

Esercizi Fisica II

Stefano Giulianelli

Semestre I, 2022/2023

Contents

Cap	Esercizi											
1	2x	3x	8x									
2	1x	5x	7x									
3	2x	3x	5x	9x								
4	1x	5x										
7	1x	4x	6x	7x	10x	11x	12x	13x				
8	1x	2x	3x	4x	6x	7x	8x	10x	11x	12x		
10	1x	2x	4x	6x	7x	9x	12x	13x	15x	16x	21x	23x
13	2x	3x	4x	5x	8x	9x						

x: fatto
r: da rivedere

Dipolo elettrico

$$V(r) = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Cavo omogeneo

$$j = n e v_d$$

$$j = \frac{i}{\Sigma}$$

Altro

Densità di energia magnetica

$$\omega_m = \frac{B^2}{2\mu_r\mu_0}$$

Vettore di poynting

$$|\vec{S}| = \frac{\text{energia}}{\text{area}}$$

Nei superconduttori $x_m = -1$.

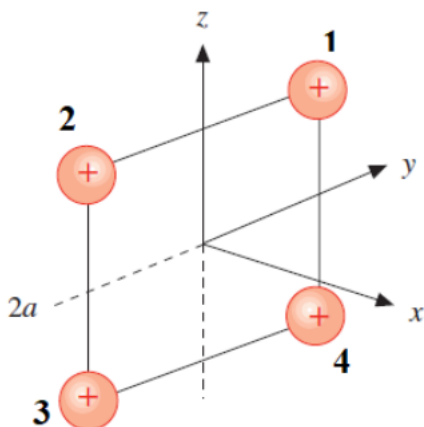
Capitolo 1

1.2

Quattro cariche positive poste ai vertici di un quadrato di lato $2a = 10\text{cm}$ di valore $q = 10^{-8}\text{C}$.

a) Calcolare la forza esercitata dalle altre tre cariche su quella posta nel vettore (a,a) e le espressioni del potenziale e del campo elettrostatico lungo l'asse x .

b) Calcolare inoltre l'energia cinetica con la quale passa per il centro un elettrone abbandonato con velocità nulla in un punto dell'asse x distante $x_0 = 2a$ dal centro.



Formule utilizzate

$$\vec{F}_{i,j} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{i,j}^2} \vec{u}_{i,j}$$

$$\vec{E}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$$

$$V(P) - V(\infty) = \int_x^\infty \vec{E} d\vec{s}$$

$$\vec{E} = \left(-\frac{\delta v}{\delta x}, -\frac{\delta v}{\delta y}, -\frac{\delta v}{\delta z} \right) \quad \Delta E_k + \Delta U_{elettrone} = 0$$

$$\Delta E_k = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4q}{\sqrt{sa^2}} - \frac{4q}{\sqrt{2a^2+4a^2}} \right]$$

Soluzione punto a

Calcolo della forza:

Applico la formula per le 3 particelle

con $q_i = q_j = q$

$$\vec{F}_{2,1} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{2,1}^2} \vec{u}_y \quad \vec{F}_{3,1} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{3,1}^2} \vec{u}_{y,z} \quad \vec{F}_{2,3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{2,3}^2} \vec{u}_z$$

Applico il teorema di sovrapposizione degli effetti:

$$\vec{F} = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2}$$

Calcolo del potenziale e del campo elettrostatico

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \quad \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \quad \vec{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3^2} \quad \vec{E}_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_4^2}$$

con $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \sqrt{2a^2 + x^2}$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{x}{r} \vec{u}_x$$

$$V(P) - V(\infty) = \int_x^\infty \vec{E} d\vec{s}$$

$$V(P) = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0} \int_x^\infty \frac{x}{r^3} dx = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2a^2 + x^2}}$$

$$\vec{E} = \left(-\frac{\delta v}{\delta x}, -\frac{\delta v}{\delta y}, -\frac{\delta v}{\delta z} \right)$$

Soluzione punto b

Calcolare l'energia cinetica di un elettrone con velocità nulla nel punto (2a, 0, 0) che passa in O.

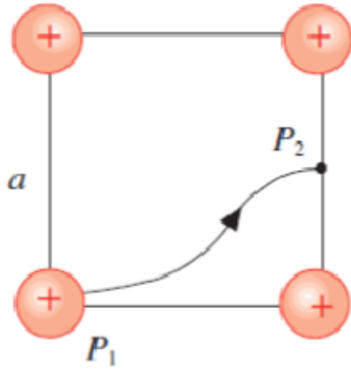
$$\Delta E_k + \Delta U_{elettrone} = 0$$

$$\Delta E_k = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4q}{\sqrt{sa^2}} - \frac{4q}{\sqrt{2a^2 + 4a^2}} \right]$$

1.3

Quattro cariche puntiformi di egual valore $q = 10^{-8}C$ sono poste ai vertici di un quadrato di lato $a = 10 \text{ cm}$.

Calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema e il lavoro necessario per spostare una delle cariche dalla posizione iniziale P_1 al punto P_2 indicato in figura e situato nel centro del lato.



Formule utilizzate

$$U_e[P] = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$
$$W = U_e[P_2] - U_e[P_1]$$

Soluzione

$$U_e[P_1] = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 4.87 * 10^{-5} \text{ J}$$

$$U_e[P_2] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 6.84 * 10^{-5} \text{ J}$$

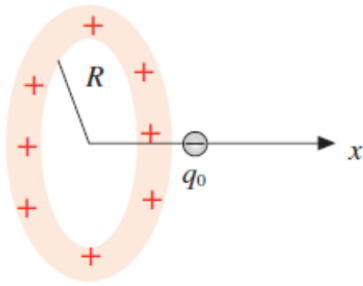
$$W = U_e[P_2] - U_e[P_1] = 1.97 * 10^{-5} \text{ J}$$

1.8

Una particella di massa $m = 10^{-3}kg$ e carica $q_0 = -10^{-10}C$ è posta al centro di un anello di raggio $R = 10\text{ cm}$, su cui è distribuita uniformemente la carica $q = 10^{-8}C$.

La particella viene spostata di un tratto $x_0 = 0.5cm$ lungo l'asse e abbandonata.

Dimostrare che la particella oscilla con moto armonico intorno all'origine e determinare il periodo T delle piccole oscillazioni e l'energia cinetica della particella quando passa per l'origine.



Formule utilizzate

Soluzione

Calcoliamo il campo per ogni infinitesimo di anello.

$$dE_x(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$E_x = \int_{\text{anello}} dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \int_{\text{anello}} dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Se } \left(\frac{x}{R}\right)^2 \ll 1$$

$$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{R^3} \vec{u}_x$$

$$\frac{m}{dt^2} x + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q|q_0|}{R^3} x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{q|q_0|}{4\pi\epsilon_0 m R^3}} = 0.0949 \text{ rad/s}$$

$$\text{con } T = 2\pi/\omega = 66,23 \text{ s}$$

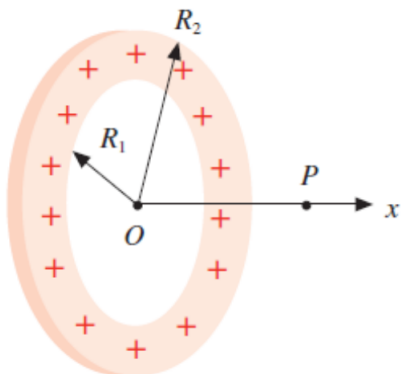
$$E_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_0|}{R^3} \int_0^{x_0} x dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_0|}{2R^3} x_0^2 = 1.13 * 10^{-10} \text{ J}$$

Capitolo 2

2.1

Una carica $q = 1.39 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ è distribuita con densità superficiale uniforme σ su una corona circolare piana di raggio interno $R_1 = 20 \text{ cm}$ e raggio esterno $R_2 = 30 \text{ cm}$.

- Determinare le espressioni del campo elettrostatico $E(\vec{x})$ e del potenziale $V(x)$ sull'asse della corona.
- Calcolare l'energia cinetica con la quale un elettrone libero in un punto P con $x_0 = 20 \text{ cm}$ raggiunge il centro.
- Calcolare la forza agente su un dipolo elettrico di momento $p = p_0 \vec{u}_x$ con $p_0 = 10^{-10} \text{ cm}$, posto in O.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$$\sigma = \frac{q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{1.39 \cdot 10^{-8}}{3.14 \cdot (0.3^2 - 0.2^2)} = 8.85 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$dq = \sigma ds = \sigma 2\pi r dr$$

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R_2^2 + x^2} - \sqrt{R_1^2 + x^2} \right]$$

$$E_x = -\frac{\delta V}{\delta x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{x}{\sqrt{R_2^2 + x^2}} - \frac{x}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} \right]$$

Soluzione punto b

$$\Delta E_k + \Delta U = 0$$

$$E_{k_{fin}} = E_{k_{in}} - e[V_{in} - V_{fin}] = -\frac{e\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R_2^2 + x_0^2} - \sqrt{R_1^2 + x_0^2} - R_2 + R_1 \right] = 111 \text{ eV}$$

Soluzione punto c

$$\vec{F} (\vec{p} * \nabla) \vec{E} = p_0 (\vec{u}_x * \nabla) \vec{E} = p_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta x} \vec{u}_x$$

$$E_x = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{x}{\sqrt{R_2^2 + x^2}} - \frac{x}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} \right]$$

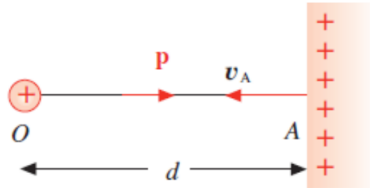
$$\frac{\delta E_x}{\delta x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2 + x^2}} - \frac{x^2}{(R_2^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} + \frac{x^2}{(R_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$F = \frac{p_0 \sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = 8.33 * 10^{-7} \text{ N}$$

2.5

Una carica positiva q distante $d = 40 \text{ cm}$ da un piano indefinito carico con densità $\sigma = 8,86 * 10^{10} \frac{C}{m^2}$. Un dipolo elettrico di momento $p = 10^{12} \text{ Cm}$, parallelo e concorde al vettore OA equidistante dal piano è soggetta a $F = 2.25 * 10^{-9} \text{ N}$.

Calcolare il vettore q e la velocità con cui un elettrone che parte da A con $V_a = 3 * 10^6 \frac{m}{s}$ arriva in B distante $\frac{d}{4}$.



Formule utilizzate

Soluzione

$$V(B) - V(A) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \frac{d}{4}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \right) + \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{3d}{4} - 0 \right) = \frac{3}{4\pi\epsilon_0 d} \left(q - \frac{\pi}{2} \sigma d^2 \right) = 52.47 \text{ V}$$

$$E_k(B) = E_k(A) - e[V(A) - V(B)] = \frac{1}{2} m_e V_A^2 + e[V(B) - V(A)]$$

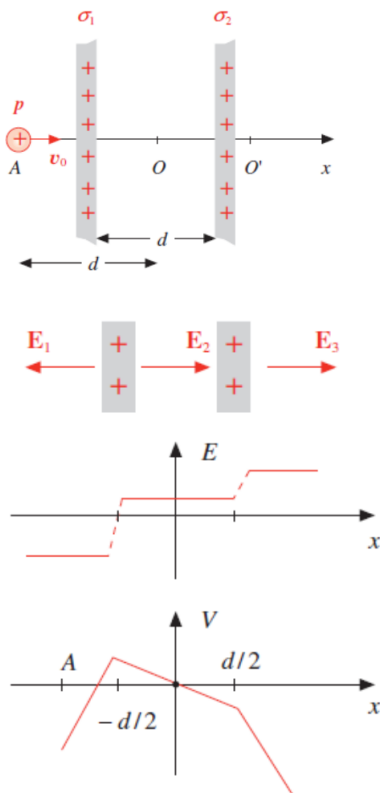
$$V_B = \sqrt{\frac{2E_k(B)}{m_e}} = 5.24 * 10^6 \frac{m}{s}$$

2.7

Due piani indefiniti paralleli, distanti $d = 20 \text{ cm}$, sono carichi con densità uniformi $\sigma_1 = 17.72 * 10^{-8} \frac{C}{m^2}$ e $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}$

a) Determinare il potenziale $V(x)$, ponendolo uguale a 0 nel punto di mezzo O tra i due piani.

b) Determinare l'energia cinetica minima $E_{k_{min}}$ che deve avere un protone nel punto $A(x = -d)$ per giungere in un generico punto O' . Se un elettrone viene lasciato libero in A con $v=0$ dove arriva?



