nell'espressione*

$$\frac{(\overline{z})^2 + iz - 2}{i|z|^2 - z}$$

ed esprimete il risultato in forma algebrica.

R. Si ha

$$\overline{z} = 1 + 2i \qquad |z|^2 = 5$$

da cui

$$\begin{aligned}\frac{(\overline{z})^2 + iz - 2}{i|z|^2 - z} &= \frac{(1+2i)^2 + i(1-2i) - 2}{5i - (1-2i)} = \frac{1 - 4 + 4i + i + 2 - 2}{-1 + 7i}\,\frac{-1-7i}{-1-7i} \\ &= \frac{(-3+5i)(-1-7i)}{1+49} = \frac{38+16i}{50} = \frac{17}{25} + \frac{8}{25}i\end{aligned}$$

❐ Esercizio 2.2.9. (Esame del 12.01.21) *Ridurre nella forma algebrica e disegnare nel piano di Gauss il seguente numero complesso $(-1+i)^3$*

➼ **R.** Ci sono due modi di risolvere l'esercizio.
PRIMO MODO: applichiamo la formula del cubo del binomio. Si ha

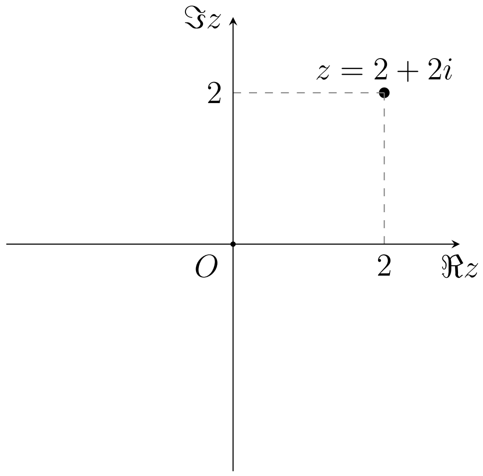
$$(-1+i)^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2 i + 3(-1)(i^2) + (i)^3 = -1 + 3i + 3 - i = 2 + 2i$$

SECONDO MODO: scrivendo il numero $-1+i$ in forma trigonometrica, si ha

$$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$$

da cui, per la formula di De Moivre

$$(-1+i)^3 = (\sqrt{2})^3\left(\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9}{4}\pi\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2+2i$$



❒ **Esercizio 2.2.10.** **(Esame del 23.06.21)** *Ridurre nella forma $z = a + ib$ e disegnare nel piano di Gauss il numero complesso $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2$.*

➼ **R.** Ci sono due modi di risolvere l'esercizio.
PRIMO MODO: applichiamo la formula del quadrato del binomio. Si ha

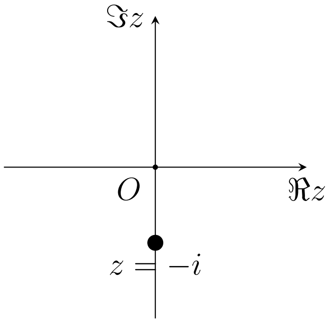
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 = \frac{1}{2}(1-i)^2 = \frac{1}{2}(1-1-2i) = -i$$

SECONDO MODO: scrivendo il numero $(1-i)$ in forma trigonometrica, si ha

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$$

da cui, per la formula di De Moivre

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 &= \frac{1}{2}(1-i)^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\left(\cos\left(\frac{7}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{2}\pi\right)\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -i\end{aligned}$$



2.2.2. Rappresentazione di insiemi nel piano di Gauss

❒ **Esercizio 2.2.11.** **(Esame del 12.01.17)** *Descrivere geometricamente l'insieme*

$$E := \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 - i| = 1,\ |z - 2 + i| = 1\}.$$

R. L'insieme $|z + 2 - i| = 1$ rappresenta una circonferenza nel piano di Gauss centrata nel punto $z_0 = -2 + i$ e di raggio 1. Analogamente l'insieme $|z - 2 + i| = 1$ rappresenta una circonferenza nel piano di Gauss centrata in $z_0 = 2 - i$ e di raggio 1. Le due circonferenze non hanno punti in comune, dunque l'insieme E risulta l'insieme vuoto.

❒ **Esercizio 2.2.12.** **(Esame del 28.06.17)** *Descrivere geometricamente l'insieme dei numeri complessi z tali che $|z| < 1$ e $|z - 1| = |z - i|$.*

R. La disuguaglianza $|z| < 1$ rappresenta una cerchio nel piano di Gauss centrato nell'origine e di raggio 1 (bordo escluso); l'equazione $|z - 1| = |z - i|$ rappresenta invece il luogo dei punti nel piano di Gauss equidistanti da $z = 1$ e da $z = i$, quindi l'asse del segmento, che coincide con la bisettrice del primo e terzo quadrante. L'intersezione dei due insiemi rappresenta un segmento.

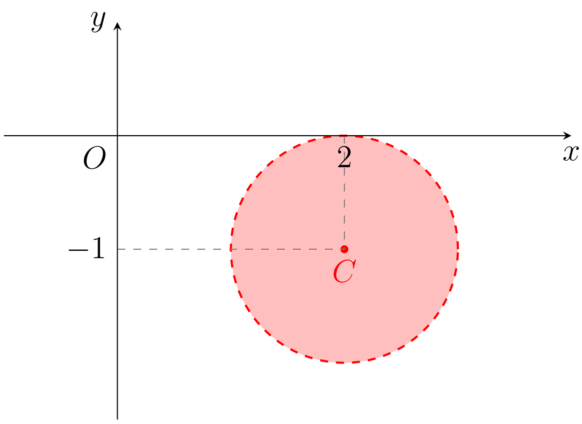
❒ **Esercizio 2.2.13.** **(Esame del 20.12.18)** *Descrivere e disegnare nel piano di Gauss l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$|z - 2 + i| < 1$$

R. In generale la disuguaglianza $|z - z_0| < r$ rappresenta nel piano di Gauss il cerchio di centro z_0 e raggio r, privato della circonferenza che è il suo bordo. Nel nostro caso $z_0 = 2 - i$ e $r = 1$. Si può verificare questo andando a sostituire $z = x + iy$, ottenendo

$$\begin{aligned}
&|x + iy - 2 + i| < 1 \\
&|(x - 2) + (y + 1)\, i| < 1 \\
&\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} < 1 \\
&(x - 2)^2 + (y + 1)^2 < 1
\end{aligned}$$

che rappresenta appunto il cerchio (bordo escluso) di centro $C = (2, -1)$ e raggio $r = 1$.



❐ **Esercizio 2.2.14** **(Esame del 22.02.19).** *Descrivere geometricamente e rappresentare nel piano di Gauss l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$|z + 1 - i| < |z|.$$

Si descriva poi geometricamente e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

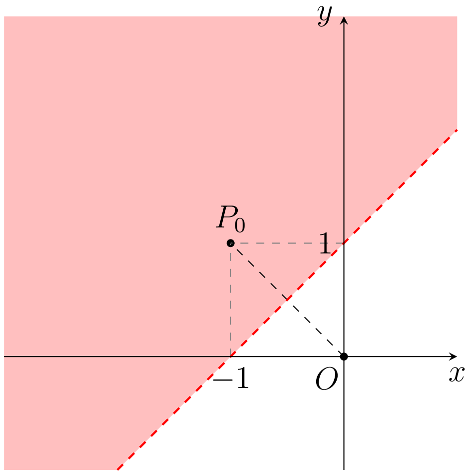
$$|z + i| > 1.$$

R. Primo insieme: In generale la disuguaglianza $|z - z_0| < |z - z_1|$ rappresenta nel piano di Gauss il semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1 e contenente z_0. Nel nostro caso $z_0 = -1 + i$ e $z_0 = 0$. Si può verificare questo andando a sostituire

$z = x + iy$, ottenendo

$$
\begin{aligned}
&|x+iy+1-i| < |x+iy| \\
&|(x+1)+(y-1)\,i| < |x+iy| \\
&\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} < \sqrt{x^2+y^2} \\
&(x+1)^2+(y-1)^2 < x^2+y^2 \\
&x^2+2x+1+y^2-2y+1 < x^2+y^2 \\
&2x-2y+2<0 \\
&y > x+1
\end{aligned}
$$

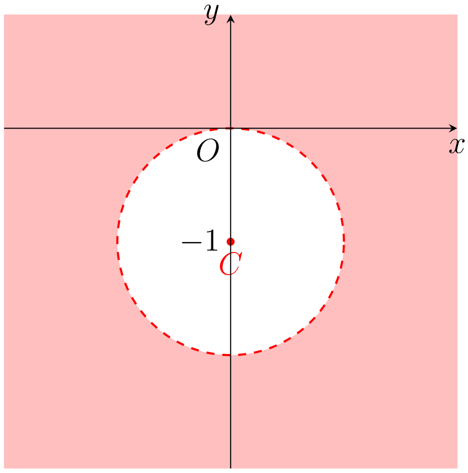
che rappresenta il luogo dei punti che stanno sopra la retta di equazione $y = x + 1$. Tale retta è appunto l'asse del segmento che congiunge $P_0 = (-1, 1)$ e $O = (0, 0)$.



Secondo insieme: In generale la disuguaglianza $|z - z_0| > r$ rappresenta nel piano di Gauss l'area esterna alla circonferenza di centro z_0 e raggio r, privata della circonferenza stessa che è il suo bordo. Nel nostro caso $z_0 = -i$ e $r = 1$. Si può verificare questo andando a sostituire $z = x + iy$, ottenendo

$$
\begin{aligned}
&|x+iy+i| > 1 \\
&|x+(y+1)\,i| > 1 \\
&\sqrt{x^2+(y+1)^2} > 1 \\
&x^2+(y+1)^2 > 1
\end{aligned}
$$

che rappresenta appunto l'esterno del cerchio (bordo escluso) di centro $C = (0, -1)$ e raggio $r = 1$.



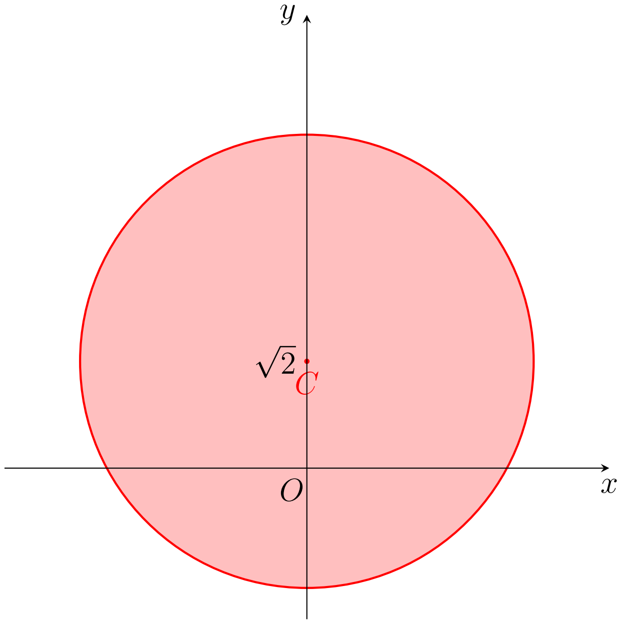
❒ **Esercizio 2.2.15.** **(Esame del 10.04.19)** *Descrivere e disegnare nel piano di Gauss l'insieme dei punti* $z \in \mathbb{C}$ *tali che*

$$|z - \sqrt{2}i| \leq 3$$

➻ **R.** In generale la disuguaglianza $|z - z_0| < r$ rappresenta nel piano di Gauss il cerchio di centro z_0 e raggio r, inclusa la circonferenza che è il suo bordo. Nel nostro caso $z_0 = \sqrt{2}i$ e $r = 3$. Si può verificare questo andando a sostituire $z = x + iy$, ottenendo

$$\begin{aligned}
&|x + iy - \sqrt{2}i| \leq 3 \\
&|x + (y - \sqrt{2})\, i| \leq 3 \\
&\sqrt{x^2 + (y - \sqrt{2})^2} \leq 3 \\
&x^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9
\end{aligned}$$

che rappresenta appunto il cerchio (bordo incluso) di centro $C = (0, \sqrt{2})$ e raggio $r = 3$.



❒ **Esercizio 2.2.16.** **(Esame del 14.12.20)** *Sia dato l'insieme dei punti* $z \in \mathbb{C}$ *tali che* $|z| = |z+1|$. *Scegliere tra le seguenti alternative quale rappresenta l'insieme dato, motivando adeguatamente la risposta.*

(a) una circonferenza di raggio 1
(b) una coppia di rette ortogonali
(c) una retta parallela all'asse reale
(d) una retta parallela all'asse immaginario

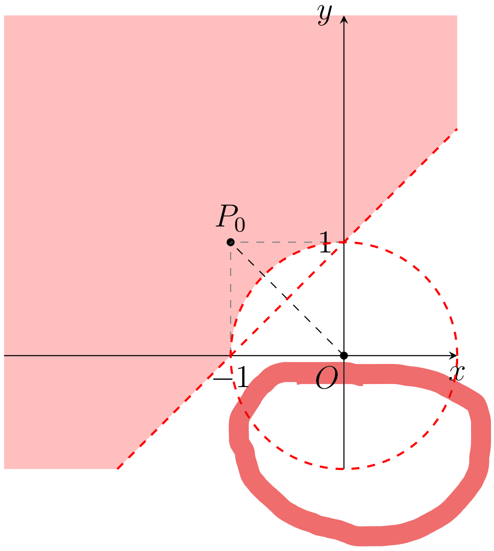
➻ **R.** L'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| = |z+1|$ rappresenta l'asse del segmento che congiunge i punti $z = 0$ e $z = -1$ pertanto rappresenta una retta parallela all'asse immaginario, e la risposta esatta è la (d).

❒ **Esercizio 2.2.17.** **(Esame del 02.02.21)** *Descrivere geometricamente e rappresentare nel piano di Gauss l'insieme dei punti* $z \in \mathbb{C}$ *tali che*

$$|z+1-i| < |z| \qquad \wedge \qquad |z+i| > 1$$

➻ **R.** In generale la disuguaglianza $|z - z_0| < |z - z_1|$ rappresenta nel piano di Gauss il semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1 e contenente z_0. Nel nostro caso $z_0 = -1 + i$ e $z_0 = 0$.

In generale la disuguaglianza $|z - z_0| > r$ rappresenta nel piano di Gauss l'esterno del cerchio di centro z_0 e raggio r, privato della circonferenza che è il suo bordo. Nel nostro caso $z_0 = -i$ e $r = 1$.
Quindi l'intersezione tra i due insiemi rappresenta la parte di semipiano descritta dalla prima disuguaglianza privata del segmento circolare di base la corda che unisce i punti $(-1, 0)$ e $(0, 1)$.



2.2.3. Radici di numeri complessi

❒ **Esercizio 2.2.18.** **(Esame del 19.07.16)** *Determinare il numero complesso $a + ib$ di cui i numeri complessi*

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, 5$$

sono le radici seste.

R. Basta ricordare le formule che legano i moduli e gli argomenti di un numero complesso e delle sue radici. Se w è un numero complesso e z_i le sue radici, con $i = 1, \ldots, n$ allora detto r il modulo di w e ρ_i il modulo degli z_i si ha prima di tutto $\rho_i = r^{1/n}$. Quindi nel nostro caso essendo $n = 6$ si ha che il modulo delle radici è $\sqrt{2}$ quindi il modulo del numero complesso di origine deve per forza essere $(\sqrt{2})^6 = 8$. D'altra parte, il primo argomento delle radici si trova dividendo per n (quindi nel nostro caso per 6) l'argomento del numero complesso di origine. Nel nostro caso il primo argomento delle radici lo leggiamo dalla formula risulta $\pi/8$ che moltiplicato per 6 dà $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Questo è l'argomento del numero complesso originario. Osservando che

$$\cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

si ha che il numero richiesto è

$$w = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}(1-i).$$

❒ **Esercizio 2.2.19.** **(Esame del 19.09.16)** *Determinare le soluzioni dell'equazione*

$$(\bar{z} - i)^3 = 8i$$

➼ **R.** Poniamo

$$w := \bar{z} - i$$

in questo modo l'equazione data diventa $w^3 = 8i$ che è equivalente dunque a cercare le radici terze del numero complesso $8i$ che è un numero complesso che ha modulo 2 e argomento $\frac{\pi}{2}$. Allora le tre radici di tale numero avranno modulo uguale alla radice cubica di 8, cioè 2 e argomenti rispettivamente pari a

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi \qquad \varphi_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Quindi le tre radici cubiche di $8i$ (in forma trigonometrica)

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \qquad w_2 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) \qquad w_3 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

che corrispondono a (in forma algebrica)

$$w_1 = \sqrt{3} + i \qquad w_2 = -\sqrt{3} + i \qquad w_3 = -2i.$$

A questo punto, ricordando che $w = \bar{z} - i$ si ottiene

$$\bar{z}_1 = \sqrt{3} + 2i \qquad \bar{z}_2 = -\sqrt{3} + 2i \qquad \bar{z}_3 = -i$$

quindi passando ai coniugati si ottiene

$$z_1 = \sqrt{3} - 2i \qquad z_2 = -\sqrt{3} - 2i \qquad z_3 = i$$

❐ **Esercizio 2.2.20.** **(Esame del 11.01.18)** *Determinare quale/i dei seguenti numeri complessi*

$$(a) -\frac{\sqrt{3}+i}{2} \qquad (b)\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$(c)\frac{-\sqrt{3}+i}{2} \qquad (d)\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

risulta soluzione dell'equazione

$$1+2z^5+\sqrt{3}i=0$$

motivando la risposta.

R. Prima di tutto osserviamo che l'equazione data può essere riscritta come

$$z^5=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e quindi risolvere l'equazione data significa in realtà trovare le radici quinte del numero complesso $w=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. In forma trigonometrica si ha

$$w=\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

quindi le cinque radici complesse di w sono:

$$z_0=\cos\left(\frac{4}{3}\frac{1}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\frac{1}{5}\pi\right)=\cos\left(\frac{4}{15}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{15}\pi\right)$$
$$z_1=\cos\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{1}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{1}{5}\pi\right)=\cos\left(\frac{7}{15}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{15}\pi\right)$$
$$z_2=\cos\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{2}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{2}{5}\pi\right)=\cos\left(\frac{10}{15}\pi\right)+i\sin\left(\frac{10}{15}\pi\right)$$
$$z_3=\cos\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{3}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{3}{5}\pi\right)=\cos\left(\frac{13}{15}\pi\right)+i\sin\left(\frac{13}{15}\pi\right)$$
$$z_4=\cos\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{4}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{4}{5}\pi\right)=\cos\left(\frac{16}{15}\pi\right)+i\sin\left(\frac{16}{15}\pi\right)$$

quindi la risposta esatta è la (c) in quanto

$$z_2=\cos\left(\frac{10}{15}\pi\right)+i\sin\left(\frac{10}{15}\pi\right)=\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

❒ **Esercizio 2.2.21.** **(Esame del 23.01.19)** *Calcolare le radici quarte complesse del numero* $z = -16$.

➻ **R.** Prima di tutto occorre scrivere z in forma trigonometrica. Siccome z in realtà è un numero reale, in forma algebrica si scrive $z = a + ib = -16 + i \cdot 0$. Quindi

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16,$$

e anche

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = -1, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} = 0$$

da cui $\varphi = \pi$. Quindi la forma trigonometrica el numero complesso z è

$$z = 16\left(\cos\pi + i\sin\pi\right).$$

A questo punto, se w è una radice quarta allora

$$|w| = \sqrt[4]{|z|} = \sqrt[4]{16} = 2,$$

mentre se indichiamo con θ l'argomento di w si ottiene

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{4} = \frac{\varphi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Allora gli argomenti delle quattro radici quarte sono esattamente

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{\pi}{4},\\
\theta_2 &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi,\\
\theta_3 &= \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi,\\
\theta_4 &= \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Quindi le quattro radici quarte sono

$$\begin{aligned}
w_1 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},\\
w_2 &= 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},\\
w_3 &= 2\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},\\
w_4 &= 2\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 2.2.22** **(Esame del 18.06.19).** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(\frac{3}{2}\,i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^3 = w$.

R. Vogliamo applicare la formula di De Moivre, perciò scriviamo il numero complesso $a + ib = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ in forma trigonometrica. Si ha

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$$

e

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

da cui $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Qundi la forma trigonometrica è

$$\frac{3}{2}\,i - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

Utilizzando la formula di De Moivre otteniamo la forma trigonometrica di w, ovvero

$$w = \left(\sqrt{3}\right)^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(3\cdot\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 3\sqrt{3}\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right),$$

da cui anche la forma algebrica

$$w = 3\sqrt{3}\left(1 + i\cdot 0\right) = 3\sqrt{3}.$$

È noto che le radici n-esime di un numero complesso w nel piano di Gauss rappresentano i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|w|}$, dunque nel nostro caso staranno ai vertici di un triangolo equilatero. Siccome fra le soluzioni dell'equazione $z^3 = w$ c'è sicuramente

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$

le altre due radici si trovano aggiungendo $2\pi/3$ e $2\cdot 2\pi/3$ all'argomento di z_1. Si ottiene

$$z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i,$$

$$z_3 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)\right) = \sqrt{3}\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = \sqrt{3}.$$

❒ Esercizio 2.2.23. (Esame del 23.01.20) *Trovare le radici cubiche del numero complesso* $z = 1 - i$ *e disegnarle nel piano di Gauss*.

R. Si ha $|z| = \sqrt{2}$ e $\arg(z) = \frac{7}{4}\pi$ da cui, esprimendo z in forma trigonometrica, si ha

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right).$$

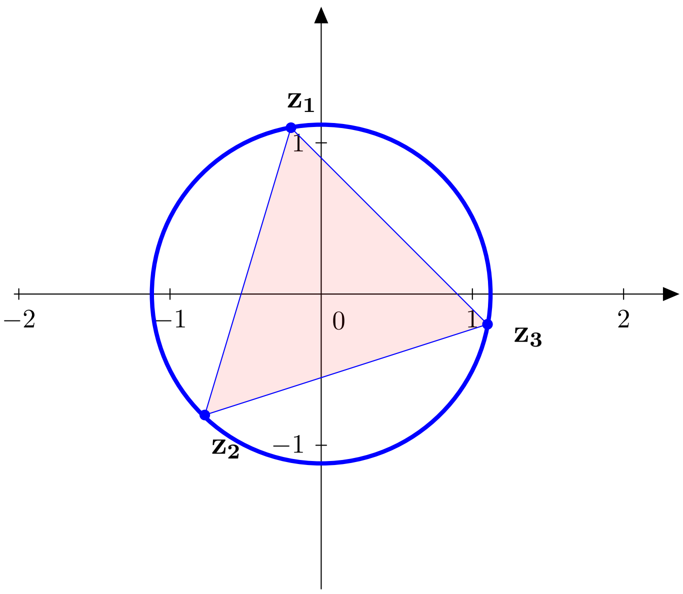
Le radici cubiche di z sono dunque le seguenti:

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\frac{1}{3}\pi\right)\right] = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right] = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{15}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)\right] = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{23}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{23}{12}\pi\right)\right]$$

$$= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right] = -\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}(1+i)$$



❒ Esercizio 2.2.24. (Esame del 23.07.20) *Trovare le radici quarte del numero complesso* $z = \sqrt{3} + 3i$ *e disegnarle nel piano di Gauss*

R. Si ha

$$|z| = 2\sqrt{3} \qquad \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

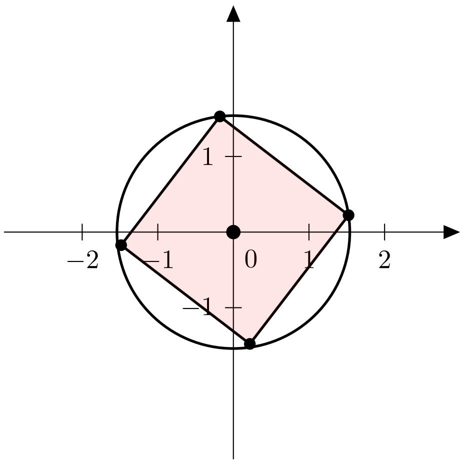
per cui le quattro radici quarte di z sono

$$z_0 = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{1}{3}\frac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{3}\frac{1}{4}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{1}{12}\pi + \pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{12}\pi + \pi\right)\right] = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{13}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{3}{2}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{19}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{19}{12}\pi\right)\right]$$



❒ **Esercizio 2.2.25. (Esame del 09.06.21)** *Trovare le radici quarte del numero complesso $-8i$ e disegnarle nel piano di Gauss.*

R. Si ha

$$|z| = 8 \qquad \arg(z) = \frac{3}{2}\pi$$

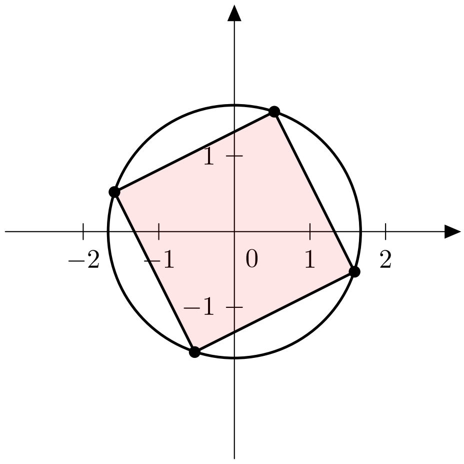
per cui le quattro radici quarte di z sono

$$z_0 = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\frac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\frac{1}{4}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{8}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{3}{8}\pi + \pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{8}\pi + \pi\right)\right] = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{11}{18}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{18}\pi\right)\right]$$

$$z_3 = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{15}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{15}{8}\pi\right)\right]$$



2.2.4. Equazioni in campo complesso

❒ **Esercizio 2.2.26. (Esame del 01.02.16)** *Risolvere nel piano complesso l'equazione*

$$z^2 - z\overline{z} + 6 - i = 0$$

➼ **R.** Poniamo $z = a + ib$. Osserviamo che

$$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2aib \qquad\qquad z\,\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$$

Si ha allora

$$a^2 - b^2 + 2aib - a^2 - b^2 + 6 - i = 0$$

da cui si deduce il sistema di due equazioni in due incognite (reali!)

$$\begin{cases} -2b^2 + 6 = 0 \\ 2aib - i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 3 \\ 2ab = 1. \end{cases}$$

A questo punto, se $b = \sqrt{3}$ allora $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ mentre se $b = -\sqrt{3}$ allora $a = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Le soluzioni del nostro sistema sono dunque

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3}i \qquad\qquad z_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}i.$$

❒ **Esercizio 2.2.27.** **(Esame del 10.07.18)** *Risolvere in campo complesso la seguente equazione*

$$z - 1 - 6i = z^2 - 2z\Re z + |z|^2$$

➼ **R.** Posto $z = a + ib$ si ha

$$a + ib - 1 - 6i = (a + ib)^2 - 2(a + ib)a + a^2 + b^2$$

da cui, sviluppando

$$a + ib - 1 - 6i = a^2 - b^2 + 2aib - 2a^2 - 2aib + a^2 + b^2.$$

Semplificando si ottiene

$$a + ib - 1 - 6i = 0$$

e quindi, separando parte reale e parte immaginaria, si ottiene

$$a = 1 \qquad b = 6.$$

La soluzione dell'equazione proposta risulta $z = 1 + 6i$.

❒ **Esercizio 2.2.28.** **(Esame del 08.01.19)** *Trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione*

$$z^2 + \overline{z}^2 = |z|^2$$

e dire cosa rappresentano nel piano di Gauss.

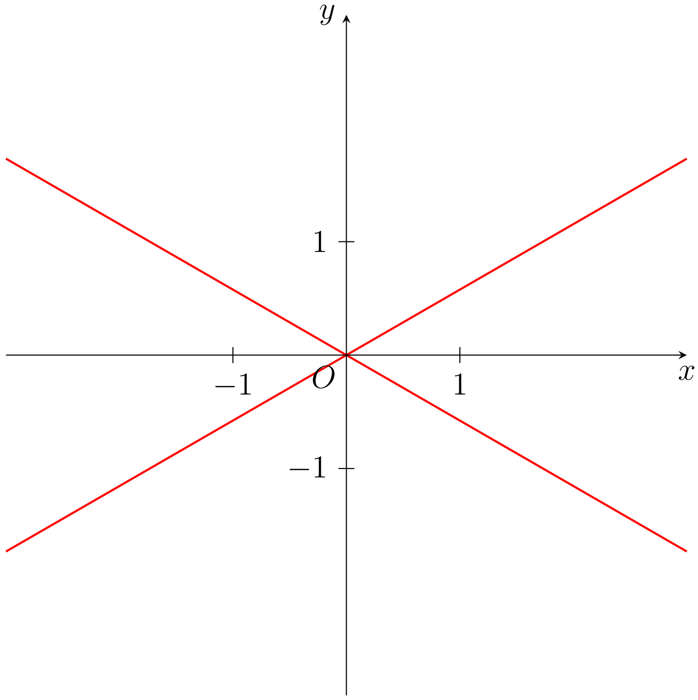
➼ **R.** Poniamo $z = x + iy$. Dunque $\overline{z} = x - iy$ e $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sostituendo si ottiene

$$(x + iy)^2 + (x - iy)^2 = x^2 + y^2,$$

da cui

$$\begin{aligned}
&x^2 + (iy)^2 + 2xyi + x^2 + (iy)^2 - 2xyi = x^2 + y^2 \\
&2x^2 - 2y^2 = x^2 + y^2 \\
&x^2 - 3y^2 = 0
\end{aligned}$$

e dunque $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$. Si ottengono quindi due rette di coefficienti angolari $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ e passanti per l'origine.



❒ **Esercizio 2.2.29. (Esame del 24.07.19)** *Risolvere in* $\mathbb{C}$

$$z(4-\overline{z}) = 4\sqrt{3}i$$

R. Posto $z = a + ib$ si ottiene

$$(a+ib)(4-(a-ib)) = 4\sqrt{3}i$$

che equivale a

$$(a+ib)(4-a+ib) = 4\sqrt{3}i$$

da cui

$$4a - a^2 + aib + 4ib - aib - b^2 = 4\sqrt{3}i.$$

Semplificando e separando parte reale e parte immaginaria, si ottiene immediatamente

$$b = \sqrt{3}$$

da cui

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

che porta a $a = 1$ e $a = 3$. Riassumendo le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i \qquad z_2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

❒ **Esercizio 2.2.30.** (**Esame del 11.09.19**) *Determinare le soluzioni dell'equazione*

$$z^2 = \overline{z}$$

e dire quante di esse sono reali.

R. Posto $z = a + ib$, l'equazione risulta equivalente a

$$(a + ib)^2 = a - ib$$

da cui

$$a^2 - b^2 + 2aib = a - ib.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $b = 0$ oppure $a = -1/2$. Se $b = 0$, dalla prima equazione si ottiene $a^2 - a = 0$ da cui $a = 0$ e $a = 1$.
Se $a = -1/2$ allora dalla prima equazione si ottiene

$$b^2 = \frac{3}{4}$$

quindi riassumendo le soluzioni sono

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = 1 \qquad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Di esse, due sole sono soluzioni reali.

❒ **Esercizio 2.2.31.** (**Esame del 19.12.19**) *Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione* $z^2 = 2\overline{z}$

R. Poniamo $z = a + ib$ da cui $\overline{z} = a - ib$. Pertanto l'equazione data diventa

$$(a + ib)^2 = 2(a - ib)$$

cioè

$$a^2 - b^2 + 2aib = 2a - 2ib.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2a \\ 2ab = -2b \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $b = 0$ oppure $a = 1$. Se $b = 0$ allora inserendo nella prima equazione si ricava $a^2 - 2a = 0$ da cui $a = 0$ oppure $a = 2$. Se invece $a = 1$, dalla prima equazione si ottiene $b^2 = -1$ che non dà soluzioni reali (ricordiamo che a, b devono necessariamente essere numeri reali).

Pertanto le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = 2.$$

❒ **Esercizio 2.2.32.** **(Esame del 19.12.19)** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$(z-2)\overline{z} = i\overline{z}$$

➽ **R.** Poniamo $z = a + ib$ da cui $\overline{z} = a - ib$. Pertanto l'equazione data diventa

$$(a + ib - 2)(a - ib) = ai + b$$

cioè

$$a^2 - aib + aib + b^2 - 2a + 2ib = ai + b.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - b = 0 \\ 2b = a \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $a = 2b$, che, inserita nella prima equazione, fornisce

$$5b^2 - 5b = 0$$

da cui si ricava $b = 0$ oppure $b = 1$. Se $b = 0$ allora anche $a = 0$ mentre se $b = 1$ allora $a = 2$.

Pertanto le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = 2 + i.$$

L'equazione poteva risolversi più semplicemente osservando che si poteva semplificare il termine $\overline{z}$ da ambo i membri, che fornisce però la soluzione $\overline{z} = 0$ e dunque $z = 0$. A quel punto direttamente si ottiene l'altra soluzione $z - 2 = i$ da cui $z = 2 + i$.

❒ **Esercizio 2.2.33.** **(Esame del 09.07.20)** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$\Re z(\overline{z} - i\Im z) = z$$

➼ **R.** Posto $z = a + ib$ l'equazione data diventa

$$a(a - ib - ib) = a + ib$$

che equivale a

$$a^2 - 2aib = a + ib.$$

Separando parte reale e parte immaginaria, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^2 = a \\ -2ab = b \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $a = 0$ o $a = 1$ che, inserite nella seconda equazione, forniscono $b = 0$. Le due soluzioni dell'equazione sono $z = 0$ e $z = 1$.

❒ **Esercizio 2.2.34.** **(Esame del 23.02.21)** *Determinare quale dei seguenti numeri complessi risulta soluzione dell'equazione* $z\,|z|^2 = 8i$

$$(a)1 + 2i \qquad (b)1 - 2i \qquad (c)2i \qquad (d) - 2i$$

➼ **R.** Ci sono molti modi per risolvere l'esercizio. Per completezza, risolviamo l'equazione data. Ponendo $z = a + ib$ allora $|z|^2 = a^2 + b^2$ e quindi l'equazione è equivalente a

$$(a + ib)(a^2 + b^2) = 8i$$

da cui

$$a^3 + ab^2 + a^2ib + ib^3 = 8i.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^3 + ab^2 = 0 \\ a^2b + b^3 = 8 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $a^2 + b^2 = 0$ che darebbe $a = b = 0$ ma che non è compatibile con la seconda equazione, oppure $a = 0$ che inserita nella seconda porta a $b^3 = 8$ cioè (ricordando che b dee essere un numero reale) $b = 2$. Quindi la risposta corretta è la (c).

❒ **Esercizio 2.2.35.** **(Esame del 07.07.21)** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$\Re z(\overline{z} - i\Im z) = z$$

dove $\Re z$ è la parte reale del numero complesso z e $\Im z$ la sua parte immaginaria.

R. Poniamo $z = a + ib$ da cui $\overline{z} = a - ib$, $\Re z = a$ e $\Im z = b$. Allora l'equazione data risulta equivalente a

$$a(a - ib - ib) = a + ib$$

da cui

$$a^2 - 2aib = a + ib$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^2 - a = 0 \\ b(2a + 1) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $a = -1/2$ che non soddisfa la prima equazione, oppure $b = 0$. D'altra parte dalla prima equazione si ottiene $a = 0$ oppure $a = 1$, quindi le soluzioni dell'equazione sono

$$z_1 = 0 \qquad\qquad z_2 = 1.$$

CAPITOLO 3

Esercizi riguardanti continuità e derivabilità di funzioni su un intervallo

3.1. Teorema degli zeri e sue conseguenze

❒ **Esercizio 3.1.1.** **(Esame del 12.01.15)** *Determinare il numero delle soluzioni della seguente equazione*

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{81}{32} = 0$$

giustificando la risposta sulla base della teoria.

R. Poniamo

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{81}{32}.$$

Il dominio di f è $\mathbb{R}$, la funzione f è continua; inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Infine

$$f'(x) = x^2 - 2x - \frac{9}{16}$$

e pertanto

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4} \vee x > \frac{9}{4}.$$

Dato che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $f(-1/4) > 0$, dal teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 < -1/4$ tale che $f(x_0) = 0$. Inoltre, essendo $f(9/4) = 0$ ed essendo f strettamente crescente per $x > 9/4$, gli unici due zeri della funzione f sono x_0 e $9/4$ e non ce ne sono altri. Pertanto l'equazione data ammette esattamente due soluzioni.

❒ **Esercizio 3.1.2.** **(Esame del 20.12.18)** *Sia f una funzione continua tale che $f(0) = -2$ e $f(1) = -1$. Dimostrare che esiste almeno una soluzione $x_0 \in (0, 1)$ tale che*

$$f(x_0) + x_0 + 1 = 0.$$

R. Poniamo

$$g(x) = f(x) + x + 1.$$

Allora si ha che g è una funzione continua, in quanto f lo è. Inoltre

$$g(0) = f(0) + 0 + 1 = -2 + 1 = -1 < 0 \qquad g(1) = f(1) + 1 + 1 = 1 > 0.$$

Quindi la funzione g è continua nell'intervallo $[0, 1]$ e assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Applicando il teorema degli zeri si ottiene che la funzione g ha sicuramente almeno uno zero nell'intervallo considerato e quindi esiste sempre $x_0 \in (0, 1)$ tale che $f(x_0) + x_0 + 1 = 0$.

❒ **Esercizio 3.1.3.** **(Esame del 22.02.19)** *Dimostrare che l'equazione $e^x - 3 = \arctan x$ ha almeno una soluzione.*

R. Poniamo

$$f(x) = e^x - 3 - \arctan x.$$

La funzione f è ben definita su $\mathbb{R}$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 - \frac{\pi}{2} < 0$$

quindi esisteranno due valori (che per semplicità possiamo assumere simmetrici rispetto all'origine, M e $-M$) tale che $f(M) > 0$ e $f(-M) < 0$. La funzione data è continua ovunque e dunque anche nell'intervallo chiuso e limitato $[-M, M]$. Quindi si può applicare il teorema degli zeri nell'intervallo $[-M, M]$ e dunque esiste (almeno) uno zero della funzione e quindi (almeno) una soluzione dell'equazione data.

❒ **Esercizio 3.1.4.** **(Esame del 10.04.19)** *Dimostrare che l'equazione*

$$2x\,e^{-x} = \frac{1}{2}$$

ha almeno due soluzioni.

➻ **R.** Ponendo $f(x) = 2xe^{-x} - \frac{1}{2}$, il problema proposto equivale a trovare gli zeri della f. Si ha che $f(1) = \frac{2}{e} - \frac{1}{2} > 0$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ dunque ripetendo il ragionamento dell'esercizio precedente, si ha un numero pari di soluzioni. Dai limiti agli estremi del dominio, si ha che definitivamente, se $x \to \pm\infty$ la funzione data è negativa; quindi esisteranno due valori (che per semplicità possiamo assumere simmetrici rispetto all'origine, $-M$ e M) tale che $f(M) < 0$ e $f(-M) < 0$. La funzione data è continua ovunque e dunque anche nell'intervallo chiuso e limitato $[-M, M]$. Ma $f(1) > 0$ quindi si può applicare il teorema degli zeri due volte, rispettivamente negli intervalli $[1, M]$ e $[-M, 1]$ e dunque esistono (almeno) due zeri della funzione e quindi (almeno) due soluzioni dell'equazione data.

❒ **Esercizio 3.1.5.** **(Esame del 19.12.19)** *Dimostrare che per $\alpha > 2 - 2\log 2$ l'equazione $e^x = 2x + \alpha$ ha due soluzioni distinte.*

➻ **R.** Poniamo

$$f(x) = e^x - 2x - \alpha.$$

La funzione f è ben definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è continua. Si osserva che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

quindi esisteranno due valori (che per semplicità possiamo assumere simmetrici rispetto all'origine, $-M$ e M) tale che $f(M) > 0$ e $f(-M) > 0$. Inoltre

$$f'(x) = e^x - 2.$$

Osservando il segno della derivata prima, si vede che $x = \log 2$ è punto di minimo assoluto per f. Allora se fosse $f(\log 2) < 0$, potremmo applicare due volte il teorema degli zeri (negli intervalli $[-M, \log 2]$ e $[\log 2, M]$ (non è restrittivo supporre che $M > \log 2$). Ma

$$f(\log 2) = e^{\log 2} - 2\log 2 - \alpha = 2 - 2\log 2 - \alpha < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha > 2 - 2\log 2$$

che era la condizione richiesta.

