Temesi József

A döntéselmélet alapjai

Aula, 2002
Budapest

Lektorálta: Solymosi Tamás

A könyv az Oktatási Minisztérium támogatásával, a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított felsőoktatási tankönyvtámogatási program keretében jelent meg.

ISBN 963 9345 64 4

Az AULA Kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének a tagja.

Előszó

Ez a könyv a döntéselmélet (az angol nyelvű szakirodalomban szokásos elnevezéssel: Decision Theory) alapfogalmaival, módszereivel és a döntéselmélet alkalmazásakor fellépő módszertani és viselkedéstani problémákkal, paradoxonokkal ismerteti meg az olvasót.

Elsősorban egyetemi hallgatók számára készült: a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem operációkutatást tanuló hallgatóinak egy féléves döntéselméleti bevezető tantárgyának anyagát öleli fel. A könyvben felépített fogalomrendszer jól felhasználható közgazdasági, üzleti, szociológiai és pszichológiai stúdiumokban, és magasabb szintű operációkutatási, vezetéstudományi vagy döntéstámogatási tantárgyak megalapozásaként. Az egyes fejezetekben tárgyalt módszerek széles körben hozzáférhető számítógépes programcsomagok egyes elemei, azaz a könyv elméleti hátteret szolgáltat ezen döntési szoftverek használatához is (Expert Choice, MAUT, PREFCALC, stb.).

A szakirodalomban a döntési módszerek tárgyalása, a döntéselemzés (Decision Analysis) szűkebb és tágabb értelmezésben egyaránt használatos. Attól függően, hogy a közgazdasági, üzleti, statisztikai, pszichológiai, szociológiai vonatkozások közül melyekre fektetjük a fő hangsúlyt, eltérő szemléletű és a matematikai eszközöket különböző mélységben felhasználó tárgyalás lehetséges. Ennek a könyvnek az a célja, hogy gazdasági döntések területén használatos alapfogalmakról, módszertani megközelítésekről adjon áttekintést.

A tankönyv alapvető fejezetei a döntéselméleti módszertan elemi matematikai bevezetését tartalmazzák. Támaszkodik ugyan az egyetemi hallgatók matematikai analízisben, algebrában és valószínűségszámításban szerzett ismereteire, de a tárgyalás — néhány fejezetrész kivételével — azok számára is követhető, akik ezen tárgyak nem mindegyikét tanulták. Megtörténik a fogalmak definiálása, a tételek kimondása és a tételekre épülő módszerek bemutatása. A könyv azonban nem matematikai alaptankönyv abban az értelemben, hogy a tételek bizonyításait nem tartalmazza, hanem csak utal azok forrására. A módszereket, algoritmusokat mintapéldák illusztrálják. Az érdeklődő olvasók számára az egyes fejezetekhez ajánlott olvasmányok jegyzéke csatlakozik.

Az egyetemi hallgatóság mellett ajánlom ezt a könyvet mindazoknak a gyakorlati gazdasági szakembereknek, akik munkájuk során ismétlődő módon komplex döntési problémákkal kerülnek szembe. E könyv elolvasása hasznos lehet számukra a problémák megfogalmazása, strukturálása tekintetében, ám abban is fontos segítséget nyújthat, hogy felismerjék saját szakértelmük, preferenciáik kinyilvánításának, modellezésének lehetőségeit. Orientálhat e könyv arra is, hogy a döntéstámogató rendszerek manapság már bőséges kínálatában tájékozódjanak, igénybe vegyék professzionális döntéstámogató szakemberek, cégek szolgáltatásait.

Kéziratos formában ezt az anyagot az 1999/2000. tanév folyamán tanulták először gazdálkodási szakos hallgatók a budapesti közgazdasági egyetemen, és egyes részeket a pécsi Közgazdaságtudományi Kar oktatásában is felhasznált Komlósi Sándor. Neki és Rapcsák Tamásnak külön köszönettel tartozom azért, hogy a tananyag könyv formájában való megjelentetésére ösztönöztek, illetve tanácsokat kaptam tőlük a tartalmi arányokra vonatkozóan is. Solymosi Tamás alapos lektori megjegyzéseit igyekeztem figyelembe venni, természetesen azonban a megmaradt hibákért én vagyok a felelős. Végül köszönettel tartozom Németh Lajosnénak a gondos gépelési munkáért.

Budapest, 2001. október 15.

Tartalomjegyzék

1. Fejezet

Alapfogalmak

A nyitó fejezetben először néhány mintapélda segítségével mutatjuk be a döntési alapfogalmakat, illetve azokat a döntési problémákat, amelyek megoldásával könyvünk foglalkozik. Mint látni fogjuk, elsősorban a véges sok döntési változót tartalmazó, egyetlen vagy több értékelési tényezővel jellemzett feladatok megoldási módszereit tárgyaljuk. Ezek a módszerek azonban több szálon kötődnek a matematikai programozásban, azon belül is a többcélú programozásban felhasznált fogalmakhoz, az ott alkalmazott megoldási elvekhez, ezért rövid kitérőt teszünk erre a területre. Ezután kerül sor a további fejezetekben fontos szerepet játszó alapfogalmak áttekintésére.

1.1 Néhány jellemző döntési probléma

Mindennapi tevékenységünk során lépten-nyomon döntéseket hozunk: kezdve a legegyszerűbbtől (mit reggelizzünk?), folytatva a napi rutin döntéseivel (villamossal menjünk hivatalba vagy autóval? vigyünk-e esernyőt? mit kell ma bevásárolni?), majd a munkahely bonyolultabb kérdései következnek (kivel és mikor folytassunk megbeszélést? mely munkákat kezdjük el vagy fejezzük be aznap?), miközben fejünkben ott járnak a rövidebb és hosszabb távú, olykor további életünket komolyan meghatározó választási lehetőségek is (ki lesz az ideális partner? cseréljük-e el lakásunkat? fogadjuk-e el egy másik cég állásajánlatát?). Közhely, hogy életünk döntések sorozata, nem véletlen tehát, hogy a legtöbb ember bizonyos sokszor ismétlődő helyzetekre akár "döntési elvnek" nevezhető szabályokat is felállít saját maga számára, és általában — saját jól felfogott érdekében — "megfontoltan" igyekszik nagyobb horderejű kérdésekben állást foglalni.

Ugyanakkor nyilvánvalóan igaz az, hogy ha minden döntési szituációban hosszas vizsgálódásba kezdenénk, netalán módszertani segítséget vennénk igénybe, életünk hamar ellehetetlenülne, lassú és bosszantó elemzésekbe bonyolódva egyre távolabb kerülnénk a normális és hatékony életviteltől. Azt is meg kell gondolnunk tehát, hogy mikor érdemes egy adott döntést alaposan előkészíteni, tudományos eszközökkel megtámogatni.

Könyvünk bevezető jellegű. A döntésekkel foglalkozó szakirodalom legfontosabb fejezeteiből válogat úgy, hogy a fent említett magánéletbeli kérdésektől kezdve a szakértői szinten felmerülő döntési problémákig átfogóan foglalkozzon olyan módszerekkel, amelyek ezen döntési feladatok megoldásához vezetnek. A további tárgyalások illusztrálása céljából kezdjük azzal, hogy megfogalmazunk néhány jellemző döntési feladatot.

1. Termelési feladat

Többféle termék előállításának mennyiségéről kell döntenünk. Döntésünket elsősorban a korlátozottan rendelkezésre álló erőforrások (nyersanyag-, munkaerő- és költségkorlátok), illetve a termelés technológiai szabványai befolyásolják. Az elérendő cél a maximális profit, de az is megeshet, hogy egyszerre kívánunk maximális eredményt elérni és minimális környezeti kárt okozni, sőt, egyéb célok is felmerülhetnek.

2. Befektetési feladat

Különböző befektetési lehetőségek közül szeretnénk a maximális hozamot biztosító portfóliót kiválasztani. Lehetőségeinknek elsősorban pénzügyi korlátok szabnak gátat. Ha óvatosak vagyunk, akkor a maximális hozamot minimális kockázattal szeretnénk elérni.

3. Iskolaválasztási probléma

Új lakásba költözve a gyerekek számára megfelelő iskolát szeretnénk találni. Ehhez sokféle szempontot határozunk meg: a lakástól való távolsággal, az oktatási színvonallal, a tandíjjal, az átlagos osztálylétszámmal, a számítógépes felszereltséggel és a sportolási lehetőségekkel jellemzett iskolák közül akarjuk a legjobbat kiválasztani.

4. Szemétégető telepítése

A városi önkormányzatnak egy új szemétégető telepítését kell megoldania úgy, hogy figyelembe veszi a technológiai megvalósítás feltételeit, a helyi munkaerő rendelkezésre állását, a telepítés költségeit és a környezeti kívánalmakat egyaránt.

5. Közbeszerzési pályázat kiértékelése

Egy banki számítógépes tender kiírását szeretnénk kiértékelni úgy, hogy a nyertes az árban, a megkívánt szolgáltatási feltételekben, a hardver-követelményekben, a garanciális feltételekben és a rendszer betanításában a legjobb legyen.

Bármelyik feladatot tekintjük is, közös bennük az, hogy **mozgásterünket egyetlen cselekvési alternatívára szeretnénk leszűkíteni** (a legjobb termelési tervre, befektetésre, a legjobb iskolára, stb.).

1.2 Matematikai programozási kitérő

Az első és második feladat szokásos megfogalmazása a feltételi rendszer és a cél különválasztása, majd egy matematikai programozási modell felírása. A programozási modell folytonos vagy egészértékű változói testesítik meg a döntési lehetőségeket, amelyek a feltételi rendszer korlátjai révén válnak döntési alternatívákká. A legjobb döntés kiválasztását a célfüggvény vezérli.

Legyenek döntési változóink az $\mathbf{x}$ n-dimenziós vektor-komponensei. Az optimalizálandó rendszer korlátjait m valós értékű $g_i(\mathbf{x})$ függvénnyel adjuk meg. Az alternatívák halmaza a döntési halmaz elemeivel egyezik meg, s ez a következő:

$$X = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\}\,. \tag{1.1}$$

Ha a feladathoz egyetlen valós értékű $f(\mathbf{x})$ célfüggvényt rendelünk, akkor az így konstruált feladatot matematikai programozási feladatként oldhatjuk meg. Termelési feladatunkban például a termékek az $\mathbf{x}$ vektor elemei, a termelési korlátokat a g_i függvények írják le, s ha az f függvény az egyes termelési tervekhez tartozó profitot méri, akkor annak maximalizálása révén jutunk a legjobb termelési tervhez és az ehhez tartozó optimális profitszinthez.

Könyvünkben nem foglalkozunk a matematikai programozással megoldható döntési feladatokkal. A közgazdasági egyetemi stúdiumokban általában már az első évben megismerkednek a hallgatók a matematikai programozás legegyszerűbb típusának, a lineáris programozásnak a megoldásával. Érdekesek lehetnek azonban számunkra a programozási feladatoknál felmerülő döntési problémák és az ezek feloldására megfogalmazott elméleti vonatkozások.

Tegyük fel, hogy döntési problémánk az **egy célfüggvényes matematikai programozási feladatok** egyikével modellezhető. Akár egy közönséges lineáris programozási feladatról van szó, akár speciális lineáris programozási feladatokról (pl. szállítási feladat, hozzárendelési feladat) a gyakorlatban sűrűn előfordul ***alternatív optimális megoldások*** létezése. Ezeknek az alternatív optimális megoldásoknak akár szélsőséges mértékben eltérő struktúrája is lehet a döntési változók terében. Elképzelhető például, hogy ha valamely termékből egyáltalán nem termelünk, egy másikból pedig a kapacitások határáig, ez a megoldás a célfüggvény értékelése szerint egyenértékű a fordított esettel, azaz amikor az első terméket termeltetjük a kapacitások határáig, a másikból pedig nem termelünk (miközben a többi termék termelési szintjei — a különböző megoldásokban nem feltétlenül azonos — pozitív értékek).

Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_2 + x_3 - x_4 &\leq 11 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &\leq 10 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$(6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4) \longrightarrow \max$$

Megoldva ezt a feladatot az egyik optimális bázismegoldásban az első és második termékből nem termelünk, a másikban viszont a második termékből 7 egységet termelni kell. Az összes olyan termelési terv azonos profitot szolgáltat, amely a két bázismegoldás konvex lineáris kombinációja, s ez a profitérték 166 egység. Nem változik tehát a profit értéke, ha [0,0,8,18], [0,7,15,11] — ezek az optimális bázismegoldások — vagy pl. [0, 3.5, 11.5, 14.5] az egyes termékekből termelt mennyiség.

Amikor valós (általában nagyméretű) feladatok esetében hasonló megoldásokat bemutatunk a megbízónak, úgy érvelhetünk, hogy teljesen mindegy, milyen termelési döntést hoz, hiszen a célfüggvényérték (nyereség vagy árbevétel vagy önköltség) mindkét — illetve több — megoldásnál azonos. Ha ez az érvelés mégsem tetszik neki (legtöbbször ez a helyzet), akkor kiderül, hogy a problémát számára éppen a szélsőségesen eltérő struktúrájú termelési döntések és az ezekhez tartozó különböző kapacitásfeleslegek jelentik.

Ezt kezelhetjük úgy is, hogy változtatunk a feladat feltételi rendszerén. Amennyiben azonban a modellezés megfelelőnek ítéltetett, s a feladatnak alternatív optimumai maradtak, már az egyetlen célfüggvényes feladatnál is felmerül, hogy milyen módon válasszon a döntéshozó ezen megoldások közül, azaz a **döntési probléma** megoldása (egyetlen cselekvési alternatíva kiválasztása) nem esik automatikusan egybe a matematikai feladat megoldásával. *A végleges döntéshez valamilyen pótlólagos információra van szükség (hacsak a véletlenre nem bízzuk a döntést).*

Míg a fenti esetben a döntési probléma megoldására — a pótlólagos információ bekapcsolásával — többféle út is kínálkozhat, vannak olyan programozási feladatok, amelyekkel eleve az a probléma, hogy nem létezik lehetséges megoldásuk sem. Feltéve, hogy a modell felépítése helyes, az a kérdés, vajon le kell-e mondanunk ezen problémák "megoldásáról"? Ez a kérdés már a programozás alkalmazásainak első időszakában is foglalkoztatta a terület ma már klasszikusnak számító művelőit, s kidolgozták az ún. **célprogramozás** módszertanát.

Ebben a modellben a feltételeket két részre oszthatjuk. Egy részük a "kemény", szigorúan betartandó korlátozás, másik részük — a célfeltételek — azonban olyanok, ahol a döntéshozó által meghatározott szint, előirányzat tetszőleges irányból való meghaladása vagy elérése kívánatos. A célok alulteljesítését és túlteljesítését eltérésváltozók mérik, s a célprogramozás (egyik) modelljében az eltérésváltozók összegének minimalizálása révén keressük a leginkább kielégítő megoldást.

Tekintsük például az alábbi feladatot:

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &\leq 120 \\ x_1 \qquad &\leq 90 \\ 1200x_1 + 1200x_2 &\geq 168000 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$(14000x_1 + 6000x_2) \longrightarrow \max$$

Ha mindegyik feltétel "kemény", akkor nincs a feladatnak megoldása. Ha viszont csak az első feltételt kívánjuk tökéletesen betartani, a többinél pedig megelégszünk azzal, hogy olyan közel kerüljünk a betartásukhoz, amennyire csak lehetséges, akkor a feladatnak van "megoldása", azaz a feltételi rendszer változtatása, vagy pótlólagos információk nélkül is tudunk döntést hozni. (Lásd például *Danyi-Varró* [1997].)

Láttuk tehát, hogy az alternatív optimumok és a célprogramozási feladat egyaránt felveti az egy célfüggvényes matematikai programozási feladatként formalizált döntési probléma "megoldásának" kérdését. Ha ellenben az egy célfüggvényes feladat egyetlen optimális megoldással rendelkezik, akkor ez a megoldás egyben automatikusan a döntési feladat megoldása is. Ez az automatizmus szűnik meg (kivételes esetektől eltekintve) a **többcélú programozási feladatoknál.**

Termelési feladatunkat úgy fogalmaztuk meg, hogy a profit maximalizálásával egyidejűleg érdekelhet bennünket a környezeti károk minimalizálása is. Ha több célfüggvényünk van, legyenek ezek rendre $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$, $\ldots$, $f_r(\mathbf{x})$, azaz az $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ célvektor álljon r db egyedi célfüggvényből, akkor a **vektormaximum-probléma** formális felírása az előzőleg definiált döntési halmazon a következőképpen történik:

$$\max_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1.4}$$

Ennek a feladatnak a megoldásához egy új optimum-fogalomra, a **Pareto-optimális** vagy **efficiens megoldás** definiálására van szükség. Ezt a fogalmat a közgazdaságtanban vezették be és azt a józan elvet képviseli, hogy több cél egyidejű figyelembe vétele esetén egy racionális döntéshozó előnyben részesíti azokat a döntési változatokat, amelyekre igaz az, hogy nem található náluk jobb abban az értelemben, hogy az új változat minden szempont szerint egyenértékű legyen az addig vizsgálttal, ám legalább egyetlen szempontból biztosan jobb. Ha mégis sikerül a vizsgált döntési változatra nézve ilyen "Pareto javítást" végrehajtani, akkor ezt a változatot nem tekinthetjük optimálisnak.

Formálisan ez úgy fogalmazható meg, hogy a vektormaximum feladat efficiens vagy Pareto-optimális megoldásai mindazok az $\mathbf{x}^* \in X$ vektorok, amelyekhez nem tudunk megadni egy $\widehat{\mathbf{x}} \in X$, $\widehat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}^*$ vektort, amelyre $\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}^*)$, $\mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ teljesülne, azaz nem létezik olyan $\widehat{\mathbf{x}}$, amelyre $f_j(\widehat{\mathbf{x}}) \geq f_j(\mathbf{x}^*)$ teljesül minden j-re ($j = 1, \ldots, r$) és $f_j(\widehat{\mathbf{x}}) > f_j(\mathbf{x}^*)$ legalább egy j-re ($j = 1, \ldots, r$).

Mivel a Pareto-optimális megoldások halmaza az esetek többségében végtelen sok elemből áll, a matematikai megoldás — a Pareto-optimális halmaz előállítása — általában nem adja meg a döntési probléma megoldását. (Lásd például *Stahl* [1991]).

Ha el akarjuk kerülni a félreértést, hogy egy többcélú feladat megoldás során az összes efficiens (nem-dominált) megoldás előállítása, vagy ezek közül egyetlen (általában a döntéshozó által legjobbnak talált) efficiens megoldás előállítása a cél, az utóbbit — amely tehát a fentebbiek értelmében a döntési probléma megoldása — kompromisszumos megoldásnak nevezzük. Ebben az értelemben a "***többcélú döntéshozatal***" **a kompromisszumos megoldás** *megkeresését jelenti.*

A többcélú programozási feladatban a

- súlyozásos módszer, a
- lexikografikus eljárás, a
- korlátok módszere és a
- kompromisszumprogramozás elve

egy-egy efficiens megoldáshoz vezet, amelyet tekinthetünk a döntési probléma megoldásának is (*Gáspár-Temesi* [1998]).

Mindezek a módszerek az egyetlen célfüggvényes feladatra vezetik vissza a megoldást. Azért térünk ki ezekre, mivel az eljárások egyben a feladat kezelésének megoldási filozófiáját is jelentik, és a többtényezős véges feladatok megoldásakor is megjelennek. A 3., 4. és 5. feladatok egyaránt olyan döntési problémát jelenítenek meg, ahol feltételezhetjük, hogy a döntési változatok száma véges vagy legalábbis megszámlálható (a szóbajöhető iskolák, szemétégető művek vagy banki számítógépes tenderajánlatok) és a döntésben szerepet játszó célok (kritériumok, tényezők) száma is véges. Ezeket a feladatokat nevezzük **többtényezős döntési problémáknak.**

A súlyozásos módszer tehát a többcélú programozási feladat megoldása érdekében az egyes célfüggvényeket fontossági súlyokkal látja el, s ezen súlyokkal képezett összegként állít elő egyetlen célfüggvényt. Ennek analógiájaként értelmezhetjük majd a véges feladatok súlyozásos módszereit.

A lexikografikus eljárásban mind a programozási, mind a többtényezős esetekben ugyanazt az elvet követjük: ha a legfontosabbnak ítélt cél szerint egyetlen legjobb döntési változatunk van, akkor azt választjuk, ha több egyenértékű, akkor a következő cél szerinti értékelésre térünk rá, és így tovább, míg dönteni nem tudunk.

A korlátok módszere a többcélú programozási feladatoknál azt jelenti, hogy egy kivételével az összes többi célt valamely kívánatos korlát segítségével beépítjük a feltételi rendszerbe. A többtényezős döntéseknél ez azt jelenti, hogy aspirációs szinteket vagy szűrő értékeket adunk meg.

Végül a kompromisszumprogramozás során egy olyan ideális megoldást állítunk elő, amely minden cél szerint a legjobb értéket tartalmazza, s az ehhez az (általában nem létező) változathoz legközelebb eső döntési változatot választjuk. Ez az elv is alkalmazható a véges sok változatot tartalmazó döntési feladatoknál.

Mivel azonban az itt felvázolt eljárások paraméteresek, nem magától értetődő, hogy milyen

- súlyok,
- célprioritások,
- korlátok,
- távolságfüggvények

szerint adjuk meg a kompromisszumos megoldást. Ha a feladat véges elemszámú alternatívát tartalmaz, szintén felmerül súlyok, prioritások, referenciapontok alkalmazása — a programozási eljárásokkal analóg módon.

A döntési módszerek nagy százaléka ezen elveket variálva állít elő egymástól különböző eljárásokat. Könyvünkben nem törekszünk arra, hogy a létező eljárások kimerítő tárgyalását adjuk meg. (Sok módszert ismertet például *Temesi* [1997]). A további fejezetekben számos esetben felismerhető lesz azonban az itt említett elvek alkalmazása.

Az 1. feladat tehát érdeklődési körünkön kívül esik ugyan, de megismerkedtünk általa néhány hasznos fogalommal és döntési filozófiával, amelyeket a továbbiakban is használni tudunk. Ugyanez a helyzet a 2. feladattal is. Ez a beruházási feladat szintén programozási feladatként írható fel, azonban rendelkezik egy nagyon fontos tulajdonsággal, amelyre érdemes felfigyelnünk. Mind a hozamok, mind a kockázat a feladat sztochasztikus jellegével függ össze. A 2. feladatot egy- vagy két célfüggvényes **sztochasztikus programozási feladatként** jellemezhetjük. Ezekkel szintén nem foglalkozunk, azonban az itt felmerülő **bizonytalanság**, a változók véletlentől való függése egyéb döntési feladatoknál is felmerül.

A 3., a 4. és az 5. feladatokat tekinthetjük az első kettőhöz hasonlónak, abban az értelemben, hogy itt is a legjobb megoldást keressük. Szembetűnő sajátossága azonban mindhárom feladatnak, hogy **döntési változatai (az alternatívák) száma véges.** Ebben az esetben egyetlen szempont szerint kiválasztani a legjobb megoldást nem lenne túlságosan bonyolult, tehát a feladatok lényegi tulajdonsága a több (olykor akár egymásnak ellentmondó) tényező jelenléte. Ezekre a számozással ellátott feladatokra a későbbi fejezetekben hivatkozni fogunk.

Ezen kitérő után felkészültebbek vagyunk arra, hogy egyes alapfogalmakat tisztázzunk

1.3 Alapfogalmak

Alternatívák

Egy döntési szituáció megoldására, a cselekvésre különböző lehetőségek vannak. Ezeket nevezzük alternatíváknak. Az alternatívák egy strukturált halmaza a döntési tér. A döntési tér leírása történhet explicit vagy implicit módon. Egyik formája lehet például a matematikai programozás feltételrendszere által meghatározott halmaz, de történhet egyszerű felsorolással is. Az alternatívák néhány fontos jellemzője:

- *Számosság*: a megoldáshoz vezető módszer kidolgozása szempontjából lényeges kérdés, hogy az alternatívák halmaza véges, megszámlálhatóan vagy nem megszámlálhatóan végtelen számosságú. Például a többcélú programozási feladatok folytonos problémákat írnak le, a többtényezős döntések véges (és általában nem túl nagyszámú) alternatívahalmazzal dolgoznak. Ilyeneket láttunk a 3. és 4. problémában.
- *Számszerűsíthetőség*: reprezentálhatóak-e az alternatívák egyszerűbb vagy bonyolultabb numerikus struktúrákkal vagy nem kvantitatív módon adottak.
- *Kölcsönkapcsolatok*: az alternatívák lehetnek függetlenek, alkothatnak egy lazán összefüggő struktúrát vagy lehetnek lényeges, bonyolult kölcsönkapcsolataik.
- *Bizonytalanság*: a lehetséges alternatívák lehetnek olyan események is, amelyek bekövetkezése a véletlentől függ.

Célok (kritériumok, értékelési tényezők)

Célnak általában azokat az irányokat tekintjük, amerre a rendszer állapotát vinni szeretnénk. A *célok* sok esetben nem feltétlenül elérhető vagy számszerűsíthető kívánságokat jelenítenek meg. Ha a célokat egy hierarchikus struktúrába rendezzük, akkor a legmagasabb szinten levő célok általában kevéssé operacionálisak, míg a hierarchia alsóbb szintjein található *kritériumok* már kezelhetőek, s általában a hierarchia legalsó szintjén mint *értékelési tényezők* fogalmazhatók meg. Az értékelési tényezők számszerűsíthetők, és azt mérik, hogy egy adott kritérium (cél) — egy bizonyos aspektusból — milyen mértékben elérhető. Az értékelési tényezők összességének ideális esetben rendelkeznie kell az alábbi tulajdonságokkal:

- *teljesség*: ne maradjon ki egyetlen fontos jellemző sem,
- *operacionalizálhatóság*: elemzésre alkalmas tényezőkről legyen szó,
- *felbonthatóság*: az értékelési folyamatban az alternatívákat az adott tényező szerint külön is vizsgálhassuk,
- *a redundancia kiszűrése*: ne legyen ismétlődő, halmozódó szempont,
- *minimalitás*: ne létezzen egy másik, kisebb elemszámú tényezőhalmaz, amelyik ugyanolyan jól leírja a problémát.

Döntéshozó

A döntéshozó a döntési probléma gazdája. Lehet egyetlen vagy több személy, aki a döntési szituációban az információk megadásáért, az alternatívák generálásáért és kiértékeléséért, majd a megoldás realizálásáért felelős.

A döntéshozó magatartása lehet racionális vagy irracionális. A döntéselmélet általában joggal teszi fel, hogy a döntéshozó **racionális**, s csak ezekkel a problémákkal foglalkozik. A racionális döntéshozóról feltételezhetjük, hogy **optimalizáló szemléletű**, az adott szituációban a lehető "legjobb" alternatívát fogja választani. A többcélú kontextusban például ez azt jelenti, hogy a döntéshozó a Pareto-optimális alternatívákat részesíti előnyben, s ezek közül azt választja, amely értékelő vagy hasznossági függvényét maximalizálja.

A magatartástudományok neves képviselői kimutatták, hogy a döntéshozók viselkedése nem mindig felel meg a szigorú racionalitásnak: *Simon* [1982] elnevezésével élve **korlátozott racionalitás** érvényesül. Ebben az esetben a döntéshozó lehet **kielégítő szemléletű**: nem keresi a hasznossági függvényét maximalizáló alternatívát (hiszen legtöbbször arra vonatkozóan következetes információk megadására képtelen), hanem egy számára megfelelő lehetséges (többcélú esetben Pareto-optimális) megoldással fejezi be a kiválasztási eljárást.

A döntéshozóról általában azt feltételezzük, hogy a problémára vonatkozóan kétféle szemléletben tud információt szolgáltatni. Az információk egyik része az, amit általában a probléma **objektív adatainak** nevezünk: együtthatók, paraméterek, mérések eredményei, számított értékek. A döntéshozó ismereteinek és információinak másik része **preferenciák** formájában adott. A döntéshozónak lehetnek direkt módon az alternatívákra vonatkozó és lehetnek az alternatívák egyes tulajdonságai szerinti preferenciái.

A döntési folyamat

A döntési folyamat első szakaszának magát **a döntési szituáció** keletkezését tekintjük. *Zeleny* [1982] nyomán azt a hipotézist követjük, hogy a döntési modellezés konfliktusfeloldó folyamat. A rendszeres működés során a vizsgált környezetben felmerül egy konfliktus, amelynek feloldása csak új cselekvési módok közüli választás révén lehetséges: megfogalmazódik a **döntési probléma**.

A következő szakaszban történik a döntési probléma **formalizálása**, azaz valamilyen matematikai formalizmussal történő leírása, majd pedig a **módszer-választás** (amely ritkán egyértelmű).

A döntési probléma **megoldásának** általában azt tekintjük, ha egyetlen cselekvési lehetőséget választottunk ki. Egyes esetekben az alternatívák rangsorát adjuk meg, azonban itt is az első helyezésnek van praktikus jelentősége. A modellezési folyamat előző lépcsőjében megadott módszernek képesnek kell lennie arra, hogy az adott probléma "legjobb" megoldását szolgáltassa.

Végül az adaptálás, az **értékelés és elemzés** fázisában dől el, hogy ez a megoldás helyes volt-e, vagy a folyamat újrakezdése szükséges.

1.4 Irodalomjegyzék az 1. fejezethez

ARROW, K.J. [1951]: *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York

BEROGGI, G.E.G. [1998]: *Decision Modeling in Policy Management: An Introduction to the Analytic Concepts*, Kluwer, Boston

CHANKONG, V.-HAIMES, Y.Y. [1983]: *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, North Holland, Amsterdam

DANYI, P.-VARRÓ, Z. [1997]: Operációkutatás üzleti döntések megalapozásához, JPTE, Pécs

GÁSPÁR, J.-TEMESI, J.: [1998]: Matematikai programozási gyakorlatok, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

KEENEY, R.L. [1992]: *Value Focused Thinking*, Harvard University Press

KEENEY, R.L.-RAIFFA, H. [1976]: *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs*, Wiley, New York

KINDLER, J.-PAPRIKA, Z.-PÁPAI, Z. [1991]: *Fejezetek a döntéselméletből*, Aula Kiadó, Budapest

LEE, S.M. [1972]: *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach Publishers, Philadelphia

SIMON, H. [1982]: *Korlátozott racionalitás [Válogatott tanulmányok]*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest

STAHL, J. [1991]: *Optimumszámítás*, Aula Kiadó, Budapest

STEUER, R.E. [1986]: *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computations and Applications*, Wiley, New York

SZIDAROVSZKY, F.-MOLNÁR, S. [1986]: *Játékelméleti és többcélú programozási módszerek műszaki alkalmazásokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest

TEMESI, J. [1997]: *Döntéstámogató rendszerek a többcélú döntéshozatalban*, Habilitációs értekezés, Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

TEMESI, J. [1998]: Modellek, módszerek, alkalmazások: nyitott kérdések a többcélú döntések támogatásában, A "túlzott központosítástól" az átmenet stratégiájáig, *Tanulmányok Kornai Jánosnak*, szerk. Gács J.-Köllő J., Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 49-63.

VÁRI, A.-VECSENYI, J. [1989]: *Döntéselemzés vezetőkkel*, SZÁMALK, Budapest

ZELENY, M. [1982]: *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill, New York

2. Fejezet

Néhány elemi döntési módszer

A fejezetet egy véges sok döntési változatot tartalmazó, többtényezős döntési példával kezdjük, amely elsősorban az egyszerű (klasszikus) döntési eljárások bemutatására szolgál, s a továbbiakban is fel fogjuk használni illusztratív célokra. Az alapadatokból egy döntési mátrixot szerkesztünk, megmutatjuk, hogyan lehet a nem számszerű döntési tényezőket kvantifikálni, illetve olyan eljárásokat tárgyalunk, amelyek biztosítják a mértékegységtől való függetlenséget. Ezután térünk rá azon döntési módszerek bemutatására, amelyek nem kompenzációs esetben az alternatívák szűrését teszik lehetővé, majd a döntéshozó természetéből vagy döntési filozófiájából származtatható néhány döntési elvet ismertetünk.

2.1 Harci repülőgép vásárlása

Összeült a Harci Team, hogy eldöntse, melyik harci repülőgép felelne meg a legjobban haditechnikájuk modernizációs céljainak. Két lépcsőben fogtak neki a feladatnak. Először a szakértők véleményét kérdezték meg, hogy mely tulajdonságokat tartják a legfontosabbnak a végleges döntés meghozatalánál. A szakértők hosszasan üléseztek, majd úgy döntöttek, hogy a döntéshozókat nem szabad túlságosan sok tényező egyidejű figyelembe vételével terhelni, ezért a 6 legfontosabb tulajdonságot jelölték meg. Ezek:

X_1: maximális sebesség (mérföld/sec)
X_2: rakfelület (m^2)
X_3: maximális terhelhetőség (font)
X_4: beszerzési költség (millió \$)
X_5: megbízhatóság
X_6: manőverezési képesség

Mivel az utóbbi két tulajdonság minőséget mér, ezért a következő skálát alkalmazták:

nagyon alacsony; alacsony; átlagos; jó; nagyon jó

Miután beszerezték az ajánlatokat, újra a szakértőkön volt a sor: mondják meg, hogy hány repülőgépgyártó ajánlatával érdemes foglalkozni. A szakértők végül négy repülőgép adatait terjesztették a Harci Team elé, a *2.1. táblázatban* megadott formában:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
A_1	2.0	1500	20000	5.5	átlagos	nagyon jó
A_2	2.5	2700	18000	6.5	alacsony	átlagos
A_3	1.8	2000	21000	4.5	jó	jó
A_4	2.2	1800	20000	5.0	átlagos	átlagos

2.1. táblázat

Melyik gépet válasszák? Mielőtt a sorsdöntő ülésre sor került volna, a bizottság titkára (aki az MBA tanfolyamról emlékezett arra, hogy módszertani eszközöket is be lehetne vetni a döntéselőkészítésnél) felkérte a közeli egyetem döntéselméletet tanuló diákjait, hogy segítsék a Harci Team munkáját. Az egyetemi csoport megvitatta a feladatot és többféle módszert is kipróbált. Ezeket a kísérleteket követjük végig a továbbiakban.

Az egyetemisták tudták, hogy a megoldás függ attól, hogy

- egy- vagy többcélú a feladat,
- az eredeti feladatot, vagy annak valamilyen transzformáltját oldják meg,
- egyetlen vagy több döntéshozó van.

Megvitatva a konkrét problémát, az alábbi nehézségekre világítottak rá:

- keverednek a kvantitatív és a kvalitatív szempontok,
- nem azonosak a mértékegységek,
- ellenkező irányú célokat tartalmaz a feladat,
- nem ismerjük az ismérvek statisztikai tulajdonságait,
- nem tudjuk, hogy milyen függvénnyel írhatók le az egyes szempontok.

Első közelítésben a következő javaslataik voltak:

- a szempontokat azonos mértékegységre kell hozni, vagy mértékegységtől függetlenné kell tenni (ha a táblázat adataival dolgozunk),
- egyedi függvényeket kell konstruálni (ha a táblázat adatait az ismérvhez tartozó értékelő függvény egyedi értékeinek tekintjük),
- fontossági súlyokra van szükség (ha a feladatot egyetlen célfüggvényre akarjuk visszavezetni),
- a döntéshozók preferenciáinak megismerése után fogjunk csak hozzá a megoldáshoz,
- tekintsük az ismérvek értékeit rangsort meghatározó elemként és keressünk egy ismérvek szerinti rangsorokat aggregáló módszert.

A javaslatok szemmel láthatóan eltérő szemléletben fogantak. A kérdés az, vajon alkalmazni tudjuk-e ezeket az ötleteket, s ha igen, milyen eredményre jutunk a segítségükkel? A következő fejezetekben a diákok ötleteinek megfelelő néhány egyszerű döntési elvet alkalmazunk a fenti feladatra.

2.2 A kvalitatív szempontok számszerűsítése

Mivel a nem számszerű ismérvek kezelése gondot okozhat, a verbális skálát az alábbival helyettesítették:

nagyon alacsony	1 pont
alacsony	3 pont
átlagos	5 pont
jó	7 pont
nagyon jó	9 pont

Adataink tehát a *2.2. táblázat* szerint alakulnak:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
A_1	2.0	1500	20000	5.5	5	9
A_2	2.5	2700	18000	6.5	3	5
A_3	1.8	2000	21000	4.5	7	7
A_4	2.2	1800	20000	5.0	5	5

2.2. táblázat

2.3 Mértékegységtől független adatok előállítása

Ne feledjük, hogy a 4. szempont kivételével mindegyik ismérvnél az a jobb, ha nagyobb értéket vesz fel (maximum a cél), míg a 4. szempont, az ár, akkor jobb, ha értéke kisebb (minimum a cél). Amikor a táblázatot mértékegységtől függetlenné kívánjuk tenni, egyszersmind azonos irányúvá is tesszük az ismérveket.

Mértékegységtől független adataink lehetnek többféle módon is. Itt a két legelterjedtebb módszert említjük meg. Az első esetben minden szemponthoz meghatározzuk az ideális értéket, s ehhez viszonyítjuk a táblázat adatait (jól látható, hogy a transzformációhoz arányskálán mért alapadatokra van szükség).

Jelöljük az eredeti adatokat x_{ij}-vel, a transzformált adatokat pedig jelölje r_{ij}. Ha az egyes szempontok szerinti ideális érték x_j^*, akkor két esetet szoktunk megkülönböztetni:

a. az ideális értéket a szakértők adják meg

b. az ideális értéket a táblázatból kapjuk, mégpedig az

$$x_j^* = x_j^{\max}\,, \tag{2.1}$$

vagy

$$x_j^* = x_j^{\min} \tag{2.2}$$

megfeleltetéssel, attól függően, hogy a nagyobb vagy a kisebb értéket tekintjük jobbnak.

Az első eset előnye, hogy az ideális érték a hasonló feladatok esetében állandó, hátránya, hogy csak akkor alkalmazható, ha a szakértők kéznél vannak, vagy valamilyen más forrásból megállapítható az ideális érték. A második esetben az ideális értéket a táblázatból tudjuk generálni.

Ha a *b.* esetnek megfelelő transzformációt hajtjuk végre, akkor eljárhatunk úgy, hogy az r_{ij} értéket az alábbi módon állítjuk elő:

$$r_{ij} = x_{ij}/x_j^{\max}\,, \tag{2.3}$$

ha az ismérv maximalizálandó, és

$$r_{ij} = x_j^{\min}/x_{ij}\,, \tag{2.4}$$

ha az ismérv minimalizálandó.

Vegyük észre, hogy a transzformált táblázatban mindig lesz oszloponként legalább egy 1-es. Esetünkben a transzformált adatokat a *2.3. táblázat* mutatja:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
A_1	0.80	0.56	0.95	0.82	0.71	1
A_2	1	1	0.86	0.69	0.43	0.56
A_3	0.72	0.74	1	1	1	0.78
A_4	0.88	0.67	0.95	0.90	0.71	0.56

2.3. táblázat

Mértékegységtől független adatokat kaphatunk úgy is, hogy a táblázatban szereplő szempontok szerinti maximális és minimális értékekből képzett terjedelemmel normáljuk az eredeti értékeket.

Ha az ismérvnél a nagyobb érték a kedvező, akkor a transzformáció:

$$r_{ij} = \frac{x_{ij} - x_j^{\min}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \tag{2.5}$$

Ha az ismérvnél a kisebb érték a kedvező, akkor a transzformált érték:

$$r_{ij} = \frac{x_j^{\max} - x_{ij}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}}\,. \tag{2.6}$$

Vegyük észre, hogy ezt a transzformációt alkalmazva mindegyik szempontnál (mindegyik oszlopban) lesz legalább egy 0 és legalább egy 1 érték. (Ezt a táblázatot az ELECTRE-módszer bemutatásánál fogjuk elkészíteni a 6.2 fejezetben).

2.4 Eliminációs eljárások

Feladatunk megoldását hallgatólagosan úgy képzeltük el, hogy egyetlen (a legjobb) alternatívát (harci repülőgépet) kell kiválasztani. Sok olyan feladat van azonban, ahol érdemes az alternatívák körét leszűkíteni: megalkotni a végső döntéshez kiválasztott alternatíváknak (az eredetinél legtöbbször jóval kisebb elemszámú) csoportját. Feltéve azt, hogy az egyes tényezők nem kompenzálhatják egymást, ezt a szűkítést többféle filozófia alapján is megtehetjük.

2.4.1 Kielégítésre törekvő módszer

Ebben a szemléletmódban az egyes alternatívákat szempontjaikkal megadva fogadjuk el, azaz kiindulópontunk a 2.1. táblázat (nincs szükségünk kvantifikálásra vagy transzformációra sem). Minden szemponthoz tartozik egy kielégítési szint (x_j^0), amely azt jelzi, hogy ez alatti (fölötti) értékek esetén az alternatívát nem tudjuk elfogadni. Ezt a kielégítési szintet mindegyik szempontra szimultán érvényesítve csak azok az alternatíváink maradnak meg, amelyek egyszerre kielégítik mindegyik aspirációs szintet, azaz A_i elfogadható, ha

$$x_{ij} \geq x_j^0 \ \text{ mindazokra a } j \text{ indexekre, ahol a nagyobb érték a jobb}\,, \tag{2.7}$$

és

$$x_{ij} \leq x_j^0 \ \text{ mindazoknál a } j \text{ indexeknél, ahol a kisebb érték a jobb}\,. \tag{2.8}$$

Ez a szűrési eljárás bünteti, ha bármelyik szempont szerint rossz az alternatíva. Ez a szűrési szabály nagyon sokszor életszerű, hiszen például egy pozíció betöltésénél, egy tanulmányi program elvégzése során, stb. nem engedjük meg, hogy akár egyetlen szempontból is "megbukjon" a jelöltünk.

