Esercizi Fisica II

Stefano Giulianelli

Semestre I, 2022/2023

Contents

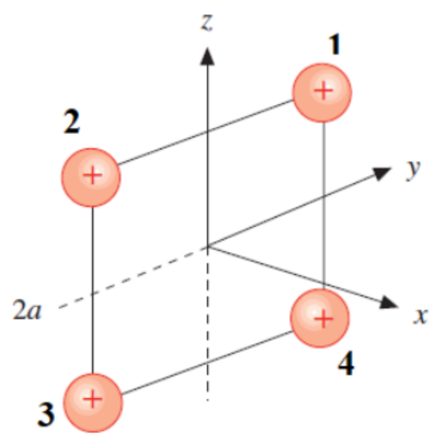
Cap	Esercizi										
1	2x	3x	8x								
2	1x	5x	7x								
3	2x	3x	5x	9x							
4	1	5									
7	1	4	6	7	10	11	12r	13			
8	1	2	3	4	6	7	8	10	11	12	
10	1	2	4	6	7	9	12	13	15	16	21	23
13	2	3	4	5	8	9					

x: fatto
r: da rivedere

Capitolo 1

1.2

Quattro cariche positive poste ai vertici di un quadrato di lato 2a = 10cm di valore $q = 10^{-8}C$.
a) Calcolare la forza esercitata dalle altre tre cariche su quella posta nel vettore (a,a) e le espressioni del potenziale e del campo elettrostatico lungo l'asse x.
b) Calcolare inoltre l'energia cinetica con la quale passa per il centro un elettrone abbandonato con velocità nulla in un punto dell'asse x distante $x_0 = 2a$ dal centro.



Formule utilizzate

$\vec{F_{i,j}} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{i,j}^2}\vec{u_{i,j}}$
$\vec{E_i} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$
$V(P) - V(\infty) = \int_x^\infty \vec{E}d\vec{s}$
$\vec{E} = \left(-\frac{\delta v}{\delta x}, -\frac{\delta v}{\delta y}, -\frac{\delta v}{\delta z}\right)$ $\Delta E_k + \Delta U_{elettrone} = 0$
$\Delta E_k = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{4q}{\sqrt{sa^2}} - \frac{4q}{\sqrt{2a^2+4a^2}}\right]$

Soluzione punto a

Calcolo della forza:
Applico la formula per le 3 particelle

con $q_i = q_j = q$
$\vec{F_{2,1}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{2,1}^2}\vec{u_y}$ $\vec{F_{3,1}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{3,1}^2}\vec{u_{y,z}}$ $\vec{F_{2,3}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{2,3}^2}\vec{u_z}$

Applico il teorema di sovrapposizione degli effetti:
$\vec{F} = \vec{F_{2,1}} + \vec{F_{3,1}} + \vec{F_{3,2}}$

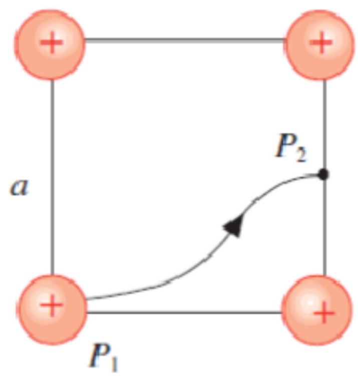
Calcolo del potenziale e del campo elettrostatico
$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$ $\vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$ $\vec{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}$ $\vec{E}_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_4^2}$
con $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \sqrt{2a^2 + x^2}$
$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{x}{r}\vec{u_x}$
$V(P) - V(\infty) = \int_x^\infty \vec{E}d\vec{s}$
$V(P) = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0}\int_x^\infty \frac{x}{r^3}dx = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2a^2+x^2}}$
$\vec{E} = \left(-\frac{\delta v}{\delta x}, -\frac{\delta v}{\delta y}, -\frac{\delta v}{\delta z}\right)$

Soluzione punto b

Calcolare l'energia cinetica di un elettrone con velocità nulla nel punto (2a, 0, 0) che passa in O.
$\Delta E_k + \Delta U_{elettrone} = 0$
$\Delta E_k = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{4q}{\sqrt{sa^2}} - \frac{4q}{\sqrt{2a^2+4a^2}}\right]$

1.3

Quattro cariche puntiformi di egual valore $q = 10^{-8}C$ sono poste ai vertici di un quadrato di lato a = 10 cm.
Calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema e il lavoro necessario per spostare una delle cariche dalla posizione iniziale P1 al punto P2 indicato in figura e situato nel centro del lato.