❒ **Esercizio 3.1.6.** **(Esame del 14.12.20)** *Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = 1$ e $f(1) = 2$. Dimostrare che esiste una soluzione $x_0 \in (0, 1)$ dell'equazione $f(x) + x^2 - 2 = 0$.*

➻ **R.** Poniamo

$$g(x) = f(x) + x^2 - 2.$$

Allora si ha che g è una funzione continua, in quanto f lo è. Inoltre

$$g(0) = f(0) + 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \qquad g(1) = f(1) + 1 - 2 = 2 + 1 - 2 > 0.$$

Quindi la funzione g è continua nell'intervallo $[0, 1]$ e assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Applicando il teorema degli zeri si ottiene che la funzione g ha sicuramente almeno uno zero nell'intervallo considerato e quindi esiste sempre $x_0 \in (0, 1)$ tale che $f(x_0) + x_0^2 - 2 = 0$.

❒ **Esercizio 3.1.7.** **(Esame del 23.06.21)** *Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = -3$ e $f(1) = 1$. Dimostrare che esiste una soluzione $x_0 \in (0, 1)$ dell'equazione $f(x) + x + 1 = 0$.*

➻ **R.** Poniamo

$$g(x) = f(x) + x + 1.$$

Allora si ha che g è una funzione continua, in quanto f lo è. Inoltre

$$g(0) = f(0) + 0 + 1 = -3 + 1 = -2 < 0 \qquad g(1) = f(1) + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 > 0.$$

Quindi la funzione g è continua nell'intervallo $[0, 1]$ e assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Applicando il teorema degli zeri si ottiene che la funzione g ha sicuramente almeno uno zero nell'intervallo considerato e quindi esiste sempre $x_0 \in (0, 1)$ tale che $f(x_0) + x_0 + 1 = 0$.

3.2. Continuità e derivabilità

❒ **Esercizio 3.2.1.** **(Esame del 15.12.15)** *Determinare per quali valori del parametro reale* α *si ha che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} & x > 0 \\ \alpha x + 3 & x \leq 0 \end{cases}$$

risulta continua su tutto $\mathbb{R}$.

➾ **R.** Se $x > 0$ la funzione data è continua (composizione di funzioni continue), se $x < 0$ la funzione data è continua (polinomio di primo grado), quindi resta solo da verificare per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x\,\frac{1}{2}x} = 2$$

perché $\sin x^2 \sim x^2$ se $x \to 0$ e $\sqrt{x+1}-1 \sim \frac{1}{2}x$ se $x \to 0$.
D'altra parte

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 3.$$

Quindi la funzione data non è continua per alcun valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

❒ **Esercizio 3.2.2.** **(Esame del 15.12.15)** *Determinare per quali valori del parametro reale* α *si ha che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^x-1)^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} & x > 0 \\ \alpha x + 2 & x \leq 0 \end{cases}$$

risulta continua su tutto $\mathbb{R}$.

➾ **R.** Se $x > 0$ la funzione data è continua (composizione di funzioni continue), se $x < 0$ la funzione data è continua (polinomio di primo grado), quindi resta solo da verificare per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x-1)^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x\,\frac{1}{2}x} = 2$$

perché $(e^x-1)^2 \sim x^2$ se $x \to 0$ e $\sqrt{x+1}-1 \sim \frac{1}{2}x$ se $x \to 0$.
D'altra parte

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 2.$$

Quindi la funzione data è continua per tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$.

❒ **Esercizio 3.2.3. (Esame del 02.09.16)** *Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui risulta continua la seguente funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x+k & x \le 0 \\ x^{1/x} & x > 0 \end{cases}$$

➼ **R.** Per verificare la continuità si deve avere che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

A questo punto,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = k$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log x}{x}} = 0$$

quindi la funzione è continua ovunque se $k = 0$.

❒ **Esercizio 3.2.4. (Esame del 19.12.16)** *Determinare il valore (o i valori) del parametro reale α per cui la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\cos(\alpha x)} & x \le 0 \\ \dfrac{\sin^2(\alpha x)}{1-\cos x} & x > 0 \end{cases}$$

risulta continua in $[-\pi, \pi]$.

➼ **R.** Se $x \neq 0$ allora la funzione data è composizione di funzioni continue e pertanto risulta continua (nell'intervallo considerato $[-\pi, \pi]$). Quindi basta valutare la continuità in $x = 0$. Si deve avere

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso si ottiene

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = e^{\cos(\alpha 0)} = e$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2(\alpha x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha^2 x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2\alpha^2.$$

Dunque uguagliando i due valori ottenuti si deve avere

$$2\alpha^2 = e \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{e}{2}}.$$

❒ **Esercizio 3.2.5.** **(Esame del 20.12.16)** *Determinare il valore (o i valori) del parametro reale α per cui la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2} & x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{\arctan^{3/2}(\alpha x)}{x\sqrt{x(4+x)}} & x > 0 \end{cases}$$

risulta continua in $\left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right]$.

➼ **R.** La funzione data è ben definita e continua se $x \in \left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right] \setminus \{0\}$ perché composizione di funzioni continue. Quindi rimane da verificare la continuità in $x = 0$. Per fare questo dovrei verificare che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso si ha

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan^{3/2}(\alpha x)}{x\sqrt{x(4+x)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\alpha x)^{3/2}}{2x\sqrt{x}} = \frac{\alpha^{3/2}}{2},$$

dove sono stati usati i seguenti fatti che valgono per $x \to 0$

$$\arctan z \sim z \qquad \sqrt{x(4+x)} \sim 2\sqrt{x}$$

quindi in particolare
$$\arctan^{3/2}(\alpha x) \sim (\alpha x)^{3/2}.$$
Quindi uguagliando i valori ottenuti si ha che la funzione data risulta continua anche in $x = 0$ se
$$\frac{\alpha^{3/2}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

❒ **Esercizio 3.2.6. (Esame del 18.12.17)** *Si determinino il valore (o i valori) del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la seguente funzione*
$$f(x) = \begin{cases} 2x + \alpha & x \leq 0 \\ \dfrac{\sin x - xe^{2x}}{x^2} & x > 0 \end{cases}$$
risulta continua.

➼ **R.** La funzione data risulta continua se $x \neq 0$ perché composizione di funzioni continue. Rimane da verificare la continuità di f in $x = 0$. (La derivabilità non è richiesta e non ce ne cureremo). Dalla definizione di continuità, occorre verificare che
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$
Notare che occorre verificare sia l'esistenza del limite, sia il fatto che questo coincida col valore della funzione nel punto, altrimenti la funzione potrebbe non risultare continua! Nel nostro caso si ha
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - xe^{2x}}{x^2} = -2$$
dato che si ha usando gli sviluppi di Taylor
$$\sin x = x + o(x^2) \qquad e^{2x} = 1 + 2x + o(x) \qquad xe^{2x} = x + 2x^2 + o(x^2)$$
e dunque
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - xe^{2x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^2 + o(x^2)}{x^2} = -2.$$
Lo stesso risultato si poteva ottenere usando il Teorema di De l'Hospital come segue
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - xe^{2x}}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - (1 + 2x)e^{2x}}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x - 2e^{2x} - 2(1 + 2x)e^{2x}}{2} = -2.$$
D'altra parte
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \alpha.$$

Quindi il valore di α che rende f continua anche in $x = 0$ è $\alpha = -2$.

❒ **Esercizio 3.2.7.** **(Esame del 23.01.19)** *Determinare i valori dei parametri a e b per i quali la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(ax^2) - 1 & \text{per } x \geq 0 \\ b\,\cos x + ax & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x = 0$

R. Dalla definizione di continuità

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sin(ax^2) - 1 = -1 = f(0)$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} b\cos x + ax = b$$

da cui si deduce $b = -1$.
D'altra parte, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos(ax^2)\, 2ax = 0$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (-b\sin x + a) = a$$

pertanto $a = 0$. Allora per $a = 0$ e $b = -1$ si ottiene che la funzione data risulta continua e derivabile nel punto $x = 0$.

❒ **Esercizio 3.2.8.** **(Esame del 05.06.19)** *Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{2-2x} - ax & x < 1 \\ \log(3x - 2) - bx^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile in $x_0 = 1$

R. Dalla definizione di continuità

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{2-2x} - ax = 1 - a$$

mentre

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \log(3x-2) - bx^2 = -b = f(1)$$

da cui si deduce $b = a - 1$.
D'altra parte, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 1$ occorre che

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{2-2x}(-2) - a = -2 - a$$

mentre

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{3}{3x-2} - 2bx = 3 - 2b$$

pertanto si ottiene $-2 - a = 3 - 2b$ da cui $a = 2b - 5$.
Mettendo a sistema le due condizioni ottenute, si ottiene $a = 7$ e $b = 6$. Allora per $a = 7$ e $b = 6$ si ottiene che la funzione data risulta continua e derivabile nel punto $x = 1$.

❒ **Esercizio 3.2.9.** **(Esame del 11.09.19)** *Determinare per quali valori di α e β la seguente funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 1 - (\log 2)x}{x} & x > 0 \\ \alpha x + \beta & x \leq 0 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile su $\mathbb{R}$.

R. La funzione risulta continua e derivabile se $x > 0$ perché quoziente di funzioni continue e derivabili e anche se $x < 0$ perché è un polinomio. Per concludere è dunque sufficiente valutare continuità e derivabilità nel punto $x = 0$.
Dalla definizione di continuità

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^x - 1 - (\log 2)x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\log 2} - 1}{x} - \log 2 = 0$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \alpha x + \beta = f(0)$$

da cui si deduce $\beta = 0$.
D'altra parte, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che sia

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{[2^x \log 2 - \log 2]x - 2^x + 1 + (\log 2)x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2^x \log 2)x - 2^x + 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

quindi dal Teorema di De l'Hospital si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(2^x \log 2)x - 2^x + 1}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2^x \log^2 2 + 2^x \log 2 - 2^x \log 2}{2x} = \frac{1}{2}\log^2 2.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \alpha$$

quindi per $\alpha = frac12 \log^2 2$ e $\beta = 0$ si ottiene che la funzione data risulta continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

❒ **Esercizio 3.2.10. (Esame del 25.01.18)** *Determinare il valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1-3x^2}}{x} & x > 0 \\ \dfrac{5}{2}x + \alpha & x \le 0 \end{cases}$$

risulta continua (in $\mathbb{R}$). Per tale valore di α, la funzione f risulta anche derivabile?

R. La funzione data risulta continua se $x \neq 0$ perché composizione di funzioni continue. Rimane da verificare la continuità di f in $x = 0$. Dalla definizione di continuità, occorre verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1-3x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1-3x^2}}{x} \frac{\sqrt{1+2x^2} + \sqrt{1-3x^2}}{\sqrt{1+2x^2} + \sqrt{1-3x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + 2x^2 - 1 + 3x^2}{x\left(\sqrt{1+2x^2} + \sqrt{1-3x^2}\right)} = 0. \end{aligned}$$

In particolare osserviamo che, per $x \to 0^+$

$$\frac{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1-3x^2}}{x} \sim \frac{5}{2}x \tag{3.2.1}$$

che ci servirà in seguito. D'altra parte

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \alpha$$

quindi f è continua su $\mathbb{R}$ se $\alpha = 0$.
Vediamo se per tale valore di α la funzione risulta anche derivabile. Sicuramente la funzione data è derivabile per $x \neq 0$ in quanto per $x > 0$ è quoziente di funzioni derivabili mentre per $x < 0$ è un polinomio. Vediamo se la funzione data è derivabile anche in $x = 0$.
Il modo canonico di procedere è quello di osservare che, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che sia

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left[\frac{4x}{2\sqrt{1+2x^2}} - \frac{-6x}{2\sqrt{1-3x^2}}\right]x - (\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1-3x^2})}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-3x^2}} - \frac{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1-3x^2}}{x^2} = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

in quanto, usando (3.2.1) si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1-3x^2}}{x^2} = \frac{5}{2}.$$

D'altra parte, essendo

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{5}{2}$$

si conclude che per il valore di $\alpha = 0$ la funzione data è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

❒ **Esercizio 3.2.11.** **(Esame del 15.11.19)** *Determinare il valore del parametro α per il quale la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} + 2\alpha & \text{per } x \geq 0 \\ -3x^2 - 1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

sia continua nel punto $x_0 = 0$. Dire se per tale valore di α f è anche derivabile in $x_0 = 0$.

➻ **R.** La funzione data risulta continua se $x \neq 0$ perché composizione di funzioni continue. Rimane da verificare la continuità di f in $x = 0$. Dalla definizione di continuità, occorre verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^{-\alpha x} + 2\alpha) = 1 + 2\alpha = f(0)$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-3x^2 - 1) = -1$$

dunque per la continuità in $x = 0$ deve essere

$$1 + 2\alpha = -1$$

da cui $\alpha = -1$. Vediamo se per tale valore di α la funzione risulta anche derivabile. Sicuramente la funzione data è derivabile per $x \neq 0$ in quanto per $x > 0$ è somma di funzioni derivabili mentre per $x < 0$ è un polinomio. Vediamo se la funzione data è derivabile anche in $x = 0$.
Il modo canonico di procedere è quello di osservare che, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che sia

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\alpha x}(-\alpha) = -\alpha = 1$$

dalla scelta fatta al passo precedente. D'altra parte, essendo

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -6x = 0$$

si conclude che per il valore di $\alpha = -1$ la funzione data non è derivabile in $x = 0$.

❒ **Esercizio 3.2.12.** **(Esame del 23.01.20)** *Determinare per quale valore del parametro reale α la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi - x) & x \leq 0 \\[2mm] \dfrac{\sin(\alpha x^2)}{xe^{2x} - \sin x} & x > 0 \end{cases}$$

risulta continua in $x = 0$.

➽ **R.** Dalla definizione di continuità, occorre verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos(\pi - x) = -1 = f(0)$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\alpha x^2)}{xe^{2x} - \sin x}$$

che si presenta in una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Osservando che

$$xe^{2x} - \sin x = x\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 2x^2 + o(x^2)$$

si ha che, per $x \to 0$

$$xe^{2x} - \sin x \sim 2x^2$$

da cui, per $x \to 0$

$$\frac{\sin(\alpha x^2)}{xe^{2x} - \sin x} \sim \frac{\alpha x^2}{2x^2} = \frac{\alpha}{2}$$

dunque per la continuità in $x = 0$ deve essere

$$\frac{\alpha}{2} = -1$$

da cui $\alpha = -2$.

❐ **Esercizio 3.2.13. (Esame del 21.12.20)** *Determinare per quale valore del parametro β la funzione*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x & \text{per } x < 0 \\ \log(1 + 2x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

è derivabile nel punto $x_0 = 0$

➽ **R.** Osserviamo che la funzione data è continua nel punto $x_0 = 0$ in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

essendo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log(1 + 2x) = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Per verificare la derivabilità in $x_0 = 0$, da un corollario del teorema di De l'Hospital, occorre che sia

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Nel nostro caso si ha

$$2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+2x} = \lim_{x\to 0^-} 2x + \beta = \beta$$

da cui

$$\beta = 2.$$

Per tale valore di β la funzione risulta derivabile nel punto $x_0 = 0$.

❒ Esercizio 3.2.14. **(Esame del 08.09.20)** *Determinare per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che*

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{per } x < -1 \\ \alpha|x| - 1 & \text{per } x \geq -1 \end{cases}$$

è continua in $x_0 = -1$. Dire se per tale valore di α la funzione è anche derivabile in $x_0 = -1$

R. Dalla definizione di continuità, occorre verificare che

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1).$$

Nel nostro caso si ha

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \alpha|x| - 1 = \alpha - 1 = f(-1)$$

mentre

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \cos(\pi x) = -1$$

dunque per la continuità in $x = 0$ deve essere
x=-1

$$\alpha - 1 = -1$$

da cui $\alpha = 0$. Vediamo se per tale valore di α la funzione risulta anche derivabile in $x = 0$. Il modo canonico di procedere è quello di osservare che, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che sia

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = 0$$

perché se $\alpha = 0$, per $x > -1$ la funzione è costante. D'altra parte, essendo

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} \pi \sin(\pi x) = 0$$

invertito x con alfa

si conclude che per il valore di $\alpha = -1$ la funzione data è derivabile anche in $x = 0$.

❒ **Esercizio 3.2.15.** **(Esame del 21.12.20)** *Determinare per quali valori di α e β la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ x^2 + \alpha x + \beta & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x_0 = 1$

R. Dalla definizione di continuità

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 + \alpha x + \beta = 1 + \alpha + \beta$$

mentre

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - x^2 = 0 = f(1)$$

da cui si deduce $\alpha + \beta = -1$.
D'altra parte, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 1$ occorre che sia

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x + \alpha = 2 + \alpha$$

e inoltre

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -2x = -2$$

da cui si deduce che $\alpha = -4$ mentre $\beta = 3$. Per tali valori di α e β si ottiene che la funzione data risulta continua e derivabile in $x_0 = 1$.

❒ **Esercizio 3.2.16.** **(Esame del 23.02.21)** *Determinare per quale valore di* $\alpha \in (-2,2)$ *risulta continua la seguente funzione*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{10-x^2}} & -2 \le x \le \alpha \\ \dfrac{1}{x+2} & \alpha \le x \le 2. \end{cases}$$

Per tale valore di α *la funzione risulta anche derivabile in* $(-2,2)$*? Motivare la risposta.*

R. La funzione data risulta sicuramente continua se $x \neq \alpha$ in quanto quoziente di funzioni continue. Per concludere, occorre verificare che

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha^-} f(x) = f(\alpha).$$

Nel nostro caso si ha

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} \frac{1}{\alpha+2}$$

mentre

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^-} \frac{1}{\sqrt{10-\alpha^2}}$$

dunque per la continuità deve essere

$$\frac{1}{\alpha+2} = \frac{1}{\sqrt{10-\alpha^2}}$$

da cui

$$10-\alpha^2 = \alpha^2+4\alpha+4$$

che porta a $\alpha = 1$ oppure $\alpha = -3$. Siccome l'esercizio chiede di determinare il valore di $\alpha \in (-2,2)$, l'unico valore accettabile risulta $\alpha = 1$. Questo è il valore di α che rende continua la funzione data.

Vediamo se per tale valore di α la funzione risulta anche derivabile. Sicuramente la funzione risulta derivabile per $x \neq 1$ in quanto quoziente di funzioni derivabili.

Il modo canonico di procedere è quello di osservare che, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che sia

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} -\frac{1}{(x+2)^2} = -\frac{1}{9}$$

D'altra parte, essendo

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{(10-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{27}$$

si conclude che per il valore di $\alpha = 1$ la funzione data non è derivabile in $x = 1$.

❒ **Esercizio 3.2.17. (Esame del 07.07.21)** *Sia*

$$g(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 1 & \text{per } x < 1 \\ \beta x + 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

Si determinino α e β affinché $g(x)$ sia continua e derivabile.

R. La funzione data risulta sicuramente continua e derivabile per $x \neq 1$ in quanto risulta una funzione polinomiale.
Vediamo per quali valori di α e β la funzione data risulta continua e derivabile anche in $x = 1$.
Dalla definizione di continuità si ha

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \beta x + 1 = 1 + \beta + 1 = g(1)$$

mentre

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \alpha x^2 - 1 = \alpha - 1$$

da cui si deduce $\alpha = \beta + 2$.
D'altra parte, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 1$ occorre che sia

$$\lim_{x\to 1^+} g'(x) = \lim_{x\to 1^-} g'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 1^+} g'(x) = \lim_{x\to 1^+} \beta$$

e inoltre

$$\lim_{x\to 1^-} g'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2\alpha x = 2\alpha$$

da cui si deduce che $\alpha = -2$ mentre $\beta = -4$. Per tali valori di α e β si ottiene che la funzione data risulta continua e derivabile anche in $x_0 = 1$.

3.3. Convessità e crescenza

❒ **Esercizio 3.3.1.** **(Esame del 06.05.16)** *Determinare l'insieme in cui la funzione*

$$f(x) = 3\log x - \log^2 x$$

è strettamente convessa (ha concavità verso l'alto).

➻ **R.** La funzione $f(x)$ è definita per $x > 0$. Inoltre

$$f'(x) = \frac{3}{x} - 2\log x\,\frac{1}{x} = \frac{3 - 2\log x}{x}$$

e anche

$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{x}x - (3 - 2\log x)}{x^2} = \frac{2\log x - 5}{x^2}.$$

La condizione di stretta convessità è dunque equivalente a richiedere che $f''(x) > 0$ cioè

$$2\log x - 5 > 0 \Leftrightarrow \log x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x > e^{5/2}.$$

L'insieme richiesto è dunque $(e^{5/2}, +\infty)$.

❒ **Esercizio 3.3.2.** **(Esame del 19.12.16)** *Siano* $g(y) = \frac{y^2}{1-y}$ *e* $f(x) = e^{-x}$. *Determinare l'insieme dove la funzione* $(g \circ f)(x)$ *(definita per* $x \neq 0$*) è decrescente*

➻ **R.** Sia $h(x) = (g \circ f)(x)$. Si ottiene

$$h(x) = \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}}$$

quindi

$$h'(x) = \frac{-2e^{-2x}(1 - e^{-x}) - (e^{-x})e^{-2x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{1}{(1 - e^{-x})^2}[e^{-3x} - 2e^{-2x}].$$

Quindi l'insieme dove la funzione h è decrescente è l'insieme degli x dove

$$h'(x) \leq 0$$

cioè gli x tali che

$$e^{-3x} - 2e^{-2x} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1 - 2e^{x}}{e^{3x}} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; e^{x} \geq 1/2 \;\Leftrightarrow\; x \geq \log(1/2) = -\log 2$$

❒ **Esercizio 3.3.3.** **(Esame del 26.06.18)** *Siano date le funzioni* $f(x) = e^x$ *e* $g(y) = \frac{x^2}{x-1}$.

1) Determinare l'insieme dove la funzione composta $h(x) := (g \circ f)(x)$ *risulta essere non negativa.*
2) Determinare l'insieme dove la funzione composta risulta essere crescente

R. 1) Sia $h(x) = (g \circ f)(x)$. Si ottiene

$$h(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$$

Pertanto, essendo $e^{2x} > 0$, la funzione h risulta non negativa se $e^x - 1 > 0$ (perché il denominatore non si può annullare) cioè se $x > 0$.

2) D'altra parte si ha

$$h'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x - 1) - e^x\, e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{3x} - 2e^{2x}}{(e^x - 1)^2}$$

quindi l'insieme dove la funzione h è crescente è l'insieme degli x dove

$$h'(x) \geq 0$$

cioè gli x tali che

$$e^{3x} - 2e^{2x} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2x}(e^x - 2) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; e^x \geq 2 \;\Leftrightarrow\; x \geq \log 2.$$

❒ **Esercizio 3.3.4.** **(Esame del 08.01.19)** *Siano* $f(x) = e^{x/2}$ *e* $g(y) = \frac{y^2}{1-y}$. *Determinare l'insieme dove la funzione composta* $(g \circ f)(x)$ *definita per* $x \neq 0$ *è decrescente*

R. Sia $h(x) = (g \circ f)(x)$. Si ottiene

$$h(x) = \frac{e^x}{1 - e^{x/2}}$$

Pertanto

$$h'(x) = \frac{e^x - e^{3/2x} - \frac{1}{2}e^{3/2x}}{(1 - e^{x/2})^2} = \frac{e^x - \frac{3}{2}e^{3/2x}}{(1 - e^{x/2})^2}$$

quindi l'insieme dove la funzione h è decrescente è l'insieme degli x dove

$$h'(x) \leq 0$$

cioè gli x tali che

$$e^x - \frac{3}{2}e^{3/2x} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; e^x\left(1 - \frac{3}{2}e^{1/2x}\right) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; e^{1/2x} \geq \frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; x \geq 2\log\frac{2}{3}.$$

❒ **Esercizio 3.3.5.** **(Esame del 02.02.21)** *Siano date le funzioni* $f(x) = e^x$ *e* $g(y) = \frac{y}{1+y}$. *Determinare l'insieme dove la funzione* $(g \circ f)(x)$ *è crescente*

➽ **R.** Sia $h(x) = (g \circ f)(x)$. Si ottiene

$$h(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Pertanto

$$h'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x\,e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

quindi l'insieme dove la funzione h è crescente è l'insieme degli x dove

$$h'(x) \geq 0$$

cioè $\mathbb{R}$. La funzione h pertanto è sempre crescente.

3.4. Teorema di De l'Hospital

❒ **Esercizio 3.4.1.** **(Esame del 12.01.21)** *Calcolare il seguente limite, se esiste, usando il Teorema di de l'Hôpital*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1+x^2) - \frac{\pi}{4}}{\sin x + e^x - 1}$$

➽ **R.** Siccome $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, il limite dato si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Dal Teorema di De l'Hospital si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1+x^2) - \frac{\pi}{4}}{\sin x + e^x - 1} \overset{\text{(H)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+(1+x^2)^2}}{\cos x + e^x} = 0$$

CAPITOLO 4

Esercizi riguardanti domini di funzioni reali di variabile reale

4.1. Richiami di teoria

Per la determinazione del dominio di funzioni reali di una variabile reale occorre ricordare quanto segue:

➠ le operazioni di addizione, sottrazione e prodotto sono sempre possibili (quindi le funzioni razionali intere, cioè i polinomi, hanno come insieme di esistenza $\mathbb{R}$)

➠ l'operazione di divisione non ha significato se il divisore è nullo: quindi le funzioni razionali fratte hanno per insieme di definizione tutti i numeri reali tranne quelli che eventualmente annullino il denominatore

➠ l'operazione di estrazione di radice di indice pari ha risultato reale se il radicando è positivo o nullo

➠ l'operazione di estrazione di radice di indice dispari ha sempre senso purché esista il radicando

➠ il logaritmo ha significato se l'argomento è positivo e purché la base sia un numero positivo e diverso da 1

➠ l'esponenziale con base (costante!!) positiva esiste purché esista l'esponente (variabile)

➠ la potenza con base ed esponente variabili si considera solo per valori positivi della base

➠ le funzioni goniometriche $y = \sin x$ e $y = \cos x$ esistono per ogni x reale, la funzione $y = \tan x$ esiste se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

➠ le funzioni $y = \arcsin x$ e $y = \arccos x$ sono definite per $-1 \leq x \leq 1$ mentre $y = \arctan x$ esiste per ogni x reale

➠ gli indici dei radicali devono essere interi positivi

4.2. Esercizi proposti

❒ **Esercizio 4.2.1.** *Determinare il dominio delle seguenti funzioni:*

1) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x^2-1}$ **(Esame del 20.12.18)**

2) $f(x) = \dfrac{\log(1-x^2)}{\sqrt{x^2-2x}}$ **(Esame del 08.01.19)**

3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}}$ **(Esame del 23.01.19)**

4) $f(x) = \log\left(\dfrac{2x-1}{|x|-1}\right)$ **(Esame del 22.02.19)**

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-|x|}}{\log|x|}$ **(Esame del 10.04.19)**

6) $f(x) = \dfrac{\arctan(x^3+3)}{|x^2-1|}$ **(Esame del 05.06.19)**

7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x^2-1|(x-2)^2}}$ **(Esame del 18.06.19)**

8) $f(x) = \sqrt{\log^2 x - \log x}$ **(Esame del 24.07.19)**

9) $f(x) = x\sqrt{x^2-x} - x^2\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ **(Esame del 11.09.19)**

➻ **R.** 1) La funzione è ben definita quando esistono le radici. Essendo entrambe di indice pari, questo equivale ad imporre che i loro argomenti siano non negativi, ovvero

$$\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x^2-1 \geq 0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $x \leq 1$, mentre dalla seconda $x \leq -1 \vee x \geq 1$. Intersecando questi due insiemi si ottiene $x \leq -1 \vee x = 1$. Dunque

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x = 1\}.$$

2) La funzione è ben definita quando esistono il logaritmo e la radice, e il denominatore è diverso da 0. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} 1-x^2>0 \\ x^2-2x\geq 0 \\ \sqrt{x^2-2x}\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x^2>0, \\ x^2-2x>0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $-1<x<1$, mentre dalla seconda $x<0 \vee x>2$. Intersecando questi due insiemi si ottiene $-1<x<0$. Dunque

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}:-1<x<0\}.$$

3) La funzione è ben definita quando esistono le radici e il denominatore è diverso da 0. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0, \\ x\geq 0, \\ \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\neq 0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $x\leq -1\vee x\geq 1$, mentre la terza è equivalente a

$$\sqrt{x^2-1}\neq\sqrt{x}\Leftrightarrow x^2-1\neq x\Leftrightarrow x^2-x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Intersecando

$$\begin{cases} x\leq -1\vee x\geq 1, \\ x\geq 0, \\ x\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

ed essendo $-1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0<1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ si ottiene $x\geq 1\wedge x\neq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dunque

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:1\leq x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vee x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

4) La funzione è ben definita quando esiste il logaritmo. Questo equivale ad imporre che il denominatore del suo argomento sia diverso da 0 e che l'argomento stesso sia positivo, ovvero

$$\begin{cases} |x|-1\neq 0, \\ \dfrac{2x-1}{|x|-1}>0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $|x|\neq 1$ ovvero $x\neq\pm 1$, mentre indicando con $N(x)$ e $D(x)$ il numeratore e il denominatore della seconda si ha

$$N(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2},$$
$$D(x)>0\Leftrightarrow |x|>1\Leftrightarrow x<-1\vee x>1.$$

Dunque la seconda condizione è verificata se $-1 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1$. Intersecando

$$\begin{cases} x \neq \pm 1, \\ -1 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1, \end{cases}$$

si ottiene $-1 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1$. Dunque

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : -1 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1 \right\}.$$

5) La funzione è ben definita quando esistono la radice e il logaritmo, e il denominatore è diverso da 0. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} 3 - |x| \geq 0, \\ |x| > 0, \\ \log |x| \neq 0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $|x| \leq 3$ ovvero $-3 \leq x \leq 3$, mentre la seconda è verificata per $x \neq 0$. Infine la terza è equivalente a

$$\log |x| \neq 0 = \log 1 \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

Intersecando questi tre insiemi si ottiene $-3 \leq x \leq 3 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1$. Dunque

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < -1 \vee -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \vee 1 < x \leq 3\}.$$

6) La funzione è ben definita quando il denominatore è diverso da 0 (l'arcotangente è definita su tutto $\mathbb{R}$). Questo equivale ad imporre

$$|x^2 - 1| \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

Dunque

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\}.$$

7) La funzione è ben definita quando esiste la radice e il denominatore è diverso da 0. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} |x^2 - 1|(x-2)^2 \geq 0 \\ \sqrt{|x^2 - 1|(x-2)^2} \neq 0 \end{cases} \iff |x^2 - 1|(x-2)^2 > 0.$$

Siccome il valore assoluto e il quadrato sono funzioni non negative, questo equivale ad imporre che siano diversi da 0, ovvero

$$\begin{aligned} |x^2 - 1|(x-2)^2 > 0 &\Leftrightarrow |x^2 - 1|(x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 1| \neq 0 \wedge (x-2)^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \wedge x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \wedge x \neq 2. \end{aligned}$$

Dunque

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1 \wedge x \neq 2\}\,.$$

8) La funzione è ben definita quando esistono la radice e il logaritmo. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} \log^2 x - \log x \geq 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione. Si ha

$$\log^2 x - \log x \geq 0 \Leftrightarrow \log x\,(\log x - 1) \geq 0.$$

Il primo fattore è tale che

$$\log x \geq 0 = \log 1 \Leftrightarrow x \geq 1,$$

mentre il secondo

$$\log x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log x \geq 1 = \log e \Leftrightarrow x \geq e.$$

Dunque la prima condizione è verificata se $x \leq 1 \vee x \geq e$. Intersecando

$$\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq e, \\ x > 0, \end{cases}$$

si ottiene $0 < x \leq 1 \vee x \geq e$. Quindi

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1 \vee x \geq e\}\,.$$

9) La funzione è ben definita quando esiste la radice e il denominatore dell'argomento del coseno è diverso da 0. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0, \\ \sqrt[3]{x} \neq 0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $x \leq 0 \vee x \geq 1$, mentre la seconda è verificata quando $x \neq 0$. Intersecando questi due insiemi si ottiene $x < 0 \vee x \geq 1$. Dunque

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee x \geq 1\}\,.$$

❒ **Esercizio 4.2.2.** *Determinare il dominio delle seguenti funzioni:*

10) $f(x) = \dfrac{\log|x|}{\sqrt{x^2-1}}$ **(Esame del 15.11.19)**

11) $f(x) = \sqrt{e^{2x}-e^x}$ **(Esame del 19.12.19)**

12) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x|}{1+|x|}-1}$ **(Esame del 09.01.20)**

13) $f(x) = \log\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$ **(Esame del 23.01.20)**

14) $f(x) = \sqrt{|x|}\arctan\dfrac{2}{|x|}$ **(Esame del 24.06.20)**

15) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+|x|}}{\log(1+x^2)}$ **(Esame del 09.07.20)**

16) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-5}}{e^{1-|x|}-1}$ **(Esame del 23.07.20)**

17) $f(x) = \dfrac{x\log(x)}{\sqrt{e^{\sqrt{x}}-1}}$ **(Esame del 08.09.20)**

➻ **R.** 10) La funzione è ben definita se:

$|x| > 0$ condizione di esistenza del logaritmo

$x^2-1 \geq 0$ condizione di esistenza della radice

$\sqrt{x^2-1} \neq 0$ condizione di esistenza del denominatore

La prima condizione equivale a $x \neq 0$; la seconda porta a $x \leq -1 \vee x \geq 1$ e infine la terza equivale a $x \neq \pm 1$.
Riassumendo il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \vee x > 1\}$$

11) La funzione è ben definita se è ben definita la radice, quindi deve essere

$$e^{2x} - e^x \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^x(e^x-1) \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^x \geq 1 = e^0 \quad\Leftrightarrow\quad x \geq 0$$

pertanto

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

12) La funzione è ben definita se è ben definita la radice, quindi deve essere

$$\frac{|x|}{1+|x|} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1+|x|} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+|x|} \leq 0.$$

Visto che $|x|+1>0$, si ha che

$$D_f = \emptyset.$$

13) La funzione è ben definita se è ben definito il logaritmo, quindi deve essere

$$\frac{x+1}{x+2} > 0.$$

Si tratta di una disequazione fratta. Il numeratore è positivo se $x > -1$. Il denominatore è positivo se $x > -2$. Seguendo la regola dei segni allora la frazione è positiva se $x < -2 \vee x > -1$. Complessivamente allora

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < -2 \ \vee \ x > -1\}$$

14) La funzione è ben definita se è ben definita la radice (quindi occorre imporre $|x| \geq 0$, condizione che è sempre verificata) e il denominatore della frazione (in quanto la funzione arcotangente è ben definita su tutto $\mathbb{R}$) quindi basta chiedere $|x| \neq 0$ che equivale a $x \neq 0$. Complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

15) La funzione è ben definita se:

$$\begin{array}{ll} 1+|x| \geq 0 & \text{condizione di esistenza della radice} \\ 1+x^2 > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ \log(1+x^2) \neq 0 & \text{condizione di esistenza del denominatore} \end{array}$$

Le prime due condizioni sono banalmente verificate. Per quanto riguarda la terza si ha

$$\log(1+x^2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+x^2 \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$$

Riassumendo il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

16) La funzione è ben definita se:

$$\begin{array}{ll} x^2 - 5 \geq 0 & \text{condizione di esistenza della radice} \\ e^{1-|x|} - 1 \neq 0 & \text{condizione di esistenza del denominatore} \end{array}$$

in quanto la funzione esponenziale è ben definita su tutto $\mathbb{R}$.
La prima condizione porta a

$$x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5}$$

La seconda condizione invece porta a

$$e^{1-|x|} - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1-|x|} \neq 1 = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - |x| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \pm 1$$

Riassumendo il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5},\ \ x \neq \pm 1\}.$$

17) La funzione è ben definita se:

$x > 0$	condizione di esistenza del logaritmo
$x \geq 0$	condizione di esistenza della radice all'esponente
$e^{\sqrt{x}} - 1 \geq 0$	condizione di esistenza della radice al denominatore
$e^{\sqrt{x}} - 1 \neq 0$	condizione di esistenza del denominatore

Le ultime due condizioni portano a

$$e^{\sqrt{x}} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$$

mentre le prime due si riassumono chiedendo $x > 0$.
Complessivamente il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

❒ **Esercizio 4.2.3.** *Determinare il dominio delle seguenti funzioni:*

18) $f(x) = \arctan(x^2 + \sqrt{|x| + 2})$ **(Esame del 14.12.20)**

19) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3 - |x|}}{\log|x|}$ **(Esame del 21.12.20)**

20) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - |x|}}{\log|x| + 1}$ **(Esame del 21.12.20)**

21) $f(x) = \log(\sin x) + e^{1/x}$ **(Esame del 12.01.21)**

22) $f(x) = x^{2x}$ **(Esame del 02.02.21)**

23) $f(x) = x^{\sin x}$ **(Esame del 23.02.21)**

24) $f(x) = \dfrac{\sin(4|x| - 2)}{\log(x^4 + 5)}$ **(Esame del 09.06.21)**

25) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} \log\left(1 + \dfrac{2}{|x|}\right)$ **(Esame del 23.06.21)**

26) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + |x|}}{\log(1 + x^2)}$ **(Esame del 07.07.21)**

R. 18) La funzione arcotangente è ben definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi l'unica condizione da imporre è data dall'esistenza della radice, cioè

$$|x| + 2 \geq 0$$

che è sempre verificata. Dunque

$$D_f = \mathbb{R}.$$

19) La funzione è ben definita se:

$$\begin{aligned} &3 - |x| \geq 0 && \text{condizione di esistenza della radice} \\ &|x| > 0 && \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ &\log|x| \neq 0 \neq 0 && \text{condizione di esistenza del denominatore} \end{aligned}$$

La prima condizione porta a $-3 \leq x \leq 3$; la seconda condizione porta a $x \neq 0$ e infine l'ultima condizione equivale a $\log|x| \neq 0$ cioè $x \neq \pm 1$.
Complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < -1 \vee -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \vee 1 < x \leq 3\}.$$

20) La funzione è ben definita se:

$$\begin{aligned} &2 - |x| \geq 0 && \text{condizione di esistenza della radice} \\ &|x| > 0 && \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ &\log|x| + 1 \neq 0 \neq 0 && \text{condizione di esistenza del denominatore} \end{aligned}$$

La prima condizione porta a $-2 \leq x \leq 2$; la seconda condizione porta a $x \neq 0$ e infine l'ultima condizione equivale a $\log|x| \neq -1$ cioè $x \neq \pm 1/e$.
Complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < -1/e \vee -1/e < x < 0 \vee 0 < x < 1/e \vee 1/e < x \leq 2\}.$$

21) La funzione è ben definita se:

$$\begin{array}{ll} \sin x > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ x \neq 0 & \text{condizione di esistenza del denominatore} \end{array}$$

in quanto la funzione esponenziale è ben definita su $\mathbb{R}$; quindi complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

22) Scriviamo

$$f(x) = x^{2x} = e^{2x \log x}.$$

A questo punto, la funzione esponenziale è ben definita su $\mathbb{R}$, quindi è sufficiente imporre la condizione di esistenza del logaritmo, cioè $x > 0$. Pertanto il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

23) Scriviamo

$$f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \log x}.$$

A questo punto, la funzione esponenziale e la funzione seno sono ben definite su $\mathbb{R}$, quindi è sufficiente imporre la condizione di esistenza del logaritmo, cioè $x > 0$. Pertanto il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

24) La funzione seno è ben definita su $\mathbb{R}$, quindi la funzione data è ben definita se:

$$\begin{array}{ll} x^4 + 5 > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ \log(x^4 + 5) \neq 0 & \text{condizione di esistenza del denominatore} \end{array}$$

La prima delle due condizioni è sempre verificata; la seconda porta a

$$x^4 + 5 \neq 1 \iff x^4 \neq -4$$

condizione anch'essa sempre verificata. Dunque

$$D_f = \mathbb{R}.$$

25) La funzione è ben definita se:

$$\begin{array}{ll} |x| \geq 0 & \text{condizione di esistenza della radice} \\ |x| \neq 0 & \text{condizione di esistenza del denominatore} \\ 1 + \frac{2}{|x|} > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \end{array}$$

La prima e la terza condizione sono sempre verificate, dunque complessivamente il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

26) La funzione è ben definita se:

$1 + \lvert x \rvert \geq 0$	condizione di esistenza della radice
$\log(1+x^2) \neq 0$	condizione di esistenza del denominatore
$1 + x^2 > 0$	condizione di esistenza del logaritmo

La prima e la terza condizione sono sempre verificate, dunque complessivamente il dominio di f è dato dalla seconda condizione, che equivale a

$$\log(1+x^2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x^2 \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$$

da cui

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

CAPITOLO 5

Studio del grafico di funzioni: esercizi proposti

5.1. Richiami di teoria

Riassumiamo i punti fondamentali da verificare quando ci si trova di fronte al problema di studiare il grafico di una funzione e poi facciamo alcuni esempi.