Példánkban legyen

$$\mathbf{x}^0 = (2.0;\ 1500;\ 20000;\ 6.0;\ \text{átlagos};\ \text{átlagos})$$

A 2.1. táblázatot végigelemezve azt találjuk, hogy két alternatívánk maradt: A_1 és A_4 (vigyázzunk az árnál: a kisebb érték a jobb!).

2.4.2 Diszjunktív módszer

Megeshet azonban, hogy problémánkban nem az a jó, ha valaki "megbízható" minden szempont szerint, hanem az egyedi kiválóságot keressük - elnézve a rossz teljesítményt, ha valaki valamiben kiemelkedő tudású. A sportban általános ez az eset, hiszen például Puskás nem került volna pályára, ha jobb lábbal is kell tudni legalább közepesen cselezni. De tehetséges tudósembereknél is elnéznek apróbb kisiklásokat, ha valamiben messze felülmúlják a többieket. A kiemelkedőket jutalmazó szűrés tehát az alábbi módon adható meg:

$$x_{ij} \geq x_j^0\,,\ j = 1 \text{ vagy } j = 2 \text{ vagy } \ldots \text{ vagy } j = m \tag{2.9}$$

(értelemszerűen $\leq$ relációt írva, ha a kisebb érték a jobb), ahol x_j^0 most olyan szinteket jelöl, amelyek meghaladása a jelöltet a többi szemponttól függetlenül elfogadottá teszi.

Feladatunkban legyen most

$$\mathbf{x}^0 = (2.4; 2500; 21000; 4.5;\ \text{nagyon jó};\ \text{nagyon jó})$$

Az A_1, A_2 és A_3 alternatívák maradtak fent a szűrőn, hiszen legalább egy szempont szerint teljesítették a kiválóság kritériumát.

2.4.3 Dominancia

A szempontjaink szerint értékelt alternatívákat tekinthetjük egy-egy hatelemű vektornak is. Mint tudjuk, a vektorok nem feltétlenül összehasonlíthatóak. Ha az egyes szempontok szerint a nagyobb érték jelenti a jobbat, akkor ha valamelyik alternatívát képviselő vektorunk minden szempontból alatta marad egy másiknak (esetleg egyesekben egyenlő), akkor azt mondjuk, hogy a vizsgált alternatíva dominált.

A döntéshozó nem lenne racionális, ha dominált alternatívát választana, magától értetődik tehát a dominált alternatívák kiszűrése.

Esetünkben a 2.3. táblázat jól mutatja, hogy nincs dominált alternatívánk (az A_4 például a hatodik szempont kivételével minden szempontból jobb vagy egyenlő, mit az A_1, ez azonban nem elegendő ahhoz, hogy az A_1 kikerüljön az elemzendő alternatívák közül), azaz egy racionális döntéshozó bármelyik alternatívát választhatja, attól függően, hogy milyenek a szempontokra vonatkozó preferenciái.

2.5 Lexikografikus módszer

Térjünk vissza alapfeltevésünkhöz, amely szerint egyetlen (a legjobb) alternatívát szeretnénk választani.

Az egyes szempontokról a legkevesebb, amit mondhatunk, ha fontossági sorrendbe tudjuk őket állítani. Ezt használja fel a lexikografikus módszer, amelynek lényege az, hogy a fontossági sorrendbe rakott szempontok szerint vizsgálja meg az alternatívákat. Ha a legfontosabb szempont szerint egyetlen alternatíva a legjobb, akkor azt választjuk. Ha több alternatíva is holtversenyben áll az első helyen, akkor bekapcsoljuk az elemzésbe a második legfontosabb szempontot. Ha ekkor egyetlen alternatívánk marad, akkor megtaláltuk a legjobbat. Ha nem, akkor a fontosság szerint soron következő szemponttal folytatjuk az eljárást mindaddig, amíg egyetlen alternatívánk marad.

Ha feladatunkban a megbízhatóság a legfontosabb, akkor az A_3-at választjuk. Ha az ár a leglényegesebb, akkor is az A_3 a nyerő. A maximális sebességet tekintve legfontosabbnak az A_2-t választjuk. Bármi is a szempontok sorrendje, mindig ki tudjuk választani a legjobb megoldást az első lépésben. Ez például a 2.3. táblázatban onnan látható, hogy egyik ismérv szerinti oszlopban sem találunk egynél több 1-es értéket (ez utalna holtversenyre az első helyen).

2.6 Pesszimista döntéshozó: a maximin módszer

Ha a döntéshozó kizárólag a táblázat elemeire figyel és azonos fontosságúnak ítéli őket, valamint az értékek összehasonlítható skálára vannak transzformálva (például a 2.3. táblázatban megadott értékeket tekintjük), akkor optimista vagy pesszimista hozzáállása is irányíthatja őt.

A pesszimista döntéshozó mindegyik alternatíva esetén a legrosszabb értéket tekinti a "gyenge láncszemnek" és úgy szeretné a legjobb döntést meghozni, hogy ezen gyenge láncszemek közül a legmagasabb értékkel rendelkező alternatívát részesíti előnyben. Megkeresi tehát az

$$m_i = \min\{x_{ij} :\ \ j = 1, \ldots, m\} \tag{2.10}$$

értéket minden $i = 1, \ldots, n$ esetén és kiválasztja a

$$\max\{m_i :\ \ i = 1, \ldots, n\} \tag{2.11}$$

értékű alternatívát.

A 2.3. táblázatból az m_i értékek vektora

$$(0.56;\ 0.43;\ 0.72;\ 0.56)$$

Ezek közül az A_3 alternatívához tartozik a legnagyobb érték.

2.7 Optimista döntéshozó: a maximax módszer

Míg a pesszimista döntéshozó csak a legrosszabb értékekre figyel és azok alapján hozza meg döntését, az optimista döntéshozó csak a legjobb értékeket veszi figyelembe. Úgy tekinti, hogy az alternatívát a legjobb értéke képviseli, tehát azok közül is a legjobbat kell választania. Az azonos mértékegységre hozott alternatíváknál megkeresi tehát az

$$M_i = \max\{x_{ij} : \quad j = 1, \ldots, m\} \tag{2.12}$$

értéket minden i-re, majd kiválasztja a

$$\max\{M_i : \quad i = 1, \ldots, n\} \tag{2.13}$$

értékű alternatívát.

Ha a 2.3. táblázat értékei szerint hozza meg döntését, akkor számára az A_1, az A_2 és az A_3 alternatívák egyenértékűek, hiszen azok mindegyike legalább egy szempont szerint a legjobb.

2.8 Irodalomjegyzék a 2. fejezethez

CHIKÁN, A. [1978]: *Bevezetés a döntéselméletbe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest

HWANG, C.L.-MASUD, A.S.M. [1979]: *Multiple Objective Decision Making: Methods and Applications*, Springer, New York

KINDLER, J.-PAPP, O. [1977]: *Komplex rendszerek vizsgálata*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest

NIJKAMP, P.-VAN DELFT, A. [1977]: *Multi-Criteria Analysis and Regional Decision Making*, Leiden, The Netherlands

SZABADKAI, A.-SZIDAROVSZKY, F. [1983]: *Döntéselőkészítési módszerek alkalmazása*, Mezőgazdasági Kiadó, Budapest

YOON, K.P.-HWANG, C.L. [1995]: *Multiple Attribute Decision Making: An Introduction*, Sage Publications, Thousand Oaks

3. Fejezet

Döntések bizonytalanság mellett

Döntéseink nagy részében a környezet bizonytalanságot tartalmazó elemei is befolyásolhatják a végeredményt. Ebben a fejezetben egy klasszikus döntési feladatot és módszert tárgyalunk az információ értékét előtérbe helyező módon: a Bayes-tételt felhasználó döntési diagramok és döntési fák egy példáját mutatjuk be.

3.1 Egy vállalkozás bővítése

Míg a 2.1. fejezet mintafeladatában az alternatívák közül való választásban nem játszott szerepet a döntési probléma környezetének állapota, most egy olyan — nagyon egyszerű — feladatot tekintünk, ahol vannak (vagy beszerezhetők) információk a döntésnél megjelenő bizonyos események bekövetkeztének valószínűségeiről. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a harci repülőgép kiválasztásakor nem befolyásolt bennünket sem egy jelenlegi bizonytalan esemény, sem az, hogy döntésünk következményeivel a jövőben fogunk szembenézni, amikorra esetleg a döntésben szerepet játszó egyes körülmények megváltozhatnak: első mintafeladatunkra **determinisztikus** modelleket alkalmaztunk.

A valós döntések nagy része azonban olyan, hogy a jövőben bekövetkező **bizonytalan kimenetelű események** is befolyásolják: nem mindegy az, hogy egyes feltételek — amelyek kimenete a véletlentől függ — hogyan alakulnak. A döntésben tehát **sztochasztikus** (a véletlentől függő) tényezőket is kezelnünk kell.

Vegyük azt az egyszerű esetet, amikor egy vállalkozás tulajdonosa az üzlethálózat bővítése vagy új tevékenységek bevezetése közötti döntés előtt áll. Cselekvési lehetőségei az alábbiak:

a_1: új fióküzlet megnyitása

a_2: új szolgáltatás bevezetése

a_3: új termékkel való megjelenés a piacon

Bármelyik tevékenységbe kezd is, az eredményt befolyásolja az, hogy milyenek lesznek a következő év keresleti viszonyai, hiszen akkorra fejeződik be a kiválasztott tevékenység előkészítése, vagyis csak a jövő évben tud piacra lépni. Vállalkozónknak tehát valamiféle elképzeléssel kell rendelkeznie a következő év keresleti viszonyairól ahhoz, hogy az egyes cselekvési változatokhoz tartozó jövőbeni nyereségeket számszerűsíteni tudja. A vállalkozó az eddigi üzletmenet alapján a következő becsléseket képes megadni.

A jövő évi keresleti viszonyokat egy négyfokozatú skálával jellemzi, és a piac mai állapota alapján a lehetséges jövőbeni események bekövetkezésének esélyét is meg tudja adni. Szerinte tehát a jövő évi keresleti viszonyok:

s_1: nagyon jó

s_2: jó

s_3: közepes

s_4: gyenge

Mivel vállalkozónknak semmiféle hatása nincs arra, hogy az egyes események közül melyik következik be, ezért azt szoktuk mondani, hogy számára a jövőbeni események mint a **természet jövőbeni állapotai** jelennek meg. Az ezen állapotok bekövetkezésének esélyére vonatkozó becslései a **szubjektív valószínűségi értékek**, amelyeket $P(s_i)$-vel jelölünk. Esetünkben ezek az értékek:

$$P(s_1) = 0.4 \quad P(s_2) = 0.3 \quad P(s_3) = 0.2 \quad P(s_4) = 0.1$$

Az egyes tevékenységek jövő évi tiszta nyeresége függ attól, hogy milyenek lesznek a keresleti viszonyok. A *3.1. táblázat* millió forintban tartalmazza a tiszta nyereségeket.

Események	Tevékenységek		
	a_1	a_2	a_3
s_1	20	26	10
s_2	12	10	8
s_3	8	4	7
s_4	4	-4	5

3.1. táblázat

A táblázat értékeire a továbbiakban $v(s_i, a_j) = v_{ij}$-ként is fogunk hivatkozni, azaz pl. $v(s_2, a_3) = v_{23} = 8$. Bevezetjük még a következő jelöléseket:

$$M_j = \max_i\{v_{ij}\} \quad \text{(oszlopmaximum)} \tag{3.1}$$

a legnagyobb nyereség,

$$m_j = \min_i\{v_{ij}\} \quad \text{(oszlopminimum)} \tag{3.2}$$

pedig a legkisebb nyereség az egyes tevékenységekre vonatkozóan.

Esetünkben

$$M_j = 20, \quad 26 \quad \text{és} \quad 10,$$

$$m_j = 4, \quad -4 \quad \text{és} \quad 5.$$

A döntési kérdés az, hogy a vállalkozó melyik tevékenységet válassza?

3.2 Pesszimista és optimista döntés a pénzérték alapján

Ebben a feladatban is gondolkodhat úgy a vállalkozónk, hogy nem veszi figyelembe a keresleti viszonyok jövőbeni állapotához tartozó valószínűségeket. Ezt most úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a döntéshozó a feladatban rejlő bizonytalansággal nem foglalkozik és **döntésében kizárólag** a 3.1. táblázatban megadott **nyereségértékekre koncentrál**. Mint ahogyan azt a 2.6 és 2.7 fejezetekben láttuk, itt is megkülönböztethetjük a pesszimista és optimista esetet.

A pesszimista döntéshozó a tevékenységenként bekövetkező legrosszabb értékek közül választja a legjobbat, vagyis az m_j értékekből a maximális értékű lesz a döntése (**maximin kritérium**). Ez a példánkban 5 millió forint, és *az a_3 tevékenységet (új termék) kell választani.*

Az optimista döntéshozó a lehető legjobb értéket választja, vagyis az M_j értékek közül a legnagyobbat (**maximax kritérium**). Példánkban ez 26 millió forint, és *az a_2 tevékenységet kell választania (új szolgáltatás).*

A pénzértékre koncentráló döntéshozó optimizmusa nem feltétlenül ölt olyan szélsőséges formát, mint ahogyan az a maximax kritériumban megjelenik. Hurwicz vezette be az ún. **optimizmus együtthatót, a Hurwicz-féle α-t.** Az így jellemzett döntéshozó α arányban optimista, míg $1-\alpha$ arányban pesszimista, döntése tehát az alábbi képlet szerint alakul:

$$H_i(\alpha) = \alpha \cdot M_i + (1-\alpha) \cdot m_i \tag{3.3}$$

és a H_i értékekből kell a legnagyobbat választanunk. Ha döntéshozónk kimondottan optimista, vagyis pl. $\alpha = 0.8$, akkor

$$\begin{aligned} H_1 &= 0.8 \cdot 20 + 0.2 \cdot 4 = 16.8 \\ H_2 &= 0.8 \cdot 26 + 0.2 \cdot (-4) = \mathbf{20.0} \\ H_3 &= 0.8 \cdot 10 + 0.2 \cdot 5 = 9.0 \end{aligned}$$

A döntés tehát a_2. Látható, hogy α értékének változásával a döntés is változhat — hogy ez mely α esetében következik be, itt most ezzel nem foglalkozunk, az olvasó megkeresheti azt az optimizmus együtthatót, amelynél egy másik cselekvési változatba fordul át a döntés.

3.3 Elmulasztott nyereségek alapján történő döntés

Az eddigiekben a 3.1. táblázatban megadott nyereségértékekkel dolgoztunk. Döntéshozónk azonban gondolkozhat úgy is, hogy az. ún. elmulasztott nyereségértékeket veszi figyelembe döntésénél. A természet bármelyik állapotát tekintjük, annak bekövetkezésekor mindig megmondható, hogy mi lett volna a legmagasabb elérhető nyereség. Ha tehát valóban bekövetkezett az az állapot, és mi nem az optimális cselekvési változatot választottuk, akkor ahhoz képest veszítettünk valamennyit. Ha például a vállalkozó az új termék bevezetése mellett döntött, és a következő évben nagyon jók lettek a keresleti viszonyok, akkor 16 millió forint nyereséget elmulasztott ahhoz képest, ha az ebben az esetben optimális tevékenységet, az új szolgáltatás bevezetését választotta volna. Ebben a szemléletben tehát felépíthető az elmulasztott nyereségeket tartalmazó *3.2. táblázat.* Vegyük észre, hogy a sorok maximális értékeihez viszonyítunk, tehát minden sorban van legalább egy 0 érték.

Események	Tevékenységek		
	a_1	a_2	a_3
s_1	6	0	16
s_2	0	2	4
s_3	0	4	1
s_4	1	9	0

3.2. táblázat

Az elmulasztott nyereségekben gondolkodó döntéshozó megkeresi az egyes tevékenységekhez tartozó **maximális értéket, és ezek közül a minimálisat választja**. Példánkban a maximumok:

6 9 16

Ezek közül a 6 a legkisebb, tehát döntéshozónk *az a_1 változatot (új fióküzlet megnyitása) választja.*

3.4 Döntés a valószínűségértékek alapján

Míg az előző két alfejezetben csak a pénzértékeket (nyereségeket) vettük figyelembe, ebben az esetben viszont a természet állapotaihoz rendelt valószínűségekre koncentrálunk. A döntéshozó azt a cselekvési lehetőséget választja, amely **a legnagyobb bekövetkezési valószínűségű esemény mellett a maximális nyereséget** biztosítja. Ez a döntési módszer a *maximum likelihood* kritérium elnevezést viseli. Esetünkben a legnagyobb valószínűség a nagyon jó keresleti viszonyhoz tartozik (0.4), itt pedig *az a_2 alternatíva (új szolgáltatás)* adja a legnagyobb nyereséget.

3.5 Döntés a várható pénzérték alapján

Mivel az eddigi módszerek mindegyike egyoldalúan valamelyik oldalra koncentrált, kézenfekvőnek tűnik, hogy egy olyan szemléletben hozzunk döntést, amely mind a természet állapotaira vonatkozó valószínűségeket, mind pedig az egyes bekövetkezések melletti nyereségeket is figyelembe veszi. Éppen ezt teszi a **várható pénzérték kritérium alapján történő döntés, ahol az egyes cselekvési lehetőségekhez kiszámítjuk a különböző természeti állapotoknál kapható nyereségek valószínűségekkel súlyozott összegét és ezek közül választjuk a maximális értékűt.**

Jelöljük $VP(a_j)$-vel az egyes alternatívákhoz tartozó várható pénzértéket és számoljunk a 3.1. táblázat adataival:

$$\begin{aligned}
VP(a_1) &= 0.4 \cdot 20 + 0.3 \cdot 12 + 0.2 \cdot 8 + 0.1 \cdot 4 = 13.6 \\
VP(a_2) &= 0.4 \cdot 26 + 0.3 \cdot 10 + 0.2 \cdot 4 + 0.1 \cdot (-4) = \mathbf{13.8} \\
VP(a_3) &= 0.4 \cdot 10 + 0.3 \cdot 8 + 0.2 \cdot 7 + 0.1 \cdot 5 = 8.3
\end{aligned}$$

A várható pénzérték szerinti döntés tehát az a_2 (új szolgáltatás bevezetése) — de amint látjuk, ez az alternatíva éppen csak megelőzi az új fióküzlet megnyitását reprezentáló a_1 alternatívát.

Az elmulasztott nyereségekben gondolkodó döntéshozó dönthet a **várható elmulasztott nyereség** kritériuma alapján is. Ekkor a 3.2. táblázat adataival tudjuk kiszámolni a $VE(a_j)$ értékeket:

$$\begin{aligned}
VE(a_1) &= 2.5 \\
VE(a_2) &= \mathbf{2.3} \\
VE(a_3) &= 7.8
\end{aligned}$$

Az egyes cselekvési lehetőségekre kiszámított várható elmulasztott nyereségek közül a legkisebbet választva kerülünk a legkedvezőbb helyzetbe, tehát *ismét a_2-t kell választanunk.* Vegyük észre, hogy ez nem véletlen, a várható pénzérték és a várható elmulasztott nyereség kritérium mindig ugyanazt a döntést szolgáltatja. Ez abból következik, ahogyan a nyereség táblázatból az elmulasztott nyereség táblázatot képeztük.

3.6 Egy befektetési döntés

Vállalkozónknak 14 millió forint befektetni való pénze akadt. Két befektetési változatot vizsgál meg: telket vásárolhat a környéken, vagy bankba teszi a pénzét. A telek éppen 14 millió forintba kerül, és megvásárlásával értékálló befektetésben reménykedik a vállalkozó. Ezért utánanéz, hogy nem lesz-e a környéken olyan változás, amely jelentősen megváltoztatná a telek értékét. Kiderül, hogy ugyan a környék nem éppen a legjobb az ingatlanbefektetések céljára — valószínű, hogy 1%-kal csökken az értéke a következő évre —, ám valószínűsíthető, hogy a városi önkormányzat bevásárlóközpontot épít a közelben, s ekkor a telek értéke akár 10%-kal is nőhet.

A másik lehetőség az, ha bankba teszi a pénzt. A kamatláb most 5%, ám ha felépül a bevásárlóközpont, ez olyan üzleti pezsgést jelenthet, hogy a bank jobb kamatot, 5.5%-ot is tudna fizetni. A bevásárlóközpont építésének valószínűsége a rendelkezésre álló információk alapján 75%.

Ebben a rendkívül leegyszerűsített példában alkalmazzuk az előző fejezetekben alkalmazott jelöléseket! A *3.3. nyereség-táblázat* (ezer forintban):

Események	Cselekvési lehetőségek	
	a_1 = telekvásárlás	a_2 = pénz a bankban
s_1 = bevásárlóközpont épül	1400	770
s_2 = nem épül bevásárlóközpont	-140	700

3.3. táblázat

A szubjektív valószínűségek: $P(s_1) = 0.75$, $P(s_2) = 0.25$.

3.7 Döntés a rendelkezésre álló információ alapján

Ismerve az előző fejezetekben ismertetett módszereket, döntéshozónk a várható érték alapján való döntést részesíti előnyben. Kiszámolja tehát az egyes alternatívákhoz tartozó **várható pénzértéket a rendelkezésre álló információ alapján (VPRI(a_j))**:

$$\begin{aligned} VPRI(a_1) &= 1400 \cdot 0.75 - 140 \cdot 0.25 = 1015 \\ VPRI(a_2) &= 770 \cdot 0.75 + 700 \cdot 0.25 = 752.5 \end{aligned}$$

A nagyobb érték az a_1-hez tartozik, vagyis a vállalkozónak a telekvásárlás mellett kell döntenie, $VPRI = 1015$.

3.8 A tökéletes információ várható pénzértéke

Vállalkozónkat azonban nem hagyja nyugodni az, hogy ha többet tudna a bevásárlóközpont megépítéséről, megalapozottabban fektethetné be a pénzét. A következőképpen gondolkodik. Ha lenne valaki, aki pontosan meg tudná mondani, hogy megépül-e a bevásárlóközpont, vagy sem, akkor minden lehetséges esethez meg tudnánk adni az optimális alternatívát és annak nyereségét. Tegyük fel, hogy él valahol egy jós, aki erre valóban képes. Mennyi lenne a várható pénzérték tökéletes információ birtokában ($VPTI$)? Megkérdezzük-e a jóst, s ha igen, vajon mennyit érdemes fizetni a tökéletes információért? Tekintsük a *3.4. táblázatot.*

Lehetséges előrejelzés	Optimális cselekvés	Az optimális cselekvés nyeresége	Az előrejelzés valószínűsége	Várható pénzérték
s_1	a_1	1400	0.75	1050 =
s_2	a_2	700	0.25	175

1400 · 0.75
700 · 0.25

3.4. táblázat

A tökéletes információhoz tartozó várható pénzérték tehát $VPTI = 1225$ ezer Ft lenne. Ebből már az is kiszámítható, hogy mennyit érdemes áldozni a tökéletes információért: a két várható érték különbözeténél többet semmiképpen. Ez a különbség

$$VPTI - VPRI = 1225 - 1015 = 210$$

ezer Ft.

Tökéletes jóst valószínűleg nem talál a vállalkozó, ha azonban mégiscsak akadna valaki az önkormányzat körül, aki ezt a szerepet elvállalja, annak maximum 210 ezer forint jutalmat érdemes adnia.

3.9 Nem tökéletes információn alapuló döntés

Ha jósok nem is teremnek minden bokorban, előrejelző cégeket könnyebben találni. Tegyük fel, hogy vállalkozónknak az az ötlete támad, hogy megkérdezzen egy előrejelzésekkel foglalkozó céget, hogy szerintük épül-e bevásárlóközpont vagy sem? Az előrejelző cég tehát az alábbi lehetőségeket adja hozzá a feladathoz:

z_1: az előrejelzés szerint megépül a bevásárlóközpont,

z_2: az előrejelzés szerint nem épül meg a bevásárlóközpont.

Ha megkérdeztük a céget, és ő a fenti lehetőségek közül az egyiket választotta (pozitívan vagy negatívan válaszolt a feltett kérdésre), akkor a valóságban bekövetkező esemény vagy megerősíti vagy megcáfolja a cég előrejelzését. Megeshet, hogy a cég azt válaszolta nekünk, hogy meg fog épülni a bevásárlóközpont, s az valóban meg is épül. Előfordulhat azonban az is, hogy a cég téved, s a bevásárlóközpont mégsem épül meg.

Használjuk a valószínűségszámításban tanult feltételes valószínűség fogalmát a fentebb elmondottakra és definiáljuk a $P(s_1 \mid z_1)$, $P(s_2 \mid z_1)$, $P(s_1 \mid z_2)$ és $P(s_2 \mid z_2)$ valószínűségeket! Ezeket a valószínűségeket a továbbiakban a **posteriori valószínűségeknek** nevezzük. A $P(s_2 \mid z_1)$ például azt jelenti, hogy annak valószínűsége, hogy a bevásárlóközpont nem épül meg, miközben a felkért cég azt jelezte előre, hogy meg fog épülni: $P(s_2 \mid z_1)$.

Ennek megfelelően a $P(s_1)$, $P(s_2)$ valószínűségeket **a priori valószínűségeknek** fogjuk nevezni.

A felkért előrejelző céget jól jellemzi az, hogy eddigi működése során milyen mértékben "találta el" — pozitív vagy negatív értelemben — a jövőbeni történéseket. A $P(z_1 \mid s_1)$ és a $P(z_2 \mid s_2)$ feltételes valószínűségeket (**likelihood**-okat) **beválási valószínűségnek** is nevezhetjük, hiszen az első valószínűségi érték azt mutatja, hogy milyen százalékban talált el a cég valamilyen eseményt, ami valóban bekövetkezett, a második valószínűség pedig azt mutatja, hogy milyen százalékban találta el azt, ha az esemény nem következett be. A két valószínűségnek nem kell feltétlenül egyformának lennie, a nagy marketing cégekre vonatkozó vizsgálatok azt mutatják, hogy "negatív" esetet "könnyebb" előrejelezni, mint pozitívat, azaz legtöbbször a második feltételes valószínűség a nagyobb.

Tegyük fel, hogy vállalkozónk felkeresett egy olyan céget, amelynek hosszú évekre vonatkozóan vannak kimutatásai az előrejelzéseinek pontosságáról, s ez alapján az alábbi feltételes valószínűségekkel rendelkezünk:

$$P(z_1 \mid s_1) = 0.8,$$

tehát

$$P(z_2 \mid s_1) = 1 - P(z_1 \mid s_1) = 0.2$$

és

$$P(z_2 \mid s_2) = 0.9, \text{ azaz } P(z_1 \mid s_2) = 0.1.$$

Ha rendelkezésünkre állnak az a priori valószínűségek és a feltételes (beválási) valószínűségek, akkor a **Bayes-tétel** segítségével ki tudjuk számítani a bennünket érdeklő a posteriori valószínűségeket — ezeket pedig fel fogjuk használni a várható pénzérték meghatározásánál.

A Bayes-tétellel például a $P(s_1 \mid z_1)$ valószínűséget az alábbi képlettel számíthatjuk ki:

$$P(s_1 \mid z_1) = \frac{P(z_1 \mid s_1) \cdot P(s_1)}{\sum\limits_i P(z_1 \mid s_i) \cdot P(s_i)} = \frac{P(z_1 \cap s_1)}{\sum\limits_i P(z_1 \cap s_i)} \tag{3.4}$$

Hogyan történik példánkban az a posteriori valószínűségek kiszámítása? A számításokat a 3.5. táblázat segítségével követhetjük végig.

	$P(s_i)$	$P(z_1 \mid s_i)$	$P(z_1 \cap s_i)$	$P(s_i \mid z_1)$
s_1	0.75	0.80	0.600	0.600/0.625 =0.96
s_2	0.25	0.10	0.025	0.025/0.625 = 0.04

3.5. táblázat

A táblázatból kiszámítható a $P(z_1) = P(z_1 \cap s_1) + P(z_1 \cap s_2) = 0.625$ valószínűség, amely azt adja meg, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy a cég a bevásárlóközpont megépítését fogja előrejelezni.

Hasonló számítások után:

$$P(s_1 \mid z_2) = 0.4 \quad \text{és} \quad P(s_2 \mid z_2) = 0.6,$$
$$P(z_2) = 0.375.$$

Most már ki tudjuk számolni az egyes előrejelzésekhez tartozó várható pénzértéket mindegyik alternatívára. Jelölje a $VP(a_1 \mid z_1)$ az a_1 alternatíva várható pénzértékét az előrejelző cégnek azon jóslata mellett, hogy a bevásárlóközpont meg fog épülni. Hasonlóképpen a $VP(a_2 \mid z_1)$ az a_2 várható pénzértéke, ha az előrejelzés szerint a bevásárlóközpont megépül. A $VP(a_1 \mid z_2)$ és $VP(a_2 \mid z_2)$ az a_1 és a_2 várható pénzértéke, ha a cég a bevásárlóközpont megépültének elmaradását jósolja.

A bevásárlóközpont megépülését előrejelző változathoz tartozó várható pénzértékek:

$$\begin{aligned} VP(a_1 \mid z_1) &= v(s_1, a_1) \cdot P(s_1 \mid z_1) + v(s_2, a_1) \cdot P(s_2 \mid z_1) = \\ &= 1400 \cdot 0.96 + (-140) \cdot 0.04 = \mathbf{1338.4} \\ VP(a_2 \mid z_1) &= v(s_1, a_2) \cdot P(s_1 \mid z_1) + v(s_2, a_2) \cdot P(s_2 \mid z_1) = \\ &= 770 \cdot 0.96 + 700 \cdot 0.04 = 767.2 \end{aligned}$$

Ha tehát az előrejelzés szerint a bevásárlóközpont megépül, akkor a helyes döntés a telekvásárlás (az a_1 alternatíva).

Ugyanezen módon kiszámolva az egyes alternatívák várható pénzértékét, ha az előrejelzés a bevásárlóközpont megépülését negatívan ítéli meg:

$$\begin{aligned} VP(a_1 \mid z_2) &= 1400 \cdot 0.40 + (-140) \cdot 0.60 = 476 \\ VP(a_2 \mid z_2) &= 770 \cdot 0.40 + 700 \cdot 0.60 = \mathbf{728} \end{aligned}$$

Ha tehát az előrejelzés szerint a bevásárlóközpont nem épül meg, akkor a helyes döntés a bankbetét (az a_2 alternatíva).

3.10 A nem teljes információ várható pénzértéke

Tegyük fel, hogy a cég 115 ezer forintot kér az előrejelzésért. Megéri ez nekünk vagy sem? Egy újabb döntés vár ránk: igénybe vegyük-e az előrejelzést?

Akárcsak a tökéletes információ esetében, most is kiszámolhatjuk azt, vajon mennyit érdemes áldozni a pótlólagos információért. Ha igénybe vesszük a pótlólagos (részleges) információt, akkor a részleges információ alapján a várható pénzérték kiszámításához elkészítjük a *3.6. táblázatot*.

Előrejelzés	Optimális cselekvés	Az optimális cselekvés nyeresége	Az előrejelzés valószínűsége	Várható pénzérték
z_1	a_1	1338.4	0.625	836.5
z_2	a_2	728	0.375	273.0

3.6. táblázat

A várható pénzérték, $VPII = 1109.5$. A részleges információért fizethető összeg maximuma most

$$VPII - VPRI = 1109.5 - 1015 = 94.5$$

ezer Ft. A feladatunkban a cég által kért összeg ennél nagyobb, tehát nem érdemes az előrejelzést igénybe venni. Előrejelzés nélkül pedig a várható pénzérték alapján a_1 mellett döntünk.

3.11 Döntési fák

Az eddig elmondottakat kényelmesen tudjuk kezelni akkor, ha egy megfelelő grafikus eszközt használunk. Ez az eszköz a döntési fa, amelyen a döntés meghozatala az ún. **kiértékelési eljárás** segítségével történik meg. A döntési fa elnevezés a gráfelméletből származik.

Jelölje e_0 és e_1 az alábbi cselekvési alternatívákat:

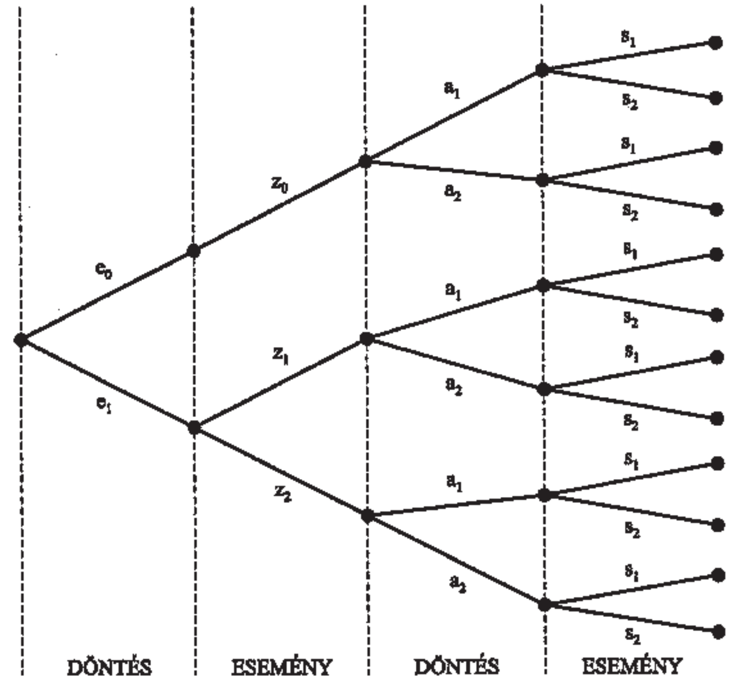
e_0: igénybe vesszük az előrejelzést,

e_1: nem vesszük igénybe az előrejelzést.

Ezen új jelölésünket és a régebbi jelöléseket felhasználva (z_0 egy virtuális alternatíva, amely csak az ábra tördelésében segít) az alábbi halmazokat definiálhatjuk:

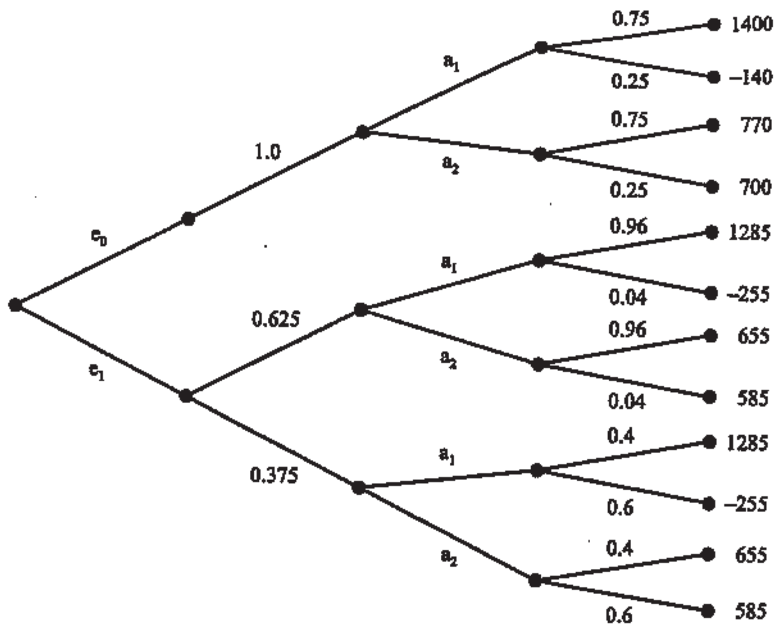
$$E = \{e_0,\ e_1\} \quad Z = \{z_0,\ z_1,\ z_2\} \quad A = \{a_1,\ a_2\} \quad S = \{s_1,\ s_2\}$$

Jegyezzük meg, hogy az E és A halmazok döntési alternatívákat tartalmaznak, míg a Z és S a döntéshozótól független események lehetséges kimeneteleit tartalmazó halmazok. A *3.1. ábra* négy szakaszra bontja döntési folyamatunkat. Az E halmaz elemei jelentik a kiinduló döntési helyzetet: vegyük-e igénybe az előrejelzést vagy sem. Ha igénybe vesszük az előrejelzést, akkor pozitív vagy negatív válasz lehetséges: az ábrán a z_i élekre kerülünk. A harmadik szakasz újra döntést kíván (akármi is az előrejelzés): melyik cselekvési lehetőséget választjuk? Végül az ábra negyedik szegmense a jövőbeli lehetséges kimeneteleket ábrázolja: bármit is döntöttünk, a bevásárlóközpont vagy meg fog épülni vagy sem.



3.1. ábra

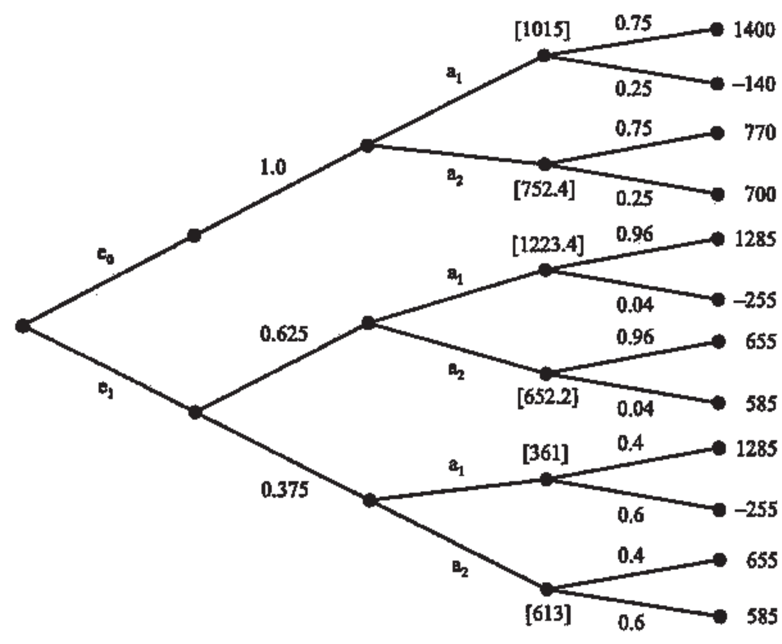
A *3.2. ábrán* megjelennek az alapadatok és az előzőekben kiszámolt valószínűségek. A végpontokon a nyereségmátrix adatai szerepelnek, amelyekből levontuk az előrejelző cég által kért összeget (mivel az a nyereséget csökkentő költség). Az ábra végpontjai a feladatban szereplő összes lehetséges esetet jelentik. Ha valamelyik végpontból elindulunk a kezdőpont felé, akkor ezáltal egy döntésekből és lehetséges kimenetelekből álló elágazássorozatot adunk meg. A véletlen eseményeket jelző ágakra a bekövetkezési valószínűségek kerültek. Ezek a végpontokat közvetlenül megelőzően az a priori és a posteriori valószínűségek (ez utóbbiak az előrejelzési ágon találhatók), az első döntési szakaszban pedig az előrejelzés eredményéhez tartozó feltételes valószínűségek.



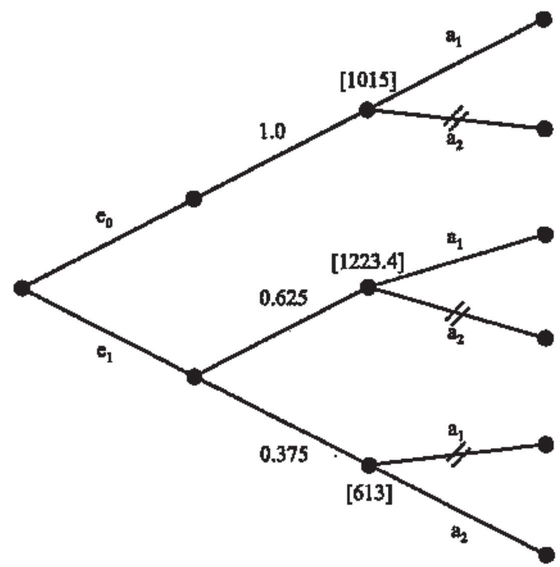
3.2. ábra

Az adatok felvitele után megkezdődik a kiértékelési eljárás, amelyet a fa végpontjaiból indítunk. A *3.3. ábra* csomópontjaira beírjuk azokat a várható pénzértékeket, amelyeket akkor kapnánk, ha az adott ágon az éppen vizsgált pontig már eljutottunk volna. A számok már ismerősek a felső ágon: ezek a megfelelő várható pénzértékek, ha nem vettünk igénybe előrejelzést. A többi érték akkor egyezik meg az általunk az előzőekben kiszámítottakkal, ha mindegyikhez hozzáadunk 115 ezer forintot (pl $1223.4 + 115 = 1338.4$). Ez a négy érték az összes lehetséges esetet mutatja, akármi is volt az előrejelzés eredménye és akármi is a végső kimenetel. A fa csomópontjai tehát az összes lehetséges eset várható pénzértékét képviselik.

Továbbra is visszafelé haladva a gráfon egy döntési pontba érkezünk el. Nyilvánvaló, hogy a döntési pontból most már előre tekintve azon az ágon akarunk majd haladni, amelyikhez a nagyobb várható pénzérték tartozik. Ha tehát valaha is eljutunk például a z_0 végpontjába, akkor az a_1-et választjuk, mert az elágazásnál ahhoz tartozik a nagyobb pénzérték. Ugyanígy a z_1 végpontjában az a_1-et, a z_2 végpontjában az a_2-t választjuk. A végpontokra ezért fel is írjuk az innen "szerezhető" maximális nyereségeket, és a követendő utat úgy jelöljük meg, hogy a nem maximális értékekhez tartozó ágakat "kivágjuk". A *3.4 ábrán* követhetjük végig az elmondottakat.



