Esercizi Fisica II

Stefano Giulianelli

Semestre I, 2022/2023

Contents

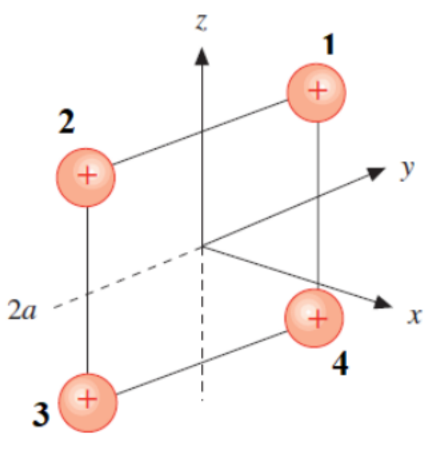
Cap	Esercizi										
1	2x	3x	8x								
2	1x	5x	7x								
3	2x	3x	5x	9x							
4	1x	5x									
7	1x	4x	6x	7x	10x	11x	12x	13x			
8	1x	2x	3x	4x	6r	7r	8r	10r	11r	12r	
10	1	2	4	6	7	9	12	13	15	16	21	23
13	2	3	4	5	8	9					

x: fatto
r: da rivedere

Capitolo 1

1.2

Quattro cariche positive poste ai vertici di un quadrato di lato 2a = 10cm di valore $q = 10^{-8}C$.
a) Calcolare la forza esercitata dalle altre tre cariche su quella posta nel vettore (a,a) e le espressioni del potenziale e del campo elettrostatico lungo l'asse x.
b) Calcolare inoltre l'energia cinetica con la quale passa per il centro un elettrone abbandonato con velocità nulla in un punto dell'asse x distante $x_0 = 2a$ dal centro.



Formule utilizzate

$\vec{F_{i,j}} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{i,j}^2}\vec{u_{i,j}}$
$\vec{E_i} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$
$V(P) - V(\infty) = \int_x^\infty \vec{E}d\vec{s}$
$\vec{E} = \left(-\frac{\delta v}{\delta x}, -\frac{\delta v}{\delta y}, -\frac{\delta v}{\delta z}\right)$ $\Delta E_k + \Delta U_{elettrone} = 0$
$\Delta E_k = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{4q}{\sqrt{sa^2}} - \frac{4q}{\sqrt{2a^2+4a^2}}\right]$

Soluzione punto a

Calcolo della forza:
Applico la formula per le 3 particelle

con $q_i = q_j = q$
$\vec{F_{2,1}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{2,1}^2}\vec{u_y}$ $\vec{F_{3,1}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{3,1}^2}\vec{u_{y,z}}$ $\vec{F_{2,3}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{2,3}^2}\vec{u_z}$

Applico il teorema di sovrapposizione degli effetti:
$\vec{F} = \vec{F_{2,1}} + \vec{F_{3,1}} + \vec{F_{3,2}}$

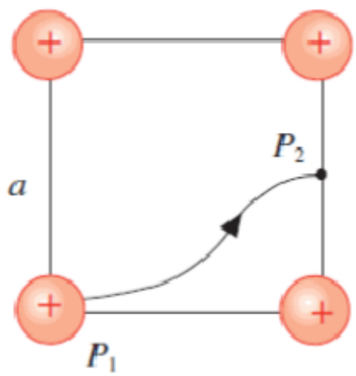
Calcolo del potenziale e del campo elettrostatico
$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$ $\vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$ $\vec{E}_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}$ $\vec{E}_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_4^2}$
con $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \sqrt{2a^2 + x^2}$
$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{x}{r}\vec{u_x}$
$V(P) - V(\infty) = \int_x^\infty \vec{E}d\vec{s}$
$V(P) = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0}\int_x^\infty \frac{x}{r^3}dx = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2a^2+x^2}}$
$\vec{E} = \left(-\frac{\delta v}{\delta x}, -\frac{\delta v}{\delta y}, -\frac{\delta v}{\delta z}\right)$

Soluzione punto b

Calcolare l'energia cinetica di un elettrone con velocità nulla nel punto (2a, 0, 0) che passa in O.
$\Delta E_k + \Delta U_{elettrone} = 0$
$\Delta E_k = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{4q}{\sqrt{sa^2}} - \frac{4q}{\sqrt{2a^2+4a^2}}\right]$

1.3

Quattro cariche puntiformi di egual valore $q = 10^{-8}C$ sono poste ai vertici di un quadrato di lato a = 10 cm.
Calcolare l'energia potenziale elettrostatica del sistema e il lavoro necessario per spostare una delle cariche dalla posizione iniziale P1 al punto P2 indicato in figura e situato nel centro del lato.



Formule utilizzate

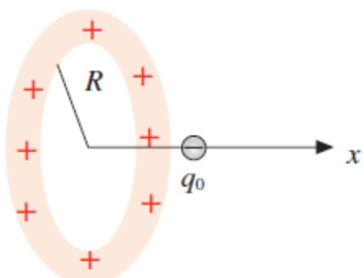
$U_e[P] = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i \ q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$
$W = U_e[P_2] - U_e[P_1]$

Soluzione

$U_e[P_1] = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i \ q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4.87 * 10^{-5} \ J$
$U_e[P_2] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 6.84 * 10^{-5} \ J$
$W = U_e[P_2] - U_e[P_1] = 1.97 * 10^{-5} \ J$

1.8

Una particella di massa $m = 10^{-3}kg$ e carica $q_0 = -10^{-10}C$ è posta al centro di un anello di raggio R = 10 cm, su cui ‘e distribuita uni formemente la carica $q = 10 - 8C$.
La particella viene spostata di un tratto $x_0 = 0.5cm$ lungo l’asse e abbandonata.
Dimostrare che la particella oscilla con moto armonico intorno all’origine e determinare il periodo T delle piccole oscillazioni e l’energia cinetica della particella quando passa per l’origine.



Formule utilizzate

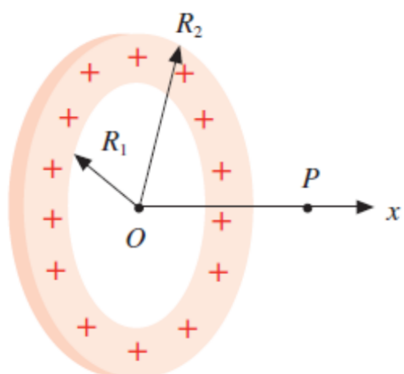
Soluzione

Calcoliamo il campo per ogni infinitesimo di anello.
$dE_x(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$
$E_x = \int_{anello} dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\int_{anello} dq = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
Se $\left(\frac{x}{R}\right)^2 \ll 1$
$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{R^3}\vec{u_x}$
$\frac{m\ d^2x}{dt^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q|q_0|}{R^3}x = 0$
$\omega = \sqrt{\frac{q|q_0|}{4\pi\epsilon_0 mR^3}} = 0.0949\ rad/s$
con $T = 2\pi/\omega = 66,23\ s$
$E_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_0\ \ q|}{R^3}\int_0^{x_0} xdx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_0\ \ q|x_0^2}{2R^3} = 1.13 * 10^{-10}\ J$

Capitolo 2

2.1

Una carica $q = 1.39 * 10^{-8}\ C$ è distribuita con densità superficiale uniforma σ su una corona circolare piana di raggio interno $R_1 = 20\ cm$ e raggio esterno $R_2 = 30\ cm$.
a) Determinare le espressioni del campo elettrostatico $\vec{E(x)}$ e del poteniale $V(x)$ sull'asse della corona.
b) Calcolare l'energia cinetcia con la quale un elettrone libero in un punto P con $x_0 = 20\ cm$ raggiunge il centro.
c) Calcolare la forza agente su un dipolo elettrico di momento $p = p_0 \vec{u_x}$ con $p_0 = 10^{-10}\ cm$, posto in O.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$\sigma = \frac{q}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{1.39*10^{-8}}{3.14*(0.3^2 - 0.2^2)} = 8.85 * 10^{-}8\ \frac{C}{m^2}$
$dq = \sigma ds = \sigma 2\pi r dr$
$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+x^2}}$
$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2 + x^2} - \sqrt{R_1^2 + x^2}\right]$
$E_x = -\frac{\delta V}{\delta x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{x}{\sqrt{R_2^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{R_1^2+x^2}}\right]$

Soluzione punto b

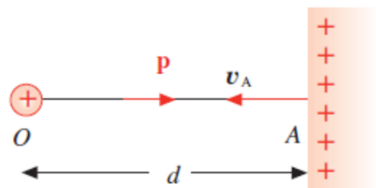
$\Delta E_k + \Delta U = 0$
$E_{k_{fin}} = E_{k_{in}} - e[V_{in} - V_{fin}] = -\frac{e\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2 + x_0^2} - \sqrt{R_1^2 + x_0^2} - R_2 + R_1\right] = 111\ eV$

Soluzione punto c

$\vec{F}\left(\vec{p} * \nabla\right)\vec{E} = p_0\left(\vec{u_x} * \nabla\right)\vec{E} = p_0\frac{\delta\vec{E}}{\delta x}\vec{u_x}$
$E_x = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{x}{\sqrt{R_2^2+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{R_1^2+x^2}}\right]$
$\frac{\delta E_x}{\delta x} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R_2^2+x^2}} - \frac{x^2}{(R_2^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+x^2}} + \frac{x^2}{(R_1^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$
$F = \frac{p_0\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] = 8.33 * 10^{-7}\ N$

2.5

Una carica positiva q distante $d = 40\ cm$ da un piano indefinito carico con densità $\sigma = 8,86 * 10^{10}\ \frac{C}{m^2}$. Un dipolo elettrico di momento $p = 10^{12}\ Cm$, parallelo e concorde al vettore OA equidistante dal piano è soggetta a $F = 2.25 * 10^{-9}\ N$.
Calcolare il vettore q e la velocità con cui un elettrone che parte da A con $V_a = 3 * 10^6\ \frac{m}{s}$ arriva in B distante $\frac{d}{4}$.