Formule utilizzate

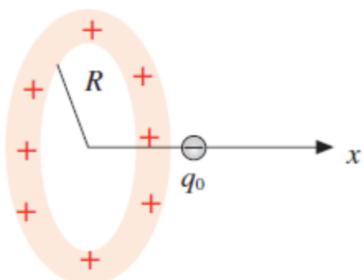
$U_e[P] = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i \ q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$
$W = U_e[P_2] - U_e[P_1]$

Soluzione

$U_e[P_1] = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i \ q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4.87 * 10^{-5} \ J$
$U_e[P_2] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 6.84 * 10^{-5} \ J$
$W = U_e[P_2] - U_e[P_1] = 1.97 * 10^{-5} \ J$

1.8

Una particella di massa $m = 10^{-3}kg$ e carica $q_0 = -10^{-10}C$ è posta al centro di un anello di raggio R = 10 cm, su cui 'e distribuita uni formemente la carica $q = 10 - 8C$.
La particella viene spostata di un tratto $x_0 = 0.5cm$ lungo l'asse e abbandonata.
Dimostrare che la particella oscilla con moto armonico intorno all'origine e determinare il periodo T delle piccole oscillazioni e l'energia cinetica della particella quando passa per l'origine.



Formule utilizzate

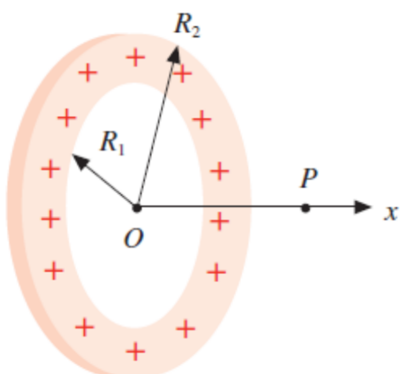
Soluzione

Calcoliamo il campo per ogni infinitesimo di anello.
$dE_x(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$
$E_x = \int_{anello} dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\int_{anello} dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
Se $\left(\frac{x}{R}\right)^2 \ll 1$
$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{R^3}\vec{u_x}$
$\frac{m\ d^2x}{dt^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q|q_0|}{R^3}x = 0$
$\omega = \sqrt{\frac{q|q_0|}{4\pi\epsilon_0 mR^3}} = 0.0949\ rad/s$
con $T = 2\pi/\omega = 66,23\ s$
$E_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_0\ q|}{R^3}\int_0^{x_0} xdx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_0\ q|x_0^2}{2R^3} = 1.13 * 10^{-10}\ J$

Capitolo 2

2.1

Una carica $q = 1.39 * 10^{-8}\ C$ è distribuita con densità superficiale uniforma σ su una corona circolare piana di raggio interno $R_1 = 20\ cm$ e raggio esterno $R_2 = 30\ cm$.
a) Determinare le espressioni del campo elettrostatico $\vec{E(x)}$ e del poteniale $V(x)$ sull'asse della corona.
b) Calcolare l'energia cinetcia con la quale un elettrone libero in un punto P con $x_0 = 20\ cm$ raggiunge il centro.
c) Calcolare la forza agente su un dipolo elettrico di momento $p = p_0\vec{u_x}$ con $p_0 = 10^{-10}\ cm$, posto in O.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$\sigma = \frac{q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{1.39*10^{-8}}{3.14*(0.3^2 - 0.2^2)} = 8.85 * 10^-8\ \frac{C}{m^2}$
$dq = \sigma ds = \sigma 2\pi r dr$
$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$
$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2 + x^2} - \sqrt{R_1^2 + x^2}\right]$
$E_x = -\frac{\delta V}{\delta x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{x}{\sqrt{R_2^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{R_1^2+x^2}}\right]$

Soluzione punto b

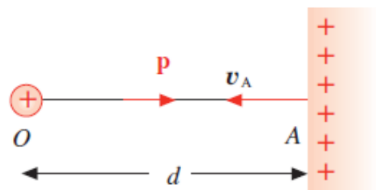
$\Delta E_k + \Delta U = 0$
$E_{k_{fin}} = E_{k_{in}} - e[V_{in} - V_{fin}] = -\frac{e\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2 + x_0^2} - \sqrt{R_1^2 + x_0^2} - R_2 + R_1\right] = 111\ eV$