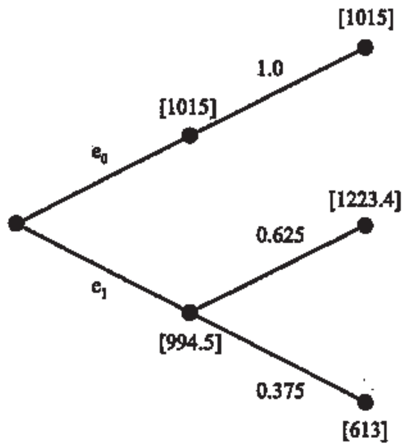
3.3. ábra



3.4. ábra

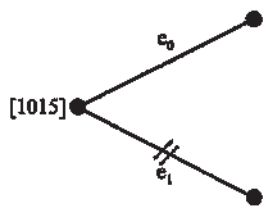
A *3.5. ábra* mutatja azt a helyzetet, amelyben egy újabb hátrafelé történő lépéssel kaptunk. Ezen az ábrán az előrejelzési döntés meghozatala előtti helyzetben vagyunk. A felső ág triviális: mivel nincs szó előrejelzésről, a várható pénzérték változatlan. Az alsó ágon aszerint kapjuk meg a várható pénzértékeket, hogy az előrejelzés eredménye a bevásárlóközpont megépítéséről pozitív vagy negatív. A kiszámításhoz a feltételes valószínűségeket és a már kiértékelt végpontok várható pénzértékeit használjuk fel. A végpontokra felírtuk az eredményeket.

A 3.5. ábra végpontjain látható értékek közül kell választanunk, ha az e_0 és e_1 elágazásával jellemzett döntési helyzetbe jutottunk el.



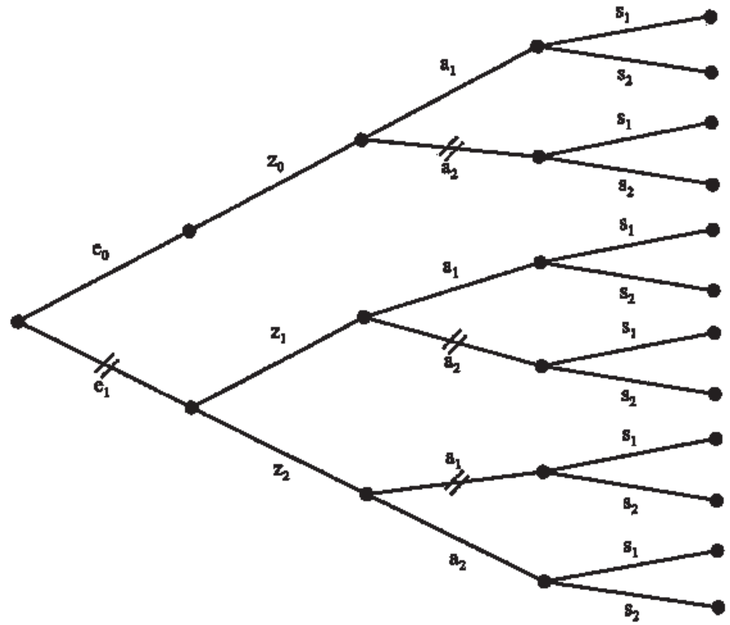
3.5. ábra

Innen megint előre tekintve magától értetődik, hogy a nagyobb értéket kell választanunk és a kisebb értékhez tartozó ágat ki kell vágnunk a fából. Ez látható a *3.6. ábrán*. Utolsó teendőnk az, hogy a kiindulópontra felírjuk a maximális várható pénzértéket.



3.6. ábra

Ha ezzel a kiértékeléssel készen vagyunk, akkor megállunk a kiindulóponton és megtekintjük a *3.7. ábrán* lévő helyzetet. (Az ábrára nem írtuk fel az adatokat, mivel a kivágásokkal keletkező útvonalra összpontosítunk.)



3.7. ábra

Ha nem voltak egyes végpontokban azonos várható pénzértékek, akkor a kivágások miatt (amerre nem mehetünk) a gráfon egyetlen olyan útvonal keletkezett, amelyet — most már az elejéről — végigjárva megkapjuk az optimális döntéseket. Feladatunkban a megoldás az, ha ***nem kérjük az előrejelzést*** (e_0) ***és az új fiókűzlet megnyitása*** (a_1) ***mellett döntünk.*** Ekkor a várható pénzérték 1015 ezer Ft, nagyobb, mint bármely más esetben.

3.12 Irodalomjegyzék a 3. fejezethez

BEROGGI, G.E.G. [1998]: *Decision Modeling in Policy Management: An Introduction to the Analytic Concepts*, Kluwer, Boston

HILLIER, F.S. – LIEBERMAN, G.S. [1986]: *Introduction to Operations Research*, Holden Day, Oakland, California; magyarul: *Bevezetés az operációkutatásba*, SZÁMALK, Budapest

HOWARD, R. [1968]: The foundations of decision analysis, *IEEE Transaction on Systems, Science and Cybernetics*, SSC-4, 211-219.

HOWARD, R. [1989]: The evaluation of decision analysis, a HOWARD, R.- MATHESON, J. (szerk): *The Principles and Applications of Decision Analysis*, Strategic Decision Group, Menlo Park, California kötetben

PRATT, J.W.- RAIFFA, H. -SCHLAIFER, R. [1965]: *The Foundations of Decision Under Uncertainty: An Elementary Exposition*, McGraw Hill, New York

RAIFFA, H.[1968]: *Decision Analysis*, Addison Wesley, Reading, MA

SAGE, A.P. [1977]: *Methodology for Large Scale Systems*, MacGraw Hill, New York

SCHLAIFER, R. [1969]: *Analysis of Decisions Under Uncertainty*, McGraw Hill, New York

SZENTPÉTERI, GY. [1980]: *Gazdasági döntések bizonytalanság esetén*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest

VON WINTERFELDT, D. – EDWARDS, W. [1986]: *Decision Analysis and Behavioral Research*, Cambridge University Press, New York

WATSON, S.R. – BUEDE, D.M. [1987]: *Decision Synthesis. The Principles and Practice of Decision Analysis*, Cambridge University Press, New York

4. Fejezet

Értékelő függvények

A negyedik fejezetet a preferencia relációk és preferencia rendezések alapvető tulajdonságainak bemutatásával kezdjük, majd az egy- és többtényezős értékelő függvények (value functions) tárgyalása következik. Kimondjuk az ezen függvények létezésére vonatkozó alapvető tételeket, majd részletesen tárgyaljuk a legegyszerűbb eseteket: az additív és a dekomponálható függvényeket. A fejezethez tartozó irodalomjegyzék az 5. fejezet után található.

4.1 Preferencia relációk alapvető tulajdonságai

Mind a determinisztikus, mind a kockázat melletti nem-determinisztikus feladatok további tárgyalásához szükségünk van a preferencia relációk tárgyalására, amely a mikroökonómia megalapozásában is fontos szerepet játszik. Példáinkat ezért nem csak a döntéselmélet területéről vesszük majd, hanem a mikroökonómia területéről is.

Kiindulásként vegyünk egy értékelésre vagy összehasonlításra váró elemekből álló X halmazt. Ez a halmaz lehet véges (tartalmazhat autókat, álláshelyeket, személyeket), vagy végtelen számosságú (tartalmazhat fogyasztási szinteket vagy tökéletesen osztható javakat).

Tekintsük ezen halmaz (x, y) rendezett elempárját. **A preferenciák klasszikus elméletében** arra a kérdésre, hogy vajon az "x elem legalább olyan jó-e, mint y", kizárólag igennel vagy nemmel lehet válaszolni. Ha minden X-beli rendezett párra feltesszük ezt a kérdést, akkor egy bináris relációt létesítettünk az X halmazon, amelyet $x \succeq y$ módon jelölünk, és

$x \succeq y$ akkor és csak akkor áll fenn, ha az "x legalább olyan jó-e, mint y" kérdésre a válasz igen.

Legyen az $x \succeq y$ reláció a kiindulás (a primitív reláció), s ekkor könnyen belátható, hogy az (x, y) elempárra az alábbi négy, egymást kölcsönösen kizáró eset fogalmazható meg:

(1) [$x \succeq y$ és $y \succeq x$], amelyet az $x \sim y$ módon jelölünk és azt mondjuk, hogy az x és y **indifferensek (I)**.

(2) [Nem($x \succeq y$) és Nem($y \succeq x$)], amelyet $x\ ?\ y$ módon jelölünk, és azt mondjuk, hogy x és y **nem összehasonlítható (J)**.

(3) [$x \succeq y$ és Nem($y \succeq x$)], amelyet $x \succ y$ módon jelölünk és azt mondjuk, hogy x **szigorúan preferált** y-hoz képest **(S)**.

(4) [Nem($x \succeq y$) és $y \succeq x$], azaz y szigorúan preferált x-hez képest.

Az $x \succeq y$ reláció esetében azt mondjuk, hogy x **preferált** y-hoz képest **(P)**.

Megjegyezzük, hogy nem feltétlenül a $\succeq$ reláció a primitív, lehet például a szigorú (erős) preferenciából is elindítani a preferencia struktúrák vizsgálatát.

Mielőtt P, I, J és S egyes jellemzőit megvizsgálnánk, definiáljuk a bináris relációk néhány, a továbbiakban számunkra fontos szerepet játszó tulajdonságát az $a, b, c \in X$ elemek segítségével.

Tranzitivitás: egy X-en értelmezett bináris reláció (R) tranzitív, ha aRb és bRc teljesüléséből következik aRc, azaz: aRb és $bRc \Longrightarrow aRc$

Negatív tranzitivitás: Nem(aRb) és Nem(bRc) $\Longrightarrow$ Nem(aRc)

Reflexivitás: aRa

Irreflexivitás: Nem(aRa)

Szimmetria: $aRb \Longrightarrow bRa$

Aszimmetria: $aRb \Longrightarrow$ Nem(bRa)

Antiszimmetria: aRb és $bRa \Longrightarrow a = b$

Teljesség: aRb és/vagy bRa teljesül minden $a \in X$ és $b \in X$ esetében.

Az aszimmetrikus bináris reláció irreflexív. Egy irreflexív és tranzitív bináris reláció aszimmetrikus. A negatív tranzitivitás akkor és csak akkor áll fenn, ha $aRb \Longrightarrow (aRc$ vagy $cRb)$.

Az előzőekben bevezetett preferencia-relációkra vonatkozóan az alábbi tulajdonságokat emeljük ki:

1. I és J szimmetrikus

$$x \sim y \Longrightarrow y \sim x$$
$$x\ ?\ y \Longrightarrow y\ ?\ x$$

2. S aszimmetrikus és irreflexív

$$x \succ y \Longrightarrow \text{Nem}(y \succ x)$$
$$\text{Nem}(x \succ x)$$

3. P és I reflexív

$$x \succeq x$$
$$x \sim x$$

4. J irreflexív

$$\text{Nem}(x\ ?\ x)$$

Bármely bináris relációt **rendezésnek** nevezünk, ha teljesíti a tranzitivitást. Egyéb tulajdonságok hozzávételével különböző rendezések konstruálhatók. Egy tranzitív R reláció

előrendezés (vagy *kvázi-rendezés*), ha reflexív,

gyenge rendezés, ha reflexív és teljes,

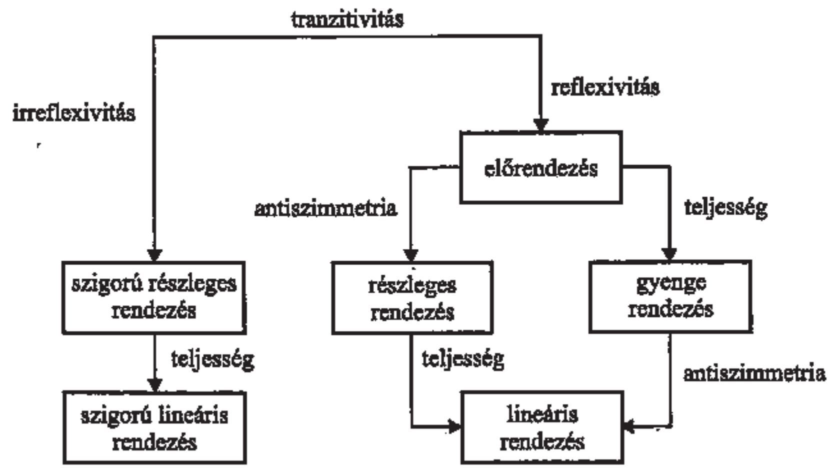
(reflexív) *részleges rendezés*, ha antiszimmetrikus és reflexív,

lineáris rendezés, ha antiszimmetrikus, reflexív és teljes,

szigorú részleges rendezés, ha irreflexív,

szigorú lineáris rendezés, ha irreflexív és teljes.

Egy részleges rendezés antiszimmetrikus előrendezés. A gyenge rendezés egyben teljes előrendezés és a szigorú lineáris rendezés egy teljes szigorú részleges rendezés. A lineáris rendezést tekinthetjük teljes részleges rendezésnek vagy antiszimmetrikus gyenge rendezésnek. Az eligazodást segíti a *4.1. ábra*.



4.1. ábra

A gyenge rendezés, a szigorú lineáris rendezés és a lineáris rendezés megköveteli az összes pár összehasonlíthatóságát. Ezért mindhárom rendezés **teljes** — ellentétben a **részleges rendezésekkel**, amelyeknél az összes különböző pár összehasonlíthatóságát követeljük meg.

A rendezéshez szükséges tranzitivitás nem magától értetődő: a gyakorlatban, a mindennapi életben nagyon sok olyan példát találunk, amely megsérti a tranzitivitást, ám teljes mértékben valószerű. Sportolóknál gyakran megesik, hogy A megveri B játékost, s ezáltal jobbnak tekintjük az A-t a B-nél. Ezután B játszik C-vel és megveri őt, s ezáltal úgy látjuk, hogy B jobb játékos, mint a C. Mégis megtörténik, hogy ugyanazon a versenyen C megveri az A játékost.

Ugyancsak vigyáznunk kell a teljességgel is. Ez a tulajdonság azt mondja ki, hogy ha sem a nem jobb b-nél, sem fordítva, akkor a két elem indifferens. Ez csak akkor igaz, ha az indifferencia fogalmába beleértjük azt is, ha a döntéshozó valamilyen okból képtelen az összehasonlítási döntést meghozni.

A különböző kiterjesztésekre és paradoxonokra később visszatérünk, most összpontosítsuk figyelmünket arra, vajon mi a feltétele annak, hogy a preferenciákhoz valós értékű függvényeket tudjunk rendelni. A továbbiakban látni fogjuk, hogy egy olyan valós értékű függvény létezésének garantálásához, amely megőrzi a $P(\succeq)$ leglényegesebbnek tekintett rendezési tulajdonságait, a P relációnak legalább gyenge rendezésnek kell lennie, illetve az $S(\succ)$ relációnak legalább szigorú részleges rendezésnek kell lennie.

Tekintsük a $P(\succeq)$ relációt, amely a fentebb bemutatott reflexivitáson kívül rendelkezzen a teljességi és tranzitivitási tulajdonsággal is, azaz

(a) minden x, y esetén $\mathrm{Nem}(x \succeq y) \Longrightarrow y \succeq x$,

(b) $x \succeq y$ és $y \succeq z \Longrightarrow x \succeq z$,

tehát P egy gyenge rendezést határoz meg. Ez azt jelenti, hogy

(1) nincs összehasonlíthatatlanság (J üres),

(2) az indifferencia $I(\sim)$ tranzitív,

(3) a szigorú preferencia $S(\succ)$ tranzitív és

(4) az indifferencia és a szigorú preferencia az alábbi "kellemes" tulajdonsággal bír:

$$[x \succ y \text{ és } y \sim z \Longrightarrow x \succeq z]$$

és

$$[x \sim y \text{ és } y \succ z \Longrightarrow x \succeq z].$$

4.2 Értékelő függvényekre vonatkozó egzisztencia tételek

Ha a P gyenge rendezés és az indifferencia (I) egy ekvivalencia reláció (reflexív, szimmetrikus és tranzitív), az X-beli alternatívák indifferencia osztályokba sorolhatók. Jelölje χ ezen indifferencia osztályok halmazát. A megszámlálhatósági tulajdonság azt jelenti, hogy χ elemei egyértelmű megfeleltetésbe hozhatók a természetes számok halmazával. Így a χ elemeit $X_1, X_2, X_3, \ldots$ címkével láthatjuk el, ahol X_i az i-edik indifferencia osztály. Ha tehát az egyik alternatíva: $a \in X_i$ és egy másik alternatíva: $b \in X_j$, akkor vagy

$$a \sim b, \quad \text{ha } i = j \tag{4.1}$$

(az X_i definíciója szerint), vagy pedig

$$a \succ b \text{ vagy } b \succ a, \quad \text{ha } i \neq j \tag{4.2}$$

(a $\succeq$ X-en vett teljessége miatt).

Ha $\succeq$ egy gyenge rendezés az X halmazon, akkor $\succ$ egy szigorú gyenge rendezés (irreflexív, negatív tranzitív), amely a χ halmazon egy szigorú lineáris rendezést indukál.

4.1 Tétel. *Ha $\succeq$ gyenge rendezés az X halmaz elemeire vonatkozóan és a χ indifferencia osztályok halmaza megszámlálható, akkor létezik egy olyan v-vel jelölt valós értékű függvény, amely X-en értelmezett és az X bármely a és b elemére $a \succeq b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $v(a) \geq v(b)$, azaz $a \succ b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $v(a) > v(b)$ és $a \sim b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $v(a) = v(b)$. Ezt a függvényt* **értékelő függvénynek (value function)** *nevezzük.*

A bizonyítás megtalálható például *Fishburn* (1970) könyvében.

Ezt a függvényt a közgazdaságtanban hasznossági függvénynek is szokták nevezni. A döntéselmélet inkább értékelő függvényt mond és fenntartja a hasznossági függvény (utility function) elnevezést a kockázat melletti döntéshozatal során definiált függvényekre. Ahol tehát a döntéselmélet value theory-t használ, ott a közgazdaságtan utility theory-ról beszél, ahol pedig a döntéselmélet a utility theory kifejezést használja, ott a közgazdaságtan a várható hasznosság elméletéről — expected utility theory — beszél. A továbbiakban mi a determinisztikus esetre fenntartjuk az értékelő (value) függvény, a kockázat melletti esetre pedig a hasznossági (utility) függvény kifejezést, összhangban a döntéselméleti tárgyalások többségével, és némileg zavaró módon azok számára, akik a közgazdasági megközelítésből szoktak kiindulni. Reméljük, hogy ez a terminológiai kettősség nem okoz gondot a dolgok lényegének megértésében.

Jegyezzük meg, hogy az értékelő függvény és a racionális döntéshozó között szoros kapcsolat van. Általában azt a döntéshozót tekintik racionálisnak, akinek a preferencia struktúrája egy értékelő függvénnyel leírható. A racionális döntéshozóra vonatkozóan tehát megállapíthatjuk, hogy preferencia struktúrája teljes és tranzitív, valamint rendelkezik a (4.3) helyettesíthetőségi tulajdonsággal:

$$\text{ha } a \succ b \text{ és } a \sim c, \text{ akkor } c \succ b \tag{4.3}$$

Ezeknek a feltételeknek az egyenes következménye az, hogy az indifferencia görbék nem metszik egymást: az egymást metsző görbék a racionalitás megsértését jelzik.

42 ábra.

Visszatérve tehát a 4.1. tételben definiált értékelő függvényre, annak egzisztenciája és unicitása érdekel bennünket. Ez utóbbi az egyszerűbb: a v függvény bármely szigorúan növekvő monoton transzformációja megőrzi az értékelő függvény rendezését. Ez a sorrend megőrzési tulajdonság akkor és csak akkor garantált, ha az alternatívákat legalább ordinális skálán mérjük.

Az értékelő függvény számszerű értékeket rendel ahhoz a kijelentéshez, hogy valamely alternatívát jobban preferálunk, mint egy másikat. Az értékelő függvényt általában úgy kalibrálják, hogy a legnagyobb értéke 1 és a legkisebb értéke

0 legyen. A közbeeső értékek megfelelnek a preferencia rendezés sorrendjének. Ha az alternatívákat növekvő preferencia sorrendbe raktuk, akkor az értékelő függvény egy monoton növekvő függvény. Monoton növekvő értékelő függvény tartozik például a pénzbeli nyereségekhez. Minél magasabb a nyereségünk, annál preferáltabb az az esemény, amelynek kimenetele ez a nyereség volt (feltehetjük, hogy vannak ésszerű alsó és felső korlátai a nyereségnek). A monoton csökkenő értékelő függvény példája a pénzbeli veszteség lehet.

Vannak azonban arra is példák, hogy a preferenciákat reprezentáló értékelő függvények nem rendelkeznek a monotonitási tulajdonsággal. Tárgyalásunkban a monoton növekvő értékelő függvényekre szorítkozunk. Alkalmas transzformációval a monoton csökkenő eset átírható monoton növekvőbe, és a nem monoton esetekben is találhatunk olyanokat, amelyek a monoton növekvő feladatba transzformálhatók.

Az egymásból szigorúan növekvő transzformációval kapott értékelő függvényeket egymás **stratégiai ekvivalensének** nevezzük. A stratégiailag ekvivalens értékelő függvényekhez az alternatíváknak ugyanaz a preferencia sorrendje tartozik.

Az értékelő függvény létezését kimondó tétel két tulajdonságot használ fel: a preferencia struktúra gyenge rendezési tulajdonságát és az indifferencia osztályok megszámlálhatóságát. Ezeket a feltételeket gyengébb megkötésekkel is helyettesíthetjük. A megszámlálhatóság helyett elegendő azt kikötni, hogy χ tartalmazzon egy megszámlálható részhalmazt, amely "a rendezésre nézve sűrű" a $\succ$ preferencia relációra vonatkozóan (lásd még a 4.1 Tétel előtti megjegyzést).

4.2 Tétel. *Legyen $\succeq$ egy gyenge rendezés az X-en és B a χ egy részhalmaza az alábbi tulajdonságokkal:*

1. B megszámlálható

2. bármely $X_1, X_2 \in \chi, X_1 \succ X_2$ esetén létezik egy $Y \in B$, amelyre nézve

$$X_1 \succ Y \succ X_2 \text{ (sűrű a } \succ \text{ rendezésre nézve)}. \tag{4.4}$$

Ekkor létezik egy $v : X \longrightarrow R$ valós értékű függvény, amelyre nézve minden $a, b \in X$-re teljesül, hogy

$$a \succ b \text{ akkor és csak akkor, ha } v(a) > v(b), \text{ és} \tag{4.5}$$

$$a \sim b \text{ akkor és csak akkor, ha } v(a) = v(b)\,. \tag{4.6}$$

Megfordítva: ha a (4.5) *és* (4.6) *igaz, akkor $\succeq$ egy gyenge rendezés és a χ halmaznak kell egy 1. és 2. tulajdonságokkal rendelkező részhalmazának lennie.*

A bizonyítás *Fishburn* (1970) vagy *Debreu* (1954) könyvében található meg.

Chankong és Haimes (1983) nyomán nézzük meg a tétel egy illusztrációját. X legyen az R^2 pontjainak halmaza és $\succeq$ legyen adott az alábbi módon:

$$\text{minden } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in X\text{-re } \mathbf{a} \succeq \mathbf{b} \text{ akkor és csak akkor igaz, ha}$$

$$0.4a_1 + 0.6a_2 \geq 0.4b_1 + 0.6b_2$$

Megmutatható, hogy ez a $\succeq$ egy gyenge rendezés. Az $x \in R$-hez tartozó tipikus indifferencia osztály ebben az esetben

$$X_x = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in R^2, 0.4a_1 + 0.6a_2 = x\}\,,$$

és ezáltal $\chi = \{X_x \mid x \in R\}$.

χ nyilvánvalóan nem megszámlálható. Legyen B a χ egy részhalmaza

$$B = \{X_{r1}, X_{r2}, \ldots, X_{rn}, \ldots\}$$

ahol $r_1, r_2, \ldots, r_n$ racionális számok. Mivel a racionális számok halmaza megszámlálható, B is az. Bármely két különböző x és y valós számra mindig létezik egy olyan r racionális szám, amely x és y között van. Ezért bármely X_x és X_y, $X_x \succ X_y$ χ-beli halmazokra mindig létezik egy $X_r \in B$ úgy, hogy $X_x \succ X_r \succ X_y$. Következésképpen a B kielégíti az 1. és 2. feltételt, tehát a 31.2. tétel értelmében létezik egy v valós értékű függvény, amely kielégíti (4.5) és (4.6)-ot. Sajnos a tétel bizonyítása nem konstruktív, ezért általában nem tudjuk, hogyan lehet ezt a függvényt megkapni. Ebben a példában azonban eléggé triviális, hogy

$$v(\mathbf{a}) = 0.4a_1 + 0.6a_2, \text{ bármely } \mathbf{a} \in X\text{-re a megfelelő } v \text{ függvény.}$$

Az eddigiekben egy általános X halmazról volt szó. Van azonban egy olyan speciális eset, amely bennünket különösen érdekel, mégpedig az, amikor az X az n-dimenziós vektortér. Egy $\mathbf{x} \in X$ alternatíva az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ komponenseivel jellemzett, amelyeket értékelési tényezőknek vagy tulajdonságoknak tekintünk. Az erre az esetre kidolgozott elméletnek a többcélú döntéshozatalban van kiemelt jelentősége.

A 4.2. tétel egy speciális eseteként interpretálható a következő tétel, ahol a rendezésre nézve sűrűségi tulajdonságot az ún. folytonossági feltétellel helyettesítjük (ez utóbbiból következik az előbbi).

4.3 Tétel. *Legyen X az R^n részhalmaza és $\succeq$ egy gyenge rendezés X-en. Tegyük fel továbbá, hogy*

1. bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ esetén $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ maga után vonja, hogy $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ (itt $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x_i \geq y_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ és legalább egy i index esetén szigorú egyenlőtlenség áll fenn) és

2. bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$-re, ahol $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \succ \mathbf{z}$ létezik pontosan egy $\lambda \in (0,1)$, amelyre

$$\mathbf{y} \sim \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{z} \tag{4.7}$$

Ekkor létezik egy olyan X-en definiált v valós értékű függvény, amely kielégíti a (4.5) *és* (4.6)*-ot.*

Az 1. feltétel **monotonitási feltételként** ismert (vagy mint **dominancia-, avagy nem-kielégíthetőségi feltétel**), amely azt állítja, hogy amint legalább egy tényező értéke nő, miközben egyetlen más tényezőben sem történik csökkenés, akkor a preferencia is növekszik.

A 2. feltétel a **folytonossági vagy arkhimédeszi feltétel**, amely a v létezésének egy lényegi feltétele. Eszerint ha $\mathbf{y}$ az $\mathbf{x}$ és a $\mathbf{z}$ között fekszik szigorú preferencia értelemben, akkor kell lennie az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{z}$ olyan konvex kombinációjának, amely $\mathbf{y}$-ra nézve indifferens.

Luce és Suppes (1965) ad egy klasszikus ellenpéldát, amikoris $\succeq$ lexikografikus rendezés (vagyis gyenge rendezés) és amely nem elégíti ki a folytonossági feltételt.

4.3 Additív értékelő függvények

Többtényezős esetben a többváltozós értékelő függvény megkonstruálása a dimenziószám növekedésével egyre kellemetlenebb feladat. A tényezők független csoportjait képezve próbáljuk meg feladatunkat annyira leegyszerűsíteni, amennyire lehetséges. Ideális esetben minden tényezőre külön-külön meg tudunk konstruálni egy értékelő függvényt, majd ezeket additív módon szerkesztjük egyetlen függvénnyé. Ha ez sikerül, akkor azt mondjuk, hogy a szóbanforgó preferencia struktúra additív.

Ha tehát $\mathbf{x} \in X$, és $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a preferencia struktúra akkor és csak akkor additív, ha

$$v(\mathbf{x}) = v_1(x_1) + v_2(x_2) + \ldots + v_n(x_n), \tag{4.8}$$

vagy

$$v(\mathbf{x}) = \lambda_1 v_1(x_1) + \lambda_2 v_2(x_2) + \ldots + \lambda_n v_n(x_n), \tag{4.9}$$

ahol $\lambda_i > 0$ skálázó konstansok és a λ_i-k összege 1.

4.1 Definíció. A T tényezőhalmaz ($T = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$) egy C részhalmaza és a C^* komplementer halmaz akkor és csak akkor **preferencia-független**, ha egy adott $\mathbf{x}^0_{C^*}$ esetén

$$(\mathbf{x}'_C, \mathbf{x}^0_{C^*}) \succeq (\mathbf{x}''_C, \mathbf{x}^0_{C^*}) \tag{4.10}$$

maga után vonja

$$(\mathbf{x}'_C, \mathbf{x}_{C^*}) \succeq (\mathbf{x}''_C, \mathbf{x}_{C^*}) \tag{4.11}$$

relációt, minden $\mathbf{x}_{C^*} \in X_{C^*}$ esetében, ahol $\mathbf{x}'_C$, és $\mathbf{x}''_C$ tetszőleges alternatíva darabok.

Két tényező esetén például C legyen vagy $\{X_1\}$ vagy $\{X_2\}$ és a komplementer halmazok rendre $\{X_2\}$ és $\{X_1\}$. Ha az X_2 második tényezőbeli x_2^0 rögzített értékénél egy (x_1^0, x_2^0) alternatíva legalább olyan jó, mint az (x_1^1, x_2^0) alternatíva, azaz

$$(x_1^0, x_2^0) \succeq (x_1^1, x_2^0), \tag{4.12}$$

és X_1 preferencia-független az X_2-től, akkor

$$(x_1^0, x_2) \succeq (x_1^1, x_2) \tag{4.13}$$

az x_2 tetszőleges értékére. Fordítva: ha (4.12)-ből az x_2 minden lehetséges értékére következik a (4.13), akkor X_1 preferencia-független az X_2-től. Vigyázat: ha X_1 preferencia-független az X_2-től, nem biztos, hogy X_2 preferencia-független az X_1-től! Nézzünk meg tehát egy erősebb feltételt.

4.2 Definíció. A T tényezőhalmazt akkor mondjuk **kölcsönösen preferencia-függetlennek**, ha bármely nemüres C részhalmaza preferencia-független a C^* komplementer halmaztól.

Könnyen megmutatható, hogy a kölcsönös preferencia-függetlenség az additív preferencia struktúra létezésének szükséges feltétele, s a legtöbb esetben elégséges feltétel is.

Tekintsünk egy példát a preferencia-függetlenségre. Ha valaki nyáron a fagylaltot jobban szereti, mint a süteményt, de télen a süteményt részesíti előnyben a fagylalthoz képest, akkor azt mondjuk, hogy az *édességekre* vonatkozó preferenciája nem preferencia-független az *évszaktól*. Jelölje az $a_j :=$ (édesség$_j$; évszak$_j$) az egyes alternatívákat, s ekkor az elmondottak szerint pl.:

$$(\text{fagylalt, nyár}) \succ (\text{sütemény, nyár}) \Longrightarrow (\text{sütemény, tél}) \succ (\text{fagylalt, tél})$$

Ha viszont ugyanez az illető a vanília ízét jobban szereti, mint a csokoládéízt, akár fagylaltról, akár süteményről, akár egyéb édességről is van szó, akkor azt mondhatjuk, hogy az édesség íze preferencia-független az édesség *típusától*, azaz pl.:

$$\text{vaníliafagylalt} \succ \text{csokoládéfagylalt} \Longrightarrow \text{vaníliatorta} \succ \text{csokoládétorta}$$

Általánosabbá is tehetjük ezt a kijelentést, ha egyéb ízekre is kiterjesztjük (eper, citrom, stb.) Az édesség ízének az édesség típusára vonatkozó preferencia-függetlensége ekkor felírható a következőképpen:

$$(\text{íz}_j, \text{típus}_\alpha) \succ (\text{íz}_i, \text{típus}_\alpha) \Longrightarrow (\text{íz}_j, \text{típus}_\beta) \succ (\text{íz}_i, \text{típus}_\beta).$$

Ha még azt is tudjuk, hogy az édesség típusa preferencia-független az íztől, vagyis ha például:

$$(\text{vaníliafagylalt} \succ \text{vaníliatorta}) \Longrightarrow (\text{csokoládéfagylalt} \succ \text{csokoládétorta}),$$

akkor azt mondhatjuk, hogy ez a két tényező (íz és típus) kölcsönösen preferencia-függetlenek.

(Ez az illető tehát télen-nyáron azonos módon viselkedik: ha kétféle azonos ízű édességet tesznek elé, mindig a fagylaltot részesíti előnyben, ha különböző ízű azonos típusú édességet kínálnak neki, akkor mindig a vaníliát tartja jobbnak.)

Két tényező esetében a preferenciafüggetlenséget az egyik tényező értékeinek (szintjeinek) a másik tényező rögzített értékei melletti változtatásával vizsgáltuk. Ebben az esetben a második tényező az első komplementere. Ha több tényezőnk van, akkor is használhatjuk ezt a komplementer fogalmat: egy vagy több tényező változásai mellett figyeljük meg a preferenciákat, miközben az összes többi tényezőt adott értékeken rögzítjük. A preferencia-függetlenség ekkor nem az eredeti tényezők között áll fenn, hanem tényezőhalmazok között. Ha egy tényezőhalmaz minden részhalmaza preferencia-független a komplementerétől, akkor igaz az, hogy a tényezőhalmaz kölcsönösen preferencia-független.

Nézzünk meg egy közlekedési példát. A forgalom jellemzői legyenek: a forgalom sűrűsége (d), a forgalom sebessége (s) és a napszak (n). Először is azt kell megjegyeznünk, hogy a forgalom sűrűsége és a napszak lehet preferencia-független még akkor is, ha a két tényező korrelált: az alacsony forgalmi sűrűséget mindig jobbnak tartjuk, akármelyik napszakban is vagyunk — miközben a csúcsidőben természetesen magas a forgalomsűrűség.

$\{d\}$ preferencia-független $\{s, n\}$-től, ha az alacsony forgalomsűrűséget mindig preferáljuk, akármelyik napszakban is vagyunk és bármilyen a forgalom sebessége. Nyilvánvaló, hogy ez nem igaz. Az ellenkezője viszont már igaz lehet: $\{s, n\}$ tetszőleges kombinációja preferencia-független lehet $\{d\}$ adott értékeire: pl. az alacsony forgalomsűrűség és alacsony sebesség preferált a magas forgalomsűrűség és a magas sebesség esetéhez képest a nap bármely órájában. A kölcsönös preferencia-függetlenség azonban nem áll fenn.

Három- vagy többdimenziós esetben a kölcsönös preferencia-függetlenség elégséges ahhoz, hogy biztosítsa: ha a preferencia struktúra numerikus függvények egy halmazával leírható, akkor legalább egy függvény additív az általunk fentebb definiált értelemben. Sajnos éppen a kétdimenziós esetben ellenpéldák hozhatók, amelyek azt mutatják, hogy a kölcsönös preferencia-függetlenség nem elégséges. Ezért a kétdimenziós esetre újabb feltételek bevezetésére van szükség.

4.3 Definíció. A kéttényezős döntési problémához tartozó $\succeq$ preferencia rendezés akkor elégíti ki **az egyszerűsítési feltételt**, ha bármely $x_1, y_1, a_1 \in X_1$ és $x_2, y_2, a_2 \in X_2$ esetén

$$(x_1, a_2) \succeq (a_1, y_2) \text{ és } (a_1, x_2) \succeq (y_1, a_2) \tag{4.14}$$

együttes fennállásából következik, hogy

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)\,. \tag{4.15}$$

Könnyen megmutatható, hogy az additív preferencia struktúrák létezésének az egyszerűsítési feltétel egyben szükséges feltétele is. Ez egy nagyon erős feltétel.

4.4 Tétel. *Egy kéttényezős döntési problémát jellemezzen a $\succeq$ preferencia struktúra, amelyet a $v(x_1, x_2)$ valós értékű függvény reprezentál úgy, hogy*

$$(x_1', x_2') \succeq (x_1'', x_2'') \iff v(x_1', x_2') \succeq v(x_1'', x_2'')\,. \tag{4.16}$$

Ekkor

1. $\succeq$ kölcsönösen preferencia független, ha az egyszerűsítési feltétel fennáll és

2. akkor és csak akkor van olyan v_1 és v_2 az X_1 és X_2-n, hogy

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \iff v_1(x_1) + v_2(x_2) \geq v_1(y_1) + v_2(y_2) \tag{4.17}$$

bármely $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ esetén, ha az egyszerűsítési feltétel fennáll.

A bizonyítás *Luce és Tukey* (1964) könyvében megtalálható. Érdemes megjegyezni, hogy az elégségesség bizonyítása úgy indul, hogy felhasználja a $v(x_1, x_2)$ függvény létezését arra, hogy megmutassa: $\succeq$ gyenge rendezés és hogy ha az x_1, x_2, y_1 és y_2 bármely hármasát tekintjük, mindig találunk egy negyediket, amelyre

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \tag{4.18}$$

igaz. Ezt **megoldhatósági feltételnek** szokták nevezni. Esetünkben könnyen belátható, hogy az indifferencia feltétel ekvivalens a

$$v(x_1, x_2) = v(y_1, y_2) \tag{4.19}$$

algebrai egyenlettel, amely a három adott változóval a negyedikre mindig megoldható.

Egy gyengébb feltételt kapunk, ha a fentebbi definícióban a $\succeq$ relációt kicseréljük a $\sim$ relációval. Ezt **Thomsen feltételnek** nevezik.

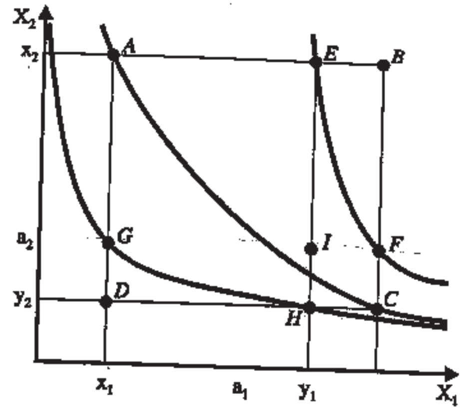
4.4 Definíció. A kéttényezős döntési problémához tartozó $\succeq$ preferencia rendezés akkor elégíti ki a Thomsen feltételt, ha bármely $x_1, y_1, a_1 \in X_1$ és $x_2, y_2, a_2 \in X_2$ esetén

$$(x_1, a_2) \sim (a_1, y_2) \text{ és } (a_1, x_2) \sim (y_1, a_2) \tag{4.20}$$

együttes fennállása maga után vonja, hogy

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)\,. \tag{4.21}$$

A Thomsen feltétel helyettesítési határarányként is értelmezhető, ezért sokkal praktikusabb, mint az egyszerűsítési feltétel, amelynek absztrakt mivolta a verifikálást nagyon nehézzé teszi. A Thomsen feltételt illusztrálja a *4.2. ábra*.



4.2. ábra

Ha az ábrán az alsó indifferencia görbe H pontjából indulunk el és a G-be kívánunk átjutni, ez azt jelenti, hogy az X_1-ből fel kell adnunk HD nagyságú mennyiséget az X_2 DG mennyiségéért cserébe. Ha a legmagasabb indifferencia görbe F pontjából az E pontba mozdulunk el, akkor az X_1-ből FI mennyiséget adunk fel az X_2 IE mennyiségéért. A Thomsen feltétel azt követeli meg, hogy ha a $CD = HD + CH$ mennyiséget az X_1-ből feladva fogadjuk el érte cserébe az $AD = DG + AG$ mennyiséget az X_2-ből, azaz az A és C pontok ugyanazon az indifferencia görbén legyenek. Mivel $HD + CH = HD + FI$ és $DG + AG = DG + IE$, ezért ez a feltétel kézenfekvő.

Elvileg a kölcsönös preferencia-függetlenség és a Thomsen feltétel együttese egyfajta operacionális megközelítésre ad lehetőséget, ha verifikálható elégséges feltételt szeretnénk megadni:

4.5 Tétel. *Egy kéttényezős döntési problémát jellemezzen a $\succeq$ preferencia struktúra, amelyet a $v(x_1, x_2)$ valós értékű függvény reprezentál úgy, hogy*

$$(x_1', x_2') \succeq (x_1'', x_2'') \Longleftrightarrow v(x_1', x_2') \geq v(x_1'', x_2''). \qquad (4.22)$$

Ebben az esetben akkor és csak akkor létezik olyan v_1 és v_2 az X_1 illetve X_2 halmazon, amelyekre nézve

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \Longleftrightarrow v_1(x_1) + v_2(x_2) \geq v_1(y_1) + v_2(y_2) \qquad (4.23)$$

áll fenn, ha $\{X_1, X_2\}$ kölcsönösen preferencia-független és a Thomsen feltétel teljesül.

A bizonyítás megtalálható például *Krantz et al.* (1971) könyvében. *Keeney és Raiffa* (1976) a 4.5. tétel helyett a **megfelelő trade-off értékek feltételét** használja szükséges és elégséges feltétel gyanánt.

4.5 Definíció. Az $\{X_1, X_2\}$ akkor elégíti ki a megfelelő trade-off értékek feltételét, ha bármely $x_1, y_1, a_1, b_1 \in X_1$ és $x_2, y_2, a_2, b_2 \in X_2$ esetén

$$(x_1, a_2) \sim (y_1, b_2), \quad (b_1, b_2) \sim (a_1, a_2), \quad (a_1, x_2) \sim (b_1, y_2) \qquad (4.24)$$

maga után vonja az $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ teljesülését. Keeney és Raiffa ezt felhasználva konstruálja meg a v_1 és v_2 függvényeket.

Mint már említettük, megfelelő feltételezések mellett a három vagy több tényezős problémánál a kölcsönös preferencia-függetlenségből következik a "páronkénti" egyszerűsítési feltétel és ebből pedig a "páronkénti" Thomsen feltétel. Erre az esetre tehát az alábbi tétel érvényes:

4.6 Tétel. *Az n-tényezős döntési problémában, ahol $n \geq 3$, definiáljunk az X halmazon egy $v(\mathbf{x}) = v(x_1, \ldots, x_n)$ értékelő függvényt oly módon, hogy bármely $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X$ alternatívákra*

$$\mathbf{x}' \succeq \mathbf{x}'' \text{ akkor és csak akkor, ha } v(\mathbf{x}') \geq v(\mathbf{x}''). \qquad (4.25)$$

Ebben az esetben léteznek az $X_1, \ldots, X_n$ halmazokon értelmezett $v_1, \ldots, v_n$ függvények, amelyekre

$$\mathbf{x}' \succeq \mathbf{x}'' \qquad (4.26)$$

és

$$v_1(x_1') + \ldots + v_n(x_n') \geq v_1(x_1'') + \ldots + v_n(x_n'') \qquad (4.27)$$

akkor és csak akkor teljesül, ha a kölcsönös preferencia függetlenség fennáll.