1) DOMINIO: per prima cosa è essenziale determinare il dominio di f, cioè il più grande insieme naturale in cui la funzione risulta definito. Talvolta risulta particolarmente utile barrare con un segno grafico le parti del piano dove di sicuro si sa non ci sarà grafico della funzione.

2) SIMMETRIE: in seguito è importante vedere se la funzione presenta simmetrie, per esempio se f è pari o dispari. Nel caso ad esempio f sia pari, si può restringere lo studio del grafico alla regione $x \geq 0$ e disegnare la parte restante del grafico per simmetria. Se invece ad esempio la funzione è periodica, allora si può restringere lo studio del suo grafico a un periodo fissato.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: quando possibile e/o non particolarmente complicato può essere utile avere informazioni sulle intersezioni con gli assi della funzione, quindi in particolare sui suoi e sul suo segno.

4) LIMITI E ASINTOTI: a questo punto, dopo questa prima analisi, diventa essenziale studiare i limiti della f agli estremi del dominio, ricercando eventuali asintoti orizzontali, verticali. In particolare, se $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$ (o equivalentemente per $x \to \mp\infty$) allora è possibile cercare (se esiste) l'asintoto obliquo. In questa fase, può essere individuare eventuali punti di discontinuità della funzione.

5) DERIVATA PRIMA: a questo punto si calcola la derivata prima della f nei punti in cui $f'(x)$ esiste. È importante studiare accuratamente i punti in cui f risulta continua ma non derivabile, per stabilirne la natura (punti angolosi, punti di flesso a tangente verticale, cuspidi...). Nei punti angolosi o agli estremi del dominio può essere utile calcolare le derivate destre e sinistre di f

(per valutare l'eventuale pendenza del grafico).
Successivamente si studia il **segno di** $f'(x)$ che dà informazioni sulla monotonia di f e sugli eventuali punti di massimo o minimo.
6) DERIVATA SECONDA: ove richiesto, si può procedere a questo punto allo studio della derivata seconda e del suo segno, che dà informazioni su concavità e convessità della funzione.
7) GRAFICO: mettendo assieme tutte le informazioni precedenti, si giunge a determinare il grafico qualitativo della funzione.

5.2. Esercizi proposti

5.2.1. Funzioni razionali fratte

❒ **Esercizio 5.2.1. (Esame del 11.01.18)** *1) Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3}$$

disegnandone il grafico qualitativo. È richiesto lo studio della derivata seconda.

2) Dedurre dal grafico di f i grafici di $|f(x)|$ e $f(|x|)$.

R.
1) DOMINIO: la funzione è ben definita se non si annulla il denominatore, quindi

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm\sqrt{3}\}.$$

2) SIMMETRIE: la funzione data è dispari: infatti

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 2(-x)}{(-x)^2 - 3} = -f(x)$$

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: si ha $f(0) = 0$ (in quanto funzione dispari) e

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}.$$

Inoltre dallo studio del segno risulta che

$$f(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2} \vee 0 < x < \sqrt{2} \vee x > \sqrt{3}.$$

4) limiti e asintoti: studiamo i limiti della funzioni agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

pertanto è possibile cercare l'asintoto obliquo. Consideriamo prima il caso $x \to +\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-3} = 0$$

quindi la retta $y = x$ è asintoto obliquo per la funzione per $x \to +\infty$. D'altra parte, per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-3} = 0$$

quindi la retta $y = x$ è asintoto obliquo per la funzione anche per $x \to +\infty$.
Vediamo ora se ci sono asintoti verticali. Si ha

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty$$

quindi la retta $x = -\sqrt{3}$ è asintoto verticale per la funzione. Inoltre

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty$$

quindi anche la retta $x = \sqrt{3}$ è asintoto verticale per la funzione.
5) derivata prima: si ha

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(x^2-3) - 2x(x^3-2x)}{(x^2-3)^2} = \frac{x^4 - 7x^2 + 6}{(x^2-3)^2} = \frac{(x^2-1)(x^2-6)}{(x^2-3)^2}$$

Studiamo il segno della derivata prima. Si ha

$$f'(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < -\sqrt{6} \vee -1 < x < 1 \vee x > \sqrt{6}.$$

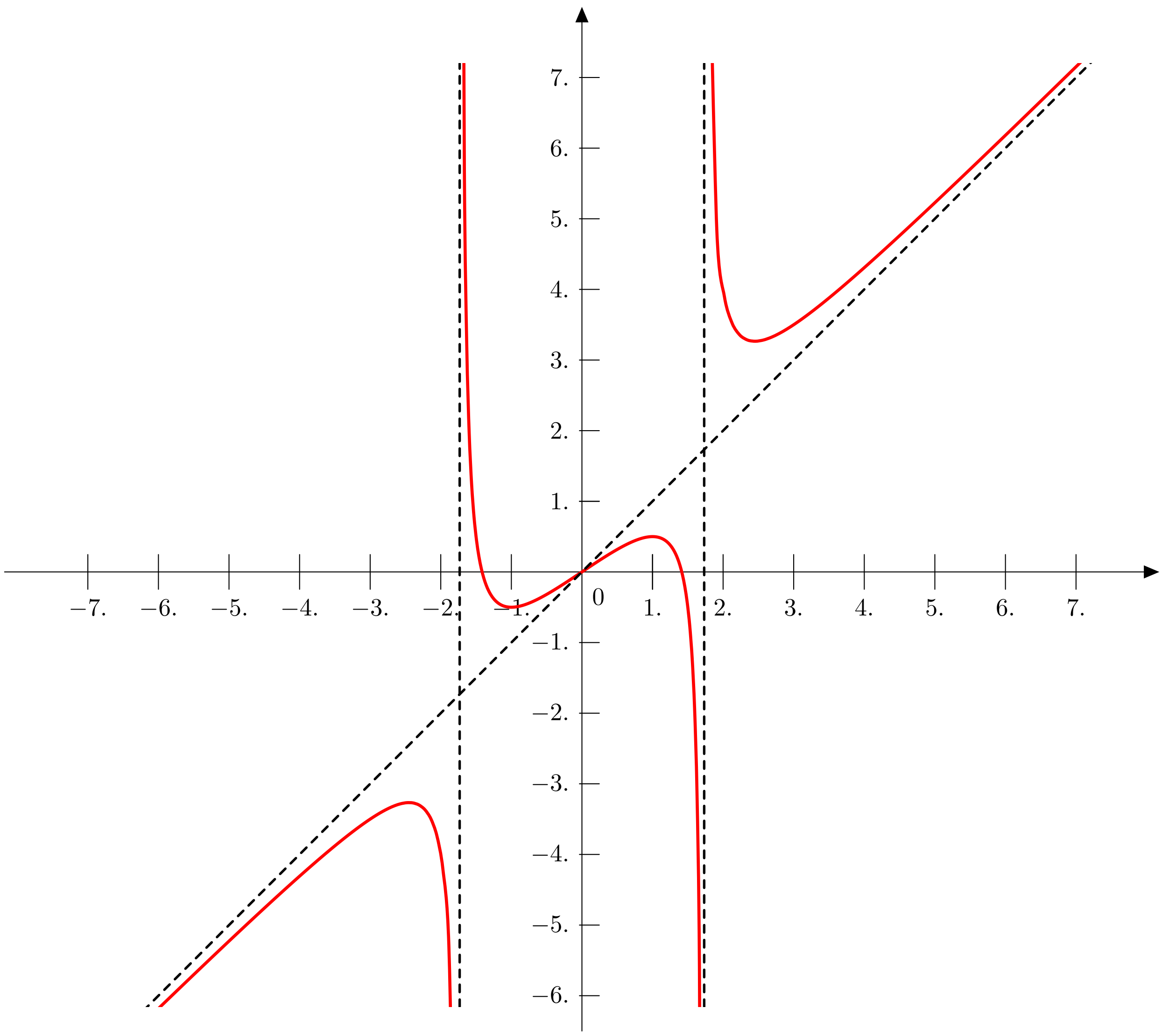
A questo punto allora la funzione f risulta crescente se $x < -\sqrt{6} \vee -1 < x < 1 \vee x > \sqrt{6}$ e risulta decrescente negli intervalli complementari. Ne risulta che $x = -\sqrt{6}$ e $x = 1$ sono punti di massimo locale, mentre $x = -1$ e $x = \sqrt{6}$ sono punti di minimo locale.
6) derivata seconda: si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 - 14x)(x^2-3)^2 - 2(x^2-3)2x(x^4 - 7x^2 + 6)}{(x^2-3)^4} \\ &= \frac{2x[(2x^2-7)(x^2-3) - (2x^2-2)(x^2-6)]}{(x^2-3)^3} \\ &= \frac{2x(x^2+9)}{(x^2-3)^2} \end{aligned}$$

pertanto dallo studio del segno della derivata seconda risulta che f è concava se

$$x < -\sqrt{3} \vee 0 < x < \sqrt{3}$$

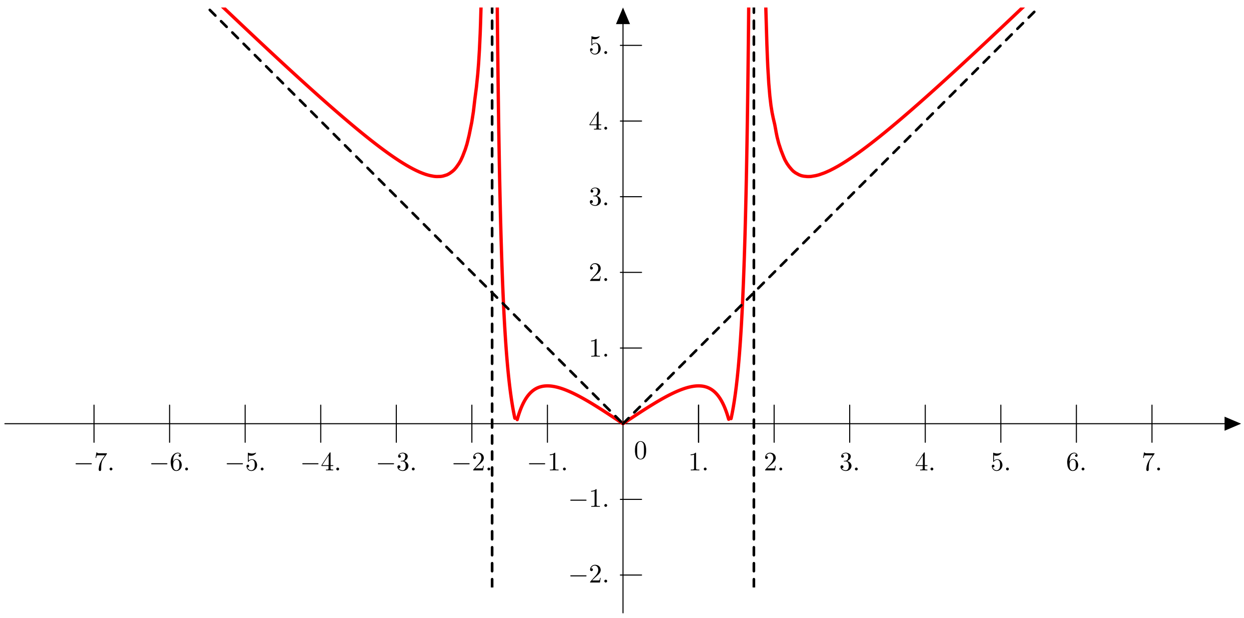
e convessa negli intervalli complementari.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura.



Da qui, se vogliamo dedurre il grafico di $|f(x)|$ basta prendere la funzione f dove questa è positiva e considerare la funzione $-f$ quando f è negativa. Infatti si ha

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

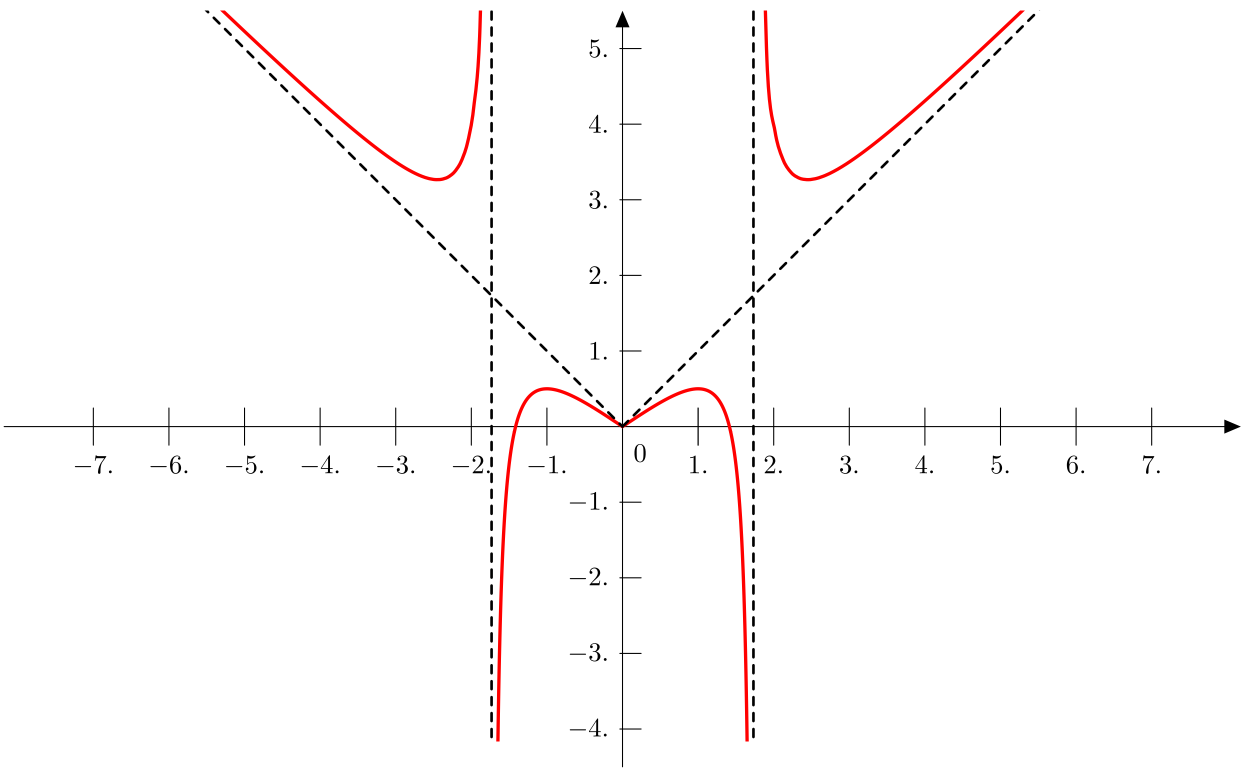
Il grafico qualitativo di $|f(x)|$ è riportato in figura.



D'altra parte

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il grafico qualitativo di $f(|x|)|$ è riportato in figura.



❒ **Esercizio 5.2.2. (Esame del 09.06.21)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{3-x}{(x-2)^2}$$

determinandone il grafico qualitativo.

R.

1) DOMINIO: la funzione è ben definita se non si annulla il denominatore, quindi

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}.$$

2) SIMMETRIE: la funzione data non presenta simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: si ha che $f(0) = 3/4$ mentre $f(x) = 0$ se $x = 3$. Inoltre $f(x) > 0$ se $x < 3$ e $f(x) < 0$ se $x > 3$.
4) LIMITI E ASINTOTI: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^- \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$$

in quanto il grado del polinomio al numeratore è minore del grado del polinomio al denominatore. Quindi l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per f. Inoltre

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

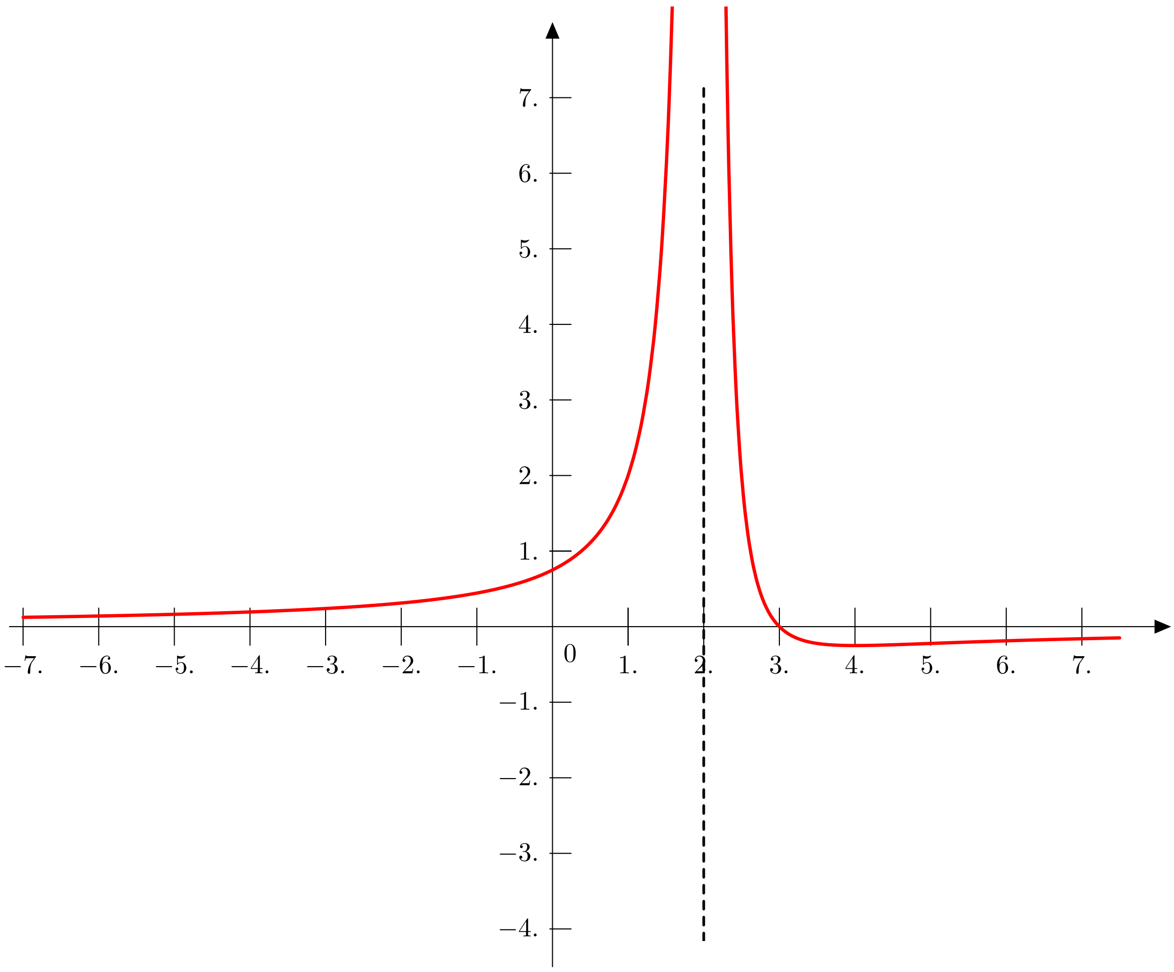
quindi la retta $x = 2$ è asintoto verticale per f.
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \frac{-(x-2)^2 - 2(x-2)(3-x)}{(x-2)^4} = \frac{x-4}{(x-2)^3}$$

quindi, essendo $f'(x) > 0$ quando $x < 2$ o $x > 4$, in quegli intervalli la funzione data risulta crescente, mentre se $2 < x < 4$ la funzione data risulta decrescente. Pertanto $x = 4$ è punto di minimo locale per f (ricordiamo che in $x = 2$ la funzione non è definita).
6) DERIVATA SECONDA: si ha

$$f''(x) = \frac{(x-2)^3 - 3(x-2)^2(x-4)}{(x-2)^6} = \frac{-2x+10}{(x-2)^4}$$

quindi f è convessa se $x < 5$ e concava per $x > 5$. In $x = 5$ cè un cambio di concavità (punto di flesso).
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura.



5.2.2. Funzioni razionali fratte con valori assoluti

❒ **Esercizio 5.2.3. (Esame del 03.02.17)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \frac{\pi x + 3}{|x - \pi|}$$

R.

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi x + 3}{x - \pi} =: g(x) & x > \pi \\ \dfrac{\pi x + 3}{\pi - x} =: h(x) & x < \pi \end{cases}$$

1) DOMINIO: il dominio della funzione assegnata è $x \neq \pi$.

2) SIMMETRIE: la funzione data non presenta simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: i punti di intersezione con gli assi sono $(-3/\pi, 0)$ e $(0, 1 + 3/\pi)$, mentre $f(x) > 0$ per $x > -3/\pi$.
4) LIMITI E ASINTOTI: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha che la retta $x = \pi$ è un asintoto verticale per la funzione, infatti

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} h(x) + \infty,$$
$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} g(x) + \infty.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x}{x-\pi} + \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x-\pi} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{1-\pi/x} = \pi,$$

quindi la retta $x = \pi$ è un asintoto orizzontale per f per $x \to +\infty$; inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} -g(x) = -\pi$$

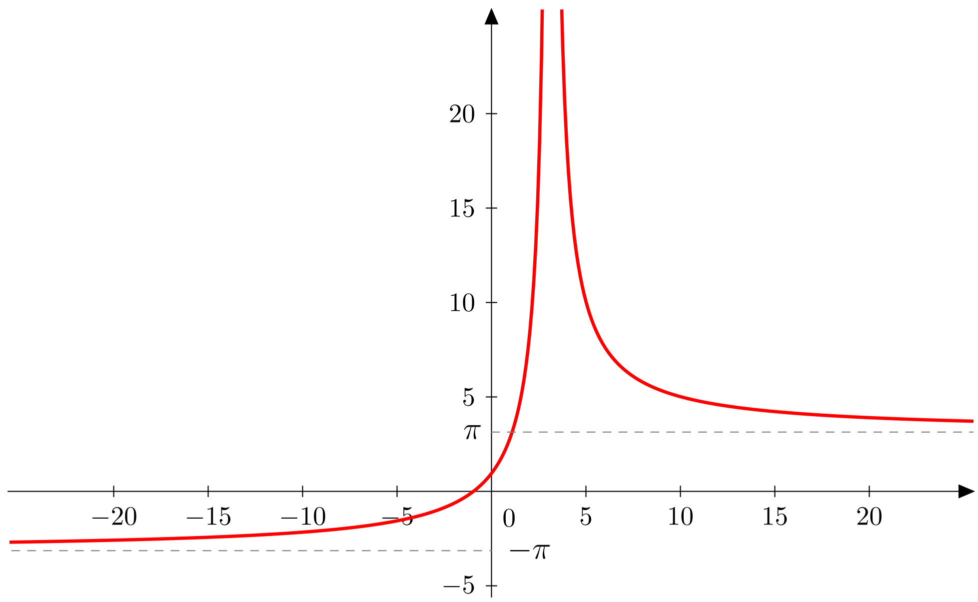
quindi la retta $x = -\pi$ è un asintoto orizzontale per f per $x \to -\infty$.
5) DERIVATA PRIMA: le derivate prime di $g(x)$ ed $h(x)$, sono

$$g'(x) = \frac{\pi(x-\pi) - (\pi x + 3)}{(x-\pi)^2} = -\frac{\pi^2+3}{(x-\pi)^2} < 0$$

e $h'(x) = -g'(x) > 0$. Quindi la funzione è crescente per $x < \pi$ e decrescente per $x > \pi$.
6) DERIVATA SECONDA: le derivate seconde sono

$$g''(x) = \frac{2(\pi^2+3)(x-\pi)}{(x-\pi)^4} > 0$$

e $h''(x) = -g''(x) < 0$, quindi la funzione è concava per $x < \pi$ e convessa per $x > \pi$.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura.



❐ **Esercizio 5.2.4 (Esame del 08.01.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \left|\frac{x^2-1}{x+2}\right|$$

determinando eventuali punti angolosi.

R.

1) DOMINIO: affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che il denominatore non si annulli, quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\}$.

2) SIMMETRIE: si vede che $f(-x) \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è né pari né dispari.

3) INTERSEZIONI CON GLI ASSI E SEGNO: troviamo le eventuali intersezioni con l'asse y calcolando $f(0)$. Sostituendo si ha $f(0) = 1/2$, dunque la funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 1/2)$. Per quanto riguarda le intersezioni con l'asse x osserviamo che

$$\left|\frac{x^2-1}{x+2}\right| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

dunque la funzione interseca l'asse x nei punti $(-1, 0)$, $(1, 0)$. Inoltre, trattandosi di un valore assoluto, essa non è mai negativa.

4) LIMITI E ASINTOTI: d'ora in poi per comodità conviene riscrivere la funzione separando i casi in cui l'argomento del valore assoluto ha segno opposto. Siccome

$$\frac{x^2-1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow -2 < x \leq -1 \vee x \geq 1,$$

otteniamo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+2} & -2 < x \leq -1 \vee x \geq 1, \\ -\dfrac{x^2-1}{x+2} & x < -2 \vee -1 < x < 1. \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del dominio, ovvero a $-2^{\pm}$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2-1}{x+2} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} -\frac{x^2-1}{x+2} = +\infty.$$

C'è quindi un asintoto verticale di equazione $x = -2$. Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} x\,\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{x^2-1}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} -x\,\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = +\infty,$$

quindi potrebbero esserci due asintoti obliqui. Verifichiamolo. A $x \to +\infty$ si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = 1 =: m_1, \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) - m_1 x &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} -2\,\frac{1+\frac{1}{2x}}{1+\frac{2}{x}} = -2 := q_1,
\end{aligned}$$

quindi c'è un asintoto obliquo di equazione $y = x - 2$ quando $x \to +\infty$. Con gli stessi passaggi a $x \to -\infty$ si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{x^2-1}{x+2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x^2-1}{x^2+2x} = -1 =: m_2, \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) - m_2 x &= \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{x^2-1}{x+2} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x+2} = 2 := q_2,
\end{aligned}$$

quindi c'è un secondo asintoto obliquo di equazione $y = -x + 2$ quando $x \to -\infty$. Osserviamo infine che $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = 0$, quindi la funzione è continua in $x = \pm1$ (come potevamo aspettarci dalla continuità del valore assoluto).
5) derivata prima: se $-2 < x < -1 \vee x > 1$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2-1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2},$$

mentre se $x < -2 \vee -1 < x < 1$

$$f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}.$$

Dunque complessivamente

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} & -2 < x < -1 \vee x > 1, \\ -\dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} & x < -2 \vee -1 < x < 1. \end{cases}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = 2, \qquad \lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = -2, \\
&\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = \frac{2}{3}, \qquad \lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = -\frac{2}{3},
\end{aligned}$$

quindi in $x = \pm1$ ci sono due punti angolosi per f. Studiamo ora il segno di f' per determinare la monotonia di f.

- Se $-2 < x < -1 \vee x > 1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \qquad (\text{poiché } -2-\sqrt{3} < -2 < -1 < -2+\sqrt{3} < 1).$$

- Se $x < -2 \vee -1 < x < 1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow -2-\sqrt{3} < x < -2 \vee -1 < x < -2+\sqrt{3}.$$

Dunque f è decrescente per $x < -2-\sqrt{3}$ e ha un punto di minimo locale in $x = -2-\sqrt{3}$, dopodiché cresce in $]-2-\sqrt{3}, -2[$. Dopo l'asintoto verticale in $x = -2$ decresce nuovamente in $]-2, -1[$ fino al punto angoloso in $x = -1$ (che quindi è anche minimo locale), cresce fino al massimo locale in $x = -2+\sqrt{3}$ e decresce fino al punto angoloso in $x = 1$ (che quindi è anche minimo locale). Infine per $x > 1$ la funzione è crescente.

6) DERIVATA SECONDA: se $-2 < x < -1 \vee x > 1$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2+4x+1)}{(x+2)^4} = \frac{(2x+4)(x+2) - 2(x^2+4x+1)}{(x+2)^3} \\ &= \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x-2}{(x+2)^3} = \frac{6}{(x+2)^3}\,, \end{aligned}$$

mentre se $x < -2 \vee -1 < x < 1$

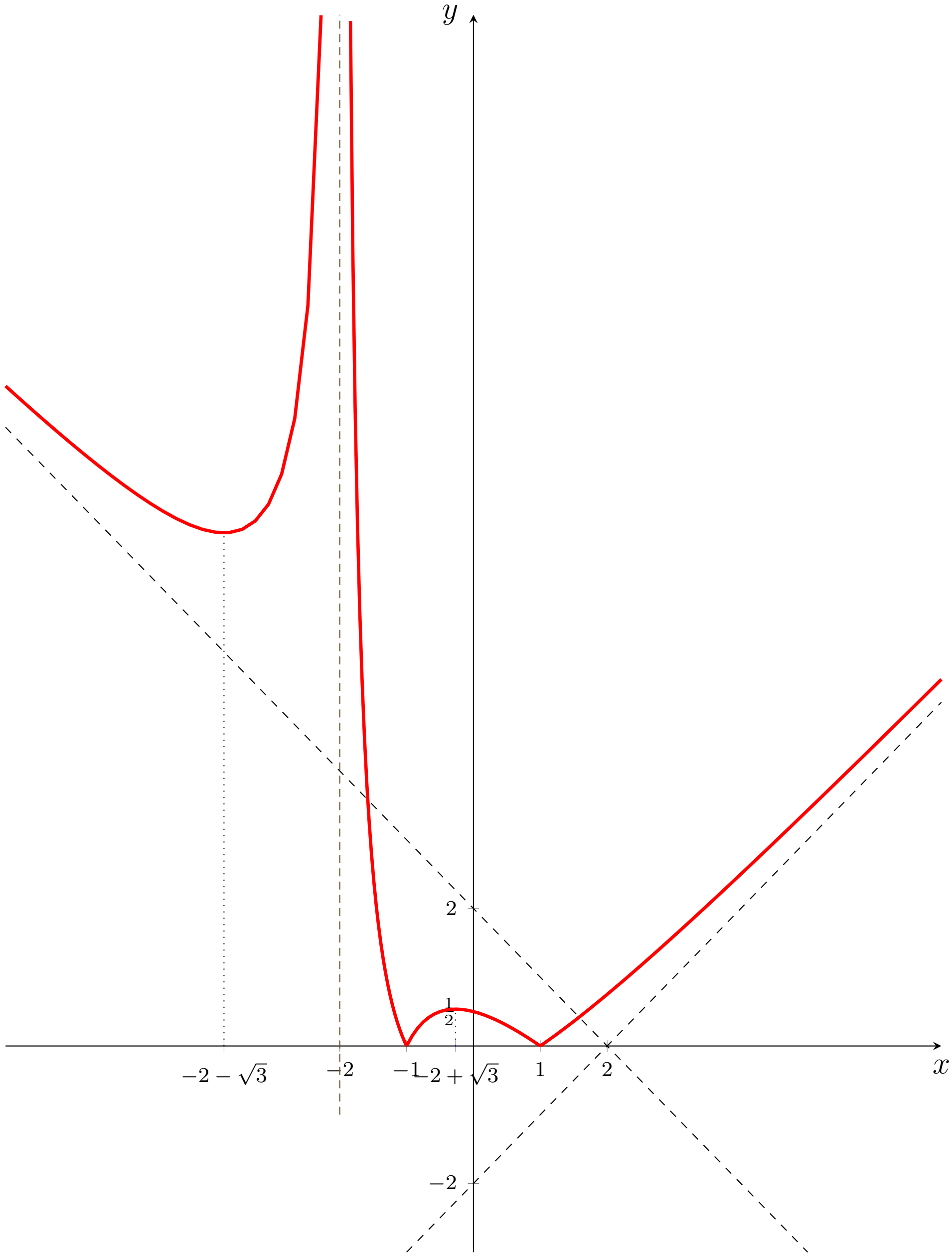
$$f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3}.$$

Dunque complessivamente

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{(x+2)^3} & -2 < x < -1 \vee x > 1, \\ -\dfrac{6}{(x+2)^3} & x < -2 \vee -1 < x < 1. \end{cases}$$

Siccome $\frac{6}{(x+2)^3} > 0 \Leftrightarrow x > -2$, si vede subito che se $-2 < x < -1 \vee x > 1$ la concavità è sempre verso l'alto, mentre se $x < -2 \vee -1 < x < 1$ la concavità è verso l'alto in $]-\infty, -2[$ e verso il basso in $]-1, 1[$.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura.



y
x
2
1
2
−2
$-2-\sqrt{3}$
−2
−1
$-2+\sqrt{3}$
1
2

5.2.3. Funzioni con radici

❒ **Esercizio 5.2.5. (Esame del 15.02.18)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = 1 - \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

disegnandone il grafico qualitativo. È richiesto lo studio della derivata seconda.

➽ **R.**
1) DOMINIO: la funzione data è ben definita se lo sono le radici e se il denominatore del terzo termine non si annulla. Nel complesso

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$$

2) SIMMETRIE: la funzione data non presenta simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: proviamo a studiare il segno della funzione. Si ha

$$f(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sqrt{x-1} - x}{\sqrt{x-1}} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{x-1} > x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - x + 1 < 0$$

che non è mai verificata. Quindi la funzione è sempre negativa ed esiste sono per $x > 1$ quindi questo ci dice che non ci sono intersezioni con gli assi.
4) LIMITI E ASINTOTI: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

quindi la retta $x = 1$ è asintoto verticale per f. D'altra parte

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

quindi potrebbe esserci l'asintoto obliquo. Ma

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

pertanto in realtà non ci sono asintoti obliqui.
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2(x-1)^{3/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \left[1 - \frac{1}{x-1}\right] = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \left[\frac{x-2}{x-1}\right]$$

quindi, tenendo conto dell'insieme di definizione di f, si ha che $f'(x) > 0$ se $x < 2$ e $f'(x) < 0$ se $x > 2$ e dunque f è crescente se $1 < x < 2$ e f è decrescente se $x > 2$. Risulta allora che

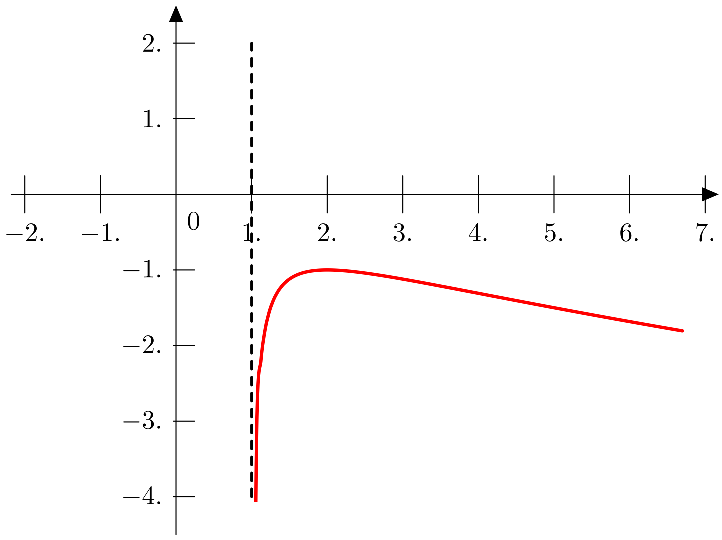
$x = 2$ è punto di massimo locale per f.

6) DERIVATA SECONDA: si ha

$$f''(x) = -\frac{2(x-1)^{3/2} - 2\,\frac{3}{2}\,(x-1)^{1/2}(x-2)}{4(x-1)^3} = -\frac{2(x-1) - 3(x-2)}{4(x-1)^{5/2}} = \frac{x-4}{4(x-1)^{5/2}}$$

dunque f è concava per $1 < x < 4$ e convessa se $x > 4$.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❐ Esercizio 5.2.6. **(Esame del 12.06.18)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \frac{\sqrt[5]{x^4}}{1+\sqrt[5]{x}}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la funzione è ben definita se $x \neq -1$ in quanto le due radici hanno esponente con denominatore dispari, quindi sono ben definite ovunque mentre il denominatore si annulla solo per $x = -1$.

Allora

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}.$$

2) SIMMETRIE: la funzione data non presenta simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione data passa per l'origine. Inoltre, siccome il numeratore è sempre positivo, il segno è determinato dal denominatore: $f(x) > 0$ se $x > -1$ e

$f(x) < 0$ se $x < -1$.
4) LIMITI E ASINTOTI: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to-1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

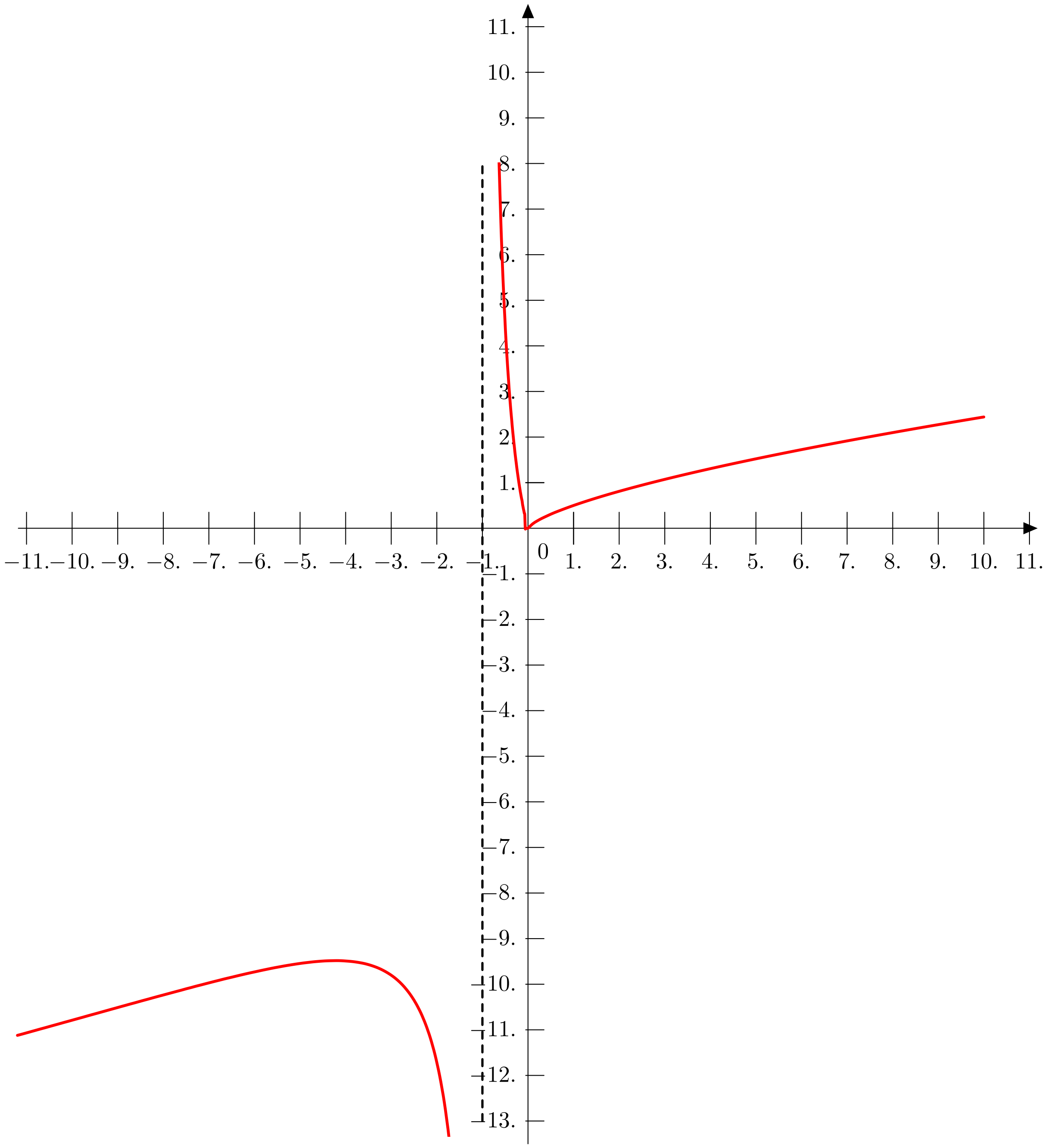
quindi $x = -1$ è asintoto verticale per la funzione, mentre non cè l'asintoto obliquo perché per $x \to \pm\infty$ la funzione è asintotica a $\sqrt[5]{x^3}$.
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{4}{5}x^{-1/5}(1+x^{1/5}) - \frac{1}{5}x^{-4/5}\,x^{4/5}}{(1+x^{1/5})^2} = \frac{4x^{-1/5}+3}{5(1+x^{1/5})^2}.$$

A questo punto, se $x > 0$ si vede immediatamente che $f'(x) > 0$. Invece se $x < 0$ si ha che $f'(x) > 0$ se $x^{-1/5} > -3/4$ cioè se $x < (-4/3)^5$ e $f'(x) < 0$ se $(-4/3)^5 < x < 0$.
Allora la funzione data è crescente se $x < (-4/3)^5$ oppure se $x > 0$ e decrescente viceversa. Si ha che $x = 0$ è punto di minimo locale mentre $x = (-4/3)^5$ è punto di massimo locale.
Inoltre

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = \pm\infty$$

Dal grafico non sembra perché l'andamento della funzione non consente di visualizzare questa informazione a questa scala; tuttavia è facile convincersi di questo perché la funzione essenzialmente vicino a zero si comporta come $x^{4/5}$ da cui discende quanto detto in precedenza.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 5.2.7. (Esame del 11.09.18)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = 1 - \sqrt{|x-1|} - \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Evidenziare eventuali punti angolosi.