Soluzione punto c

$\vec{F}\left(\vec{p} * \nabla\right)\vec{E} = p_0\left(\vec{u_x} * \nabla\right)\vec{E} = p_0\frac{\delta\vec{E}}{\delta x}\vec{u_x}$
$E_x = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{x}{\sqrt{R_2^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{R_1^2+x^2}}\right]$
$\frac{\delta E_x}{\delta x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2+x^2}} - \frac{x^2}{(R_2^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+x^2}} + \frac{x^2}{(R_1^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$
$F = \frac{p_0\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] = 8.33 * 10^{-7}\ N$

2.5

Una carica positiva q distante $d = 40\ cm$ da un piano indefinito carico con densità $\sigma = 8,86 * 10^{10}\ \frac{C}{m^2}$. Un dipolo elettrico di momento $p = 10^{12}\ Cm$, parallelo e concorde al vettore OA equidistante dal piano è soggetta a $F = 2.25 * 10^{-9}\ N$.
Calcolare il vettore q e la velocità con cui un elettrone che parte da A con $V_a = 3 * 10^6\ \frac{m}{s}$ arriva in B distante $\frac{d}{4}$.



Formule utilizzate

Soluzione

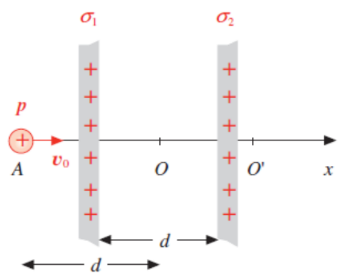
$V(B) - V(A) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \frac{d}{4}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\right) + \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{3d}{4} - 0\right) = \frac{3}{4\pi\epsilon_0 d}\left(q - \frac{\pi}{2}\sigma d^2\right) = 52.47\ V$

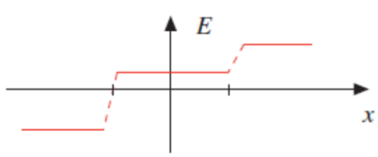
$E_k(B) = E_k(A) - e[V(A) - V(B)] = \frac{1}{2}m_e V_A^2 + e[V(B) - V(A)]$

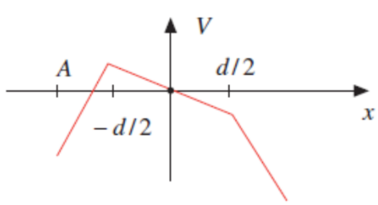
$V_B = \sqrt{\frac{2E_k(B)}{m_e}} = 5.24 * 10^6 \frac{m}{s}$

2.7

Due piani indefiniti paralleli, distanti $d = 20\ cm$, sono carichi ocn densità uniformi $\sigma_1 = 17.72 * 10^{-8}\ \frac{C}{m^2}$ e $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}$
a) Determinare il potenziale V(x), ponendonolo uguale a 0 nel punto di mezzo O tra i due piani.
b) Determinare l'energia cinetica minima $E_{k_{min}}$ che deve avere un protone nel punto A(x = -d) per giungere in un generico punto O'. Se un elettrone viene lasciato libero in A con v=0 dove arriva?







Formule utilizzate

Soluzione punto a

per: $x < -\frac{d}{2}$:
$E_1 = -\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2\epsilon_0}\vec{u_x} = \frac{3\sigma_2}{2\epsilon_0}\vec{u_x} = 1.5 * 10^4\vec{u_x}\ \frac{V}{m}$
$\sigma_1 = 2\sigma_2$
$V_1(x) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}(3x + 2d)$