Ezen értékelő függvény előállításáról a 4.6 fejezetben lesz szó.

4.4 Értékelő függvények dekompozíciós alakjai

Az additív preferencia struktúra praktikus okokból nagyon kellemes tulajdonságokkal bír, de ez a feltétel nem mindig teljesül. Egy másik lehetséges — és még mindig aránylag könnyen kezelhető — eset az, ha a preferencia struktúra dekomponálható.

4.6 Definíció. Egy preferencia struktúra akkor dekomponálható, ha léteznek az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ halmazokon értelmezett $v_1, v_2, \ldots, v_n$ valós függvények és az X halmazon értelmezett v függvény oly módon, hogy bármely $\mathbf{x}'$ és $\mathbf{x}'' \in X$-re $\mathbf{x}' \succeq \mathbf{x}''$ akkor és csak akkor teljesül, ha $v[v_1(x_1'), \ldots, v_n(x_n')] \geq v[v_1(x_1''), \ldots, v_n(x_n'')]$

Nyilvánvaló, hogy az additív forma a dekomponálható struktúra speciális esete. A létezésre vonatkozó szükséges és elégséges feltételek kevésbé megszorítóak, mint az additív struktúránál. Megmutatható, hogy a három vagy több tényezőre megfogalmazott kölcsönös preferencia-függetlenség helyettesíthető azzal a feltétellel, hogy minden tényező legyen független a komplementer tényezőhalmaztól.

Dekompozíciós formákra vonatkozó példák:

$$v[v_1(x_1),\ldots,v_n(x_n)] = kv_1(x_1)v_2(x_2)\ldots v_n(x_n), \quad \text{multiplikatív}, \qquad (4.28)$$

$$v[v_1(x_1),\ldots,v_n(x_n)] = kx_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n} \quad \text{polinomiális}, \qquad (4.29)$$

$$v[v_1(x_1),\ldots,v_n(x_n)] = [k_1v_1(x_1)+\ldots \qquad (4.30)$$

$$+k_{n-2}v_{n-2}(x_{n-2})]v_{n-1}(x_{n-1})v_n(x_n) \quad \text{részlegesen additív}$$

alak, és így tovább.

A kvázi-additív vagy multiplikatív alakok jellemzésére néhány újabb definíciót és tételt vezetünk be.

4.7 Definíció. Egy X halmazon értelmezett v értékelő függvény akkor és csak akkor **mérhető**, ha v pontosan tükrözi

1. az X-beli elemek sorrendjét és
2. az elemek különbségeinek sorrendjét.

A mérhető függvényekre vonatkozó egzisztencia problémákkal nem foglalkozunk. Számunkra érdekesebb most az a kérdés, hogy ha a mérhető függvény létezik, akkor melyek a feltételei annak, hogy valamelyik dekompozíciós formában felírhassuk? Ennek a kérdésnek a megválaszolásához pontosítani kell a definícióban szereplő fogalmakat.

Jelölje $\circ$ az X elemeire vonatkozó differencia-képzés műveletét és $\succeq^*$ a megfelelő preferenciarendezést az X rendezett elempárjaira úgy, hogy bármely, $\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in X$-re a $\mathbf{w}\circ\mathbf{x}$ differencia akkor és csak akkor preferált az $\mathbf{y}\circ\mathbf{z}$ differenciához képest, ha $\mathbf{w}\circ\mathbf{x} \succeq^* \mathbf{y}\circ\mathbf{z}$. Ebből adódóan v mérhető értékelő függvény, ha a $\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ tetszőleges X-beli elemekre $\mathbf{w}\circ\mathbf{x} \succeq^* \mathbf{y}\circ\mathbf{z}$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $v(\mathbf{w})-v(\mathbf{x}) \geq v(\mathbf{y})-v(\mathbf{z})$.

Multiplikatív mérhető értékelő függvény lesz egy létező mérhető értékelő függvény, ha teljesíti a **gyenge-differencia függetlenséget.**

4.8 Definíció. A C tényező-részhalmazt akkor nevezzük a C^* komplementer halmaztól gyenge-differencia függetlennek, ha bármely $\mathbf{w}_C,\mathbf{x}_C,\mathbf{y}_C,\mathbf{z}_C \in X_C$ esetén, ha

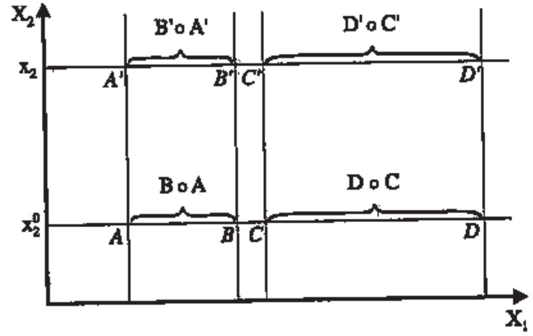
$$(\mathbf{w}_C,\mathbf{w}^0_{C^*})\circ(\mathbf{x}_C,\mathbf{w}^0_{C^*}) \succeq^* (\mathbf{y}_C,\mathbf{w}^0_{C^*})\circ(\mathbf{z}_C,\mathbf{w}^0_{C^*}) \qquad (4.31)$$

valamely $\mathbf{w}^0_{C^*} \in X_{C^*}$ elemre, akkor

$$(\mathbf{w}_C,\mathbf{w}_{C^*})\circ(\mathbf{x}_C,\mathbf{w}_{C^*}) \succeq^* (\mathbf{y}_C,\mathbf{w}_{C^*})\circ(\mathbf{z}_C,\mathbf{w}_{C^*}) \qquad (4.32)$$

minden $\mathbf{w}_{C^*} \in X_{C^*}$ elemre.

Egy kéttényezős problémában, ha a tényezőhalmazbeli elemeket valós egységekben mérjük és a $\circ$ bináris művelet a közönséges kivonás, valamint ha a $\succeq^*$ preferencia közvetlenül arányos a "hosszal", akkor a gyenge-differencia függetlenséget a *4.3. ábrával* lehet illusztrálni. Mivel az ábrán az x_2^0-nél DC hosszabb, mit a BA, ezért az x_2^0-re $D\circ C \succeq^* B\circ A$. Mivel $D'C'$ mindig hosszabb lesz, mint $B'A'$ az x_2 értékétől függetlenül, ezért $D'\circ C' \succeq^* B'\circ A'$ minden $x_2 \in X$-re. Ez tehát azt jelenti hogy X_1 és X_2 gyenge-differencia függetlenek.



4.3. ábra

A gyenge-differencia függetlenség erős feltétel, igazolható például, hogy következik belőle a preferencia-függetlenség.

4.7 Tétel. *Ha v egy mérhető függvény az X halmazon, a C akkor és csak akkor gyenge-differencia független a C^* halmazhoz viszonyítva, ha a p és q X_{C^*} halmazon definiált függvények léteznek ($q>0$) oly módon, hogy minden $\mathbf{x}_C \in X_C$ és $\mathbf{x}_{C^*}$, $\mathbf{x}'_{C^*} \in X_{C^*}$ esetén*

$$v(\mathbf{x}_C,\mathbf{x}_{C^*}) = p(\mathbf{x}_{C^*}) + q(\mathbf{x}_{C^*})v(\mathbf{x}_C,\mathbf{x}'_{C^*}) \qquad (4.33)$$

ahol a p és q alakja függ az $\mathbf{x}'_{C^*}$ értékétől.

Dyer és Sarin (1979) mondta ki ezt a tételt és 4.33-at **feltételes kardinalitásnak** nevezték el. Szerepe hasonló ahhoz, amit a kockázat melletti esetben a multiplikatív és kvázi-additív hasznossági függvényeknél a "feltételes hasznossági függvény" játszani fog.

4.8 Tétel. (kvázi-additivitási tétel): *Tegyük fel, hogy létezik egy az X-en értelmezett v mérhető értékelő függvény. Az általánosság megtartása mellett feltehetjük, hogy v normalizált, azaz létezik a legkevésbé és legjobban preferált $\mathbf{x}^0$ és $\mathbf{x}^*$ oly módon, hogy $v(\mathbf{x}^0)=0$ és $v(\mathbf{x}^*)=1$. Ha az X_i tényező gyenge-differencia független a komplementer halmazától minden $i=1,\ldots,n$ esetében,* 4,8 *akkor léteznek az X_i-n értelmezett olyan v_i (feltételes értékelő függvénynek nevezett) függvények, amelyekre minden $\mathbf{x} \in X$-re*

kvázi additív

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i(x_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} \lambda_{ij} v_i(x_i) v_j(x_j) + \dots \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\sum_{k>j}^{n} \lambda_{ijk} v_i(x_i) v_j(x_j) v_k(x_k) + \dots \qquad (4.34) \\ &+ \lambda_{12\dots n} v_1(x_1)\dots v_n(x_n), \end{aligned}$$

ahol $v_i(x_i^*) = 1$ és $v_i(x_i^0) = 0$ minden $i = 1, \dots, n$-re.

A fenti kvázi-additív forma az additív formába megy át, ha minden λ_{ij}, $\lambda_{ijk}\dots$ eltűnik. Másrészt, ha $\lambda_{ij} = \mu\lambda_i\lambda_j, \lambda_{ijk} = \mu^2\lambda_i\lambda_j\lambda_k, \dots$, és $\sum \lambda_i \neq 1$, akkor a kvázi additív forma a következő alakra redukálódik:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i(x_i) + \mu \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} \lambda_i\lambda_j v_i(x_i) v_j(x_j) + \dots \\ &+ \mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\sum_{k>j}^{n} \lambda_i\lambda_j\lambda_k v_i(x_i) v_j(x_j) v_k(x_k) + \dots \qquad (4.35) \\ &+ \mu^{n-1}\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n v_1(x_1)\dots v_n(x_n). \end{aligned}$$

μ-vel beszorozva és 1-et adva mindkét oldalhoz:

$$1 + \mu v(\mathbf{x}) = [1 + \mu\lambda_1 v_1(x_1)][1 + \mu\lambda_2 v_2(x_2)]\dots[1 + \mu\lambda_n v_n(x_n)]. \qquad (4.36)$$

Mivel $v(\mathbf{x})$ és a $v_i(x_i)$ függvények normalizáltak, a μ és a λ_i-k közötti kapcsolat az $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ helyettesítés után az alábbi alakot ölti:

$$1 + \mu = (1 + \mu\lambda_1)(1 + \mu\lambda_2)\dots(1 + \mu\lambda_n). \qquad (4.37)$$

Azt is megfigyelhetjük, hogy a (4.35) elfajult esete az additív forma, ha a λ_i -k összege 1. (Ez könnyen ellenőrizhető, ha a (4.35)-ben is elvégezzük az $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ helyettesítést.) Másrészt viszont, ha nem ez az eset áll fenn, akkor a (4.35) ekvivalens a multiplikatív formával, ahogyan ezt a (4.36) mutatja.

Bár a gyenge-differencia függetlenség ellenőrzésére egyszerűbb feltételek is kialakíthatóak (lásd például *Keeney-Raiffa* (1976)), általában ezt a feltételt nehezebb verifikálni, mint a preferencia-függetlenséget. Ezért olyan szükséges feltételeket kerestek a kutatók, amelyekben a gyenge-differencia függetlenség bizonyos mértékben helyettesíthető a preferencia-függetlenséggel. Ezekre az eredményekre itt nem térünk ki.

4.5 Többtényezős értékelő függvények előállítása

Akár többtényezős értékelő függvényről, akár az 5.5 fejezetben később tárgyalandó többtényezős hasznossági függvényekről van szó, az előállítás öt fő lépésből áll (*Chankong-Haimes* (1983)). Mielőtt erre rátérnénk, magyarázzuk meg,

hogy miért a többtényezős esetet kezeljük alapesetként? A válasz igen egyszerű: mivel kizárólag azokkal az esetekkel foglalkozunk, amelyekben a többtényezős függvények egyváltozós függvényekből összetett függvényekre esnek szét, ezért az általános sémát a többváltozós esetre fogalmazzuk meg. A fő lépések tehát:

1. A többtényezős értékelő vagy hasznossági függvény létezésének verifikálása.
2. A megfelelő függvényforma kiválasztása.
3. Az előzőekben kiválasztott függvényt összetevő függvénykomponensek előállítása.
4. A megfelelő skálakonstansok meghatározása.
5. Konzisztencia ellenőrzés és elemzés.

Az első lépésben általában feltesszük, hogy akár az értékelő, akár a hasznossági függvény létezik, legfeljebb a szóbanforgó preferencia struktúráról nincsenek ismereteink. A kockázat melletti esetben megfogalmazható ellenvetésekre még a különböző paradoxonok tárgyalásánál visszatérünk. Az első és második lépés az értékelő függvények esetében a *4.4. ábrán* látható függetlenségi tesztek elvégzését kívánja meg. Amennyiben ezeket a teszteket elvégezzük, az összetett függvény alakjára vonatkozó hipotézissel is rendelkezünk.

4.6 Egydimenziós értékelő függvények előállítása

A legegyszerűbb módszer természetesen, ha a döntéshozót megkérjük, hogy adjon meg **direkt értékelést**. Véges számú x_i esetében lehetséges, hogy közvetlenül megadja a $v_i(x_i)$ értékeket. Folytonos esetben a direkt értékelés például a következőképpen bonyolítható le (*Edwards* (1977)):

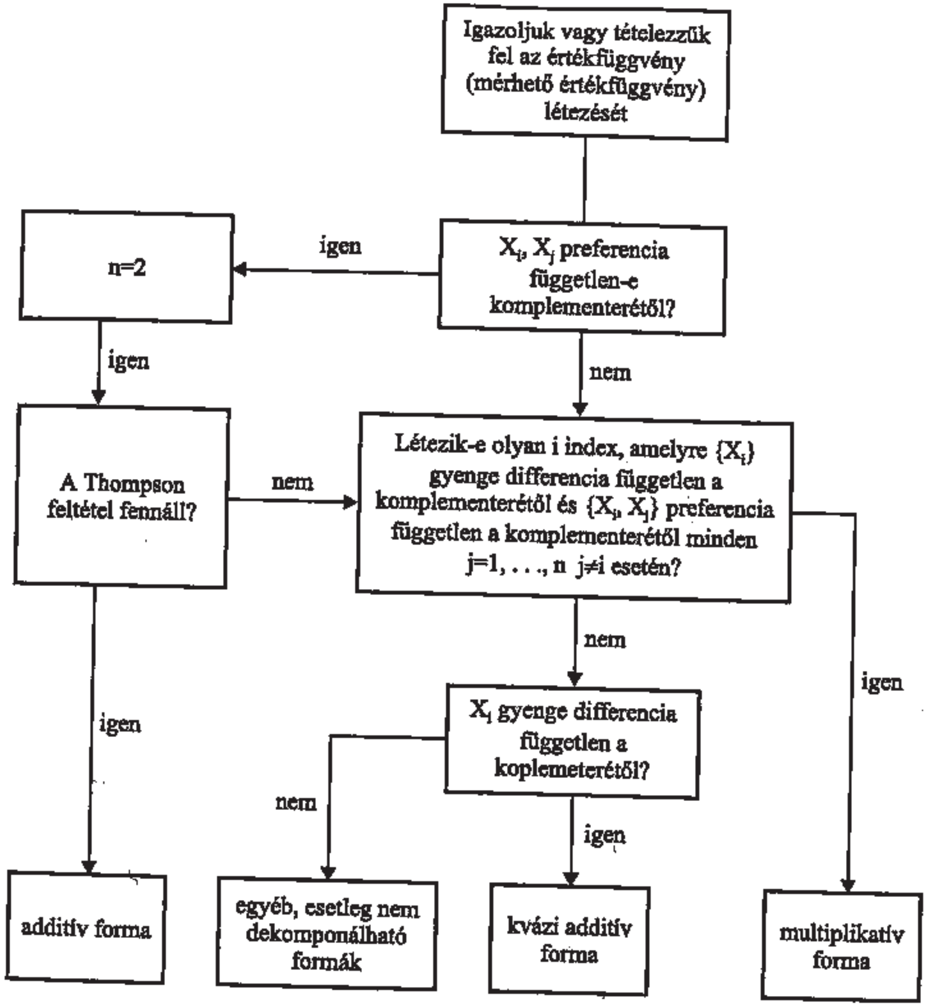
(a) A feladat természetéből adódó fizikai korlátokat állapítunk meg az X_i tényező értékeire. Legyenek ezek a_i és b_i . Minden egyéb tényezőt rögzítsünk.

(b) Kérjük meg a döntéshozót, hogy becsülje meg az a_i és b_i-re vonatkozó preferenciáit egy 0-100 terjedelmű skálán, ahol a 0 jelenti a legkevésbé preferált, a 100 pedig a legjobban preferált esetet (ha normalizált függvényekre van szükségünk, akkor 0 és 100 helyett használjuk a 0-1 intervallumot).

(c) Húzzunk egy egyenest ezen pontok között, s ezáltal megkapjuk a $v_i(x_i)$ közelítését.

Magától értetődő kiterjesztése a módszernek, ha a harmadik lépésben néhány újabb pontot is bekapcsolunk a kikérdezésbe, és görbét illesztünk az így kapott értékekre. Edwards a lineáris approximáció mellett érvel.

A folytonos esetre a leggyakrabban alkalmazott egyszerű módszer azonban a **középpontos módszer** (vagy **felezéses eljárás**). Ez az eljárás szintén normalizált módon adja meg a többtényezős értékelő függvényt összetevő egydimenziós függvényeket.



4.4. ábra

A módszer alapgondolata az, hogy egy pontot akkor tekintünk egy adott intervallum középpontjának (vagy pontosabban középérték pontjának), ha az intervallum egyik végpontjából elmozdulva ebbe a pontba ugyanannyit vagyunk hajlandók feladni a tényezőből, mint a másik végpontból indulva. Egy x^m pontot akkor mondjuk az x_i' és x_i'' pontok középpontjának, ha

$$v_i(x_i^m) = 1/2[v_i(x_i') + v_i(x_i'')] \tag{4.38}$$

vagy

$$v_i(x_i') - v_i(x_i^m) = v_i(x_i^m) - v_i(x_i'') \tag{4.39}$$

(Ez utóbbi képlet azt sugallja, hogy a döntéshozónak bizonyos különbségekre kell tudnia megmondania azt, hogy ezeket indifferenseknek tekinti.) Nézzük meg a módszert részletesebben:

(a) Mindegyik tényezőt rögzítsük a legkevésbé kívánatos értékén és állapítsunk meg a_i és b_i alsó és felső határokat az x_i értékeire vonatkozóan. Legyen

$$v_i(a_i) = 0 \quad \text{és} \quad v_i(b_i) = 1 \tag{4.40}$$

(vagy fordítva, ha a tényezőbeli növekedés csökkenést jelent a preferenciákban).

(b) Ahhoz, hogy megtaláljuk az $x_i^{0.5}$ középpontot az a_i és b_i között, vegyünk egy x_i' pontot a_i és b_i között és kérjük meg a döntéshozót, hogy hasonlítsa össze a a_i-ből az x_i'-be történő elmozdulást az x_i'-ből a b_i-be való elmozdulással. Ha a döntéshozó indifferens a két elmozdulásra vonatkozóan, akkor $x_i^{0.5} = x_i'$. Ha viszont a döntéshozó egyik vagy másik elmozdulást előnyben részesíti, akkor válasszunk ki egy x_i'' pontot a magasabban preferált oldalról (azaz például x_i''-t válasszuk a a_i és x_i' közötti intervallumból, ha ez volt az előző összehasonlításban a preferált), és ismételjük meg az egészet úgy, hogy x_i' helyébe az x_i''-t tesszük. Mindaddig folytassuk a kikérdezést, ameddig a $x_i^{0.5}$ középpontot meg nem kaptuk. Nyilvánvaló, hogy

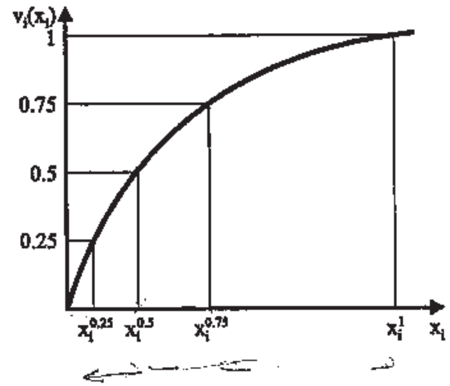
$$v_i(x_i^{0.5}) = 1/2[v_i(a_i) + v_i(b_i)] = 0.5 \tag{4.41}$$

(c) Ismételjük meg a (b) lépést az a_i és az $x_i^{0.5}$ közötti $x_i^{0.25}$ középpont, és az $x_i^{0.5}$ és a b_i közötti $x_i^{0.75}$ középpont megkeresésére.

(d) A konzisztencia biztosítása céljából ellenőrizzük, hogy az $x_i^{0.5}$ az eddigi értelemben középpontja-e az $x_i^{0.25}$ és $x_i^{0.75}$ intervallumnak.

(e) Ismételjük az (a)-(d) lépéseket mindaddig, míg elegendő pontot nem kaptunk a függvénygörbe illesztéséhez.

Egy ezen a módon kapott görbét illusztrál a *4.5. ábra*.



4.5. ábra

Tegyük fel, hogy a döntéshozó preferencia struktúráját leíró függvény formáját (additív, kvázi-additív vagy multiplikatív) már ismerjük, és meghatároztuk az egyedi függvény-komponenseket. Ekkor már csak a konstansok értékeit kell meghatároznunk. Az általános stratégia az, hogy a döntéshozótól annyi preferencia információt szerzünk be, amennyi elegendő ahhoz, hogy a konstansokra vonatkozó független egyenletrendszert felállíthassuk (ezek száma n, $n+1$ és 2^{n-1} az egyes formáknál). A konkrét megvalósításnak sokféle formáját javasolják, lásd például *Dyer és Sarin* (1979).

Az így kapott többdimenziós értékelő függvény végső ellenőrzését a döntéshozóval együtt végezhetjük el, az adott problémának megfelelő tesztelési (kérdezési) technikákkal.

5. Fejezet

Hasznossági függvények

A hasznossági függvények (utility functions) előállításához szükséges axiomatikus tárgyalást az egy-és többtényezős függvények létezésére és előállítására vonatkozó legfontosabb tételek követik. Ebben a fejezetben algoritmusokat adunk meg egy- és többtényezős értékelő és hasznossági függvények előállítására és az algoritmusokat példákkal illusztráljuk. A hasznossági függvényeknél röviden kitérünk a kockázati elemzésre is.

A hasznossági elméletet a közgazdasági elemzésekben is felhasználják, s több paradoxont is megfogalmaznak, amelyeket elsősorban a hasznossági elmélet axiomatikus megalapozásának magatartáselméleti kritikájaként tekinthetünk. A fejezet végén ezekről a paradoxonokról szólunk, példákkal megvilágítva a speciális jelenségeket.

5.1 Hasznossági függvények létezésére vonatkozó axiómák

Térjünk vissza a döntési feladatok 1.1. fejezetbeli osztályozásához. A determinisztikus esetben az alternatívahalmazban lévő cselekvési lehetőségek egy vagy több tényezővel jellemzettek. Eddigi jelöléseinket összegzendő, tekintsük az alternatívahalmazt (véges esetben) az $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ módon adottnak. A tényezőhalmaz (kritériumhalmaz) tartalmazza az $X_1, X_2, \dots, X_m$ tényezőelemeket. Egyetlen tényező esetén természetesen egyetlen X_1-ről van szó, amelyet időnként az egyszerűség kedvéért X-szel jelöltünk.

Az egyes alternatívákhoz tartozó cselekvési változatokat a hozzájuk tartozó kimenetellel adtuk meg. Egyetlen tényező esetében ezeket a kimeneteleket $x(a_j)$ értékek jelölik, ahol legtöbbször az egyszerűség kedvéért az x_j jelölést használjuk.

	A_1	A_2	$\ldots$	A_n
X_1	x_1	x_2	$\ldots$	x_n

Több tényező esetén a kimeneteket az $x_i(a_j)$ értékek jelölik, amelyeket az egyszerűség kedvéért x_{ij} elemekkel reprezentálunk:

	A_1	A_2	$\ldots$	A_n
X_1	x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1n}
X_2	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2n}
$\vdots$				
X_m	x_{m1}	x_{m2}	$\ldots$	x_{mn}

Amikor az egyetlen tényezős probléma egyes kimeneteleihez a természet **ismert valószínűségű** állapotai társulnak, akkor továbbra is n számú alternatívánk van, azonban a természet eltérő állapotainak bekövetkezése kapcsán az egyes alternatívákhoz eltérő kimenetelek kapcsolódnak.

Erre az esetre is alkalmazható az eddigi tárgyalás, csak most a valószínűségek a természet állapotaihoz kapcsolódva határozzák meg az egyes kimeneteleket. A kimenetek reprezentálása, amely eddig a kritériumokra és az alternatívákra utalt, kibővül a természet különböző állapotainak jelölésével:

azaz most $\mathbf{x} : A \times S \longrightarrow X$, vagyis $x_i = x_i(a_j, s_r)$.

Ha a természet állapotaira vonatkozó valószínűségek nem ismertek, nem becsülhetők vagy a valószínűségeloszlás valamilyen okból nem értelmezhető, akkor a 3.2-3.4 fejezetekben alkalmazott szabályokhoz jutunk vissza és szubjektív valószínűségekkel dolgozunk. A továbbiakban tárgyalandó kockázatos döntések esetében a valószínűségeloszlás ismert.

Kockázatos döntések esetén tehát akár egyetlen, akár több tényezőnk van, mindegyik kimenetelhez valamilyen ismert valószínűség rendelhető. A kockázatos döntéseknél a véletlen közvetlenül az egyes kimenetelekhez kapcsolódik, azaz **a kimenetelekhez meghatározott valószínűségek tartoznak**. Az alternatívák jellemzése céljából térjünk át a kimenetelek valószínűségeloszlásait tartalmazó X^p halmazra. Ebben a leírásban tehát minden x kimenetelhez egy $p(x)$ valószínűség tartozik. Ha nem egy biztos kimenetelről van szó, akkor $0 < p < 1$. Az az alternatíva, amely x_i értéket p_i valószínűséggel eredményez, a kockázatos lehetőség. A továbbiakban tehát alternatívák helyett **kockázatos lehetőségekről (risky prospect)** fogunk beszélni, az itt definiált értelemben.

X^p elemeit az x^p, x^q, x^r, stb. módon jelöljük. A döntéselmélet irodalmában — az egyszerűség kedvéért — ezeket a lehetőségeket a döntéshozó szempontjából úgy fogják fel, mintha valamilyen szerencsejátékban többféle kimenetelhez adott valószínűségű nyeremények vagy veszteségek társulnának (nem feltétlenül pénzértékben megadva), és a döntéshozónak azt kellene eldöntenie, hogy melyik játékban vesz részt, illetve tudnia kell azt, hogy melyik játékot részesíti előnyben egy másik játékkal szemben.

Az elmondottakat *Chankong és Haimes* nyomán világítsuk meg egy példával.

Legyen egy gazdálkodó, aki a következő szezonra különböző terményfajták vetése mellett dönthet. Jelölje a lehetséges 3 terményt a_1, a_2 és a_3. A döntésnél két lényeges szempontot vesz figyelembe: X_1 a nettó hozam, X_2 pedig az aratásig eltelt idő, hetekben mérve. Az X_1 és X_2 értékeit az időjárás, a piac és egyéb véletlen események befolyásolják. Az egyszerűség kedvéért soroljuk ezeknek az eseményeknek az eredőit a természet állapotának három osztályába: gyenge, megfelelő és jó (s_1, s_2, s_3). Az X kimeneteket kételemű $\mathbf{c}$ vektorokkal írjuk le, ahol c_1 a dollár/hektár nettó hozam, c_2 pedig a vetéstől az aratásig eltelt hetek száma. Az elmúlt évek adatai alapján a $\mathbf{c}$ jövőre becsült értékeit és a valószínűségeket tartalmazza az *5.1. táblázat*.

Állapot jellemzés	Valószínűség	Termény		
		a_1	a_2	a_3
gyenge s_1	0.25	$\mathbf{c}_1 = (-400,\ 16)$	$\mathbf{c}_2 = (10,\ 20)$	$\mathbf{c}_3 = (-100,\ 10)$
megfelelő s_2	0.5	$\mathbf{c}_4 = (80,\ 14)$	$\mathbf{c}_5 = (20,\ 18)$	$\mathbf{c}_6 = (0,\ 8)$
jó s_3	0.25	$\mathbf{c}_7 = (200,\ 12)$	$\mathbf{c}_8 = (50,\ 16)$	$\mathbf{c}_9 = (100,\ 8)$

5.1. táblázat

Jelöléseinket összefoglalva tehát:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ az alternatívák halmaza (a cselekvési lehetőségek)

$S = \{s_1, s_2, s_3\}$ a természet állapotai

X_1 és X_2 a két értékelési tényező

$X = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_9\}$ a lehetséges kimenetelek halmaza

$X^p = \{\alpha_1\mathbf{c}_1, \alpha_2\mathbf{c}_2, \ldots, \alpha_9\mathbf{c}_9\}$ a kockázatos lehetőségek, ahol $\sum_{i=1}^{9} \alpha_i = 1$.

Nyilvánvaló, hogy az A elemei benne vannak az X^p-ben. Például az a_1 cselekvési lehetőséget az $\bar{x}^1 = (0.25\mathbf{c}_1,\ 0\mathbf{c}_2,\ 0\mathbf{c}_3,\ 0.5\mathbf{c}_4,\ 0\mathbf{c}_5,\ 0\mathbf{c}_6,\ 0.25\mathbf{c}_7,\ 0\mathbf{c}_8,\ 0\mathbf{c}_9)$ kockázatos lehetőség reprezentálja.

Ugyanakkor az X^p halmaz tartalmazza az ún. biztos lehetőségeket $(0\mathbf{c}_1, \ldots, 1\mathbf{c}_i, \ldots, 0\mathbf{c}_9)$ és olyan kockázatos lehetőségeket is, amelyek nem tiszta A halmazbeli cselekvési lehetőségek, hanem azok véletlen keverései, az α_i értékeitől függően.

Amikor az előzőekben az alternatívák közötti döntést tárgyaltuk, akkor eddig a preferenciarendezést az egyes tényezők értékeire definiáltuk és így építettük fel az egy- vagy többtényezős értékelő függvényt. A kockázatos esetben a preferenciarendezést a valószínűségeloszlásokkal adott kimeneteleken, azaz a kockázatos lehetőségeken definiáljuk. Ha tehát a valószínűségeloszlásokat a döntéshozó számára véletlen játékokként tekintjük, akkor a kockázatos lehetőségek preferenciastruktúráját kell jellemeznünk, s egy olyan függvényt találni, amely (hasonlóan a determinisztikus esethez) a preferenciastruktúrán vett rendezést megtartva felhasználható egy döntési szabály megkonstruálásához.

Az angolszász irodalomban a kockázatos lehetőségek, vagy a fenti értelemben vett véletlenen alapuló játékok elnevezésére a magyarra nehezen lefordítható **lottery** elnevezés rögzült. A továbbiakban tehát a lottery, a játék vagy a kockázatos lehetőség elnevezéseket szinonímaként fogjuk használni.

Általában feltesszük, hogy ha van egy x^p-vel jelölt lottery, és egy x^q-val jelölt másik lottery, amelyek mindegyike az alternatívahalmaz kockázatos kimeneteleit jellemzi, akkor az újonnan definiált alternatíva halmazunk a konvex kombinációra zárt, azaz a $(\lambda x^p, (1-\lambda)x^q)$ kockázatos lehetőség is benne van a halmazban, ahol $0 < \lambda < 1$.

A kockázatos lehetőségek preferencia struktúráját leképező értékelő típusú függvényt most **hasznossági függvénynek** fogjuk nevezni, és a döntési szabályunk egy olyan numerikus függvényhez kapcsolódik, amelyet a **várható hasznossági függvénynek** nevezünk. Jelölési rendszerünkben az u és U függvényekkel fogunk operálni, ahol $u : X \longrightarrow R$ és $U : A \longrightarrow R$.

A döntési szabály megalkotásához magától értetődőnek tűnhet a **Bernoulli** által már a XVIII. században megfogalmazott **elv**:

Ha valaki a kockázatos lehetőségeket tartalmazó X^p halmazból akar választani, akkor az ismert valószínűségű kimenetelekkel rendelkező lehetőségek közül azt kell választania, amelyhez a lehetséges kimeneteleken értelmezett preferenciáit megtestesítő értékeléseknek megfelelő legnagyobb várható érték tartozik.

Diszkrét esetben például a Bernoulli-elv azt mondja ki, hogy ha a $p(s)$ valószínűségek adottak, akkor azt az a^* tevékenységet kell választani, amely maximalizálja az $u(a,s)$ hasznosságok várható értékét:

$$E(a^*) = \max_{a \in A} \sum_{s \in S} p(s) u(a,s)$$

Az a tevékenység $U(a)$ várható hasznosságát viszont az

$$U(a) \equiv \sum_{s \in S} p(s) u(a,s)$$

módon definiáljuk.

Hosszú időnek kellett azonban eltelnie, amíg *Neumann* és *Morgenstern* (1947) axiómarendszere ezt a két gondolatot összekapcsolta. Ezeket az axiómákat és következményeiket többféleképpen is meg lehet fogalmazni, attól függően, hogy a tárgyalás az egzisztencia és unicitás bemutatására koncentrál, vagy egyben módszert szeretne adni a megfelelő hasznossági függvény megkonstruálására is. Kezdjük egy olyan tárgyalással, amely az eredeti axiómarendszert követi.

Tekintsük az X^p halmaz elemeit. (Még egyszer felhívjuk a figyelmet arra, hogy ezek az elemek most a kimenetelek és a hozzájuk tartozó valószínűségek együtteseként előálló lottery-ként értelmezendők.)

1. Axióma: A kockázatos lehetőségek X^p halmazán értelmezett $\succeq$ reláció gyenge rendezés.

2. Axióma: Ha $x^p \succ x^q$, akkor $x^p \succ (\alpha x^p, (1-\alpha)x^q) \succ x^q$, minden $\alpha \in (0,1)$ esetén.

3. Axióma: Ha $x^p \succ x^q \succ x^r$, akkor létezik olyan $\alpha, \beta \in (0,1)$, hogy

$$(\alpha x^p, (1-\alpha)x^r) \succ x^q \succ (\beta x^p, (1-\beta)x^r)$$

4. Axióma: $(\alpha x^p, (1-\alpha)x^q) = (\alpha x^q, (1-\alpha)x^p)$, minden $\alpha \in [0,1]$ esetén.

5. Axióma: Ha $\alpha x^s = (\alpha x^p, (1-\alpha)x^q)$, akkor

$$(\beta x^s, (1-\beta)x^q) = (\alpha \beta x^p, (1-\alpha\beta)x^q)$$

5.1 Tétel. *Az X^p-n értelmezett*

$$x^p \succeq x^q \iff U(x^p) \geq U(x^q) \tag{5.1}$$

és

$$U(\alpha x^p, (1-\alpha)x^q) = \alpha U(x^p) + (1-\alpha)U(x^q), \qquad \alpha \in (0,1) \tag{5.2}$$

tulajdonságokkal rendelkező valós értékű U függvény akkor és csak akkor létezik, ha az 1.-5. Axiómák bármely x^p, x^q és $x^r \in X^p$ kockázatos lehetőség együttesre teljesülnek.

Továbbá az U pozitív lineáris transzformáció erejéig egyértelműen meghatározott, azaz egy U' valós függvény akkor és csak akkor fogja teljesíteni az (5.1) és (5.2) feltételeket, ha

$$U'(x^p) = \lambda U(x^p) + \mu, \tag{5.3}$$

ahol $\lambda, \mu \in R$ és $\lambda > 0$.

Tehát (akárcsak az értékelő függvényeknél) a hasznossági függvényeknél sem egyetlen, a feltételeknek megfelelő függvény létezik, **pozitív lineáris transzformációval stratégiai ekvivalensek** állíthatók elő. A stratégiai ekvivalensnek az a jellemzője, hogy a döntéshozó preferencia rendezése változatlan.

A fentiek — mint hamarosan látni fogjuk — elegendők az U és u függvények megkonstruálásához is. Előbb azonban néhány megjegyzés az axiómákhoz.

Az *első axióma*, az értékelő függvények tárgyalását végigkövetve nem meglepő módon, a gyenge rendezést kívánja meg. A *második axióma* azt feltételezi, hogy ha egy x^p lottery preferált egy x^q lottery-hez képest, akkor a két lottery $(\alpha, 1-\alpha)$ valószínűségi keverése kevésbé preferált, mint az x^p, és szigorúan preferált az x^q-hoz képest. Ez egy ésszerű feltevés akkor, ha nincs komplementaritás a két kockázatos lehetőség között.

Legyen például az egyik kockázatos lehetőség (x^p), hogy 100 dollárt nyerünk 0.2 valószínűséggel vagy 10 dollárt veszítünk 0.8 valószínűséggel, a másik lehetőség (x^q) pedig, hogy biztosan veszítünk 10 dollárt. Az első lehetőség ekkor nyilvánvalóan preferált a másodikhoz képest. Ha képezünk egy olyan $\alpha x^p + (1-\alpha)x^q$ lehetőséget, amelyben a 100 dollár nyerésének esélye 0.2α és 10 dollár elveszítésének esélye $(0.8\alpha + 1 - \alpha) = 1 - 0.2\alpha$, akkor ez az új lehetőség preferált a biztos veszteséghez képest és kevésbé preferált, mint az első lottery.

A *harmadik axióma* az ún. **folytonossági vagy arkhimédeszi** axióma. Ez azt mondja ki, hogy ha van egy olyan kockázatos lehetőségünk, amely preferencia szempontjából két másik lehetőség közé esik, akkor van egy olyan valószínűségi érték, amellyel (és a komplementerével) keverve ezt a két (szélső) kockázatos lehetőséget jobbat kapunk, mint a középre rangsorolt lehetőség, és ugyanakkor létezik egy másik valószínűség is, amellyel (és a komplementerével) keverve ugyanezt a két lehetőséget, rosszabb lehetőséget kapunk az eredetileg középen elhelyezett lehetőségnél. Gyakorlatilag ez mindig igaz, bármennyivel is jobb az első lehetőség a harmadiknál.

Ez a feltétel akkor sérülhet, ha végletesen ellentétes kimenetelek közül kell választani. Például legyen a harmadik lehetőség nagyon kedvezőtlen, míg az első kettő egymáshoz közeli. Valaki nyerhet 101 dollárt (x), vagy nyerhet 100 dollárt (y) vagy életfogytig börtönbe zárják (z). Nyilvánvaló, hogy $x \succ y \succ z$. Tegyük fel, hogy a következő ajánlatot tesszük: az illető egyik lehetősége az, hogy azt a játékot játssza, amelyben egy kockát n-szer feldobva életfogytiglan börtönbe kerül, ha legalább egyszer 1-est dob, egyébként 101 dollárt kap, azaz a lehetőség $(1-\alpha)x + \alpha z$, ahol $\alpha = 1/6^n$. A másik új lehetőség, hogy 100 dollárt kap, függetlenül a kockadobások eredményétől (y). A legtöbb ember a második választást részesíti előnyben, (függetlenül az n értékétől), mert az y majdnem olyan jó, mint az x, a kis nyereség-differencia pedig nem éri meg akár egy tetszőlegesen kicsiny valószínűséggel bekövetkező nagyon rossz végeredmény elszenvedését.

A *negyedik axióma* egyszerűen azt mondja ki, hogy az a sorrend, amely szerint a lottery-ket kombináljuk, nincs hatással a preferenciákra.

Végül az *ötödik axióma* egy ún redukciós szabály, amelyet a gyakorlatban úgy szoktak aposztrofálni, hogy a döntéshozó **"nem talál élvezetet a játékban"**. Vegyük az alábbi példát: Egy urnában 3 fehér és egy fekete golyó van. A döntéshozó 10 dollárt nyer, vagy 100 dollárt veszít, attól függően, hogy a kihúzott golyó fehér, vagy fekete. Legyen egy másik kockázatos lehetőség egy ún. összetett kockázatos lehetőség (összetett lottery). Az urna most egyetlen fehér és egyetlen fekete golyót tartalmaz. Ha a kihúzott golyó fehér, akkor a döntéshozó nyer 10 dollárt és a játék véget ér. Ha azonban feketét húz, akkor azt visszatesszük az urnába és még egyszer húzhat. Ezúttal is 10 dollárt nyer, ha fehéret húz, de most elveszít 100 dollárt, ha a kihúzott golyó fekete.

A kétféle játék (az egyszerű és az összetett) ugyanolyan esélyt ad a döntéshozónak, hogy 10 dollárt nyerjen, vagy 100 dollárt veszítsen (0.75, illetve 0.25). Az ötödik axióma szerint a döntéshozónak tehát közömbösnek kell lennie aziránt, vajon az egyszerű vagy az összetett játékot kínálják neki — kivéve akkor, ha élvezetét leli a játékban, és ezért a második játék kétszeres játéklehetőségét többre értékeli, mint az egyszeres játékot, megsértve ezzel az ötödik axiómát.

Mint említettük, az axiómarendszer többféleképpen is felépíthető. Az $N-M$ axiómák verifikálása nagyon bonyodalmas, ezért olyan axiómarendszerek felé fordult a figyelem, amelyeket fennállását a konkrét esetekben könnyebben lehet igazolni. *Fishburn* (1970) nyomán például a legtöbb tárgyalásban a 2. axiómát kicserélik az ún. **függetlenségi axiómával**.