Formule utilizzate

Soluzione punto a

per: $x < -\frac{d}{2}$:

$$E_1 = -\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = \frac{3\sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = 1.5 * 10^4 \vec{u}_x \frac{V}{m}$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_2$$

$$V_1(x) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (3x + 2d)$$

per $-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$:

$$E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = 0.5 * 10^4 \vec{u}_x \frac{V}{m}$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_2$$

$$V_2(x) = -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} x$$

per $x > \frac{d}{2}$

$$E_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = 1.5 * 10^4 \vec{u}_x \frac{V}{m}$$

$$V_3(x) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-3x + d)$$

Per raggiungere la regione $x > \frac{d}{2}$ il protone deve attraversare le barriere del potenziale, cioè deve salire fino al punto di potenziale maggiore a $x = -\frac{d}{2}$. Una volta raggiunto quel punto, verrà spinto completamente a destra. Pertanto l'energia cinetica iniziale deve essere almeno uguale alla differenza di potenziale.

$$\Delta v = v_i(-\frac{d}{2}) - V_1(A) = \frac{3\sigma_2 d}{4\epsilon_0} = 1500V$$

$$E_{k_{min}} = 1.5keV$$

L'elettrone viene accelerato verso dx fino a $x = -\frac{d}{2}$ quindi viene decelerato.

Usando la conservazione dell'energia, l'elettrone si ferma nel punto dell'asse x posto tale che $V(x) = V(a)$.

$$\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-3x + d) = -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} d \text{ per cui } x = \frac{2d}{3} = 13.3 \text{ cm}$$

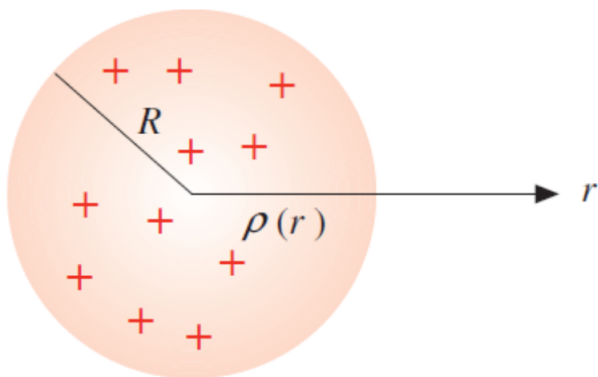
Soluzione punto b

Capitolo 3

3.2

Una carica è distribuita all'interno di una sfera di raggio R con densità non uniforme $\rho(r) = c/r$ essendo c una costante.

Determinare le espressioni del campo elettrostatico $E(x)$ e del potenziale $V(r)$ per $0 \leq r \leq \infty$.



Formule utilizzate

$$\text{Gauss: } \Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \vec{u}_n d\Sigma$$

Soluzione punto a

$$\text{Gauss: } \Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \vec{u}_n d\Sigma \text{ ma se } \vec{E} \parallel \vec{u}_n \rightarrow \vec{E} \vec{u}_n = E$$

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \vec{u}_n d\Sigma = \oint E d\Sigma \text{ ma } E \text{ è costante lungo } d\Sigma$$

$$\Phi(\vec{E}) = E \oint d\Sigma = E \Sigma \text{ con } \Sigma \text{ superficie sferica } \Sigma = 4\pi r^2$$

$$\Phi(\vec{E}) = E_r * 4\pi r^2 \text{ con anche } \phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

per $r \leq R$ (interno sfera)

$$4\pi r^2 E_{int}(r) = \frac{q_{int}(r)}{\epsilon_0}$$

$$\text{con } q_{int}(r) = \int_0^r \frac{c}{r} 4\pi r^2 dr = 2\pi c r^2$$

$$E_{int}(r) = \frac{c}{2\epsilon} \text{ costante}$$

per $r > R$ (esterno sfera)

$$E_{est} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ con } q = 2\pi c R^2$$

$$E_{est} = \frac{cR^2}{2\epsilon_0 r^2} \quad r(r \gg R) = \int_r^\infty E_{est} dr = \frac{cR^2}{2\epsilon_0 r}$$

in particolare $V(R) = \frac{cR^2}{2\epsilon_0}$

Soluzione punto b

per $r \ll R$

$$V(r) - V(R) = \int_r^R E_{int} dr = \frac{C}{2\epsilon_0} (R - r)$$

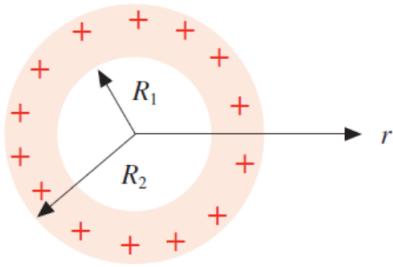
$$V(r) = \frac{c}{2\epsilon_0} (2R - r)$$

$$\text{al centro } V(0) = \frac{cR}{\epsilon_0}$$

3.3

Tra due superfici sferiche concentriche di raggio $R_1 = 10 \text{ cm}$ e $R_2 = 20 \text{ cm}$ è distribuita una carica elettrica con densità uniforme $\rho = 26.58 * 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$. Determinare l'espressione del campo elettrostatico $E(r)$ in funzione della distanza r dal centro del sistema.

Se un elettrone viene abbandonato sulla superficie esterna, quanto tempo impiega ad attraversare la cavità interna?



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Dividiamo il problema in 3 regioni:

I: $0 < r \leq R_1$

II: $R_1 \leq r \leq R_2$

III: $r \geq R_2$

Regione I: $0 < r \leq R_1$

$$E = 0$$

Regione II: $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\Phi(E) = E * 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$q = \int \rho dv = \rho \int dv = \rho \int_{R_1}^r 4\pi r^2 dr = \rho \left[\frac{4}{3}\pi r^3 \right]_{R_1}^r = \rho \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3)$$

$$E = \rho \frac{r^3 - R_1^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Regione III: $r \geq R_2$

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \rho \frac{R_2^3 - R_1^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Soluzione punto b

$$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{R_2^3 - R_1^3}{3} + R_1^3 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] = 100V$$

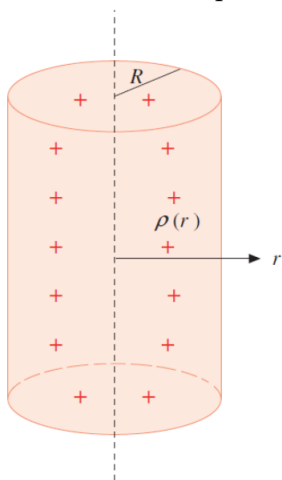
$$E_k = 100 \text{ eV} = 1.6 * 10^{-17} \text{ J}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 * 1.6 * 10^{-17}}{9.1 * 10^{-31}}} = 5.93 * 10^6 \frac{m}{s}$$

$$t = \frac{l}{v} = \frac{2R_1}{v} = \frac{0.2}{5.93 * 10^6} = 33.7 \text{ nS}$$

3.5

Una carica è distribuita all'interno di una superficie cilindrica indefinita con densità $\rho = \rho_0(a - br)$ essendo r la distanza dall'asse e ρ_0 , a , b costanti. Determinare l'espressione del campo elettrostatico in funzione di r .



Formule utilizzate

Soluzione punto a

per $0 \leq r \leq R$

$$\frac{q(r)}{r} = \lambda(r)$$

$$\lambda(r) = \int_0^r 2r\pi\rho(r)dr = \int_0^r 2\pi\rho_0(ar - br^2)dr = 2\pi\rho_0r^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}r\right)$$

$$E_{int} = \frac{\lambda(r)}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \left(a - \frac{2}{3}br\right)$$

$$\lambda(R) = 2\pi\rho_0R^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}R\right)$$

$$E_{est} = \frac{\lambda(R)}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r} \left(a - \frac{2}{3}bR\right)$$

Soluzione punto b

3.9

Dimostrare che la funzione $V(x, y) = ax^2 + bxy - ay^2$ con a e b costanti può rappresentare una funzione potenziale.

Determinare il campo elettrostatico e la densità di carica $\rho(x, y)$.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Il campo si calcola mediante la relazione $E = -\nabla v$

$$E_x = -\frac{\delta v}{\delta x} = -(2ax + by)$$

$$E_y = -\frac{\delta v}{\delta y} = -(bx - 2ay)$$

$$E_z = -\frac{\delta v}{\delta z} = 0$$

Il campo così calcolato rappresenta effettivamente un campo elettrostatico infatti soddisfa la relazione: $rot \vec{E} = \nabla \wedge E = 0$.

$$\frac{\delta E_z}{\delta y} - \frac{\delta E_y}{\delta z} = 0$$

$$\frac{\delta E_x}{\delta z} - \frac{\delta E_z}{\delta x} = 0$$

$$\frac{\delta E_y}{\delta x} - \frac{\delta E_x}{\delta y} = 0$$

La densità di carica si calcola mediante il teorema di Gauss in locale $div \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

$$\frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rho = \epsilon_0 \left(\frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} \right) = \epsilon_0 (-2a + 2a) = 0$$

Soluzione punto b

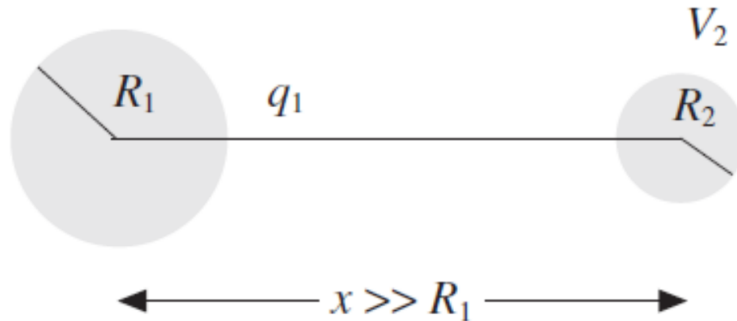
Capitolo 4

4.1

Due sfere conduttrici S_1 e S_2 di raggi R_1 e R_2 sono poste nel vuoto ad una distanza x tra i centri molto grande rispetto a R_1 e R_2 .

La sfera S_1 , isolata, ha una carica q_1 e la sfera S_2 è mantenuta al potenziale V_a rispetto all'infinito.

Calcolare il potenziale $V_1(x)$ della sfera S_1 , la carica $q_2(x)$ della sfera S_2 e la forza $F(x)$ tra le sfere in funzione della distanza x .



Formule utilizzate

$$\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Soluzione punto a

Sfera S_1

$$V_1(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2(x)}{x} \right)$$

Sfera S_2

$$V_2(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2}{R_2} + \frac{q_1(x)}{x} \right)$$

$$\text{Da cui: } q_2(x) = R_2(4\pi\epsilon_0 V_2 - \frac{q_1}{x})$$

$$\text{Per cui: } V_1(x) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{x^2} \right) + \frac{R_2 V_2}{x}$$

$$\text{Forza: } F(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2(x)}{x^2}$$

usando $q_2 = \dots$

$$F(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{x^2} R_2 \left(4\pi\epsilon_0 V_2 - \frac{q_1}{x} \right)$$

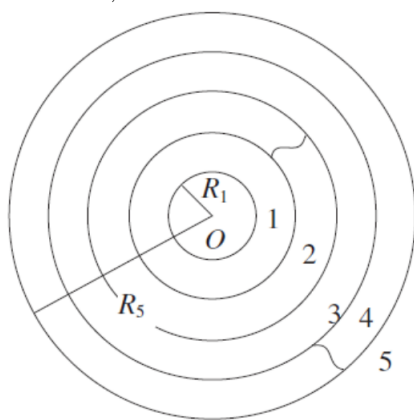
Soluzione punto b

4.5

Cinque fogli metallici sferici di spessore trascurabile tutti concentrici aventi raggio pari a 1, 2, 3, 4, 5 cm sono collegati con sottili fili conduttori come in figura.

Il sistema è inizialmente scarico. Una carica $q = 10^{-10} \text{ C}$ è disposta sulla superficie sferica e l'energia elettrostatica U_e dell'intero sistema.