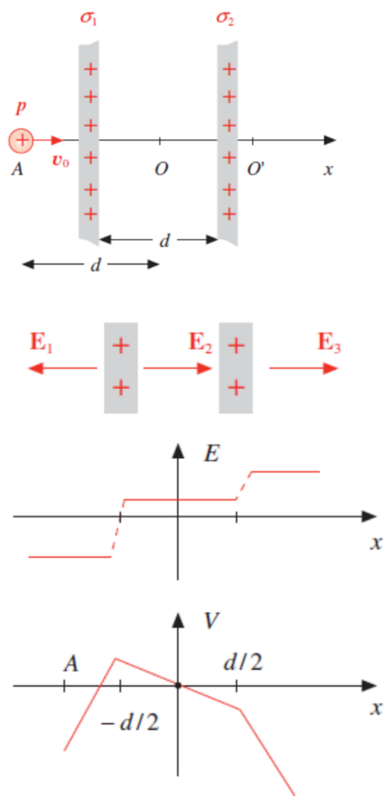
Formule utilizzate

Soluzione

$V(B) - V(A) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \frac{d}{4}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}\right) + \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{3d}{4} - 0\right) = \frac{3}{4\pi\epsilon_0 d}\left(q - \frac{\pi}{2}\sigma d^2\right) = 52.47\ V$
$E_k(B) = E_k(A) - e[V(A) - V(B)] = \frac{1}{2}m_e V_A^2 + e[V(B) - V(A)]$
$V_B = \sqrt{\frac{2E_k(B)}{m_e}} = 5.24 * 10^6 \frac{m}{s}$

2.7

Due piani indefiniti paralleli, distanti $d = 20\ cm$, sono carichi ocn densità uniformi $\sigma_1 = 17.72 * 10^{-8}\ \frac{C}{m^2}$ e $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}$
a) Determinare il potenziale V(x), ponendonolo uguale a 0 nel punto di mezzo O tra i due piani.
b) Determinare l'energia cinetica minima $E_{k_{min}}$ che deve avere un protone nel punto A(x = -d) per giungere in un generico punto O'. Se un elettrone viene lasciato libero in A con v=0 dove arriva?



Formule utilizzate

Soluzione punto a

per: $x < -\frac{d}{2}$:
$E_1 = -\frac{\sigma_2+\sigma_1}{2\epsilon_0}\vec{u_x} = \frac{3\sigma_2}{2\epsilon_0}\vec{u_x} = 1.5 * 10^4\vec{u_x}\ \frac{V}{m}$
$\sigma_1 = 2\sigma_2$
$V_1(x) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}(3x + 2d)$

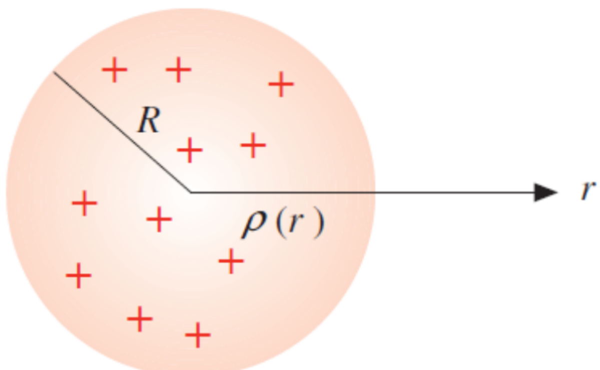
per $-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$:
$E_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}\vec{u_x} = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\vec{u_x} = 0.5 * 10^4 \vec{u_x}\ \frac{V}{m}$
$\sigma_1 = 2\sigma_2$
$V_2(x) = -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}x$
per $x > \frac{d}{2}$
$E_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0}\vec{u_x} = 1.5 * 10^4 \vec{u_x}\ \frac{V}{m}$
$V_3(x) = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}(-3x + d)$
Per raggiungere la regione $x > \frac{d}{2}$ il protone deve attraversare le barriere del potenziale, cioè deve salire fino al punto di potenziale maggiore a $x = -\frac{d}{2}$. Una volta raggiunto quel punto, verrà spinto completamente a destra. Pertanto l'energia cinetica iniziale deve essere almeno uguale alla differenza di potenziale.
$\Delta v = v_i(-\frac{d}{2}) - V_1(A) = \frac{3\sigma_2 d}{4\epsilon_0} = 1500V$
$E_{k_{min}} = 1.5keV$
L'elettrone viene accellerato verso dx fino a $x = -\frac{d}{2}$ quindi viene decelleratore.
Usando la conservazione dell'energia, l'elettrone si ferma nel punto dell'asse x posto tale che $V(x) = V(a)$.
$\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}(-3x + d) = -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}d$ per cui $x = \frac{2d}{3} = 13.3\ cm$

Soluzione punto b

Capitolo 3

3.2

Una carica è distribuita all'interno di una sfera di raggio R con densità non uniforme $\rho(r) = c/r$ essendo c una costante.
Determinare le espressioni del campo elettrostatico E(x)e del potenziale V(r) per $0 \leq r \leq \infty$.



Formule utilizzate

Gauss: $\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}\vec{u_n}d\Sigma$

Soluzione punto a

Gauss: $\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}\vec{u_n}d\Sigma$ ma se $\vec{E} \parallel \vec{u_n} \rightarrow \vec{E}\vec{u_n} = E$
$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}\vec{u_n}d\Sigma = \oint Ed\Sigma$ ma E è costante lungo $d\Sigma$
$\Phi(\vec{E}) = E\oint d\Sigma = E\Sigma$ con Σ superfice sferica $\Sigma = 4\pi r^2$
$\Phi(\vec{E}) = E_r * 4\pi r^2$ con anche $\phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$
per $r \leq R$ (interno sfera)
$4\pi r^2 E_{int}(x) = \frac{q_{int}(r)}{\epsilon_0}$
con $q_{int}(r) = \int_0^r \frac{c}{r}4\pi r^2 dr = 2\pi cr^2$
$E_{int}(r) = \frac{C}{2\epsilon}$ costante

per $r > R$ (estero sfera)
$E_{est} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ con $q = 2\pi cR^2$
$E_{est} = \frac{cR^2}{2\epsilon_0 r^2}$ $\quad r(r \gg R) = \int_r^\infty E_{est}dr = \frac{cR^2}{2\epsilon_0 r}$

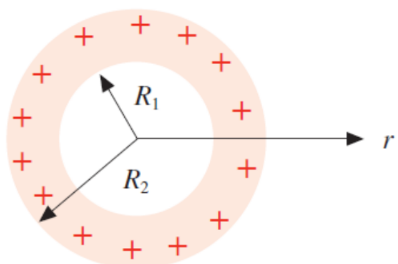
in particolare $V(R) = \frac{cR^2}{2\epsilon_0}$

Soluzione punto b

per $r \ll R$
$V(r) - V(R) = \int_r^R E_{int} dr = \frac{C}{2\epsilon_0}(R - r)$
$V(r) = \frac{c}{2\epsilon_0}(2R - r)$
al centro $V(0) = \frac{cR}{\epsilon_0}$

3.3

Tra due superfici sferiche concentriche di raggio $R_1 = 10\ cm$ e $R_2 = 20\ cm$ è distribuita una carica elettrica con densità uniforme $\rho = 26.58 * 10^{-8}\ \frac{C}{m^3}$.
Determinare l'espressione del campo elettrostatico E(r) in funzione della distanza r dal centro del sistema.
Se un elettrone viene abbandonato sulla superfice esterna, quanto tempo impiega ad attraversare la cavità interna?



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Dividiamo il problema in 3 regioni:
I: $o < r \leq R_1$
II: $R_1 \leq r \leq R_2$
III: $r \geq R_2$

Regione I: $o < r \leq R_1$
E = 0

Regione II: $R_1 \leq r \leq R_2$
$\Phi(E) = E * 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$
$q = \int \rho dv = \rho \int dv = \rho \int_{R_1}^{r} 4\pi r^2 dr = \rho \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_{R_1}^{r} = \rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$
$E = \rho \frac{r^3 - R_1^3}{3\epsilon_0 r^2}$

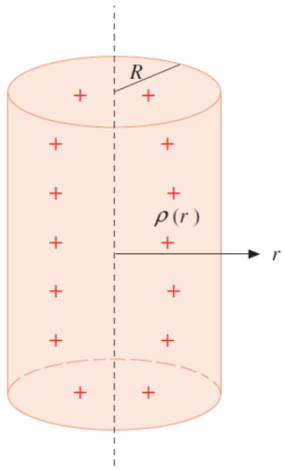
Regione III: $r \geq R_2$
$q = \rho \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)$
$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \rho \frac{R_2^3 - R_1^3}{3\epsilon_0 r^2}$

Soluzione punto b

$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(r - \frac{R_1^3}{r^2})dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} + R_1^3\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\right] = 100V$
$E_k = 100\ eV = 1.6 * 10^{-17}\ J$
$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_e}} = \sqrt{\frac{2*1.6*10^{-17}}{9.1*10^{-31}}} = 5.93 * 10^6\ \frac{m}{s}$
$t = \frac{l}{v} = \frac{2R_1}{v} = \frac{0.2}{5.93*10^6} = 33.7\ nS$

3.5

Una carica è distribuita all'interno di una superfice cilindrica indefinita con densità $\rho = \rho_0(a - br)$ essendo r la distanza dall'asse e ρ_0, a, b costanti. Determinare l'espressione del campo elettrostatico in funzione di r.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

per $0 \leq r \leq R$
$\frac{q(r)}{r} = \lambda(r)$
$\lambda(r) = \int_0^r 2r\pi\rho(r)dr = \int_0^r 2\pi\rho_0(ar - br^2)dr = 2\pi\rho_0 r^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}r\right)$
$E_{int} = \frac{\lambda(r)}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}\left(a - \frac{2}{3}br\right)$
$\lambda(R) = 2\pi\rho_0 R^2 \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}R\right)$
$E_{est} = \frac{\lambda(R)}{2pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r}\left(a - \frac{2}{3}bR\right)$

Soluzione punto b

3.9

Dimostrare che la funzione $V(x,y) = ax^2 + bxy - ay^2$ con a e b costanti può rappresentare una funzione potenziale.
Determinare il campo elettrostatico e la densità di carica $\rho(x,y)$.