2'. Axióma: Vegyünk három kockázatos lehetőséget: x^p, x^q és $x^r \in X^p$, és $0 < \alpha < 1$. Ezekre fennáll, hogy

$$x^p \succ x^q \Longrightarrow (\alpha x^p, (1-\alpha)x^r) \succ (\alpha x^q, (1-\alpha)x^r) \tag{5.4}$$

Az 5.1. Tétel a módosított axiómarendszer segítségével is levezethető.

5.2 Hasznossági függvény előállítása

Ha elő akarjuk állítani a hasznossági függvényt, akkor általában magukat az axiómákat, vagy a kockázatos lehetőségekre vonatkozó és az axiómákra vezető feltételeket használjuk fel.

1. Feltétel: bizonyossági egyenértékes (certainty equivalent). Bármely biztos lehetőséghez (azaz olyan lottery-hez, amelyben egyetlen kimenetel — jelöljük ezt a-val — valószínűsége 1, a többié 0), található egy olyan lottery, amelyet a legjobb és a legrosszabb kimenetelből keverünk ki. Legyen a legrosszabb kimenetel $a_{\min}$, a legjobb kimenetel pedig $a_{\max}$ egy adott tényezőre vonatkozóan. Ekkor tehát van olyan β, amelyre

$$a \sim ((1-\beta)a_{\min}, \beta\, a_{\max}) \equiv a_c \tag{5.5}$$

Ilyenkor az a értékét az $((1-\beta)a_{\min}, \beta\, a_{\max})$ lottery bizonyossági egyenértékesének nevezzük.

2. Feltétel: helyettesítés. Ha két olyan kockázatos lehetőségünk van, amelyek csak abban különböznek egymástól, hogy egy adott kimenetelt (a_i) kicserélünk az ehhez a kimenetelhez, mint bizonyossági egyenértékeshez tartozó kockázatos lehetőséggel (a_{ic}), akkor az eredeti lehetőség és a helyettesítés révén kapott újabb lehetőség között választva indifferensek vagyunk.

$$(\alpha_1 a_1, \ldots, \alpha_i a_i, \ldots, \alpha_n a_n) \sim (\alpha_1 a_1, \ldots, \alpha_i a_{ic}, \ldots, \alpha_n a_n) \qquad (5.6)$$

Általánosítva ezt a gondolatot, az összes kimenetel kicserélhető a bizonyossági egyenértékeshez tartozó kockázatos lehetőséggel:

$$(\alpha_1 a_1, \ldots, \alpha_i a_i, \ldots, \alpha_n a_n) \sim (\alpha_1 a_{1c}, \ldots, \alpha_i a_{ic}, \ldots, \alpha_n a_{nc}) \qquad (5.7)$$

3. Feltétel: redukálhatóság. Gyakorlatilag azonos az ötödik axiómával. Arról van szó, hogy egy tetszőleges kockázatos lehetőség kicserélhető egy vele indifferens összetett kockázatos lehetőséggel és megfordítva (természetesen ez utóbbi esetben van szó redukcióról). Egy összetett lottery tehát — a valószínűségszámítás szabályainak figyelembevételével — mindig kicserélhető egy egyszerű lottery-re.

Ez a három tulajdonság felhasználható arra, hogy bármely kockázatos lehetőséget egy vele indifferens (azaz vele egyenértékű) kockázatos lehetőségre vezessünk vissza oly módon, hogy ebben a kockázatos lehetőségben kizárólag az adott tényező legjobb és legrosszabb kimenetele szerepeljen, a megfelelően származtatott $\alpha \in [0,1]$ szorzó segítségével.

$$x^p \sim ((1-\alpha)a_{\min}, \alpha\, a_{\max}) \qquad (5.8)$$

4. Feltétel: összehasonlíthatóság. Legyen adott két kockázatos lehetőség x^p és x^q, ahol az előzőeknek megfelelően

$$x^p \sim ((1-\alpha_1)a_{\min}, \alpha_1\, a_{\max}) \qquad (5.9)$$

és

$$x^q \sim ((1-\alpha_2)a_{\min}, \alpha_2 a_{\max})\,. \qquad (5.10)$$

Ekkor az

$$x^p \succeq x^q \ \text{ akkor és csak akkor teljesül, ha } \ \alpha_1 \geq \alpha_2\,. \qquad (5.11)$$

Ezek a feltételek elegendőek ahhoz, hogy a $N-M$ axiómák fennálljanak, azaz a várható hasznossági függvény létezzen. A következőkben ezt mutatjuk meg.

A gyenge rendezési tulajdonság az (5.8) és (5.11)-ben implicit benne foglaltatik. A negyedik axióma triviális, az ötödik pedig megfelel a 3. feltételnek. Legyen x^p és x^q két lottery, amelyekre igaz az, hogy $x^p \succ x^q$. Az (5.8) alapján

$x^p \sim ((1-\alpha_1)a_{\min}, \alpha_1 a_{\max})$ és $x^q \sim ((1-\alpha_2)a_{\min}, \alpha_2 a_{\max})$. Az (5.11) szerint $\alpha_1 > \alpha_2$. A 3. feltétel szerint bármely $\alpha \in (0,1)$-re:

$$(\alpha x^p, (1-\alpha)x^q) = ([1-\alpha_2-\alpha(\alpha_1-\alpha_2)]a_{\min}, [\alpha_2+\alpha(\alpha_1-\alpha_2)]a_{\max}) \qquad (5.12)$$

Mivel $\alpha_1 > \alpha_2 + \alpha(\alpha_1-\alpha_2) > \alpha_2$, az (5.11) szerint

$$x^p \succ (\alpha x^p, (1-\alpha)x^q) \succ x^q\,, \qquad (5.13)$$

vagyis a 2. axióma teljesül. A 3. axióma teljesülésének bemutatásához vegyünk fel egy harmadik kockázatos lehetőséget, legyen ez x^r. Ismét az (5.8) felhasználásával találunk egy olyan α_3 értéket, amelyre

$$x^r \sim ((1-\alpha_3)a_{\min}, \alpha_3 a_{\max})\,. \qquad (5.14)$$

ahol $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$. Ismét igaz az, hogy valamely $\alpha \in (0,1)$-re:

$$(\alpha x^p, (1-\alpha)x^r) = ([1-\alpha_3-\alpha(\alpha_1-\alpha_3)]a_{\min}, [\alpha_3+\alpha(\alpha_1-\alpha_3)]a_{\max}) \qquad (5.15)$$

Ha α-t úgy választjuk, hogy $0 < \alpha < (\alpha_2-\alpha_3)/(\alpha_1-\alpha_3) < 1$, akkor az $(\alpha x^p, (1-\alpha)x^r)$ lottery az (5.11) értelmében kevésbé preferált, mint az x^q. Másrészt viszont, ha $1 > \alpha > (\alpha_2-\alpha_3)/(\alpha_1-\alpha_3) > 0$, akkor az $(\alpha x^p + (1-\alpha)x^r)$ lottery megint csak a (5.11) értelmében preferált az x^q-hez képest, vagyis a harmadik axióma is teljesül.

Most már csak az maradt hátra, hogy az u és U függvények létezését a feltételek alapján megmutassuk, majd konkrét előállítási algoritmust adjunk meg.

Mivel minden lehetséges a_i kimenetelhez tartozik egy bizonyossági egyenértékes (az 1. feltételnek megfelelően) az X^p halmazban, ezért mindig találunk egy olyan β_i értéket, amelyre

$$a_i \sim ((1-\beta_i)a_{\min}, \beta_i a_{\max}) = a_{ic} \qquad (5.16)$$

Az $u : X \longrightarrow R$ függvényt definiáljuk oly módon, hogy

$$u(a_i) = \beta_i \qquad (5.17)$$

Ugyanígy, bármely $x^p \in X^p$-re definiáljuk az $U : X^p \longrightarrow R$ függvényt oly módon, hogy

$$U(x^p) = \alpha\,, \qquad (5.18)$$

ahol az α értékét az (5.8)-ból határozzuk meg. Ugyanezen a módon kaphatjuk meg az $U : A \longrightarrow R$ várható hasznossági függvényt, csak ennek értelmezési tartománya most nem a kockázatos kimenetelekre, hanem az A halmaz elemeire korlátozódik. Most már csak azt kell megmutatni, hogy ez az U függvény teljesíti az 5.1. Tételben szereplő (5.1) és (5.2) összefüggéseket.

Az (5.1) az (5.11)-ből és az (5.18)-ból következik. Az (5.2) igazolásához tekintsük az alábbiakat:

$$\begin{aligned} U(\alpha x^p, (1-\alpha)x^q) &= U([(1-\alpha_2-\alpha(\alpha_1-\alpha_2)]a_{\min}, [\alpha_2+\alpha(\alpha_1-\alpha_2)]a_{\max}) = \\ &= \alpha_2+\alpha(\alpha_1-\alpha_2) = \alpha\,\alpha_1+(1-\alpha)\alpha_2 \qquad (5.19) \\ &= \alpha U(x^p)+(1-\alpha)U(x^q), \end{aligned}$$

amint azt az axióma megköveteli. Felhasználva az eddigi összefüggéseket, ugyancsak könnyen megmutatható, hogy

$$\boxed{U(x^p) = \Sigma\alpha_i U(a_i) = \Sigma\alpha_i u(a_i)}, \qquad (5.20)$$

vagyis a várható hasznossági függvény olyan alakú, hogy az megfelel a Bernoulli-elvnek.

Az 5.1 fejezet példájára is alkalmazhatjuk a fenti gondolatmenetet. Tegyük fel, hogy gazdálkodónk a $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_9$ biztos kimeneteleket már eleve preferenciáinak megfelelően rangsorolta és $\mathbf{c}_1$ a legkevésbé, $\mathbf{c}_9$ a legjobban preferált kimenetel. A gazdálkodó ugyancsak meg tudja adni azokat a β_i valószínűségeket, amelyek mellett indifferens a $\mathbf{c}_i$ biztos kimenetel és az $[(1-\beta_i)\mathbf{c}_1,\ \beta_i\mathbf{c}_9]$ lottery között, az $i = 2, \ldots, 8$ esetek mindegyikében. (Jegyezzük meg, hogy a gyakorlatban a vektorértékű lehetőségek miatt ez egyáltalán nem könnyű feladat!) A β_i értékeket — amelyek az előzőekben leírtak szerint egyenlőek az $u(\mathbf{c}_i)$ értékekkel — az *5.2. táblázat* tartalmazza.

	Kimenetel								
	$\mathbf{c}_1$	$\mathbf{c}_2$	$\mathbf{c}_3$	$\mathbf{c}_4$	$\mathbf{c}_5$	$\mathbf{c}_6$	$\mathbf{c}_7$	$\mathbf{c}_8$	$\mathbf{c}_9$
β_i	0	0.2	0.1	0.8	0.3	0.5	0.9	0.6	1

5.2. táblázat

Az $U : A \longrightarrow R$ várható hasznossági függvény értékei esetünkben az (5.20) szerint, az 5.1 és 5.2 táblázat adatait felhasználva számolhatók ki:

$U(a_1) = 0.25 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.8 + 0.25 \cdot 0.9 = 0.625$

$U(a_2) = 0.350$

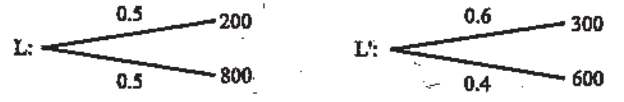
$U(a_3) = 0.525$

A Bernoulli-elvnek megfelelően a gazdálkodó az a_1 terményt veti el.

5.3 A bizonyossági egyenértékes módszer

Az egydimenziós hasznossági függvény előállításának leggyakrabban alkalmazott módszerét mutatjuk be ebben a fejezetben.

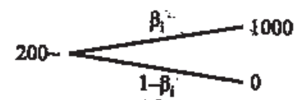
Legyen két kockázatos lehetőségünk (két lottery) az *5.1.ábrán* megadott módon:



5.1. ábra

Az első lottery jelentse azt, hogy azonos valószínűséggel érünk el 200 vagy 800 dollár eredményt, a második lottery jelentése pedig, hogy 60% eséllyel nyerünk 300 dollárt vagy 40% eséllyel 600 dollárt. Az ilyen kockázatos lehetőségeket **bináris (két kimenetű) lottery** elnevezéssel illetjük. Ezek jelölése $L = (0.5 : 200, 800)$ illetve $L' = (0.6 : 300, 600)$.

A két kockázatos lehetőségben szereplő kimenetelekhez meghatározzuk azokat a β_i és $1-\beta_i$ értékeket, amelyek esetén az egyik, illetve a másik kimenetel az ún. **referencia lottery** bizonyossági egyenértékese. Ehhez tudnunk kell az adott tényező legrosszabb és legjobb kimenetelét: legyen ez 0 és 1000 dollár. Definiáljuk a 200 dollár kimenetelhez tartozó referencia lottery-t az *5.2. ábra* szerint:



5.2. ábra

és jelöljük az i-edik referencia lottery-t úgy, hogy $(\beta_i : a_{\max}, a_{\min})$. Ha a döntéshozó 30%-nál jelölte meg azt a valószínűséget, amelyre indifferens a 200 dollár biztos nyereség és a hozzátartozó referencia lottery között, akkor

$$200 \sim (0.3 : 1000, 0)$$

de elegendő a $\beta_{200} = 0.3$ jelölés is.

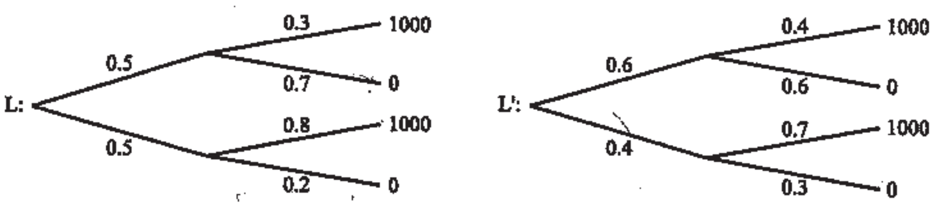
Kérdezzük meg a döntéshozót rendre a 800, 300 és 600 nyereségekről is. Tegyük fel, hogy a következőket kapjuk:

$$800 \sim (0.8 : 1000, 0)\,, \text{ azaz } \beta_{800} = 0.8$$

$$300 \sim (0.4 : 1000, 0)\,, \text{ azaz } \beta_{300} = 0.4$$

$$600 \sim (0.7 : 1000, 0)\,, \text{ azaz } \beta_{600} = 0.7$$

Helyettesítsük be a referencia lottery-ket az eredeti kétkimenetű játékokba, ahogyan azt az *5.3. ábra* mutatja:



5.3. ábra

Az **összetett lottery**-re vonatkozó szabályaink szerint az L és L' indifferens azokra a referencia játékokra nézve, amelyeket redukcióval hoztunk létre:

$$L \sim (0.5 : [0.3 : 1000, 0], 0.5 : [0.8 : 1000, 0]) = (0.55 : 1000, 0)$$
$$L' \sim (0.6 : [0.4 : 1000, 0], 0.4 : [0.7 : 1000, 0]) = (0.52 : 1000, 0)$$

A két referencia lottery összehasonlíthatóvá vált:

$$L \succ L', \text{ mert } 0.55 > 0.52\,.$$

(Kövessük végig a példán, hogy mely feltételeket használtuk fel az egyes lépésekben!)

Ez a példa azt mutatta meg, hogyan érvényesíthető a **kockázatos lehetőségek preferencia rendezése.** Ugyanezt a példát azonban arra is felhasználhatjuk, hogy a hasznossági függvény előállítását bemutassuk. Az előzőekben nem szóltunk arról, hogy milyen technikával állítjuk elő a β_i értékeket. A hasznossági függvények konstrukciója során a **döntéshozóval folytatott dialógus** segít ezen értékek meghatározásában. Egy lehetséges kérdés-felelet sorozat:

Elemző: Ha 200 dollár biztos nyereségre tehet szert, vagy egy olyan játékban vehet részt, amelyben 50% eséllyel nem nyer semmit, vagy 50% eséllyel 1000 dollár a nyereménye, akkor melyik lehetőséget választja?

Döntéshozó: Ekkor számomra a játék a vonzóbb lehetőség.

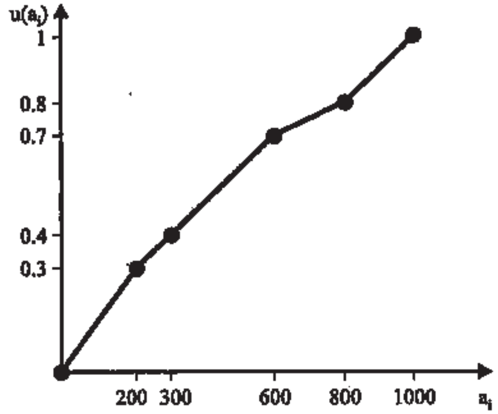
Elemző: Csökkentsük most a játék vonzerejét azzal, hogy a 200 dollár biztos nyeremény mellett egy olyan játékban vehet részt, ahol 90% eséllyel nem nyer, vagy 10% eséllyel 1000 dollár a nyereménye.

Döntéshozó: Ebben az esetben számomra a biztos 200 dollár a kedvezőbb.

Elemző: Legyen egy újabb változatban a 200 dollár biztos nyereség melletti játékban 30% annak az esélye, hogy nem nyer, az 1000 dolláros nyereménynek pedig 70% az esélye.

Döntéshozó: Most bármelyik opció megfelel: szívesen játszom, de a 200 dollár biztos nyeremény is ugyanazt az értéket képviseli számomra.

Az elemző most a bizonyossági egyenértékes módszert **a hasznossági függvény előállítására** használja fel. Legyen ugyanis $u(0) = 0$ és $u(1000) = 1$. Ekkor a hasznossági függvény tulajdonságai alapján az előző kérdés-felelet sorozatból azt kaptuk meg, hogy $u(200) = 0.3$. Ugyanilyen módon $u(300) = 0.4$, $u(600) = 0.7$ és $u(800) = 0.8$. Rajzoljuk fel ezt a függvényt az *5.4. ábrán* látható módon:



5.4. ábra

Természetesen nem kell feltétlenül mindig a legjobb és a legrosszabb értékeket referenciaként használni: bármely két addig meghatározott pont szolgálhat a további kérdésekben akár referenciaként, akár a konzisztencia ellenőrzésére szánt tesztként. Ha azonban ezt az utóbbi, **lottery egyenértékesnek** nevezett módszert használjuk, akkor a kérdések jóval bonyolultabbá válnak és a döntéshozónak egyre nehezebb dolga van az egyes lottery-k következetes összehasonlításakor.

5.4 Kockázati magatartás

Történetileg az egydimenziós hasznossági függvényt először a pénz hasznosságára dolgozták ki. Ezért a bizonyossági egyenértékest szokás még **készpénzegyenértékesnek** (cash equivalent) vagy **a lottery eladási árának** (selling price) is nevezni. Amennyiben a döntéshozó valóban a lottery-k által adott (nyereségben és veszteségben kifejezett) pénzértékekről mond véleményt, illetve ha pénzben kifejezhető bizonytalan kimenetelekről van szó, akkor az egydimenziós hasznossági függvény információt ad a döntéshozó kockázattal szembeni magatartásáról. Megfordítva: egy bizonyos kockázati magatartást tanúsító döntéshozó hasznossági függvényének alakjára vonatkozóan előzetes feltevésekkel élhetünk.

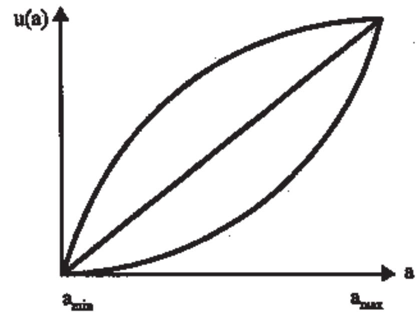
Ha egy **döntéshozó** ugyanolyan módon viselkedik kockázatos helyzetben, mint determinisztikus döntési szituációkban, akkor azt mondjuk, hogy **semleges kockázati magatartású.** Ha a különböző kimenetelek pénzben kifejezhetők, akkor ez azt jelenti, hogy a döntéshozó a kockázatos helyzetekben a készpénz egyenértékest pontosan a várható pénzértékben jelöli meg. (Most látjuk tehát, hogy a 3.5. fejezetben bevezetett várható pénzérték kritérium erre az esetre volt definiálva, azaz feltételezte a döntéshozó semleges kockázati magatartását.)

A semleges kockázati magatartású döntéshozó a veszteségeket és a nyereségeket ugyanolyan módon ítéli meg: 10 ezer dollár veszteség és 10 ezer dollár nyereség azonos valószínűséggel történő bekövetkezése esetén tehát ez a döntéshozó a 0 értékben jelöli meg a bizonyossági egyenértékest, összhangban a várható pénzérték kritériummal. Formálisan:

$$CE(x^p) = VP(x^p) \tag{5.21}$$

ahol CE a bizonyossági egyenértékest jelöli.

Tekintsük az *5.5. ábrát.* Ezen az ábrán a fenti tulajdonsággal bíró döntéshozónak a pénzre vonatkozó hasznossági függvénye lineáris függvény, az egyenes.



5.5. ábra

Vannak olyan döntéshozók, akiknél valamely veszteség súlyosabban esik latba, mint az ugyanolyan valószínűséggel bekövetkező azonos mértékű nyereség. Ha ezeknek a döntéshozóknak felajánljuk, hogy az előző példában elfogadják-e a 0-t bizonyossági egyenértékesnek, kiderül, hogy nem, hanem az ő bizonyossági egyenértékesük a várható érték alatt helyezkedik el (ha a hasznossági függvény az x_i növekvő függvénye). Ha ennek a döntéshozónak egy 50-50% esélyű játék van a tulajdonában, ahol a nyeremények nagysága 10 és 20 dollár, akkor ez a döntéshozó a játékot valahol 15 dollár alatt hajlandó eladni, azaz például 14 biztos dollárt többre értékel, mint ezt a véletlen játékot. Ez a döntéshozó a kockázatkerülő típus, akinél

$$CE(x^p) < VP(x^p) \tag{5.22}$$

és a hasznossági függvénye szigorúan konkáv. Ezt a típust láttuk az előző számpéldában: 200 dollárt készpénzben például többre értékelt a döntéshozó, mint a 30% eséllyel megnyerhető 1000 dollárt, vagyis annak 70%-os esélye, hogy semmit nem nyer, arra ösztönözte, hogy a várható pénzértéknél kevesebbel is beérje — ha az bizonyos.

A $VP(x^p) - CE(x^p)$ értéket **kockázati prémiumnak** nevezzük, amelynek abszolút értéke annak fokmérője, hogy a döntéshozó mennyire kockázatelutasító.

Vannak a **kockázatot kedvelő** típusok is: ők a veszteségekhez képest a nyereségeket "túlértékelik". Az ő hasznossági függvényük az 5.5. ábrán a szigorúan konvex függvény, és érvényes rájuk a

$$CE(x^p) > VP(x^p) \tag{5.23}$$

összefüggés.

A kockázati magatartás ismerete azért hasznos, mert ha néhány pontból kirajzolódik előttünk a döntéshozó kockázati típusa, akkor ezekre a pontokra megpróbálhatunk bizonyos szigorúan konkáv vagy konvex függvényt illeszteni.

Aki egy olyan kockázatos lehetőség előtt áll, amelyben nyerhet 100 ezer dollárt, vagy veszíthet 100 ezer dollárt, az szeretné ez utóbbi lehetőséget elkerülni, különösen akkor, ha nincs annyi pénze, hogy az esetleges veszteséget fedezze. Szívesen fizetne tehát mondjuk 1000 dollárt, ha valaki átvállalná a veszteségét. Ez a biztosítás alapgondolata.

Ha valaki kockázatelutasító, akkor hajlandó biztosítást kötni — a **biztosítási díj** nagyságát azonban befolyásolja vagyoni helyzete. Akinek hatalmas vagyona van, annak más a kockázati függvénye, a vagyon növekedésével csökken a kockázatelutasítás mértéke — más szóval "végtelen" vagyonnal 0 biztosítási díjat hajlandó valaki fizetni.

5.5 Többtényezős hasznossági függvények létezése és előállítása

Akárcsak az értékelő függvényeknél, most is a legegyszerűbben előállítható az **additív hasznossági függvény.** Itt is az a helyzet azonban, hogy a legszigorúbb feltételek ehhez a formához kötődnek.

Legyenek most a kockázatos lehetőségek (lottery-k) $\mathbf{x}^p \in X^p$ alakban adottak, ahol az $\mathbf{x}^p$ egy $\mathbf{x} \in X$ kimenetel $p(\mathbf{x})$ valószínűségértékével együtt adott, ha $\mathbf{x}$ diszkrét. Mivel az $\mathbf{x}$ vektor tényezőelemeivel van megadva, mindegyik tényezőnek létezik a saját peremértéke. Az i-edik tényezőre vonatkozóan jelölje ezt $p_i(x_i)$.

Tekintsük az X_i tényezőhöz rendelt X_i^p kockázatos kimeneteli halmazt. Ennek egy eleme az $x_i^p = \{x_i, p_i(x_i),\ x_i \in X_i\}$. Az X-en értelmezett hasznossági függvényt (mint eddig) jelölje u, az X^p-n értelmezett várható hasznossági függvényt jelölje U. Az X_i-hez és X_i^p -hez tartozó feltételes hasznossági függvény és várható hasznossági függvény legyen u_i és U_i. Ekkor

$$U(\mathbf{x}^p) \equiv E^p(u(\mathbf{x})) \qquad \text{és} \qquad U_i(x_i^p) \equiv E^p(u_i(x_i)), \tag{5.24}$$

ahol az E^p a p valószínűségeloszlással vett várható érték műveletet jelenti (diszkrét és folytonos eloszlásokra egyaránt).

Fishburn (1970) egy függetlenségi feltételt fogalmaz meg az additív hasznossági függvény létezésére vonatkozóan. Többféle elnevezése is van ennek a feltételnek: értékfüggetlenség (value independence), additív függetlenség (additive independence) vagy peremfüggetlenség (marginal independence).

5.1 Definíció. Legyen $T = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$. A T tényezőhalmaz részhalmazai akkor és csak akkor **értékfüggetlenek**, ha bármely X^p-beli $\mathbf{x}^p$ és $\mathbf{x}^q$-ra, — amelyek együttes eloszlásai rendre p és q — $\mathbf{x}^p \sim \mathbf{x}^q$ amikor $p_i = q_i$, minden $i = 1, \ldots, m$-re.

Legyen például $X_1 = \{a_1, a_2\}$ és $X_2 = \{b_1, b_2\}$, $X = X_1 \times X_2$ és

$\mathbf{x}^p$:

	b_1	b_2
a_1	2/12	2/12
a_2	3/12	5/12

valamint $\mathbf{x}^q$:

	b_1	b_2
a_1	1/12	3/12
a_2	4/12	4/12

Mivel $p_1 = q_1 = (4/12,\ 8/12)$ és $p_2 = q_2 = (5/12,\ 7/12)$, az értékfüggetlenség az $\mathbf{x}^p \sim \mathbf{x}^q$ összefüggést adja.

5.2 Tétel. *Tegyük fel, hogy létezik egy X-en értelmezett u függvény úgy, hogy bármely $\mathbf{x}^p, \mathbf{x}^q \in X^p$ esetén*

$$\mathbf{x}^p \succeq \mathbf{x}^q \iff E^p(u(\mathbf{x})) \geq E^q(u(\mathbf{x})). \tag{5.25}$$

Akkor és csak akkor léteznek az X_i-n értelmezett pozitív lineáris transzformációval egymással stratégiailag ekvivalens u_i függvények, amelyek kielégítik az

$$u(\mathbf{x}) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_m(x_m) \tag{5.26}$$

feltételt, illetve az ezzel ekvivalens

$$\mathbf{x}^p \succeq \mathbf{x}^q \iff \Sigma E^{p_i}(u_i(x_i)) \geq \Sigma E^{q_i}(u_i(x_i)) \tag{5.27}$$

feltételt, ha $X_1, X_2, \ldots, X_m$ értékfüggetlen.

Mivel az értékfüggetlenség verifikálása nem egyszerű feladat (minden tényező peremeloszlásának ellenőrzését is megköveteli), és ugyanakkor túlságosan restriktív (nem enged meg a tényezőnként vett preferenciák között semmiféle interakciót), ezért a kutatások az additivitási feltételnek ilyen típusú restrikciójának

fellazítása irányában folytak. Az eredmények például a *Fishburn* (1970) könyvben találhatók.

Kevésbé szigorúak és könnyebben alkalmazhatók a többtényezős hasznossági függvények egyéb dekompozíciós formáira vonatkozó feltételek. Ennek egyik első eredménye a kockázatos lehetőségekre vonatkozó **preferencia függetlenségi feltétel**, amely elvezet bennünket a kvázi-additív és multiplikatív formákhoz. Részletes tárgyalásuk megtalálható például a *Keeney-Raiffa* (1976) könyvben, itt most csak a fontosabb definíciókat és eredményeket említjük, annál is inkább, mert sok a hasonlóság a többtényezős értékelő függvények létezésének tárgyalásával.

5.2 Definíció. A tényezők egy C részhalmazát akkor mondjuk **preferenciafüggetlennek** a C^* komplementer halmazhoz képest, ha a biztos kimenetel és az $(\mathbf{x}_C^1, \mathbf{x}_{C^*})$ valamint $(\mathbf{x}_C^2, \mathbf{x}_{C^*})$ kockázatos lehetőségekre vonatkozó preferencia semmilyen $\mathbf{x}_C^1, \mathbf{x}_C^2 \in X_C$ esetén nem függ az $\mathbf{x}_{C^*} \in X_{C^*}$ szintjétől. Pontosabban fogalmazva: C preferencia független a C^* komplementer halmazhoz képest, ha bármely $\mathbf{x}'_{C^*} \in X_{C^*}$-re

$$(\mathbf{x}_C^1, \mathbf{x}'_{C^*}) \succeq (\mathbf{x}_C^2, \mathbf{x}'_{C^*}) \Longrightarrow (\mathbf{x}_C^1, \mathbf{x}_{C^*}) \succeq (\mathbf{x}_C^2, \mathbf{x}_{C^*}), \tag{5.28}$$

minden $\mathbf{x}_{C^*} \in X_{C^*}$ esetén.

A preferencia függetlenség tehát — hasonlóan a determinisztikus esethez — most a kockázatos lehetőségekre mondja ki azt, hogy ha két lehetőséget úgy hasonlítjuk össze, hogy a tényezők valamely részhalmazát rögzítve tartjuk, akkor a nem rögzített tényezőkre vonatkozó preferencia nem függ attól, hogy ezeket a tényezőket milyen szinten rögzítettük.

A **hasznossági függetlenséget** úgy tekinthetjük, mint ami valahol a preferencia függetlenség és az értékfüggetlenség között helyezkedik el.

5.3 Definíció. A tényezők egy C részhalmazát akkor mondjuk **hasznosságfüggetlennek** a C^* komplementer halmazhoz képest, ha bármely két rögzített $\mathbf{x}_C^{1p}, \mathbf{x}_C^{2p} \in X_C^p$ kockázatos kimenetelre az $(\mathbf{x}_C^{1p}, \mathbf{x}_{C^*})$ és $(\mathbf{x}_C^{2p}, \mathbf{x}_{C^*})$ lottery-k közötti preferencia nem függ az $\mathbf{x}_{C^*} \in X_{C^*}$ biztos kimeneteltől. Azaz bármely $\mathbf{x}_{C^*} \in X_{C^*}$-re

$$(\mathbf{x}_C^{1p}, \mathbf{x}'_{C^*}) \succeq (\mathbf{x}_C^{2p}, \mathbf{x}'_{C^*}) \Longrightarrow (\mathbf{x}_C^{1p}, \mathbf{x}_{C^*}) \succeq (\mathbf{x}_C^{2p}, \mathbf{x}_{C^*}), \tag{5.29}$$

minden $\mathbf{x}_{C^*} \in X_{C^*}$ esetén.

A hasznossági függetlenség tehát a lottery-kre koncentrál: a rájuk vonatkozó preferenciák függetlenek attól, hogy a komplementer tényezők mely szinten rögzítettek.

A hasznossági függetlenségből következik a preferencia függetlenség, de megfordítva nem igaz az állítás.

5.3 Tétel. *Tegyük fel, hogy létezik az X halmazon értelmezett normalizált u függvény, amely eleget tesz a (5.25) összefüggésnek és $u(\mathbf{x}^*) = 1$ valamint $u(\mathbf{x}^0) = 0$. Ekkor léteznek az X_i halmazokon definiált u_i függvények, úgy, hogy bármely $\mathbf{x} \in X$-re*

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i(x_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\lambda_{ij}u_i(x_i)u_j(x_j) + \mu\lambda\lambda\lambda \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\sum_{k>j}^{n}\lambda_{ijk}u_i(x_i)u_j(x_j)u_k(x_k) + \ldots \\
&+ \lambda_{12\ldots n}u_1(x_1)\ldots u_n(x_n)\,,
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

ahol $u_i(x_i^*) = 1$ és $u_i(x_i^0) = 0$ minden $i = 1,\ldots,m$-re, ha X_i hasznosságfüggetlen a komplementer halmazra nézve minden $i = 1,\ldots,m$ esetében.

Jól látható, hogy ez a tétel teljes mértékben analóg a 4.8. Tétellel. Ismét igaz tehát az, hogy a kvázi-additív forma az additív formára redukálódik, ha minden $\lambda_{ij}, \lambda_{ijk}$ zéróval egyenlő és a multiplikatív formába megy át, ha $\lambda_{ij} = \mu\lambda_i\lambda_j$, $\lambda_{ijk} = \mu^2\lambda_i\lambda_j\lambda_k, \ldots$, és $\Sigma\lambda_i \neq 1$:

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i(x_i) + \mu\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\lambda_i\lambda_j u_i(x_i)u_j(x_j) + \ldots \\
&+ \mu^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\sum_{k>j}^{n}\lambda_i\lambda_j\lambda_k u_i(x_i)u_j(x_j)u_k(x_k) + \ldots \\
&+ \mu^{n-1}\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n u_1(x_1)\ldots u_n(x_n)\,.
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

vagy:

$$1 + \mu u(\mathbf{x}) = [1 + \mu\lambda_1 u_1(x_1)][1 + \mu\lambda_2 u_2(x_2)]\ldots[1 + \mu\lambda_n u_n(x_n)]\,. \tag{5.32}$$

5.4 Definíció. A T tényezőhalmazt **kölcsönösen hasznosságfüggetlennek** nevezzük, ha T minden C részhalmaza hasznosságfüggetlen a C^* komplementer halmazra nézve.

5.4 Tétel. *Tegyük fel, hogy létezik az X halmazon értelmezett normalizált u függvény, amely eleget tesz az (5.25) összefüggésnek. Az u csak akkor írható fel az (5.31) illetve (5.32) additív-multiplikatív formába $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1,\ldots,n$ és $\mu > -1$ együtthatókkal, ha T kölcsönösen hasznosságfüggetlen.*

Mivel $u(\mathbf{x})$ és a $u_i(x_i)$ függvények normalizáltak, a μ és a λ_i-k közötti kapcsolat az $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ helyettesítés után most is, akárcsak az értékelő függvényeknél láttuk, az alábbi alakot ölti:

$$1 + \mu = (1 + \mu\lambda_1)(1 + \mu_2\lambda_2)\ldots(1 + \mu\lambda_n)\,, \tag{5.33}$$

s újra igaz az, hogy ha a λ-k összege 1, akkor innen $\mu = 0$, és az (5.31) az additív formára redukálódik, illetve az igazi (5.32) által jellemzett multiplikatív forma akkor áll elő, ha a λ-k összege nem 1. Annak eldöntéséhez, hogy (5.31) additív vagy multiplikatív, az alábbi egyszerű tesztet kell elvégezni.

Tegyük fel, hogy teljesül az 5.4. tétel minden feltétele. Vegyünk két tényezőt, legyenek ezek például X_q és X_r és az összes többi X_{qr^*} tényezőt rögzítsük az $\mathbf{x}'_{qr^*}$ szinten. Az egyes X_i tényezőkre $(i = q, r)$, válasszuk meg az x_i^1 és x_i^2 szinteket úgy, hogy $(x_i^1, \mathbf{x}_{i^*})$ és $(x_i^2, \mathbf{x}_{i^*})$ ne legyenek az $\mathbf{x}_{i^*} \in X_{i^*}$-ra nézve indifferensek. Ezután kérjük meg a döntéshozót, hogy hasonlítsa össze azt a kockázatos lehetőséget, amelyben egyenlő valószínűséggel kínáljuk fel az $(x_q^1, x_r^1, \mathbf{x}'_{qr^*})$ és $(x_q^2, x_r^2, \mathbf{x}'_{qr^*})$ kimeneteleket, azzal a kockázatos lehetőséggel, amelyben azonos valószínűségűek a $(x_q^1, x_r^2, \mathbf{x}'_{qr^*})$ és $(x_q^2, x_r^1, \mathbf{x}'_{qr^*})$ kimenetelek. Ha a döntéshozó bármelyiket is preferálja, akkor multiplikatív formáról van szó, egyébként additívról. (Ez abból következik, hogy az értékfüggetlenség ekvivalens a kölcsönös hasznosságfüggetlenséggel akkor, ha a két lottery indifferens.)

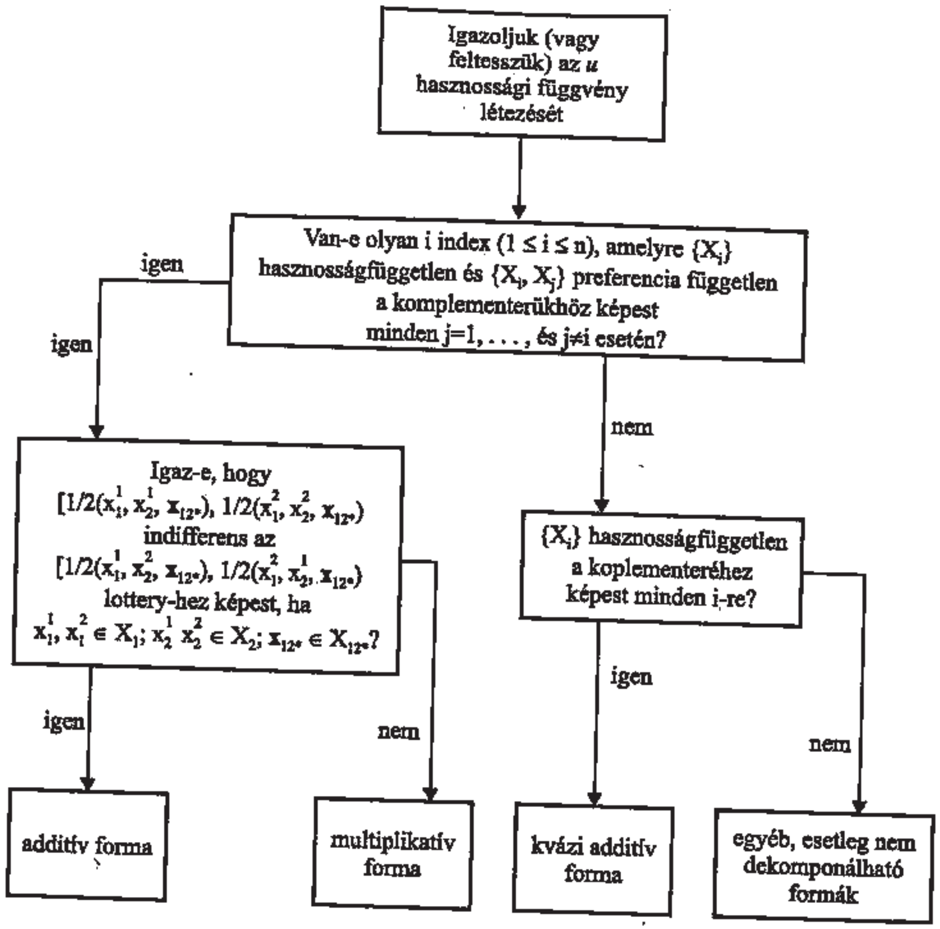
Ezúttal az elégséges feltételekkel nem foglalkozunk.

Megjegyezzük, hogy a hasznosságfüggetlenséget nehezebb igazolni, mint a preferenciafüggetlenséget, ezért minden olyan tétel hasznos, amely a hasznosságfüggetlenséget a szükséges vagy elégséges feltételekben preferenciafüggetlenséggel váltja ki. Ilyen tételeket tárgyal például *Keeney* és *Raiffa* (1976).

Egyéb dekompozíciós formákat kimerítően tárgyal például *Farquhar* (1977).

A többtényezős hasznossági függvény megfelelő formájának megtalálásában nyújt eligazítást az *5.6. ábra*. Az ábrán a diagram a kéttényezős esetben az értékfüggetlenség tesztelésével kezdi a folyamatot, s csak ha ez meghiúsul, ajánlja az egyéb függetlenségi teszteket. A három- vagy többtényezős esetben egyszerűbb a megfelelő preferencia- vagy hasznosságfüggetlenségi tesztekkel kezdeni.

A dekompozíciós formáknál a többtényezős hasznossági függvényt az egydimenziós függvényekből "rakjuk össze". Ha az egydimenziós hasznossági függvényeket (pl. a bizonyossági egyenértékes módszerrel) előállítottuk, akkor már csak a skálázó paraméterek meghatározása van hátra, amit ugyanolyan módon végzünk, mint az értékelő függvényeknél, csak most a konstansok meghatározására szolgáló egyenletrendszereket nem a v, hanem az u függvényekbe való behelyettesítésekkel kapjuk meg, ám most esetleg be kell kapcsolnunk néhány olyan kérdést, amely bizonyossági egyenértékesekre vonatkozik.