Determinare inoltre come variano il campo elettrostatico e l'energia elettrostatica quando: la sfera 1 è posta in contatto con la 2, la 3 è posta in contatto con la 4, la 5 con la terra.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Detta $q = q_1$ la carica sulla sfera interna per induzione completa

$$q_2 = -q \quad q_4 = -q \quad q_3 = +q \quad q_5 = +q$$

Per calcolare il campo elettrico sfrutto la legge di Gauss e la simmetria sferica

$$\Phi(E) = E * 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Chiamando I la regione di spazio $r < 1 \text{ cm}$, II quella con $1 \text{ cm} < r < 2 \text{ cm}$ e così via, si ha che.

$$E_I = E_{III} = E_V = 0$$

$$E_{II} = E_{IV} = E_{VI} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

L'energia elettrostatica U_e del sistema si può calcolare dalla sua definizione.

$$U_e = \int_{\tau} dU_e = \int_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

L'integrale si può spezzare sulle varie ragioni di cui si è già calcolato

$$U_e = \int_{\tau} dU_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_r^R \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right]$$

$$U_e = U_e^{II} + U_e^{IV} + U_e^{VI} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right]$$

Collegando oltre alla sfera 2 e 3, 4 e 5, già connesse, anche la 1 alla 2 si ha:

$$E_I = E_{II} = E_{III} = E_V = 0$$

$$E_{IV} = E_{VI} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Dunque calcolando l'energia, rispetto alla situazione di partenza, si azzera il contributo della regione II.

$$\Delta U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right] = -2.2 * 10^{-9} \text{ J}$$

Invece collegando al sfera 2 e 3, 4 e 5 già connesse, anche al 5 a terra si ha che:

$$E_I = E_{III} = E_V = E_{VI} = 0$$

$$E_{II} = E_{IV} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Dunque calcolando l'energia rispetto alla situazione di partenza, si azzera il contributo della regione VI.

$$\Delta U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R_5} \right] = -0.9 * 10^{-9} \text{ J}$$

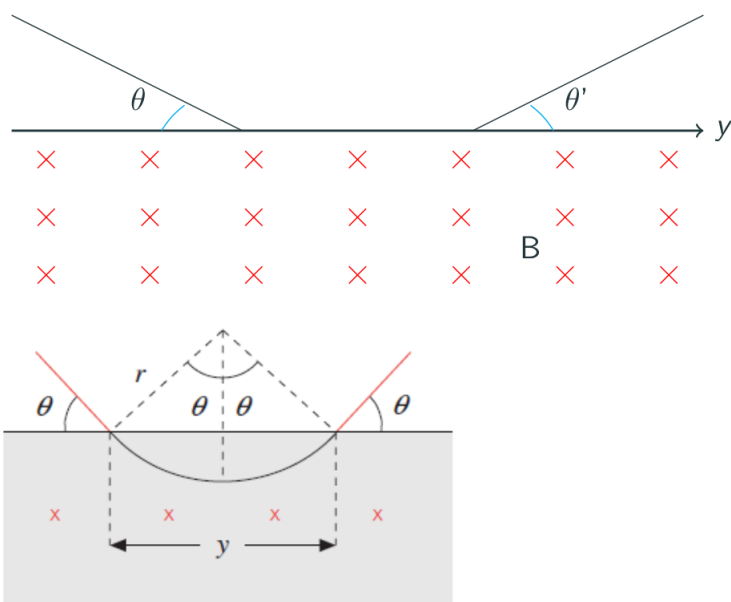
Soluzione punto b

Capitolo 7

7.1

Un protone di energia cinetica $E_k = 6 \text{ MeV}$ entra in una regione di spazio in cui esiste un campo magnetico $B = 1 \text{ T}$ ortogonale al piano della traiettoria, formando con l'asse y l'angolo $\theta = 30^\circ$.

Calcolare l'angolo θ' della direzione di uscita con l'asse y e la distanza lungo y tra il punto d'uscita e di ingresso.



Formule utilizzate

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$|v| = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

Forza di Lorentz sulla carica: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Soluzione punto a

Dato $\vec{F} \perp \vec{s}$

$$\vec{F} = m \frac{v^2}{r} \vec{u}_r$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Indico con α l'angolo che si forma fra il punto di entrata nel campo e il centro O.

$$\theta + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\beta + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\beta = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \theta$$

$$\theta' = \theta = 30$$

$$U\vec{I} = 2I\vec{O}' = 2U\vec{O}'$$

$$I\vec{O}' = r \sin \beta = r \sin \theta$$

Soluzione punto b

$$F = m \frac{v^2}{r} \vec{u}_r \quad F = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$r = \frac{mv}{qB} \quad \text{con } v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

$$r = \frac{mqB}{m} \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = 0.354 \text{ m}$$

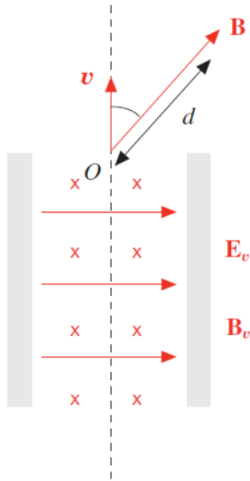
7.4

Da un selettore di velocità, che opera in un campo elettrico $E_v = 10^5 \frac{V}{m}$ e in un campo magnetico $B_v = 0.5 T$ esce un fascio collimato di ioni Li^+ .

Nel punto O, all'uscita del selettore di velocità, il fascio entra in una regione in cui esiste un campo magnetico B uniforme, parallelo al piano del disegno e formante un angolo θ con l'asse x.

Dopo un tempo $t = 6.28 * 10^{-6} s$ un apaticella si è allontanata da O di una distanza $d = 62.8 cm$ percorrendo 10 giri attorno a B.

- Calcolare la velocità degli ioni.
- Calcolare il valore di B.
- Calcolare il valore di θ .
- Calcolare il raggio r della traiettoria elicoidale.



Formule utilizzate

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

Soluzione punto a

$$\vec{F}_L + \vec{F}_e = 0 \text{ ma se } \vec{v} \perp \vec{E} \text{ allora: } |\vec{F}_L| - |\vec{F}_e| = 0$$

$$vB = E \quad v = \frac{E}{B} = 2.0 * 10^5 \frac{m}{s}$$

Soluzione punto b

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\hookrightarrow F_{\perp} = qv_{\perp} \wedge \vec{B}$$

$$\hookrightarrow F_{\parallel} = qv_{\parallel} \wedge \vec{B} = 0$$

Se dopo 10 giri $t_1 = 6.28 * 10^{-6} \text{ s}$

Un giro $t_1 = 6.28 * 10^{-7}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$qB = \frac{mv_{\perp}}{r}$$

$$B = \frac{mv_{\perp}}{rq}$$

Soluzione punto c

$$d = v \cos \theta t$$

$$qvB = \frac{mv^2}{2} \quad qB = \frac{mv}{r} \quad r = \frac{mv}{qB} \quad r = \frac{mv \sin \theta}{qB}$$

Soluzione punto d

7.6

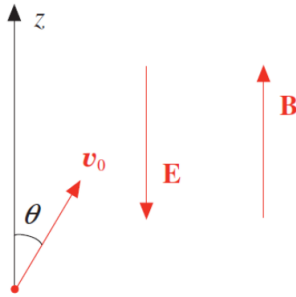
Una regione di spazio è sede di un campo elettrico $E = -E_{\vec{u}_z}$ con $E = 10^5 \frac{V}{m}$ e di un campo magnetico $B = B_{\vec{u}_z}$ con $B = 0.1 T$.

Un protone viene immesso nella regione con $v_0 = 5 * 10^6 \frac{m}{s}$ formando un angolo $\theta = 30$ con l'asse z.

Mostrare che il protone percorre un'orbita elicoidale il cui asse è parallelo all'asse z.

a) Calcolare il raggio r dell'elica e la distanza z_1 percorsa dal protone nel primo giro.

b) Calcolare inoltre la distanza z_0 percorsa prima che il protone inverta il suo moto lungo z.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$$v_{0z} = v_0 \sin \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \cos \theta$$

$$\vec{F}_L = (q \vec{v}_{0y} \wedge \vec{B}) \vec{u}_x$$

Utilizziamo solo la componente y di v perchè z è parallela.

ma v_{0z} non è costante perchè c'è un campo che la modifica, E.

$$v \text{ cala con } \vec{F} = q\vec{E} = -ma$$

$$m_{az} = -qE \quad a_z = -\frac{qE}{m}$$

$$\vec{v}_z = \vec{v}_0 t + \vec{a}_z t = \vec{v}_0 t - \frac{qE}{m} t$$

$$z = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = z_0 + \vec{v}_0 t - \frac{qE t}{m} - \frac{qE t^2}{2}$$

$$z_1 = z \text{ dopo 1 giro}$$

T periodo di rotazione

$$z_y = v_0 \cos \theta T - \frac{1}{2} \frac{q}{m} E T^2$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ con } \omega = \frac{v_0 \sin \theta}{r}$$

Sia z^* lo spazio percorso di fermarsi.

Dall'equazione del moto uniformemente accelerato

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as \quad v_f = 0$$

$$v_i = v_0 \cos \theta \quad a = -\frac{qE}{m} \quad s = z^*$$

abbiamo:

$$(v_0 \cos \theta)^2 = 2\frac{qE}{m}z^*$$

$$z^* = \frac{m_0 v_o^2 \cos^2 \theta}{2qE}$$

Soluzione punto b

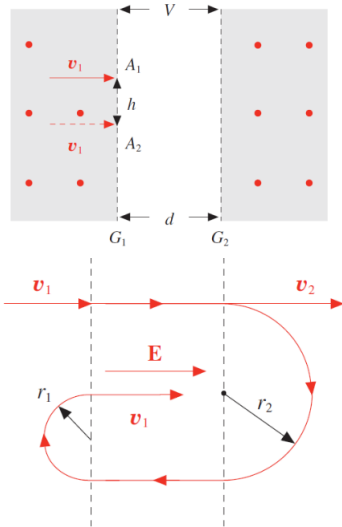
7.7

Due griglie G_1 e G_2 metalliche parallele molto estese distanti $d = 4 \text{ cm}$, tra le quali è applicata una ddp V separando due regioni in cui esiste un campo magnetico $B = 0.8 \text{ T}$ uniforme, ortogonale al foglio.

In un punto A_1 viene iniettato un protone con $vel = v_1$ che a $t_0 = 0$ attraversa la griglia perpendicolarmente.

Dopo un tempo $t = 1.22 * 10^{-7} \text{ s}$ il protone riattraversa G_1 nello stesso verso in un punto A_2 distante $h = 5.2 \text{ cm}$ da A_1 .

Descrivere la traiettoria percorsa dal protone A_1 e A_2 e calcolare la d.d.p. V applicata tra le griglie e la velocità v_1 e v_2 nelle 2 regioni in cui c'è campo.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$$\Delta = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$d = v_m t$$

$$v_m = \frac{v_2 + v_1}{2}$$

$$h = A_1 A_2 = 2(r_2 - r_1)$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = q\Delta V$$

$$\Delta V = \frac{\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)}{q}$$

Soluzione punto b

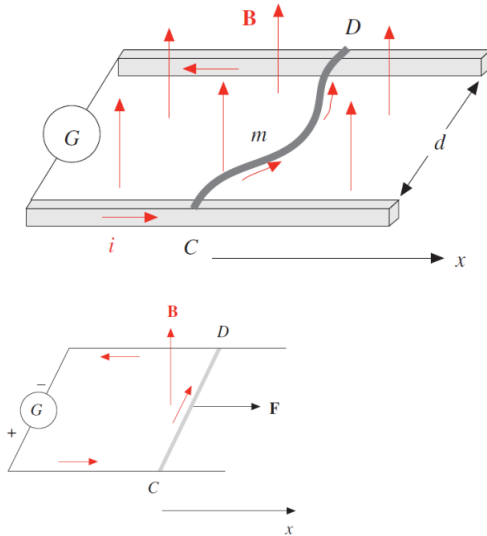
7.10

Un filo metallico rigido di forma qualunque ha due estremi c e n che possono scorrere senza attrito su due rotaie orizzontali distanti $d = 20 \text{ cm}$.

Le rotaie sono poste in un campo magnetico $B = 0.5 \text{ T}$ uniforme e verticale.

Il circuito è percorso da una corrente costante $i = 2 \text{ A}$ fornita dal generatore G.

Se la massa del filo è $m = 2 \text{ g}$ calcolare la velocità v del filo e lo spazio x percorso dopo un tempo $t_1 = 0.15$, nell'ipotesi $t = 0$ il filo sia fermo.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$$\vec{F} = i \int_C^D d\vec{s} \wedge \vec{B} = i \vec{CD} \wedge \vec{B} = i B d \vec{u}_x$$

$$v = \frac{i B d}{m} t_1 = 10 \text{ m/s}$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{i B d}{m} t_1^2 = 0.5 \text{ m}$$

Soluzione punto b

7.11

Una spira quadrata di lato $a = 5 \text{ cm}$ è percorsa da corrente i .