Formule utilizzate

Soluzione punto a

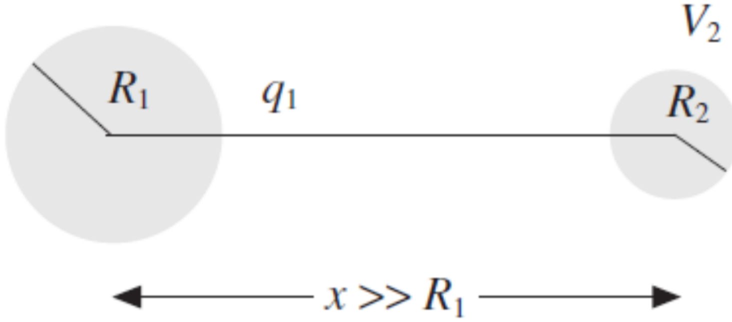
Il campo si calcola mediante la relazione $E = -\nabla v$
$E_x = -\frac{\delta v}{\delta x} = -(2ax + by)$
$E_y = -\frac{\delta v}{\delta y} = -(bx - 2ay)$
$E_z = -\frac{\delta v}{\delta z} = 0$
Il campo così calcolato rappresenta effettivamente un campo elettrostatico infatti soddisfa la relazione: $rot\vec{E} = \nabla \wedge E = 0$.
$\frac{\delta E_z}{\delta y} - \frac{\delta E_y}{\delta z} = 0$
$\frac{\delta E_x}{\delta z} - \frac{\delta E_z}{\delta x} = 0$
$\frac{\delta E_y}{\delta x} - \frac{\delta E_x}{\delta y} = 0$
La densità di carica si calcola mediante il teorema di Gauss in locale $div\vec{E} = \nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.
$\frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\rho = \epsilon_0 \left(\frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} \right) = \epsilon_0 \left(-2a + 2a \right) = 0$

Soluzione punto b

Capitolo 4

4.1

Due sfere conduttrici S_1 e S_2 di raggi R_1 e R_2 sono poste nel vuoto ad una distanza x tra i centri molto grande rispetto a R_1 e R_2.
La sfera S_1, isolata, ha una carica q_1 e la sfera S_2 è mantenuta al potenziale V_a rispetto all'infinito.
Calcolare il potenziale $V_1(x)$ della sfera S_1, la carica $q_2(x)$ della sfera S_2 e la forza F(x) tra le sfere in funzione della distanza x.



Formule utilizzate

$\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$

Soluzione punto a

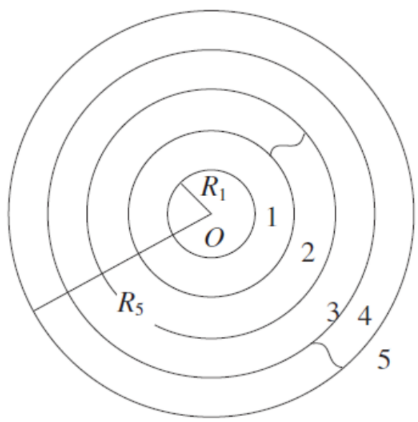
Sfera S_1
$V_1(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2(x)}{x}\right)$

Sfera S_2
$V_2(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_2}{R_2} + \frac{q_1(x)}{x}\right)$
Da cui: $q_2(x) = R_2(4\pi\epsilon_0 V_2 - \frac{q_1}{x})$
Per cui: $V_1(x) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{x_2}\right) + \frac{R_2 V_2}{x}$
Forza: $F(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2(x)}{x^2}$
usando $q_2 = ...$
$F(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{x^2}R_2\left(4\pi\epsilon_0 V_2 - \frac{q_1}{x}\right)$

Soluzione punto b

4.5

Cinque fogli metallici sferici di spessore trascurabile tutti concentrici aventi raggio pari a 1, 2, 3, 4, 5 cm sono collegati con sottili fili conduttori come in figura.
Il sistema è inizialmente scarico. Una carica $q = 10^{-10}\ C$ è disposta sulla superfice sferica e l'energia elettrostatica U_e dell'intero sistema.
Determinare inoltre come variano il campo elettrostatico e l'energia elettrostatica quando: la sfera 1 è posta in contatto con la 2, la 3 è posta in contatto con la 4, la 5 con la terra.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Detta $q = q_1$ la carica sulla sfera interna per induzione completa
$q_2 = -q$ $q_4 = -q$ $q_3 = +q$ $q_5 = +q$
Per calcolare il campo elettrico sfrutto la legge di Gauss e la simmetria sferica
$\Phi(E) = E * 4\pi r^2 = \frac{Q_int}{\epsilon_0}$
Chiamando I la regione di spazio $r < 1\ cm$, II quella con $1\ cm < r < 2\ cm$ e così via, si ha che.
$E_I = E_{III} = E_V = 0$
$E_{II} = E_{IV} = E_{VI} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
L'energia elettrostatica U_e del sistema si può calcolare dalla sua definizione.
$U_e = \int_\tau dU_e = \int_\tau \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau$
L'integrale si può spezzare sulle varie ragioni di cui si è già calcolato
$U_e = \int_\tau dU_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_r^R \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right]$

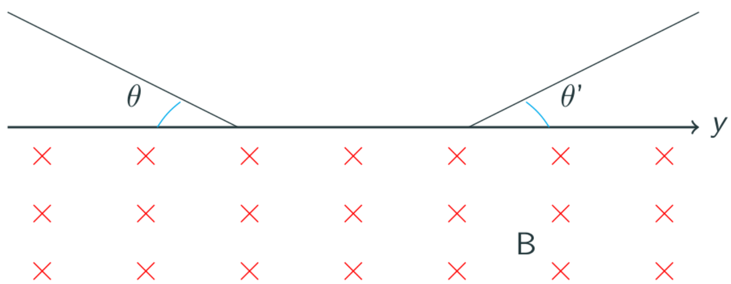
$U_e = U_e^{II} + U_e^{IV} + U_e^{VI} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right]$
Collegando oltre alla sffera 2 e 3, 4 e 5, già connesse, ache la 1 alla 2 si ha:
$E_I = E_{II} = E_{III} = E_V = 0$
$E_{IV} = E_{VI} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
Dunque calcolando l'energia, rispetto alla situazione di partenza, si azzera il contributo della regione II.
$\Delta U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right] = -2.2 * 10^{-9}\ J$
Invece collegando al sfera 2 e 3, 4 e 5 già connesse, anche al 5 a terra si ha che:
$E_I = E_{III} = E_V = E_{VI} = 0$
$E_{II} = E_{IV} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
Dunque calcolando l'energia rispetto alla situazione di partenza, si azzera il contributo della regione VI.
$\Delta U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{R_5}\right] = -0.9 * 10^{-9}\ J$

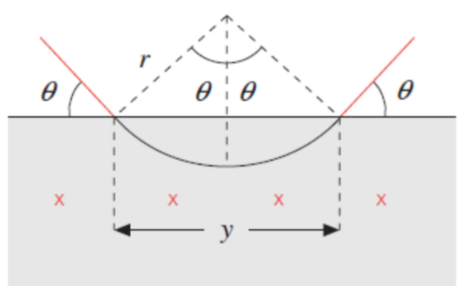
Soluzione punto b

Capitolo 7

7.1

Un protone di energia cinetica $E_k = 6\ MeV$ entra in una regione di spazio in cui esiste un campo magnetico $B = 1\ T$ ortogonale al piano della traiettoria, formando con l'asse y l'angolo $\theta = 30$.
Calcolare l'angolo θ' della direzione di uscita con l'asse y e la distanza lungo y tra il punto d'uscita e di ingresso.