5.6. ábra

Numerikus illusztrációként vegyük a következő példát: két állásajánlat (A és B) közül szeretnénk választani, amelyek három, bizonytalanságot is tartalmazó tényezővel jellemzettek. Az első (X_1) az állással való elégedettség, amelyet egy 0 és 100 közötti pontskálán mérünk, a második tényező (X_2) az állásokban szerezhető évi átlagos fizetés egy 3 éves időhorizonton tekintve, amely 20 ezer és 40 ezer dollár között mozog, végül pedig a harmadik tényező (X_3) a munkahely környékére költözés életminőségi indexe, amelyet 0 és 10 között adunk meg.

Az első állásajánlatnál az elégedettségi szint 80%, az éves átlagfizetés 30 ezer dollár vagy 40 ezer dollár 0.8, illetve 0.2 valószínűséggel, a lakáslehetőségek pedig 9 és 4 pont értékűek azonos valószínűségekkel.

A második állásajánlatnál az elégedettségi szint 40% vagy 80% lehet azonos valószínűséggel, az éves átlagfizetés garantáltan 35 ezer, és a lakáslehetőség is adott, amelyet 7 pontra értékelünk.

Számoljuk ki az additív és multiplikatív forma feltételezésével is az eredményt.

Az additív hasznossági függvény alakja esetünkben

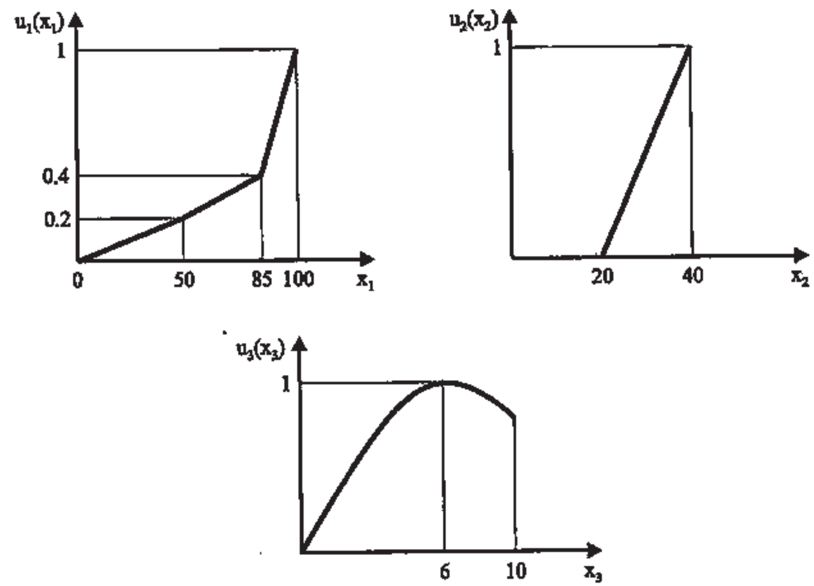
$$u(\mathbf{x}) = k_1 u_1(x_1) + k_2 u_2(x_2) + k_3 u_3(x_3)\,, \tag{5.34}$$

ahol a k_i együtthatók összege 1. A multiplikatív forma:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) \;=\; & k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2) + k_3u_3(x_3) + kk_1k_2u_1(x_1)u_2(x_2) + \\ & + kk_1k_3u_1(x_1)u_3(x_3) + kk_2k_3u_2(x_2)u_3(x_3) \\ & + k^2k_1k_2k_3u_1(x_1)u_2(x_2)u_3(x_3), \end{aligned} \tag{5.35}$$

ahol a k_i együtthatók összege nem 1.

Állítsuk úgy be az egyes egyedi hasznossági függvényeket, hogy a legrosszabb értékeknél a 0, a legjobb értékeknél az 1 hasznossági értéket vegyék fel, és a bizonyossági egyenértékes módszerrel (vagy egyéb módon) határozzuk meg ezeket az u_i függvényeket. Az eredményt az *5.7. ábrasorozat* mutatja.



5.7. ábra

Az összetett hasznossági függvényre az ábra alapján a legjobb és legrosszabb értékek beállításával az

$$u(100,\ 40,\ 6) = 1 \qquad \text{és az} \qquad u(0,\ 20,\ 0) = 0$$

adódik.

Kérjük meg a döntéshozót, hogy rangsorolja az alábbi hipotetikus állásajánlatokat:

$$C = (100,\ 20,\ 0) \qquad D = (0,\ 40,\ 0) \qquad E = (0,\ 20,\ 6)$$

Tegyük fel, hogy a válaszok alapján $C \succ D \succ E$, amelyből $k_1 > k_2 > k_3$, akár additív, akár multiplikatív formáról van szó. Például ha az additív forma érvényes, akkor

$$k_1u_1(100) + k_2u_2(20) + k_3u_3(0) > k_1u_1(0) + k_2u_2(40) + k_3u_3(0)$$

$$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 0 + k_3 \cdot 0 > k_1 \cdot 0_1 + k_2 \cdot 1 + k_3 \cdot 0$$

$$k_1 > k_2$$

és így tovább.

Ha a multiplikatív forma érvényes, akkor kiszámolható, hogy

$$u(C) = k_1 \quad \text{és} \quad u(D) = k_2$$

és mivel $C \succ D$, ezért $k_1 > k_2$.

A következő lépésben keressük meg azt a hiányzó értéket, amelyre a döntéshozó közömbös az alábbi két lehetőség között:

$$(?,\ 20,\ 0) \quad \text{és} \quad (0,\ 40,\ 0)$$

(A 2. tényező értékét az első esetben a legrosszabbra, a másodikban a legjobbra állítottuk, a 3. tényezőt pedig rögzítettük a legrosszabb értékén. Az 1. hiányzó értékével a legrosszabb értéke áll szemben.) Tegyük fel, hogy a válasz 85. (Arról van szó tehát, hogy ha a lakáskörülmények a legrosszabb értéken vannak rögzítve, és a fizetés a legrosszabbról a legjobbra változott, akkor melyik az az elégedettségi szint, amelyről a legrosszabb szintre érve kompenzáltnak érezzük magunkat a jobb fizetés által. Ez a 85%-os elégedettség.)

Az ábráról leolvassuk, hogy $u_1(85) = 0.4$. Az additív forma esetében:

$$k_1u_1(85) = k_2 \Longrightarrow 0.4k_1 = k_2$$

Multiplikatív forma esetében ugyanezt kapjuk. Készítsünk ugyanilyen választási lehetőséget a k_1 és k_3 paraméterekre.

$$(?,\ 20,\ 0) \quad \text{és} \quad (0,\ 20,\ 6)\,.$$

Legyen ? $= 50\%$. Mivel $u_1(50) = 0.2$, ezért $0.2k_1 = k_3$. Az eddigi eredmények alapján:

$$k_1 > k_2 > k_3, \quad 0.4k_1 = k_2 \quad 0.2k_1 = k_3\,.$$

Tegyük fel most azt a kérdést a döntéshozónak, hogy ha a C állást biztosan megkapja, és az ideális V állás és a lehető legrosszabb W állás, azaz

$$V = (100,\ 40,\ 6) \qquad W = (0,\ 20,\ 0)$$

állásokra vonatkozó $(p : V, W)$ lottery között kell választania, akkor melyik az a p valószínűség, amelyre közömbös a C biztos állás és a "végletes" lottery között.

Additív forma esetén e kérdést az alábbi módon írhatjuk át:

$$k_1u_1(100) + k_2u_2(20) + k_3u_3(0) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0$$

$$k_1 = p$$

Ha például a döntéshozó $p = 0.6$ értéket mondott, akkor $k_1 = 0.6$. Az eddigi eredményeket felhasználva:

$$k_2 = 0.4 \cdot 0.6 = 0.24 \quad \text{és}$$

$$k_3 = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$$

Mivel $0.6 + 0.24 + 0.12 = 0.96 \approx 1$, ezért a többtényezős hasznossági függvényre elfogadhatjuk, hogy additív.

Ha mégsem additív formáról van szó, akkor a multiplikatív alakból kell a konstansokat meghatározni. Győződjünk meg róla, hogy akárcsak az additív formánál, a multiplikatív formánál is a k_1 értéket kapjuk, ha a fenti biztos C lehetőséget behelyettesítjük, azaz a $k_1 = p$ összefüggés itt is érvényes. A négy együtthatóra tehát már van három egyenletünk. A negyedik egyenletet megkaphatjuk például abból, hogy behelyettesítjük az ideális V alternatívát, hiszen $u(100,\ 40,\ 6) = 1$. Elvégezve a behelyettesítést, az eredmény

$$k + 1 = (kk_1 + 1)(kk_2 + 1)(kk_3 + 1)$$

Ha most a legutolsó egyenletbe behelyettesítjük a fentebb kapott k_i értékeket, akkor

$$k = 1.09 \cdot 1.036 \cdot 1.018 = 1.15$$

A multiplikatív forma ebben az esetben (ha nem fogadtuk el az additív formát, mint megfelelő közelítést):

$$\begin{aligned} u(\mathrm{x}) \quad = \quad & 0.6u_1(x_1) + 0.24u_2(x_2) + 0.12u_3(x_3) + 0.0216u_1(x_1)u_2(x_2) + \\ & +0.0108u_1(x_1)u_3(x_3) + 0.00432u_2(x_2)u_3(x_3) + \\ & +0.0003888u_1(x_1)u_2(x_2)u_3(x_3)\,. \end{aligned}$$

Ezek után most már meg tudjuk mondani, hogy melyik állásajánlat a kedvezőbb! Ha additív formával dolgozunk, akkor:

$$U(A) = 0.6u_1(80) + 0.24(0.8u_2(30) + 0.2u_2(40)) + 0.12(0.5u_3(9) + 0.5u_3(4))$$

és

$$U(B) = 0.6(0.5u_1(40) + 0.5u_1(80)) + 0.24u_2(35) + 0.12u_3(7).$$

Legyen az ábra alapján $u_1(40) = 0.15$, $u_1(80) = 0.36$, $u_2(30) = 0.5$, $u_2(35) = 0.75$, $u_2(40) = 1$, $u_3(4) = 0.7$, $u_3(7) = 0.95$, $u_3(9) = 0.8$. Ekkor

$$U(A) = 0.43 \qquad \text{és} \qquad U(B) = 0.447$$

(Ebben a számításban felhasználtuk, hogy ha additív formánk van és a tényezők statisztikailag függetlenek, akkor a várható érték a tényezőnkénti várható hasznosságok súlyozott összege).

A kiszámolást végezhetnénk bármelyik formánál úgy is, hogy az egyes kockázatos kimeneteleknél felsoroljuk az összes lehetséges kimeneteli vektort és meghatározzuk a hozzájuk tartozó valószínűségeloszlást. Ezek az A alternatívánál:

$$(80, 30, 9),\ \text{valószínűségi érték: } 0.8 \cdot 0.5 = 0.4,$$

$$(80, 30, 4),\ \text{valószínűségi érték: } 0.4,$$

$$(80, 40, 9),\ \text{valószínűségi érték: } 0.1,$$

$$(80, 40, 4),\ \text{valószínűségi érték: } 0.1,$$

és az

$$U(A) = 0.4u(80, 30, 9) + 0.4u(80, 30, 4) + 0.1u(80, 40, 9) + 0.1(80, 40, 4)\,.$$

5.6 A hasznossági elmélet feltevéseinek magatartáselméleti kritikái

A hasznossági elmélettel foglalkozó kutatók közül sokan végeztek olyan — főleg pszichológiai — vizsgálatokat, amelyekkel alátámasztani vagy elvetni kívánták a várható hasznossági szabályra vezető axiómákat. Számtalan cikk és könyv született ebben a témakörben, s a pszichológiai kísérletek egyben azokat az irányokat is kijelölték, amelyekben a hasznossági elmélet továbbfejlesztése, az új modellek kidolgozása folyik. Ebben a fejezetben néhány híres ellenpéldával foglalkozunk.

Tegyük fel, hogy páros összehasonlítást kell végeznünk az alábbi öt kockázatos lehetőségre vonatkozóan. A lehetőségekhez megadjuk a kimeneteket (ezek most pénzbeni nyereségek) és a hozzájuk tartozó nyerési valószínűségeket.

lottery	*valószínűség*	*nyeremény*
A	7/24	5.00
B	8/24	4.75
C	9/24	4.50
D	10/24	4.25
E	11/24	4.00

(A másik kimenetel minden lotterynél a 0 nyeremény.)

A tranzitivitás azt kívánná meg, hogy ha a kísérletben részt vevő személyek az A lehetőséget preferálják a B-vel szemben és a B-t a C-vel szemben, akkor az A lehetőséget is kedvezőbbnek ítéljék meg, mint a C-t. *Tversky* (1969) nagy számban talált kísérleti személyeket, akik az A-t jobbnak tartották, mint a B-t, majd a B-t jobbnak, mint a C-t, a C-t jobbnak, mint D-t, a D-t jobbnak, mint az E-t, de E-t preferálták az A-val szemben. (A kísérlet úgy folyt le, hogy a résztvevők vizuálisan érzékeljék a valószínűségeket egy kördiagramon megjelenítve azokat.) Amíg tehát a kismértékben emelkedő nyereségek és kismértékben emelkedő valószínűségek jellemezték a párokat, addig a kísérleti személyek "konzisztens" válaszokat adtak, amint azonban a nyereségkülönbség nagyobb lett, a kisebb valószínűséggel kínált nagyobb nyereményt találták vonzóbbnak — ami **a tranzitivitási axióma megsértése.**

Nem csak kockázatos esetben figyelhető meg a tranzitivitás megsértése, hanem általában is gondot okoz a gyenge rendezés feltételezése, akár a determinisztikus modelleknél is. Ez indokolja azt, hogy a preferencia-modellezés újabb iskolái általában már a tranzitivitási feltétel nélkül készítik el modelljeiket. Vonatkozik ez a szigorú preferencia és/vagy az indifferencia relációra is. Az indifferencia reláció intranzitivitásra vonatkozó híres példában a döntéshozó közömbös két csésze kávé között, ha azokban a cukor mennyisége 1 milligrammban különbözik. Ha a második csészében lévő cukor mennyiségét 1 milligrammal növelve kínálunk neki egy harmadik csésze kávét, akkor ezt újfent azonosnak tartja a második csésze kávéval. Vegyünk egy negyedik, ötödik, századik csésze kávét, amelyek mindegyikében 1 milligramm a cukormennyiség növekménye. Bármelyik két egymást követő csésze kávét hasonlítja is össze a döntéshozó, mindig közömbös lesz azok ízét illetően, ha azonban az első csésze és a századik csésze kávé kerül elé, nyilvánvaló, hogy azok közül valamelyiket preferálni fogja - attól függően, hogy mennyire édesszájú: nem teljesül az indifferencia tranzitivitása.

A Nobel díjas francia közgazdászról elnevezett **Allais paradoxonban** a függetlenségi axióma sérül (Allais (1953)).

Legyen a kísérlet a következő:

A résztvevőknek az alábbi szituációkban kell döntést hozniuk.

Az első szituációban választaniuk kell aközött, hogy 1 millió dollárt nyernek 100% bizonyossággal (A) vagy 10% eséllyel 5 milliót, 89% eséllyel 1 milliót, 1% eséllyel pedig semmit (B).

A második szituációban az egyik választási lehetőségük az, hogy részt vesznek abban a játékban, ahol 11% eséllyel nyerhetnek 1 millió dollárt, 89% eséllyel semmit (C), vagy egy másik játékban vehetnek részt, ahol 10% eséllyel nyerhetnek 5 millió dollárt, 90% eséllyel pedig semmit (D).

Az emberek többsége az első szituációban A-t választja, a második szituációban pedig D-t. Könnyű megmutatni, hogy ezzel megsértették az axiómát. Tegyük fel, hogy a fenti szituációkat egy olyan játékkal helyettesítjük, ahol egy urnában 100 megszámozott golyót helyeztünk el, és a négy választási lehetőséget az testesíti meg, hogy egy golyót kihúzva az urnából, annak mi a száma:

	A kihúzott golyón lévő szám 1	2-11	12-100
A	1 millió	1 millió	1 millió
B	0 millió	5 millió	1 millió
C	1 millió	1 millió	0 millió
D	0 millió	5 millió	0 millió

Most jól látjuk, hogy ha A preferált B-hez képest, akkor C-t is preferálni kellene D-hez viszonyítva, mivel a preferenciarendezésünket az utolsó oszlopban lévő számoknak nem lenne szabad befolyásolnia!

Ha a hasznossági függvény-értékeket felírjuk, még jobban látható a probléma. Az A-nak B-vel szembeni preferáltságát fejezi ki a következő egyenlőtlenség:

$$u(1) > 0.1u(5) + 0.89u(1) + 0.01u(0)$$

azaz

$$0.11u(1) > 0.1u(5) + 0.01u(0)$$

Ha D preferált C-vel szemben, akkor

$$0.1u(5) + 0.9u(0) > 0.11u(1) + 0.89u(0)$$

azaz

$$0.1u(5) + 0.01u(0) > 0.11u(1)$$

Érdemes megjegyezni, hogy az Allais paradoxon kisebb valószínűségek esetén nem feltétlenül működik.

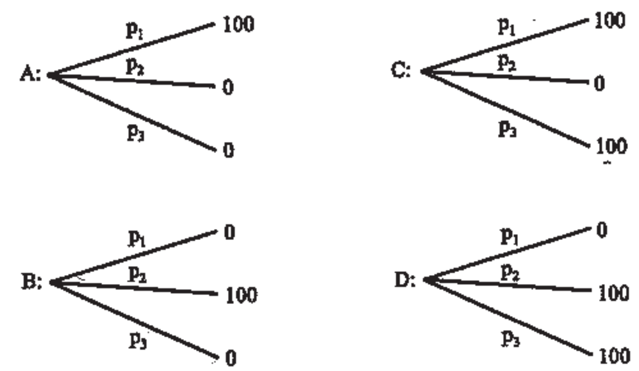
Egy másik klasszikus példa az **Ellsberg paradoxon** (1961). A választási lehetőségeket most egy urnában lévő 30 piros golyó és 60 fekete és sárga golyó jeleníti meg, ahol a fekete és sárga golyók összetétele ismeretlen. A kísérletben résztvevő személyeknek megmondták, hogy teljesen véletlenszerű, hogy mennyi a fekete és sárga golyók aránya. Ennek az információnak a tudatában a kísérleti személyek ismét két szituációban vesznek részt. Mindkétszer az történik, hogy az urnából kihúznak egy golyót.

Az első szituációban az A lehetőséget az jelenti, hogy 100 dollárt nyerünk, ha a kihúzott golyó piros és nem nyerünk semmit, ha fekete vagy sárga. A másik (B) lehetőség szerint 100 dollárt nyerünk, ha fekete a kihúzott golyó és nem nyerünk semmit, ha sárga vagy piros.

A második szituációban a C lehetőség az, hogy 100 dollárt kapunk, ha a kihúzott golyó sárga vagy piros és nem nyerünk semmit, ha fekete, míg a másik lehetőség az (D), hogy 100 dollárt nyerünk, ha a kihúzott golyó sárga vagy fekete és nem nyerünk semmit, ha piros.

A legtöbb ember ezekben a szituációkban A-t preferálja B-vel szemben, és D-t a C-vel szemben. Választásukat legtöbbször azzal indokolják, hogy mivel bizonytalanok a fekete és sárga golyók számában, ezért a B és C esetek is bizonytalannak tűnnek számukra. A többség **az ismert valószínűségű eseményeket előnyben részesíti**, ez azonban ismét a függetlenségi axióma megsértéséhez vezet. Vizsgáljuk ezt meg:

Legyen p_1 a piros golyó kihúzásának valószínűsége, p_2 és p_3 a fekete, illetve sárga golyó kihúzásának valószínűsége. Az egyes választási lehetőségekhez tartozó lottery-k most az *5.8 ábrán* láthatóak.



5.8. ábra

Ha $A \succ B$, akkor a függetlenségi axiómából a $C \succ D$ következik, mivel a két pár közötti egyetlen különbség a sárga golyókhoz rendelt nyereményérték nagysága. Mivel ez a párokon belül azonos, ezért nem lehetne befolyással a választásra. Ez Ellsberg szerint arra utal, hogy választásainkban egyéb motívumok is döntő módon megjelenhetnek.

Slovic és *Tversky* (1974), valamint *Kahnemann* és *Tversky* (1979) több híres kísérletsorozatot is lefolytattak. Nagyon érdekes volt például az, hogy miután a kísérletben résztvevő személyeknek a fenti típusú feladatok "megoldása" után elmagyarázták azt, hogy milyen "hiba" volt a gondolkodásukban, és felajánlották a korrekció lehetőségét, a kísérleti személyek többsége ragaszkodott "tévedéséhez". Szerintük a hiba tehát nem feltétlenül az emberi viselkedésben van, amely szisztematikusan megsérti az axiómákat, hanem az axiómák nem tükrözik elég finoman az emberek pszichológiai karakterét. Nem véletlen tehát, hogy a későbbiekben sok kutató igyekezett olyan modelleket konstruálni, amely nem tartalmazza a vitatott függetlenségi axiómát.

A pszichológiai kísérletekből az is kiderült, hogy az emberek ahelyett, hogy a végeredményül kapott vagyoni helyzet alapján döntenének, hajlamosak arra, hogy az adott kockázatos lehetőségekben megjelenő nyereségek és veszteségek nagyságára koncentráljanak. Tekintsük az alábbi két szituációt.

Első szituáció: 50-50% eséllyel nyerünk 1000 dollárt vagy nem nyerünk semmit (A) lehetőség, vagy biztosan kapunk 500 dollárt (B).

Második szituáció: tegyük fel hogy kaptunk ezer dollárt és felajánlják nekünk azt, hogy vegyünk részt egy olyan játékban, ahol 50-50% eséllyel elveszíthetünk ezer dollárt vagy nem nyerünk semmit (C), illetve az is lehetséges, hogy játék nélkül biztosan veszítünk 500 dollárt (D).

Kahnemann és Tversky úgy találta, hogy a legtöbb ember az első szituációban B-t, a második szituációban pedig C-t választja, miközben mindkét esetben ugyanúgy kellene döntenie, hiszen a második szituációban a kapott 1000 dollárt a kimenetelekhez egyszerűen hozzáadva azonos eredményt kapunk (a végső vagyoni helyzet a két szituációban azonos).

A magyarázat az lehet, hogy az emberek másként viszonyulnak a kockázathoz nyereségekben gondolkodva, mint veszteségekkel számolva: az első szituációban egy biztos nyereséget preferálnak a várható értékben azonos vagy csekély mértékben különböző kockázatos alternatívával szemben, azaz kockázatelutasítóak. Ugyanakkor — mint a második szituáció mutatja —, kockázatkedvelőnek mutatkoznak akkor, ha lehetőségük van arra, hogy ne veszítsenek, még akkor is, ha a bizonytalan veszteség várható értékben ugyanakkora vagy kicsit nagyobb, mint a biztos veszteség. A nyereségek és veszteségek viszonylatában megmutatkozó aszimmetriát **tükrözési hatásnak** nevezték el: ha a referenciapont megváltoztatásával a veszteségeket nyereségnek tüntetjük fel, vagy megfordítva, akkor az emberek kockázati magatartására ezzel hatást tudunk gyakorolni.

Tekintsünk egy másik példát, amely azt mutatja meg, hogy az emberek hajlamosak bizonyos alternatívákra vonatkozó **preferencia sorrendjüket megcserélni.** Ajánljunk fel a kísérleti személynek két játékot, legyen az egyik az M (magas valószínűségű), a másik pedig A (alacsony valószínűségű).

Játék	*Nyerési esély*	*Nyeremény*	*Vesztési esély*	*Veszteség*
A	0.33	16 dollár	0.67	2 dollár
M	0.99	4 dollár	0.01	1 dollár

Melyik játékot szeretné inkább játszani? Az emberek többsége az M játékot választja, mivel vonzóbb számára a nyerés magasabb valószínűsége. Ha azonban megkérdezzük őket, hogy mennyiért hajlandóak a tulajdonukban lévő két játékot egy harmadik személynek eladni, akkor általában az A játékért magasabb árat állapítanak meg, mint az M játékért.

A fenti példákban megjelenő hatások a vagyonra, a nyereségekre, veszteségekre vagy a valószínűségek nagyságára vonatkoztak. Az elmúlt húsz-harminc évben nagyon sok pszichológiai kísérletet végeztek abból a célból, hogy az emberek döntési szituációkban megmutatkozó valós magatartását kitapogassák. Mivel sok kritika érte a kísérletek laboratóriumi körülményeit és a mesterkélt szituációkat, többen valódi választások megfigyelésével és feldolgozásával is foglalkoztak. Ez szerteágazó kutatásokhoz és új modellek megjelenéséhez vezetett.

Egyetlen híres modellt említünk csak itt meg, ez a Kahnemann és Tversky-féle lehetőség elmélet (**prospect theory**).

Az általuk javasolt kimenet-orientált modell megpróbálja beépíteni a magatartáselmélet eredményeit. A modell az értékelő fázis előtt nagy gondot fordít a referenciapont megválasztására, a játékok helyes megszövegezésére, a dominált alternatívák kiszűrésére. Ezután kerül sor az értékelésre, amely egy várható érték típusú modellben valósul meg:

$$V = \Sigma\pi(p_i)v(x_i)$$

ahol a p_i az x_i kimenetel valószínűségét jelöli, a $\pi(p_i)$ a valószínűségek transzformált (súly)függvénye, a $v(x_i)$ pedig az értékfüggvény. A $\pi(p_i)$ függvény jellegzetessége, hogy az alacsony valószínűségeket magasabbra értékeli, a magasabb valószínűségeket pedig a döntéshozó karakteréhez illeszti. A $v(x_i)$ függvény jellemezően eltérő kockázati magatartást tükröz a veszteségekre és a nyereségekre.

5.7 Irodalomjegyzék a 4. és 5. fejezetekhez

ALLAIS, M. [1953]: Le comportement de l'homme rationell devant le risque: Critique des postulates et axioms de l'école amercaine, *Econometrica*, 21, 503-546

BOUYSSOU, D.-VINCKE. PH. (szerk.) [1998]: Preference modeling, *Annals of Operations Research*, Baltzer Science Publishers

CHANKONG, V.-HAIMES, Y.Y. [1983]: *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, North Holland, Amsterdam

DEBREAU, G. [1954]: Representation of preference ordering by a numerical function, *Decision Process* (szerk. Thrall, R.M.-Coombs,C.H.-Davis, R.l.), Wiley, New York, 16-26.

DYER, J.-SARIN, R.K. [1979]: Measurable multiattribute value functions, *Operations Research*, 27, 810-822.

EDWARDS, W. [1977]: How to use multiattribute utility measurement for social decision making, *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-7, 326-340.

ELLSBERG, D. [1961]: Risk, ambiguity, and the Savage axioms, *Quarterly Journal of Economics*, 75, 643-669.

FARQUHAR, P.H. [1977]: A survey of multiattribute utility theory and applications, *TIMS Studies in Management Sciences*, 6, North Holland, Amsterdam

FISHBURN, P. [1967]: Methods of estimating additive utilities, *Management Science*, 13, 435-453.

FISHBURN, P. [1970]: *Utility Theory and Decision Making*, Wiley, New York

KAHNEMANN, D.-TVERSKY, A. [1979]: Prospect theory: An analysis of decision under risk, *Econometrica*, 47, 263-291.

KEENEY, R.L.-RAIFFA, H. [1976]: *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs*, Wiley, New York

KLEINDORFER, P.R.-KUNREUTHER, H.C.-SCHOEMAKER, P.J.H. [1993]: *Decision Sciences. An Integrative Approach*, Cambridge University Press

KRANTZ, D.H.-LUCE, R.D.-SUPPES, P.-TVERSKY,A. [1971]: *Foundations of Measurement*, Academic, New York, Vol. 1.

LUCE, R.D.-SUPPES, P. [1965]: Preference, utility and subjective probability, *Handbook of Mathematical Psychology*, Wiley, New York, Vol. 2., 249-410.

LUCE, R.D.- TUKEY, J.W. [1964]: Simultaneous conjoint measurement: a new type of fundamental measurement, *Journal of Mathematical Psychology*, 1, 1-27.

SLOVIC, P.-TVERSKY, A. [1974]: Who accepts Savage's axioms?, *Behavioral Science*, 19, 368-373.

TVERSKY, A. [1969]: Intransitivity of preferences, *Psychological Review*, 31-48.

TVERSKY, A.-KAHNEMAN, D. [1992]: Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty, *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 297-323.

VINCKE, P. [1992]: *Multicriteria Decision-aid*, Wiley, New York

VON NEUMANN, J.-MORGENSTERN, O. [1947]: *Theory of Games and Economic Behavior*, 2nd edition, Princeton University Press

VON WINTERFELDT, D.-EDWARDS, W. [1986]: *Decision Analysis and Behavioral Research*, Cambridge University Press, New York

6. Fejezet

Nem-klasszikus döntési modellek

Ez a fejezet átvezet bennünket azon módszerekhez, amelyek az eddigiektől eltérő preferencia-modellezési alapokon nyugszanak. Tárgyaljuk az ún. outranking reláción alapuló Roy-féle ELECTRE módszercsaládot, majd a hasonló elveken később kialakított PROMETHEE módszert. Ezeket a módszereket az európai (mint látni fogjuk, elsősorban francia) döntéstámogató iskola reprezentánsainak tekintjük.

6.1 Kiterjesztések

A "klasszikus elméletben" (mint láttuk) a preferencia-struktúrára vonatkozóan kialakított, a bináris relációk tulajdonságaira építkező módszertan nyitott kérdéseket vet fel. Ezek közül a legfontosabbak, *Boyssou és Vincke* [1998] nyomán:

A **megfigyelhetőségi** probléma. Ha a preferenciákról beszélünk, akkor azokat a való életben is megbízhatóan meg kellene tudnunk figyelni. Ha azonban az "x legalább olyan jó, mint y?" típusú kérdésekkel közelítjük meg ezt a problémát, akkor az elméletet kizárólag *deklaratív* szintre süllyesztjük, hiszen nincs nyilvánvaló bizonyítékunk arra, hogy a megfigyelt jelenség és a válaszok közvetlen összefüggésben vannak egymással.

Az egyik feloldási lehetőség az, hogy a "megfigyelt döntések" alkossák a kiinduló helyzetet, azaz olyan elemekre vonatkozó "**kinyilvánított preferenciák**", amelyek az A' halmazba tartoznak, ahol A' az A részhalmaza. Az ilyen típusú preferencia relációk klasszikus típusát garantáló "racionalizáló" feltételek pl. *Sen* műveiben [1970], [1977] találhatók meg. Megjegyezzük, hogy ezt az elméletet komoly kritikák is érik: *Sugden* [1985], *Malishevsky* [1993], *Sen* [1993].

Egy másik felmerülő alapkérdés az **információk beszerzésére** vonatkozik.

Ha ragaszkodunk az "x legalább olyan jó, mint y?" kérdéshez, akkor az "igen" és "nem" válaszok mellé felsorakoznak az alábbi lehetőségek:

- meg kell engedni a "nem tudom" válaszokat is,
- meg kellene engedni azt, hogy a válaszoló megadja a preferencia-erősségre vonatkozó információt is, azaz hogy "x erőteljesen - közepesen - alig preferált y-hoz képest",
- a válaszok hitelességét is mérni kellene: pl. az "x legalább olyan jó, mint y" megbízhatóbban teljesül, mint a "z legalább olyan jó, mint w". Vagy: az "x legalább olyan jó, mint y" válaszra vonatkozó hitelesség mértéke mondjuk 0.3.

A **megismételhetőség, illetve az időbeli azonosság** kérdése. A klasszikus preferencia modellezés implicite azt az állítást feltételezi, hogy az "x legalább olyan jó, mint y?" kérdésre adott válasz az időben nem változik — de legalábbis nem foglalkozik a preferenciák időbeli fejlődésével.

A klasszikus elmélet a bináris relációkon értelmezett speciális struktúrákra jól kidolgozott, elsősorban azokra, ahol teljesül a tranzitivitás és a teljesség. Az előző fejezetek már szóltak arról, hogy ezek a tulajdonságok nem feltétlenül és mindig helytállóak — azonban a preferenciák numerikus reprezentációjának általános tárgyalásához szükség van rájuk.

Nem szóltunk viszont eddig arról, hogy a gyenge rendezés feltételezésével alkotott preferencia struktúrák **aggregálása** (az egyedi preferenciák csoport- vagy társadalmi preferenciákká összesítése) milyen problémákat vet fel: ezt külön tárgyalni fogjuk a 9.2. fejezetben.

A klasszikus preferencia elmélet kiterjesztései tehát sok irányban indíthatók el, és meglehetősen szerteágazóvá váltak. Attól függően csoportosíthatók, hogy a fenti problémák közül melyik "megoldására" fektették a fő hangsúlyt.

Már említettük, hogy a klasszikus elmélet kiterjesztésének egyik legegyszerűbb módja az, amikor a preferencia modell és a választási szabály továbbra is szoros kapcsolatban van egymással, de különböző feloldások történnek a **rendezések** terén. Nagyon sok eredmény született olyan rendezések (**szemi-rendezések, intervallum rendezések, részleges rendezések**, stb.) feltételezésével, ahol bekapcsolható az indifferencia reláció intranzitivitása és/vagy az összehasonlíthatatlanság megengedése — miközben megmarad az erős preferenciákra vonatkozó körutak tiltása. Ezekben az esetekben a legtöbbször küszöbértékek lépnek be, vagy az "akkor és csak akkor" állítások egyirányúakká válnak (pl.: $x \succ y \Longrightarrow g(x) > g(y)$). (Megjegyezzük, hogy ezek a kiterjesztések nem segítenek sokat az aggregálás során felmerülő lehetetlenségi tételek feloldásában.) Fejezetünk második része ezekről a modellekről fog szólni.

A **nem-klasszikus kiterjesztésekben** az erős preferenciák körútmentessége már nem kikötés. Ezeknek a modelleknek az alkalmazása azonban nagyfokú óvatosságot igényel. *Fishburn* [1991] ad jó összefoglalást az ezzel kapcsolatos felvetésekről.

Az előző fejezetekben **két speciális területet** részletesebben is megtekintettünk: az egyik a többtényezős döntések elmélete volt, a másik a kockázatos körülmények közötti döntéshozatal.

A többtényezős modellben — ha a klasszikus vonulatot követjük — kitüntetett szerepet játszott a kölcsönös preferencia-függetlenség.

A kockázat melletti döntéseknél is a függetlenségi feltételek, illetve a bizonyossági egyenértékes elv volt szükséges ahhoz, hogy konzisztens numerikus reprezentációkat találjunk:

- additív struktúrákat a többtényezős esetben és
- a várható hasznossági elv alkalmazhatóságát kockázatos döntési környezetben.

Míg ezek a speciális területek jóval gazdagabb információkezelést és specifikusabb reprezentációkat engedtek meg, feltételeik tesztelése nem könnyű feladat. Mint azt az 5.6 fejezetben láttuk, valós problémák esetén igen sokszor előfordul az alapvető feltételek szisztematikus és egyirányú megsértése. A kiterjesztések ezeken a speciális területeken abba az irányba indultak el, hogy ezeket a problémákat kiküszöböljék, mint arról már szintén szó esett az 5.6 fejezet utolsó részében.

A hagyományos modelltől eltérő néhány kitüntetett modellt részletesebben is bemutatunk. Mielőtt azonban erre rátérnénk, *Vincke* nyomán [1992] foglalkozzunk egy keveset újra a klasszikus modellel.

Legyen R az a **karakterisztikus reláció**, amelyre aRb akkor és csak akkor teljesül, ha aSb vagy aIB, azaz

$$R = S \cup I \tag{6.1}$$

(A 4.1 fejezetben ezt az R relációt P jelölte, míg S elnevezése erős preferencia volt.)

A hagyományos modellben a döntési feladatot egy A-n értelmezett g függvény optimalizálására vezetjük vissza. Maximum keresése esetén a klasszikus modell a döntéshozó preferenciáira vonatkozóan az alábbi feltételezéssel él:

$$aSb \Longleftrightarrow g(a) > g(b) \tag{6.2}$$

$$aIb \Longleftrightarrow g(a) = g(b) \tag{6.3}$$

Mint azt már a 4.1 fejezetben láttuk, ekkor a szóban forgó preferencia struktúra kielégíti az alábbi feltételeket ($a, b, c \in A$):

$$\text{Nem } (aJb) \qquad (J \text{ üres}) \tag{6.4}$$

$$aSb \text{ és } bSc \Longrightarrow aSc \qquad (S \text{ tranzitív}) \tag{6.5}$$

$$aIb \text{ és } bIc \Longrightarrow aIc \qquad (I \text{ tranzitív}) \tag{6.6}$$

Ha A véges vagy megszámlálható, akkor ezek szükséges feltételek a g függvény létezéséhez.

A modellt jellemző karakterisztikus reláció teljes és tranzitív:

$$aRb \text{ vagy } bRa \qquad (R \text{ teljes}) \tag{6.7}$$
$$aRb \text{ és } bRc \Longrightarrow aRc \qquad (R \text{ tranzitív}) \tag{6.8}$$

Az így jellemzett **teljes előrendezési** struktúra megenged egyenlő helyezéseket, amikor a "legjobbtól" a "legrosszabbig" rendezzük az elemeket:

$$aRb \Longleftrightarrow g(a) \geq g(b) \tag{6.9}$$

Ha nincsenek egyenlő helyezések, akkor R **teljes rendezési** struktúrát alkot.

6.1.1 Közömbösségi tartományok (küszöbértékek) bekapcsolása

"Kávé-cukor"-példánk az 5.6 fejezetben azt sugallta, hogy oldjuk fel a tranzitivitási feltételt a közömbösségi relációra vonatkozóan. Vezessük be a q pozitív küszöbértéket úgy, hogy minden $a, b \in A$ esetében

$$aSb \Longleftrightarrow g(a) > g(b) + q \tag{6.10}$$
$$aIb \Longleftrightarrow |g(a) - g(b)| \leq q \tag{6.11}$$

Könnyen megmutatható, hogy ez a preferencia struktúra az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\text{Nem } (aJb) \qquad (J \text{ üres}) \tag{6.12}$$
$$aSb, bIc \text{ és } cSd \Longrightarrow aSd \tag{6.13}$$
$$aSb, bSc \text{ és } aId \Longrightarrow dSc \tag{6.14}$$

Véges esetben ezek a feltételek szükségesek ahhoz, hogy a g és q függvények létezését biztosítsuk. A küszöbérték modellben a preferencia struktúra karakterisztikus relációja a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

$$aRb \text{ vagy } bRa \qquad (R \text{ teljes}) \tag{6.15}$$
$$aRb \text{ és } cRd \Longrightarrow aRd \text{ vagy } cRd \qquad (\text{Ferrers reláció}) \tag{6.16}$$
$$aRb, bRc \Longrightarrow aRd \text{ vagy } dRc \qquad (\text{szemi-tranzitivitás}) \tag{6.17}$$

Ez a reláció egy **szemi-rendezést** határoz meg. A szemi-rendezésben S tranzitív marad.

6.1.2 Változó küszöbérték modell

Az előző modellben a küszöbérték konstans volt, ám az alkalmazásokban nem mindegy, hogy például 1000 dollárban vagy milliókban mérünk. Ezért az alábbi módosítást tesszük:

$$aSb \Longleftrightarrow g(a) > g(b) + q(g(b)) \tag{6.18}$$
$$aIb \Longleftrightarrow g(a) \leq g(b) + q(g(b)) \tag{6.19}$$
$$g(b) \leq g(a) + q(g(a)) \tag{6.20}$$

Ha a q függvény teljesíti az alábbi konzisztencia-feltételt:

$$g(a) > g(b) \Longrightarrow g(a) + q(g(a)) \geq g(b) + q(g(b)) \tag{6.21}$$

akkor a vonatkozó preferencia struktúra szemi-rendezés és a g és q függvények transzformációja révén visszajuthatunk a konstans küszöbérték modellhez. (Pl. gyakori eset, hogy az indifferencia küszöb a megfigyelt érték %-ában van megadva: $q(g(b)) = \alpha(g(b)), \ (\alpha > 0)$).

Ha a q függvény nem teljesíti a konzisztencia-feltételt, akkor a preferencia struktúrának a következő korlátozásoknak kell megfelelnie:

$$\text{Nem } (aJb) \qquad (J \text{ üres}) \tag{6.22}$$
$$aSb, bIc, cSd \Longrightarrow aSd \tag{6.23}$$

A fenti feltételek a véges esetre biztosítják a g és q függvények létezését (szükséges feltételek). A preferencia struktúrát **intervallum rendezésű** struktúrának nevezzük, ha kielégíti a változó küszöbértékű modellt.

6.1.3 Összehasonlíthatatlanságot tartalmazó modellek

A J halmaz üres volta nem valósághű feltételezés. Sokszor előfordul, hogy a döntéshozó nem tud vagy nem akar egyes párokat összehasonlítani.

Részleges rendezés: A elemeinek egy részhalmazát tudjuk csak a "legjobbtól" a "legrosszabbig" sorrendbe rakni. Ekkor minden $a, b, c \in A$-ra

$$a \neq b \Longrightarrow \text{Nem } (aIb) \qquad (\text{ nincsenek azonos helyezések}) \tag{6.24}$$
$$aSb \text{ és } bSc \Longrightarrow aSc \qquad (S \text{ tranzitív}) \tag{6.25}$$

Ekkor létezik a g függvény, amelyre

$$aSb \Longrightarrow g(a) > g(b) \tag{6.26}$$

úgy, hogy minden A-beli elemhez különböző numerikus érték tartozik. A teljes és a részleges rendezés közötti különbség az, hogy nem igaz a kettős implikáció (ezáltal engedjük meg az összehasonlíthatatlanságot).

A karakterisztikus reláció (lásd a 4.1 fejezet 4.1 ábráján is):

$$aRa \qquad (R \text{ reflexív}) \tag{6.27}$$
$$aRb \text{ és } bRa \Longrightarrow a = b \qquad (R \text{ antiszimmetrikus}) \tag{6.28}$$
$$aRb \text{ és } bRc \Longrightarrow aRc \qquad (R \text{ tranzitív}) \tag{6.29}$$

vagyis R részleges rendezés.