Il momento magnetico della spira è $\vec{m} = m_x \vec{u}_x + B_z \vec{u}_z$ con $B_x = 0.25 \text{ T}$, $B_z = 0.30 \text{ T}$.

Calcolare il valore della corrente i , il modulo del momento meccanico \vec{H} , l'angolo α tra \vec{m} e \vec{B} , l'energia potenziale magnetica U_p .

Formule utilizzate

Soluzione punto a

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = 10^{-3} \text{ Am}^2$$

$$i = \frac{m}{a^2} = 0.4 \text{ A} \text{ dato } i = \frac{m}{s} \text{ cons} = a^2$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = 0.39 \text{ T}$$

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B} = m_y B_z \vec{u}_x - m_x B_z \vec{u}_y - m_y B_x \vec{u}_z$$

$$M = \sqrt{(m_x^2 + m_y^2) B_z^2 + m_y^2 B_x^2}$$

$$M = m B \sin \alpha \sin \alpha = \frac{M}{m B}$$

$$U_p = -\vec{m} \wedge \vec{B} = -m_x B_x$$

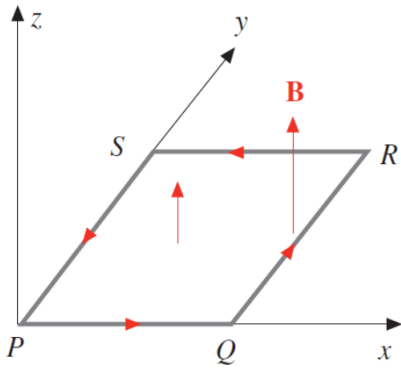
Soluzione punto b

7.12

Una spira quadrata di lato $a = 20\text{cm}$ è posta nel piano xy ed è percorsa dalla corrente $i = 5\text{A}$ nel verso indicato.

Essa risente dell'azione del campo magnetico $\vec{B} = \alpha x \vec{u}_z$ con $\alpha = 0.2 \frac{T}{m}$.

Calcolare la forza F che agisce sulla spira e l'energia potenziale magnetica U_p .



Formule utilizzate

$$\vec{F} = i \int_a^b d\vec{s} \times \vec{B}$$

$$U_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{m} = iS\vec{u}_n$$

Soluzione punto a

se $x = a$, $\beta = \alpha a$

sapendo $d\vec{s} \perp \vec{B}$

$$F_{PQ} = \frac{i\alpha a^2}{2}$$

$$F_{QR} = i \int_Q^R dy \alpha a = i\alpha a[y]_Q^R = i\alpha a^2(\vec{u}_x)$$

Sommando i quattro vettori capiamo che si annullano le due sulle y

Le forze su y non si annullano perchè dipendono da x, e si azzerano solo quella con $x = 0$ perchè lì il campo $vec{B} = \alpha x$ vale 0 per $x = 0$.

$$\vec{F} = \vec{F}_{SP} + \vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{QR} + \vec{F}_{RS} = 0 - \frac{i\alpha a^2}{2}\vec{u}_y + i\alpha a^2\vec{u}_x + \frac{i\alpha a^2}{2}\vec{u}_y = i\alpha a^2\vec{u}_x$$

Soluzione punto b

Per la regola della mano destra sappiamo che l'energia potenziale magnetica è uscente dal piano xy.

Però lungo la spira il campo magnetico B non è costante, quindi dobbiamo integrare per ottenere l'energia

$$U_p = - \int_{\Sigma} d\vec{m} * \vec{B}$$

$$d\Sigma = a dx$$

$$d\vec{m} = id\Sigma \vec{u}_n = i a dx \vec{u}_n$$

$$dU_p = i a dx \vec{u}_n \vec{B} = -i a dx (\vec{u}_z) \alpha x \vec{u}_z = -i a \alpha x dx$$

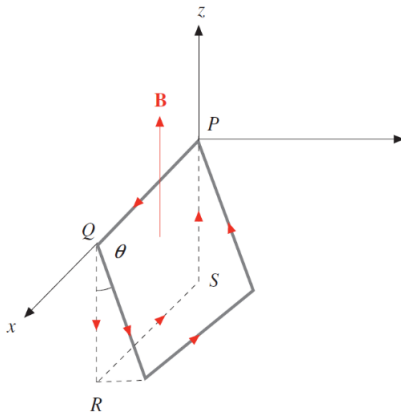
$$U_p = -i a \alpha \int_0^a x dx = -\frac{i a \alpha^3}{2}$$

7.13

Una spira rettangolare rigida, di lati $\vec{PQ} = \vec{RS} = a = 20cm$ e $\vec{QR} = \vec{SP} = b = 10cm$, ha una massa per unità di lunghezza $\delta = 5 * 10^{-2} \frac{g}{cm}$ ed è percorsa da una corrente.

Essa può ruotare senza attrito intorno a \vec{PQ} che è parallelo all'asse x orizzontale. Quando sulla spira agisce un campo magnetico uniforme e verticale $\vec{B} = B\vec{u}_z$ con $B = 2 * 10^{-2}T$ essa ruota di un angolo $\theta = 30$.

Calcolare il valore della corrente i e il lavoro W fatto dal campo sulla spira durante la rotazione.



Formule utilizzate

$$\begin{aligned}\vec{m} &= i S \vec{u}_n = i a b \vec{u}_n \\ \vec{M} &= \vec{m} \wedge \vec{B} = i a b B \cos\theta \vec{u}_x \\ M_{peso} &= -2\Delta(a+b)\frac{b}{2}g \sin\theta \vec{u}_x\end{aligned}$$

Soluzione punto a

All'equilibrio: $\vec{M} = M_{peso}$

Andiamo a calcolare la forza peso e il momento sui due bracci posti in \vec{u}_z

$$M_{PQ} = \frac{b}{2} \sin\theta \Delta b g$$

Soluzione punto b

da $dW = M d\theta$

otteniamo: $W = \int_0^\theta M d\theta$

$$W = iabB \int_0^{30} \cos\theta d\theta = iabB \sin 30$$

Alternativamente si poteva calcolare come differenza di energia potenziale

$$W = -(U_p^f - U_p^i) = -U_p^f = i \Delta \phi(\vec{B}) = iabB \cos 60 = W$$

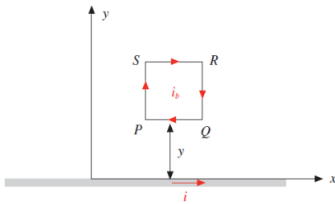
Capitolo 8

8.1

Una bobina rigida quadrata di lato $a = 2\text{cm}$, formata da $N = 20$ spire compatte, e percorsa da una corrente $i_b = 2\text{A}$ ed è posta a distanza y da un filo indefinito percorso da una corrente $i = 50\text{A}$.

Calcolare la forza magnetica $\vec{F}(y)$ che agisce sulla bobina dimostrando che per $y \gg a$, $F = \frac{m dB}{dy}$, se m è il momento magnetico della bobina e B il campo del filo.

Calcolare inoltre il lavoro W_1 compiuto dalla forza magnetica per spostare la bobina da $y_1 = 1\text{cm}$ e $y_2 = 2\text{cm}$ e il lavoro W_2 compiuto dalla forza magnetica per ruotare di 180° la bobina, quando $y = y_4 = 20\text{cm}$.



Formule utilizzate

$$\vec{F} = i \int_A^B d\vec{j} \wedge \vec{B}$$

Soluzione punto a

il filo percorso da corrente i produce un campo $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ con direzione che sarà uscente al di sopra e entrante al di sotto dell'asse x .

in PQ il campo magnetico è pari a $B = \frac{\mu i}{2\pi y}$

in SR il campo magnetico è pari a $B = \frac{\mu i}{2\pi(y+a)}$

in PS la forza è opposta a quella di RQ quindi la forza risultante è nulla, poichè:

$$\vec{F}_{PS} = \frac{i^2 \mu_0}{2\pi} \int_P^S \frac{1}{y} dy$$

$$\vec{F}_{RQ} = \frac{i^2 \mu_0}{2\pi} \int_R^Q \frac{1}{y} dy$$

$$\vec{F}(y) = \vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{RS} = \frac{\mu_0 N i i_b a}{2\pi} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a} \right) \vec{u}_y = \frac{\mu_0 N i i_b a^2}{2\pi y(y+a)} \vec{u}_y$$

La forza ottenuta è repulsiva e questo è corente con $\vec{F} = Ni_b \triangle \phi(\vec{B})$ dove $\phi(\vec{B})$ è il flusso del campo magnetico generato attraverso la bobina.

Se la spira si allontana il flusso di B diventa meno negativo, cioè aumenta.
 Dato che la bobina percorsa da corrente i_b ha area Na^2 il suo momento magnetico vale:

$$\vec{m} = -N i_b a^2 \vec{u}_z$$

mentre il filo percorso da una corrente i ad una distanza y produce un campo magnetico B che vale:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi y} \vec{u}_z$$

Si nota che: $\vec{F} = \nabla(\vec{m} * \vec{B}) = \nabla(mB_z) = m \frac{dB_z}{dy} \vec{u}_y$

$$F(y) = m \frac{dB}{dy} = -N i_b a^2 \frac{d}{dy} \left[\frac{\mu_0 i}{2\pi y} \right] = \frac{\mu_0 N i i_b a^2}{2\pi y^2}$$

$$W_1 = \int_{y_1}^{y_2} F dy = \frac{\mu_0 N i i_b a}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a} \right) dy = \frac{\mu_0 N i i_b a}{2\pi} \ln \left(\frac{y_2(y_1+a)}{y_1(y_2+a)} \right)$$

Soluzione punto b

$$W_2 = \Delta U_p = U_p(f) - U_p(i) = -\vec{m} * \vec{B} + \vec{m} * \vec{B}$$

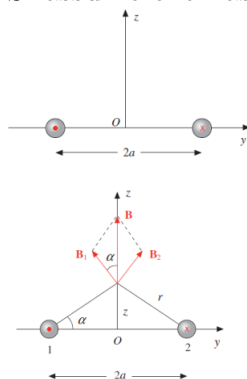
$$m = iS = ia^2 = mi = mf$$

8.2

Due fili indefiniti distanti $2a=4\text{cm}$, paralleli all'asse x solo percorsi indicati in figura.

Calcolare il campo magnetico $\vec{B}(z)$ sull'asse dei due fili e a quale distanza dal centro O si arresti un piccolo magnete lanciato con velocità $v_0 = 7.1 * 10^{-2} \frac{m}{s}$ da O lungo l'asse z , di massa $m_g = 3.97 * 10^{-2} kg$ e momento magnetico $m = 0.2 Am^2$ parallelo e concorde a B .

Si assume che l'asse z orizzontale.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \vec{u}_\phi}{2\pi r} \text{ con } r = \sqrt{a^2 + z^2} \quad \alpha = \frac{a}{r}$$

$$B_{1z} = B_1 \cos \alpha \quad B_{1y} = -B_1 \sin \alpha$$

$$B_{2z} = B_2 \cos \alpha \quad B_{2y} = B_2 \sin \alpha$$

$$B_z = B_{1z} + B_{2z} \quad B_y = 0$$

Soluzione punto b

$$\Delta U = U(f) - U(i) = -mB_f + mB_i$$

$$\text{con } v_i = v_0 \quad v_f = 0$$

$$\Delta E_c = -\Delta U_p$$

$$E_c(0) + U_p(0) = E_c(z) + U_p(z)$$

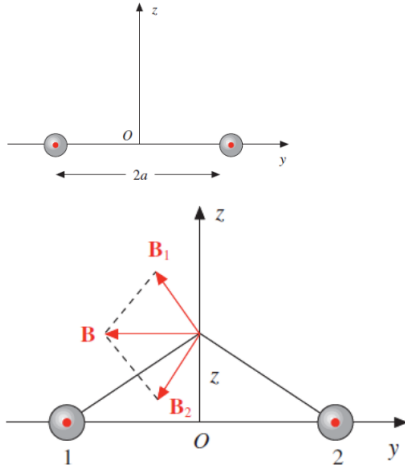
$$E_c(z) = 0 \quad U_p = -mB$$

$$B(0) = \frac{\mu_0 i a}{\pi a^2} = \frac{\mu_0 i}{\pi a}$$

8.3

Due fili indefiniti distanti $2a = 4\text{cm}$, paralleli all'asse x .