R.

1) dominio: la funzione data è ben definita se $x \neq 1$ (valore per il quale si annulla il denominatore).
2) simmetrie: si ha

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & x > 1 \\ 1 - \sqrt{1-x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \end{cases}$$

quindi la funzione data presenta una simmetria rispetto all'asse $x = 1$. Pertanto sarebbe sufficiente studiare il comportamento per $x > 1$ e poi dedurre la parte di grafico rimanente per simmetria. Noi andremo a verificare questo fatto svolgendo tutti i conti.
3) intersezioni con assi e segno: proviamo a studiare il segno della funzione. Consideriamo prima il caso $x > 1$. Si ha

$$f(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sqrt{x-1} - x}{\sqrt{x-1}} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{x-1} > x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - x + 1 < 0$$

che non è mai verificata. Quindi la funzione è sempre negativa; questo ci dice che non ci sono intersezioni con gli assi se $x > 1$.
Sia ora $x < 1$. Allora

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{1-x} - 1 + x - 1}{\sqrt{1-x}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x} > 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 3 < 0$$

che di nuovo non è mai verificata. Quindi la funzione è sempre negativa; questo ci dice che non ci sono intersezioni con gli assi nemmeno se $x < 1$ (fatto confermato dalla simmetria).
4) limiti e asintoti: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

quindi la retta $x = 1$ è asintoto verticale per f. D'altra parte

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

ed essendo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

non ci sono asintoti obliqui.

5) derivata prima: prima di tutto consideriamo il caso $x > 1$. Si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2(x-1)^{3/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \left[1 - \frac{1}{x-1}\right] = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \left[\frac{x-2}{x-1}\right]$$

quindi, tenendo conto del fatto che ci troviamo nel caso $x > 1$, si ha che $f'(x) > 0$ se $x < 2$ e $f'(x) < 0$ se $x > 2$ e dunque f è crescente se $1 < x < 2$ e f è decrescente se $x > 2$. Risulta allora che $x = 2$ è punto di massimo locale per f.
Sia ora $x < 1$. Allora si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2(1-x)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\left[1 - \frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\left[\frac{-x}{1-x}\right]$$

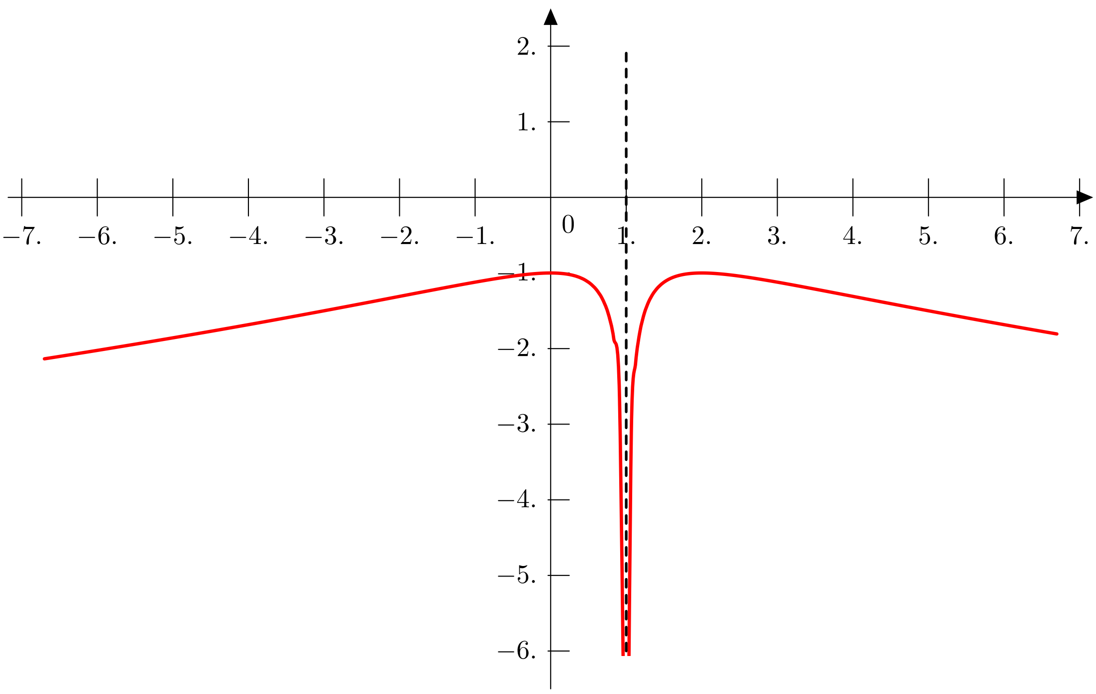
quindi, tenendo conto del fatto che ci troviamo nel caso $x < 1$, si ha che $f'(x) > 0$ se $x < 0$ e $f'(x) < 0$ se $x > 0$ e dunque f è crescente se $x < 0$ e f è decrescente se $0 < x < 1$. Risulta allora che $x = 0$ è punto di massimo locale per f.
Anche questa analisi conferma la simmetria della funzione.
6) DERIVATA SECONDA: si ha, per $x > 1$ che

$$f''(x) = -\frac{2(x-1)^{3/2} - 2\,\frac{3}{2}\,(x-1)^{1/2}(x-2)}{4(x-1)^3} = -\frac{2(x-1) - 3(x-2)}{4(x-1)^{5/2}} = \frac{x-4}{4(x-1)^{5/2}}$$

dunque f è concava per $1 < x < 4$ e convessa se $x > 4$. D'altra parte, se $x < 1$

$$f''(x) = \frac{-2(1-x)^{3/2} - 2\,\frac{3}{2}\,(1-x)^{1/2}(-x)(-1)}{4(1-x)^3} = \frac{-2(1-x) - 3x}{4(1-x)^{5/2}} = \frac{-2-x}{4(1-x)^{5/2}}$$

dunque f è concava per $x > -2$ e convessa se $-2 < x < 1$.
Anche questa analisi conferma la simmetria della funzione.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 5.2.8 (Esame del 24.07.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = 3 - \frac{4}{5}\sqrt{-x^2 + 10x - 16}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

➻ **R.** 1) DOMINIO: affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che esista la radice. Si ottiene $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 8\}$.

2) SIMMETRIE: non ha senso calcolare $f(-x)$ poiché f non è definita per $x < 0$.

3) INTERSEZIONI CON GLI ASSI E SEGNO: non ci sono intersezioni con l'asse y poiché $x = 0$ non appartiene al dominio. Anche l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni, perciò non ci sono intersezioni neanche con l'asse x. Inoltre $f(x) > 0 \; \forall \, x \in D_f$.

4) LIMITI E ASINTOTI: agli estremi del dominio la funzione è continua (da destra o da sinistra), quindi non ha senso calcolare i limiti. Dunque non ci sono asintoti.

5) DERIVATA PRIMA: si ottiene

$$f'(x) = \frac{4(x-5)}{5\sqrt{-x^2 + 10x - 16}},$$

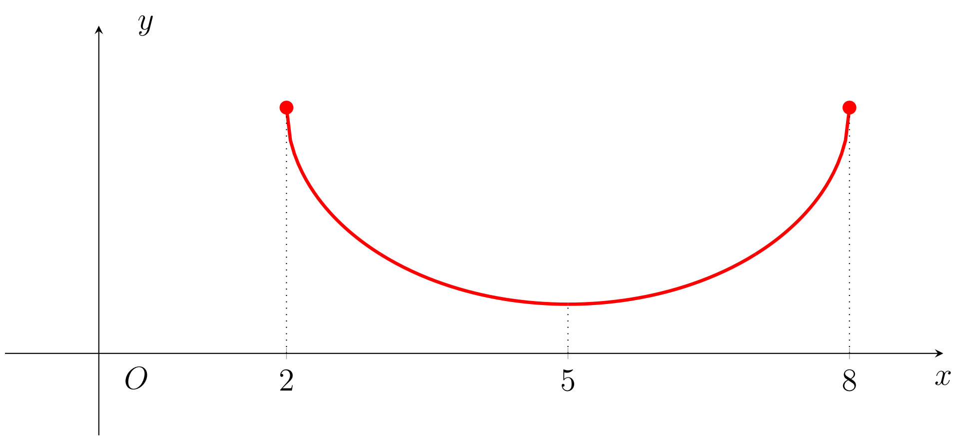
da cui

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 5.$$

La funzione è quindi decrescente in $[2, 5[$ e crescente in $]5, 8]$. Ha un punto di minimo locale in $x = 5$, e due punti di massimo locale in $x = 2$ e $x = 8$.

6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.

7) GRAFICO:



❐ **Esercizio 5.2.9. (Esame del 15.11.19)** *Si studi la seguente funzione disegnandone il grafico qualitativo*

$$f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x}}$$

R.

1) DOMINIO: la funzione è ben definita quando esiste la radice e quando il denominatore non si annulla. Complessivamente, la condizione da imporre è

$$x^2 - 2x > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < 0 \vee x > 2.$$

2) SIMMETRIE: la funzione data non presenta simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la radice quando esiste, è sempre positiva (sarebbe non negativa ma, essendo al denominatore, non si annulla) quindi il segno della funzione è determinato dal segno del numeratore. In particolare $f(x) > 0$ se $x > 3/2$ e quindi, tenendo conto del dominio della funzione, $f(x) > 0$ se $x > 2$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$. Non ci sono intersezioni con gli assi.
4) LIMITI E ASINTOTI: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = 2$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = -2$$

quindi le rette $y = 2$ e $y = -2$ sono asintoti orizzontali per la funzione rispettivamente per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.
D'altra parte

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

quindi l'asse delle ordinate e la retta $x = 2$ sono asintoti verticali per la funzione.
Non ci sono asintoti obliqui per la funzione.
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-2x} - \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}(2x-2)(2x-3)}}{x^2-2x} = \frac{4(x^2-2x)-(4x^2-6x-4x+6)}{2(x^2-2x)^{3/2}} = \frac{x-3}{2(x^2-2x)^{3/2}}$$

pertanto $f'(x) > 0$ se $x > 3$ e $f'(x) < 0$ se $x < 3$. Dunque la funzione data è crescente se $x > 3$ ed è decrescente se $x < 3$. Il punto $x = 3$ è un punto di minimo locale per f.

6) derivata seconda: si ha

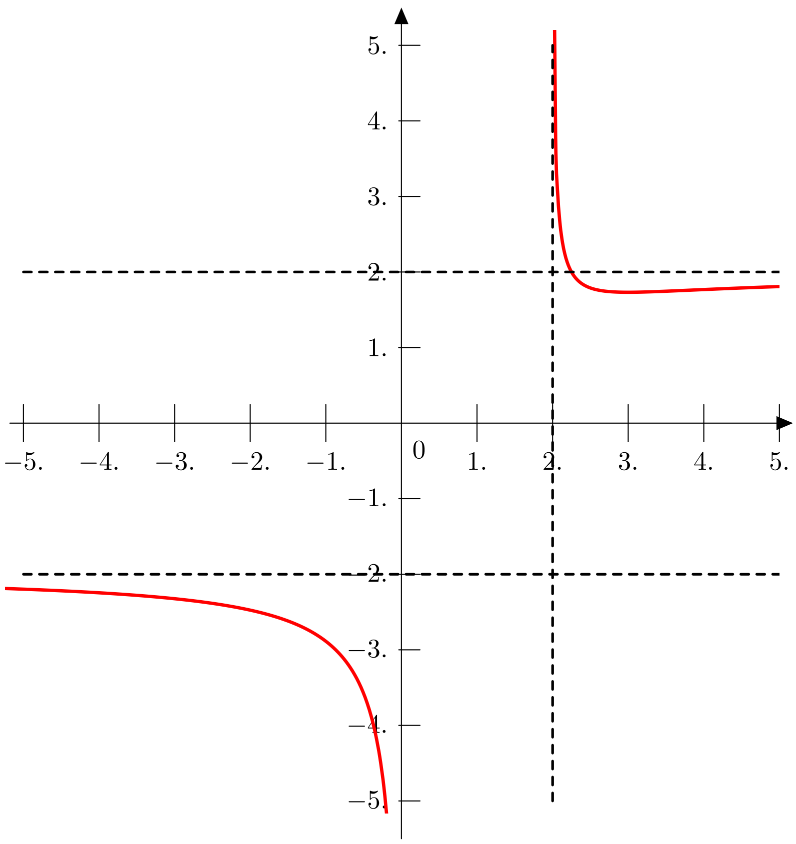
$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x^2-2x)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2-2x)^{1/2}(2x-2)(x-3)}{(x^2-2x)^3} \\
&= \frac{x^2-2x-3(x^2-4x+3)}{(x^2-2x)^{5/2}} = \frac{-2x^2+10x-9}{(x^2-2x)^{5/2}}.
\end{aligned}
$$

Si ha che

$$
f''(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{5-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{7}}{2}
$$

e quindi in questo intervallo la funzione è convessa, nel complementare è concava. Tenendo conto del dominio della funzione e tenendo conto che $2 < \sqrt{7} < 3$ si ha che la funzione data è concava per $x < 0$ e $x > \frac{5+\sqrt{7}}{2}$ (che è un valore compreso tra $7/2$ e 4 ed è convessa se $2 < x < \frac{5+\sqrt{7}}{2}$.

7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura



❐ **Esercizio 5.2.10.** **(Esame del 20.02.20)** *Si studi la funzione*

$$
f(x) = x^{-1}\sqrt{1-x}\,e^{-x/3}
$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

➾ R.

1) dominio: la funzione è ben definita se lo è la radice e se il denominatore non si annulla. Quindi le condizioni da imporre sono:

$$x \leq 1 \qquad \text{esistenza radice}$$

$$x \neq 0 \qquad \text{esistenza denominatore}$$

Complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1, \ \ x \neq 0\}.$$

2) simmetrie: la funzione data non presenta simmetrie.

3) intersezioni con assi e segno: il numeratore è sempre positivo e si annulla per $x = 1$, quindi il segno della funzione è determinato dal denominatore: $f(x) > 0$ se $0 < x \leq 1$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$.

4) limiti e asintoti: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

dalla gerarchia degli infiniti. La presenza dell'esponenziale esclude eventuali asintoti obliqui. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

dunque l'asse delle ordinate è asintoto verticale per f.

5) derivata prima: si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{1-x}} e^{-x/3} + \sqrt{1-x} e^{-x/3} \left(-\frac{1}{3}\right)\right] x - \sqrt{1-x} e^{-x/3}}{x^2} \\ &= \frac{e^{-x/3}}{6x^2\sqrt{1-x}} [-3x - 2(1-x)x - 6(1-x)] = \frac{e^{-x/3}}{6x^2\sqrt{1-x}} [2x^2 + x - 6]. \end{aligned}$$

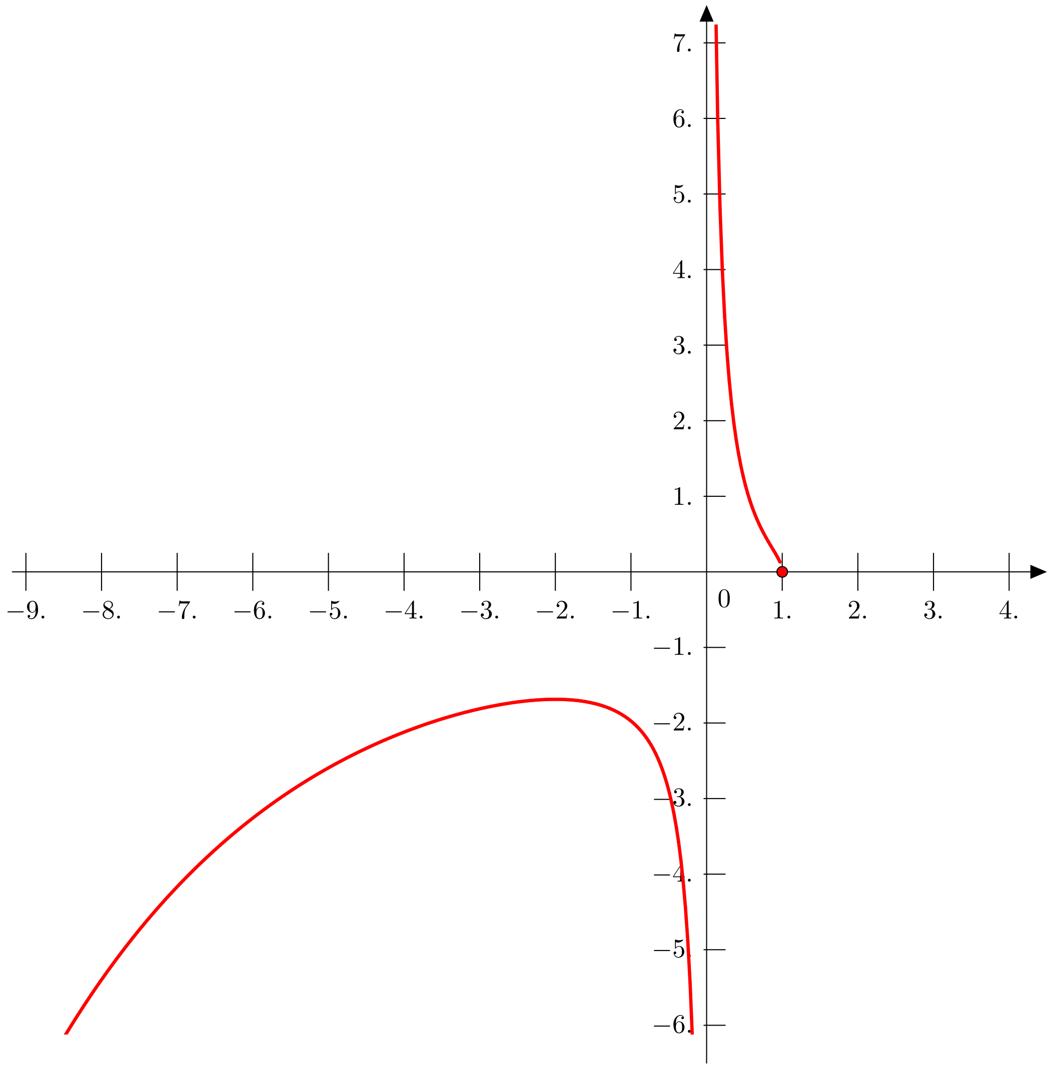
A questo punto

$$f'(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < -2 \vee x > \frac{3}{2}$$

quindi, tenendo conto del dominio di f si ha che f è crescente se $x < -2$ e decrescente se $-2 < x < 0$ e se $0 < x \leq 1$.

6) derivata seconda: non richiesta.

7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura



❐ **Esercizio 5.2.11. (Esame del 24.06.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

determinandone il grafico qualitativo.

R.

1) DOMINIO: la funzione è ben definita quando esiste la radice e non si annulla il denominatore. Complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee x > 2\}.$$

2) SIMMETRIE: la funzione non presenta simmetrie

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione è sempre positiva, eventualmente nulla (va

indagato il comportamento in zero con un passaggio al limite).
4) limiti e asintoti: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

dunque $x = 2$ è asintoto verticale per f. Indaghiamo la presenza di eventuali asintoti obliqui. Consideriamo prima il caso $x \to +\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = 1$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}} \, \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-2x}}{x^2 + x\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-2x)}{\sqrt{x^2-2x}(x^2 + x\sqrt{x^2-2x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}\, x^2 \left(1 + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 1
\end{aligned}$$

quindi la retta $y = x + 1$ è asintoto obliquo per f per $x \to +\infty$.
Studiamo ora il caso $x \to -\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x^2\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = -1$$

e inoltre (tenendo conto che stavolta $|x| = -x$ quindi $\sqrt{x^2-2x} = -x\sqrt{1-\frac{2}{x}}$)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}} \, \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-2x}}{x^2 - x\sqrt{x^2-2x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-2x)}{\sqrt{x^2-2x}(x^2 - x\sqrt{x^2-2x})} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}\, x^2 \left(1 + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = -1
\end{aligned}$$

5) derivata prima: si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x^2-2x} - \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}(2x-2)x^2}{x^2-2x} \\
&= \frac{8x(x^2-2x) - x^2(x-1)}{(x^2-2x)^{3/2}} \\
&= \frac{2x^3 - 4x^2 - x^3 + x^2}{(x^2-2x)^{3/2}} \\
&= \frac{x^3 - 3x^2}{(x^2-2x)^{3/2}} = \frac{x^2(x-3)}{(x^2-2x)^{3/2}}
\end{aligned}$$

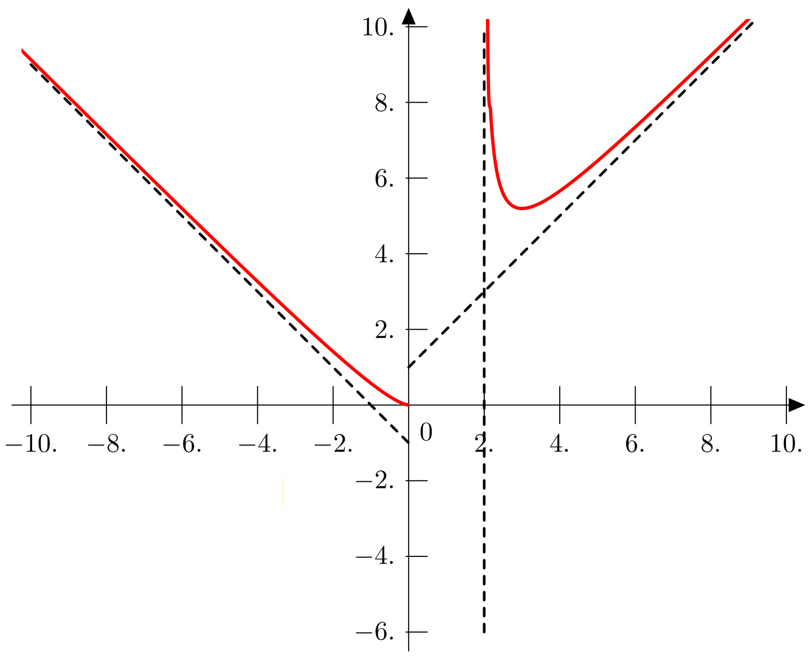
pertanto $f'(x) > 0$ se $x > 3$ e $f'(x) < 0$ se $x < 3$. Quindi f è crescente se $x > 3$ e f decrescente se $x < 3$. Pertanto $x = 3$ è punto di minimo locale per f.

6) DERIVATA SECONDA: si ottiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(3x^2-6x)(x^2-2x)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2-2x)^{1/2}(2x-2)(x^3-3x^2)}{(x^2-2x)^{3/2}} \\ &= \frac{(3x^2-6x)(x^2-2x) - 3(x-1)(x^3-3x^2)}{(x^2-2x)^{3/2}} \\ &= \frac{3x^4-6x^3-6x^3+12x^2-3x^4+9x^3+3x^3-9x^2}{(x^2-2x)^{3/2}} \\ &= \frac{3x^2}{(x^2-2x)^{3/2}} \end{aligned}$$

quindi la funzione data è sempre convessa.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 5.2.12.** **(Esame del 23.07.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{x\sqrt{1-x}}{x+1}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la radice è ben definita se l'argomento è non negativo e la frazione è ben definita

se il denominatore è diverso da zero. Dunque occorre imporre che $x \leq 1$ (esistenza radice) e $x \neq -1$ (esistenza frazione) e si ha

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1, \;\; x \neq -1\}$$

2) simmetrie: la funzione data non presenta simmetrie.
3) intersezioni con assi e segno: la funzione data è positiva se $x < -1 \vee 0 < x < 1$ e negativa se $-1 < x < 0$. Inoltre $f(x) = 0$ se $x = 0$ e $x = 1$.
4) limiti e asintoti: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$$

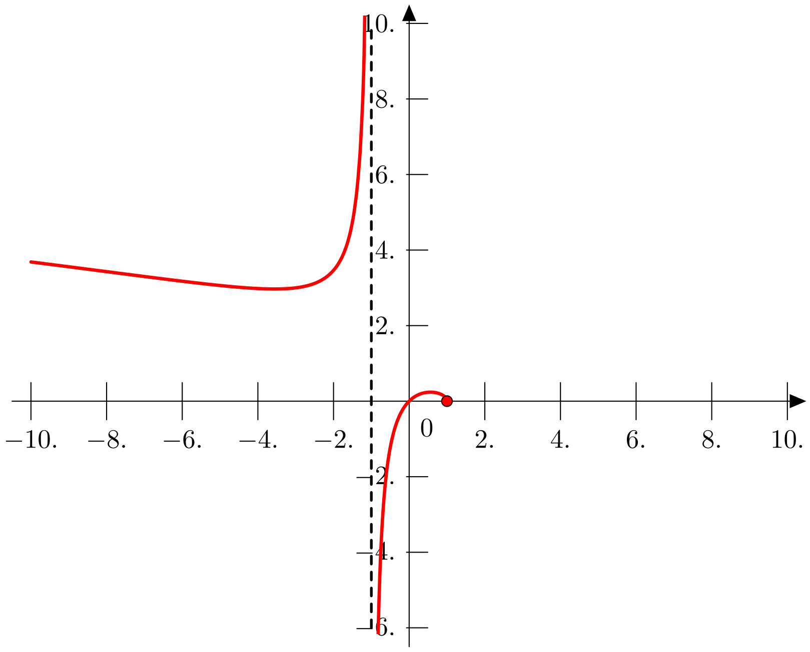
Quindi la retta $x = -1$ è asintoto verticale per f. D'altra parte, essendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

non esiste l'asintoto obliquo per f.
5) derivata prima: si ha

$$f'(x) = \frac{[\sqrt{1-x} - \frac{x}{\sqrt{1-x}}](x+1) - x\sqrt{1-x}}{(x+1)^2} = \frac{(1-2x)(x+1) - x(1-x)}{\sqrt{1-x}(x+1)^2} = -\frac{x^2+2x-1}{\sqrt{1-x}(x+1)^2}$$

quindi $f'(x) > 0$ (e dunque f crescente) se $-1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$ mentre $f'(x) < 0$ (e dunque f decrescente) se $x < -1-\sqrt{2} \vee -1+\sqrt{2} < x < 1$. Dunque $x = -1-\sqrt{2}$ è punto di minimo locale mentre $x = -1+\sqrt{2}$ è punto di massimo locale per f.
6) derivata seconda: non richiesta.
7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 5.2.13. (Esame del 08.09.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la radice è ben definita se

$$x^2 - |x| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - x \geq 0 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + x \geq 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(x-1) \geq 0 & \text{se } x \geq 0 \\ x(x+1) \geq 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

pertanto

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x \geq 1\}.$$

Si ha dunque

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} & \text{se } x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 + x} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

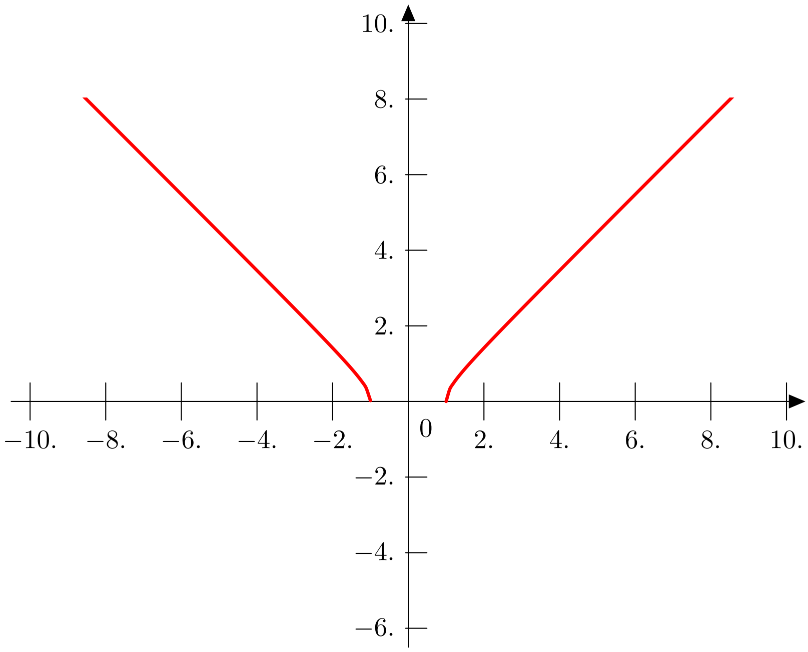
2) SIMMETRIE: la funzione data è pari
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione data è sempre non negativa e inoltre $f(1) = f(-1) = 0$
4) LIMITI E ASINTOTI: si può studiare solo il caso $x \geq 1$ e dedurre il comportamento nel caso $x \leq -1$ grazie alla simmetria della funzione. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{|x|}{x^2}} = +\infty$$

5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

quindi $f'(x) > 0$ se $x > 1$ e $f'(x) < 0$ se $x < -1$ e pertanto f è crescente se $x > 1$ e decrescente se $x < -1$.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 5.2.14. (Esame del 14.12.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \sqrt{|x-1|} - \sqrt{x}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la prima radice è sempre ben definita, la seconda è ben definita se $x \geq 0$ quindi

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

Si ha inoltre

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie per la funzione f

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: si ha $f(0) = 1$, $f(1/2) = 0$. Studiamo ora il segno di f: si ha

$$\sqrt{|x-1|} \geq \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| \geq x$$

Ora, se $x \geq 1$ questo porterebbe a $x - 1 \geq x$ impossibile, mentre se $x < 1$ si ottiene $x \leq 1/2$. Pertanto $f \geq 0$ se $0 \leq x \leq 1/2$.

4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = 0^-$$

quindi $x = 0$ è asintoto orizzontale per f.

5) DERIVATA PRIMA: se $x > 1$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x(x-1)}}\right)\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}$$

quindi f crescente se $x > 1$. Invece se $0 < x < 1$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

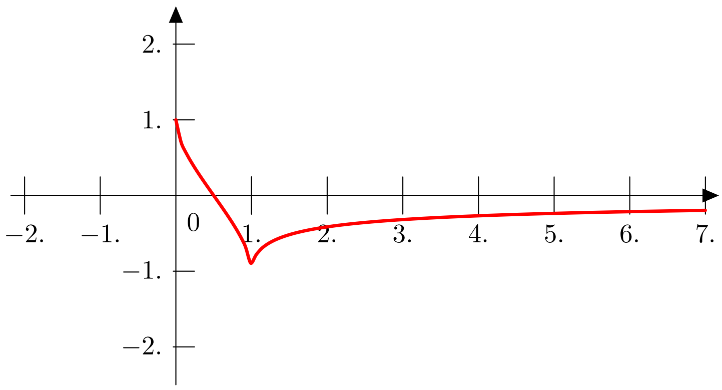
pertanto f decrescente se $0 < x < 1$.

Inoltre

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f'(x) = -\infty$$

6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 5.2.15. (Esame del 23.06.21)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x}}$$

determinandone il grafico qualitativo.

R.

1) DOMINIO: la radice è ben definita se l'argomento è non negativo, ma il denominatore non si deve annullare, quindi

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \lor x > 0\}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: $f(0) = 0$; inoltre $f > 0$ se $x > 0$ mentre $f < 0$ se $x < 0$.

4) limiti e asintoti: dalla gerarchia degli infiniti e degli infinitesimi si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

5) derivata prima: si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}(2x+1)x^3}{x^2+x} \\ &= \frac{6x^2(x^2+x)-(2x+1)x^3}{2(x^2+x)^{3/2}} \\ &= \frac{6x^4+6x^3-2x^4-x^3}{2(x^2+x)^{3/2}} = \frac{4x^4+5x^3}{2(x^2+x)^{3/2}} \end{aligned}$$

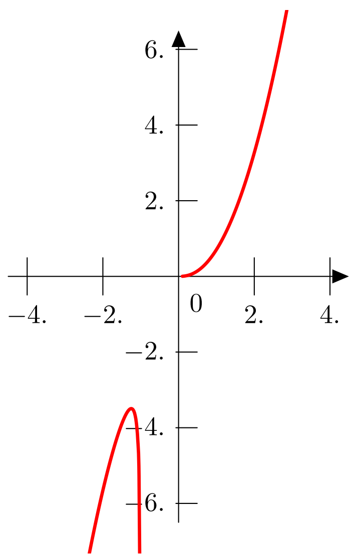
A questo punto $f'(x) > 0$ se $4x^4 + 5x^3 > 0$ cioè se $x^3(4x+5) > 0$ da cui $x < -5/4 \vee x > 0$. Quindi la funzione data è crescente se $x < -5/4$ oppure se $x > 0$ e decrescente nell'intervallo complementare.

6) derivata seconda: si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(16x^3+15x^2)2(x^2+x)^{3/2} - 2\,\frac{3}{2}(x^2+x)^{1/2}\,(2x+1)(4x^4+5x^3)}{4(x^2+x)^3} \\ &= \frac{(2x^2+2x)(16x^3+15x^2)-(6x+3)(4x^4+5x^3)}{4(x^3+x)^{5/2}} \\ &= \frac{32x^5+30x^4+32x^4+30x^3-24x^5-30x^4-12x^4-15x^3}{4(x^3+x)^{5/2}} \\ &= \frac{8x^5+20x^4+15x^3}{4(x^3+x)^{5/2}} = \frac{x^3(8x^2+20x+15)}{4(x^3+x)^{5/2}} \end{aligned}$$

da cui $f''(x) > 0$ per ogni x nel dominio di f.

7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura



5.2.4. Funzioni con esponenziali

❒ **Esercizio 5.2.16. (Esame del 12.09.17)** *Studiare la seguente funzione*

$$f(x) = e^{x+\frac{1}{x}} = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la funzione esponenziale è sempre ben definita, a patto che lo sia il suo argomento; pertanto la funzione data è ben definita se il denominatore della frazione $\frac{1}{x}$ non si annulla quindi deve essere $x \neq 0$.
Si ha allora

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione esponenziale, quando esiste, è sempre positiva.
4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

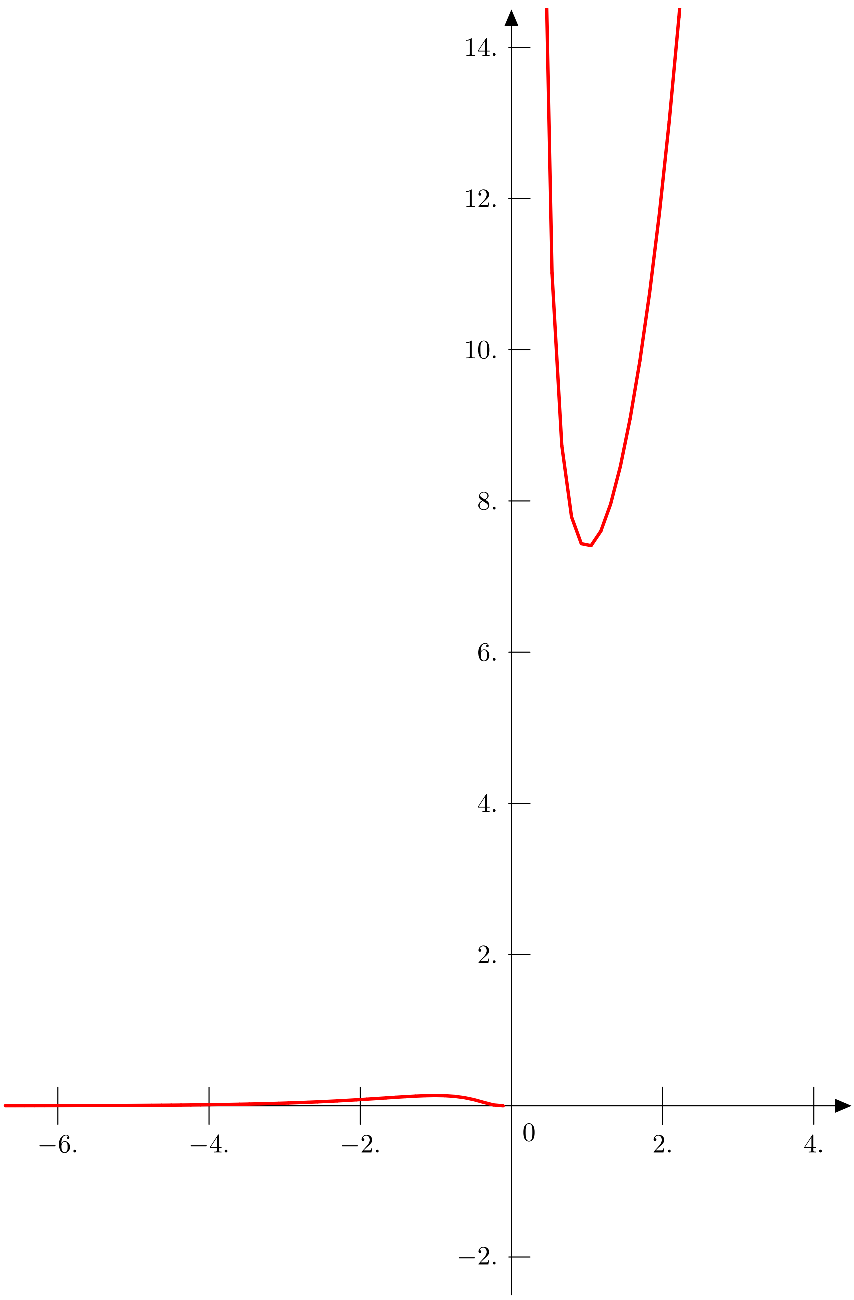
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = e^{x+\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

dunque

$$f'(x) > 0 \quad \leftrightarrow \quad x < -1 \vee x > 1$$

pertanto se $x < -1 \vee x > 1$ la funzione data è crescente, e decrescente nell'intervallo complementare.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 5.2.17 (Esame del 11.09.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

➼ **R.**

1) DOMINIO: Affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che i denominatori non si annullino. Si ottiene $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

2) simmetrie: Si ha

$$f(-x) = \left(\frac{-x}{3} - \frac{1}{-x}\right) e^{-1/(-x)^2} = \left(-\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = -f(x),$$

quindi la funzione è dispari. Possiamo allora limitarci a studiarla per $x > 0$ per poi rifletterne il grafico simmetricamente rispetto all'origine.

3) intersezioni con gli assi e segno: Non ci sono intersezioni con l'asse y poichÃľ $x = 0$ non appartiene al dominio. Inoltre quando $x > 0$ si ha $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$, quindi c'è un'intersezione nel punto $(\sqrt{3}, 0)$. Infine $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{3}$.

4) limiti e asintoti: Calcolando i limiti agli estremi del dominio (limitatamente alla semiretta $x > 0$) otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{3}\, e^{-1/x^2} - \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}} = 0,$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = +\infty,\\
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2}\right) e^{-1/x^2} = \frac{1}{3} := m,\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} - \frac{x}{3} = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-1/x^2} - 1\right) \frac{x}{3} - \frac{1}{x}\, e^{-1/x^2}\\
&= \lim_{x\to+\infty} -\frac{e^{-1/x^2} - 1}{-1/x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{3} - \frac{1}{x}\, e^{-1/x^2} = 0 := q,
\end{aligned}$$

da cui un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{x}{3}$.