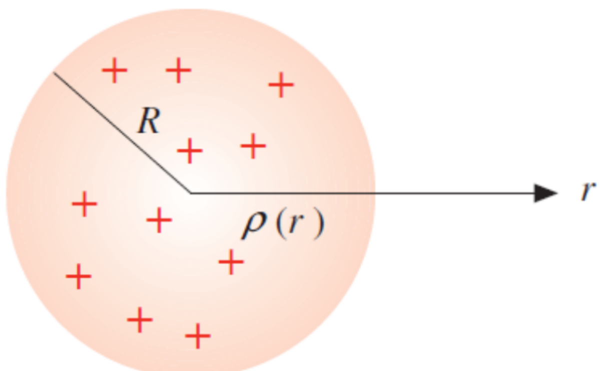
per $-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$:
$E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}\vec{u_x} = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\vec{u_x} = 0.5 * 10^4 \vec{u_x}\ \frac{V}{m}$
$\sigma_1 = 2\sigma_2$
$V_2(x) = -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}x$
per $x > \frac{d}{2}$
$E_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}\vec{u_x} = 1.5 * 10^4 \vec{u_x}\ \frac{V}{m}$
$V_3(x) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}(-3x + d)$
Per raggiungere la regione $x > \frac{d}{2}$ il protone deve attraversare le barriere del potenziale, cioè deve salire fino al punto di potenziale maggiore a $x = -\frac{d}{2}$. Una volta raggiunto quel punto, verrà spinto completamente a destra. Pertanto l'energia cinetica iniziale deve essere almeno uguale alla differenza di potenziale.
$\Delta v = v_i(-\frac{d}{2}) - V_1(A) = \frac{3\sigma_2 d}{4\epsilon_0} = 1500V$
$E_{k_{min}} = 1.5keV$
L'elettrone viene accellerato verso dx fino a $x = -\frac{d}{2}$ quindi viene decellera-tore.
Usando la conservazione dell'energia, l'elettrone si ferma nel punto dell'asse x posto tale che $V(x) = V(a)$.
$\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}(-3x + d) = -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}d$ per cui $x = \frac{2d}{3} = 13.3\ cm$

Soluzione punto b

Capitolo 3

3.2

Una carica è distribuita all'interno di una sfera di raggio R con densità non uniforme $\rho(r) = c/r$ essendo c una costante.
Determinare le espressioni del campo elettrostatico E(x)e del potenziale V(r) per $0 \leq r \leq \infty$.



Formule utilizzate

Gauss: $\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}\vec{u_n}d\Sigma$

Soluzione punto a

Gauss: $\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}\vec{u_n}d\Sigma$ ma se $\vec{E} \parallel \vec{u_n} \rightarrow \vec{E}\vec{u_n} = E$
$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}\vec{u_n}d\Sigma = \oint Ed\Sigma$ ma E è costante lungo $d\Sigma$
$\Phi(\vec{E}) = E\oint d\Sigma = E\Sigma$ con Σ superfice sferica $\Sigma = 4\pi r^2$
$\Phi(\vec{E}) = E_r * 4\pi r^2$ con anche $\phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$
per $r \leq R$ (interno sfera)
$4\pi r^2 E_{int}(x) = \frac{q_{int}(r)}{\epsilon_0}$
con $q_{int}(r) = \int_0^r \frac{c}{r}4\pi r^2 dr = 2\pi cr^2$
$E_{int}(r) = \frac{C}{2\epsilon}$ costante

per $r > R$ (estero sfera)
$E_{est} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ con $q = 2\pi cR^2$
$E_{est} = \frac{cR^2}{2\epsilon_0 r^2}$ $\qquad r(r \gg R) = \int_r^{\infty} E_{est}dr = \frac{cR^2}{2\epsilon_0 r}$

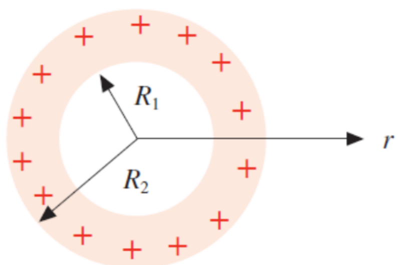
in particolare $V(R) = \frac{cR^2}{2\epsilon_0}$

Soluzione punto b

per $r \ll R$
$V(r) - V(R) = \int_r^R E_{int} dr = \frac{C}{2\epsilon_0}(R - r)$
$V(r) = \frac{c}{2\epsilon_0}(2R - r)$
al centro $V(0) = \frac{cR}{\epsilon_0}$

3.3

Tra due superfici sferiche concentriche di raggio $R_1 = 10\ cm$ e $R_2 = 20\ cm$ è distribuita una carica elettrica con densità uniforme $\rho = 26.58 * 10^{-8}\ \frac{C}{m^3}$.
Determinare l'espressione del campo elettrostatico E(r) in funzione della distanza r dal centro del sistema.
Se un elettrone viene abbandonato sulla superfice esterna, quanto tempo impiega ad attraversare la cavità interna?