Calcolare il campo magnetico $\vec{B}(z)$ sull'asse dei due fili e a quale distanza dal centro O un piccolo ago magnetico orientato parallelamente a \vec{B} risente di una forza non nulla.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$$B_{1z} + B_{2z} = B_z = 0$$

$$B_{1y} + B_{2y} = 2B_{1y} = B_y = 2(B_1 \sin \alpha)$$

$$\vec{B} = 2 \frac{\mu_0 i}{2\pi \sqrt{a^2 + z^2}} \sin \alpha \vec{u}_y = \frac{\mu_0 i z}{\pi (a^2 + z^2)} \vec{u}_y$$

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} * \vec{B}) = \nabla(mBy)$$

$$F = m \frac{dB_y}{dz} = 0$$

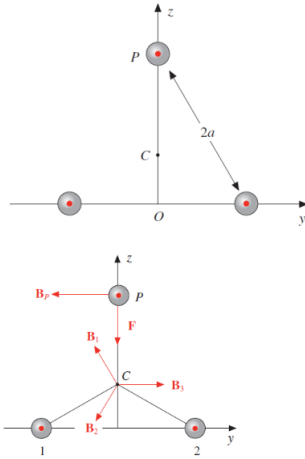
$$\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{a^2 + z^2 - 2z^2}{(a^2 + z^2)^2} = 0$$

Soluzione punto b

8.4

Tre fili conduttori sono tra loro paralleli e disposti ai vertici di un triangolo equilatero di lato $2a=15\text{cm}$.

Essi sono percorsi dalla stessa corrente $i=10\text{A}$ corrente concorde all'asse x. Calcolare il campo magnetico \vec{B}_c nel centro C del triangolo e la forza F per unità di lunghezza sul filo disposto in P.



Formule utilizzate

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 i \sqrt{3}}{4\pi a} \vec{u}_x \text{ per } z = a\sqrt{3}$$

Soluzione punto a

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = 0$$

$$\vec{F} = i \int d\vec{g} \wedge \vec{B} = i \int ds B = iB \int ds$$

$$\vec{B}_p = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

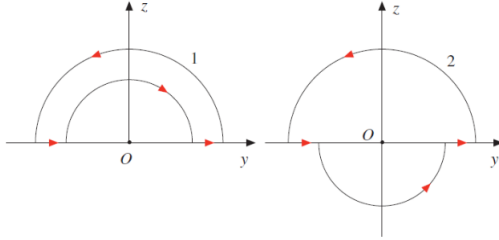
$$\vec{B}_c = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

Soluzione punto b

8.6

Nei due circuiti in figura i raggi delle semicirconfereze sono $a = 10 \text{ cm}$ e $b = 15 \text{ cm}$.

- Se la corrente vale $i = 20 \text{ A}$ calcolare per entrambi il campo magnetico \vec{B}_0 nel centro O delle semicirconfereze.
- Calcolare il momento magnetico \vec{m} .



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Il campo magnetico in O generato da ogni semicerchio si trova dimezzando l'espressione del campo di una spira circolare al centro della spira oppure applicando direttamente la prima legge elementare di Laplace.

Nominando i 4 punti sull'asse y come A, B, C, D partendo da sinistra:

$$B_{AB}(O) = B_{CD}(O) = 0 \text{ poich\`e paralleli a } \vec{u}_r$$

$$B_{BC}(O) = \int_B^C \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \wedge \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \int_B^C ds (-\vec{u}_x) \text{ con } \int_B^C = \pi a$$

Stesso procedimento per B_{DA} ma con direzione \vec{u}_x

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4b} \vec{u}_x - \frac{\mu_0 i}{4a} \vec{u}_x$$

essendo che i due tratti rettilinei danno contributo nullo ($d\vec{s} \parallel \vec{u}_r$).

Numericamente:

$$B_O = \frac{1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 20}{4} \left(\frac{1}{0.15} - \frac{1}{0.1} \right) = -2.1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Per il secondo campo:

B_{AB} , B_{CD} , B_{DA} sono uguali a prima, mentre B_{BC} ha segno opposto.

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4b} \vec{u}_x + \frac{\mu_0 i}{4a} \vec{u}_x$$

Numericamente:

$$B_0 = \frac{1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 20}{4} \left(\frac{1}{0.15} + \frac{1}{0.1} \right) = 10.5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Soluzione punto b

Nella prima situazione:

$$\vec{m} = i\frac{\pi}{2} (b^2 - a^2) \vec{u}_x = 0.39\vec{u}_x \text{ Am}^2$$

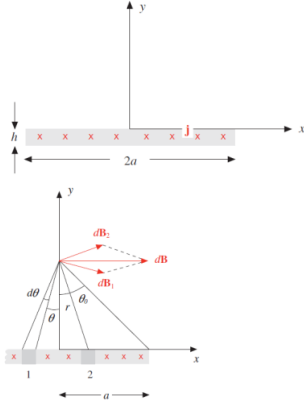
Nella seconda situazione:

$$\vec{m} = i\frac{\pi}{2} (b^2 + a^2) \vec{u}_x = 1.02\vec{u}_x \text{ Am}^2$$

8.7

Una lamina conduttrice infinitamente lunga, di sezione rettangolare con lati $2a = 10 \text{ cm}$ e con $h = 0.1 \text{ cm}$ è percorsa da una corrente di densità uniforme $j = 2 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$.

- a) Calcolare il campo magnetico lungo l'asse y della lamina e il momento meccanico \vec{M} che agisce su un piccolo ago magnetico di momento $m = 0.2 \vec{u}_y \text{ Am}^2$, posto a distanza $y_0 = 4 \text{ cm}$ dalla lamina.
- b) Dimostrare che per $a \rightarrow \infty$ si ottengono i risultati dell'esercizio 8.8 e per $2a \ll y$ i risultati dell'esercizio 8.5.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

La corrente che scorre in un elemento infinitesimo di lamina di larghezza dx è :

$$di = jhdx$$

Ogni coppia di elementi infinitesimi, simmetrica rispetto all'asse, contribuirà al campo magnetico con:

$$d\vec{B} = d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 = 2 \frac{\mu_0 di}{2\pi r} \cos \theta \vec{u}_x$$

$$y \tan \theta = x \rightarrow \frac{y}{\cos^2 \theta} d\theta = dx \rightarrow \frac{y}{\cos \theta} d\theta = \cos \theta dx \rightarrow r d\theta = \cos \theta dx$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 j h}{\pi} d\theta \vec{u}_x$$

Integrando su tutta la lamina si ottiene il campo totale lungo l'asse:

$$\vec{B} = \int_0^{\theta_0} d\vec{B} = \int_0^{\theta_0} \frac{\mu_0 j h}{\pi} d\theta \vec{u}_x = \frac{\mu_0 j h}{\pi} \theta_0 \vec{u}_x$$

L'angolo massimo θ_0 , corrisponde alla coppia di elementi infinitesimi più lontani dall'asse è:

$$\theta_0 = \arctan \frac{a}{y}$$

Quindi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j h}{\pi} \arctan \frac{a}{y} \vec{u}_x$$

Il momento meccanico che agisce sull'ago magnetico è:

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B} = -m \frac{\mu_0 j h}{\pi} \arctan \frac{a}{y} \vec{u}_z = 2.87 * 10^{-4} \vec{u}_z [\text{Nm}]$$

Soluzione punto b

Vediamo adesso il comportamento di \vec{B} nei limiti per a tendente all'infinito

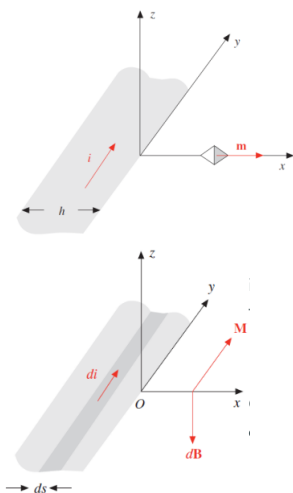
e $2a \ll y$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \vec{B} \lim_{\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \vec{B} \frac{\mu_0 j h}{2} \vec{u}_x$$

8.8

Una sottile striscia metallica di larghezza $h = 2 \text{ cm}$ è percorsa dalla corrente $i = 10 \text{ A}$.

Calcolare il valore del campo magnetico $\vec{B}(x)$ a distanza x dal bordo della striscia (in particolare $x \gg h$) e il momento meccanico \vec{M} che agisce su un piccolo ago magnetico di momento $\vec{m} = 0.1 \vec{u}_x \text{ Am}^2$ posto a distanza $x = 1 \text{ cm}$



Formule utilizzate

$$\Phi \vec{B} = \frac{\mu_0 di}{2\pi(x+s)}$$

Soluzione punto a

$$di = \frac{i \, dx}{h}$$

Chiamo s la distanza fra il filo e il bordo. Quindi il campo sul ago avrà direzione $-\vec{u}_z$

$$\Phi \vec{B} = \frac{\mu_0 di}{2\pi(x+s)}(-\vec{u}_z)$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 di}{2\pi(x+s)}(-\vec{u}_z)$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi h} \int_P^h \frac{ds}{x+s}(-\vec{u}_z) = \frac{\mu_0 i}{2\pi h} [\ln(x+s)]_{s=0}^{s=h}(-\vec{u}_z)$$

Se $x \gg h$

$$\vec{B} = \int_0^h d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi h} \int_0^h \frac{ds}{x+s}(-\vec{u}_z) = \frac{\mu_0 i}{2\pi h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)(-\vec{u}_z)$$

$$\text{per } x \gg h: \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{x}(-\vec{u}_z) = 0$$

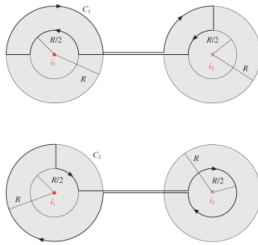
Soluzione punto b

Da fare

8.10

Due conduttori cilindrici molto lunghi di raggio R , paralleli tra loro a notevole distanza l'uno dall'altro, sono percorsi dalle correnti i_1 e i_2 in versi opposti. La circuitazione del campo magnetico lungo i percorsi chiusi C_1 e C_2 indicati in figura vale rispettivamente $\Gamma_1(B) = 0$ e $\Gamma_2(B) = -20\pi * 10^{-7} \text{ Tm}$.

Calcolare i_1 e i_2 .



Formule utilizzate

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 i_{conc}$$

Soluzione punto a

Sappiamo che $C_1 = \oint \vec{B} d\vec{s} = 0$ e $C_2 = \oint \vec{B} d\vec{s} = -20\pi * 10^{-7} \text{ Tm}$

$$i_{conc} = i_A + i_B$$

utilizzando una proporzione $i_A * \frac{1}{2}\pi \left(R^2 - \frac{R^2}{4} \right) = i_1 \pi R^2$

$$i_A = i_1 * \frac{3}{8} \text{ e } i_B = \frac{3}{16} i_2$$

i_A avrà segno negativo, invece i_B ha segno positivo

$$\text{otteniamo: } \Gamma_1(\vec{B}) = \mu_0 (-i_A + i_B) = -\frac{3}{8}\mu_0 \left(i_1 - \frac{i_2}{2} \right) = 0$$

Stesso procedimento per la seconda situazione:

$i_A = \frac{13}{16} i_1$ negativo. $i_B = \frac{1}{4} i_2$ positivo. La corrente è proporzionale alla superficie.

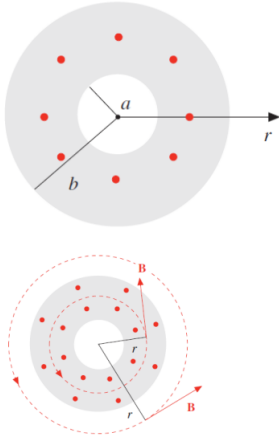
Soluzione punto b

8.11

Un conduttore cilindrico cavo di raggi a e b è percorso da una corrente distribuita uniformemente.

Calcolare il campo magnetico $B(r)$ in funzione della distanza r dall'asse.

Ricavare i risultati relativi ad un conduttore cilindrico pieno.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Dato che questa è una simmetria cilindrica posso semplificare la formula di Ampere.

$$B(r)2\pi r = \mu_0 i_{conc}$$

$$\text{se } r < a: B(r) = 0$$

$$\text{se } a < r < b: B(r)2\pi r = \mu_0 i_{conc} \text{ con } i_{conc} = \frac{\pi(r^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)} i$$

$$\text{se } r > b: B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Soluzione punto b

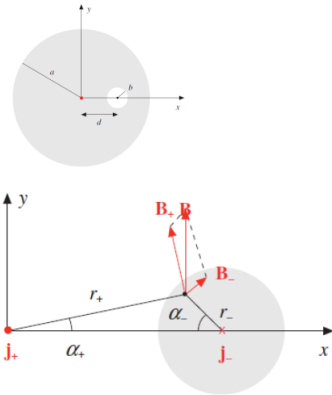
Naso del cilindro pieno: ovvero quando $a = 0$. Posso utilizzare le funzioni trovate precedentemente con $a = 0$.