Formule utilizzate

$E_K = \frac{1}{2}mv^2$
$|v| = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$
Forza di Lorentz sulla carica: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Soluzione punto a

Dato $\vec{F} \perp \vec{s}$
$\vec{F} = m\frac{v^2}{r}\vec{u_r}$
$a = \frac{v^2}{r}$

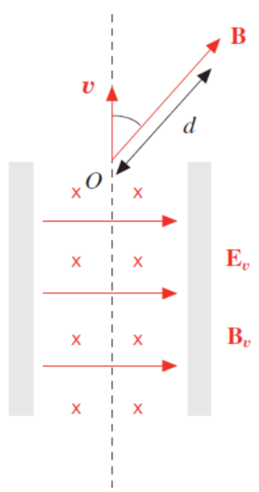
Indico con α l'angolo che si forma fra il punto di entrata nel campo e il centro O.
$\theta + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi$
$\alpha = \pi - \frac{\pi}{2} - \theta$
$\beta + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi$
$\beta = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \theta$
$\theta' = \theta = 30$
$\vec{UI} = 2\vec{IO'} = 2\vec{UO'}$
$\vec{IO'} = r \sin\beta = r \sin\theta$

Soluzione punto b

$F = m\frac{v^2}{r}\vec{u_r}$ $F = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
$r = \frac{mv}{qB}$ con $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$
$r = \ mqB\sqrt{\frac{2E_k}{m}} = 0.354\ m$

7.4

Da un selettore di velocità, che opera in un campo elettrico $E_v = 10^5 \ \frac{V}{m}$ e in un campo magnetico $B_v = 0.5 \ T$ esce un fascio collimato di ioni Li^+.
Nel punto O, all'uscita del selettore di velocità, il fascio entra in una regione in cui esiste un campo magnetico B uniforme, parallelo al piano del disegno e formante un angolo θ con l0asse x.
Dopo un tempo $t = 6.28 * 10^{-6} \ s$ un aparticella si è allontanata da O di una distanza $d = 62.8 \ cm$ percorrendo 10 giri attorno a B.
a) Calcolare la velocità degli ioni.
b) Calcolare il valore di B.
c) Calcolare il valore di θ.
d) Calcolare il raggio r della traiettoria elicoidale.



Formule utilizzate

$\vec{F_L} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
$\vec{F_e} = q\vec{E}$

Soluzione punto a

$\vec{F_L} + \vec{F_e} = 0$ ma se $\vec{v} \perp \vec{E}$ allora: $|\vec{F_L}| - |\vec{F_e}| = 0$
$vB = E \ v = \frac{E}{B} = 2.0 * 10^5 \frac{m}{s}$

Soluzione punto b

$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$
$\hookrightarrow F_{\perp} = q\vec{v_{\perp}} \wedge \vec{B}$
$\hookrightarrow F_{\parallel} = q\vec{v_{\parallel}} \wedge \vec{B} = 0$
Se dopo 10 giri $t_10 = 6.28 * 10^{-6}\ s$
Un giro $t_1 = 6.28 * 19^{-7}$
$\omega = \frac{2\pi}{T}$
$qB = \frac{mv_{\perp}}{r}$
$B = \frac{mv_{\perp}}{rq}$

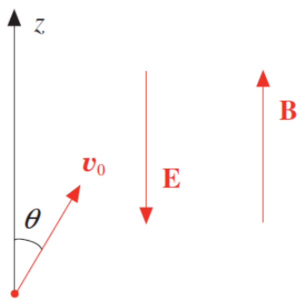
Soluzione punto c

$d = v\cos\theta t$
$qvB = \frac{mv^2}{2}$ $qB = \frac{mv}{r}$ $r = \frac{mv}{qB}$ $r = \frac{mv\sin\theta}{qB}$

Soluzione punto d

7.6

Una regione di spazio è sede di un campo elettrico $E = -E_{\vec{u_z}}$ con $E = 10^5\ \frac{V}{m}$ e di un campo magnetico $B = B_{\vec{u_z}}$ con $B = 0.1\ T$.
Un protone viene immesso nella regione con $v_0 = 5 * 10^6\ \frac{m}{s}$ formante un angolo $\theta = 30$ con l'asse z.
Mostrare che il protone percorre un'orbita elicoidale il cui asse è parallelo all'asse z.
a) Calcolare il raggio r dell'elica e la distanza z_1 percorsa dal protone nel primo giro.
b) Calcolare inoltre la distanza z_0 percorsa prima che il protone inverta il suo moto lungo z.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

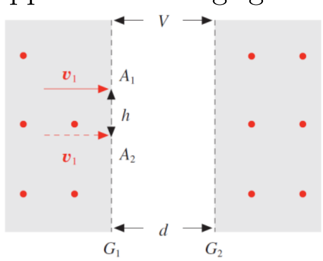
$v_{0z} = v_0 \sin\theta$
$v_{0y} = v_0 \cos\theta$
$\vec{F_L} = \left(q\ \vec{v_{0y}} \wedge \vec{B}\right) \vec{u_x}$
Utilizziamo solo la componente y di v perchè z è parallela.
ma $v_0 z$ non è costante perchè c'è un campo che la modifica, E.
v cala con $\vec{F} = q\vec{E} = -ma$
$m_{az} = -qE\ a_z = -\frac{qE}{m}$
$\vec{v_z} = \vec{v_0}t + \vec{a_z}t = \vec{v_0}t - \frac{q\vec{E}}{m}t$
$z = z_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = z_0 + \vec{v_0}t - \frac{q\vec{E}t}{m} - \frac{qEt^2}{2}$
$z_1 = z$ dopo 1 giro
T periodo di rotazione
$z_y = v_0 \cos\theta T - \frac{1}{2}\frac{q}{m}ET^2$
$T = \frac{2\pi}{\omega}$ con $\omega = \frac{v_0 \sin\theta}{r}$

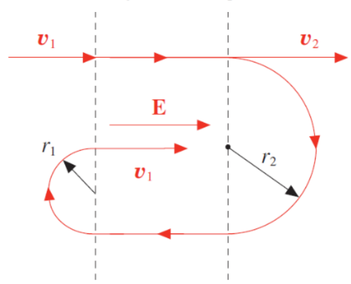
Sia z* lo spazio percorso di fermarsi.
Dall'equazione del moto unformemente accellerato
$v_f^2 = v_i^2 + 2as \; v_f = 0$
$v_i = v_0 \cos\theta \; a = -\frac{qE}{m} \; s = z*$
abbiamo:
$(r_0 \cos\theta)^2 = 2\frac{qE}{m} z*$
$z* = \frac{m_0 v_o^2 \cos^2\theta}{2qE}$

Soluzione punto b

7.7

Due griglie G_1 e G_2 metalliche parallele molto estese distanti $d = 4\ cm$, tra le quali è applicata una ddp V separando due regioni in cui esiste un campo magnetico $B = 0.8\ T$ uniforme, ortogonale al foglio.
In un punto A_1 viene iniettato un protone con $vel = v_1$ che a $t_0 = 0$ attraversa la griglia perpendicolarmente.
Dopo un tempo $t = 1.22 * 10^{-7}\ s$ il protone riattraversa G_1 nello stesso verso in un punto A_2 distante $h = 5.2\ cm$ da A_1.
Descrivere la traiettoria percorsa dal protone A_1 e A_2 e calcolare la d.d.p. V applicata tra le griglie e la velocità v_1 e v_2 elle 2 regioni in cui c'è campo.





Formule utilizzate

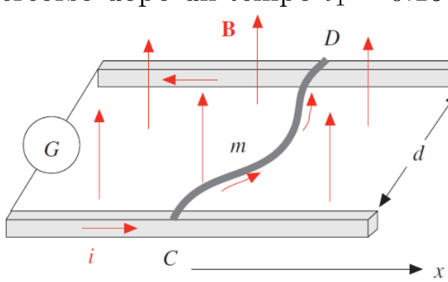
Soluzione punto a

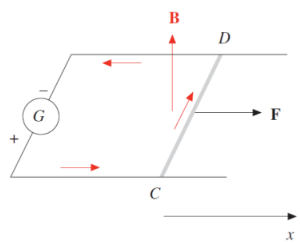
$\Delta = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$
$d = v_m t$
$v_m = \frac{v_2+v_1}{m}$
$h = \overrightarrow{A_1A_2} = 2(r_2 - r_1)$
$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = q\Delta v$
$\Delta V = \frac{\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)}{q}$

Soluzione punto b

7.10

Un filo metallico rigido di forma qualunque ha due estremi c e n che possono scorrere senza attrito su due rotaie orizzontali distanti $d = 20\ cm$.
Le rotaie sono poste in un campo magnetico $B = 0.5\ T$ uniforme e verticale.
Il cicuito è percorso da una corrente costante $i = 2A$ fornita dal generatore G.
Se la massa del filo è m=2g calcolare la velocità v del filo e lo spazio x percorso dopo un tempo $t_1 = 0.15$, nell'ipotesi t=0 il filo sia fermo.





Formule utilizzate

Soluzione punto a

$\vec{F} = i\int_C^D d\vec{s} \wedge \vec{B} = i\vec{CD} \wedge \vec{B} = iBd\vec{u_x}$
$v = \frac{iBd}{m}t_1 = 10 fracms$
$x = \frac{1}{2}\frac{iBd}{m}t_1^2 = 0.5\ m$

Soluzione punto b

7.11

Una spira quadrata di lato $a = 5\ cm$ è percorsa da corrente i.
Il momento magnetico della spira è $m = m_x \vec{u_x} + B_z \vec{u_z}$ con $B_x = 0.25\ T$, $B_z = 0.30\ T$.
Calcolare il valore della corrente i, il modulo del momento meccanico $\vec{H}$, l'angolo α tra $\vec{m} e \vec{B}$, l'energia potenziale magnetica U_p.