A részleges rendezés esetében mindig lehetséges az, hogy az összehasonlíthatatlan eseteket olyan preferenciákkal helyettesítsük, hogy teljes rendezést kapjunk.

Részleges előrendezés: egyező helyezések is előfordulhatnak.

$$aSb \text{ és } bSc \Longrightarrow aSc \qquad (S \text{ tranzitív}) \tag{6.30}$$
$$aIb \text{ és } bIc \Longrightarrow aIc \qquad (I \text{ tranzitív}) \tag{6.31}$$
$$aSb \text{ és } bIc \Longrightarrow aSc \tag{6.32}$$
$$aIb \text{ és } bSc \Longrightarrow aSc \tag{6.33}$$

Ekkor

$$aSb \Longrightarrow g(a) > g(b) \tag{6.34}$$
$$aIb \Longrightarrow g(a) = g(b) \tag{6.35}$$

A karakterisztikus R reláció ebben az esetben részleges előrendezés (reflexív és tranzitív).

6.2 Outranking relációk: az ELECTRE módszercsalád

Az előző fejezetben említett problémákra válaszul született többtényezős modellek közül az elsők egyike és a legnagyobb gyakorlati sikert aratott modell az ELECTRE volt, amelyet *Roy* [1973] és munkatársai fejlesztettek ki.

Roy bevezeti az úgynevezett R **"outranking" relációt**, amelynek jelentése a következő: az A halmazon értelmezett R lineáris relációra nézve aRb akkor és csak akkor teljesül, ha a döntéshozó adott preferenciarendezése és a tulajdonságokra vonatkozó értékítéletek ismeretében elég okunk van feltételezni, hogy az A többtényezős alternatívahalmaz elemei közül az a legalább olyan jó, mint a b miközben nincs lényeges érvünk, hogy cáfoljuk ezt az állítást. Roy az általa kidolgozott módszerekben több outranking relációt is felépít. Az R relációról nem tételezzük fel, hogy teljes és tranzitív. Bármely esetre megengedett az összehasonlíthatatlanság.

Az R reláció a fenti definícióban inkább egy általános elvet fogalmaz meg és nem ad meg pontos előállítási formulát. Ezért az R felépítése többféleképpen történhet, a legjobb példát az ELECTRE módszercsalád szolgáltatja.

Az ELECTRE-I (Magyarországon is sűrűn használt) módszerében az outranking relációt a ún. **egyetértési** (concordance) **és nem-ellenzési** (non-discordance) **teszten** átjutott alternatívapárokra értelmezzük. Az egyetértési teszt a többségi elvet viszi be a megítélésbe, a nem ellenzés tesztje segítségével pedig az egyes tulajdonságok alapján emelhető vétó.

Bármely két alternatívára vonatkozóan csoportosítsuk a kritériumhalmazt az alábbi módon:

J^+ jelölje azon kritériumok indexhalmazát, amelyekre aS_jb (a komponenseként szigorúan preferált b ellenében),

$J^=$ jelölje azon kritériumok indexhalmazát, amelyekre aI_jb (a és b komponenseként indifferens), végül a

J^- indexhalmazban lévő indexekre bS_ja.

Az egyes kritériumok szerinti értékelések X mátrixában mindegyik kritériumhoz tartozzon egy w_j súly (a súlyok legyenek pozitívak és összegük 1) és a tulajdonságokhoz tartozó páronkénti súlyozott értékkülönbségeket jelölje $d^j = w_j \mid x_a^j - x_b^j \mid$. Ekkor az egyes alternatívapárokhoz tartozó egyetértési index:

$$c(a,b) = \sum_{j \in J^+ \cup J^-} w_j \tag{6.36}$$

Az ellenzési index pedig:

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } J^-(a,b) = \emptyset \\ \frac{1}{d} \max_{j \in J^-} w_j(x_a^j - x_b^j) & \text{ha } J^-(a,b) \neq \emptyset \end{cases} \tag{6.37}$$

ahol

$$d = \max_j d^j \tag{6.38}$$

és $w_j(x_a^j - x_b^j)$ az a és b alternatívák j-edik kritérium szerinti értékelésének súlyozott különbsége.

Az outranking reláció egyik lehetséges felépítési módja ekkor az alábbi:

$$a\,R\,b, \quad \text{ha} \begin{cases} c(a,b) \geq p \\ d(a,b) \leq q \end{cases} \tag{6.39}$$

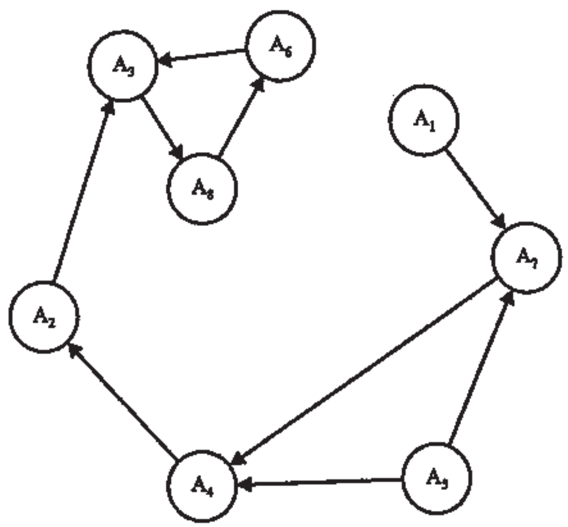
ahol p és q az egyetértés és az elutasítás szubjektíven megválasztott szintjei.

A p értéke szemmel láthatóan azt képviseli, hogy minél több (illetve minél nagyobb súlyt jelentő) tulajdonság alapján fogadhassuk el az aRb hipotézist, a q pedig az a maximális tolerancia-érték, amit még az ellentétes irányú eltérések kapcsán megengedhetünk, azaz ezt az eltérést még kompenzálni tudja a többi kritérium megfelelő iránya és súlya.

A számolás során a $c(a,b)$ értékekből egy C konkordancia mátrix, a $d(a,b)$ értékekből pedig egy D diszkordancia mátrix építhető fel. Ha a két szűrőfeltételt a mátrixokra alkalmazzuk, akkor egy új $W(p,q)$ mátrixot kapunk, amely a p és q aktuális értékétől függően azokon a helyeken tartalmaz 1-eseket, ahol mindkét feltétel teljesült; ahol pedig legalább az egyik feltétel nem teljesült, ott a mátrix eleme 0.

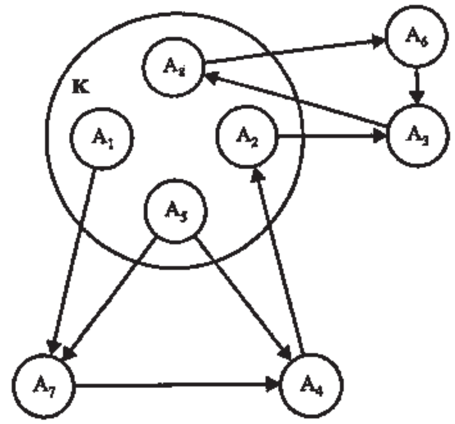
A $W(p,q)$ mátrix felhasználható az elemzés végeredménye gráf reprezentációjának elkészítésére. A gráf szögpontjai az egyes alternatívák, s az a szögpontból a b szögpontba akkor vezet irányított él, ha aRb, azaz (p,q) mátrix (a,b) indexű eleme 1. Az így elkészített gráf magja legyen K, ahol $K \subset A$. A magnak az a tulajdonsága, hogy minden $b \in (A-K)$ elemhez találunk legalább egy $a \in K$ elemet, amelyre aRb, míg a K elemei nincsenek egymással outranking relációban. A gráf magja nem feltétlenül létezik és nem biztos, hogy egyetlen mag van.

Illusztrációképpen tekintsük a *6.1.ábrán* látható gráfot:



6.1. ábra

Ennek a gráfnak a magja az A_1, A_2, A_5 és A_8 alternatívákból áll. Először az A_1 és A_5 alternatívákat tudjuk kiválasztani, mivel csak tőlük kimenő nyilakat látunk. Ezután még A_2 is hozzávehető a maghoz úgy, hogy a definíció teljesüljön, majd miután ezáltal az A_3 is kiesett, az A_8 is hozzávehető a maghoz. A *6.2. ábra* mutatja be az így kialakult helyzetet:



6.2. ábra

A gyakorlatban a p és q szisztematikus változtatásával lehet a magot változtatni és ezáltal elemezni a feladat alternatíváinak érzékenységét, szűkíteni és bővíteni a "jó" alternatívák halmazát.

Tekintsük a 2.1 fejezet **harci repülőgép vásárlási példáját** és elemezzük a feladatot az ELECTRE-I. módszerének segítségével.

A feladatban szereplő adatokat most úgy kalibráljuk, hogy minden tényező szerint az aktuális értékekből kivonjuk a legrosszabb értéket és az így kapott számot osztjuk a legjobb és a legrosszabb értékek különbségével, azaz a *6.1. táblázat* minden oszlopában lesz legalább egy 0 és legalább egy 1-es érték.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
A_1	0.286	0	0.667	0.500	0.500	1
A_2	1	1	0	0	0	0
A_3	0	0.417	1	1	1	0.500
A_4	0.572	0.250	0.667	0.250	0.500	0

6.1. táblázat

Az ELECTRE-I-hez felhasználandó *6.2. táblázatbeli* alapadatokat akkor kapjuk meg, ha a súlyvektorral

$$w = [0.2,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3]$$

megszorozzuk a 6.1. táblázat oszlopait:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
A_1	0.057	0	0.067	0.050	0.100	0.300
A_2	0.200	0.100	0	0	0	0
A_3	0	0.042	0.100	0.100	0.200	0.150
A_4	0.115	0.025	0.067	0.025	0.100	0

6.2. táblázat

A **C mátrix** elemeinek előállítása egyszerű, s ezeket a *6.3. táblázatba* rendeztük. Ha például a c_{12} elemet akarjuk kiszámolni, akkor vennünk kell azokat a tényezőket, amelyek szerint az A_1 alternatíva legalább olyan jó, mint az A_2. Ezek az X_3, X_4, X_5 és X_6 kritériumok, amelyekhez tartozó súlyok összege 0.7.

Számoljuk ki a c_{21} elemet is, amely azon kritériumok súlyainak összege lesz, amelyek szerint A_2 legalább olyan jó, mint az A_1, vagyis az X_1 és X_2 tulajdonságok súlyainak összege: 0.3.

Figyeljük meg, hogy a c_{14} elem és a c_{41} elem összege nem 1, mivel vannak olyan kritériumok — a harmadik és az ötödik — amelyeknél az A_1 és A_4 alternatívák holtversenyben voltak, azaz a harmadik és ötödik kritérium súlyai mindkét elemnél beszámításra kerültek, vagyis $c_{14} = 0.7$ és $c_{41} = 0.6$.

$C =$

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	–	0.7	0.5	0.7
A_2	0.3	–	0.3	0.6
A_3	0.5	0.7	–	0.8
A_4	0.6	0.7	0.2	–

6.3. táblázat

Miután a C mátrixban összegyűjtöttük az egyetértési együtthatókat, számoljuk ki a **D mátrix** elemeit is és helyezzük el a *6.4. táblázatban*. Tekintsük először az $A_1 \succeq A_2$ relációt. Ezt a relációt "ellenzi" az első és a második kritérium. Az ellenzés nagyságát a súlyozott tényezőértékek különbségével jellemezzük, ezek rendre 0.143 és 0.100. Vesszük ezek közül a legnagyobbat, amely 0.143 és elosztjuk az összes különbség (0.143, 0.100, 0.067, 0.050, 0.100 és 0.300) abszolút értékben legnagyobbikával a 0.300 értékkel. A hányados 0.143/0.300 = 0.477 lesz a d_{12} elem.

Hasonló módon a d_{21} elem értéke 1, mivel az ellenzők különbségei közül a legnagyobb 0.3 és ezt a 0.3 terjedelemmel kell elosztani. A d_{13} elem 0.100/0.150 (az ellenző különbségek legnagyobbika osztva a legnagyobb terjedelemmel), azaz 0.667, és így tovább.

$D=$

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	–	0.477	0.667	0.173
A_2	1	–	1	1
A_3	1	1	–	0.767
A_4	1	0.750	1	–

6.4. táblázat

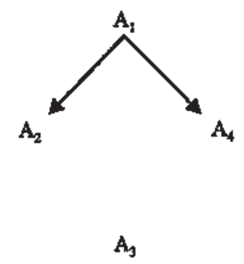
Legyenek a kritikus p és q értékek 0.6 és 0.7, azaz legyen

$$c_{ij} \geq 0.6 \qquad \text{és} \qquad d_{ij} \leq 0.7$$

Ha a C és D mátrix elemei közül csak azokat tarthatjuk meg, amelyek teljesítik a fenti kritériumokat és ezeknek az elemeknek a helyére 1-est írunk, a többi elem helyére pedig 0-át, akkor az outranking relációt az alábbi **W(0.6, 0.7) mátrix** alapján ábrázolhatjuk:

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	–	1	0	1
A_2	0	–	0	0
A_3	0	0	–	0
A_4	0	0	0	–

Mivel c_{12} vett fel 1 értéket, ez azt jelenti, hogy A_1RA_2. Ugyanígy A_1RA_4 és több outranking reláció nem keletkezett. A *6.3. ábra* tehát azt mutatja, hogy a szögpontokban elhelyezett alternatívákra a $p = 0.6$ és $q = 0.7$ értékek mellett milyen outranking gráfunk van.



6.3.ábra

A gráf magja $\{A_1, A_3\}$ vagyis ők alkotják azon alternatívák csoportját, amelyből a "legjobb" kiválasztható.

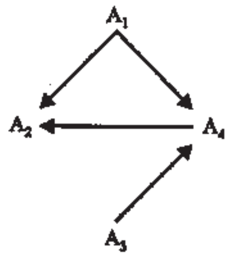
Nézzük meg, hogy mi történik, ha enyhítünk az elutasítási szinten! Legyenek új egyetértési és elutasítási értékeink

$$p = 0.6 \qquad \text{és} \qquad q = 0.8$$

Az új **W(0.6, 0.8) mátrix** az "enyhített elutasítás" miatt most több 1-est tartalmaz:

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	–	1	0	1
A_2	0	–	0	0
A_3	0	0	–	1
A_4	0	1	0	–

Ehhez a mátrixhoz a *6.4. ábra* gráfja tartozik:



6.4. ábra

amelynek magja szintén $\{A_1, A_3\}$.

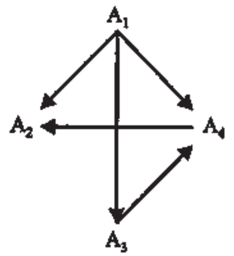
Nézzük meg azt az esetet is, amikor az egyetértési szintet enyhítjük. A

$$p = 0.5 \qquad \text{és} \qquad q = 0.8$$

értékekhez a **W(0.5, 0.8) mátrix** tartozik,

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	–	1	1	1
A_2	0	–	0	0
A_3	0	0	–	1
A_4	0	1	0	–

amelynek a *6.5. ábrán* látható gráfja az $\{A_1\}$ maggal rendelkezik.



6.5. ábra

Az outranking reláció definiálása nem csak a fentiekben megfogalmazott módon történhet. Viszonylag egyszerű módosítás például, ha az egyetértési mátrix előállításakor nem engedjük meg az indifferenciák figyelembe vételét. Az ellenzési mátrix *d* értékét nem feltétlenül soronként kell meghatároznunk, lehetséges az is, hogy normáló tényezőként a teljes mátrixban mért legnagyobb ellenzési értéket használjuk.

Nézzünk most egy olyan számítást, amelyben az induló adatmátrixot az előzőektől eltérően állítjuk elő, mégpedig úgy, hogy a tulajdonságvektor hosszával osztjuk az egyes tulajdonság-értékeket. Most tehát a 2.1 fejezetben közölt eredeti adatmátrixból indulunk ki (természetesen abból, amelyik csak számszerű értékeket tartalmaz, azaz a 2.1. táblázat értékeiből). Az első alternatívára vonatkozó első tulajdonság szerinti érték a *6.5. táblázatban* ekkor

$$x_{11} = 2/\sqrt{(2^2 + 2.5^2 + 1.8^2 + 2.2^2)} = 0.467$$

és hasonló módon számítjuk ki a többi értéket is.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
A_1	0.467	0.366	0.505	0.476	0.481	0.671
A_2	0.584	0.659	0.455	0.402	0.289	0.373
A_3	0.420	0.488	0.531	0.581	0.674	0.522
A_4	0.514	0.439	0.505	0.523	0.481	0.373

6.5. táblázat

Most is elkészítjük és a *6.6. táblázatban* elhelyezzük a súlyozott adatmátrixot:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
A_1	0.0934	0.0366	0.0505	0.0476	0.0962	0.2013
A_2	0.1168	0.0659	0.0455	0.0402	0.0578	0.1119
A_3	0.084	0.0488	0.0531	0.0581	0.1348	0.1566
A_4	0.1080	0.0439	0.0505	0.0523	0.0962	0.1119

6.6. táblázat

Nyilvánvaló, hogy ezek a transzformációk nem érinthetik a **C mátrixot**, amely tehát táblázatos formában a *6.7. táblázat* szerint a következő:

$C =$

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	–	0.7	0.5	0.7
A_2	0.3	–	0.3	0.6
A_3	0.5	0.7	–	0.8
A_4	0.6	0.7	0.2	–

6.7. táblázat

A **D mátrix** elemeit most egy másik módon adjuk meg, mint az előzőekben. Képezzük az A_1 és A_2 alternatívák tetszőleges relációjára vonatkozó különbségek összegét, azaz a különbségek abszolút értékeinek összegét, amely 0.193. Nézzük meg, hogy mely kritériumok ellenzik az $A_1 \succeq A_2$ relációt. Mint tudjuk, ezek az első és második kritérium. Vegyük az ezekhez a kritériumokhoz tartozó különbségek összegét és osszuk el ezt az értéket az előző teljes különbség-összeggel: $0.053/0.193 = 0.273$. Megkaptuk a d_{12} elemet. Vegyük észre, hogy a d_{21} elem most ezt az értéket 1-re egészíti ki: $0.140/0.193 = 0.727$.

$D =$

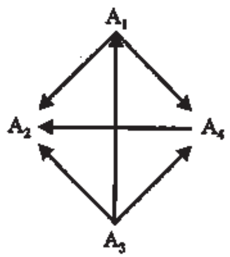
	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	–	0.273	0.542	0.193
A_2	0.727	–	0.747	0.607
A_3	0.458	0.253	–	0.163
A_4	0.807	0.393	0.837	–

6.8. táblázat

Legyen a p és q értéke a C és D mátrixok elemeinek átlaga, azaz $p = 0.55$ és $q = 0.5$. A $\mathbf{W(0.55, 0.5)}$ mátrix

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	–	1	0	1
A_2	0	–	0	0
A_3	1	1	–	1
A_4	0	1	0	–

A gráfot a *6.6. ábrán* látjuk.



6.6 ábra

Most a gráf magja az A_3 elemből áll.

Viszonylag különböző lehet a $W(p,q)$ mátrix felépítése, ha a d értékek és a q szintjének meghatározása helyett azt mondjuk, hogy egyes kritériumokra

határozunk meg "vétó-tartományokat": amennyiben az adott alternatívapárnál az adott értékek ebbe a tartományba esnek, akkor a hozzájuk tartozó W érték feltétlenül 0, míg a W többi elemét az egyetértési mátrix határozza meg. Ez a felépítés kényelmesebb, és legtöbbször célravezetőbb is, hiszen egyrészt nem kell az alternatívák páronkénti értékeléseinek megbízhatóságával foglalkozni (az előző felépítésben ezeknek az értékeknek a megbízhatósága szükséges feltétele volt az elemzésnek), mivel csak küszöbértékek (küszöbintervallunok) vannak megadva. Másrészt: könnyen értelmezhető vétóink vannak, s az érzékenységvizsgálat alkalmával a gráf is gyorsan módosítható.

Harci repülőgépes példánkban könnyen készíthetünk ilyen vétótartományokat. Gyakorlásképpen megnézhetjük hogyan alakul a feladat megoldása, ha például az árnál nem kerülhetünk a legjobb ártól 1 millió dollárnál messzebb és a manőverezhetőség nem lehet közepes — de egyéb feltételeket is alkalmazhatunk a W mátrix meghatározására.

Az **ELECTRE-II** eljárás-szinten abban különbözik az ELECTRE-I-től, hogy nem csak az alternatívák két csoportját képezi, hanem iteratív módon egy teljes rangsor meghatározására törekszik.

Az ELECTRE-II-ben az alábbi lépéseket végezzük:

0. lépés: Megállapítunk két egyetértési szintet: az egyik erősebb, a másik gyengébb.

1. lépés: Az A egy A^k részhalmazára megadjuk az erős outranking relációt $(A^1 = A)$

2. lépés: Kiválasztjuk A^k-nak azt a maximális B részhalmazát, amelynek elemeit A^k egyetlen eleme sem előzi meg. Ha az erős outranking relációs gráfban nincs körút, akkor $B^k \neq \emptyset$. (Ennek eléréséhez körutak esetén redukálni kell a gráfot. Ez természetesen információveszteséggel jár.)

3. lépés: Ha B^k "nem eléggé kis számosságú" (legtöbbször ha nem egyetlen elemből áll), akkor a B^k-ra alkalmazzuk a gyenge outranking relációt: C^k a B^k-nak az a maximális részhalmaza, amelynek egyetlen elemét sem előzi meg B^k egyetlen eleme sem.
Ha B^k "megfelelő nagyságú", akkor $C^k = B^k$.

4. lépés: Legyen $A^{k+1} = A^k - C^k$, $k = k + 1$ és térjünk vissza az 1. lépéshez.

Ezzel a módszerrel a $C^1 > C^2 > \ldots > C^k$ rendezést valósítjuk meg. Ezt a rendezést bemutatjuk a döntéshozónak, aki véleményezi azt, és ha nem tartja elfogadhatónak, akkor új paraméter értékekkel ismét elindítja az eljárást.

Az **ELECTRE-III** és **ELECTRE-IV** eljárásban fuzzy outranking relációt értelmezünk. Mindegyik (a,b) párhoz egy olyan $0 \leq \delta(a,b) \leq 1$ értéket rendelünk, amelyik az a és b outranking relációjára vonatkozó "hitelességi fokot" adja meg. Az egyetértési és elutasítási indexet az egyes kritériumokra nem élesen definiált egyetértési és vétó-tartományok szerint határozzuk meg. Az

$$aRb \iff \delta(a,b) \geq \lambda \tag{6.40}$$

outranking relációkat λ különböző értékeire értelmezhetjük, és λ változtatásával az ELECTRE-II-nél ismertetetthez hasonló eljárást konstruálhatunk. Mivel az eljárás lefolytatása a döntéshozót általában nehéz helyzetbe hozza - nehezen megítélhető különbségekről kell nyilatkoznia - az ezek kiküszöbölését részben elvégző ELECTRE-IV helyett a hasonló filozófiára épülő, de jóval könnyebben követhető és alkalmazható PROMETHEE eljárást ismertetjük.

6.3 A PROMETHEE módszer

Az ELECTRE eljárások lényegi vonása az volt, hogy a döntéshozó számára megengedték azt, hogy ne legyenek szigorúan meghatározott preferenciái vagy indifferenciái az alternatívák teljes körére, hanem "tétovázhasson" a preferencia és indifferencia között. Ez a módszerben úgy jelentkezett, hogy bizonyos paramétereket (elfogadási és vétószinteket, tartományokat) beállítottunk az eljárás elején, majd megváltozattuk a további lépésekben. Ezt a döntéshozó nem mindig tudta jól követni.

A PROMETHEE módszer, amelyet *Brans és Vincke* dolgozott ki [1985] minden kritériumra felépít egy preferencia-függvényt, amelyik a preferencia intenzitását (az outranking reláció értékét) méri. Az f_j kritériumra vonatkozó preferencia-függvény általános alakja

$$p_j(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{ha } f_j(a) \le f_j(b) \\ p_j[f_j(a), f_j(b)], & \text{ha } f_j(a) \ge f_j(b) \end{cases} \tag{6.41}$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a j indexet elhagyjuk. A p függvény a gyakorlatban az $f(a) - f(b)$ különbségen értelmezhető:

$$p[f(a), f(b)] = p[f(a) - f(b)] \tag{6.42}$$

A szerzők az előforduló eseteket 6 tipikus függvénnyel írják le, amelyek mindegyike 2 paraméter azonosítását követeli meg a döntéshozótól. Ezeknek a paramétereknek általában jól definiálható közgazdasági jelentése van.

1. Csak akkor van indifferencia a és b között, ha

$$f(a) = f(b)\,, \tag{6.43}$$

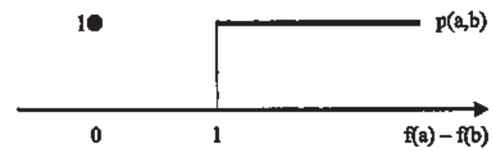
és

$$p(a,b) = 1 \quad \text{ha} \quad f(a) - f(b) > 0 \tag{6.44}$$

6.7. ábra

2. a és b mindaddig indifferensek, míg az $f(a) - f(b)$ különbség el nem ér egy "érzékenység küszöböt" (ℓ)

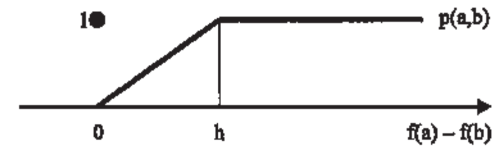
$$p(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{ha } f(a) - f(b) \le \ell \\ 1, & \text{ha } f(a) - f(b) > \ell \end{cases} \tag{6.45}$$



6.8. ábra

3. Az a és b közötti preferencia-intenzitás lineárisan nő az $f(a) - f(b)$ különbség növekedésével mindaddig, míg el nem ér egy erős preferencia szintet (h):

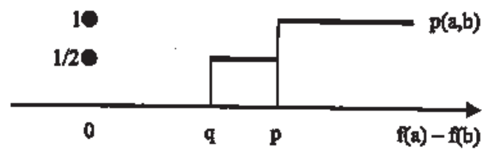
$$p(a,b) = \begin{cases} \dfrac{f(a) - f(b)}{h}, & \text{ha } f(a) - f(b) \le h \\ 1, & \text{ha } f(a) - f(b) > h \end{cases} \tag{6.46}$$



6.9. ábra

4. Az a és b között az $f(a) - f(b)$ különbség egy q szintjéig indifferencia van, azután egy $q+p$ szintig gyenge preferencia, azután pedig erős preferencia:

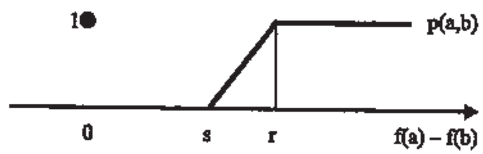
$$p(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{ha } f(a) - f(b) \le q \\ 1/2, & \text{ha } q < f(a) - f(b) \le q + p \\ 1, & \text{ha } f(a) - f(b) > q + p \end{cases} \qquad (6.47)$$



6.10. ábra

5. a és b között először egy indifferencia-tartomány (s-ig), majd egy lineáris intenzitású preferencia-tartomány van ($s+r$)-ig:

$$p(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{ha } f(a) - f(b) \le s \\ \dfrac{[f(a) - f(b)] - s}{r}, & \text{ha } s < f(a) - f(b) \le s + r \\ 1, & \text{ha } f(a) - f(b) > s + r \end{cases} \qquad (6.48)$$

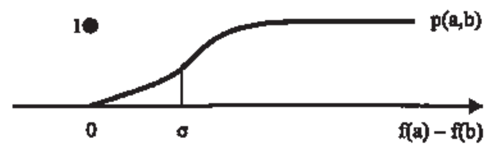


6.11. ábra

6. A preferencia a normális eloszlás görbéjének megfelelően változik:

$$p(a,b) = 1 - e^{-\frac{[f(a)-f(b)]^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{ha } f(a) - f(b) \ge 0, \qquad (6.49)$$

és $p(a,b) = 0$, ha a különbség negatív.



6.12. ábra

Ezekre az esetekre támaszkodva két eljárás építhető fel. A **PROMETHEE-I** csak parciális rendezést ad. Az eljárás a következő:

1. lépés: Meghatározzuk minden kritérium jellegét és a hozzátartozó paraméter értékeket. Minden (a,b) alternatívapárra kiszámítjuk a $\pi(a,b)$ preferenciaindexet:

$$\pi(a,b) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} p(a,b) \qquad (6.50)$$

(Minél nagyobb a $\pi(a,b)$ érték, annál preferáltabb az a alternatíva a b alternatívánál.)

2. lépés: Minden alternatívára kiszámítjuk a

$$\Phi^+(a) = \sum_{\substack{b \in A \\ a \ne b}} \pi(a,b) \qquad (6.51)$$

és

$$\Phi^-(a) = \sum_{\substack{b \in A \\ b \ne a}} \pi(b,a) \qquad (6.52)$$

értékeket, amelyek nagysága arra utal, hogy az a alternatíva milyen mértékben dominálja a többi alternatívát, illetve milyen mértékben dominált.

3. lépés: A Φ értékekre építjük fel az alábbi rendezéseket:

$$a\,P^+b \quad \text{ha} \quad \Phi^+(a) > \Phi^+(b) \qquad (6.53)$$

$$a\,P^-b \quad \text{ha} \quad \Phi^-(a) < \Phi^-(b) \qquad (6.54)$$

$$a\,I^+b \quad \text{ha} \quad \Phi^+(a) = \Phi^+(b) \qquad (6.55)$$

$$a\,I^-b \quad \text{ha} \quad \Phi^-(a) = \Phi^-(b) \qquad (6.56)$$

A P^+, P^-, I^+, I^- alapján a következő relációkat definiáljuk:

$$aRb, \text{ ha} \begin{cases} aS^+b & \text{és} \quad aS^-b \\ aS^+b & \text{és} \quad aI^-b \\ aI^+b & \text{és} \quad aS^-b \end{cases} \qquad (6.57)$$

$$aIb, \quad \text{ha} \quad aI^+b \quad \text{és} \quad aI^-b \tag{6.58}$$

$$aJb \quad \text{egyébként} \tag{6.59}$$

4. lépés: Az R, I, J relációkat az összes (a, b) alternatívapárra meghatározva egy részleges rendezést kapunk. Ez a rendezés az ELECTRE-I végső információjához hasonló eredményt ad.

A PROMETHEE-I. "bizonytalansági" információitól eltekintve (amelyek az összehasonlíthatatlanságban jelentek meg) megadhatjuk az alternatívák teljes rendezését is. A PROMETHEE-II eljárás első két lépése megegyezik a PROMETHEE-I lépéseivel.

3. lépés: A

$$\Phi(a) = \Phi^+(a) - \Phi^-(a) \tag{6.60}$$

értékeit felhasználva az alábbi relációkat definiáljuk:

$$aRb \quad \text{ha} \quad \Phi(a) > \Phi(b) \tag{6.61}$$

$$aIb \quad \text{ha} \quad \Phi(a) = \Phi(b) \tag{6.62}$$

4. lépés: Az így kialakuló teljes rendezést bemutatjuk a döntéshozónak.

Tekintsünk egy példát a számszerűsítésre. Ez a példa egyben a PROMETHEE eljárásnak arra a hátrányára is rávilágít, hogy egy alternatívapár $(a, b \in A)$ között felépített reláció függ a figyelembe vett alternatíváktól.

Legyen összesen 6 alternatívánk (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 és A_6), valamint két kritériumunk (C_1 és C_2). Az egyszerűség kedvéért a preferencia-intenzitások kiszámításához használjuk az alternatívák *6.9. táblázat* szerint megadott technikai adatait, ahol a nagyobb érték egyben a jobbat is jelenti.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
C_1	4	3	2	5	6	1
C_2	3	4	6	1	2	5

6.9. táblázat

A döntéshozó mindkét kritériumnál a 6.11. ábrával jellemzett, 5. pont alatt leírt $p(a, b)$ függvényt tartja relevánsnak, ahol az $s = 0.5$ és az $r = 2$.

Vizsgáljuk meg először az $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ alternatívahalmaz preferenciarelációit a PROMETHEE-I eljárást alkalmazva. A *6.10. táblázat* belsejében találjuk a $\pi(A_i, A_j)$ értékeket, míg a $\Phi^+(A_i)$ és $\Phi^-(A_i)$ értékek a táblázat peremén jelennek meg.

	A_1	A_2	A_3	A_4	$\Phi^+(A_i)$
A_1	0	1/8	3/8	3/8	7/8
A_2	1/8	0	1/8	1/2	6/8
A_3	1/2	3/8	0	1/2	11/8
A_4	1/8	3/8	1/2	0	8/8
$\Phi^-(A_i)$	6/8	7/8	8/8	11/8	

6.10. táblázat

A $\pi(A_1, A_2)$ elem kiszámításához a (6.48) és (6.50) képleteket használtuk fel. Az első kritériumra vonatkozóan

$$p(A_1, A_2) = \frac{1 - 0.5}{2} = \frac{1}{4},$$

míg a $p(A_1, A_2)$ a második kritériumra vonatkozóan 0, hiszen az értékkülönbség 0.5 alatt marad. A $\pi(A_1, A_2)$ tehát $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

A $\Phi^+(A_i)$ és $\Phi^-(A_i)$ értékek kiszámolása a (6.51) és (6.52) képleteket alkalmazva a 6.10. táblázatban a sorok, illetve az oszlopok összegeként történik.

A PROMETHEE-I 3. lépésének megfelelően azt találjuk, hogy A_1RA_2 és A_4RA_3, míg az összes többi párnál összehasonlíthatatlanságot tapasztalunk. Ez az A_1RA_2 esetében például abból adódik, hogy $\Phi^+(A_1) > \Phi^+(A_2)$ és $\Phi^-(A_1) < \Phi^-(A_2)$, ami (6.57) szerint az A_1RA_2 reláció meglétét jelenti, míg az A_2 és A_3 összehasonlításánál a $\Phi^+(A_2) < \Phi^+(A_3)$ és $\Phi^-(A_2) < \Phi^-(A_3)$ egyenlőtlenségből az A_2JA_3 következik.

Nézzük meg most az $\{A_1, A_2, A_5, A_6\}$ alternatívahalmaz preferencia összefüggéseit. A *6.11. táblázat* tartalmazza a π, Φ^+, Φ^- értékeket.

	A_1	A_2	A_5	A_6	$\Phi^+(A_i)$
A_1	0	1/8	1/8	1/2	6/8
A_2	1/8	0	3/8	3/8	7/8
A_5	3/8	1/2	0	1/2	11/8
A_6	3/8	1/8	1/2	0	8/8
$\Phi^-(A_i)$	7/8	6/8	8/8	11/8	

6.11. táblázat

Hasonló elemzéssel, mint azt az előzőekben tettük, megállapítható, hogy most az A_2RA_1 reláció teljesül, igazolva azt a megállapításunkat, miszerint az alternatívahalmaz összetétele befolyásolja a PROMETHEE-I végeredményét.

Ha kiszámoljuk a PROMETHEE-II-ben szereplő $\Phi(A_i)$ értékeket, akkor ugyanerre a következtetésre juthatunk — miközben a (6.60) és (6.61) képletek alkalmazásával teljes rangsort állapítunk meg az alternatívahalmazokon belül.

Az első esetben a

$$\Phi(A_1) = \frac{1}{8}, \quad \Phi(A_2) = -\frac{1}{8}, \quad \Phi(A_3) = \frac{3}{8} \quad \text{és} \quad \Phi(A_4) = -\frac{3}{8}$$

értékek figyelembe vételével az $A_3A_1A_2A_4$ rangsort kapjuk

A második esetben a

$$\Phi(A_1) = -\frac{1}{8}, \quad \Phi(A_2) = \frac{1}{8}, \quad \Phi(A_5) = \frac{3}{8} \quad \text{és} \quad \Phi(A_6) = -\frac{3}{8}$$

értékek az $A_5A_2A_1A_6$ rangsort indukálják, ismét szemléltetve az A_1 és A_2 alternatívák rangsorváltozását.

6.4 Irodalomjegyzék a 6. fejezethez

BOUYSSOU, D.-VINCKE, PH. (szerk.) [1998]: Preference modeling, *Annals of Operations Research*, Baltzer Science Publishers

BRANS, J.P.-VINCKE, PH. [1985]: A preference ranking organization method (The PROMETHEE method for multiple criteria decision making), *Management Science*, Vol. 11., No. 6., 647-656.

FISHBURN, P.C. [1991]: Nontransitive preferences in decision theory, *Journal of Risk and Uncertainty*, 4, 113-134.

MALISHEVSKI, A.V. [1993]: Criteria for judging the rationality of decisions in presence of vague alternatives, *Mathematical Social Sciences*, 26, 205-247.

ROY, B. [1973]: How outranking relation helps multiple criteria decision making, a COCHRANE, J.L.-ZELENY, M.(szerk.) *Multiple Criteria Decision Making*, University of South Carolina Press kötetben, 179-201.

ROY, B. [1977]: Partial preference analysis and decision-aid: the fuzzy outranking concept, a BELL, D.-KEENEY, R.-RAIFFA,H. (szerk.) *Conflicting Objectives in Decisions*, Wiley, New York kötetben, 40-74.

ROY, B. [1996]: *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*, Kluwer, Dordrecht

SEN, A.K. [1970]: *Collective Choice and Social Welfare*, Holden Day

SEN, A.K. [1977]: Social choice theory: A re-examination, *Econometrica*, 45, 53-89.

SEN, A.K. [1993]: Internal consistency of choice, *Econometrica*, 61, 495-521.

SUGDEN, R. [1985]: Why be consistent? A critical analysis of consistency requirements in choice theory, *Econometrica*, 52, 167-183.

VINCKE, P. [1992]: *Multicriteria Decision-aid*, Wiley, New York

7. Fejezet

Súlyozásos módszerek

A többtényezős döntési problémák kezelésének egyik legtöbbet alkalmazott elve, ha az egyes tényezőkhöz súlyokat rendelve a feladat megoldását visszavezetjük egyetlen (összetett) tényező szerinti mérésre. Az egyszerű súlyozásnál a mértékegységtől független, átfedéseket nem tartalmazó, teljes szempontrendszerhez fontossági súlyokat adunk meg. A súlyok megadása direkt becsléstől a lineáris programozás technikáját felhasználó bonyolult számszerűsítő eljárásokig terjedhet. Ebben a fejezetben csak két sokat hivatkozott és a gyakorlatban a legelterjedtebbek közé számító módszert ismertetünk, ezek a SMART és az AHP.

7.1 Egyszerű súlyozás

A 2.2. táblázatban lévő szempontokat eddig nem próbáltuk meg egyesíteni: külön-külön tekintettük őket. Tegyük fel, hogy a döntéshozó nem csak a szempontok sorrendjét tudja megadni, mint ahogyan azt a lexikografikus módszernél láttuk, hanem rendelkezik egy súlyrendszerrel is ezen szempontokra vonatkozóan. Legyen ez a súlyrendszer olyan, hogy minden súlyszám pozitív és a súlyok összege 1. Ekkor (az azonos mértékegységre hozott értékelések adatai alapján) azt az alternatívát választjuk, amelynek súlyozott értékösszege a legnagyobb, azaz amelyre az

$$S_i = \sum_j w_j x_{ij} \tag{7.1}$$

maximális.

Feladatunkban a súlyvektor legyen

$$w = (0.2;\ 0.1;\ 0.1;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3)$$

Ekkor

$$S_1 = 0.835 \qquad S_2 = 0.709 \qquad S_3 = 0.852 \qquad S_4 = 0.738$$

Vagyis az A_3 alternatívát kell választani.

Vegyük észre, hogy a súlyozásos módszer nem csak a legjobbat választja ki, hanem teljes rangsort is ad (holtverseny lehetséges).

7.2 SMART

A súlyozásos módszer *Edwards* (1971) cikkében és a további hivatkozásokban a többdimenziós hasznossági függvénynek egydimenziós lineáris hasznossági függvényekből való additív előállításának közelítő módszereként jelenik meg olyan modellekben, ahol a tényezők eleve teljesítik a preferencia függetlenségi feltételt és ahol bármely tényezőre igaz az, hogy a tényező bármely szintjén egy másik tényezőnek mindig ugyanazon irányú változása a jobb (feltételes monotonitási tulajdonság).

A SMART (Simple Multi-Attribute Rating Technique) módszer (Edwards [1977]) a teljes döntési folyamatot felöleli. Lépései:

1. A döntéshozó azonosítása
2. A döntési probléma megfogalmazása
3. Az alternatívák kijelölése
4. A döntési tényezők azonosítása
5. Minden alternatívát minden tényező szerint értékelünk, s ezáltal egy döntési mátrix keletkezik
6. A dominált alternatívák kiejtése
7. A linearitás és a feltételes monotonitás tesztelése
8. Fontossági rangsor meghatározása
9. Fontossági súlyok előállítása
10. Döntés

Az eljárás tehát a 7. lépésben végzett (egyszerű) ellenőrzések miatt nem tekinthető a naiv módszerek egyikének. Ha a könnyen ellenőrizhető tényezőnkénti linearitás nem biztosítható, vagy a szintén egyszerű kérdésekkel ellenőrizhető additivitási feltétel nem teljesül, akkor más módszert kell alkalmaznunk.

(Megjegyzendő, hogy a 6. lépés kihagyható, az eredményen nem változtat, ha a dominált alternatívák bent maradnak.)