8.12

Un conduttore cilindrico molto lungo di raggio $a = 2 \text{ cm}$ ha nel suo interno una cavità cilindrica di raggio $b = 0.3 \text{ cm}$, essa pure molto lunga. Gli assi dei due cilindri sono paralleli e distano $d = 1 \text{ cm}$. Nel conduttore fluisce una corrente $i = 20 \text{ A}$, distribuita uniformemente.

Dimostrare che il campo magnetico \vec{B} all'interno della cavità è costante, calcolandone modulo e direzione.

Calcolare inoltre l'energia magnetica e l'induttanza per unità di lunghezza del conduttore.



Formule utilizzate

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 i_{conc}$$

Soluzione punto a

Per risolvere questo problema, che sembra non avere semplificazione poichè non ha simmetria, in realtà possiamo considerare il foro interno come la somma di due campi opposti che si annullano fra loro.

A questo punto troviamo ad avere il campo di un cilindro + una carica inversa in un cilindro più piccolo interno. Questo si può fare per il principio di sovrapposizione.

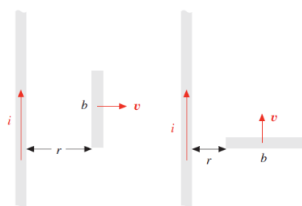
Soluzione punto b

Capitolo 10

10.1

Una sbarretta conduttrice di lunghezza b si muove con velocità v costante e ortogonale ad un filo rettilineo indefinito per corso dalla corrente i . Calcolare la tensione ai capi della sbarretta in funzione della distanza r dal filo.

Ripetere il calcolo quando la sbarretta si muove con velocità costante parallela al filo e l'estremo più vicino al filo dista da r .



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Per la legge di Biot-Savart $\vec{B} = \frac{\mu_0 i \vec{u}_\phi}{2\pi r}$

Integrando su tutta la barra lunga b , otteniamo la forza elettromotrice $\varepsilon_1 =$

$$\int_0^b \vec{E}_i d\vec{s} = \int_0^b \vec{v} \wedge \vec{B} ds = \frac{\mu_0 i v b}{2\pi r}$$

$$\text{Analogamente: } \varepsilon_2 = \int_r^{r+b} \vec{E}_i d\vec{s} = \int_r^{r+b} \vec{v} \wedge \vec{B} ds = -\frac{\mu_0 i v}{2\pi} \int_r^{r+b} \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 i v}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{b}{r}\right)$$

Il segno indica che ha potenziale maggiore l'estremo più vicino al filo.

Soluzione punto b

Si scriva lo stesso risultato anche ragionando con il flusso tagliato, ovvero tenuto conto che il flusso Φ è il prodotto del campo magnetico B per l'area Σ che viene "tagliata" dal flusso.

$$\Phi = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\Sigma$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$d\Sigma = b dx \quad d\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} b dx$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i b}{2\pi r} \int_0^x dx = \frac{\mu_0 i b x}{2\pi r}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 i b}{2\pi r} v$$

Utilizzando il flusso tagliato con $d\Sigma = ydr$:

$$d\Phi = \frac{\mu_0 i y}{2\pi r} y dr$$

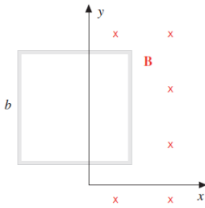
$$\Phi = \frac{\mu_0 i y}{2\pi} \int_r^{r+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i y}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{b}{r} \right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} v \ln \left(1 + \frac{b}{r} \right)$$

10.2

Una spira conduttrice quadrata, di lato $b = 20 \text{ cm}$, massa $m = 4 \text{ g}$, resistenza $R = 25 \Omega$, si muove senza attrito sul piano x,y con velocità costante $v_0 = 4 * 10^{-2} \frac{m}{s}$. Per $x \geq 0$ esiste un campo magnetico uniforme e costante di valore $B = 0.5 \text{ T}$ e la spira entra in questa regione all'istante $t = 0$.

Calcolare la velocità v_1 raggiunta dalla spira dopo $t_1 = 2.9 \text{ s}$ sapendo che in quell'istante la spira è ancora soltanto parzialmente inserita nel campo, l'energia dissipata nel circuito fino al tempo t_1 , la velocità v_2 , la carica q che circola nella spira durante l'intero processo.



Formule utilizzate

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\varepsilon_i = vBb$$

$$i = \frac{vbB}{R}$$

Soluzione punto a

La forza sul lato destro in movimento del circuito vale:

$$F = ibB = \frac{vb^2B^2}{R} \text{ opposta al moto.}$$

$$\text{Il moto diventa } m \frac{dv}{dt} = -\frac{vb^2B^2}{R}$$

$$\log \frac{v(t)}{v_0} = -\frac{b^2B^2}{mR}t$$

Il moto risulta esponenzialmente smorzato

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\text{Con costante di tempo: } \tau = \frac{mR}{b^2B^2} = 10 \text{ s}$$

$$v_1 = v_0 \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = 3 * 10^{-2} \frac{m}{s}$$

Il lavoro si trova come variazione di energia cinetica della barra

$$W = \frac{1}{2}m(v_0^2 - v_1^2) = 1.4 * 10^{-6} \text{ J}$$

Questa energia è stata dissipata in effetto Joule. Infatti:

$$i = \frac{m}{bB} \frac{dv}{dt} = \frac{m}{bB} \frac{v_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{v_0}{R} bB \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

da cui l'energia dissipata per effetto Joule è:

$$W = \int_0^t Ri^2 dt = R \frac{v_0^2}{R^2} b^2 B^2 \int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{v_0^2 b^2 B^2}{R} \frac{\tau}{2} \left[1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right] = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right] = 1.4 * 10^{-6} J$$

Esprimendo la velocità in funzione di x:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{1}{v} = -\frac{1}{\tau}$$

Tale equazione integrata:

$$v(x) = v_0 - \frac{x}{\tau}$$

Quando la spira è totalmente entrata la velocità rimane costante e pari a:

$$v_2 = v_0 - \frac{b}{\tau} = 2.10^{-2} \frac{m}{s}$$

Usando l'espressione per v(t):

$$v_2 = v_0 \exp\left(-\frac{t_2}{\tau}\right) \quad t_2 = \tau \ln\left(\frac{v_0}{v_2}\right) = 6.9 s$$

Soluzione punto b

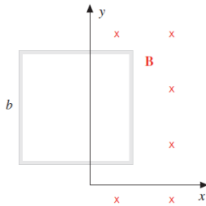
Per calcolare la carica che circola nella spira nell'intero processo si applica la legge di Faraday:

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{Bb^2}{R} = 8 * 10^{-4} C$$

10.4

Una spira quadrata di lato $b = 9 \text{ cm}$, massa $m = 5 \text{ g}$ e resistenza $R = 10^{-3} \Omega$, si muove con velocità costante $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ lungo l'asse z . All'istante $t = 0$ il suo lato anteriore comincia ad entrare nella regione $x \geq 0$ in cui esiste campo magnetico \vec{B} , ortogonale al piano della spira, dipendente da x secondo la legge $B(x) = \alpha x$ con $\alpha = 2 \frac{\text{T}}{\text{m}}$.

Calcolare la forza $F(x)$ che agisce sulla spira, la velocità $v(x)$ della spira e in particolare $v(x = b)$, la carica q che circola nella spira.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Il campo elettromotore: $\vec{E}_i = \frac{F}{q} = \vec{v} \wedge \vec{B}$

Che produce una f.e.m. $\varepsilon_i = \int \vec{E}_i d\vec{s} = vb\alpha x$

$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{vb\alpha x}{R}$ in verso antiorario.

$F(x) = ibB = b^2\alpha^2 x^2 \frac{v}{R}$ opposta al moto.

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{b^2\alpha^2}{R} x^2 v$$

$$dv = -\frac{b^2\alpha^2}{mR} x^2 dx$$

$$\int_{v_0}^{v(x)} dv = -\frac{b^2\alpha^2}{mR} \int_0^x x^2 dx$$

$$v(x) = v_0 - \frac{b^2\alpha^2}{3mR} x^3 = 5 - 2160 x^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v(x = b) = 5 - 2160 * 0.09^3 = 3.43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Usando la legge di Faraday:

$$q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{1}{R} b \int_0^b \alpha x dx = \frac{\alpha b^3}{2R} = 0.73 \text{ C}$$

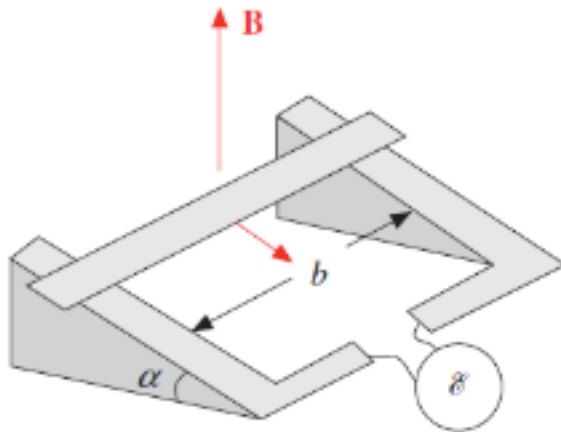
Soluzione punto b

10.6

Una sbarra orizzontale di lunghezza $b = 20 \text{ cm}$, sezione Σ , densità $\delta = 3 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, resistività $\rho = 2 \cdot 10^{-5} \Omega \text{m}$ può scivolare senza attrito su due guide parallele, separate dalla distanza b e inclinate di un angolo $\alpha = 30$ rispetto al piano orizzontale.

Le due guide, di resistenza trascurabile, sono collegate ad un generatore di f.e.m. ε . Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.3 \text{ T}$ diretto secondo la verticale.

Calcolare il valore di ε affinché la sbarra rimanga ferma, la velocità limite v_∞ con cui la sbarra scende se il generatore viene sostituito da un corto circuito, la potenza dissipata nella sbarra quando essa scende con velocità v_∞ . (per quest'ultima domanda si assuma $\Sigma = 1 \text{ cm}^2$).



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Sulla sbarra agiscono due forze: la forza peso e quella associata al conduttore percorso da corrente in una regione in cui è presente un campo magnetico.

La sbarra sarà ferma quando le componenti tangenti al piano sono uguali e opposte (con i che fluisce in verso antiorario): $\frac{\varepsilon}{R} B b \cos \alpha = m g \sin \alpha$

Ovvero quando: $\varepsilon = R \frac{R m g}{b B} \tan \alpha = \frac{\rho b \delta b \Sigma g}{\Sigma b B} \tan \alpha = \frac{\rho \delta b g}{B} \tan \alpha = 0.226 \text{ V}$

Se il generatore viene sostituito da un corto circuito, la barra comincia a muoversi e si produce una fem che dalla regola del flusso tagliato vale $\varepsilon = B b \cos \alpha v$ cui corrisponde una forza "viscosa" frenante la cui componenete

parallela al piano è: $F_{viscosa} = \frac{B^2 b^2 \cos^2 \alpha}{R} v$ opposta alla direzione del moto.

A regime, detta v_∞ la velocità limite: $\frac{B^2 b^2 \cos^2 \alpha}{R} v_\infty = mg \sin \alpha$

Da cui si calcola la velocità con cui scende la sbarra $v_\infty = \frac{mR}{b^2} \frac{g}{R^2} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} =$
 $\frac{\rho \delta g}{R^2} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 4.36 \frac{m}{s}$

Infine la potenza dissipata: $P = \vec{F}_g \cdot \vec{v} = mg \sin \alpha v_\infty = \delta \Sigma b g \sin \alpha v_\infty =$
 $1.28 W$

Soluzione punto b

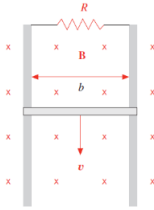
10.7

Due guide conduttrici parallele, distanti $b = 20 \text{ cm}$, sono chiuse ad un estermo da un resistore con $R = 4 \Omega$.

Lungo le guide può scivolare senza attrito, sotto l'azione del proprio peso, una sbarretta conduttrici di massa $m = 10^{-2} \text{ kg}$.

Il dispositivo è immerso in un campo magnetico $B = 1 \text{ T}$ uniforme e costante, ortogonale al piano del circuito.

