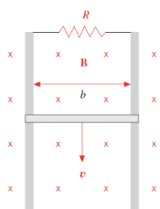
10.7

Due guide conduttrici parallele, distanti $b = 20\ cm$, sono chiuse ad un estermo da un resistore con $R = 4\ \Omega$.
Lungo le guide può scivolare senza attrito, sotto l'azione del proprio peso, una sbarretta conduttrici di massa $m = 10^{-2}\ kg$.
Il dispositivo è immerso in un campo magnetico $B = 1\ T$ uniforme e costante, ortogonale al piano del circuito.
Calcolare come variano nel tempo la velocità v(t) della sbarretta e la corrente i(t), i valori limite v_∞ e i_∞, l'energia W_1 dissipata nel circuito per ogni centimetro percorso dalla sbarretta in queste condizioni.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \qquad \varepsilon_i = vbB$
che tende a generare una corrente $i = \frac{vbB}{R}$ in verso antiorario. Pertanto sulla barretta si esercita una forza verso l'alto pari a: $F_{mag} = \frac{vbB}{R}bB$ opposta alla forza mg.
Da $a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ segue che: $\frac{dv}{dt} = g - \frac{iBb}{m} = g - \frac{B^2b^2}{mR}v$
Separando le variabili e integrando si ha:
$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{g - \frac{B^2b^2}{mR}v} = \int_0^t dt$
$-\frac{mR}{B^2b^2}\left[log\left(g - \frac{B^2b^2}{mR}v(t)\right) - log(g)\right] = t$
$log\left(1 - \frac{B^2b^2}{mgR}v(t)\right) = -\frac{B^2b^2}{mR}t$
$\frac{B^2b^2}{mR} = 1\ s^{-1}$
$v(t) = \frac{mgR}{B^2b^2}\left(1 - e^{\frac{-B^2b^2t}{mR}}\right) = 9.8 * \left(1 - e^{\frac{-B^2b^2t}{mR}}\right)\ \frac{m}{s}$
Di conseguenza: $i(t) = \frac{Bb}{R}v(t) = \frac{mg}{Bb}\left(1 - e^{\frac{-B^2b^2t}{mR}}\right)$
I valori limite sono:

$v_\infty = \frac{mgR}{B^2b^2} = 9.8\ \frac{m}{s}$
$i_\infty = \frac{mg}{Bb} = 0.49\ A$
In condizioni stazionarie l'energia dissipata per ogni spostamento $\Delta x = 1\ cm$ risulta quindi:
$W_1 = Ri_\infty^2 \Delta t = Ri_\infty^2 \frac{\Delta x}{v_\infty} = 9.8 * 10^{-4}\ J$
Uguale alla perdita di energia potenziale gravitazionale della sbarretta ($mg\Delta x$)

Soluzione punto b