Formule utilizzate

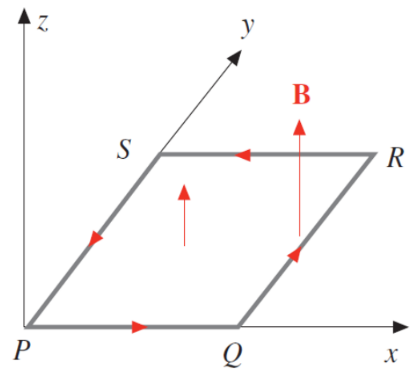
Soluzione punto a

$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = 10^{-3}\ Am^2$
$i = \frac{m}{a^2} = 0.4\ A$ dato $i = \frac{m}{s} cons = a^2$
$B = \sqrt{B_x^2 + B_z^2} = 0.39\ T$
$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B} = m_y B_z \vec{u_x} - m_x B_z \vec{u_y} - m_y B_x \vec{u_z}$
$M = \sqrt{\left(m_x^2 + m_y^2\right) B_z^2 + m_y^2 B_x^2}$
$M = mB \sin\alpha\ \sin\alpha = \frac{M}{mB}$
$U_p = -\vec{m} \wedge \vec{B} = -m_x B_x$

Soluzione punto b

7.12

Una spira quadrata di lato $a = 20cm$ è posta nel piano xy ed è percorsa dalla corrente $i = 5A$ nel verso indicato.
Essa risente dell'azione del campo magnetico $\vec{B} = \alpha x \vec{u_z}$ con $\alpha = 0.2\frac{T}{m}$.
Calcolare la forza F che agisce sulla spira e l'energia potenziale magnetica U_p.



Formule utilizzate

$\vec{F} = i\int_a^b d\vec{s}x\vec{B}$
$U_p = -\vec{m} * \vec{B}$
$\vec{m} = iS\vec{u_n}$

Soluzione punto a

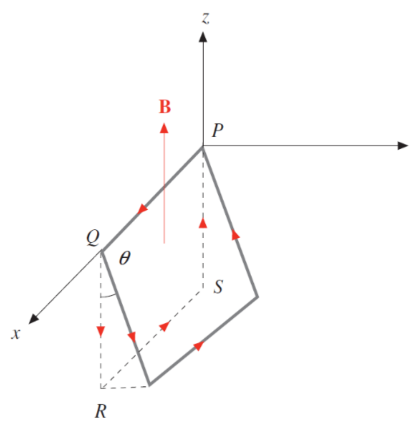
se x = a, $\beta = \alpha a$
sapendo $d\vec{s} \perp \vec{B}$
$\vec{F_{PQ}} = \frac{i\alpha a^2}{2}$
$\vec{F_{QR}} = i\int_Q^R dy\alpha a = i\alpha a[y]_Q^R = i\alpha a^2(\vec{u_x})$
Sommando i quattro vettori capiamo che si annullano le due sulle y
Le forze su y non si annullano perchè dipendono da x, e si azzera solo quella con x = 0 perchè li il campo $vecB = \alpha x$ vale 0 per x = 0.
$\vec{F} = \vec{F_{SP}} + \vec{F_{PQ}} + \vec{F_{QR}} + \vec{F_{RS}} = 0 - \frac{i\alpha a^2}{2}\vec{u_y} + i\alpha a^2\vec{u_x} + \frac{i\alpha a^2}{2}\vec{u_y} = i\alpha a^2\vec{u_x}$

Soluzione punto b

Per la regola della mano destra sappiamo che l'energia potenziale magnetica è uscente dal piano xy.
Però lungo la spira il campo magnetico B non è costante, quindi dobbiamo integrare per ottenere l'energia
$U_p = -\int_\Sigma d\vec{m} * \vec{B}$
$d\Sigma = adx$
$d\vec{m} = id\Sigma\vec{u_n} = iadx\vec{u_n}$
$dU_p = iadx\vec{u_n}\vec{B} = -iadx(\vec{u_z})\alpha x\vec{u_z} = -ia\alpha xdx$
$U_p = -ia\alpha\int_0^a xdx = -\frac{i\alpha a^3}{2}$

7.13

Una spira rettangolare rigida, di lati $\vec{PQ} = \vec{RS} = a = 20cm$ e $\vec{QR} = \vec{SP} = b = 10cm$, ha una massa per unità di lunghezza $\delta = 5 * 10^{-2} \frac{g}{cm}$ ed è percorsa da una corrente.
Essa può ruotare senza attrito intorno a $\vec{PQ}$ che è parallelo all'asse x orizzontale. Quando sulla spira agisce un campo magnetico uniforme e verticale $\vec{B} = B\vec{u_z}$ con $B = 2 * 10^{-2} T$ essa ruota di un angolo $\theta = 30$.
Calcolare il valore della corrente i e il lavoro W fatto dal campo sulla spira durante la rotazione.



Formule utilizzate

$\vec{m} = i\ S\ \vec{u_n} = i\ a\ b\ \vec{u_n}$
$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B} = i\ a\ bBcos\theta\vec{u_x}$
$\vec{M_{peso}} = -2\Delta(a+b)\frac{b}{2}gsen\theta\vec{u_x}$

Soluzione punto a

All'equilibrio: $\vec{M} = \vec{M_{peso}}$
Andiamo a calcolare la forza peso e il momento sui due bracci posti in $\vec{u_z}$
$\vec{M_{PQ}} = \frac{b}{2}sen\theta\Delta b\ g$

Soluzione punto b

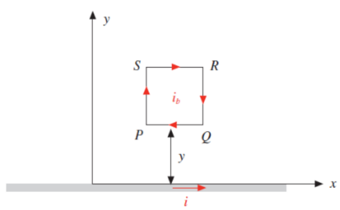
da $dW = Md\theta$
otteniamo: $W = \int_0^\theta Md\theta$

$W = iabB\int_0^{30} cos\theta d\theta = iabBsin30$
Alternativamente si poteva calcolare come differenza di energia potenziale
$W = -(U_p^f - U_p^i) = -U_p^f = i \triangle \phi(\vec{B})) = iabBcos60 = W$

Capitolo 8

8.1

Una bobina rigida quadrata di lato a = 2cm, formata da N = 20 spire compatte, e percorsa da una corrente $i_b = 2A$ ed è posta a distanza y da un filo indefinito percorso da una corrente i = 50A.
Calcolare la forza magnetica $\vec{F}(y)$ che agisce sulla bobina dimostrando che per $y \gg a$, $F = \frac{mdB}{dy}$, se m è il momento magnetico della bobina e B il campo del filo.
Calcolare inoltre il lavoro W_1 compiuto dalla forza magnetica per spostare la bobina da $y_1 = 1cm$ e $y_2 = 2cm$ e il lavoro W_2 compiuto dalla forza magnetica per ruotare di 180° la bobina, quando $y = y_4 = 20cm$.



Formule utilizzate

$\vec{F} = i \int_A^B d\vec{j} \wedge \vec{B}$

Soluzione punto a

il filo percorso da corrente i produce un campo $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}$ con direzione che sarà uscente al di sopra e entrante al di sotto dell'asse x.
in $\vec{PQ}$ il campo magnetico è pari a $B = \frac{\mu \ i}{2\pi y}$
in $\vec{SR}$ il campo magnetico è pari a $B = \frac{\mu \ i}{2\pi (y+a)}$
in $\vec{PS}$ la forza è opposta a quella di $\vec{RQ}$ quindi la forza risultante è nulla, poichè:
$\vec{F_{PS}} = \frac{i^2 \mu_0}{2\pi} \int_P^S \frac{1}{y} dy$
$\vec{F_{RQ}} = \frac{i^2 \mu_0}{2\pi} \int_R^Q \frac{1}{y} dy$
$\vec{F}(y) = \vec{F_{PQ}} + \vec{F_{RS}} = \frac{\mu_0 \ N \ i \ i_b \ a}{2 \ \pi} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a} \right) \vec{u_y} = \frac{\mu_0 \ N \ i \ i_b \ a^2}{2 \ \pi \ y \ (y+a)} \vec{u_y}$
La forza ottenuta è repulsiva e questo è corente con $\vec{F} = N i_b \triangle \phi(\vec{B})$ dove $\phi(\vec{B})$ è il flusso del campo magnetico generato attraverso la bobina.

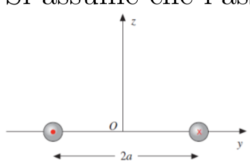
Se la spira si allontana il glusso di B diventa meno negativo, cioè aumenta. Dato che la bobina percorsa da corrente i_b ha area Na^2 il suo momento magnetico vale:
$vecm = -N\ i_b\ a^2\ \vec{u_z}$
mentre il filo percorso da una corrente i ad una distanza y produce un campo magnetico B che vale:
$\vec{B} = \frac{\mu_0\ i}{2\pi y}\vec{u_z}$
Si nota che: $\vec{F} = \bigtriangledown(\vec{m} * \vec{B}) = \bigtriangledown(mB_z) = m\frac{dB_z}{dy}\vec{u_y}$
$F(y) = m\frac{dB}{dy} = -Ni_b a^2 \frac{d}{dy}\left[\frac{\mu_0\ i}{2\pi y}\right] = \frac{\mu_0\ N\ i\ i_b\ a^2}{2\pi y^2}$
$W_1 = \int_{y_1}^{y_2} F dy = \frac{\mu_0 N i i_b a}{2\pi}\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a}\right)dy = \frac{\mu_0 N i i_b a}{2\pi} ln\left(\frac{y_2(y_1+a)}{y_1(y_2+a)}\right)$

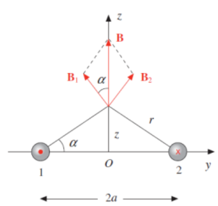
Soluzione punto b

$W_2 = \Delta U_p = U_p(f) - U_p(i) = -\vec{mi} * \vec{B} + \vec{mf} * \vec{B}$
$m = iS = ia^2 = mi = mf$

8.2

Due fili indefiniti distanti 2a=4cm, paralleli all'asse x solo percorsi indicati in figura.
Calcolare il campo magnetico $\vec{B}(z)$ sull'asse dei due fili e a quale distanza dal centro O si arresti un piccolo magnete lanciato con velocità $v_0 = 7.1 * 10^{-2}\frac{m}{s}$ da O lungo l'asse z, di massa $mg = 3.97 * 10^{-2}kg$ e momento magnetico $m = 0.2Am^2$ parallelo e concorde a B.
Si assume che l'asse z orizzontale.