Calcolare come variano nel tempo la velocità $v(t)$ della sbarretta e la corrente $i(t)$, i valori limite v_∞ e i_∞ , l'energia W_1 dissipata nel circuito per ogni centimetro percorso dalla sbarretta in queste condizioni.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \quad \varepsilon_i = vbB$$

che tende a generare una corrente $i = \frac{vbB}{R}$ in verso antiorario. Pertanto sulla barretta si esercita una forza verso l'alto pari a: $F_{mag} = \frac{vbB}{R}bB$ opposta alla forza mg .

Da $a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ segue che: $\frac{dv}{dt} = g - \frac{iBb}{m} = g - \frac{B^2b^2}{mR}v$

Separando le variabili e integrando si ha:

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{g - \frac{B^2b^2}{mR}v} = \int_0^t dt$$

$$-\frac{mR}{B^2b^2} \left[\log \left(g - \frac{B^2b^2}{mR}v(t) \right) - \log(g) \right] = t$$

$$\log \left(1 - \frac{B^2b^2}{mgR}v(t) \right) = -\frac{B^2b^2}{mR}t$$

$$\frac{B^2b^2}{mR} = 1 \text{ s}^{-1}$$

$$v(t) = \frac{mgR}{B^2b^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2b^2}{mR}t} \right) = 9.8 * \left(1 - e^{-\frac{B^2b^2}{mR}t} \right) \frac{m}{s}$$

$$\text{Di conseguenza: } i(t) = \frac{Bb}{R}v(t) = \frac{mg}{Bb} \left(1 - e^{-\frac{B^2b^2}{mR}t} \right)$$

I valori limite sono:

$$v_{\infty} = \frac{mgR}{B^2 b^2} = 9.8 \frac{m}{s}$$

$$i_{\infty} = \frac{mg}{Bb} = 0.49 \text{ } A$$

In condizioni stazionarie l'energia dissipata per ogni spostamento $\Delta x = 1 \text{ } cm$ risulta quindi:

$$W_1 = Ri_{\infty}^2 \Delta t = Ri_{\infty}^2 \frac{\Delta x}{v_{\infty}} = 9.8 * 10^{-4} \text{ } J$$

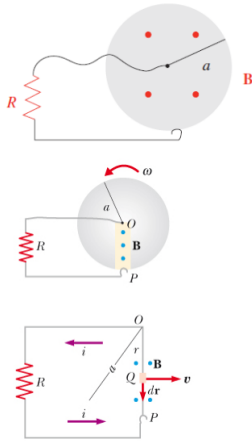
Uguale alla perdita di energia potenziale gravitazionale della sbarretta ($mg\Delta x$)

Soluzione punto b

10.9

Al centro e al bordo di un disco metallico di raggio $a = 15 \text{ cm}$ sono collegati due contatti strisianti e il circuito viene chiuso su un resistore; La resistenza totale $R = 8 \cdot 10^{-2} \Omega$. Il disco immerso in un campo magnetico uniforme e costante $B = 0.03 \text{ T}$ parallelo all'asse.

- il momento M da applicare al disco per mantenerlo in rotazione ad una frequenza $\nu = 1800 \frac{\text{giri}}{\text{min}}$.
- la potenza P dissipata nel circuito in queste condizioni.
- la carica q che passa nel circuito in un minuto.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$$\vec{E}_i = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \vec{v} = \omega r \vec{u}_\Phi \quad \vec{E}_i = \omega r B \vec{u}_r$$

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_i d\vec{s} = \int \omega r B \vec{u}_r d\vec{r}$$

$$\varepsilon_i = \left[\frac{1}{2} \omega B r^2 \right]_0^a = \frac{1}{2} \omega B a^2$$

Alternativamente si può usare il flusso tagliato (l'area spezzata di $d\Theta$ è pari a $\frac{1}{2} d\theta a^2$)

$$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R} = 0.8 \text{ A}$$

Tale corrente circola dal centro verso il bordo come si deduce dalla direzione di \vec{E}_i .

Vista la presenza di B su un elementino di filo $d\vec{r}$ agisce la forza di Laplace:

$$d\vec{F} = i d\vec{r} \wedge \vec{B}$$

Questa forza produce il momento (usando il centro come polo): $d\vec{M}_i = \vec{r} \wedge$

$$d\vec{F} = \vec{r} \wedge (i d\vec{r} \wedge \vec{B})$$

Ortogonale al disco e di verso entrante (tende a far ruotare il disco in verso orario).

$$\text{Calcoliamo la forza: } d\vec{F} = i d\vec{r} \wedge \vec{B} = \left(\frac{1}{2}\omega B a^2\right) d\vec{r} \wedge \vec{B} = -\left(\frac{1}{2}\omega B a^2\right) dr B \vec{u}_x$$

$$d\vec{F} = -\frac{1}{2}\omega B^2 a^2 dr \vec{u}_x$$

$$\text{Calcoliamo il momento: } d\vec{M}_i = \vec{r} \wedge d\vec{F} = -\frac{1}{2}\omega B^2 a^2 r dr \vec{u}_z$$

$$\vec{M} = \int_0^a d\vec{M}_i = -\int_0^a \frac{1}{2}\omega B^2 a^2 r dr \vec{u}_z = -\left[\frac{1}{2}\omega B^2 a^2 \frac{r^2}{2}\right]_0^a \vec{u}_z = -\frac{B^2 a^4}{4R}\omega \vec{u}_z$$

Si tratta di un momento frenante che è proporzionale a ω quindi di tipo viscoso, detto "momento di attrito elettromagnetico".

Soluzione punto b

Per mantenere in moto di disco bisogna applicare dall'esterno il momento (momento motore) $M' = -M$ e spendere la potenza:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{M d\theta}{dt} = M\omega = \frac{B^2 a^4}{4R}\omega^2$$

Che corrisponde alla potenza dissipata per effetto Joule:

$$P = RI^2 = R \left(\frac{\omega B a^2}{2R}\right)^2 = \frac{\omega^2 B^2 a^4}{4R} = 5.06 * 10^{-2} \text{ W}$$

Soluzione punto c

Siccome la corrente è costante la carica si trova come:

$$Q = i\Delta t = 48C$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare con la legge di Faraday usando il flusso tagliato:

$$Q = \frac{Ba^2\theta}{2R} = \frac{Ba^2\omega\Delta t}{2R} = 47.7 \text{ C}$$

10.12

Una bobina quadrata, di lato $a = 2 \text{ cm}$ e resistenza $R = 0.1 \Omega$, disposta con due lati verticali, ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale passante per il centro. Essa è immersa in un campo magnetico $B = 0.6 \text{ T}$ uniforme e costante, ortogonale all'asse di rotazione, ed è alimentata da un generatore di resistenza interna nulla che fornisce la f.e.m. $\varepsilon = 0.2 + 0.24\sin(\omega t) \text{ V}$. Si osserva che durante il moto la corrente i nella bobina resta costante.

Calcolare la corrente i e la velocità angolare ω .

Formule utilizzate

Soluzione

La f.e.m. indotta è data dalla variazione del flusso di campo magnetico causato dalla rotazione della bobina:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -B\Sigma\frac{d\alpha}{dt} = -B\Sigma\omega\sin(\omega t)$$

Imponendo che questa espressione annulli la componente dipendente dal tempo del generatore $[0.24\sin(\omega t)]$ si ottiene: $\omega = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Inoltre la corrente circolante sarà data da: $i = \frac{\varepsilon(t) + \varepsilon_i}{R} = \frac{0.2}{R} = 2 \text{ A}$

10.13

Una bobina è formata da $N = 20$ spire, le quali sono disposte secondo due semicirconferenze eguali, di raggi $a = 10 \text{ cm}$, situate in due piani ortogonali tra loro. Tale bobina ruota con velocità angolare $\omega = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ attorno all'asse individuato dall'intersezione dei due piani ed è immersa in un campo magnetico $B = 0.5 \text{ T}$ uniforme e costante, ortogonale all'asse di rotazione.

Calcolare la f.e.m. ε_i il suo valore massimo ε_{max} , la potenza medi asviluppata se la resistenza della bobina è $R = 10 \Omega$.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Flusso nella prima circonferenza data dal campo magnetico B

$$\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \vec{u}_n d\Sigma = \int_{\Sigma} B d\Sigma \cos \alpha$$

Dato che la semicirconferenza ruota, la normale \vec{u}_n non è costante.

Sappiamo però che $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$

α sarà quindi dato da $\alpha = \alpha_0 + \omega t$

$$\Sigma = \frac{\pi a^2}{2}$$

$$\Phi(\vec{B}) = B \frac{\pi a^2}{2} \cos \omega t$$

Il flusso attraverso la seconda metà della spira sarà analogo

$$\Phi(t) = NB \frac{\pi a^2}{2} \cos \omega t + NB \frac{\pi a^2}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\Phi(t) = NB \frac{\pi a^2}{2} \left[2 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = NB \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\varepsilon_{max} = \omega NB \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} = 22.2 \text{ V}$$

Soluzione punto b

Calcolare il valor medio della potenza:

$$P = \varepsilon_i i = \frac{\varepsilon_i^2}{R} = \frac{\left[\omega NB \frac{\pi a^2}{\sqrt{2}} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2}{R}$$

Il valore medio della potenza si calcola integrando su un periodo T dato che la funzione è periodica.

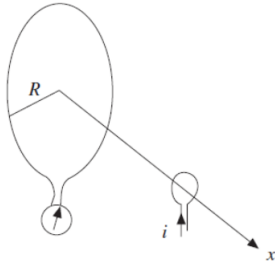
$$P_m = \frac{\varepsilon_{max}^2}{2R} = 24.7 \text{ W}$$

10.15

Una bobina circolare compatta, formata da $N_1 = 3 \cdot 10^3$ spire di raggio $R = 25 \text{ cm}$ è collegata ad un misuratore di f.e.m.; una seconda bobina compatta coassiale alla prima e ad essa parallela, composta da $N_2 = 100$ spire di raggio $r = 0.5 \text{ cm}$, è percorsa dalla corrente $i = 15 \text{ A}$ e si muove lungo l'asse x con velocità costante.

Calcolare il coefficiente di mutua induzione $M(x)$ in funzione della distanza x tra i centri e il valore $\varepsilon(x)$ misurato nella prima bobina quando la seconda ha velocità $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Assunto $x = 0.1 \text{ m}$ calcolare la corrente che fluisce nella prima bobina assunta la sua resistenza uguale a $R = 2\Omega$ e la forza esercitata su di essa.



Formule utilizzate

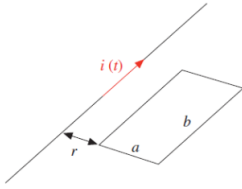
Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.16

Un filo indefinito è percorso dalla corrente $i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ con $i_0 = 10 \text{ A}$ e $\tau = 5 \text{ s}$ e si trova in un piano in cui c'è una spira rettangolare di lati $a = 6 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, con il lato più vicino parallelo al filo alla distanza $r = 4 \text{ cm}$.

Calcolare la f.e.m. indotta nella spira e la carica q che percorre la spira nell'intervallo di tempo da zero a $+\infty$, se essa ha una resistenza $R = 2 \Omega$.



Formule utilizzate

$$B(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}$$

Soluzione punto a

Il filo produce un campo magnetico B .

$$B(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi(x+r)}$$

$$\Phi(B(t)) = \int_0^a \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi(x+r)} b dx$$

Il campo magnetico è ortogonale alla spira quindi l'angolo fra u_n e B è tale da dare un coseno = 1.

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{r} \right) \text{ Dalla legge di Lenz:}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu_0 i b}{2\pi r} e^{-\frac{t}{\tau}} \ln \left(1 + \frac{a}{r} \right) = 4.4 * 10^{-8} e^{-\frac{t}{5}} \text{ V}$$

Soluzione punto b

Nella spira troveremo:

$$i_{spira} = \frac{\varepsilon_i}{R} = 2.2 * 10^{-8} e^{-\frac{t}{5}} \text{ A}$$

E la carica che fluisce è:

$$q = \int_0^\infty i_{spira}(t) dt = 1.1 * 10^{-7} \text{ C}$$

Per la legge di Faraday:

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R} = 1.1 * 10^{-7} \text{ C}$$

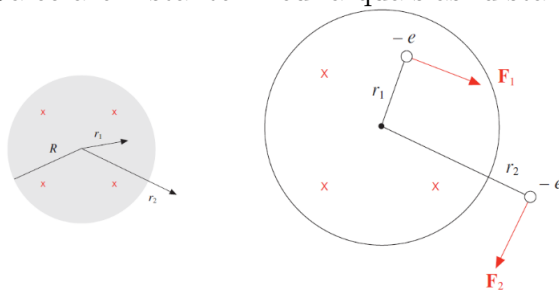
10.21

Un campo magnetico variabile nel tempo con la legge $\vec{B} = \vec{u}_n(0.05t^2 - 0.2t)[T]$ è definito in una regione cilindrica di raggio $R = 5 \text{ cm}$; in tale regione il campo è uniforme e parallelo all'asse.