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Dividiamo il problema in 3 regioni:
I: $o < r \leq R_1$
II: $R_1 \leq r \leq R_2$
III: $r \geq R_2$

Regione I: $o < r \leq R_1$
E $= 0$

Regione II: $R_1 \leq r \leq R_2$
$\Phi(E) = E * 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$
$q = \int \rho dv = \rho \int dv = \rho \int_{R_1}^{r} 4\pi r^2 dr = \rho \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_{R_1}^{r} = \rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$
$E = \rho \frac{r^3 - R_1^3}{3\epsilon_0 r^2}$

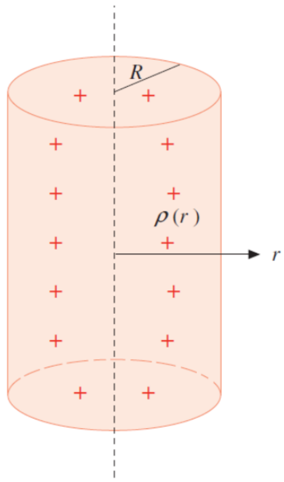
Regione III: $r \geq R_2$
$q = \rho \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$
$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \rho \frac{R_2^3 - R_1^3}{3\epsilon_0 r^2}$

Soluzione punto b

$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(r - \frac{R_1^3}{r^2})dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} + R_1^3\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\right] = 100V$
$E_k = 100\ eV = 1.6 * 10^{-17}\ J$
$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 * 1.6 * 10^{-17}}{9.1 * 10^{-31}}} = 5.93 * 10^6\ \frac{m}{s}$
$t = \frac{l}{v} = \frac{2R_1}{v} = \frac{0.2}{5.93 * 10^6} = 33.7\ nS$

3.5

Una carica è distribuita all'interno di una superfice cilindrica indefinita con densità $\rho = \rho_0(a - br)$ essendo r la distanza dall'asse e ρ_0, a, b costanti. Determinare l'espressione del campo elettrostatico in funzione di r.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

per $0 \leq r \leq R$
$\frac{q(r)}{r} = \lambda(r)$
$\lambda(r) = \int_0^r 2r\pi\rho(r)dr = \int_0^r 2\pi\rho_0(ar - br^2)dr = 2\pi\rho_0 r^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}r\right)$
$E_{int} = \frac{\lambda(r)}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}\left(a - \frac{2}{3}br\right)$
$\lambda(R) = 2\pi\rho_0 R^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}R\right)$
$E_{est} = \frac{\lambda(R)}{2pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r}\left(a - \frac{2}{3}bR\right)$

Soluzione punto b

3.9

Dimostrare che la funzione $V(x,y) = ax^2 + bxy - ay^2$ con a e b costanti può rappresentare una funzione potenziale.
Determinare il campo elettrostatico e la densità di carica $\rho(x,y)$.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Il campo si calcola mediante la relazione $E = -\nabla v$
$E_x = -\frac{\delta v}{\delta x} = -(2ax + by)$
$E_y = -\frac{\delta v}{\delta y} = -(bx - 2ay)$
$E_z = -\frac{\delta v}{\delta z} = 0$
Il campo così calcolato rappresenta effettivamente un campo elettrostatico infatti soddisfa la relazione: $rot\vec{E} = \nabla \wedge E = 0$.
$\frac{\delta E_z}{\delta y} - \frac{\delta E_y}{\delta z} = 0$
$\frac{\delta E_x}{\delta z} - \frac{\delta E_z}{\delta x} = 0$
$\frac{\delta E_y}{\delta x} - \frac{\delta E_x}{\delta y} = 0$
La densità di carica si calcola mediante il teorema di Gauss in locale $div\vec{E} = \nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.
$\frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\rho = \epsilon_0 \left(\frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} \right) = \epsilon_0 \left(-2a + 2a\right) = 0$

Soluzione punto b

Capitolo 4

4.1

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

4.5

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

Capitolo 7

7.1

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

7.4

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

7.6

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

7.7

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

7.10

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

7.11

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

7.12

Una spira quadrata di lato $a = 20cm$ è posta nel piano xy ed è percorsa dalla corrente $i = 5A$ nel verso indicato.
Essa risente dell'azione del campo magnetico $\vec{B} = \alpha x\vec{u_z}$ con $\alpha = 0.2\frac{T}{m}$.
Calcolare la forza F che agisce sulla spira e l'energia potenziale magnetica U_p.