Formule utilizzate

Soluzione punto a

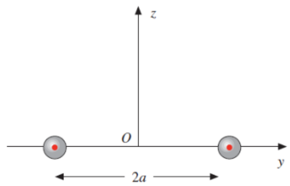
$\vec{B} = \frac{\mu_o i \vec{u_\phi}}{2\pi r}$ con $r = \sqrt{a^2 + z^2}$ $\alpha = \frac{a}{r}$
$B_{1z} = B_1 \cos\alpha$ $B_{1y} = -B_1 \sin\alpha$
$B_{2z} = B_2 \cos\alpha$ $B_{2y} = B_2 \sin\alpha$
$B_z = B_{1z} + B_{2z}$ $B_y = 0$

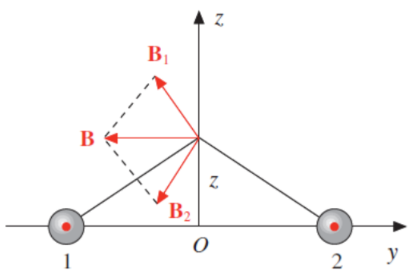
Soluzione punto b

$\Delta U = U(f) - U(i) = -mB_f + mB_i$
con $v_i = v_0$ $v_f = 0$
$\Delta E_c = -\Delta U_p$
$E_c(0) + U_p(0) = E_c(z) + U_p(z)$
$E_c(z) = 0$ $U_p = -mB$
$B(0) = \frac{\mu_0 i a}{\pi a^2} = \frac{\mu_0 i}{\pi a}$

8.3

Due fili indefiniti distanti 2a =4cm, paralleli all'asse x.
Calcolare il campo magnetic $\vec{B}(z)$ sull'asse dei due fili e a quale distanza dal centro O un piccolo ago magnetico orientato parallelo mentre $\vec{B}$ risente di una forza non nulla.





Formule utilizzate

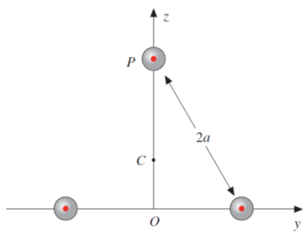
Soluzione punto a

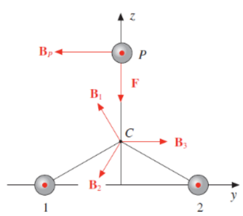
$B_{1z} + B_{2z} = B_z = 0$
$B_{1y} + B_{2y} = 2B_{1y} = B_y = 2(B_1 \sin\alpha)$
$\vec{B} = 2\frac{\mu_0 i}{2\pi\sqrt{a^2+z^2}} \sin\alpha \vec{u_y} = \frac{\mu_o iz}{\pi(a^2+z^2)}\vec{u_y}$
$\vec{F} = \nabla(\vec{m} * \vec{B}) = \nabla(mBy)$
$F = m\frac{dBy}{dz} = 0$
$\frac{dB}{dz} = \frac{\mu_0 i}{\pi}\frac{a^2+z^2-2z^2}{(a^2+z^2)^2} = 0$

Soluzione punto b

8.4

Tre fili conduttori sono tra loro paralleli e disposti ai vertici di un triangolo equilibrato di lato 2a=15cm.
Essi sono percorsi dalla stessa corrente i=10A corrente concorde all'asse x.
Calcolare il cmapo magnetico $\vec{B_c}$ nel centro C del triangolo e la forza F per unità di lunghezza sul filo disposto in P.





Formule utilizzate

$\vec{B_p} = \frac{\mu_0 i\sqrt{3}}{4\pi a}\vec{u_x}$ per $z = a\sqrt{3}$

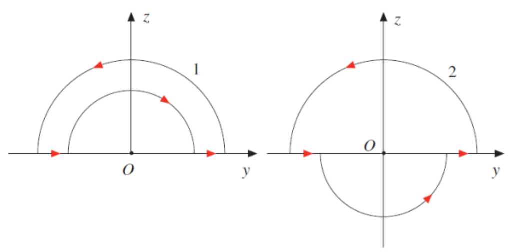
Soluzione punto a

$\vec{B_1} + \vec{B_2} + \vec{B_3} = 0$
$\vec{F} = i\int d\vec{g} \wedge \vec{B} = i\int dsB = iB\int ds$
$\vec{B_p} = \vec{B_1} + \vec{B_2}$
$\vec{B_c} = \vec{B_1} + \vec{B_2} + \vec{B_3}$

Soluzione punto b

8.6

Nei due circuiti in figura i raggi delle semicirconferenze sono $a = 10\ cm$ e $b = 15\ cm$.
a) Se la corrente vale $i = 20\ A$ calcolare per entrambi il campo magnetico $\vec{B_0}$ nel centro O delle semicirconferenze.
b) Calcolare il momento magnetico $\vec{m}$.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Il campo magnetico in O generato da ogni semicerchio si trova dimezzando l'espressione del camo di una spira circolare al centro della spira oppure applicando direttamente la prima legge elementare di Laplace.
Nominando i 4 punti sull'asse y come A, B, C, D partendo da sinistra:
$\vec{B_{AB}}(O) = \vec{B_{CD}}(O) = 0$ poichè paralleli a $\vec{u_r}$
$\vec{B_{BC}}(O) = \int_B^C \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \wedge \vec{u_r}}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \int_B^C ds(-\vec{u_x})$ con $\int_B^C = \pi a$
Stesso procedimento per $\vec{B_{DA}}$ ma con direzione $\vec{u_x}$
$\vec{B_0} = \frac{\mu_0 i}{4b}\vec{u_x} - \frac{\mu_0 i}{4a}\vec{u_x}$
essendo che i due tratti rettilinei danno contributo nullo ($d\vec{s} \parallel \vec{u_r}$).
Numericamente:
$B_O = \frac{1.26*10^{-6}*20}{4}\left(\frac{1}{0.15} - \frac{1}{0.1}\right) = -2.1 * 10^{-5}\ T$

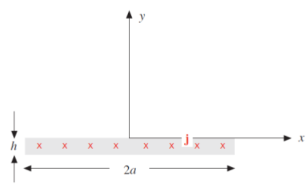
Per il secondo campo:
$\vec{B_{AB}}$, $\vec{B_{CD}}$, $\vec{B_{DA}}$ sono uguali a prima, mentre $\vec{B_{BC}}$ ha segno opposto.
$\vec{B_0} = \frac{\mu_0 i}{4b}\vec{u_x} + \frac{\mu_0 i}{4a}\vec{u_x}$
Numericamente:
$B_0 = \frac{1.26*10^{-6}*20}{4}\left(\frac{1}{0.15} + \frac{1}{0.1}\right) = 10.5 * 10^{-5}\ T$

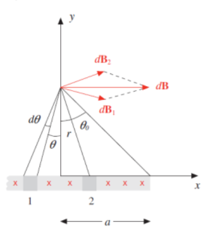
Soluzione punto b

Nella prima situazione:
$\vec{m} = i\frac{\pi}{2}\left(b^2 - a^2\right)\vec{u_x} = 0.39\vec{u_x}\ Am^2$
Nella seconda situazione:
$\vec{m} = i\frac{\pi}{2}\left(b^2 + a^2\right)\vec{u_x} = 1.02\vec{u_x}\ Am^2$

8.7

Una lamina conduttrice infinitamente lunga, di sezione rettangolare con lati $2a = 10\ cm$ e con $h = 0.1\ cm$ è percorsa da una corrente di densità uniforme $j = 2\ \frac{A}{mm^2}$.
a) Calcolare il campo magnetico lungo l'asse y della lamina e il momento meccanico $\vec{M}$ che agisce su un piccolo ago magnetico di momento $m = 0.2\vec{u_y}\ Am^2$, posto a distanza $y_0 = 4\ cm$ dalla lamina.
b) Dimostrare che per $a \to \infty$ si ottengono i risultati dell'esercizio 8.8 e per $2a \ll y$ i risultati dell'esercizio 8.5.





