3.9

Dimostrare che la funzione $V(x, y) = ax^2 + bxy - ay^2$ con a e b costanti può rappresentare una funzione potenziale.
Determinare il campo elettrostatico e la densità di carica $\rho(x, y)$.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Il campo si calcola mediante la relazione $E = -\nabla v$
$E_x = -\frac{\delta v}{\delta x} = -(2ax + by)$
$E_y = -\frac{\delta v}{\delta y} = -(bx - 2ay)$
$E_z = -\frac{\delta v}{\delta z} = 0$
Il campo così calcolato rappresenta effettivamente un campo elettrostatico infatti soddisfa la relazione: $rot\vec{E} = \nabla \wedge E = 0$.
$\frac{\delta E_z}{\delta y} - \frac{\delta E_y}{\delta z} = 0$
$\frac{\delta E_x}{\delta z} - \frac{\delta E_z}{\delta x} = 0$
$\frac{\delta E_y}{\delta x} - \frac{\delta E_x}{\delta y} = 0$
La densità di carica si calcola mediante il teorema di Gauss in locale $div\vec{E} = \nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.
$\frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\rho = \epsilon_0 \left(\frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} \right) = \epsilon_0 \left(-2a + 2a \right) = 0$

Soluzione punto b