Formule utilizzate

$\vec{F} = i\int_a^b d\vec{s}x\vec{B}$
$U_p = -\vec{m} * \vec{B}$
$\vec{m} = iS\vec{u_n}$

Soluzione punto a

se x = a, $\beta = \alpha a$
sapendo $d\vec{s} \perp \vec{B}$
$\vec{F_{PQ}} = \frac{i\alpha a^2}{2}$
$\vec{F_{QR}} = i\int_Q^R dy\alpha a = i\alpha a[y]_Q^R = i\alpha a^2(\vec{u_x})$
Sommando i quattro vettori capiamo che si annullano le due sulle y
Le forze su y non si annullano perchè dipendono da x, e si azzera solo quella con x = 0 perchè li il campo $vecB = \alpha x$ vale 0 per x = 0.
$\vec{F} = \vec{F_{SP}} + \vec{F_{PQ}} + \vec{F_{QR}} + \vec{F_{RS}} = 0 - \frac{i\alpha a^2}{2}\vec{u_y} + i\alpha a^2\vec{u_x} + \frac{i\alpha a^2}{2}\vec{u_y} = i\alpha a^2\vec{u_x}$

Soluzione punto b

Per la regola della mano destra sappiamo che l'energia potenziale magnetica è uscente dal piano xy.
Però lungo la spira il campo magnetico B non è costante, quindi dobbiamo integrare per ottenere l'energia
$U_p = -\int_\Sigma d\vec{m} * \vec{B}$
$d\Sigma = adx$
$d\vec{m} = id\Sigma\vec{u_n} = iadx\vec{u_n}$
$dU_p = iadx\vec{u_n}\vec{B} = -iadx(\vec{u_z})\alpha x\vec{u_z} = -ia\alpha xdx$
$U_p = -ia\alpha\int_0^a xdx = -\frac{i\alpha a^3}{2}$

7.13

Una spira rettangolare rigida, di lati $\vec{PQ} = \vec{RS} = a = 20cm$ e $\vec{QR} = \vec{SP} = b = 10cm$, ha una massa per unità di lunghezza $\delta = 5 * 10^{-2} \frac{g}{cm}$ ed è percorsa da una corrente.
Essa può ruotare senza attrito intorno a $\vec{PQ}$ che è parallelo all'asse x orizzontale. Quando sulla spira agisce un campo magnetico uniforme e verticale $\vec{B} = B\vec{u_z}$ con $B = 2 * 10^{-2}T$ essa ruota di un angolo $\theta = 30$.
Calcolare il valore della corrente i e il lavoro W fatto dal campo sulla spira durante la rotazione.

Formule utilizzate

$\vec{m} = i\ S\ \vec{u_n} = i\ a\ b\ \vec{u_n}$
$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B} = i\ a\ bBcos\theta\vec{u_x}$
$\vec{M_{peso}} = -2\Delta(a + b)\frac{b}{2}gsen\theta\vec{u_x}$

Soluzione punto a

All'equilibrio: $\vec{M} = \vec{M_{peso}}$
Andiamo a calcolare la forza peso e il momento sui due bracci posti in $\vec{u_z}$
$\vec{M_{PQ}} = \frac{b}{2}sen\theta\Delta b\ g$

Soluzione punto b

da $dW = Md\theta$
otteniamo: $W = \int_0^\theta Md\theta$
$W = iabB\int_0^{30} cos\theta d\theta = iabBsin30$
Alternativamente si poteva calcolare come differenza di energia potenziale
$W = -(U_p^f - U_p^i) = -U_p^f = i \bigtriangleup \phi(\vec{B})) = iabBcos60 = W$

Capitolo 8

8.1

Una bobina rigida quadrata di lato a = 2cm, formata da N = 20 spire compatte, e percorsa da una corrente $i_b = 2A$ ed è posta a distanza y da un filo indefinito percorso da una corrente i = 50A.
Calcolare la forza magnetica $\vec{F}(y)$ che agisce sulla bobina dimostrando che per $y \gg a$, $F = \frac{mdB}{dy}$, se m è il momento magnetico della bobina e B il campo del filo.
Calcolare inoltre il lavoro W_1 compiuto dalla forza magnetica per spostare la bobina da $y_1 = 1cm$ e $y_2 = 2cm$ e il lavoro W_2 compiuto dalla forza magnetica per ruotare di 180° la bobina, quando $y = y_4 = 20cm$.