5) derivata prima: Si ottiene

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x^2}\,(x^4 + 5x^2 - 6)}{3x^4}$$

per $x > 0$, mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}\,(x^4 + 5x^2 - 6)}{3x^4} = 0.$$

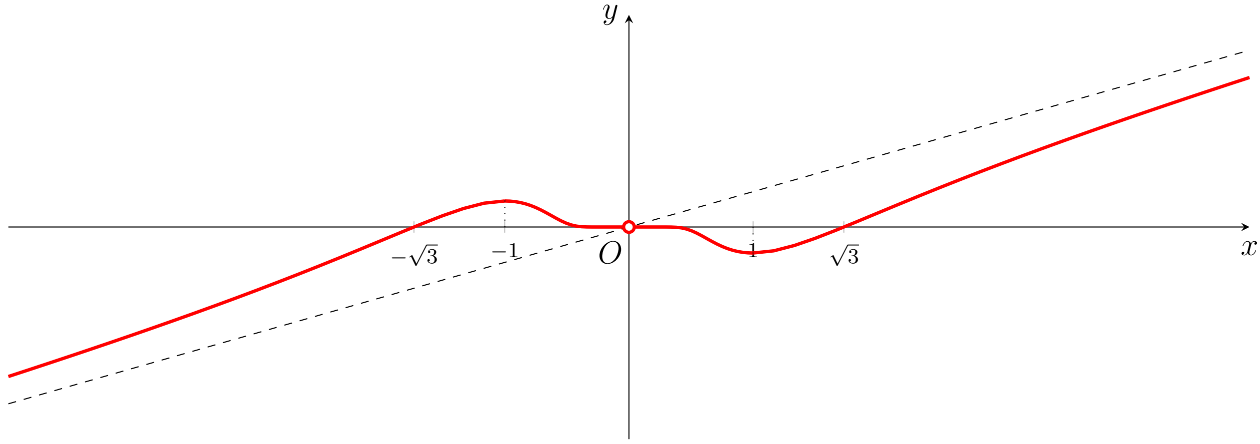
Inoltre

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Sulla semiretta $]0, +\infty]$ la funzione è quindi decrescente in $]0, 1]$ e crescente quando $x > 1$. Ha un punto di minimo locale in $x = 1$.

6) derivata seconda: non richiesta.

7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura



5.2.5. Funzioni con esponenziali e valori assoluti

❒ **Esercizio 5.2.18. (Esame del 06.05.16)** *Sia data la funzione*

$$f(x) = |x|e^{\frac{1}{2-|x|}} = |x| \exp\left(\frac{1}{2-|x|}\right).$$

Si disegni il grafico qualitativo della funzione, determinando in particolare i limiti agli estremi del dominio, e lo studio della derivata prima; evidenziare eventuali punti angolosi studiando il comportamento della derivata prima destra e sinistra (se esistono).

R. Innanzitutto osserviamo che la funzione è definita se $x \neq \pm 2$ ed è pari, pertanto basta studiarla nel caso $x \geq 0$ e poi ricavare il grafico rimanente attraverso una simmetria rispetto all'asse delle y. Pertanto se $x \geq 0$ si ha semplicemente

$$f(x) = xe^{\frac{1}{2-x}}.$$

Si ha $f(0) = 0$ e inoltre

$$\lim_{x\to 2^- f(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre

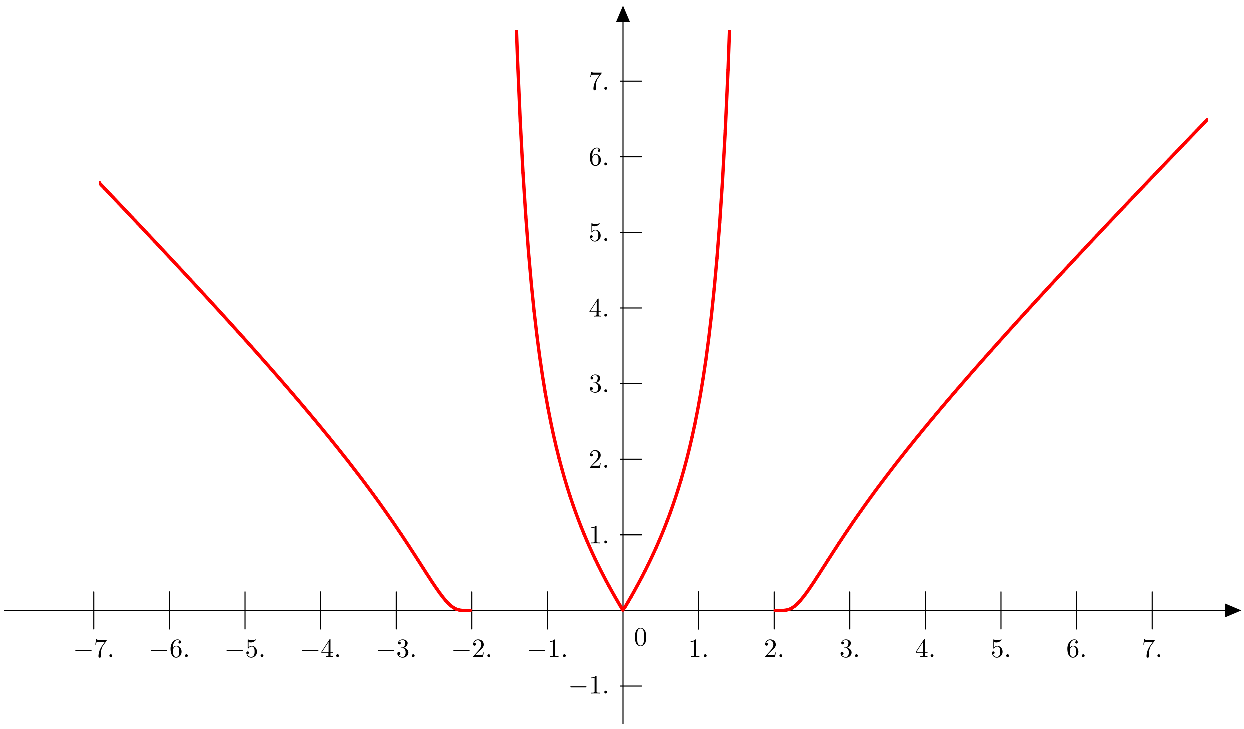
$$f'(x) = \left(1 + \frac{x}{(2-x)^2}\right) e^{\frac{1}{2-x}} = \frac{x^2-3x+4}{(2-x)^2} e^{\frac{1}{2-x}}$$

quindi, essendo $x^2 - 3x + 4 > 0$ per ogni $x > 0$, si ha che $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 2$ da cui la funzione risulta crescente sia per $0 < x < 2$ che per $x > 2$.

Un'analisi successiva dello studio della derivata seconda avrebbe portato a osservare un cambio di concavità se $x > 2$. Infine osservando che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = e^{\frac{1}{2}} \neq -e^{\frac{1}{2}} = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

possiamo dire che la funzione f ammette in $x = 0$ un punto angoloso. In figura è evidenziato il grafico qualitativo di f.



❒ **Esercizio 5.2.19. (Esame del 19.12.16)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \frac{e^{|x+1|}}{1+x^2}$$

Non è richiesto l'analisi della derivata seconda. Evidenziare eventuali punti angolosi calcolando espicitamente la retta tangente in un intorno destro e sinistro del punto.

R. La funzione data è ben definita su tutto l'asse reale; inoltre è sempre continua e strettamente positiva. Non ci sono dunque intersezioni con l'asse delle x mentre $f(0) = e$. Non ci sono simmetrie (la funzione non è né pari né dispari).
Vediamo i limiti agli estremi del dominio: dalla gerarchia degli infiniti si vede immediatamente che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Sempre per la gerarchia degli infiniti non ci aspettiamo che ci possano essere asintoti obliqui. Studiamo il segno della derivata prima. Distinguiamo due casi:
sia $x > -1$: allora

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{1+x^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{e^{x+1}(1+x^2) - 2xe^{x+3}}{(1+x)^2} = \frac{e^{x+1}(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^{x+1}(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$$

quindi la funzione è sempre crescente se $x > -1$. Osserviamo che in $x = 1$ si ha $f'(x) = 0$ quindi la funzione ha tangente orizzontale in quel punto.
Sia ora $x < -1$. Si ha

$$f(x) = \frac{e^{-x-1}}{1+x^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{-e^{-x-1}(1+x^2) - 2xe^{-x-1}}{(1+x)^2} = -\frac{e^{-x-1}(x+1)^2}{(1+x^2)^2}$$

quindi se $x < -1$ la funzione data è sempre decrescente.
Osserviamo che

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = 0$$

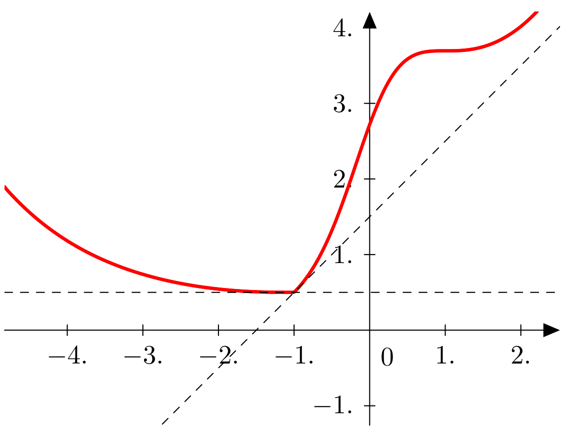
quindi in $x = -1$ da sinistra la funzione ha tangente orizzontale di equazione $y = f(-1) = 1/2$.
Invece se $x > -1$ allora

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = 1$$

quindi l'equazione della retta tangente al grafico per $x \to -1^+$ è

$$y = x + \frac{3}{2}.$$

Si evidenzia pertanto la presenza di un punto angoloso. Il grafico è quello rappresentato in figura.



❐ **Esercizio 5.2.20. (Esame del 19.07.17)** *Studiare la seguente funzione*

$$f(x) = e^{\frac{x}{|x|-1}} = \exp\left(\frac{x}{|x|-1}\right)$$

determinandone il grafico qualitativo.

R.

1) DOMINIO: la funzione esponenziale è ben definita su tutto l'asse reale, quindi è sufficiente che il suo esponente (che è una frazione) sia ben definito, il che vale se $x \neq \pm 1$.
Si ha

$$f(x) = e^{\frac{x}{|x|-1}} = \begin{cases} e^{\frac{x}{x-1}} & x \geq 0 \\ e^{\frac{x}{-x-1}} & x < 0 \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione data, quando esiste, è sempre positiva.

4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1/e$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

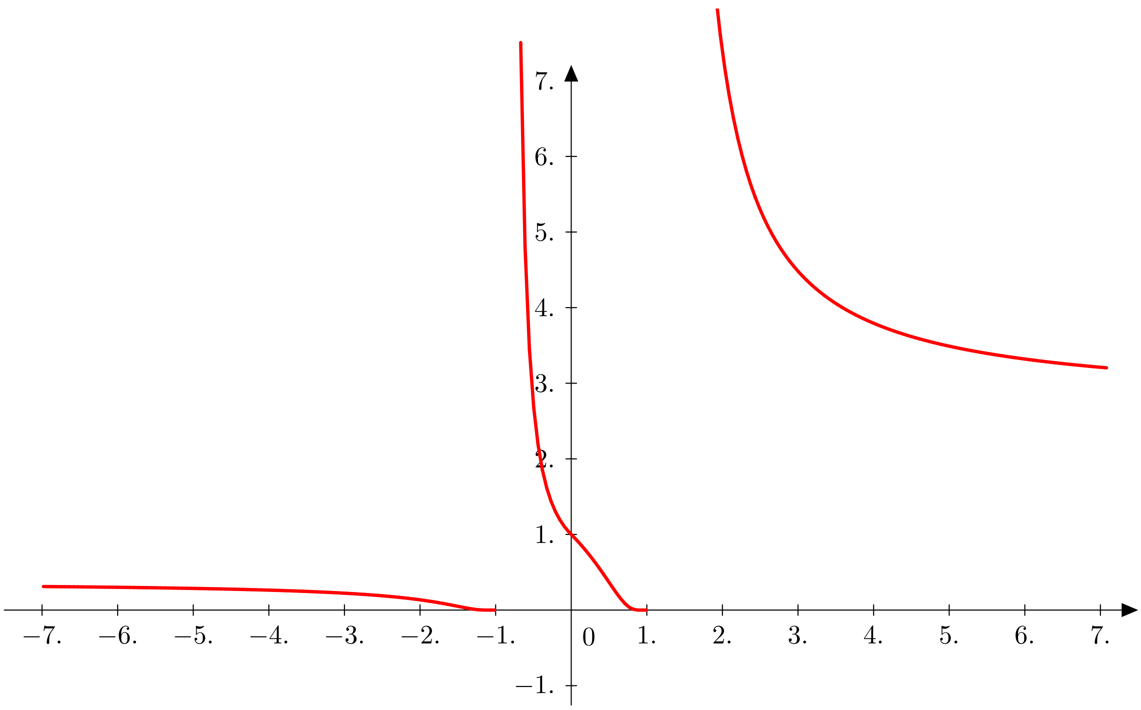
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x-1}}\left[-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right] & x \geq 0 \\ e^{\frac{x}{-x-1}}\left[-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right] & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è sempre decrescente.

6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 5.2.21. (Esame del 18.12.17)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = (x+2)e^{-|x|}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Si evidenzino eventuali punti angolosi. È richiesto lo studio della derivata seconda.

R. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. Si ha $f(x) > 0$ se $x > -2$. Inoltre

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{-x} & x \geq 0 \\ (x+2)e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

La funzione risulta continua su tutto il suo dominio perché composizione di funzioni continue. Andiamo a calcolare i limiti agli estremi del dominio. Dalla gerarchia degli infiniti si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)e^{-x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)e^{x} = 0.$$

Studiamo il segno della derivata prima. Si ha: (attenzione: non si deriva il valore assoluto!! Occorre separare i due casi)

$$f'(x) = \begin{cases} -(x+1)e^{-x} & x > 0 \\ (x+3)e^{x} & x < 0. \end{cases}$$

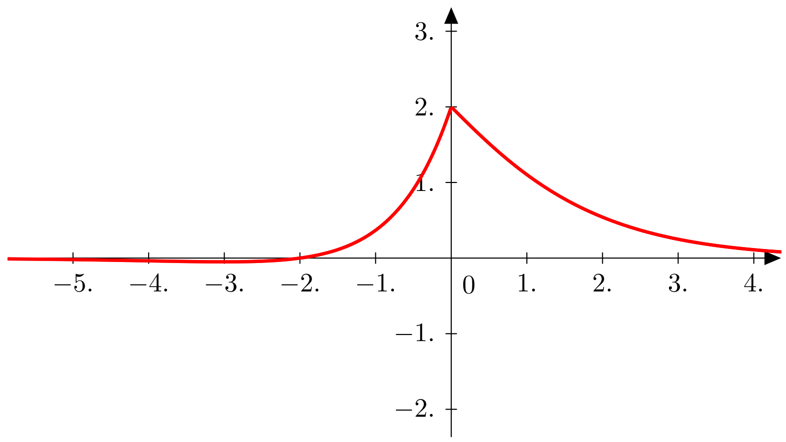
A questo punto osserviamo che se $x > 0$ allora $f'(x) < 0$ e dunque la funzione è sempre decrescente; invece se $x < 0$ allora $f'(x) = 0$ se $x = -3$ che rappresenta un punto di minimo locale per f. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 \neq \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 3$$

quindi $x = 3$ rappresenta un punto angoloso per f.
Concludiamo infine andando a studiare il segno della derivata seconda di f. Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ (x+4)e^{x} & x < 0. \end{cases}$$

quindi la funzione è convessa se $x > 0$ mentre risulta convessa se $x > -4$ e concava se $x < -4$. Il grafico qualitativo è rappresentato in figura. Notate come il valore del minimo locale è molto prossimo a zero.



❒ **Esercizio 5.2.22. (Esame del 25.01.18)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = |x^2 - 1|\, e^{2x}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Evidenziare eventuali punti angolosi. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.
1) DOMINIO: la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$. Si ha

$$f(x) = |x^2 - 1|\, e^{2x} = \begin{cases} (x^2-1)e^{2x} & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ (1-x^2)e^{2x} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione data è sempre positiva.

4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x^2+x-1)e^{2x} & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \\ -2(x^2+x-1)e^{2x} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

Pertanto se $x < -1 \vee x > 1$ si ha $f'(x) > 0$ se $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x > 1$ (sarebbe $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ma siamo nella zona dove $x > 1$) quindi $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo locale per f.
D'altra parte, se $-1 < x < 1$ in maniera del tutto analoga si ottiene che $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo locale per f.
Inoltre si ha che

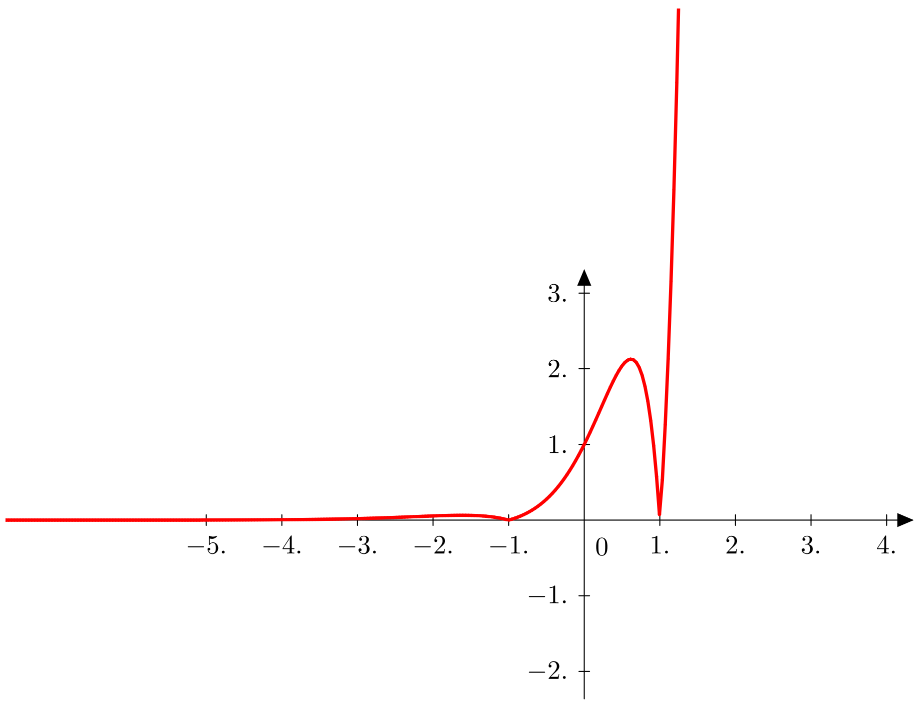
$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = 2e^2 \qquad \lim_{x\to1^-} f'(x) = -2e^2$$

$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = 2e^{-2} \qquad \lim_{x\to-1^-} f'(x) = -2e^{-2}$$

quindi possiamo notare la presenza di due punti angolosi.

6) DERIVATA SECONDA: non è richiesta.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❐ **Esercizio 5.2.23. (Esame del 26.06.18)**

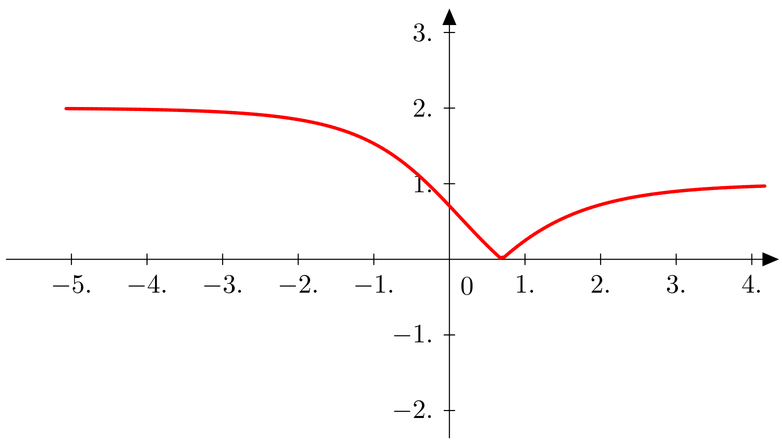
a) Si studi la seguente funzione
$$f(x) = \frac{|e^x - 2|}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$
disegnandone il grafico qualitativo. Si evidenzino eventuali punti angolosi. Non è richiesta la derivata seconda.
b) Si studi la seguente funzione
$$f(x) = \frac{e^{|x|} - 2}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$
disegnandone il grafico qualitativo. Si evidenzino eventuali punti angolosi. Non è richiesta la derivata seconda.

R.
Iniziamo dalla funzione a). Quindi consideriamo la funzione
$$f(x) = \frac{|e^x - 2|}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \begin{cases} \dfrac{e^x - 2}{\sqrt{e^{2x}+1}} & \text{se } e^x \geq 2 \\ \dfrac{2 - e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} & \text{se } e^x < 2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{e^x - 2}{\sqrt{e^{2x}+1}} & \text{se } x \geq \log 2 \\ \dfrac{2 - e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} & \text{se } x < \log 2 \end{cases}$$
1) DOMINIO: la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$.
2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione è sempre non negativa. Inoltre $f(\log 2) = 0$ e $f(0) = 1/\sqrt{2}$.
4) LIMITI E ASINTOTI: si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 2}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{2}{e^x}\right)}{e^x\sqrt{1 + \frac{1}{e^{2x}}}} = 1$$
e d'altra parte
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} = 2$$
perché $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
5) DERIVATA PRIMA: si ha, se $x > \log 2$
$$f'(x) = \frac{e^x\sqrt{e^{2x}+1} - \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}}e^{2x}\,2\,(e^x - 2)}{e^{2x}+1} = \frac{e^x(e^{2x}+1) - e^{2x}(e^x - 2)}{(e^{2x}+1)^{3/2}} = \frac{e^x(1+2e^x)}{(e^{2x}+1)^{3/2}}$$
dunque se $x > \log 2$ la funzione data è sempre crescente. D'altra parte se $x < \log 2$
$$f'(x) = \frac{-e^x\sqrt{e^{2x}+1} - \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}}e^{2x}\,2\,(2 - e^x)}{e^{2x}+1} = \frac{-e^x(e^{2x}+1) - e^{2x}(2 - e^x)}{(e^{2x}+1)^{3/2}} = \frac{-e^x(1+2e^x)}{(e^{2x}+1)^{3/2}}$$

pertanto se $x < \log 2$ la funzione data è sempre decrescente.
Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x\to(\log 2)^+} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \lim_{x\to(\log 2)^-} f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

quindi in $x = \log 2$ c'è un punto angoloso.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è evidenziato in figura.



Consideriamo ora la funzione b). Sia dunque

$$f(x) = \frac{e^{|x|}-2}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \begin{cases} \dfrac{e^x-2}{\sqrt{e^{2x}+1}} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{2-e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

1) DOMINIO: la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$.
2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione è positiva se $e^{|x|} > 2$ cioè se $|x| > \log 2$ dunque se $x < -\log 2 \vee x > \log 2$.
4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-2}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\sqrt{1+\frac{1}{e^{2x}}}} = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}-2}{\sqrt{e^{2x}+1}} = +\infty$$

5) derivata prima: si ha, se $x > 0$

$$f'(x) = \frac{e^x\sqrt{e^{2x}+1} - \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}}e^{2x}\,2\,(e^x-2)}{e^{2x}+1} = \frac{e^x(e^{2x}+1) - e^{2x}(e^x-2)}{(e^{2x}+1)^{3/2}} = \frac{e^x(1+2e^x)}{(e^{2x}+1)^{3/2}}$$

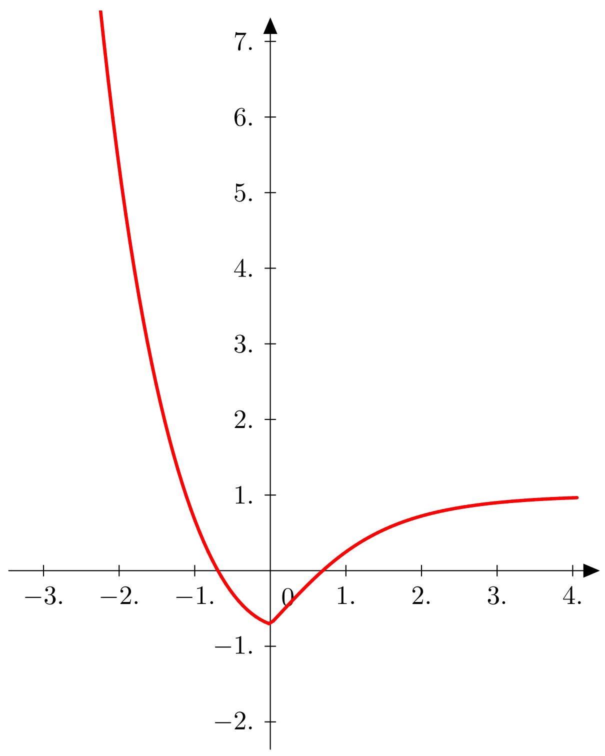
dunque se $x > 0$ la funzione data è sempre crescente. D'altra parte se $x < 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-e^{-x}\sqrt{e^{2x}+1} - \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}}e^{2x}\,2\,(e^{-x}-2)}{e^{2x}+1} = \frac{-e^{-x}(e^{2x}+1) - e^{2x}(e^{-x}-2)}{(e^{2x}+1)^{3/2}} \\ &= \frac{-2e^x - e^{-x} + 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^{3/2}} \end{aligned}$$

pertanto se $x < 0$ la funzione data è sempre decrescente.
Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

quindi in $x = 0$ c'è un punto angoloso.
6) derivata seconda: non richiesta.
7) grafico: il grafico qualitativo è evidenziato in figura.



❒ **Esercizio 5.2.24. (Esame del 10.07.18)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \sqrt[3]{|e^{2x} - 1|}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Si evidenzino eventuali punti angolosi. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$. Si ha

$$f(x) = \sqrt[3]{|e^{2x} - 1|} = \begin{cases} \sqrt[3]{e^{2x} - 1} & \text{se } e^{2x} \geq 1 \\ \sqrt[3]{1 - e^{2x}} & \text{se } e^{2x} < 1 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt[3]{e^{2x} - 1} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt[3]{1 - e^{2x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione è sempre non negativa; inoltre $f(0) = 0$.

4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

5) DERIVATA PRIMA: si ha

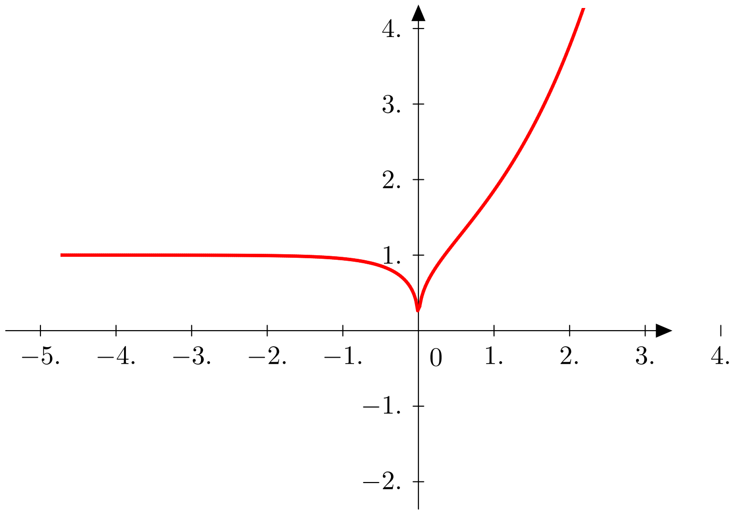
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(e^{2x} - 1)^2}} e^{2x}\, 2 & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1 - e^{2x})^2}} (-e^{2x})\, 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Inoltre si osserva che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{2}{3}$$

6) DERIVATA SECONDA: non richiesta

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è rappresentato in figura.



❒ **Esercizio 5.2.25 (Esame del 18.06.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = e^{-x}\left|1 - e^{-2x}\right|.$$

R.

1) DOMINIO: $D_f = \mathbb{R}$.

2) SIMMETRIE: Si vede che $f(-x) \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è né pari né dispari.

3) INTERSEZIONI CON GLI ASSI E SEGNO: Si ha $f(0) = 0$ e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, quindi l'unica intersezione è l'origine. Inoltre $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4) LIMITI E ASINTOTI: Calcolando i limiti agli estremi del dominio otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(1 - e^{-2x}\right) = 0,$$

da cui un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ (asse x), e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(e^{-2x} - 1\right) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}\left(e^{-2x} - 1\right)}{x} = -\infty,$$

quindi non c'è un asintoto obliquo quando $x \to -\infty$.

5) DERIVATA PRIMA: Si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} + 3e^{-3x} & x > 0, \\ -3e^{-3x} + e^{-x} & x < 0. \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -e^{-x} + 3e^{-3x} = 2,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -3e^{-3x} + e^{-x} = -2,$$

quindi in $x = 0$ c'è un punto angoloso per f. Siccome inoltre

$$-e^{-x} + 3e^{-3x} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{\log 3}{2},$$

la funzione è sempre descrescente per $x < 0$, crescente in $]0, (\log 3)/2[$ e decrescente per $x > (\log 3)/2$. La funzione ha quindi un punto di massimo locale in $x = (\log 3)/2$ e un punto di minimo locale in $x = 0$.

6) derivata seconda: Si ottiene

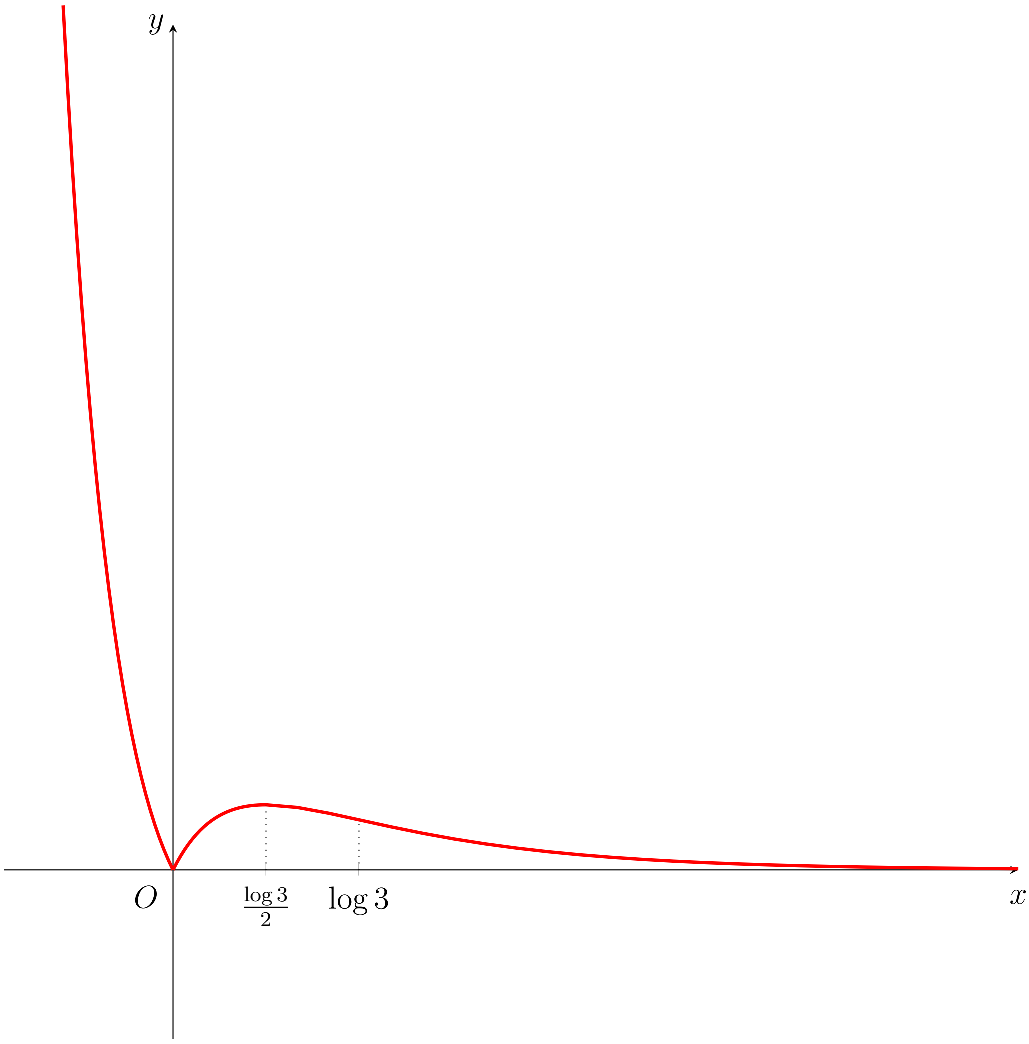
$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x} - 9e^{-3x} & x > 0, \\ 9e^{-3x} - e^{-x} & x < 0. \end{cases}$$

Siccome

$$e^{-x} - 9e^{-3x} > 0 \Leftrightarrow x > \log 3,$$

la funzione volge la concavità verso l'alto per $x < 0$, verso il basso in $]0, \log 3[$ e di nuovo verso l'alto per $x > \log 3$. In $x = \log 3$ la funzione ha quindi un punto di flesso.

7) grafico:



❒ **Esercizio 5.2.26. (Esame del 19.12.19)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = (1 - |x|)e^{-\frac{1}{2x}}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la funzione è ben definita se l'esponente dell'esponenziale non si annulla, quindi

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

Si ha

$$f(x) = (1 - |x|)e^{-\frac{1}{2x}} = \begin{cases} (1-x)e^{-\frac{1}{2x}} & \text{se } x > 0 \\ (1+x)e^{-\frac{1}{2x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2) simmetrie: non ci sono simmetrie.
3) intersezioni con assi e segno: la funzione è positiva se $1 - |x| > 0$ cioè se $-1 < x < 1$ ed è negativa altrove
4) limiti e asintoti: si ha

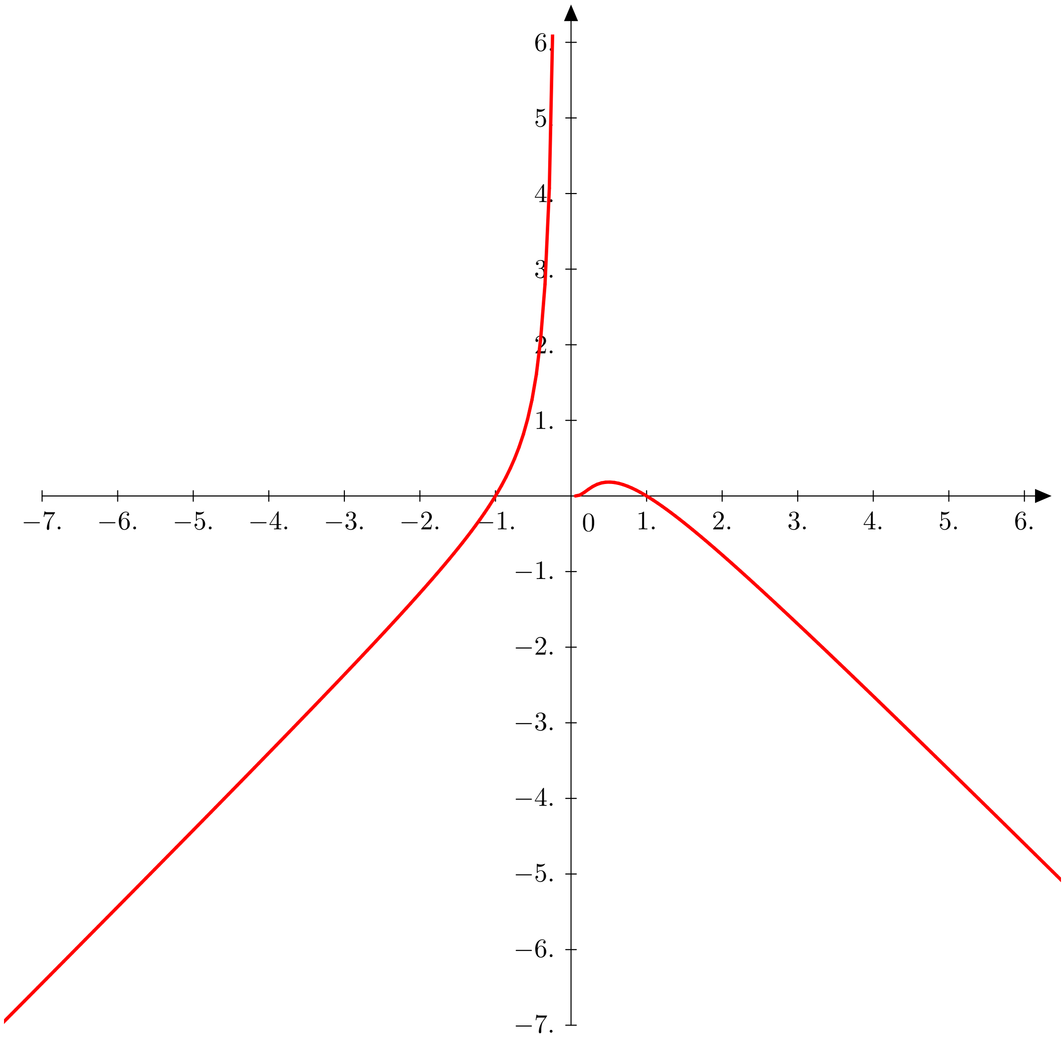
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

quindi l'asse delle ordinate è un asintoto verticale per $x \to 0^-$. D'altra parte la presenza del termine di tipo esponenziale esclude la presenza di asintoti obliqui.
5) derivata prima: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-\frac{1}{2x}} + (1-x)e^{-\frac{1}{2x}}\dfrac{1}{2x^2} & \text{se } x > 0 \\ e^{-\frac{1}{2x}} + (1+x)e^{-\frac{1}{2x}}\dfrac{1}{2x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2x}}\left(\dfrac{-2x^2+1-x}{2x^2}\right) & \text{se } x > 0 \\ e^{-\frac{1}{2x}}\left(\dfrac{2x^2+x+1}{2x^2}\right) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

pertanto se $x > 0$ si ha che $f'(x) > 0$ se $-2x^2 - x + 1 > 0$ cioè se $-1 < x < 1/2$. Pertanto, tenendo conto della limitazione $x > 0$ si ha che $x = 1/2$ è punto di massimo locale per f. D'altra parte, se $x < 0$ si ottiene sempre $f'(x) > 0$ quindi la funzione è sempre crescente in questo intervallo.
6) derivata seconda: non richiesta.
7) grafico: il grafico qualitativo è rappresentato in figura.



❒ **Esercizio 5.2.27. (Esame del 09.01.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{e^x\sqrt{x}}{|x| - 1}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda

R.