Formule utilizzate

Soluzione punto a

La corrente che scorre in un elemento infinitesimo di lamina di larghezza dx è :
$di = jhdx$
Ogni coppia di elementi infinitesimi, simmetrica rispetto all'asse, contribuirà al campo magnetico con:
$d\vec{B} = d\vec{B_1} + d\vec{B_2} = 2\frac{\mu_0 di}{2\pi r}\cos\theta\vec{u_x}$
$y\tan\theta = x \ \rightarrow \ \frac{y}{\cos^2\theta}d\theta = dx \ \rightarrow \ \frac{y}{\cos\theta}d\theta = \cos\theta dx \ \rightarrow \ rd\theta = \cos\theta dx$
$d\vec{B} = \frac{\mu_0 jh}{\pi}d\theta\vec{u_x}$
Integrando su tutta la lampadina si ottiene il campo totale lungo l'asse:
$\vec{B} = \int_0^{\theta_M} d\vec{B} = \int_0^{\theta_0}\frac{\mu_0 jh}{\pi}d\theta\vec{u_x} = \frac{\mu_0 jh}{\pi}\theta_0\vec{u_x}$
L'angolo massimo θ_0, corrisponde alla coppia di elementi infinitesimi più lontani dall'asse è:

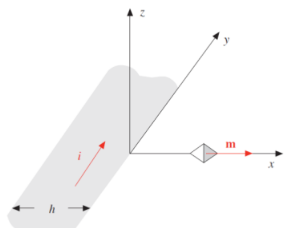
$\theta_0 = arctan\frac{a}{y}$
Quindi:
$\vec{B} = \frac{\mu_0 jh}{\pi} arctan\frac{a}{y}\vec{u_x}$
Il momento meccanico che agisce sull'ago magnetico è:
$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B} = -m\frac{\mu_0 jh}{\pi} arctan\frac{a}{y}\vec{u_z} = 2.87 * 10^{-4}\vec{u_z}$[Nm]

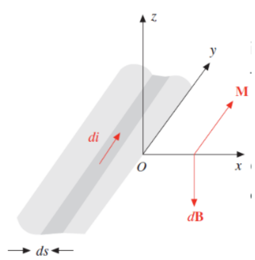
Soluzione punto b

Vediamo adesso il comportamento di $\vec{B}$ nei limiti per a tendente all'infinito e $2a \ll y$
$\lim_{a\to\infty} \vec{B} \lim_{\theta_0 \to \frac{\pi}{2}} \vec{B} \frac{\mu_0 jh}{2}\vec{u_x}$

8.8

Una sottile striscia metallica di larghezza $h = 2\ cm$ è percorsa dalla corrente $i = 10\ A$.
Calcolare il valore del campo magnetico $\vec{B}(x)$ a distanza x dal bordo della striscia (in particolare $x \gg h$) e il momento meccanico $\vec{M}$ che agisce su un piccolo ago magnetico di momento $\vec{m} = 0.1\vec{u_x}\ Am^2$ posto a distanza $x = 1\ cm$





Formule utilizzate

$\Phi\vec{B} = \frac{\mu_0 di}{2\pi(x+s)}$

Soluzione punto a

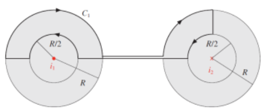
$di = \frac{i\ dx}{h}$
Chiamo s la distanza fra il filo e il bordo. Quindi il campo sul ago avra direzione $-\vec{u_z}$
$\Phi\vec{B} = \frac{\mu_0 di}{2\pi(x+s)}(-\vec{u_z})$
$d\vec{B} = \frac{\mu_0 di}{2\pi(x+s)}(-\vec{u_z})$
$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi h}\int_P^h \frac{ds}{x+s}(-\vec{u_z}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi h}\left[ln(x+s)\right]_{s=0}^{s=h}(-\vec{u_z})$
Se $x \gg h$
$\vec{B} = \int_0^h d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi h}\int_0^h \frac{ds}{x+s}(-\vec{u_z}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi h} ln\left(\frac{x+h}{h}\right)(-\vec{u_z})$
per $x \gg h$: $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{1}{x}(-\vec{u_z}) = 0$

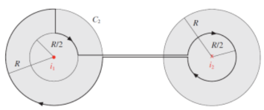
Soluzione punto b

Da fare

8.10

Due conduttori cilindrici molto lunghi di raggio R, paralleli tra loro a notevole distanza l'uno dall'altro, sono percorsi dalle correnti i_1 e i_2 in versi opposti. La circuitazione del campo magnetico lungo i percorsi chiusi C_1 e C_2 indicati in figura vale rispettivamente $\Gamma_1(B) = 0$ e $\Gamma_2(B) = -20\pi * 10^{-7}\ Tm$.
Calcolare i_1 e i_2.





Formule utilizzate

$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0\ i_{conc}$

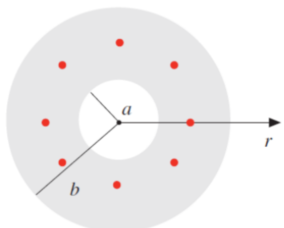
Soluzione punto a

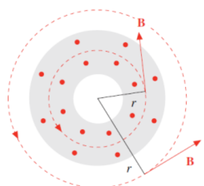
Sappiamo che $C_1 = \oint \vec{B} d\vec{s} = 0$ e $C_2 = \oint \vec{B} d\vec{s} = -20\pi * 10^{-7}\ Tm$
$i_{conc} = i_A + i_B$
utilizzando una proporzione $i_A * \frac{1}{2}\pi \left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right) = i_1 \pi R^2$
$i_A = i_1 * \frac{3}{8}$ e $i_B = \frac{3}{16} i_2$
i_A avrà segno negativo, invece i_B ha segno positivo
ottenitamo: $\Gamma_1(\vec{B}) = \mu_0 \left(-i_A + i_B\right) = -\frac{3}{8}\mu_0 \left(i_1 - \frac{i_2}{2}\right) = 0$
Stesso procedimento per la seconda situazione:
$i_A = \frac{13}{16} i_1$ negativo. $i_B = \frac{1}{4} i_2$ positivo. La corrente è proporzionale alla superficie.

Soluzione punto b

8.11

Un conduttore cilindrico cavo di raggi a e b è percorso da una corrente distribuita uniformemente.
Calcolare il campo magnetico B(r) in funzione della distanza r dall'asse.
Ricavare i risultati relativi ad un conduttore cilindrico pieno.





Formule utilizzate

Soluzione punto a

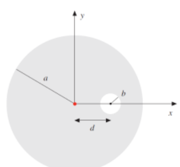
Dato che questa è una simmetria cilindrica posso semplificare la formula di Ampere.
$B(r)2\pi r = \mu_0 i_{conc}$
se $r < a$: $B(r) = 0$
se $a < r < b$: $B(r)2\pi r = \mu_0 i_{conc}$ con $i_{conc} = \frac{\pi\left(r^2-a^2\right)}{\pi(b^2-a^2)}i$
se $r > b$: $B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

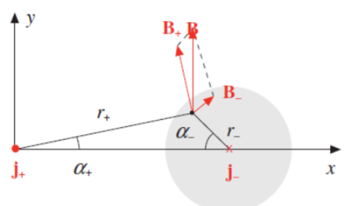
Soluzione punto b

Naso del cilindro pieno: ovvero quando a = 0. Posso utilizzare le funzioni trovate precedentemente con a = 0.

8.12

Un conduttore cilindrico molto lungo di raggio $a = 2\ cm$ ha nel suo interno una cavità cilindrica di raggio $b = 0.3\ cm$, essa pure molto lunga. Gli assi dei due cilindri sono paralleli e distano $d = 1\ cm$. Nel conduttore fluisce una corrente $i = 20\ A$, distribuita uniformemente.
Dimostrare che il campo magnetico $\vec{B}$ all'interno della cavità è costante, calcolandone modulo e direzione.
Calcolare inoltre l'energia magnetica e l'induttanza per unità di lunghezza del conduttore.





Formule utilizzate

$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 i_{conc}$

Soluzione punto a

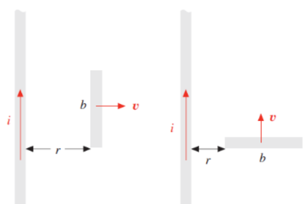
Per risolvere questo problema, che sembra non avere semplificazione poichè non ha simmetria, in realtà possiamo considerare il foro interno come la somma di due campi opposti che si annullano fra loro.
A questo punto troviamo ad avere il campo di un cilindro + una carica inversa in un cilindro più piccolo interno. Questo si può fare per il principio di sovrapposizione.

Soluzione punto b

Capitolo 10

10.1

Una sbarretta conduttrice di lunghezza b si muove con velocità v costante e ortogonale ad un filo rettilineo indefinito per corso dalla corrente i.
Calcolare la tensione ai cai della sbarretta in funzione della distanza r dal filo.
Ripetere il calcolo quando la sbarretta si muove con velocità costante parallela al filo e l'estremo più vicino al filo dista da r.



Formule utilizzate

Soluzione punto a

$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \wedge \vec{B}$
Per la legge di Biot-Savart $\vec{B} = \frac{\mu_0 i \vec{u_\phi}}{2\pi r}$
Integradno su tutta la barra lunga b, otteniamo la forza elettromotrice $\varepsilon_1 = \int_o^b \vec{E}_i d\vec{s} = \int_0^b \vec{v} \wedge \vec{B} ds = \frac{\mu_0 ivb}{2\pi r}$
Analogamente: $\varepsilon_2 = \int_r^{r+b} \vec{E}_i d\vec{s} = \int_r^{r+b} \vec{v} \wedge \vec{B} ds = -\frac{\mu_0 iv}{2\pi} \int_r^{r+b} \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 iv}{2\pi} ln\left(1 + \frac{b}{r}\right)$
Il segno indica che ha potenziale maggiore l'estremo più vicino al fino.