Formule utilizzate

$\vec{F} = i \int_A^B d\vec{j} \wedge \vec{B}$

Soluzione punto a

il filo percorso da corrente i produce un campo $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}$ con direzione che sarà uscente al di sopra e entrante al di sotto dell'asse x.
in $\vec{PQ}$ il campo magnetico è pari a $B = \frac{\mu \ i}{2\pi y}$
in $\vec{SR}$ il campo magnetico è pari a $B = \frac{\mu \ i}{2\pi(y+a)}$
in $\vec{PS}$ la forza è opposta a quella di $\vec{RQ}$ quindi la forza risultante è nulla, poichè:
$\vec{F_{PS}} = \frac{i^2\mu_0}{2\pi} \int_P^S \frac{1}{y} dy$
$\vec{F_{RQ}} = \frac{i^2\mu_0}{2\pi} \int_R^Q \frac{1}{y} dy$
$\vec{F}(y) = \vec{F_{PQ}} + \vec{F_{RS}} = \frac{\mu_0 \ N \ i \ i_b \ a}{2 \ \pi} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a} \right) \vec{u_y} = \frac{\mu_0 \ N \ i \ i_b \ a^2}{2 \ \pi \ y \ (y+a)} \vec{u_y}$
La forza ottenuta è repulsiva e questo è corente con $\vec{F} = N i_b \bigtriangleup \phi(\vec{B})$ dove $\phi(\vec{B})$ è il flusso del campo magnetico generato attraverso la bobina.
Se la spira si allontana il glusso di B diventa meno negativo, cioè aumenta.
Dato che la bobina percorsa da corrente i_b ha area Na^2 il suo momento magnetico vale:
$vecm = -N \ i_b \ a^2 \ \vec{u_z}$
mentre il filo percorso da una corrente i ad una distanza y produce un campo magnetico B che vale:

$\vec{B} = \frac{\mu_0 \ i}{2\pi y}\vec{u_z}$

Si nota che: $\vec{F} = \bigtriangledown(\vec{m} * \vec{B}) = \bigtriangledown(mB_z) = m\frac{dB_z}{dy}\vec{u_y}$

$F(y) = m\frac{dB}{dy} = -Ni_b a^2 \frac{d}{dy}\left[\frac{\mu_0 \ i}{2\pi y}\right] = \frac{\mu_0 \ N \ i \ i_b \ a^2}{2\pi y^2}$

Soluzione punto b

8.2

Due fili indefiniti distanti 2a=4cm, paralleli all'asse x solo percorsi indicati in figura.
Calcolare il campo magnetico $\vec{B}(z)$ sull'asse dei due fili e a quale distanza dal centro O si arresti un piccolo magnete lanciato con velocità $v_0 = 7.1 * 10^{-2} \frac{m}{s}$ da O lungo l'asse z, di massa $mg = 3.97 * 10^{-2} kg$ e momento magnetico $m = 0.2Am^2$ parallelo e concorde a B.
Si assume che l'asse z orizzontale.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

8.3

Due fili indefiniti distanti 2a =4cm, paralleli all'asse x.
Calcolare il campo magnetic $\vec{B}(z)$ sull'asse dei due fili e a quale distanza dal centro O un piccolo ago magnetico orientato parallelo mentre $\vec{B}$ risente di una forza non nulla.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

8.4

Tre fili conduttori sono tra loro paralleli e disposti ai vertici di un triangolo equilibrato di lato 2a=15cm.
Essi sono percorsi dalla stessa corrente i=10A corrente concorde all'asse x.
Calcolare il cmapo magnetico $\vec{B_c}$ nel centro C del triangolo e la forza F per unità di lunghezza sul filo disposto in P.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

8.6

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

8.7

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

8.8

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

8.10

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

8.11

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

8.12

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

Capitolo 10

10.1

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.2

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.4

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.6

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.7

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.9

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.12

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.15

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.16

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.21

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.23

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

Capitolo 13

13.2

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

13.3

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

13.4

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

13.5

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

13.8

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

13.9

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b