1) DOMINIO: la radice è ben definita se il suo argomento è non negativo, il denominatore deve essere diverso da zero, quindi

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1 \vee x > 1\}$$

Inoltre, siccome la funzione vive nella regione dove $x \geq 0$ si ha che $|x| = x$ e

$$f(x) = \frac{e^x\sqrt{x}}{x - 1}$$

2) simmetrie: non ci sono simmetrie.
3) intersezioni con assi e segno: si ha che $f(x) > 0$ se $x > 1$.
4) limiti e asintoti: si ha

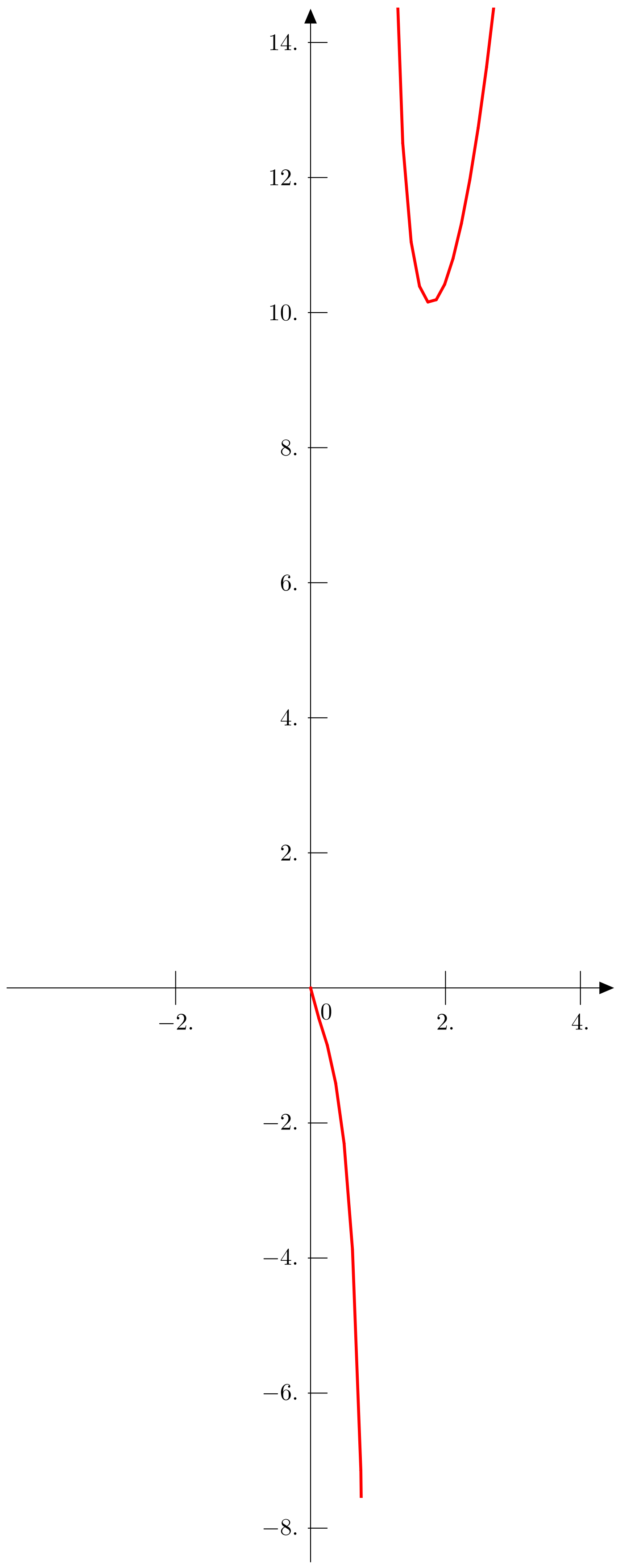
$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

quindi $x = 1$ è asintoto verticale per f.
5) derivata prima: si ha

$$f'(x) = \frac{\left(e^x\sqrt{x} + e^x\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x-1) - e^x\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{e^x(2x^2 - 3x - 1)}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

dunque $f'(x) > 0$ se $2x^2 - 3x - 1 > 0$ e tenendo conto della limitazione data dal dominio, questo vuol dire $x > \frac{3+\sqrt{17}}{4}$. Per cui in questo intervallo la funzione è crescente ed è decrescente altrove.
6) derivata seconda: non richiesta.
7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura.


14.
12.
10.
8.
6.
4.
2.
−2.
0
2.
4.
−2.
−4.
−6.
−8.

❒ **Esercizio 5.2.28. (Esame del 12.01.21)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = e^{\frac{|x|}{x-2}}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata se-conda.

R.

1) DOMINIO: l'esponenziale è una funzione ben definita dappertutto a patto che sia ben definito l'esponente, che è una frazione, dunque il denominatore non si deve annullare. Allora

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}.$$

Inoltre si ha

$$f(x) = e^{\frac{|x|}{x-2}} = \begin{cases} e^{\frac{x}{x-2}} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{\frac{x}{2-x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione dove esiste è sempre positiva.

4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{2-x}} = 1$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} e^{\frac{x}{x-2}} = 0$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} e^{\frac{x}{x-2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x-2}} = e$$

5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x-2}} \left(\frac{x-2-x}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{x}{x-2}} \left(\frac{2}{(x-2)^2}\right) & \text{se } x > 0 \\ e^{\frac{x}{2-x}} \left(\frac{-x+2+x}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{x}{2-x}} \left(\frac{2}{(x-2)^2}\right) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quindi f è decrescente se $x > 0$ ed è crescente se $x > 0$.

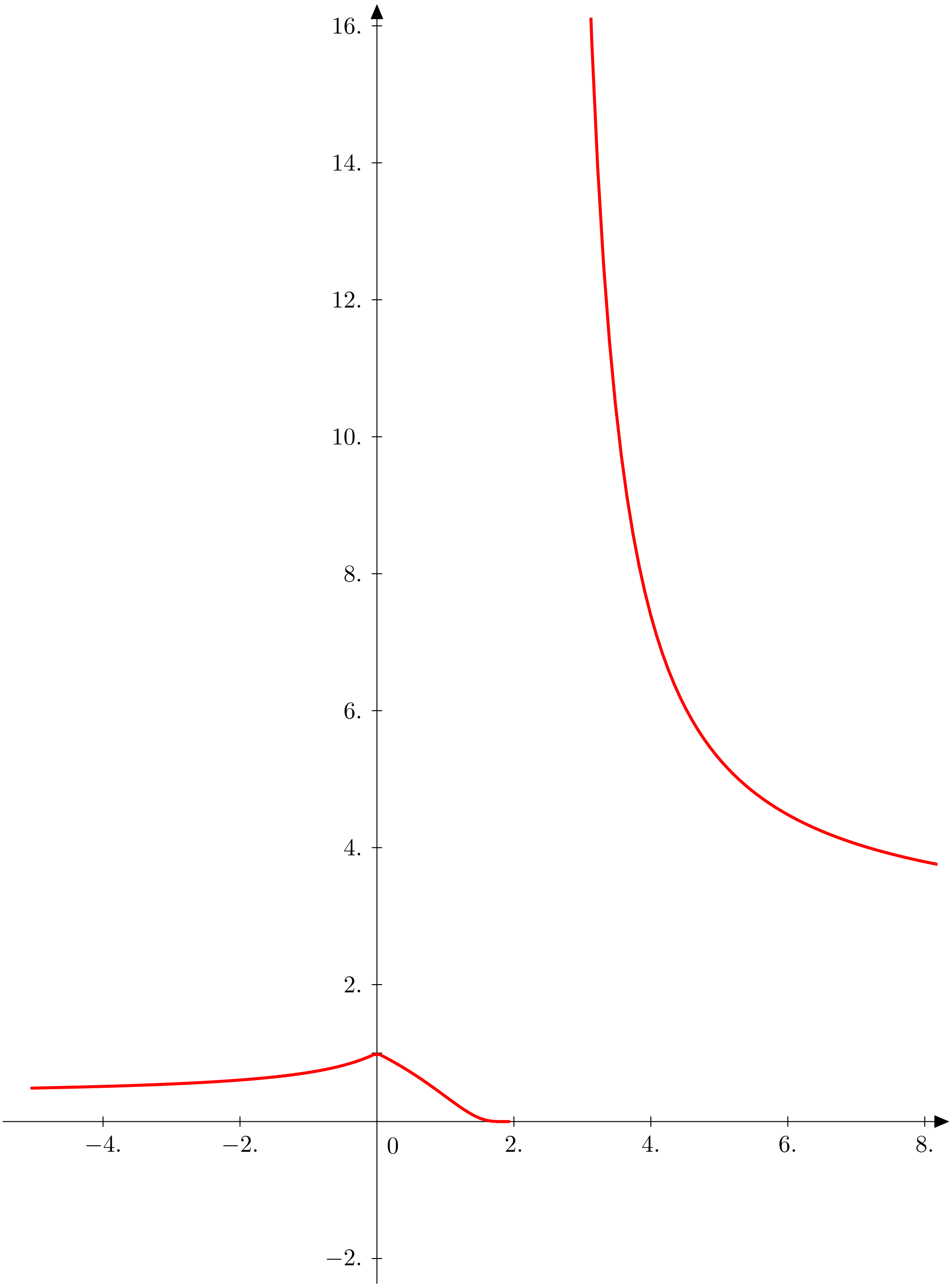
Inoltre osserviamo che

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to0^-} f'(x) = \frac{1}{2}$$

pertanto si evidenzia in $x = 0$ un punto angoloso.

6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è rappresentato in figura.



❒ **Esercizio 5.2.29. (Esame del 02.02.21)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{1+x^2}$$

determinandone il grafico qualitativo.

R.

1) DOMINIO: la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre si ha

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{1+x^2} = \begin{cases} \frac{e^x}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{e^{-x}}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: la funzione è pari, pertanto è sufficiente studiare la funzione per $x \geq 0$ e dedurre il comportamento nella zona complementare per simmetria.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: $f(0) = 1$. Inoltre f è sempre positiva.
4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(1+x^2)-2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{e^{-x}(1+x^2)-2xe^{-x}}{(1+x^2)^2} = -\frac{e^{-x}(x+1)^2}{(1+x^2)^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

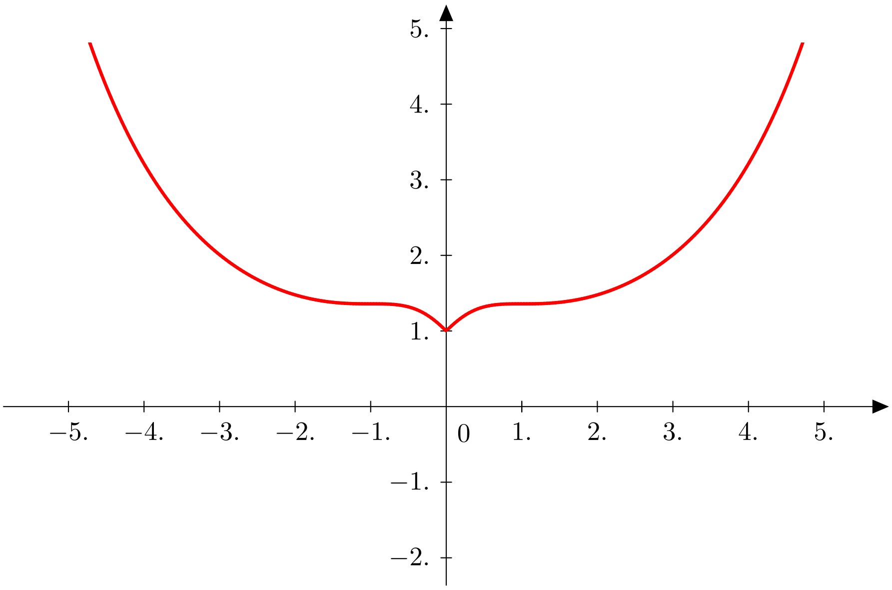
quindi f è decrescente per $x < 0$ e crescente se $x > 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = 1 \neq \lim_{x\to0^-} f'(x) = -1$$

pertanto in $x = 0$ si evidenzia un punto angoloso.
6) DERIVATA SECONDA: per $x > 0$ si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[e^x(x^2-2x+1) + e^x(2x-2)](1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x\, e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{e^x[(x^2-1)(x^2+1) - 4x(x-1)^2]}{(1+x^2)^3} = \frac{e^x(x-1)(x^3-3x^2+5x+1)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

pertanto $x = 1$ è un flesso a tangente orizzontale (e la funzione presenta un cambio di concavità. In maniera analoga anche per $x = -1$ si evidenzia un comportamento analogo.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è evidenziato in figura.



5.2.6. Funzioni con logaritmi

❒ **Esercizio 5.2.30 (Esame del 10.04.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3}\right).$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R. (versione breve)

1) Dominio: Affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che esistano la radice e il logaritmo, e che il denominatore non si annulli. Si ottiene $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1 \vee x > 3\}$.

2) Simmetrie: Non ha senso calcolare $f(-x)$ poiché f non è definita per $x < 0$.

3) Intersezioni con gli assi e segno: Si ha $f(0) = \log(1/3)$ e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$, quindi le intersezioni sono $(0, \log(1/3))$ e $(4, 0)$. Inoltre $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3 < x < 4$.

4) Limiti e asintoti: Calcolando i limiti agli estremi del dominio otteniamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \log\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \log\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3}\right) = +\infty,$$

da cui due asintoti verticali di equazione $x = 1$ e $x = 3$, e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3}\right)}{x} = 0,$$

quindi non c'è un asintoto obliquo quando $x \to +\infty$.

5) Derivata prima: Per $0 < x < 1 \vee x > 3$ si ottiene

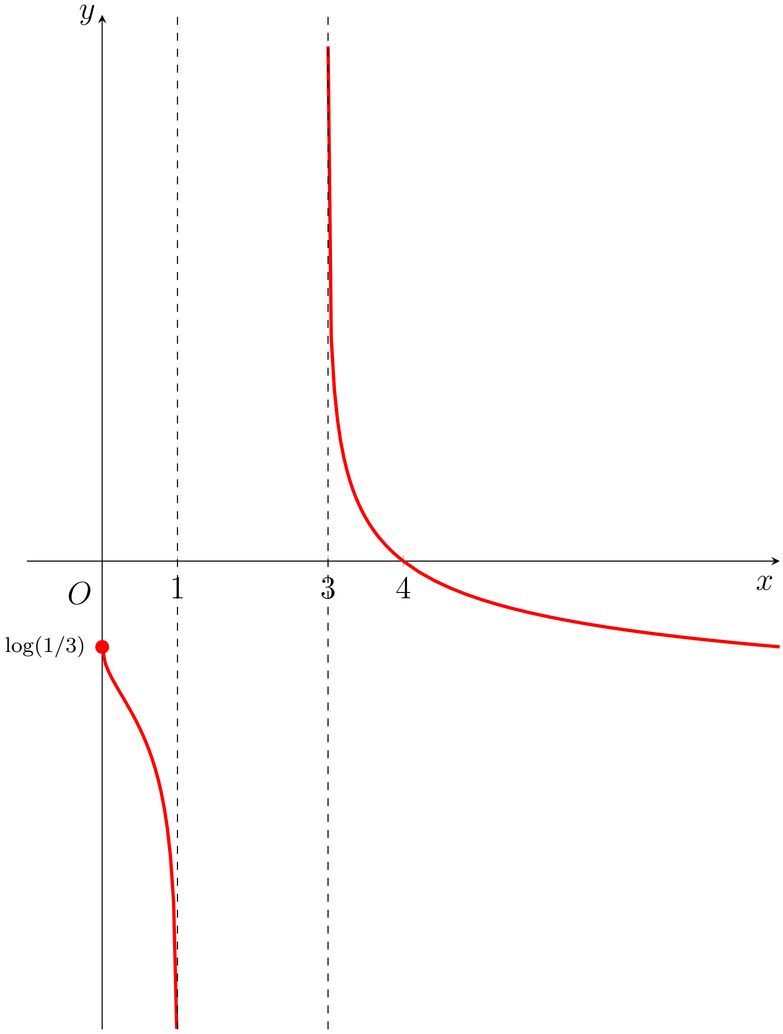
$$f'(x) = \frac{-x + 2\sqrt{x} - 3}{2\left(\sqrt{x}-1\right)(x-3)\sqrt{x}}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{-x + 2\sqrt{x} - 3}{2\left(\sqrt{x}-1\right)(x-3)\sqrt{x}} = -\infty.$$

Per quanto riguarda il segno della derivata osserviamo che il numeratore è sempre negativo, mentre il denominatore è positivo per ogni $x \in D_f$. Dunque $f'(x) < 0\ \forall x \in D_f$, e la funzione è sempre decrescente. Essa ha quindi un punto di massimo locale in $x = 0$.

6) Grafico:



5.2.7. Funzioni con logaritmi e valori assoluti

❒ **Esercizio 5.2.31. (Esame del 20.12.16)** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{|\log^2 x - 1|}{x}$$

e rappresentare il grafico. Non è richiesta l'analisi della derivata seconda. Facoltativo: evidenziare eventuali punti angolosi calcolando espicitamente la retta tangente in un intorno destro e sinistro del punto.

R. Innanzitutto con la scritta $\log^2 x$ si intende naturalmente $(\log x)^2$ che è diverso da $\log(x^2)$. Dominio: $x > 0$ per esistenza del logaritmo, che congloba anche l'esistenza del denominatore.

Nel dominio considerato, la funzione data è sempre positiva.
Osserviamo che

$$\log^2 x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log^2 x \geq 1 \Leftrightarrow \log x < -1 \vee \log x > 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e} \vee x > e$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log^2 x - 1}{x} & x \leq \dfrac{1}{e} \vee x \geq e \\ \dfrac{1 - \log^2 x}{x} & \dfrac{1}{e} < x < e. \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

dove nel primo caso si ha semplicemente sostituendo (non è una forma di indecisione) mentre nel secondo caso si ha dalla gerarchia degli infiniti.
A questo punto, studiamo la derivata prima. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\log^2 x + 2\log x + 1}{x^2} & \log x < -1 \vee \log x > 1 \\ \dfrac{\log^2 x - 2\log x - 1}{x^2} & -1 < \log x < 1. \end{cases}$$

Si ha

$$\log^2 x - 2\log x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log x < 1 - \sqrt{2} \vee \log x > 1 + \sqrt{2}.$$

A questo punto, osservando che

$$-1 < -1 + \sqrt{2} < 1 < 1 + \sqrt{2},$$

si ha:
• primo caso: nell'intervallo in cui $\log x < -1 \vee \log x > 1$ la funzione data è crescente per $1 < \log x < 1 + \sqrt{2}$ e descrescente per $\log x < -1$ e anche per $\log x > 1 + \sqrt{2}$ quindi $x = e^{1+\sqrt{2}}$ è un punto di massimo locale per f.
• secondo caso: nell'intervallo in cui $-1 < \log x < 1$ la funzione data è crescente per $-1 < \log x < 1 - \sqrt{2}$ e decrescente nell'intervallo $1 - \sqrt{2} < \log x < 1$ quindi $x = e^{1-\sqrt{2}}$ è un altro punto di massimo locale per f.
Analizziamo i punti angolosi. Si ha

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} f'(x) = 2e^2 \qquad \lim_{x \to \frac{1}{e}^-} f'(x) = -2e^2$$

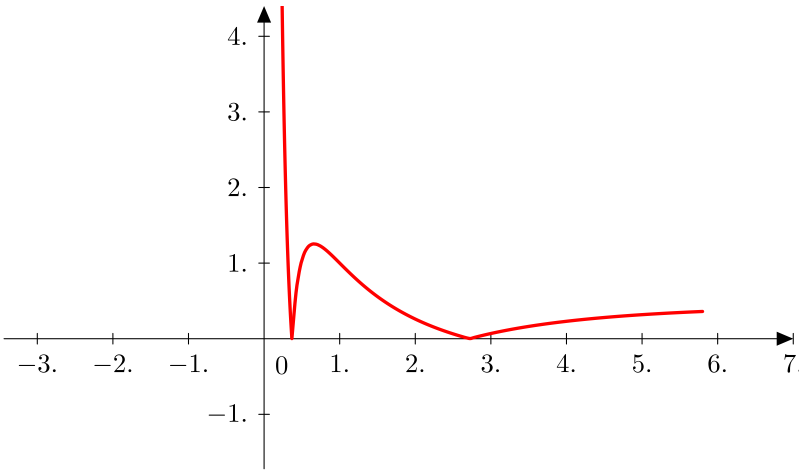
e analogamente

$$\lim_{x \to e^+} f'(x) = \frac{2}{e^2} \qquad \lim_{x \to e^-} f'(x) = -\frac{2}{e^2}$$

e questi sono i coefficienti angolari delle rispettive rette tangenti da destra e da sinistra nei punti angolosi, le cui equazioni sono rispettivamente

$$y = \pm 2e^2 \left(x - \frac{1}{e} \right) \qquad y = \pm \frac{2}{e^2}(x - e).$$

Il grafico è mostrato in figura.



❒ **Esercizio 5.2.32. (Esame del 09.01.18)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,|\log x - 1|}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Si evidenzino eventuali punti angolosi. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: il dominio della radice sarebbe $x \geq 0$ ma la radice è al denominatore, quindi dobbiamo escludere $x = 0$. Inoltre il dominio del logaritmo è $x > 0$ ma il denominatore si annulla anche se $\log x = 1$ cioè se $x = e$. Pertanto

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, \quad x \neq e\}$$

Inoltre si ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,|\log x - 1|} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(\log x - 1)} & \text{se } \log x \geq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1 - \log x)} & \text{se } \log x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(\log x - 1)} & \text{se } x \geq e \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1 - \log x)} & \text{se } x < e \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) intersezioni con assi e segno: la funzione data è sempre positiva.

4) limiti e asintoti: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = +\infty$$

pertanto $x = e$ è asintoto verticale per f.

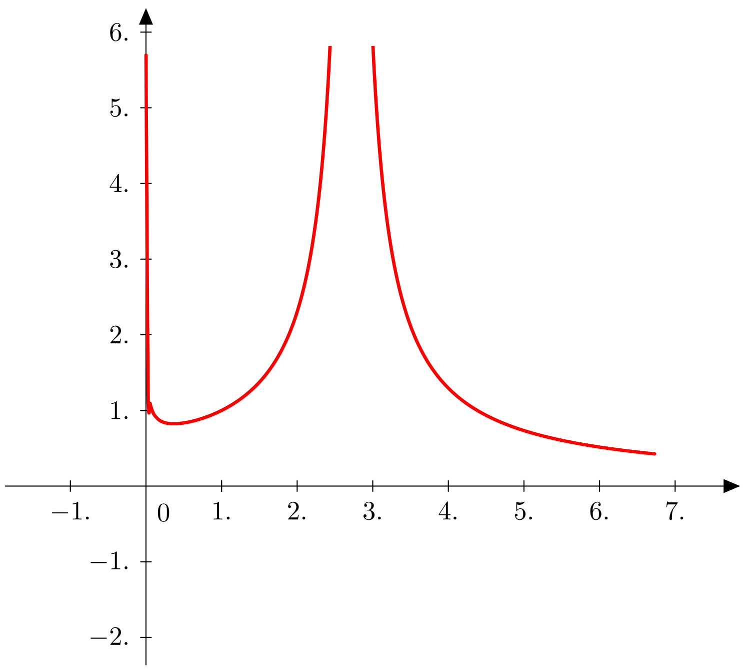
5) derivata prima: si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}(\log x - 1) - \sqrt{x}\frac{1}{x}}}{x\,(\log x - 1)^2} & \text{se } x > e \\ \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}(1-\log x) + \sqrt{x}\frac{1}{x}}}{x\,(1-\log x)^2} & \text{se } x < e \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{\log x + 1}{2x\sqrt{x}\,(\log x - 1)^2} & \text{se } x > e \\ \dfrac{\log x + 1}{2x\sqrt{x}\,(1-\log x)^2} & \text{se } x < e \end{cases}$$

quindi f decrescente se $x > e$ mentre se $x < e$ allora $f'(x) > 0$ se $x > 1/e$, dunque $x = 1/e$ è punto di minimo locale per f.

6) derivata seconda: non richiesta.

7) grafico: il grafico qualitativo è rappresentato in figura.



❒ **Esercizio 5.2.33 (Esame del 22.02.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = x + |x| + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2$$

determinando eventuali punti angolosi.

R.

1) Dominio: Affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che il denominatore non si annulli e che esista il logaritmo, ovvero

$$x - 1 \neq 0,$$
$$\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2 > 0.$$

Quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1/2 \wedge x \neq 1\}$.

2) Simmetrie: Si vede che $f(-x) \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è né pari né dispari.

3) Intersezioni con gli assi e segno: Troviamo le eventuali intersezioni con l'asse y calcolando $f(0)$. Sostituendo si ha $f(0) = 0$, dunque la funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 0)$. Per quanto riguarda le intersezioni con l'asse x e il segno, osserviamo che non è semplice calcolare quando $f(x) = 0$, e di conseguenza determinare il segno della funzione.

4) Limiti e asintoti: D'ora in poi per comodità conviene riscrivere la funzione separando i casi in cui l'argomento del valore assoluto ha segno opposto. Otteniamo

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \log\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right)^2 & x \geq 0,\ x \neq 1/2 \wedge x \neq 1, \\ \log\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right)^2 & x < 0. \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del dominio, ovvero a $1/2^{\pm}$, a $1^{\pm}$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to 1/2^+} f(x) = \lim_{x\to 1/2^+} 2x + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2 = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 1/2^-} f(x) = \lim_{x\to 1/2^-} 2x + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2 = -\infty.$$

C'è quindi un asintoto verticale di equazione $x = 1/2$. Inoltre

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2 = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2 = +\infty.$$

C'è quindi un secondo asintoto verticale di equazione $x = 1$. Infine

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} 2x + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} 2x + \log\left[\frac{2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right]^2 \\
&= \lim_{x\to+\infty} 2x + \log\left(2\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^2 = +\infty, \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2 = \lim_{x\to-\infty} \log\left(2\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^2 = \log 4.
\end{aligned}$$

C'è quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = \log 4$ quando $x \to -\infty$. Vediamo se c'è un asintoto obliquo quando $x \to +\infty$. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{\log\left(2\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^2}{x} = 2 := m, \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx &= \lim_{x\to+\infty} 2x + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2 - 2x = \lim_{x\to+\infty} \log\left(2\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^2 = \log 4 := q,
\end{aligned}$$

quindi c'è un asintoto obliquo di equazione $y = 2x + \log 4$ quando $x \to +\infty$. Osserviamo infine che $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 0$, quindi la funzione è continua in $x = 0$ (come potevamo aspettarci dalla continuità del valore assoluto).

5) Derivata prima: Se $x > 0$, $x \neq 1/2 \wedge x \neq 1$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2 + \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2} \cdot 2\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) \cdot \frac{2(x-1)-(2x-1)}{(x-1)^2} = 2 + 2\cdot\frac{x-1}{2x-1}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2} \\
&= 2 - \frac{2}{(2x-1)(x-1)} = \frac{2(2x-1)(x-1)-2}{(2x-1)(x-1)} = \frac{4x^2-6x}{(2x-1)(x-1)} = \frac{2x(2x-3)}{(2x-1)(x-1)}\,,
\end{aligned}$$

mentre se $x < 0$

$$f'(x) = -\frac{2}{(2x-1)(x-1)}\,.$$

Dunque complessivamente

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(2x-3)}{(2x-1)(x-1)} & x > 0,\ x \neq 1/2 \wedge x \neq 1, \\[2ex] -\dfrac{2}{(2x-1)(x-1)} & x < 0. \end{cases}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} f'(x) &= \lim_{x\to0^+} \frac{2x(2x-3)}{(2x-1)(x-1)} = 0, \\
\lim_{x\to0^-} f'(x) &= \lim_{x\to0^-} -\frac{2}{(2x-1)(x-1)} = -2,
\end{aligned}$$

quindi in $x = 0$ c'è un punto angoloso per f. Studiamo ora il segno di f' per determinare la monotonia di f.

- Se $x > 0$, $x \neq 1/2 \wedge x \neq 1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{(2x-1)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow 1/2 < x < 1 \vee x > 3/2.$$

- Se $x < 0$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) < 0 \Rightarrow \nexists\, x < 0.$$

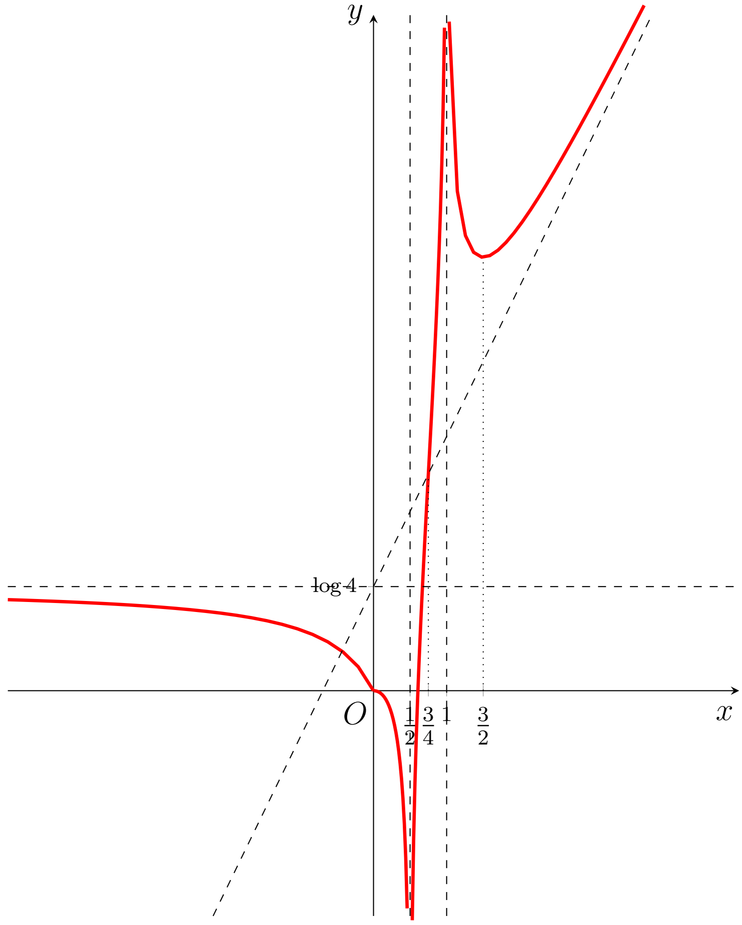
Dunque f è decrescente per $x < 1/2$ (punto angoloso compreso), mentre dopo l'asintoto verticale in $x = 1/2$ cresce fino all'altro asintoto verticale in $x = 1$. Infine decresce in $]1, 3/2[$ fino al punto di minimo locale in $x = 3/2$, per poi crescere per $x > 3/2$.

6) Derivata seconda: Osserviamo che nel calcolare $f'(x)$ quando $x > 0$ ad un certo punto siamo arrivati alla forma $f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x-1)(x-1)}$, quindi $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{(2x-1)(x-1)}\right)$ $\forall x \in D_f$. Otteniamo

$$f''(x) = \frac{(4x-3)\cdot 2}{[(2x-1)(x-1)]^2},$$

da cui $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3/4$. Quindi la funzione volge la concavitÃă verso il basso in $]-\infty, 0[$, in $]0, 1/2[$ e in $]1/2, 3/4[$, ha un punto di flesso in $x = 3/4$ per poi volgere la concavitÃă verso l'alto in $]3/4, 1[$ e in $]1, +\infty[$.

7) Grafico:



❐ **Esercizio 5.2.34 (Esame del 07.07.21).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \frac{x^2}{\log|x| - 1}$$

determinando eventuali punti angolosi.

R.

1) Dominio: Affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che esista il logaritmo e che il denominatore non si annulli, ovvero

$$\begin{cases} |x| > 0, \\ \log|x| - 1 \neq 0. \end{cases}$$

La prima condizione è soddisfatta per qualsiasi $x \neq 0$, mentre la seconda è equivalente a $\log|x| \neq 1 = \log e$. Quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \neq \pm e\}$.

2) Simmetrie: Si ha

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\log|-x|-1} = \frac{x^2}{\log|x|-1} = f(x),$$

quindi la funzione è pari. Possiamo allora limitarci a studiarla per $x > 0$ per poi rifletterne il grafico simmetricamente rispetto all'asse y.

3) Intersezioni con gli assi e segno: Non ci sono intersezioni con l'asse y poiché $x = 0$ non appartiene al dominio. Per quanto riguarda le intersezioni con l'asse x (limitandoci alla semiretta $x > 0$ per quanto visto prima) osserviamo che

$$\frac{x^2}{\log x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

quindi per lo stesso motivo non ci sono intersezioni con l'asse x. Studiamo il segno della funzione. Indicando con N e D numeratore e denominatore, si ha

$$\begin{aligned} &N > 0 \ \ \forall x \in D_f, \\ &D > 0 \Leftrightarrow \log x > 1 = \log e \Leftrightarrow x > e, \end{aligned}$$

quindi per $x > 0$ si ha $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > e$.

4) Limiti e asintoti: Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del dominio (limitatamente alla semiretta $x > 0$), ovvero a 0^+, a $e^{\pm}$ e a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\log x - 1} = 0.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{x \to e^+} f(x) &= \lim_{x \to e^+} \frac{x^2}{\log x - 1} = +\infty, \\ \lim_{x \to e^-} f(x) &= \lim_{x \to e^-} \frac{x^2}{\log x - 1} = -\infty. \end{aligned}$$

C'è quindi un asintoto verticale di equazione $x = e$. Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\log x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\log x \left(1 - \frac{1}{\log x}\right)} = +\infty,$$

quindi potrebbe esserci un asintoto obliquo. Verifichiamolo. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x \log x - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x \log x \left(1 - \frac{1}{\log x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log x \left(1 - \frac{1}{\log x}\right)} = +\infty,$$

quindi non c'è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

5) Derivata prima: Si ha

$$f'(x) = \frac{2x\,(\log x - 1) - \frac{1}{x}\cdot x^2}{(\log x - 1)^2} = \frac{x\,(2\log x - 3)}{(\log x - 1)^2}$$

per $x > 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\,(2\log x - 3)}{(\log x - 1)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\,\frac{\log\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 3x}{(\log x - 1)^2} = 0.$$

Studiamo ora il segno di f' per determinare la monotonia di f. Siccome il denominatore è sempre positivo si ha

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x\,(2\log x - 3) > 0,$$

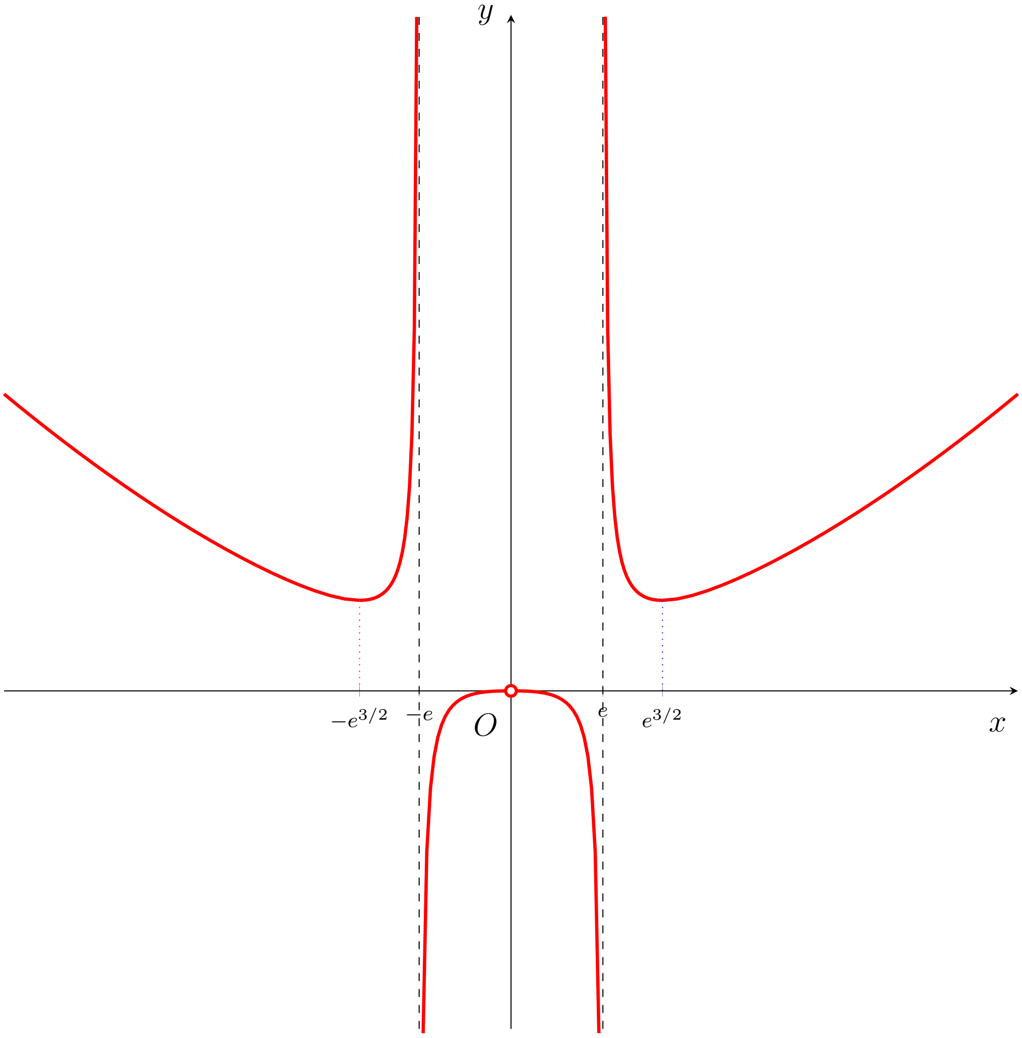
e siccome stiamo assumendo $x > 0$ questa condizione è equivalente a $2\log x - 3 > 0$, ovvero $x > e^{3/2}$. Dunque f è decrescente in $]0, e[$ e in $]e, e^{3/2}[$, ha un punto di minimo locale in $x = e^{3/2}$ e poi cresce per $x > e^{3/2}$.

6) Derivata seconda: Si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2\log x - 3 + x\cdot 2\cdot\frac{1}{x})(\log x - 1)^2 - 2(\log x - 1)\cdot\frac{1}{x}\cdot x(2\log x - 3)}{(\log x - 1)^4} \\ &= \frac{(2\log x - 1)(\log x - 1) - 2(2\log x - 3)}{(\log x - 1)^3} = \frac{2\log^2 x - 3\log x + 1 - 4\log x + 6}{(\log x - 1)^3} \\ &= \frac{2\log^2 x - 7\log x + 7}{(\log x - 1)^3}. \end{aligned}$$

Studiando la disequazione $2t^2 - 7t + 7 > 0$ si vede che il numeratore è sempre positivo, mentre il denominatore è positivo quando $x > e$. Dunque f volge la concavità verso il basso in $]0, e[$, e verso l'alto in $]e, +\infty[$.

7) Grafico:



5.2.8. Funzioni con logaritmi e funzioni trigonometriche

❒ **Esercizio 5.2.35. (Esame del 23.02.17)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \arctan x - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

➼ **R.** La funzione data è ben definita in $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1+x}{1-x} > 0\right\}$ che è equivalente ad avere $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$.
Si ha $f(0) = 0$ mentre ci si accorge che la funzione è dispari, infatti

$$f(-x) = \arctan(-x) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -f(x).$$

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

La funzione è infinitamente derivabile sul suo dominio quindi è possibile calcolare

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2}{x^4-1}$$

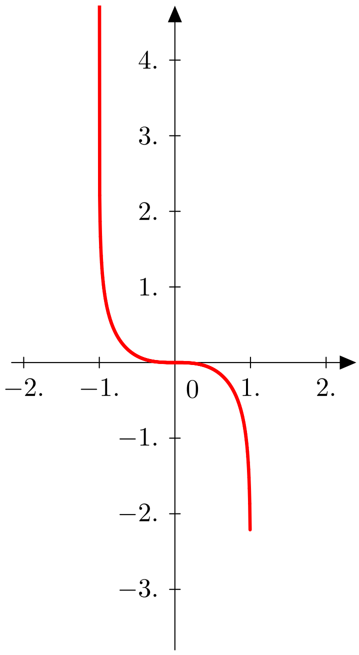
da cui si evince che

$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x < -1 \;\vee\; x > 1$$

quindi nel dominio di definizione della f, la funzione è sempre decrescente.
Infine calcoliamo la derivata seconda: si ha

$$f''(x) = \frac{4x(x^4-1) - 4x^3\,2x^2}{(x^4-1)^2} = \frac{-4x(1+x^4)}{(x^4-1)^2}$$

quindi la funzione è concava per $x > 0$ e convessa per $x < 0$. Il grafico qualitativo è quello mostrato in figura.



❒ **Esercizio 5.2.36 (Esame del 05.06.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \log x - \arctan(x-1).$$

Ricavare poi il grafico di $|f(x)|$ *e* $f(|x|)$.

➻ **R.**

1) Dominio: Affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che esista il logaritmo. Si ottiene $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

2) Simmetrie: Non ha senso calcolare $f(-x)$ poiché f non è definita per $x < 0$.

3) Intersezioni con gli assi e segno: Non ci sono intersezioni con l'asse y poichÃľ $x = 0$ non appartiene al dominio. Non è invece semplice calcolare quando $f(x) = 0$, e di conseguenza determinare il segno della funzione.

4) Limiti e asintoti: Calcolando i limiti agli estremi del dominio otteniamo

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \log x - \arctan(x-1) = -\infty,$$

da cui un asintoto verticale di equazione $x = 0$ (asse y), e

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \log x - \arctan(x-1) = +\infty, \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x - \arctan(x-1)}{x} = 0, \end{aligned}$$

quindi non c'è un asintoto obliquo quando $x \to +\infty$.