Soluzione punto b

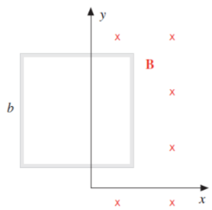
Si scriva lo stesso risultato anche ragionando con il flusso tagliato, ovvero tenuto conto che il flusso Φ è il prodotto del campo magnetico B per l'area Σ che viene "tagliata" dal flusso.
$\Phi = \int_\Sigma \vec{B} \vec{u_n} d\Sigma$
$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$
$d\Sigma = bdx \qquad d\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} bdx$
$\Phi = \frac{\mu_0 ib}{2\pi r} \int_0^x dx = \frac{\mu_0 ibx}{2\pi r}$

$\varepsilon_1 = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 ib}{2\pi r}v$

Utilizzando il flusso tagliato con $d\Sigma = ydr$:
$d\Phi = \frac{\mu_0 iy}{2\pi r}ydr$
$\Phi = \frac{\mu_0 iy}{2\pi}\int_r^{r+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 iy}{2\pi}ln\left(1+\frac{b}{r}\right)$
$\varepsilon_2 = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}v\ ln\left(1+\frac{b}{r}\right)$

10.2

Una spira conduttrice quadrata, di lato $b = 20\ cm$, massa $m = 4\ g$, resistenza $R = 25\ \Omega$, si muove senza attrito sul piano x,y con velocità costante $v_0 = 4 * 10^{-2}\ \frac{m}{s}$. Per $x \geq 0$ esiste un campo magnetico uniforme e costante di valore $B = 0.5\ T$ e la spira entra in questa regione all'istante t = 0.
Calcolare la velocità v_1 raggiunta dalla spira dopo $t_1 = 2.9\ s$ sapendo che in quell'istante la spira è ancora soltanto parzialmente inserita nel campo, l'energia dissipata nel circuito fino al tempo t_1, la velocità v_2, la carica q che circola nella spira durante l'intero processo.



Formule utilizzate

$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \wedge \vec{B}$
$\varepsilon_i = vBb$
$i = \frac{vbB}{R}$

Soluzione punto a

La forza sul lato destro in movimento del circuito vale:
$F = ibB = \frac{vb^2B^2}{R}$ opposta al moto.
Il modo diventa $m\frac{dv}{dt} = -\frac{vb^2B^2}{R}$
$log\frac{v(t)}{v_0} = -\frac{b^2B^2}{mR}t$
Il moto risulta esponenzialmente smorzato
$v(t) = v_0\ exp(-\frac{t}{\tau})$
Con costante di tempo: $\tau = \frac{mR}{b^2B^2} = 10\ s$
$v_1 = v_0\ exp(-\frac{t_1}{\tau}) = 3 * 10^{-2}\ \frac{m}{s}$
Il lavoro si trova come variazione di energia cinetica della barra
$W = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 - v_1^2\right) = 1.4 * 10^{-6}\ J$
Questa energia è stata dissipata in effeto Joule. Infatti:
$i = \frac{m}{bB}\frac{dv}{dt} = \frac{m}{bB}\frac{v_0}{\tau}\ exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{v_0}{R}bB\ exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
da cui l'energia dissipata per effetto Joule è:

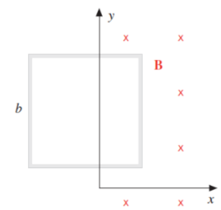
$W = \int_0^t Ri^2 dt = R\frac{v_0^2}{R^2}b^2B^2\int_0^t e^{-\frac{2t}{\tau}}dt = \frac{v_0^2b^2B^2}{R}\frac{\tau}{2}\left[1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right] = \frac{1}{2}mv_0^2\left[1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right] =$
$1.4 * 10^{-6}\ J$
Esprimendo la velocità in funzione di x:
$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{1}{v} = -\frac{1}{\tau}$
Tale equazione integrata:
$v(x) = v_0 - \frac{x}{\tau}$
Quando la spira è totalmente entrata la velocità rimane costante e pari a:
$v_2 = v_0 - \frac{b}{\tau} = 2.10^{-2}\ \frac{m}{s}$
Usando l'espressione per v(t):
$v_2 = v_0\ exp\left(-\frac{t_2}{\tau}\right) \quad t_2 = \tau ln\left(\frac{v_0}{v_2}\right) = 6.9\ s$

Soluzione punto b

Per calcolare la carica che che circola nella spira nell'intero processo si applica la legge di Felici:
$q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{Bb^2}{R} = 8 * 10^{-4}\ C$

10.4

Una spira quadrata di lato $b = 9\ cm$, massa $m = 5\ g$ e resistenza $R = 10^{-3}\ \Omega$, si muove con velocità costante $v_0 = 5\ \frac{m}{s}$ lungo l'asse z. All'istante t = 0 il suo lato anteriore comincia ad entrare nella regione $x \geq 0$ in cui esiste campo magnetico $\vec{B}$, ortogonale al piano della spira, dipendente da x secondo la legge $B(x) = \alpha x$ con $\alpha = 2\ \frac{T}{m}$.
Calcolare la forza F(x) che agisce sulla spira, la velocità v(x) della spira e in particolare v(x = b), la carica q che circola nella spira.



Formule utilizzate

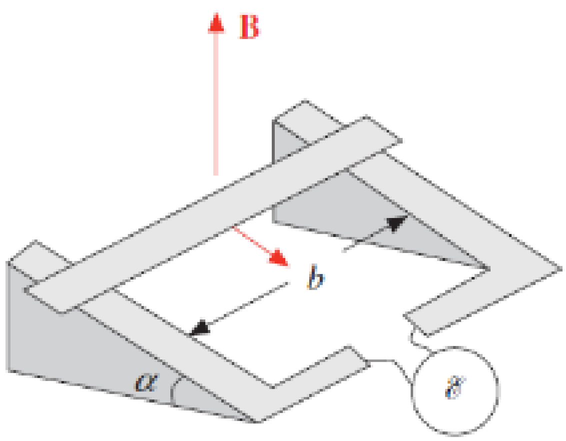
Soluzione punto a

Il campo elettromotore: $\vec{E}_i = \frac{F}{q} = \vec{v} \wedge \vec{B}$
Che produce una f.e.m. $\varepsilon_i = \int \vec{E}_i d\vec{s} = vb\alpha x$
$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{vb\alpha x}{R}$ in verso antiorario.
$F(x) = ibB = b^2\alpha^2 x^2 \frac{v}{R}$ opposta al moto.
$m\frac{dv}{dt} = -\frac{b^2\alpha^2}{R}x^2 v$
$dv = -\frac{b^2\alpha^2}{mR}x^2 dx$
$\int_{v_0}^{v(x)} dv = -\frac{b^2\alpha^2}{mR}\int_0^x x^2 dx$
$v(x) = v_0 - \frac{b^2\alpha^2}{3mR}x^3 = 5 - 2160x^3\ \frac{m}{s}$
$v(x = b) = 5 - 2160 * 0.09^3 = 3.43\ \frac{m}{s}$
Usando la legge di Felici:
$q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{1}{R}b\int_0^b \alpha x dx = \frac{\alpha b^3}{2R} = 0.73\ C$

Soluzione punto b

10.6

Una sbarra orizzontale di lunghezza $b = 20\ cm$, sezione Σ, densità $\delta = 3*10^3\ \frac{kg}{m^3}$, resistività $\rho = 2*10^{-5}\Omega m$ può scivolare senza attrito su due guide parallele, separate dalla distanza b e inclinate di un angolo $\alpha = 30$ rispetto al piano orizzontale.
Le due guide, di resistenza trascurabile, sono collegate ad un generatore di f.e.m. ε. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.3\ T$ diretto secondo la verticale.
Calcolare il valore di ε affinché la sbarra rimanga ferma, la velocità limite v_∞ con cui la sbarra scende se il generatore viene sostituito da un corto circuito, la potenza dissipata nella sbarra quando essa scende con velocità v_∞. (per quest'ultima domanda si assuma $\Sigma = 1\ cm^2$).



Formule utilizzate

Soluzione punto a

Sulla sbarra agiscono due forze: la forza peso e quella associata al conduttore percorso da corrente in una regione in cui è presente un campo magnetico.
La sbarra sarà ferma quando le componenti tangenti al piano sono uguali e opposte (con i che fluisce in verso antiorario): $\frac{\varepsilon}{R}Bb\ cos\alpha = mg\ sen\alpha$
Ovvero quando: $\varepsilon = R\frac{Rmg}{bB}tan\alpha = \frac{\rho b\delta b\Sigma g}{\Sigma bB}tan\alpha = \frac{\rho\delta bg}{B}tan\alpha = 0.226\ V$
Se il generatore viene sostituito da un corto circuito, la barra comincia a muoversi e si produce una fem che dalla regola del flusso tagliato vale $\varepsilon = Bb\ cos\alpha v$ cui corrisponde una forza "viscosa" frenante la cui componenete

parallela al piano è: $F_{viscosa} = \frac{B^2b^2cos^2\alpha}{R}v$ opposta alla direzione del moto.
A regime, detta v_∞ la velocità limite: $\frac{B^2b^2cos^2\alpha}{R}v_\infty = mg\ sin\alpha$
Da cui si calcola la velocità con cui scende la sbarra $v_\infty = \frac{mR}{b^2}\frac{g}{R^2}\frac{sin\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{\rho\delta g}{R^2}\frac{sin\alpha}{cos^2\alpha} = 4.36\ \frac{m}{s}$
Infine la potenza dissipata: $P = \vec{F_g}\ \vec{v} = mg\ sin\alpha\ v_\infty = \delta\Sigma bgsin\alpha v_\infty = 1.28\ W$

Soluzione punto b

10.7

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.9

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.12

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.13

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.15

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.16

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.21

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

10.23

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

Capitolo 13

13.2

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

13.3

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

13.4

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

13.5

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

13.8

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b

13.9

Formule utilizzate

Soluzione punto a

Soluzione punto b