Calcolare la forza F_1 che agisce su un elettrone (fermo) a distanza $r_1 = 0.04 \text{ m}$ dal centro dell'asse all'istante $t_1 = 4 \text{ s}$.

Calcolare la forza F_2 che agisce nello stesso istante a una distanza $r_2 = 0.07 \text{ m}$ dal centro.

Calcolare l'istante in cui a qualsiasi distanza la forza è nulla.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Il campo magnetico dipende dal tempo $B(t)$ produce un campo elettrico $E(t)$ anche dipendente dal tempo secondo la legge:

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}(t) d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B}(t))}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \vec{u}_n d\Sigma$$

Per $0 \leq r \leq R$:

$$-\frac{d\Phi(\vec{B}(t))}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 (0.1t - 0.2)$$

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}(t) d\vec{s} = 2\pi r E$$

$$\text{Eguagliando i due risultati: } -\pi r^2 (0.1t - 0.2) = 2\pi r E$$

da cui: $E = -\frac{r}{2} (0.1t - 0.2)$ con segno +, cioè in senso antiorario.

Ovvero \vec{E} circola in verso antiorario fino a $t = 2 \text{ s}$ e poi in verso orario.

$$F_1 = qE_1 = 6.4 * 10^{-22} \text{ N (verso antiorario)}$$

Soluzione punto b

$$\text{Per } r \geq R: \Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \vec{u}_n d\Sigma = B\pi R^2$$

$$-\frac{d\Phi(\vec{B}(t))}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} = -\pi R^2 (0.1t - 0.2)$$

$$\oint \vec{E}(t) d\vec{s} = 2\pi r E.$$

Uguagliando i risultati otteniamo:

$$E = -\frac{R^2}{2r}(0.1t - 0.2)$$

$$F_2 = qE_2 = e\frac{R^2}{2r_2}(0.1t_1 - 0.2) = 5.7 * 10^{-22} \text{ N anche in questo caso in senso antiorario.}$$

Soluzione punto c

Siccome a qualsiasi distanza la forza è proporzionale a $(0.1t - 0.2)$ la forza diventa nulla quando:

$$0.1t - 0.2 = 0 \quad F = 0 \text{ per } t = 2 \text{ s}$$

Questo corrisponde al tempo in corrispondenza al quale il campo magnetico assume il suo valore minimo pari a -0.2 T .

10.23

Le due armature piane circolari di un condensatore hanno area $\Sigma = 0.1m^2$, distano d e sono collegate ad un generatore di f.e.m. $V = V_0 \sin \omega t$ con $V_0 = 200V$, $\Omega = 100 \frac{rad}{s}$. La corrente massima di conduzione nei fili è $i_0 = 8.86\mu A$. Calcolare i valori massimi della corrente di spostamento e della densità di corrente di spostamento.

Calcolare i valori massimi di $\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$

Calcolare la distanza d tra le armature.

Calcolare il valore massimo del campo magnetico in funzione della distanza r dal centro del condensatore.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

$$i_{s,max} = i_{c,max} = i_0 = 8.86 * 10^{-6} A$$

Soluzione punto b

Il valore massimo di $\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$, si avrà in corrispondenza della corrente di conduzione massima.

Dividendo per l'area Σ otteniamo la densità di corrente.

$$j_{s,max} = \frac{i_{s,max}}{\Sigma} = 8.86 * 10^{-5} \frac{A}{m^2}$$
$$\left[\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \right]_{max} = \frac{i_{s,max}}{\epsilon_0} = 10^6 \frac{Vm}{s}$$
$$i_s = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = C\omega V_0 \cos \omega t$$

Soluzione punto c

Possiamo ricavare la distanza fra le due armature:

$$d = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{i_{s,max}} \omega V_0 = 2mm$$

Soluzione punto d

Il raggio R delle armature circolari di area Σ vale:

$$R = \sqrt{\frac{\Sigma}{\pi}} = 0.178 m$$

Quindi internamente alle armature ($0 \leq r \leq R$):

$$2\pi r B(r) = \mu_0 i_s \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \quad B(r) = \frac{\mu_0 i_s}{2\pi R^2}$$

$$B_{max} = \frac{\mu_0 i_{s,max} r}{2\pi R^2} = 5.59 * 10^{-11} r T$$

Esternamente alle armature ($R \leq r$):

$$2\pi r B(r) = \mu_0 i_s \rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i_s}{2\pi r}$$

$$B_{max} = \frac{\mu_0 i_{s,max}}{2\pi r} = \frac{1.77 * 10^{-12}}{r} T.$$

Capitolo 13

13.2

Una lampada da 500W irradia tale potenza isotropicamente con efficienza del 80%.

Calcolare alla distanza $r = 5 \text{ m}$ l'intensità I .

Calcolare alla stessa distanza i valori di massimi E_0 del campo elettrico e B_0 del campo magnetico.

Calcolare alla stessa distanza la forza esercitata su un dischetto di raggio $a = 5 \text{ cm}$, perfettamente riflettente ortogonale alla direzione di propagazione delle onde.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

La potenza reale è l'80% del totale.

$$P_{reale} = 0.8 * 500 = 400 \text{ W}$$

Il vettore di poynting indica il trasferimento di energia

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu}$$

$$I = \frac{P_{erogata}}{4\pi r^2} = 1.27 \frac{W}{m^2}$$

Soluzione punto b

Il valore massimo E_0 del campo elettrico:

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_0} E_0^2$$

$$\text{Poichè } \epsilon_0 c = \epsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{Z_0} \text{ Quindi: } E_0 = \sqrt{2 Z_0 I} = 30.9 \frac{V}{m}$$

Il valore massimo di B_0 del campo magnetico è:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 10.3 * 10^{-8} \text{ T}$$

Soluzione punto c

La forza F esercitata su un dischetto di raggio $a = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$, perfettamente riflettente ortogonale alla direzione di propagazione delle onde si trova usando la pressione di radiazione per una superficie perfettamente riflettente:

Nel caso in cui la superficie fosse perfettamente assorbente:

$$p_{rad} = \frac{I}{c}$$

Nel nostro caso invece la pressione è doppia perchè viene riflessa

$$p_{rad} = \frac{2I}{c}$$

$$F = p_{rad} A_{disco} = \frac{2I}{c} \pi a^2 = 6.65 * 10^{-11} \text{ N}$$

13.3

Un trasmettitore emette onde elettromagnetiche in un cono che copre un angolo solido $\Delta\Omega = 2 * 10^{-2} sr$.

A distanza $r_1 = 2 km$ dal trasmettitore l'ampiezza massima del campo elettrico è $E_1 = 20 \frac{V}{m}$.

Calcolare l'ampiezza B_1 del campo magnetico.

Calcolare la potenza P del trasmettitore.

Calcolare le ampiezze E_2 e B_2 alla distanza $r_2 = 10 km$.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

La superficie del cono alla distanza r è $s = r^2 \Delta\Omega$.

L'ampiezza del campo magnetico: $B_1 = \frac{E_1}{c} = 6.67 * 10^{-8} T$.

Soluzione punto b

La potenza P del trasmettitore: $I_1 = \frac{E_1^2}{2Z_0} = 0.52 \frac{W}{m^2}$

$$P = I_1 r_1^2 \Delta\Omega = 42.4 kW$$

Soluzione punto c

Possiamo trovarle sapendo che le onde sferiche decrescono linearmente.

$$E_2 = E_1 \frac{r_1}{r_2} = 4 \frac{V}{m}$$

$$B_2 = \frac{E_2}{c} = 1.33 * 10^{-8} T$$

13.4

Una sorgente puntiforme di microonde produce impulsi di frequenza $f = 20 \text{ GHz}$ e di durata $t = 1 \text{ ns}$. La sorgente è posta nel fuoco di un paraboloide conduttore di apertura $2R = 20 \text{ cm}$ così che si ottiene in uscita un fascio parallelo all'asse del paraboloide. La potenza media di ogni impulso è $P = 25 \text{ kW}$.

Calcolare la λ delle microonde.

Calcolare l'energia totale di ciascun impulso.

Calcolare l'intensità del fascio di microonde.

Calcolare la densità media di energia di ciascun impulso.

Calcolare l'ampiezza del campo \vec{E} e del campo \vec{B} .

Calcolare la forza esercitata durante un impulso su una superficie perfettamente riflettente ortogonale al fascio.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

La lunghezza d'onda delle microonde:

$$\lambda = \frac{c}{f} = 1.5 \text{ cm}.$$

Soluzione punto b

L'energia totale di ciascun impulso:

$$\Delta U = Pt = 2.5 * 10^{-5} \text{ J}$$

Soluzione punto c

L'intensità del fascio di microonde:

$$I = \frac{P}{\pi R^2} = 7.96 * 10^5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Soluzione punto d

La densità media di energia di ciascun impulso:

$$\langle u \rangle_T = \frac{I}{c} = 2.65 * 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Soluzione punto e

L'ampiezza del campo elettrico e del campo magnetico del fascio:

$$E_0 = \sqrt{2Z_0 I} = 2.45 * 10^4 \frac{V}{m}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 8.17 * 10^{-5} T$$

Soluzione punto f

$$p_{rad} = \frac{2I}{c}$$

$$F = p_{rad} \pi R^2 = \frac{2I}{c} \pi R^2 = 1.67 * 10^{-4} N$$

13.5

Un' antenna parabolica ha un'apertura di 15 m e riceve in direzione normale alla sua superficie un segnale radio proveniente da una sorgente molto lontana, di ampiezza $E_0 = 4 * 10^{-7} \frac{V}{m}$.

Assumendo che l'antenna assorba tutta la radiazione che la colpisce calcolare la forza esercitata dall'onda sull'antenna.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Calcolo l'intensità:

$$I = \frac{E_0^2}{2Z_0} = 2.1 * 10^{-16} \frac{W}{m^2}$$

La potenza assorbita dall'antenna (perfettamente assorbente):

$$P_{ass} = \frac{I}{c} \pi r^2 = 3.75 * 10^{-14} \text{ W}$$
 La forza assorbita:

$$F = p_{rad} \Sigma = \frac{I}{c} \pi r^2 = 1.25 * 10^{-22} \text{ N}$$

13.8

Una navicella spaziale di massa $m = 1.5 * 10^3 \text{ kg}$ viaggia nel vuoto in assenza di campo gravitazionale e utilizza un fascio laser di potenza $P = 10 \text{ kW}$ montato in coda come propulsore.

Calcolare di quanto aumenta la velocità della navicella in ogni giorno di navigazione

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Il raggio laser trasporta quantità di moto nella direzione di propagazione del laser. Dalla terza legge di Newton viene fornita una quantità uguale di quantità di moto al veicolo spaziale nella direzione opposta.

Teorema dell'impulso: $m\Delta v = F\Delta t$.

Per un giorno $\Delta t = 24 * 3600 \text{ s}$

$$F = F_{rad} = p_{rad}\Sigma = \frac{P}{c}$$

Sostituendo si trova che:

$$\Delta v = \frac{F\Delta t}{m} = \frac{P\Delta t}{mc} = 1.92 * 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

13.9

Un granello di polvere cosmica nel sistema solare si trova soggetto parte del sole si aalla forza di attrazione gravitazionale che alla forza dovuta alla pressione di radiazione. Supponendo che la particella sia sferica ed in grado di assorbire tutta la radiazione.

Calcolare il valore minimo a_0 del raggio al di sotto del quale la particella sarebbe spinta fuori dal sistema solare.

I valori numerici sono: massa del sole $M = 2 * 10^{30} \text{ kg}$, potenza solare $P = 3.96 * 10^{26} \text{ W}$, densità del granello $\rho = 2.7 * 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Detta r la distanza del Sole:

$$F_{rad} = p_{rad} \pi a^2 = \frac{I}{c} \pi a^2 = \frac{P}{4\pi r^2 c} \pi a^2 ..$$

$$F_{grav} = \gamma \frac{M_{sole} M_{granello}}{r^2} = \gamma \frac{M_{sole}}{r^2} \rho \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Se la particelle sfugge al sole allora: $F_{rad} \geq F_{grav}$.

$$a \leq a_0 = \frac{3P}{16\pi\gamma c\rho M_{sole}} = 0.22 \text{ } \mu m$$