5) Derivata prima: Si ottiene

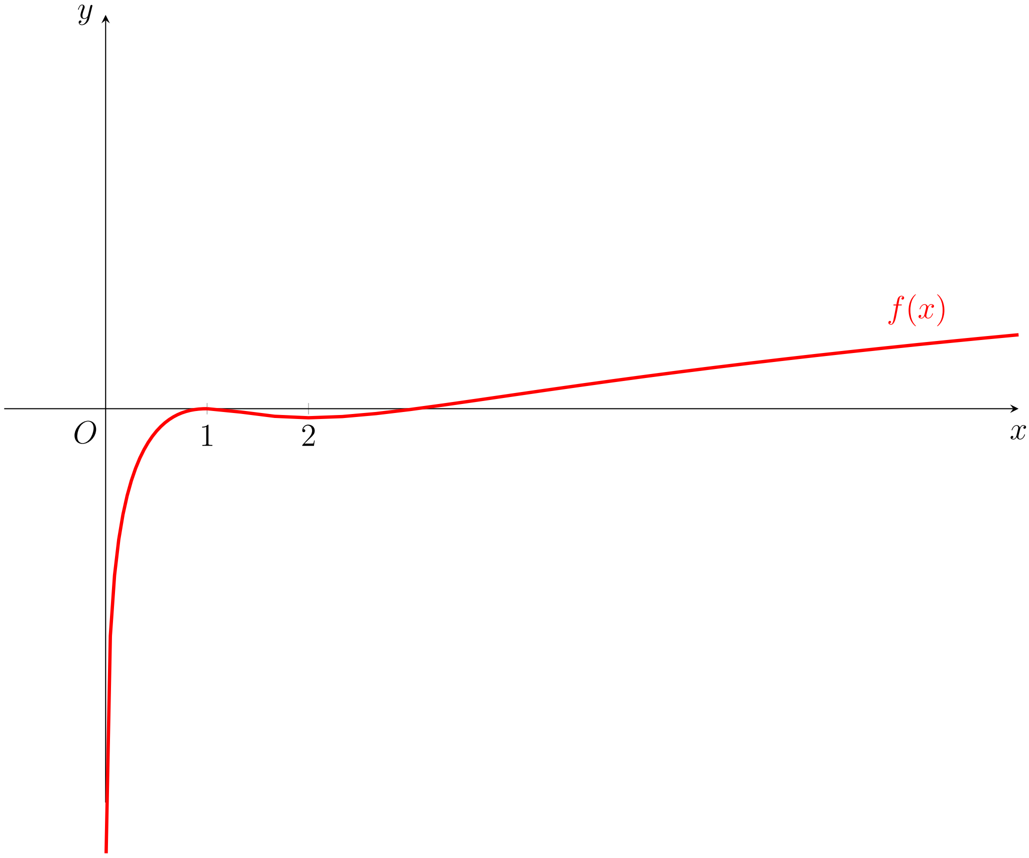
$$f'(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x^2 - 2x + 2)},$$

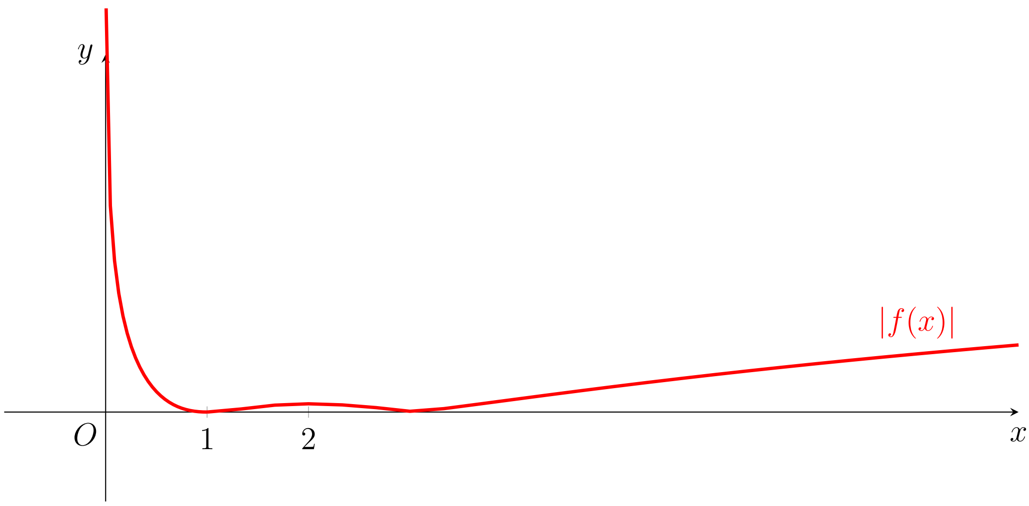
da cui

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \vee x > 2.$$

Quindi in $x = 1$ c'è un massimo locale, mentre in $x = 2$ un minimo locale.

6) Grafici:





Il grafico di $f(|x|)$ è uguale a quello di $f(x)$ essendo $x > 0$.

5.2.9. Funzioni definite a tratti

❒ **Esercizio 5.2.37** **(Esame del 20.12.18).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x^2+x} & x \geq 0 \\ x^3 + 2x^2 + 1 & x < 0 \end{cases}$$

determinando eventuali punti angolosi. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) Dominio: Non ci sono condizioni di esistenza da imporre, perciò $D_f = \mathbb{R}$.

2) Simmetrie: La funzione ha due leggi diverse a seconda del segno di x perciò sicuramente $f(-x) \neq \pm f(x)$, ovvero f non è né pari né dispari.

3) Intersezioni con gli assi e segno: Troviamo le eventuali intersezioni con l'asse y calcolando $f(0)$. Sostituendo nella prima legge si ha $f(0) = 1$, dunque la funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 1)$. Per quanto riguarda le intersezioni con l'asse x e il segno, osserviamo che $f(x) > 0 \ \ \forall x \geq 0$. Se $x < 0$ non è invece semplice calcolare quando $f(x) = 0$, e di conseguenza determinare il segno della funzione.

4) Limiti e asintoti: Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del dominio, ovvero a $\pm\infty$, e nel punto in cui la funzione cambia legge, ovvero a $0^{\pm}$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x^2\left(1-\frac{1}{2x}\right)} = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^3 + 2x^2 + 1\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty.$$

C'è quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ (asse x) quando $x \to +\infty$. Vediamo se c'è un asintoto obliquo quando $x \to -\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = +\infty,$$

quindi non c'è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Verifichiamo ora se la funzione è continua in $x = 0$. Si ha

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = e^0 = 1,$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \left(x^3 + 2x^2 + 1\right) = 1,$$

quindi la funzione è continua in 0.

5) Derivata prima: Se $x > 0$ si ha

$$f'(x) = e^{-2x^2+x}\,(-2 \cdot 2x + 1) = e^{-2x^2+x}\,(-4x + 1)\,,$$

mentre se $x < 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot 2x = 3x^2 + 4x.$$

Dunque complessivamente

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-2x^2+x}\,(-4x+1) & x > 0, \\ 3x^2 + 4x & x < 0. \end{cases}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} e^{-2x^2+x}\,(-4x+1) = 1, \\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} \left(3x^2 + 4x\right) = 0, \end{aligned}$$

quindi in $x = 0$ c'è un punto angoloso per f. Studiamo ora il segno di f' per determinare la monotonia di f.

• Se $x > 0$

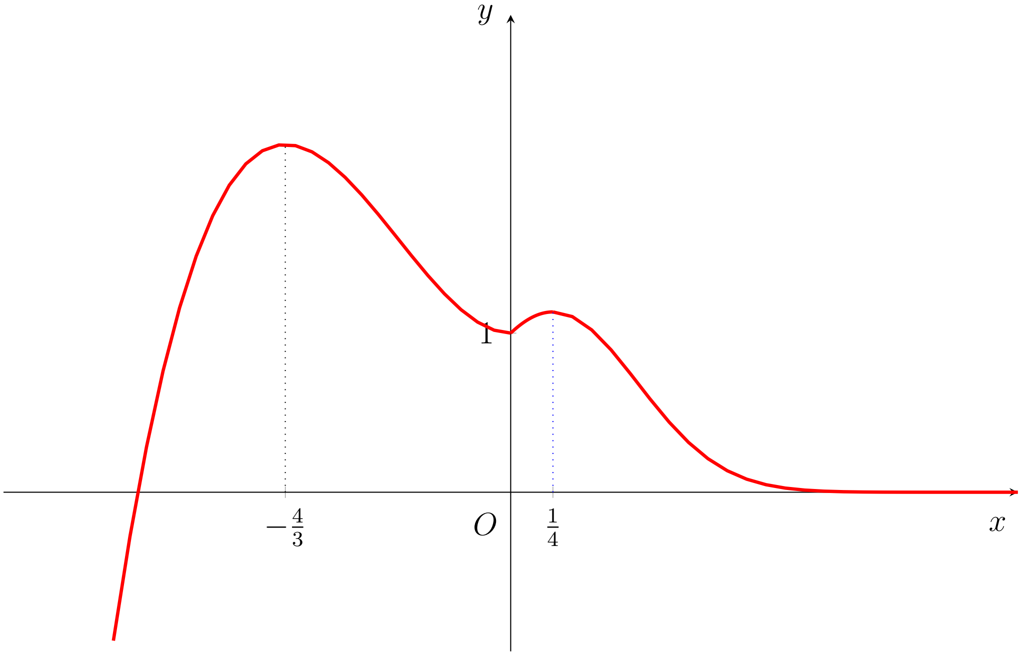
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-2x^2+x}\,(-4x+1) > 0 \Leftrightarrow -4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1/4.$$

• Se $x < 0$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x > 0 \Leftrightarrow x(3x+4) > 0 \Leftrightarrow x < -4/3.$$

Dunque f è crescente per $x < -4/3$ e ha un punto di massimo locale in $x = -4/3$, dopodiché decresce in $]-4/3, 0[$. Dopo il punto angoloso in $x = 0$ cresce di nuovo in $]0, 1/4[$ fino al punto di massimo locale in $x = 1/4$, ed è infine decrescente per $x > 1/4$.
Si osservi che in $x = 0$ si ha quindi un punto di minimo locale, e questo non è in contraddizione con il teorema di Fermat poiché $\nexists\, f'(0)$.

6) Grafico:



❒ **Esercizio 5.2.38. (Esame del 23.01.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2-2x} & x \leq 0 \\ \log\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) & x > 0 \end{cases}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: se $x \leq 0$ la funzione è ben definita mentre se $x > 0$ la funzione è ben definita se

$$\frac{x+1}{x+2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2 \vee x > -1$$

e dunque, visto che stiamo considerando il caso $x > 0$, anche in questo caso la funzione è ben definita. Dunque

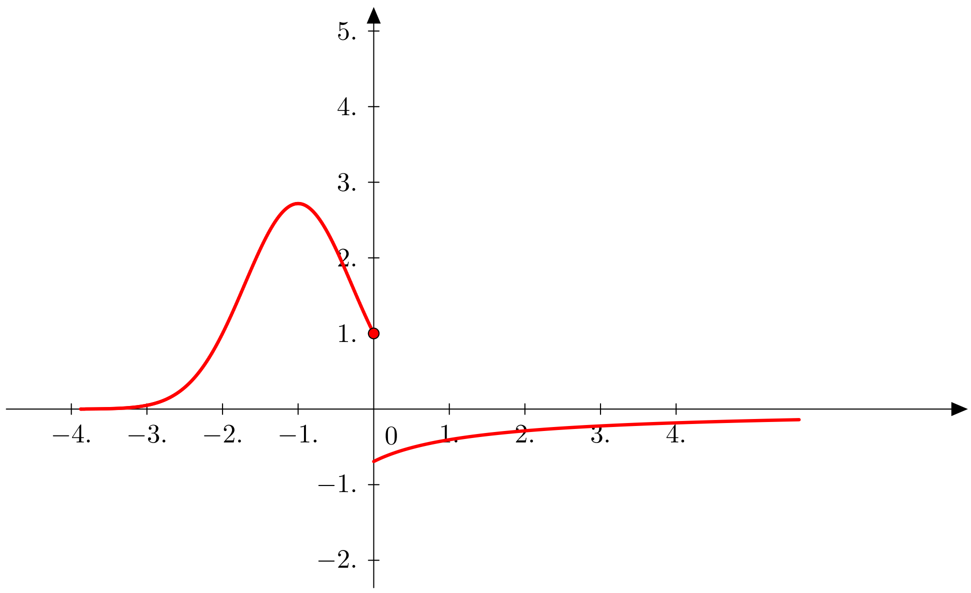
$$D_f = \mathbb{R}.$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione è sicuramente positiva se $x \leq 0$. Invece se $x > 0$ si ha che $f > 0$ quando

$$\frac{x+1}{x+2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x+2} > 0$$

e dunque se $x > 0$ allora $f(x) < 0$.
Inoltre
$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \log\frac{1}{2} \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$
quindi f non è continua in $x = 0$.
4) LIMITI E ASINTOTI: si ha
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \log 1 = 0$$
quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per f.
5) DERIVATA PRIMA: si ha
$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2-2x}(-2x-2) & x < 0 \\ \dfrac{x+2}{x+1}\,\dfrac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} & x > 0 \end{cases}$$
quindi se $x < 0$ si ha $f'(x) > 0$ se $x < -1$ e $f'(x) < 0$ se $x > -1$, pertanto $x = -1$ è un punto di massimo locale per f. D'altra parte, se $x > 0$ allora f è sempre crescente.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è rappresentato in figura.



CAPITOLO 6

Esercizi riguardanti calcolo di primitive e integrali definiti

6.1. Esercizi riguardanti calcolo di primitive

❒ **Esercizio 6.1.1.** **(Esame del 01.02.16)** *Determinare la primitiva della funzione*

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$$

che passa per l'origine.

➾ **R.** Prima di tutto dobbiamo trovare l'insieme delle primitive della funzione cioè calcolare

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

Proviamo con la sostituzione

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = t \qquad t > 0, \;\; x > 0,$$

da cui

$$x = (t^2-1)^2 \qquad dx = 2(t^2-1)2t\,dt = 4t(t^2-1)\,dt.$$

A questo punto dunque

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int 4t^2(t^2-1)\,dt = \int (4t^4-4t^2)\,dt = 4\frac{t^5}{5} - 4\frac{t^3}{3} + C \\ &= \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + C =: F_C(x).\end{aligned}$$

Imponiamo adesso il passaggio per l'origine e troviamo il corrispondente valore della costante. Si ha

$$F_C(0) = \frac{4}{5} - \frac{4}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{8}{15}.$$

La primitiva richiesta è dunque

$$G(x) = \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + \frac{8}{15}.$$

❒ **Esercizio 6.1.2.** **(Esame del 19.07.16)** *Calcolare*

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \log\log x \, dx$ 2) $\displaystyle\int e^{-x} \sin x \, dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2+1} \, dx$

R. 1) Proviamo ad operare la seguente sostituzione

$$\log x = t \qquad x = e^t \qquad dx = e^t \, dt$$

da cui

$$\int \frac{1}{x} \log(\log x) \, dx = \int \frac{1}{e^t} \log t \, e^t \, dt = \int \log t \, dt = t \log t - t + C = (\log x)(\log(\log x)) - \log x + C$$

2) Integrando per parti due volte si ha

$$\begin{aligned}
\int e^{-x} \sin x \, dx &= -e^{-x} \cos x - \int (-e^{-x})(-\cos x) \, dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x \, dx \\
&= -e^{-x} \cos x - \left[e^{-x} \sin x - \int -e^{-x} \sin x \, dx \right] \\
&= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x \, dx
\end{aligned}$$

da cui

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

3) Si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+2}{x^2+1} \, dx &= \int \frac{x^3+x-x+2}{x^2+1} \, dx = \int x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx + \int \frac{2}{x^2+1} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + 2 \arctan x + C.
\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.1.3** (**Esame del 08.01.19**). *Calcolare*

$$\int \sqrt{e^x - 1}\, dx.$$

➼ **R.** Proviamo con la sostituzione

$$t = \sqrt{e^x - 1},$$

da cui

$$x = \log\left(t^2 + 1\right), \qquad dx = \frac{1}{t^2 + 1} \cdot 2t\, dt.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x - 1}\, dx &= \int t \cdot \frac{1}{t^2+1} \cdot 2t\, dt = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1}\, dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1}\, dt \\ &= 2t - 2 \arctan t + C = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) + C.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.1.4** (**Esame del 22.02.19**). *Calcolare*

$$\int \log\left(x^2 - 4\right) dx.$$

➼ **R.** Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int \log\left(x^2 - 4\right) dx = \int 1 \cdot \log\left(x^2 - 4\right) dx &= x \log\left(x^2 - 4\right) - \int x \cdot \frac{1}{x^2 - 4} \cdot 2x\, dx \\ &= x \log\left(x^2 - 4\right) - 2 \int \frac{x^2 - 4 + 4}{x^2 - 4}\, dx \\ &= x \log\left(x^2 - 4\right) - 2 \int dx - \int \frac{8}{x^2 - 4}\, dx \\ &= x \log\left(x^2 - 4\right) - 2x - \int \frac{8}{(x-2)(x+2)}\, dx.\end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale rimasto utilizziamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{8}{(x-2)(x+2)} \stackrel{?}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax + 2A + Bx - 2B}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x + (2A - 2B)}{(x-2)(x+2)},$$

che è verificata se e solo se

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 2A - 2B = 8, \end{cases}$$

da cui $A = 2$, $B = -2$. Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}\int \log\left(x^2-4\right) dx &= x\log\left(x^2-4\right) - 2x - \int \frac{2}{x-2}\, dx + \int \frac{2}{x+2}\, dx \\ &= x\log\left(x^2-4\right) - 2x - 2\log|x-2| + 2\log|x+2| + C.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.1.5** **(Esame del 10.04.19).** *Calcolare*

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+1}\, dx.$$

➾ **R.** Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{x^2+1}\, dx &= \int \frac{x^3+x-x+2}{x^2+1}\, dx = \int x\, dx - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{2}{x^2+1}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + 2\arctan x + C.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.1.6** **(Esame del 05.06.19).** *Calcolare*

$$\int \frac{\cos\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx.$$

➾ **R.** Proviamo con la sostituzione

$$t = 1+\sqrt{x},$$

da cui

$$x = (t-1)^2, \qquad dx = 2(t-1)\, dt.$$

Otteniamo

$$\int \frac{\cos\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{\cos t}{t-1}\cdot 2(t-1)\, dt = 2\int \cos t\, dt = 2\sin t + C = 2\sin\left(1+\sqrt{x}\right) + C.$$

❒ **Esercizio 6.1.7** **(Esame del 24.07.19).** *Calcolare*

$$\int \frac{2x^3+5}{x^2-3x+2}\, dx.$$

➾ **R.** Facendo la divisione polinomiale si trova

$$2x^3+5 = \left(x^2-3x+2\right)(2x+6) + 14x - 7,$$

dunque

$$\int \frac{2x^3+5}{x^2-3x+2}\,dx = \int (2x+6)\,dx + \int \frac{14x-7}{x^2-3x+2}\,dx = x^2+6x+\int \frac{14x-7}{(x-2)(x-1)}\,dx.$$

Per calcolare l'integrale rimasto utilizziamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{14x-7}{(x-2)(x-1)} \stackrel{?}{=} \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1} = \frac{Ax-A+Bx-2B}{(x-2)(x-1)} = \frac{(A+B)x+(-A-2B)}{(x-2)(x-1)},$$

che è verificata se e solo se

$$\begin{cases} A+B=14, \\ -A-2B=-7, \end{cases}$$

da cui $A=21$, $B=-7$. Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+5}{x^2-3x+2}\,dx &= x^2+6x+\int \frac{21}{x-2}\,dx - \int \frac{7}{x-1}\,dx \\ &= x^2+6x+21\log|x-2|-7\log|x-1|+C.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.1.8.** **(Esame del 15.11.19)** *Calcolare*

$$\int \frac{1}{e^{-x}+3e^{x}}\,dx$$

➻ **R.** Prima di tutto riscriviamo l'integrale come

$$\int \frac{1}{e^{-x}+3e^{x}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{e^x}+3e^{x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+3e^{2x}}\,dx.$$

A questo punto operiamo la seguente sostituzione

$$e^x = t \qquad x=\log t \qquad dx = \frac{1}{t}\,dt$$

pertanto

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{e^{-x}+3e^{x}}\,dx &= \int \frac{e^x}{1+3e^{2x}}\,dx = \int \frac{t}{1+3t^2}\,\frac{1}{t}\,dt \\ &= \int \frac{1}{1+3t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}t)+C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}e^x)+C\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.1.9.** **(Esame del 19.12.19)** *Calcolare*

$$\int \log(x^2+2x+2)\,dx$$

R. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \log(x^2+x+2)\,dx &= \int 1\cdot\log(x^2+x+2)\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - \int \frac{x(2x+1)}{x^2+x+2}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - \int \frac{2x^2+x}{x^2+x+2}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - \int \frac{2x^2+2x+4-2x-4+x}{x^2+x+2}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - 2x + \int \frac{x+4}{x^2+x+2}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+8-1}{x^2+x+2}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - 2x + \frac{1}{2}\log(x^2+x+2) + \frac{7}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx \\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)\log(x^2+x+2) - 2x + 2\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^2+1}\,dx \\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)\log(x^2+x+2) - 2x + \sqrt{7}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C
\end{aligned}$$

❐ Esercizio 6.1.10. (Esame del 09.01.20) *Calcolare*

$$\int \frac{1}{x-2\sqrt{2x-8}}\,dx$$

R. Effettuiamo un cambio di variabile. Poniamo

$$\sqrt{2x-8} = t \qquad 2x = 8+t^2 \qquad x = 4+\frac{t^2}{2} \qquad dx = t\,dt$$

da cui

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x-2\sqrt{2x-8}}\,dx &= \int \frac{t}{4+\frac{t^2}{2}-2t}\,dt = \int \frac{2t}{t^2-4t+8}\,dt = \int \frac{2t-4+4}{t^2-4t+8}\,dt \\
&= \int \frac{2t-4}{t^2-4t+8}\,dt + 4\int \frac{1}{t^2-4t+8}\,dt \\
&= \log(t^2-4t+8) + \int \frac{4}{(t-2)^2+4}\,dt \\
&= \log(t^2-4t+8) + \int \frac{1}{\left(\frac{t-2}{2}\right)^2+1}\,dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \log(t^2-4t+8)+2\arctan\left(\frac{t-2}{2}\right)+C \\
&= \log(2x-4\sqrt{2x-8})+2\arctan\left(\frac{\sqrt{2x-8}-2}{2}\right)+C.
\end{aligned}
$$

❒ **Esercizio 6.1.11. (Esame del 23.01.20)** *Calcolare*

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$$

➽ **R.** Effettuiamo un cambio di variabile. Poniamo

$$e^x = t \qquad x=\log t \qquad dx=\frac{1}{t}\,dt$$

da cui si ottiene

$$\int \frac{t}{t-1}\,\frac{1}{t}\,dt=\int \frac{1}{t-1}\,dt=\log|t-1|+C=\log|e^x-1|+C$$

Il risultato poteva anche essere ottenuto immediatamente osservando che e^x al numeratore è la derivata dell'argomento del logaritmo.

❒ **Esercizio 6.1.12. (Esame del 20.02.20)** *Calcolare*

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx$$

➽ **R.** Osservando che $\frac{1}{x}$ è la derivata di $\log x$, si può esprimere l'integrale dato nella forma

$$\int [f(x)]^\alpha f'(x)$$

con $f(x)=\log x$ e $\alpha=2$. Tenendo conto che

$$\int [f(x)]^\alpha f'(x)=\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$$

si ottiene dunque

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx=\frac{\log^3 x}{3}+C.$$

Alternativamente si può procedere con un cambio di variabile. Poniamo

$$\log x = t \qquad x=e^t \qquad dx=e^t\,dt$$

da cui

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx = \int \frac{t^2}{e^t}\,e^t\,dt = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\log^3 x}{3} + C$$

❒ **Esercizio 6.1.13. (Esame del 24.06.20)** *Calcolare*

$$\int (2^x + 3^x)^2\,dx$$

➼ **R.** Si ha

$$\int (2^x + 3^x)^2\,dx = \int \left[(2^x)^2 + (3^x)^2 + 2(3^x\,2^x)\right]\,dx.$$

Dalle proprietà delle potenze si ottiene

$$\int \left[(2^x)^2 + (3^x)^2 + 2\,3^x\,2^x\right]\,dx = \int (2^{2x} + 3^{2x} + 2\,(6^x))\,dx = \int \left(e^{2x\log 2} + e^{2x\log 3} + 2\,e^{x\log 6}\right)\,dx.$$

A questo punto

$$\int (2^x + 3^x)^2\,dx = \frac{2^{2x}}{2\log 2} + \frac{3^{2x}}{2\log 3} + 2\,\frac{6^x}{\log 6} + C = \frac{4^x}{\log 4} + \frac{9^x}{\log 9} + 2\frac{6^x}{\log 6} + C$$

❒ **Esercizio 6.1.14. (Esame del 23.07.20)** *Calcolare*

$$\int x^2 \sin(2x)\,dx$$

➼ **R.** Integrando per parti due volte si ottiene da dove esce? si può fare a mente?

$$\begin{aligned}
\int x^2\sin(2x)\,dx &= -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + \int (2x)\frac{\cos(2x)}{2}\,dx \\
&= -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + x\frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2}\,dx \\
&= -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + x\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{1}{4}\cos(2x) + C
\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.1.15. (Esame del 08.09.20)** *Calcolare*

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}\,dx$$

➻ **R.** Si tratta di calcolare l'insieme delle primitive di una funzione razionale fratta. Usiamo il metodo di decomposizione in fratti semplici. Cerchiamo costanti A, B tali che

$$\frac{x-3}{x^2-6x+5} = \frac{x-3}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5}$$

Si ha

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} = \frac{Ax - 5A + Bx - B}{(x-1)(x-5)}$$

da cui, dal principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -5A - B = -3 \end{cases}$$

pertanto si ha $A = B = 1/2$.
A questo punto

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-5}\,dx = \log|x-1| + \log|x-5| + C.$$

❒ **Esercizio 6.1.16. (Esame del 21.12.20)** *Calcolare*

$$\int \cos x \sqrt[3]{\sin x}\,dx$$

➻ **R. R.** Proviamo con la sostituzione

$$t = \sin x,$$

da cui

$$dt = \cos x\,dx.$$

Otteniamo

$$\int \cos x \sqrt[3]{\sin x}\,dx = \int \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{3}{4}t^{4/3} + C = \frac{3}{4}(\sin x)^{4/3} + C.$$

chiedi neri

❒ **Esercizio 6.1.17. (Esame del 12.01.21)** *Calcolare*

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}$$

➻ **R.** Proviamo con la sostituzione

$$t = \sqrt{1-x},$$

da cui

$$x = 1 - t^2, \qquad dx = -2t\,dt.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx &= \int \frac{t}{1-t^2}\cdot(-2t)\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt \\ &= 2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt + 2\int dt = \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}\,dt + 2t.\end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale rimasto utilizziamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} \stackrel{?}{=} \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{At + A + Bt - B}{(t-1)(t+1)} = \frac{(A+B)t + (A-B)}{(t-1)(t+1)},$$

che è verificata se e solo se

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A - B = 2, \end{cases}$$

da cui $A = 1$, $B = -1$. Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx &= \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt + 2t = \log|t-1| - \log|t+1| + 2t + C \\ &= \log\left|\sqrt{1-x}-1\right| - \log\left|\sqrt{1-x}+1\right| + 2\sqrt{1-x} + C.\end{aligned}$$

❐ **Esercizio 6.1.18. (Esame del 23.02.21)** *Calcolare*

$$\int \frac{3+x}{x(x^2+9)}\,dx$$

➻ **R.** Si tratta di calcolare l'insieme delle primitive di una funzione razionale fratta. Usiamo il metodo di decomposizione in fratti semplici. Cerchiamo costanti A, B, C tali che

$$\frac{3+x}{x(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+9}$$

Si ha

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = \frac{Ax^2 + 9A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+9)}$$

da cui, dal principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ 9A = 3 \end{cases}$$

pertanto si ha $A = 1/3$, $B = -1/3$ e $C = 1$. Dalla linearità dell'integrale, si ottiene dunque

$$\begin{aligned} &\int \frac{3+x}{x(x^2+9)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx \\ = \;& \frac{1}{3}\log|x| - \frac{1}{6}\log(x^2+9) + \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} + \arctan\frac{x}{3} + C \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato le proprietà dei logaritmi.

❒ **Esercizio 6.1.19. (Esame del 23.06.21)** *Calcolare*

$$\int \frac{1+\sin^2 x}{\tan x}\,dx$$

➾ **R.** Operiamo la seguente sostituzione

$$\sin x = t \qquad \cos x\,dx = dt$$

e ricordando che

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\sin^2 x}{\tan x}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{t}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} + t\right)\,dt \\ &= \log|t| + \frac{t^2}{2} + C = \log|\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + C \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.1.20. (Esame del 07.07.21)** *Calcolare*

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

➾ **R.** Operiamo la seguente sostituzione

$$1 + x^2 = t \qquad 2x\,dx = dt$$

da cui
$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{1+x^2} + C.$$
Si noti che allo stesso risultato si poteva arrivare direttamente osservando che $2x$ è la derivata di $1+x^2$, scrivendo l'integrale dato nella forma
$$\int [f(x)]^\alpha f'(x) = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$
con $\alpha = -2$, $f(x) = 1+x^2$ e $f'(x) = 2x$.

6.2. Esercizi riguardanti integrali definiti

❒ **Esercizio 6.2.1. (Esame del 25.02.16)** *Calcolare*
$$\int_{-1}^{2} x\log(x+2+|x|)\,dx$$
(Suggerimento: spezzare l'integrale in 0 e valutare separatamente i due integrali discutendo il valore assoluto)

➼ **R.** Usando il teorema di spezzamento e la definizione di valore assoluto si ha che
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x\log(x+2+|x|)\,dx &= \int_{-1}^{0} x\log(x+2-x)\,dx + \int_{0}^{2} x\log(x+2+x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} x\,\log 2dx + \int_{0}^{2} x\log(2x+2)\,dx.\end{aligned}$$
Il primo integrale si ottiene immediatamente dalla linearità dell'integrale stesso ottenendo, dal teorema fondamentale del calcolo
$$\int_{-1}^{0} x\,\log 2dx = \log 2\int_{-1}^{0} x\,dx = \log 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}\log 2.$$
L'altro integrale si risolve per parti. Si ha infatti
$$\begin{aligned}\int x\log(2x+2)\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(2x+2) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{2x+2}2\,dx = \frac{x^2}{2}\log(2x+2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log(2x+2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\log(2x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|x+1| + C\end{aligned}$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha dunque

$$\int_0^2 x\log(2x+2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log(2x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|x+1|\right]_0^2 = 2\log 6 - 1 + 1 - \frac{1}{2}\log 3.$$

Sommando i due contributi si ha infine

$$\int_{-1}^2 x\log(x+2+|x|)\,dx = -\frac{1}{2}\log 2 + 2\log 2 + 2\log 3 - \frac{1}{2}\log 3 = \frac{3}{2}\log 6$$

❒ **Esercizio 6.2.2.** **(Esame del 20.12.16)** *Si calcoli*

$$\int_0^{\pi^2} (2e^{\sqrt{x}} + 3\sin\sqrt{x})\,dx$$

➻ **R.** Per linearità dell'integrale, svolgiamo i due integrali separatamente. Prima di tutto troviamo una primitiva delle funzioni integrande. Operiamo la seguente sostituzione

$$\sqrt{x} = t \qquad x = t^2 \qquad dx = 2t\,dt$$

da cui

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^t t\,dt$$

quindi integrando per parti

$$2\int te^t\,dt = 2te^t - 2\int e^t\,dt = 2(t-1)e^t.$$

A questo punto, tornando alla variabile originaria si ha

$$\int_0^{\pi^2} 2e^{\sqrt{x}}\,dx = 4[(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}]_0^{\pi^2} = 4[(\pi-1)e^{\pi}+1].$$

Analogamente, di nuovo con la medesima sostituzione e integrando di nuovo per parti si ha

$$3\int \sin\sqrt{x}\,dx = 3\int 2t\sin t\,dt = 6[-t\cos t + \int \cos t\,dt] = -6\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 6\sin\sqrt{x}$$

da cui

$$3\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = [-6\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 6\sin\sqrt{x}]_0^{\pi^2} = 6\pi.$$

Riassumendo

$$\int_0^{\pi^2} (2e^{\sqrt{x}} + 3\sin\sqrt{x})\,dx = 4[(\pi-1)e^{\pi}+1] + 6\pi.$$

❒ **Esercizio 6.2.3.** **(Esame del 03.02.17)** *Sia f una funzione continua tale che* $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$ *e* $\int_0^4 f(x)\,dx = 5$. *Determinare il valore dell'integrale* $\int_1^2 f(2x)\,dx$ *(suggerimento: effettuare il cambio di variabile $2x := z$ e sfruttare le proprietà dell'integrale).*

➫ **R.** Effettuiamo come suggerito un cambio di variabile. Poniamo $2x = z$ da cui $dx = \frac{1}{2}dz$ e inoltre se $x = 1$ allora $z = 2$ mentre se $x = 2$ allora $z = 4$. In questo modo, usando le ipotesi

$$\int_1^2 f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 f(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_0^4 f(z)\,dz - \frac{1}{2}\int_0^2 f(z)\,dz = \frac{1}{2}(5-3) = 1.$$

❒ **Esercizio 6.2.4.** **(Esame del 08.06.17)** *(a) Calcolare, spezzando opportunamente l'integrale e discutendo il valore assoluto*

$$\int_0^\pi |\cos x|\,dx.$$

(b) Con lo stesso procedimento, integrando per parti, calcolare

$$\int_0^\pi x|\cos x|\,dx.$$

➫ **R.** (a) Si ha

$$\int_0^\pi |\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^\pi (-\cos x)\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} + [-\sin x]_{\pi/2}^\pi = 1 - (-1) = 2.$$

Si poteva raggiungere lo stesso risultato con considerazioni di simmetria.

(b) Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x|\cos x|\,dx &= \int_0^{\pi/2} x(\cos x)\,dx + \int_{\pi/2}^\pi x(-\cos x)\,dx \\ &= [x\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx + [-x\sin x]_{\pi/2}^\pi + \int_{\pi/2}^\pi \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} + [-\mathrm{c}\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.2.5.** **(Esame del 28.06.17)** *Calcolare*

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\,dx.$$

(Una primitiva della funzione arctan *si trova integrando per parti).*

R. Come suggerito, calcoliamo l'insieme delle primitive della funzione arcotangente. Si ha, integrando per parti

$$\begin{aligned}\int \arctan x\, dx &= \int 1 \arctan x\, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

A questo punto

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\, dx = \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\frac{\pi}{3} - \log 4.$$

❒ Esercizio 6.2.6. **(Esame del 18.12.17)** *Calcolare*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+2}\, dx$$

R. Si tratta di un integrale di una funzione continua e limitata nell'intervallo $(0, 1)$, senza problemi di limitatezza. Procediamo applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale e calcolando prima una primitiva della funzione integranda. Effettuando il cambio di variabile $\sqrt{x} = t$ si ha $x = t^2$ da cui $dx = 2tdt$ e

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\, dx = 2\int \frac{t^2}{t^2+2}\, dt = 2\int \frac{t^2+2-2}{t^2+2}\, dt = 2\int 1\, dt - 4\int \frac{1}{t^2+2}\, dt = 2t - 4\int \frac{1}{2\left(\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right.}$$

$$= 2t - 2\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}} + C.$$

A questo punto allora

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+2}\, dx = \left[2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}}\right]_0^1 = 2 - 2\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

❒ Esercizio 6.2.7. **(Esame del 10.07.18)** *Calcolare*

$$\int_{-3}^{3} \left[|x|\log(x+4) + x\arctan(x^2+3)\right]\, dx.$$

R. Per l'additività dell'integrale, occupiamoci separatamente dei due integrali. Si ha, usando le formule di spezzamento

$$\int_{-3}^{3} |x|\log(x+4)\, dx = \int_{-3}^{0} (-x)\log(x+4)\, dx + \int_0^3 x\log(x+4)\, dx.$$

Prima di tutto, integrando per parti

$$\begin{aligned}\int x\log(x+4)\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(x+4)-\int\frac{x^2}{2(x+4)}\,dx=\frac{x^2}{2}\log(x+4)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+4x-4x}{x+4}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x+4)-\frac{x^2}{4}+2\int\frac{x}{x+4}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x+4)-\frac{x^2}{4}+2\int\left(1-\frac{4}{x+4}\right)\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(x+4)-\frac{x^2}{4}+2x-8\log(x+4)+C.\end{aligned}$$

A questo punto

$$\begin{aligned}&\int_{-3}^{3}|x|\log(x+4)\,dx=\int_{-3}^{0}(-x)\log(x+4)\,dx+\int_0^3 x\log(x+4)\,dx\\ =\;&\left[\frac{x^2}{2}\log(x+4)-\frac{x^2}{4}+2x-8\log(x+4)\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\log(x+4)-\frac{x^2}{4}+2x-8\log(x+4)\right]_{0}^{3}\\ =\;&-8\log 4+\frac{9}{4}+6+\frac{9}{2}\log 7-\frac{9}{4}+6-8\log 7+8\log 4=12-\frac{7}{2}\log 7.\end{aligned}$$

D'altra parte, osservando che $2x$ è la derivata dell'argomento dell'arcotangente

$$\int x\arctan(x^2+3)\,dx=\frac{1}{2}\int 2x\arctan(x^2+3)\,dx=\frac{1}{4}\arctan^2(x^2+3)+C$$

da cui

$$\int_{-3}^{3}\int x\arctan(x^2+3)\,dx=\left[\frac{1}{4}\arctan^2(x^2+3)\right]_{-3}^{3}=0.$$

Tale risultato era ovviamente atteso perché, per considerazioni di simmetria, l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico, è nullo.
In conclusione

$$\int_{-3}^{3}\left[|x|\log(x+4)+x\arctan(x^2+3)\right]\,dx=12-\frac{7}{2}\log 7.$$

❒ **Esercizio 6.2.8 (Esame del 20.12.18).** *Calcolare*

$$\int_0^1 x\log(2+x)\,dx.$$

➠ **R.** Troviamo innanzitutto l'insieme delle primitive. Integrando per parti si ha

$$\int x\log(2+x)\,dx=\frac{x^2}{2}\log(2+x)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{2+x}\,dx.$$

Siccome

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{2+x}\,dx &= \int \frac{-2x+2x+x^2}{2+x}\,dx = -2\int \frac{x}{2+x}\,dx + \int x\,dx\\ &= -2\int \frac{-2+2+x}{2+x}\,dx + \frac{x^2}{2} + C = 4\int \frac{1}{2+x}\,dx - 2\int dx + \frac{x^2}{2} + C\\ &= 4\log(2+x) - 2x + \frac{x^2}{2} + C,\end{aligned}$$

otteniamo

$$\int x\log(2+x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-2\right)\log(2+x) - \frac{x^2}{4} + x + C.$$

Quindi l'integrale definito è uguale a

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\log(2+x)\,dx &= \left[\left(\frac{x^2}{2}-2\right)\log(2+x) - \frac{x^2}{4} + x\right]_0^1\\ &= \left(\frac{1}{2}-2\right)\log(2+1) - \frac{1}{4} + 1 - (-2)\log 2 = -\frac{3}{2}\log 3 + \frac{3}{4} + \log 4.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.2.9 (Esame del 11.09.19).** *Calcolare*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx.$$

➻ **R.** Troviamo innanzitutto l'insieme delle primitive. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx &= \int x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx = x\tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx\\ &= x\tan x + \log|\cos x| + C.\end{aligned}$$

Quindi l'integrale definito ÃÍ uguale a

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = [x\tan x + \log|\cos x|]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \log|\cos 0| = \frac{\pi}{4} + \log\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

❒ **Esercizio 6.2.10. (Esame del 14.12.20)** *Calcolare*

$$\int_1^2 \frac{1+x^3}{x^2+x}\,dx$$

➻ **R.** Troviamo innanzitutto l'insieme delle primitive. Si tratta di un integrale di una funzione razionale fratta con numeratore di grado superiore al denominatore. Si può procedere con la divisione di polinomi oppure semplificare nel seguente modo

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x^3}{x^2+x}\,dx &= \int \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{x(x+1)}\,dx \\
&= \int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx \\
&= \int x+1+\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}+x+\log|x|+C
\end{aligned}$$

A questo punto

$$\int_1^2 \frac{1+x^3}{x^2+x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x+\log|x|\right]_1^2 = 2+2+\log 2-\frac{1}{2}-1 = \frac{5}{2}+\log 2.$$

❒ **Esercizio 6.2.11. (Esame del 09.06.21)** *Calcolare*

$$\int_0^1 2x\ \arctan x\,dx$$

➻ **R.** Troviamo innanzitutto l'insieme delle primitive. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}
\int 2x\ \arctan x\,dx &= x^2\ \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x^2\ \arctan x - \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx \\
&= x^2\ \arctan x - \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx = x^2\ \arctan x - x + \arctan x + C
\end{aligned}$$

per cui

$$\int_0^1 2x\ \arctan x\,dx = \left[(x^2+1)\arctan x - x\right]_0^1 = 2\arctan 1 - 1 = \frac{\pi}{2}-1.$$

CAPITOLO 7

Integrali generalizzati

7.1. Esercizi tratti da temi d'esame di anni precedenti

❒ **Esercizio 7.1.1.** (**Esame del 15.12.15**) *Determinare quali dei seguenti integrali impropri è convergente e calcolarlo*

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}-1}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x+1)}\,dx$$

R. Si tratta di funzioni integrande non negative nei rispettivi intervalli di integrazione. Pertanto è possibile applicare il criterio del confronto asintotico e osservare che

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}-1}\,dx \sim \int_0^1 \frac{1}{2x}\,dx = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x+1)}\,dx \sim \int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty.$$

L'unico integrale convergente è il seguente

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-1/3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right]\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\varepsilon^{2/3}\right) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 7.1.2.** **(Esame del 15.12.15)** *Usando la definizione, calcolare il seguente integrale improprio*

$$\int_2^{+\infty} 2x(x^2+3)^{-3/2}\,dx$$

R. Si ha

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} 2x(x^2+3)^{-3/2}\,dx &= \lim_{\omega\to+\infty}\int_2^{\omega} 2x(x^2+3)^{-3/2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\left[\frac{(x^2+3)^{-1/2}}{-1/2}\right]_2^{\omega}\\ &= \lim_{\omega\to+\infty} -2(\omega^2+3)^{-1/2}+\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 7.1.3.** **(Esame del 12.01.16)** *Calcolare*

$$\int \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Successivamente calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

R. Calcoliamo prima di tutto

$$\int \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$$

usando il metodo di sostituzione. Poniamo $e^x = t$ da cui $x = \log t$ e $dx = \frac{dt}{t}$. Si ha allora

$$\int \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1-t}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt.$$

Utilizziamo il metodo di decomposizione in fratti semplici cercando costanti A, B, C tali che

$$\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{1-t}{t(t^2+1)}.$$

Semplici calcoli portano a $A = 1$, $B = C = -1$. Si ha allora

$$\begin{aligned}&\int \frac{1-t}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{t+1}{t^2+1}\,dt = \log|t| - \int \frac{t}{t^2+1}\,dt - \int \frac{1}{t^2+1}\,dt\\ &= \log|t| - \frac{1}{2}\log|t^2+1| - \arctan t + C = \log e^x - \frac{1}{2}\log(e^{2x}+1) - \arctan e^x + C.\end{aligned}$$

A questo punto, usando la definizione di integrale generalizzato, si ha

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \lim_{w\to+\infty} \int_0^w \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx \\
= & \lim_{w\to+\infty} \left[w - \frac{1}{2}\log(e^{2w}+1) - \arctan(e^w) + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} \right] \\
= & \lim_{w\to+\infty} \left[\log \frac{e^w}{\sqrt{e^{2w}+1}} - \arctan e^w + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} \right] = \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

❒ **Esercizio 7.1.4.** **(Esame del 06.05.16)** *Determinare per quali valori del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *converge l'integrale improprio*

$$\int_0^1 \frac{e^{\alpha x^2}-1}{x\sin x^3}\,dx$$

➼ **R.** Se $\alpha = 0$ l'integrale è nullo dunque sicuramente risulta convergente. La funzione integranda poi è a valori positivi se $\alpha > 0$ e negativi se $\alpha < 0$, quindi separatamente nei due casi posso applicare il criterio del confronto asintotico. La funzione integranda ha un problema di limitatezza per $x = 0$ pertanto se $x \to 0$ si ha

$$e^{\alpha x^2} - 1 \sim \alpha x^2 \qquad\qquad \sin x^3 \sim x^3$$

quindi dal criterio del confronto asintotico l'integrale di partenza si comporta come

$$\int_0^1 \frac{\alpha x^2}{x\,x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{\alpha}{x^2}\,dx$$

che diverge perché $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge solo se $\alpha < 1$. Pertanto l'unico valore di α per cui l'integrale dato converge risulta $\alpha = 0$.

❒ **Esercizio 7.1.5.** **(Esame del 07.06.16)** *Stabilire per quali valori di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *il seguente integrale improprio è convergente*

$$\int_0^1 \frac{3}{[2(x-\log(1+x))]^{3-3\alpha}}\,dx$$

➼ **R.** Si tratta di un integrale improprio con problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è non negativa, quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Ricordando che

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$$

si ha per $x \to 0$

$$\log(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \Leftrightarrow \log(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2} \sim 2(x - \log(1+x)) \sim x^2$$

quindi dal criterio del confronto asintotico l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{3}{x^{2(3-3\alpha)}}\, dx$$

che converge se

$$6 - 6\alpha < 1 \Leftrightarrow 6\alpha > 5 \Leftrightarrow \alpha > \frac{5}{6}.$$

❒ **Esercizio 7.1.6.** **(Esame del 29.06.16)** *Determinare l'insieme dei valori del parametro* $\alpha > 0$ *per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha \sin\sqrt{x}}{x^2 + 3x^3}\, dx$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente.

R. si tratta di un integrale improprio con problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è non negativa, quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Si osserva che

$$\sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x} \qquad x \to 0$$

mentre

$$x^2 + 3x^3 \sim x^2 \qquad x \to 0$$

perché vicino a zero "contano" le potenze piccole. Allora dal criterio del confronto asintotico

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha \sin\sqrt{x}}{x^2 + 3x^3}\, dx \sim \int_0^1 \frac{x^\alpha \sqrt{x}}{x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha-1/2}}\, dx.$$

Posto $\beta := 2 - \alpha - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \alpha$, si ha che l'integrale dato converge se $\beta < 1$ ed è integrale improprio se $\beta > 0$, quindi riassumendo l'integrale dato è improprio e come tale converge se e soltanto se

$$0 < \frac{3}{2} - \alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}.$$

❒ **Esercizio 7.1.7.** **(Esame del 19.09.16)** *Determinare l'insieme dei valori del parametro* $\alpha > 0$ *per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(e^{3x} - 1)(1 - \cos x)^\alpha}\, dx$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente.

➼ **R.** Si tratta di un integrale improprio (con problema in 0) e funzione integranda non negativa. Quindi l'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico cercando di confrontare l'integrale dato con un integrale più semplice, per esempio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\,dx$$

che è integrale improprio se $\beta > 0$ e converge se $\beta < 1$. Quindi usiamo il fatto che per $x \to 0^+$

$$e^{3x} - 1 \sim 3x \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

e per il teorema citato l'integrale dato si comporta come l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{3x\,\frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha}}\,dx$$

che a sua volta (possiamo tralasciare le costanti che non incidono sul comportamento dell'integrale) si comporta come l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x\,x^{2\alpha}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha+1-2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha-1}}\,dx$$

e questo converge allora (ed è integrale improprio) se

$$0 < 2\alpha - 1 < 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

❒ **Esercizio 7.1.8.** **(Esame del 19.12.16)** *Dire se il seguente integrale*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x(x^2+1)}\;e^{2x}}{\tan\sqrt[3]{x}}\,dx$$

è convergente o divergente, motivando la risposta sulla base di opportuni criteri.

➼ **R.** Si tratta di una funzione integranda positiva (nell'intervallo considerato) che ha un problema di limitatezza in $x = 0$. Quindi siamo in presenza di un integrale generalizzato. Possiamo pensare di usare il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\frac{\sqrt{x(x^2+1)}\;e^{2x}}{\tan\sqrt[3]{x}} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$$

perché per $x \to 0$ si ha

$$\sqrt{x(x^2+1)} \sim \sqrt{x} \qquad e^{2x} \sim 1 \qquad \tan\sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}.$$

Quindi dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[x]{x}}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\,dx = \int_0^1 \sqrt[6]{x}\,dx$$

che converge perché non è nemmeno un integrale improprio! Quindi l'integrale di partenza converge.

❒ **Esercizio 7.1.9.** **(Esame del 19.12.16)** *Dire se il seguente integrale*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x(x^3+1)}\ \cos(2x)}{\arctan\sqrt[4]{x}}\,dx$$

è convergente o divergente, motivando la risposta sulla base di opportuni criteri.

➼ **R.** Si tratta di una funzione integranda positiva (nell'intervallo considerato) che ha un problema di limitatezza in $x = 0$. Quindi siamo in presenza di un integrale generalizzato. Possiamo pensare di usare il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\frac{\sqrt{x(x^3+1)}\ \cos(2x)}{\arctan\sqrt[4]{x}} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{x}$$

perché per $x \to 0$ si ha

$$\sqrt{x(x^3+1)} \sim \sqrt{x} \qquad \cos(2x) \sim 1 \qquad \arctan\sqrt[4]{x} \sim \sqrt[4]{x}.$$

Quindi dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[x]{x}}\,dx = \int_0^1 \sqrt[4]{x}\,dx$$

che converge perché non è nemmeno un integrale improprio! Quindi l'integrale di partenza converge.

❒ **Esercizio 7.1.10.** **(Esame del 12.01.17)** *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx$$

➼ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato su un dominio illimitato sia da destra che da sinistra. Spezziamo l'intervallo in due parti e usiamo la definizione di integrale improprio assieme alla definizione di valore assoluto. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{-x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= -\lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \lim_{\omega\to+\infty} \int_{0}^{\omega} \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= -\lim_{\omega\to-\infty} \left[\frac{\log(1+x^2)}{2}\right]_{\omega}^{0} + \lim_{\omega\to+\infty} \int_{0}^{\omega} \left[\frac{\log(1+x^2)}{2}\right]_{0}^{\omega} \\
&= \lim_{\omega\to-\infty} \frac{1}{2}\log(1+\omega^2) + \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1+\omega^2) \\
&= 2\lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1+\omega^2) = +\infty.
\end{aligned}$$

Osserviamo che siccome si trattava di un integrale di una funzione pari su un dominio simmetrico, si poteva dire subito dall'inizio che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

❒ **Esercizio 7.1.11.** **(Esame del 03.02.17)** *Determinare l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^{3/2}\cos\sqrt{x}}{\log(1+2x^\alpha)(1-\cos\sqrt{x})}\,dx$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente.

➻ **R.** Si tratta di un integrale improprio con problema di limitatezza in $x = 0$ e funzione integranda non negativa. Penso di usare il criterio del confronto asintotico. Osservo che

$$\log(1+2x^\alpha) \sim 2x^\alpha \qquad 1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{x}{2} \qquad \cos\sqrt{x} \sim 1 \qquad x \to 0$$

quindi l'integrale di partenza si comporta come

$$\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{2x^\alpha\,\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-3/2+1}}\,dx$$

quindi è integrale improprio se $\alpha - \frac{1}{2} > 0$ e converge se $\alpha - \frac{1}{2} < 1$. I valori richiesti sono pertanto

$$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}.$$

❒ **Esercizio 7.1.12.** **(Esame del 09.01.18)** *Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \sin^2(1/x)}{(x+\pi)^\alpha}\, dx$$

risulta convergente.

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione, pertanto possiamo usare il criterio del confronto asintotico.
Per $x \to +\infty$ si ha che $1/x \to 0^+$, dunque dal limite notevole si ha

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x} \qquad \text{e dunque} \qquad \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^2}$$

mentre d'altra parte, se $x \to +\infty$ allora $x + \pi \sim x$ e dunque l'integrale dato si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2\, x^\alpha}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2+\alpha-1}}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

che converge quando $\alpha + 1 > 1$ dunque se $\alpha > 0$.
Allora, dal criterio del confronto asintotico, anche l'integrale di partenza converge per $\alpha > 0$.

❒ **Esercizio 7.1.13.** **(Esame del 11.01.18)** *Calcolare con la definizione*

$$\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\, dx$$

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. Per definizione si ha

$$\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\, dx = \lim_{K\to+\infty} \int_0^K e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\, dx.$$

Calcoliamo prima l'insieme delle primitive. Procediamo con la seguente sostituzione

$$e^{-x} = t \qquad -x = \log t \qquad dx = -\frac{1}{t}\, dt$$

da cui

$$\begin{aligned} \int e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\, dx &= -\int t\sqrt{1+8t}\,\frac{1}{t}\, dt = -\int (1+8t)^{1/2}\, dt \\ &= -\frac{1}{12}(1+8t)^{3/2} + C = -\frac{1}{12}(1+8e^{-x})^{3/2} + C. \end{aligned}$$

A questo punto

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\,dx &= \lim_{K\to+\infty}\int_0^K e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\,dx = \lim_{K\to+\infty}\left[-\frac{1}{12}(1+8e^{-x})^{3/2}\right]_0^K \\ &= \lim_{K\to+\infty}\left(-\frac{1}{12}(1+8e^{-K})^{3/2}+\frac{1}{12}(1+8)^{3/2}\right)=\frac{13}{6}.\end{aligned}$$

❐ **Esercizio 7.1.14.** **(Esame del 25.01.18)** *Determinare i valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ per cui la funzione*

$$f(x)=\frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\ \arctan x$$

(a) *risulti integrabile in* $(0,1)$*;*
(b) *risulti integrabile in* $(1,+\infty)$*;*
(c) *risulti integrabile in* $(0,+\infty)$*.*

R. (a) Si tratta di studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\ \arctan x\,dx.$$

Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x=0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione quindi possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x\to 0$

$$\frac{x+3}{x^3+1}\sim 3 \qquad \arctan x\sim x$$

da cui l'integrale considerato si comporta come l'integrale

$$\int_0^1 \frac{3}{x^{\alpha-1}}\,dx$$

che converge se $\alpha-1<1$ cioè se $\alpha<2$. Pertanto, dal criterio del confronto asintotico, la funzione $f(x)$ risulta integrabile in $(0,1)$ se $\alpha<2$.
(b) Si tratta di studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\ \arctan x\,dx.$$

Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione quindi possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x\to+\infty$

$$\frac{x+3}{x^3+1}\sim\frac{1}{x^2} \qquad \arctan x\sim\frac{\pi}{2}$$

da cui l'integrale considerato si comporta come l'integrale

$$\frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha+2}}\,dx$$

che converge se $\alpha+2>1$ cioè se $\alpha>-1$. Pertanto, dal criterio del confronto asintotico, la funzione $f(x)$ risulta integrabile in $(1,+\infty)$ se $\alpha>-1$.
(c) Si tratta di studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\arctan x\,dx.$$

Questo integrale generalizzato ha due problemi: uno di limitatezza dell'intervallo e un problema di limitatezza in $x=0$. Pertanto, dal teorema di spezzamento si ha

$$\int_0^{+\infty}\frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\arctan x\,dx=\int_0^{1}\frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\arctan x\,dx+\int_1^{+\infty}\frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\arctan x\,dx.$$

Dalle considerazioni precedenti, il primo integrale converge se $\alpha<2$, il secondo se $\alpha>-1$ dunque riassumendo la funzione $f(x)$ risulta integrabile in $(0,+\infty)$ se

$$-1<\alpha<2.$$

❐ **Esercizio 7.1.15.** **(Esame del 15.02.18)** *Determinare i valori del parametro $\alpha>0$ tali per cui l'integrale generalizzato*

$$\int_0^1\frac{\sqrt[3]{\sin(\pi x)}}{x^\alpha}\,dx$$

converge.

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in un intorno di $x=0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione quindi possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x\to 0$

$$\sin(\pi x)\sim\pi x\qquad\text{quindi}\qquad\sqrt[3]{\sin(\pi x)}\sim\sqrt[3]{\pi x}$$

per cui l'integrale dato si comporta come

$$\sqrt[3]{\pi}\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha-1/3}}\,dx$$

che converge se $\alpha-1/3<1$ dunque, dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato converge se $\alpha<4/3$.

❒ **Esercizio 7.1.16** **(Esame del 20.12.18).** *Dire se l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+e^{-x})(1+x\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x^2(x+1)}+\arctan x}\,dx$$

è convergente o divergente.

R. L'unico problema è in un intorno di $+\infty$ (in un intorno di 1 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $x \to +\infty$. Allora a numeratore si ha

$$\left(1+e^{-x}\right)\left(1+x\sqrt[4]{x}\right) \sim x\sqrt[4]{x} = x^{5/4},$$

mentre a denominatore

$$\sqrt{x^2(x+1)}+\arctan x \sim \sqrt{x^2\cdot x} = x^{3/2}.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+e^{-x})(1+x\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x^2(x+1)}+\arctan x}\,dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^{5/4}}{x^{3/2}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/4}}\,dx,$$

ed essendo $1/4 < 1$ l'integrale è divergente.

❒ **Esercizio 7.1.17** **(Esame del 08.01.19).** *Dire se l'integrale*

$$\int_2^{+\infty} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$$

è convergente o divergente.

R. L'unico problema è in un intorno di $+\infty$ (in un intorno di 2 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $x \to +\infty$. Si ha

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \log\left(\frac{x-1+1+1}{x-1}\right) = \log\left(1+\frac{2}{x-1}\right) \sim \frac{2}{x-1}.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_2^{+\infty} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx \sim \int_2^{+\infty} \frac{2}{x-1}\,dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$$

dove si è utilizzata la sostituzione $t = x - 1$. L'integrale pertanto risulta divergente.

❒ Esercizio 7.1.18 **(Esame del 23.01.19).** *Calcolare, usando la definizione,*

$$\int_0^{+\infty} x^3 \left(8 + x^4\right)^{-5/3} \, dx.$$

R. L'unico problema è in un intorno di $+\infty$ (in un intorno di 0 la funzione integranda è ben definita e continua), perciò si avrà

$$\int_0^{+\infty} x^3 \left(8 + x^4\right)^{-5/3} \, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_0^{\omega} x^3 \left(8 + x^4\right)^{-5/3} \, dx.$$

Troviamo prima l'insieme delle primitive calcolando l'integrale indefinito. Proviamo con la sostituzione

$$t = 8 + x^4,$$

da cui

$$dt = 4x^3 \, dx.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} \int x^3 \left(8 + x^4\right)^{-5/3} \, dx &= \frac{1}{4} \int \left(8 + x^4\right)^{-5/3} 4x^3 \, dx = \frac{1}{4} \int t^{-5/3} \, dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{-2/3}}{-2/3} + C \\ &= -\frac{3}{8} t^{-2/3} + C = -\frac{3}{8} \left(8 + x^4\right)^{-2/3} + C. \end{aligned}$$

L'integrale generalizzato è quindi uguale a

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to +\infty} \int_0^{\omega} x^3 \left(8 + x^4\right)^{-5/3} \, dx &= \lim_{\omega \to +\infty} \left[-\frac{3}{8} \left(8 + x^4\right)^{-2/3} \right]_0^{\omega} \\ &= \lim_{\omega \to +\infty} \left(-\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\left(8 + \omega^4\right)^{2/3}} + \frac{3}{32} \right) = \frac{3}{32}. \end{aligned}$$

❒ Esercizio 7.1.19 **(Esame del 22.02.19).** *Determinare l'insieme dei valori del paramentro $\alpha > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2} - 1}{\pi x^{2\alpha} + 3x^{4\alpha}} \, dx$$

risulta convergente.

➾ **R.** L'unico problema è in un intorno destro di 0 (in un intorno di 1 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $x \to 0^+$. Allora a numeratore si ha

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2,$$

mentre a denominatore

$$\pi x^{2\alpha} + 3x^{4\alpha} = \pi x^{2\alpha}\left(1 + \frac{3}{\pi}\, x^{2\alpha}\right) \sim \pi x^{2\alpha}.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2} - 1}{\pi x^{2\alpha} + 3x^{4\alpha}}\, dx \sim \int_0^1 \frac{x^2}{\pi x^{2\alpha}}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha - 2}}\, dx,$$

che converge se e solo se $2\alpha - 2 < 1$, ovvero $\alpha < 3/2$.

❒ **Esercizio 7.1.20** **(Esame del 10.04.19).** *Determinare l'insieme dei valori del paramentro $\beta > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{\log\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}{x^\beta\left(3x + x^3\right)}\, dx$$

risulta convergente.

➾ **R.** L'unico problema è in un intorno destro di 0 (in un intorno di 1 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $x \to 0^+$. Allora a numeratore si ha

$$\log\left(1 + \sqrt[3]{x}\right) \sim \sqrt[3]{x},$$

mentre a denominatore

$$x^\beta\left(3x + x^3\right) = x^\beta \cdot 3x\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) \sim x^\beta \cdot 3x = 3x^{\beta+1}.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_0^1 \frac{\log\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}{x^\beta\left(3x + x^3\right)}\, dx \sim \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{3x^{\beta+1}}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^{\beta+1-1/3}}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^{\beta+2/3}}\, dx,$$

che converge se e solo se $\beta + 2/3 < 1$, ovvero $\beta < 1/3$.

❒ **Esercizio 7.1.21 (Esame del 05.06.19).** *Determinare l'insieme dei valori del paramentro $\beta \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} t^\beta \arctan t \, dt$$

risulta divergente.

R. L'unico problema è in un intorno di $+\infty$ (in un intorno di 0 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $t \to +\infty$. Allora

$$t^\beta \arctan t \sim \frac{\pi}{2} t^\beta.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_1^{+\infty} t^\beta \arctan t \, dt \sim \frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} t^\beta \, dt.$$

Se $\beta \geq 0$ allora l'integrale diverge positivamente, poiché $t^\beta \geq 1$ per ogni t. Se invece $\beta < 0$ allora riscriviamo l'integrale come

$$\frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{-\beta}} \, dt,$$

che risulta divergente quando $-\beta < 1$. <=1 Dunque per la divergenza deve essere $\beta \geq 0 \vee \beta > -1$, da cui $\beta > -1$.

❒ **Esercizio 7.1.22 (Esame del 18.06.19).** *Calcolare, se esiste,*

$$\int_0^{+\infty} e^{|\pi - x|} \, dx.$$

R. Innanzitutto

$$|\pi - x| = \begin{cases} \pi - x & x \leq \pi, \\ x - \pi & x > \pi. \end{cases}$$

Dunque spezziamo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{|\pi - x|} \, dx = \int_0^{\pi} e^{\pi - x} \, dx + \int_\pi^{+\infty} e^{x - \pi} \, dx.$$

Troviamo prima l'insieme delle primitive calcolando gli integrali indefiniti. Si ha

$$\int e^{\pi-x}\,dx = -e^{\pi-x} + C, \qquad \int e^{x-\pi}\,dx = e^{x-\pi} + C.$$

Il primo è un normale integrale definito, quindi

$$\int_0^{\pi} e^{\pi-x}\,dx = \left[-e^{\pi-x}\right]_0^{\pi} = -1 + e^{\pi}.$$

Il secondo è un integrale generalizzato, quindi

$$\int_{\pi}^{+\infty} e^{x-\pi}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_{\pi}^{\omega} e^{x-\pi}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\left[e^{x-\pi}\right]_0^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty}\left(e^{\omega-\pi} - e^{-\pi}\right) = +\infty.$$

Dunque complessivamente

$$\int_0^{+\infty} e^{|\pi-x|}\,dx = +\infty.$$

❒ Esercizio 7.1.23 **(Esame del 24.07.19).** *Dire se l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^2e^x}{1-\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$$

è convergente o divergente.

R. L'unico problema è in un intorno destro di 0 (in un intorno di 1 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $x \to 0^+$. Allora a numeratore si ha

$$x^2e^x \sim x^2,$$

mentre a denominatore

$$1-\cos\left(\sqrt[3]{x}\right) \sim \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{2}.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_0^1 \frac{x^2e^x}{1-\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}\,dx \sim \int_0^1 \frac{x^2}{\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{2}}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^{2/3}}\,dx = \int_0^1 x^{4/3}\,dx < +\infty.$$

❒ Esercizio 7.1.24 **(Esame del 11.09.19).** *Calcolare, usando la definizione,*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^3+x}\,dx.$$

➽ **R.** L'unico problema è in un intorno di $+\infty$ (in un intorno di 1 la funzione integranda è ben definita e continua), perciò si avrà

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^3+x}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{3x^3+x}\,dx.$$

Troviamo prima l'insieme delle primitive calcolando l'integrale indefinito. Si ha

$$\int \frac{1}{3x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x\,(3x^2+1)}\,dx.$$

Utlizziamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{1}{x\,(3x^2+1)}\,dx \stackrel{?}{=} \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{3x^2+1} = \frac{3Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\,(3x^2+1)} = \frac{(3A+B)x^2+Cx+A}{x\,(3x^2+1)},$$

che è verificata se e solo se

$$\begin{cases} 3A+B=0, \\ C=0, \\ A=1, \end{cases}$$

da cui $A=1$, $B=-3$, $C=0$. Sostituendo otteniamo

$$\int \frac{1}{3x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{3x}{3x^2+1}\,dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log|3x^2+1| + C.$$

L'integrale generalizzato è quindi uguale a

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{3x^3+x}\,dx &= \lim_{\omega\to+\infty} \left[\log|x| - \frac{1}{2}\log|3x^2+1|\right]_1^{\omega} \\
&= \lim_{\omega\to+\infty} \left(\log\omega - \frac{1}{2}\log(3\omega^2+1) - \log 1 + \frac{1}{2}\log 4\right) \\
&= \lim_{\omega\to+\infty} \left(\log\left(\frac{\omega}{\sqrt{3\omega^2+1}}\right) + \log 2\right) = \log\frac{1}{\sqrt{3}} + \log 2 = \log\frac{2}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 7.1.25.** **(Esame del 15.11.19)** *Determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ per cui il seguente integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3(x^3-1)^{\alpha}}\,dx$$

converge.

Limitatezza in 0??

➽ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione quindi possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to +\infty$

$$x^3 - 1 \sim x^3$$

per cui l'integrale dato si comporta come (attenzione alle proprietà delle potenze)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3+3\alpha}}\,dx$$

che converge se $3 + 3\alpha > 1$ dunque, dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato converge se $\alpha > -2/3$.

quindi per ogni a>0?

❒ **Esercizio 7.1.26.** **(Esame del 19.12.19)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+1)}\,dx$$

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo e problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione quindi possiamo usare il criterio del confronto asintotico.
Spezziamo l'integrale dato in due integrali da trattare separatamente. Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+1)}\,dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+1)}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+1)}\,dx.$$

Consideriamo il primo dei due integrali. Per $x \to 0$ si ottiene

$$\sqrt{x}+1 \sim 1$$

per cui il primo integrale si comporta come

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$$

che converge perché $2/3 < 1$.
Consideriamo ora il secondo integrale. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{x}+1 \sim \sqrt{x}$$

per cui il secondo integrale si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3+1/2}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7/6}}\,dx$$

che converge perché $7/6 > 1$.
Riassumendo l'integrale dato è un integrale convergente.

❒ **Esercizio 7.1.27. (Esame del 09.01.20)** *Dopo aver verificato che*

$$\log(e^x - x) \sim \frac{x^2}{2} \qquad x \to 0$$

studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato, al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{[\log(e^x - x)]^\alpha}\, dx$$

(Si noti che $[\log(e^x - x)]^\alpha = \log^\alpha(e^x - x)$*).*

➼ **R.** Usando gli sviluppi di Mac Laurin si ha che

$$\log(1 + z) = z + o(z)$$

da cui

$$\log(e^x - x) = e^x - 1 - x + o(e^x - 1 - x).$$

D'altra parte

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

quindi

$$\log(e^x - x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

e questo risulta equivalente al fatto che

$$\log(e^x - x) \sim \frac{x^2}{2}.$$

A questo punto, osservando che l'integrale generalizzato dato ha un problema di limitatezza e che, dagli sviluppi asintotici, la funzione integranda è non negativa, si può concludere, dal criterio del confronto asintotico, che l'integrale dato si comporta come

$$2^\alpha \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}}\, dx$$

che converge se $2\alpha < 1$ cioè se $\alpha < 1/2$.

❒ **Esercizio 7.1.28. (Esame del 23.01.20)** *Calcolare, con la definizione*

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{(x + 1)(x - 3)}\, dx$$

➼ **R.** Per definizione di integrale generalizzato si ha

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x-3)}\, dx = \lim_{K\to+\infty} \int_4^K \frac{1}{(x+1)(x-3)}\, dx.$$

Calcoliamo prima l'insieme delle primitive con il metodo dei fratti semplici. Cerchiamo costanti A, B tali che

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{1}{(x+1)(x-3)}$$

Si ha

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax-3A+Bx+B}{(x+1)(x-3)}$$

da cui, dal principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A+B=1 \end{cases}$$

pertanto si ha $A = -1/4$ e $B = 1/4$. Pertanto, dalla linearità dell'integrale e dalle proprietà dei logaritmi, si ottiene

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-3)}\, dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3} \right) dx = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x+1}{x-3} \right| + C.$$

A questo punto allora

$$\begin{aligned} \int_4^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x-3)}\, dx &= \lim_{K\to+\infty} \int_4^K \frac{1}{(x+1)(x-3)}\, dx = \lim_{K\to+\infty} \left[\frac{1}{4} \log \left| \frac{x+1}{x-3} \right| \right]_4^K \\ &= \lim_{K\to+\infty} \log \left| \frac{K+1}{K-3} \right| - \log 5 = -\log 5. \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 7.1.29. (Esame del 20.02.20)** *Calcolare, con la definizione*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\, dx$$

➼ **R.** Per definizione di integrale generalizzato si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\, dx = \lim_{K\to+\infty} \int_1^K \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\, dx.$$

Calcoliamo prima l'insieme delle primitive. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\, dx &= -\frac{\log(1+x^3)}{2x^2} + \int \frac{1}{1+x^4} \frac{4x^3}{2x^2}\, dx \\ &= -\frac{\log(1+x^3)}{2x^2} + \int \frac{2x}{1+x^4}\, dx = -\frac{\log(1+x^3)}{2x^2} + \arctan(x^2). \end{aligned}$$

A questo punto allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\,dx = \lim_{K\to+\infty} \int_1^K \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\,dx = \lim_{K\to+\infty} \left[-\frac{\log(1+x^3)}{2x^2} + \arctan(x^2)\right]_1^K$$
$$= \lim_{K\to+\infty} -\frac{\log(1+K^3)}{2K^2} + \arctan(K^2) + \log 2 - \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \log 2,$$

dove abbiamo usato la gerarchia degli infiniti, essendo, per $K \to +\infty$

$$\log(1+K^3) \sim \log K^3 = 3\log K$$

e dove abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{K\to+\infty} \arctan(K^2) = \frac{\pi}{2} \qquad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

❒ **Esercizio 7.1.30. (Esame del 24.06.20)** *Studiare la convergenza dell'integrale*

$$\int_3^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^3} + e^{-x}}\,dx$$

➼ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione considerato dunque possiamo applicare il criterio del confronto asintotico.
Per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{\frac{x^2}{x^\alpha} + e^{-x}} \sim \sqrt{\frac{x^2}{x^\alpha}}$$

indipendentemente dal valore di α. Infatti si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^\alpha} + e^{-x}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^\alpha}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{x^{\alpha-2}}{e^x}} = 1$$

in quanto

$$\frac{x^{\alpha-2}}{e^x} \to 0$$

(nel caso peggiore si risolve con la gerarchia degli infiniti). Quindi, dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato si comporta come

$$\int_3^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^{\alpha-2}}}\,dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha-2}{2}}}\,dx$$

che converge se $\frac{\alpha-2}{2} > 1$ cioè se $\alpha/2 > 2$ che significa $\alpha > 4$.

❒ **Esercizio 7.1.31. (Esame del 23.07.20)** *Studiare la convergenza dell'integrale al variare del parametro* $\beta \in \mathbb{R}$

$$\int_3^{+\infty} \frac{\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{x^\beta}\, dx$$

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \log\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) \sim -\frac{2}{x+1} \sim -\frac{2}{x},$$

quindi la funzione integranda è negativa in un intorno di $+\infty$ ma in ogni caso è possibile usare il criterio del confronto asintotico. Si ha dunque che l'integrale dato si comporta come

$$-2\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta+1}}\, dx$$

che converge se $\beta + 1 > 1$ dunque se $\beta > 0$. Allora, dal criterio del confronto asintotico, anche l'integrale di partenza converge per $\beta > 0$.

❒ **Esercizio 7.1.32. (Esame del 08.09.20)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato, al variare del parametro* $\alpha > 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{[\log(1+x^2)]^\alpha}\, dx$$

Si noti che con la scrittura $[\log(1+x^2)]^\alpha$ *si intende* $\log^\alpha(1+x^2)$.

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to 0$

$$\log(1+x^2) \sim x^2$$

quindi l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}}\, dx$$

che converge quando $2\alpha < 1$ cioè $\alpha < 1/2$. Allora, dal criterio del confronto asintotico anche l'integrale di partenza converge se $\alpha < 1/2$.

❒ **Esercizio 7.1.33. (Esame del 14.12.20)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato*
$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{\sin(x^2+x^{3/2})}\,dx$$

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x=0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to 0$
$$e^{\sqrt[3]{x}}-1 \sim \sqrt[3]{x} \qquad \sin(x^2+x^{3/2}) \sim x^2+x^{3/2} \sim x^{3/2}$$
perché vicino a zero contano le potenze piccole. Quindi l'integrale dato si comporta come
$$\int_0^1 \frac{x^{1/3}}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{7/6}}\,dx$$
che diverge perché $7/6 > 1$. Allora, dal criterio del confronto asintotico anche l'integrale di partenza diverge.

❒ **Esercizio 7.1.34. (Esame del 21.12.20)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato*
$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+e^{-x})(1+x\sqrt[4]{x})}{x^2+x^3}\,dx$$

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to +\infty$
$$1+e^{-x} \sim 1 \qquad 1+x\sqrt[4]{x} \sim x^{5/4} \qquad x^2+x^3 \sim x^3$$
Si ha dunque che l'integrale dato si comporta come
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3-5/4}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7/4}}\,dx$$
che converge perché $7/4 > 1$. Allora anche l'integrale di partenza converge.

❒ **Esercizio 7.1.35. (Esame del 12.01.21)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato, al variare del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\int_0^1 \frac{(e^x-1)^\alpha}{\sin\sqrt[3]{x}}\,dx$$

➼ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to 0$

$$e^x - 1 \sim x \qquad \sin \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}$$

quindi l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3-\alpha}}\, dx$$

che converge quando $1/3 - \alpha < 1$ cioè $\alpha > -2/3$. Allora, dal criterio del confronto asintotico anche l'integrale di partenza converge se $\alpha > -2/3$.

❒ **Esercizio 7.1.36. (Esame del 02.02.21)** *Calcolare*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \tan x\, dx$$

➼ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x = 0$. Per definizione di integrale generalizzato si ha

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \tan x\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{\pi/4} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \tan x\, dx.$$

Troviamo innanzitutto l'insieme delle primitive. Effettuiamo la seguente sostituzione

$$\cos x = t \qquad -\sin x\, dx = dt$$

da cui, ricordando che $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, si ottiene

$$\int \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \tan x\, dx = \int \frac{t+1}{t(1-t)}\, dt.$$

A questo punto si tratta di una funzione razionale fratta, per cui procediamo col metodo dei fratti semplici. Si cercano costanti A, B tali che

$$\frac{t+1}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t}$$

da cui

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A - At + Bt}{t(1-t)} = \frac{t+1}{t(1-t)}$$

da cui, dal principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} -A+B=1 \\ A=1 \end{cases}$$

pertanto si ha $A=1$ e $B=2$. Dunque

$$\int \frac{t+1}{t(1-t)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t}+\frac{2}{1-t}\right) dt = \log|t| - 2\log|1-t| + C = \log|\cos x| - 2\log|1-\cos x| + C.$$

In conclusione (osservando che $1-\cos x \geq 0$ e che, nell'intervallo di integrazione dato, $\cos x \geq 0$)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x+1}{\cos x-1}\tan x\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\pi/4} \frac{\cos x+1}{\cos x-1}\tan x\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\log(\cos x) - 2\log(1-\cos x)\right]_\varepsilon^{\pi/4} \\
&= \log\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\log\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \log(\cos\varepsilon) + 2\log(1-\cos\varepsilon) = -\infty
\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 7.1.37. (Esame del 02.02.21)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2+x\sin^5 x}$$

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x=0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Mostriamo che, per $x\to 0$ si ha

$$\sqrt{x}+x^2+x\sin^5 x \sim \sqrt{x}.$$

Infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+x^2+x\sin^5 x \sim \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} 1 + x\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin^5 x = 1$$

quindi l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

che converge; pertanto, dal criterio del confronto asintotico, anche l'integrale di partenza converge.

❒ **Esercizio 7.1.38. (Esame del 23.02.21)** *Determinare per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale improprio*

$$\int_5^6 \frac{\log(x-4)}{(x-5)^\beta}\,dx$$

➻ **R.** Effettuiamo prima di tutto il seguente cambio di variabile

$$x - 5 = t$$

quindi l'integrale dato si può scrivere come

$$\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t^\beta}\,dt.$$

A questo punto, se $\beta \leq 0$ questo è un integrale di una funzione limitata su un intervallo limitato che quindi banalmente converge; se $\beta > 0$ si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico.
D'altra parte, se $x \to 0$

$$\log(1+x) \sim x$$

quindi l'integrale di partenza si comporta come

$$\int_0^1 \frac{t}{t^\beta}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{\beta-1}}\,dt$$

che converge se $\beta - 1 < 1$ cioè se $\beta < 2$. Allora, dal criterio del confronto asintotico anche l'integrale di partenza converge se $\beta < 2$.

❒ **Esercizio 7.1.39. (Esame del 09.06.21)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_1^{+\infty} \frac{(e^{1/x}-1)^3}{\sqrt[4]{x}}\,dx$$

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to +\infty$

$$e^{1/x} - 1 \sim \frac{1}{x}$$

dunque l'integrale dato si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3+1/4}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{13/4}}\,dx$$

che converge perché $13/4 > 1$. Allora anche l'integrale di partenza converge.

❒ **Esercizio 7.1.40. (Esame del 23.06.21)** *Studiare la convergenza dell'integrale al variare del parametro* $\alpha > 0$

$$\int_3^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^\alpha + x^3}}\,dx$$

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Studiamo il comportamento del denominatore della frazione per $x \to +\infty$. Se $\alpha < 3$ si ha che

$$x^\alpha + x^3 \sim x^3$$

dunque l'integrale dato si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

che converge perché $3/2 > 1$.
Se invece $\alpha = 3$ l'integrale dato si riscrive come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x^3}}\,dx$$

quindi di nuovo converge perché risulta uguale a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx.$$

Infine se $\alpha > 3$

$$x^\alpha + x^3 \sim x^\alpha$$

dunque l'integrale dato si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha/2}}\,dx$$

che converge se $\alpha/2 > 1$ cioè se $\alpha > 2$. Riassumendo l'integrale dato converge per ogni $\alpha > 0$.

❒ **Esercizio 7.1.41. (Esame del 07.07.21)** *Studiare la convergenza dell'integrale al variare del parametro* $\beta \in \mathbb{R}$

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sin \frac{2}{x^2} + e^{1/x} - 1}{x^\beta}\, dx$$

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to +\infty$

$$\sin \frac{2}{x^2} + e^{1/x} - 1 \sim 1/x$$

infatti, dai limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin \frac{2}{x^2} + e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin \frac{2}{x^2}}{2/x^2}\frac{2}{x} + \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = 1$$

dunque l'integrale dato si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta+1}}\, dx$$

che converge quando $\beta+1 > 1$ cioè quando $\beta > 0$. Allora anche l'integrale di partenza converge quando $\beta > 0$.