A 8. lépésben a döntési tényezőket a legfontosabbtól a legkevésbé fontosig haladva kell a döntéshozónak rangsorba állítania. Itt említjük meg, hogy a triviálisnak látszó eljárási lépések a szubjektív elemeket nagymértékben tartalmazó egyedi döntéseknél nem feltétlenül egyszerűek és magától értetődőek. A SMART pszichológus szerzői olyan kérdéseket igyekeznek az eljárásokban javasolni, amelyek a legkülönbözőbb helyzetekben is arra vezetnek, hogy az egyén valóban a preferenciáinak megfelelő eredményeket kapjon vissza. Igen sokszor érdemes például egy olyan dummy alternatíva használata, amely minden tényezőben a legrosszabb értéket képviseli. A rangsoroláskor például azt kérdezhetjük a döntéshozótól, hogy ha ezen a végletekig rossz alternatíván javítani szeretne, akkor melyik tényezőben szeretne először egy teljes mértékű (a legjobb értékre váltó) elmozdulást? Majd ha egy olyan alternatívája lenne, amely ezen egyetlen tényezőben a legjobb, de a többiben még mindig a legrosszabb, akkor melyik lenne a következő tényező, amit a legjobbra szeretne beállítani? És így tovább.

Miután a rangsor megszületett, a 9. lépésben az eredeti módszer szerint a direkt aránybecslés látszott a legegyszerűbbnek: a döntéshozó a legfontosabb tényezőt beállítja egy értékre (esetleg lehet 10 vagy 100) és a többi tényezőt ehhez képest látja el súlyokkal. Mikor mindegyikkel készen van, akkor a súlyokat normalizáljuk.

Kiderült azonban, hogy a gyakorlatban a döntéshozó a fontossági súlyok megítélésében nem tud elszakadni a tényezők konkrét terjedelmétől, azokat együtt tekinti. Ha például egy műszaki tényező 0.005 és 0.008 között mozog és az ár 10000 dollár és 30000 dollár között van, meggondolandónak tartja, hogy 1 ezrelékes javítás a műszaki tényezőben megér-e neki 10 vagy 15 ezer dollárt. Ezért általában az ilyen esetben a műszaki tényező fontosságát alulbecsüli.

A SMART újabb változatai (*Edwards* és *Barron* [1994] ezért az értékelő mátrixnál eleve megkövetelik az azonos terjedelemre hozatalt, s a súlyokra vonatkozó kérdés-felelet játék nem az eredeti értékekkel, hanem a transzformált értékekkel zajlik.

A döntés a fentiekben kifejtetteknek megfelelően az

$$S_i = \sum_j w_j u_j(x_{ij}) \qquad (7.2)$$

maximális értéke szerint történik.

7.3 A Saaty-féle Analytic Hierarchy Process (AHP) módszer

A *Saaty* [1980] által kifejlesztett eljárás a súlyozásos módszert egy célhierarchiára alkalmazza. Tekintsük ennek a hierarchiának az egyik szintjét, ahol a $C_1, \ldots, C_m$ kritériumok szerepelnek. Tegyük fel, hogy a kritériumokhoz tartozó "igazi" súlyértékek sorozata $w_1, \ldots, w_m$. Ha a kritériumokat páronként összehasonlítjuk, és a döntéshozónak választ kell adnia arra a kérdésre, hogy a C_i kritérium hányszor fontosabb számára (hányszor erősebb), mint a C_j, akkor az

$$r_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \qquad (7.3)$$

értékeket az R mátrixba összegyűjtve ideális esetben az

$$Rw = mw$$

összefüggés érvényesül, ahol $w = [w_1, \ldots, w_m]$.

Az R mátrix egy reciprok konzisztens mátrix, azaz

$$r_{ji} = \frac{1}{r_{ij}} \tag{7.4}$$

és

$$r_{ij} r_{jk} = \frac{w_i}{w_j} \frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k} = r_{ik} \tag{7.5}$$

Ha az r_{ij} összehasonlításokat a döntéshozótól szerezzük be, akkor az "igazi" w_i értékek helyett azok w_i' becslései állnak rendelkezésre, és az

$$R'w' = \lambda w' \tag{7.6}$$

sajátérték-feladatot kell megoldani.

Mivel R rangja 1, $r_{ii} = 1$, ezért a maximális sajátértéknek az m-től való távolsága a módszerben a konzisztencia ellenőrzésére is szolgál: Saaty megmutatta, hogy $\lambda_{\max} \geq m$, és a konzisztens reciprok mátrixnál a két érték különbségét fel lehet használni egy konzisztencia-hányados képzésére:

$$CR = \frac{CI}{ACI} \tag{7.7}$$

ahol

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - m}{m - 1} \tag{7.8}$$

és ACI véletlen-szám generátorral képzett feladatok átlagos indexe, amelyre megadható egy táblázat. Általában a $CR = 0.1$ értéket tartják elfogadható küszöbszámnak.

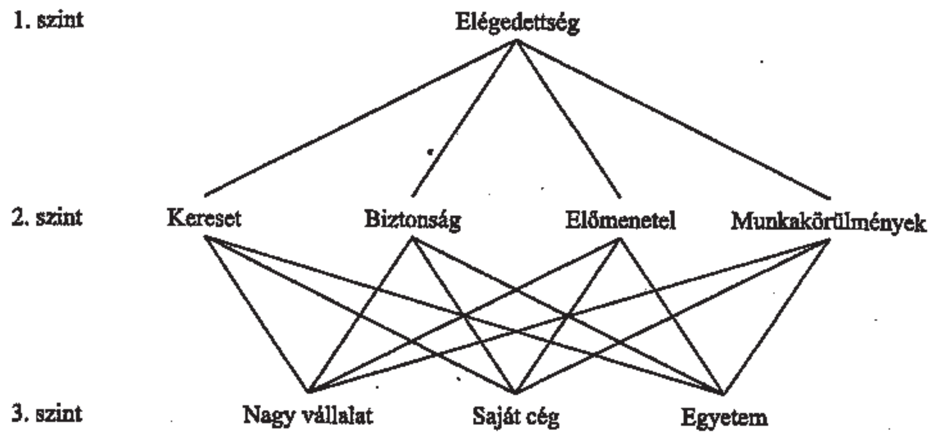
Ha a hierarchia minden szintjén elvégezzük a páros összehasonlításokat, akkor a B_k mátrixban gyűjthetjük össze a k-adik szintnek megfelelő súlyokat. B_k minden sora a $(k-1)$-edik szint egyes elemeire vonatkozóan kiszámított k-adik szintbeli kritériumsúly-vektorokat tartalmazza. Ennek alapján a B_k mátrixok szorzata adja a hierarchia utolsó szintjén lévő döntési alternatívák súlyértékeit. Az AHP lépései tehát:

1. lépés: A döntési tényezők hierarchiájának összeállítása.
2. lépés: Az egyes elemekre vonatkozó páros összehasonlításokat tartalmazó R' mátrixok előállítása a döntéshozó kikérdezése alapján.
3. lépés: Minden szinten minden elemre (az utolsó szint kivételével) a súlyok meghatározására szolgáló sajátérték feladat megoldása.
4. lépés: Az egyes szintek aggregálásával megkapjuk a döntési alternatívákra vonatkozó értékeket, amelyekből azok sorrendje megkonstruálható.

Tekintsünk egy egyszerű példát az alkalmazásra.

Közgazdász végzettségű ismerősünk három lehetőség közül választhat: belép egy nagy könyvelőcégbe partnerként (A_1), saját tanácsadó céget alapít (A_2) vagy elfogadja az egyetem ajánlatát (A_3).

Egy hierarchikus döntési struktúra legalább 3 szintből áll. A *7.1. ábra* mutatja azt, hogy példánkban a hierarchia első szintje az (általában elvont) végcélt jelöli: elégedettség a kiválasztott lehetőséggel (amit úgy is megfogalmazhatunk, hogy a legjobb állás kiválasztása). A legalsó szinten a lehetőségek sorakoznak. A végcél alatt több szintű hierarchia is lehetséges, esetünkben a legegyszerűbb esetet választjuk: négy tényező alkotja ezt a szintet. A tényezők: a kereseti lehetőség (K), a biztonság (B), az előmeneteli lehetőség (E) és a munkakörülmények (M).



7.1. ábra

A páros összehasonlítások elvégzésére Saaty egy speciális skálát használ, amely 1 és 9 pont között osztja be a preferenciák intenzitását. Ha az egyik tényező és a másik egyenlően fontos, akkor a hozzárendelt hányados 1, ha az első egy kicsit fontosabb, mint a másik, akkor a hányados 3, majd az intenzitástól függően (sokkal fontosabb, nagyon sokkal fontosabb, teljes mértékben fontosabb) 5, 7 és 9 a hányados értékek. Árnyalatok érzékeltetésére közbeeső értékek is használhatók.

Tegyük fel, hogy közgazdász barátunk az állással való elégedettség (legfelső szint) szempontjából a középső szint tényezőire vonatkozóan 6 páros összehasonlítást végzett el, s azok eredménye:

$$\begin{array}{lll} (K:B) = (7:1)\,, & (K:E) = (1:1)\,, & (K:M) = (7:1), \\ (B:E) = (1:3)\,, & (B:M) = (2:1)\,, & (E:M) = (5:1). \end{array}$$

Az összes páros összehasonlítást tartalmazó mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1 & 1/3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1/7 & 1/2 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Barátunk most az alternatívákat az egyes tényezők szerint is értékeli ugyanezen a skálán, ugyanezen a módon.

A kereseti lehetőségre vonatkozóan az alternatívák páros összehasonlítási mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1/2 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

A biztonságra vonatkozó mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1/5 \\ 1/3 & 1 & 1/7 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Az előmeneteli lehetőségekre vonatkozó mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 2 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1/2 & 1/7 & 1 \end{bmatrix}$$

Végül az alternatíváknak a munkakörülményekre vonatkozó értékelése:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(Vegyük észre, hogy az alternatíváknak az egyes tényezőkre vonatkozó értékeléseit is páros összehasonlítások segítségével kaptuk. Ez nem kötelező: a kereseteknél pl. dolgozhattunk volna a valódi keresetarányokkal, amennyiben ezek az arányok jól kifejezik szubjektív értékelésünket.)

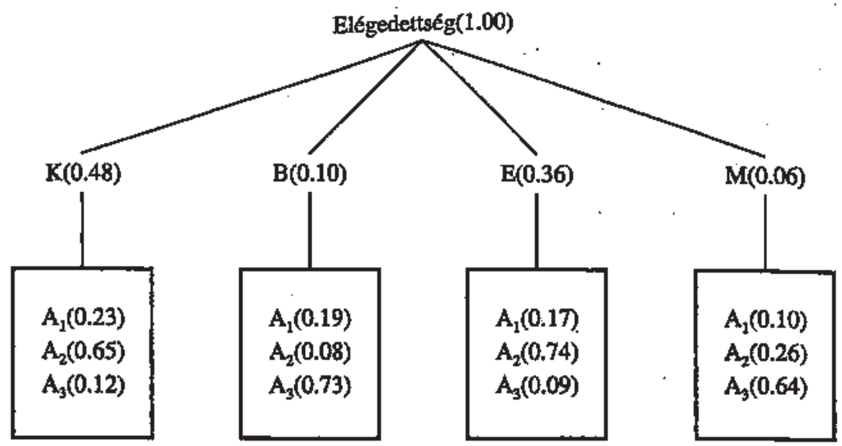
A sajátérték feladat megoldása a középső szinten az alábbi értékeket szolgáltatja:

$$0.48,\ 0.10,\ 0.36,\ 0.06$$

A három munkalehetőségnek a négy tényező szerinti értékelése hasonló módon:

$$\begin{matrix} 0.23 & 0.19 & 0.17 & 0.10 \\ 0.65 & 0.08 & 0.74 & 0.26 \\ 0.12 & 0.73 & 0.09 & 0.64 \end{matrix}$$

Az eredményeket fa-struktúrában mutatja a *7.2. ábra.*



7.2 ábra

A végeredményt a súlyozott összegek adják:

$$S(A_1) = 0.48 \cdot 0.23 + 0.10 \cdot 0.19 + 0.36 \cdot 0.17 + 0.06 \cdot 0.10 = 0.1966,$$
$$\mathbf{S(A_2) = 0.6020},$$
$$S(A3) = 0.2014,$$

azaz barátunk a saját vállalkozás indítását választja – saját preferenciáinak és várakozásainak megfelelően.

A feladatmegoldás kézenfekvő eszköze ebben az esetben a számítógép. Az EXPERT CHOICE nevű programcsomag súlyértékek kiszámolására, az alternatívák rangsorolására és érzékenységvizsgálatra egyaránt felhasználható.

7.4 Irodalomjegyzék a 7. fejezethez

ECKENRODE, R.T. [1965]: Weighting multiple criteria, *Management Science*, 12, 180-192.

EDWARDS, W. [1977]: How to use multiattribute utility measurement for social decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-7, 326-340.

EDWARDS, W.-BARRON, F.H. [1994]: SMARTS and SMARTER: Improved simple methods for multiattribute measurement, *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 60, 306-325.

GASS, S.I.-RAPCSÁK, T. [1998]: On synthesizing group decisions, *Decision Support Systems*, 22, 59-63.

SAATY, T.L. [1980]: *The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation*, McGraw-Hill, New York

8. Fejezet

Alkalmazási kérdések

Az előző fejezetben bemutatott módszerek alkalmazásának elvi és gyakorlati kérdéseiről a szakirodalomban kiterjedt viták folynak. Ebben a fejezetben először röviden összefoglaljuk az ún. amerikai és európai iskolákkal kapcsolatos álláspontokat, kiemelve az eltérő döntésfilozófiai megközelítéseket. A fejezet végén a valós alkalmazások hiányának néhány okát elemezzük.

8.1 Az "amerikai" és "európai" iskola megközelítése

A döntéshozó magatartására vonatkozó feltevések terén kialakult különbségeket a többtényezős döntések irodalmában és gyakorlatában nagyon gyakran az ún. amerikai iskola és európai iskola különbözőségeként aposztrofálják.

Az **amerikai iskola** elsődleges jellemzőjének azt tekintik, hogy szemléletmódja szervesen kapcsolódik a közgazdaságtanban megalapozott hasznossági felfogáshoz, s a preferenciák és a hasznossági függvények elmélete felől közeledik a többcélú problémák megoldásához. A tulajdonságra vonatkozó preferenciarendezés léte azért lényeges, mert az előbb elmondottakat úgy is interpretálhatjuk, hogy egy tulajdonságra (kritériumra) vonatkoztatva a döntéshozó fejében szilárdan meglévő preferenciák (vagy az ott kirajzolódó hasznossági függvény) alapján mindig tud információkat szolgáltatni két alternatíva adott tulajdonságra vonatkozó megítéléséről, sőt, ez a **hasznossági függvény** akár valóban **meg is konstruálható**. A hasznossági függvény tehát ebben az esetben kétszeresen is egyedi: egyrészt a konkrét személyhez, másrészt az adott kritériumhoz kapcsolódik. Óriási előnye viszont, hogy megléte esetén az adott kritérium szerint az alternatívák egyértelműen rangsorolhatók.

Ha tehát egy döntési feladat egyetlen célt, kritériumot tartalmaz, akkor a hasznossági függvény optimalizálása nyújtja a probléma megoldását. A többcélú esetben a problémát az okozza, hogy nem egyetlen kritérium, tehát nem egyetlen hasznossági függvény van a feladatban, hanem több. Ha viszont fel tudjuk írni a többtényezős hasznossági függvényt, akkor a döntési feladatot is automatikusan megoldottuk, hiszen ismét csak egyetlen célfüggvényt kell figyelembe vennünk.

Az amerikai iskola tehát azon a vonalon indul el, hogy a hasznossági függvények létét feltételezve, s a döntéshozót képesnek tartva arra, hogy konzisztens információkat adjon, megpróbál a preferenciákról teljes vagy részleges információkat beszerezni, s ebből az alternatívákra vonatkozó következtetéseket levonni.

A — főleg a 70-es években készített — modellek egy része megkísérelte a többtényezős hasznossági függvények előállítását. Ha viszont ez az előállítás a megfelelő szabályok, függetlenségi és konzisztencia tesztek betartásának igényével folyik, akkor majdnem lehetetlen feladat elé állítja a döntéshozót: nagyon kifinomult, nehéz kérdésekre kell válaszolnia úgy, hogy lehetőleg minél kevesebbszer bonyolódjon "ellentmondásba".

Az egyéb - a hasznossági függvények explicit meghatározására nem vállalkozó - modellek, módszerek a fentebbi alapfeltevéseket megtartva pontosan annyi információt próbálnak gyűjteni, amennyi a legjobb megoldás kiválasztásához elegendő. Legáltalánosabbnak két stratégia tekinthető:

- irányított séta az alternatívák halmazán,
- az alternatívák egyes kritériumok szerinti páronkénti összehasonlításából származó információk felhasználása.

Az egyes módszerek felosztását ebből a szemszögből úgy is elvégezhetjük, hogy azt nézzük, vajon *a döntéshozó a teljes megoldási folyamatban vagy csak részlegesen van-e jelen?*

A meghatározott pontokon megjelenő döntéshozói információ az "irányított séta az alternatívák halmazán" jellegű módszerekre jellemző: megtörténik az aktuális Pareto-optimális megoldás generálása, s a döntéshozó — mivel feltételezéseink szerint erre képes — megmondja azt, hogy a módszer leállhat-e, vagy (megint csak **implicit hasznossági függvénye** segítségével) megadja azt az irányt, ahol a következő megoldást keresni kell.

A döntéshozótól kapott információ sokféleképpen származtatható a fejében lévő hasznossági függvényekből. Megadhatja preferenciáit helyettesítési határarányok (trade-off információk), súlyok, páros összehasonlítások, rangsorok segítségével, s információi vonatkozhatnak direkt módon az alternatívákra, egyetlen tényező szerinti értékelésekre vagy azon belül lehetnek lokális információk. Nem véletlen, hogy ezeknek a módszereknek manapság a legfontosabb jellemzője az interaktivitás. A számítástechnika fejlődése egyre inkább lehetővé tette, hogy *a döntéshozó valós időben adja meg a preferenciáira vonatkozó információkat.*

A döntési folyamatban állandóan jelen lévő döntéshozó viszont egy — az amerikai iskola gondolatmenetébe még beleilleszthető —, de minőségileg új felfogás részese is. Az amerikai iskola döntéshozói preferencia-információkra építő módszereinek alkalmazói hamar rádöbbentek arra, hogy az információk beszerzése roppant nehéz és bonyolodalmas feladat. Méghozzá a nehézségeknek csak

egyik része technikai, a lényegesebb problémát az jelenti, hogy a döntéshozó egyszerűen nem képes konzisztens válaszokra, s ha a módszer szigorú abban az értelemben, hogy a konzisztenciát valamilyen módon vizsgálja, akkor újra és újra elölről kell kezdeni a megoldási folyamatot. Megjelent tehát az a felfogás, hogy a döntéshozóval alaposan meg kell ismertetni a problémát, majd egy **tanulási folyamat** részesévé kell őt tenni, ahol fokozatosan megtanulhatja kinyilvánítani preferenciáit, átfordítani azokat a módszer által megkívánt fogalmak nyelvére.

A tanulás bekapcsolása az amerikai iskolánál nem jelenti azt, hogy lemondanának a hasznossági függvény létezésének hipotéziséről. Mindössze arról van szó, hogy az egyén maga nem feltétlenül képes összefogott formában megragadni saját létező preferenciáit, hanem ehhez segítségre van szüksége. *A tanulás leszűkül a preferenciák tanulására*, önmagunk megismerésére egy adott probléma tükrében. A tanulást tartalmazó módszereknek szükségképpen *interaktívaknak* kell lenniük, de nem minden interaktív módszerben jelenik meg a tanulás.

A hasznossági függvények zárt elméletének határait két irányból feszegették. Az új módszereket az európai iskolának a döntéshozó preferenciáiról vallott eltérő felfogása hozta meg, amelyet alább tárgyalunk. Másrészt viszont a hierarchikus rendszerek és a páros összehasonlítások elvének összekapcsolásával Thomas Saaty dolgozott ki egy eredeti eljárást (ezt a 7. fejezetben tárgyaltuk). Az **AHP** — eredeténél fogva — az amerikai iskola egy másik reprezentánsának tekinthető. Az elmúlt tizenöt évben az egyik legelterjedtebb, legtöbbet használt módszernek számít. Sikerét két tényezőnek köszönheti. Az egyik — bár sokat vitatott — elem az elméleti háttér egyre inkább erősödő megalapozottsága. A páros összehasonlításokon alapuló módszer sajátérték feladattá transzformált megoldása bizonyíthatóan jó tulajdonságokkal rendelkezik (*Gass-Rapcsák* [1997]). Ugyanakkor megmutatható a kapcsolat a hasznossági iskola eredményeivel is (*Saaty* [1986]). A módszer első verzióiban erőteljesen kritizált vonásokat (pl. rangsorváltás, nagyméretű feladatok rosszul kezelhető volta) a későbbi verziókban sikerült kiküszöbölni.

A siker másik összetevője a könnyen érthető modellkeret, a jól interpretálható eredmények. A módszerben menet közben megkövetelt információkat a felhasználók rövid betanítás után könnyen meg tudják adni, s az AHP végeredményül kapott súlyait — akár tényezőkre, akár alternatívákra vonatkoztatjuk — értelmezni tudják. A módszer felkészült arra is, hogy a "következetlen" döntéshozót figyelmeztesse, s ezáltal elkerülje megbízhatatlan végeredmények alkalmazását. Újabb kedvező vonása a módszernek, hogy nem kizárólag a "legjobb" alternatíva kiválasztására koncentrál, hanem megadja a véges alternatívahalmaz elemeinek egymáshoz viszonyított relatív értékelését is, azaz megadja az alternatívák rangsorát.

Mindezek a körülmények talán túlságosan is közkedveltté tették Saaty módszerét. Olyan esetekben is látjuk mechanikus alkalmazását, amikor a feladat modellezésére nem az AHP a legszerencsésebb, például egyes makrogazdasági alternatívák összehasonlítása, társadalmi döntések meghozatala. Kétségtelenül csábító, hogy egyes alternatívák páros összehasonlításával bonyolult problémákat is "megoldjunk", ezekben az esetekben azonban többnyire megmutatható, hogy a módszer alkalmazása a feladat leegyszerűsített, s ezáltal félrevezető modellezésén alapul.

Ugyancsak meggondolandó, hogy azokban az esetekben, amikor a döntéshozó bizonytalan, inkonzisztenciára hajlamos (s ez nem az ő hibája, hanem az adott feladat természetéből következik) vajon az AHP vagy inkább az outranking modellek vezetnek-e megbízhatóbb eredményre? Valószínű, hogy ez a kérdés ebben a formájában nem eldönthető.

Az **európai iskola** már alapkiindulásában különbözik az amerikai felfogástól. A döntéshozónak a szokásos preferenciarelációk mellett újabbakat enged meg, s tág teret biztosít a döntéshozó adott helyzetbeni bizonytalanságának és döntésképtelenségének, sőt, ezekkel eleve számol modelljének felépítésekor (*Roy-Vanderpooten* [1996]).

A döntéshozónak természetesen most sem engedik meg az irracionális gondolkodást, azonban a döntési folyamat modellezését igyekeznek közelebb hozni a valós helyzetekhez. A valós problémáknál természetes az, hogy a döntéshozónak kognitív korlátai vannak, egyes kérdésekre nem tud válaszolni, s bizonyos mértékig ellentmondhat önmaga korábbi kijelentéseinek is — azaz nem feltétlenül konzisztens.

Az európai iskola sokat foglalkozik nem tradicionális módon felépített preferencia-relációkkal, s az ezekre alapozott módszerekkel. Ezek közül a legelterjedtebb az ún. outranking reláció, amelyen az ELECTRE típusú módszerek alapulnak, s amelyeket a 6.fejezetben tárgyaltunk.

Ez a módszercsalád nem feltétlenül arra törekszik, hogy a legjobb alternatívát kiválassza, hanem legtöbbször megelégszik a döntéshozó által elfogadható és nem elfogadható alternatívák elkülönítésével. A módszerekben fontos szerepet játszanak az elfogadási és elutasítási szintek és a különböző döntési küszöbök, amelyek a döntéshozó bizonytalanságait, inkonzisztenciáit emelik be a módszerekbe a reális döntéshozatali környezetből.

Az európai iskola nem kíván az értékelő vagy hasznossági függvények közelítő előállításával foglalkozni. A hangsúlyt arra helyezik, hogy a döntéshozó megfelelő segítséget kapjon a neki legjobban megfelelő megoldás megtalálásában. Ezt a különbséget azzal is szokták hangsúlyozni, hogy nem többcélú vagy többtényezős döntéshozatalról (decision-making) beszélnek, hanem a *többcélú döntések segítéséről (decision-aid)* (*Roy* [1996]).

A többcélú problémák megoldása — a Pareto optimalitás fogalmának megfelelően — többféle lehetőséget is megenged. A legáltalánosabb, és a döntési problémák természetének legjobban megfelelő eset az, amikor egyetlen alternatíva, a leendő cselekvési alternatíva kiválasztása a cél. Mint arról már az 1. fejezetben szóltunk, ez kétféle szemléletben is történhet:

- a döntéshozó szempontjából legjobb alternatíva kiválasztása,
- egy kielégítő alternatíva kiválasztása.

Ezen kívül azonban előfordulhatnak olyan esetek is, amikor az **alternatívák csoportosítása vagy rangsorolása** a cél. A Saaty-féle AHP módszer előnyeként említettük meg, hogy teljes rangsor megadására képes. Mint az egyes módszereknél láttuk (ELECTRE, PROMETHEE) az európai iskola célkitűzései között is szerepel az, hogy az alternatívák rangsorát, vagy legalább durva csoportosítását megadja.

Mindezek után viszont felmerül a kérdés, vajon ténylegesen köthető-e a többcélú döntéshozatal földrajzilag elkülönülő iskolákhoz?

Természetesen a helyzet nem olyan egyszerű, hogy az amerikai és európai iskola eltérése legyen a meghatározó. Bár tény, hogy az amerikai kutatók és alkalmazók többsége az előző pontban felvázolt elvek alapján dolgozik, s némelyikük még alig hallott az outranking módszerekről (annál is inkább, mert az alapirodalom hosszú ideig csak francia nyelven volt hozzáférhető), az európai paletta a bemutatottnál sokszínűbb. Amit előszeretettel "európai iskolának" neveznek, az inkább egy nagyon markáns francia vonulat, *Bertrand Roy* iskolája, holland és belga kutatókkal kiegészítve, akikhez újabban egy spanyol-portugál vonal csatlakozott (*Bana e Costa* és társai).

Egyetérthetünk azonban *Lootsma* [1996] véleményével: szerencsésebb lenne az outranking relációra épített többtényezős döntéstámogató módszertan követőit francia iskolának nevezni — ha már mindenáron címkével akarjuk ellátni, hiszen Európában is vannak, akik az amerikainak nevezett vonalon haladnak, sőt, jelentősen hozzájárulnak annak fejlődéséhez. Nevezhetnénk ezt akár skandináv iskolának, hiszen legnevezetesebb képviselőik finnek (pl. *Korhonen és Wallenius*), de az amerikai iskola neves képviselői között sok lengyel is akad.

Az angolok erőteljesen a praktikum irányába viszik el kutatásaikat, publikációik többsége nem az elméleti finomságokkal, hanem ipari alkalmazásokkal, valós környezetben felépíthető "döntési laboratóriumokkal" foglalkozik.

Mivel a földrajzi felosztás inkább csak a jellegzetességek bemutatásában segít, ezért nem érdemes több szót vesztegetni rá — miközben a témával foglalkozó kutatók körében továbbra is élnek elkülönülésre mutató tendenciák. Ennek pontosabb kifejtése már túlmenne bevezető jellegű könyvünk keretein.

8.2 A valós alkalmazások problémái

A Journal of MCDA (Multi-Criteria Decision Analysis) című szakfolyóiratban többcélú döntésekkel foglalkozó neves kutatók egy csoportja egy manifesztumot bocsátott közre "Az új MCDM-korszak kiáltványa" címen (*Bouyssou-Perny-Pirlot-Tsoukias-Vincke* [1993]). A tudományág 90-es évekbeli helyzetét talán legjobban jellemző mondatuk így hangzik:

"Bár a többcélú döntéseket segítő módszerek sokasága a terület erősségének tűnhet, ugyanakkor gyengeséget is jelez. Mindmáig nincs mód arra, hogy eldöntsük, vajon egy bizonyos módszer alkalmazása egy speciális döntési szituációban

jobban igazolható-e, mint egy másiké. A döntési folyamatok és algoritmusok szisztematikus és axiómákra épülő elemzése még várat magára."

A fent említett folyóirat 1993-1999 közötti számai és a legutóbbi MCDM (Multiple Criteria Decision Making)-konferenciák egyértelműen tanúskodnak arról a hiányérzetről és orientációhiányról, amit az idézet is jelez. Mindazon kutatók zöme, akik eddig elsősorban a módszerek sokaságát hozták létre, alkalmazási kérdéseket feszeget, s megpróbál kiutat találni ebből a helyzetből. Melyek a szimptomatikus vonások?

Elsősorban a **valós, bonyolult problémák megoldását leíró esettanulmányok hiánya.** Ha létezik is meggyőző alkalmazás, akkor ez általában egy specifikus probléma különleges jellemzőit használja ki, vagy a többcélú módszer csak az elemzés hátterében jelenik meg. A szakirodalom "alkalmazásainak" zöme laboratóriumi körülmények között vagy egyetemi osztálytermekben készült, s inkább csak illusztrációnak tekinthető. Egyes kutatók ki is fejezik csalódottságukat amiatt, hogy milyen kevés valós alkalmazással találkoznak, azok viszont paradox módon általában nagy horderejű, stratégiai döntések (nagyberuházások, területi fejlesztések, stb.) (*Buede-Maxwell* [1995]). A ki nem érlelt módszerek millió dollár értékű döntések támogatását végzik. Ugyanakkor ezek a módszerek megjelentek a kereskedelmi forgalomban is, azt az illúziót keltve, hogy bárki tudja őket használni döntési problémák megoldásában - anélkül, hogy döntéstámogató szakember segítségét vennék igénybe. Mint írják: "Óriási a kockázat és hibalehetőség, a hibás alkalmazások esélye."

Az MCDM-társadalom megosztottá vált a modellhasználat területén, azonban az egyes modellekre esküdt — csak azt vagy változatait alkalmazó — kutatók sem képesek meggyőzően bemutatni a módszer előnyeit az egyéb módszerekkel szemben, vagy erre egyáltalán nem is törekszenek.

A módszerek reális összehasonlításának nincs kialakult gyakorlata. Kézenfekvőnek látszik, hogy egyes módszerek összehasonlító elemzése azonos feladat mindegyikkel történő megoldásával valósítható meg a legjobban. A nemzetközi szakirodalomban aránylag kevés publikációt találunk a gyakorlati összehasonlításra. Az összehasonlítás során általában egy behívott — legtöbbször önkéntes egyetemistákból álló — csoport tagjai oldják meg különböző módszerekkel a feladatot, majd szubjektív véleményt nyilvánítanak a módszer használatának egyszerű vagy bonyolult voltáról (easy to use), illetve arról, hogy a kapott végeredménnyel elégedettek-e. Az összehasonlító feladat-megoldások általában 3-5 módszert hasonlítanak össze, s mindig bevonnak egy strukturálatlan, trial and error eljárást is az összehasonlítandó körbe.

A vizsgálatokból az derül ki, hogy a bonyolultabb felépítésű, nehezebben megválaszolható kérdéseket feltevő, hosszú ideig tartó eljárásokat a döntéshozók még akkor sem részesítik előnyben, ha a többlet erőfeszítések eredményeképpen számukra is elfogadhatóbb megoldáshoz jutnak. Egyértelmű a robusztusabb módszerek iránti igény. Ez néha odáig terjed, hogy a strukturálatlan módszer a döntéshozók egy része számára vonzóbb, mint a matematikailag precízen felépített eljárás (*Gibson-Bernardo-Chung-Badinelli* [1987], *Henig-Buchanan* [1996]).

Holland kutatók becsületesen megpróbálkoztak azzal, ami rendkívül logikus lett volna már korábban is: saját döntéseik során alkalmazni az általuk ismert és propagált módszereket (*Bots-Kok-Lootsma-Rog* [1994]). A kísérleti terep az MCDA újság referensi politikájának kialakítása volt, amelyre többféle alternatíva kínálkozott. Mivel a szerkesztők és tanácsadóik ültek le egy többmenetes döntési konferenciára, előtérbe kerültek az MCDM módszerek csoportos alkalmazásának problémái. Az abszolút bennfentes, fölényes technikai ismeretekkel rendelkező társaság csalódottan állt fel a döntési konferencia végén. Számunkra lényeges kérdéseik egyike az alábbi volt: Vajon miféle típusú döntéshozók számára tervezték ezeket a módszereket? Karizmatikus egyéniségű vezetők, hidegen számító bürokraták, a manipulációkban jártas pókerarcú üzletemberek használhatják őket?

Továbbra is **él az a kívánság, hogy a kutatások valamiféle univerzális módszer megalkotásában csúcsosodjanak ki,** vagy legalábbis egy olyan módszer készüljön, amely a felmerülő feladatok többségét kezelni tudja. Az univerzalitásra pályázó modellek közül a legerősebb jelölt az AHP (*Saaty* [1980]), amely tudatosan igyekszik magát úgy beállítani, mint tetszőleges problémák megoldását segítő modell.

A fentiekben felsorolt vonások az utóbbi időben komoly kritikákhoz vezettek és megindult az útkeresés (*Stewart* [1992], *Henig-Buchanan* [1996]). Legígéretesebbnek a döntési módszereknek a számítógépes döntéstámogatási modellekbe való beépítése látszik, erről bővebben a 10. fejezetben lesz szó.

8.3 Irodalomjegyzék a 8. fejezethez

BOTS, P.-KOK, M.-LOOTSMA, F.-ROG, L. [1994]: Letter to the editor: Schools on islands, a journal as a ferry, *Multi-Criteria Decision Analysis*, 3, 123-130.

BOUYSSOU, D.-PERNY, P.-PIRLOT, M.-TSOUKIAS, A.-VINCKE, P. [1993]: A Manifesto for the new MCDM era, *Multi-Criteria Decision Analysis*, 2, 125-128.

BUEDE, D.M.-MAXWELL, D.T. [1995]: Rank disagreement: A comparison of multi-criteria methodologies, *Multi-Criteria Decision Analysis*, 4, 1-22.

GASS, S.I.-RAPCSÁK, T. [1998]: On synthesizing group decisions, *Decision Support Systems*, 22, 59-63.

GIBSON, M.-BERNARDO, J.J.-CHUNG, C.- BADINELLI, R. [1987]: A comparison of interactive multiple objective decision making procedures, *Computers and Operations Research*, 14, 97-106.

HENIG, M.I. - BUCHANAN, J.T. [1996]: Solving MCDM problems: Process concepts, *Multi-Criteria Decision Analysis*, 5, 3-11.

LOOTSMA, F.A. [1996]: Comments on Roy-Vanderpooten [1996], *Multi-Criteria Decision Analysis*, 5, 37-38.

ROY, B.-VANDERPOOTEN, D. [1996]: The European School of MCDA: Emergence, basic features and current works, *Multi-Criteria Decision Analysis*, 5, 22-36.

SAATY, T.L. [1980]: *The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation*, McGraw Hill, New York

SAATY, T.L. [1986]: Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process, *Management Science*, 32, 841-855.

STEWART, T.J. [1992]: A critical survey on the status of multiple criteria decision making theory and practice, *OMEGA*, 20.

SZABADKAI, A.-SZIDAROVSZKY, F. [1983]: *Döntéselőkészítési módszerek alkalmazása*, Mezőgazdasági Kiadó, Budapest

SZIDAROVSZKY, F.-MOLNÁR, S. [1986]: *Játékelméleti és többcélú programozási módszerek műszaki alkalmazásokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest

9. Fejezet

Csoportos döntésekről

Ebben a fejezetben a teljesség igénye nélkül kitérünk a csoportos döntések esetén felmerülő néhány problémára. Röviden tárgyaljuk az Arrow-féle lehetetlenségi tételt és annak következményeit. Ugyancsak ebben a fejezetben mutatjuk meg, hogy a szavazási problémák és a döntési problémák között szoros összefüggés van. A fejezet néhány híres szavazási paradoxon bemutatásával zárul.

9.1 Csoportos döntéshozatal

Tegyük fel, hogy több jelölt között kell egy csoport tagjainak választani, s ehhez szeretnénk egy megfelelő eljárást találni. Elvileg módunk lehet arra, hogy ebben az esetben is az eddig tárgyalt módszerek valamelyikét alkalmazzuk. Ha például az egyetemi tanszék vezetőjét kell megválasztani, felállíthatjuk a kritériumok listáját, s mindegyik tanszéki munkatárs eldöntheti, hogy kit támogat. Nyilvánvaló azonban, hogy személyes döntését mindenki a saját preferenciái alapján fogja meghozni, illetve az a rangsor, amelyet felállít, ismét csak saját preferenciarendezését tükrözi. Hogyan lesz ezekből az egyéni rangsorokból csoportos döntés?

Megeshet azonban az is, hogy nem egy jelöltek közötti választási problémáról van szó, hanem az eddig egyéni döntésként tárgyalt egyéb többtényezős problémákat kell csoportos környezetben megoldani. Lehet, hogy a család lakóhelyváltoztatásáról van szó, megeshet, hogy egy szakértői zsűrinek kell bizonyos célra pályázók közül választani, végül pedig arról is szó lehet, hogy a lakosság vagy a társadalom egy nagyobb csoportját érintő döntés meghozataláról van szó (hol legyen szemétégető, kell-e atomerőművet telepíteni?)

Ezekben az esetekben alapkérdésünk az egyéni preferenciák csoport-preferenciákká aggregálása, az egyéni döntések csoportos döntéssé alakítása.

Ez a kérdéskör olyan tág és komplex, hogy még a felmerülő problémák mindegyikének felvázolását sem kíséreljük meg. Ebben és a következő alfejezetekben inkább azt az utat követjük, hogy az eddigiekhez hasonló feladatok csoportos körülmények közötti megoldásának lehetőségeiről ejtünk néhány szót. Semmiféleképpen nem tudunk belemenni sem a csoportos döntések szociológiai, sem pszichológiai vonatkozásainak tárgyalásába, miközben jól tudjuk, hogy ezeknek a területeknek az eredményei a csoportos döntési feladat megoldásának lényegéhez tartoznak.

Szárazabb, módszertani ihletésű gondolatmenetünket kezdjük annak hangsúlyozásával, hogy a döntési feladatokban szereplő preferenciák, súlyok, értékelések megadásának mikéntje a több döntéshozó bekapcsolása esetén a hasznossági függvényekre, az outranking reláció megadására vagy a preferenciasorrendre építő eljárások változatos mutációihoz vezet.

Tekintsük a véges alternatívahalmazból való választás problémáját. Attól függően, hogy az egyén hol és hogyan játszik szerepet a megoldásban, kétféle útvonalat lehet kijelölni.

1. Kiindulásként adottak az alternatívák kritériumonkénti egyéni értékelései.

1.1. Mindenki saját súlyrendszerrel rendelkezik.

1.2. Az induló értékelések és súlyok segítségével egyéni alternatíva rangsorokat képezünk valamelyik módszer segítségével (egyszerű súlyozás, ideálistól vett távolság, ELECTRE, hasznossági függvény, stb.).

1.3. Az egyéni alternatíva rangsorokból kiszámítjuk a csoportrangsort.

A másik megközelítés szerint

2. Kiindulásként most is az alternatívák kritériumonkénti egyéni értékeléseivel rendelkezünk.

2.1. Az induló értékelésekből kritériumonkénti csoportértékeléseket készítünk.

2.2. Az egyéni súlyok alapján vagy megegyezéssel kialakulnak a csoportsúlyok.

2.3. A kritériumonkénti csoportértékeléseket és csoportsúlyokat felhasználva valamelyik módszer segítségével csoportrangsort számolunk.

A kétféle útvonal eltérő filozófiára épít és eredménye sem kell, hogy megegyezzen (még akkor sem, ha menet közben ugyanazokat a módszereket használjuk.) A lényeges különbség ott van, hogy **hol kezdjük el a csoportmunkát**, azaz melyik lépéstől kezdve dolgozunk aggregált adatokkal. Az első változatban az egyének egymástól függetlenül értékelnek, megadva saját végső sorrendjüket, s ezekből az egyéni eredményekből kell valamilyen módon megadni a csoport végeredményét. Tipikusan erről van szó például a szavazási problémák esetében.

A második változatban azonnal beindul a csoportmunka: kritériumonként történik meg az aggregálás és kritériumonkénti csoportrangsorok készülnek. A

csoport munkájának végeredménye úgy alakul ki, mintha a csoport — az alkalmazott módszer szempontjából — egyetlen, a tagokból "összegyúrt" egyén lenne.

Tegyük fel, hogy e kétféle megközelítést felhasználva számítógépes döntéstámogató rendszert akarunk készíteni. Nézzük először az 1. változatot!

1. lépés: A döntési alternatívák és az alternatívákat minősítő kritériumok kiválasztása. Ebben a lépésben bármely strukturált módszer alkalmazható. Megengedett — és ennek a megközelítésnek ez egyik előnye —, hogy az egyes döntéshozók kritériumlistái különbözzenek egymástól.

2.lépés: A csoport minden tagja végigjárja ugyanazt az utat, amelyet a döntési módszer számára kijelöl, s ennek eredményeképpen egyéni értékeléseket és rangsorokat kapunk. Még az sem szükséges tehát, hogy a döntésben részt vevő személyek egy időben, egy helyen legyenek: egyéni eredményeiket a számítógép segítségével megküldhetik annak a döntéstámogató szakembernek, aki a "csoportprogramot" majd lefuttatja. Ebben a változatban tehát nincs interaktivitás.

3. lépés: Az egyéni futtatások eredményeit összegyűjtik és elindítják a csoportrangsort kialakító programot. Ez a program egyetértési együtthatókat is számolhat: ahol ez az együttható egy előre meghatározott értéket nem ér el, a csoport tagjai visszakapják az eredményeiket (ha szükséges, valamilyen módon megbeszélhetik az eltérés okait), majd újabb, módosított egyéni rangsort készítenek.

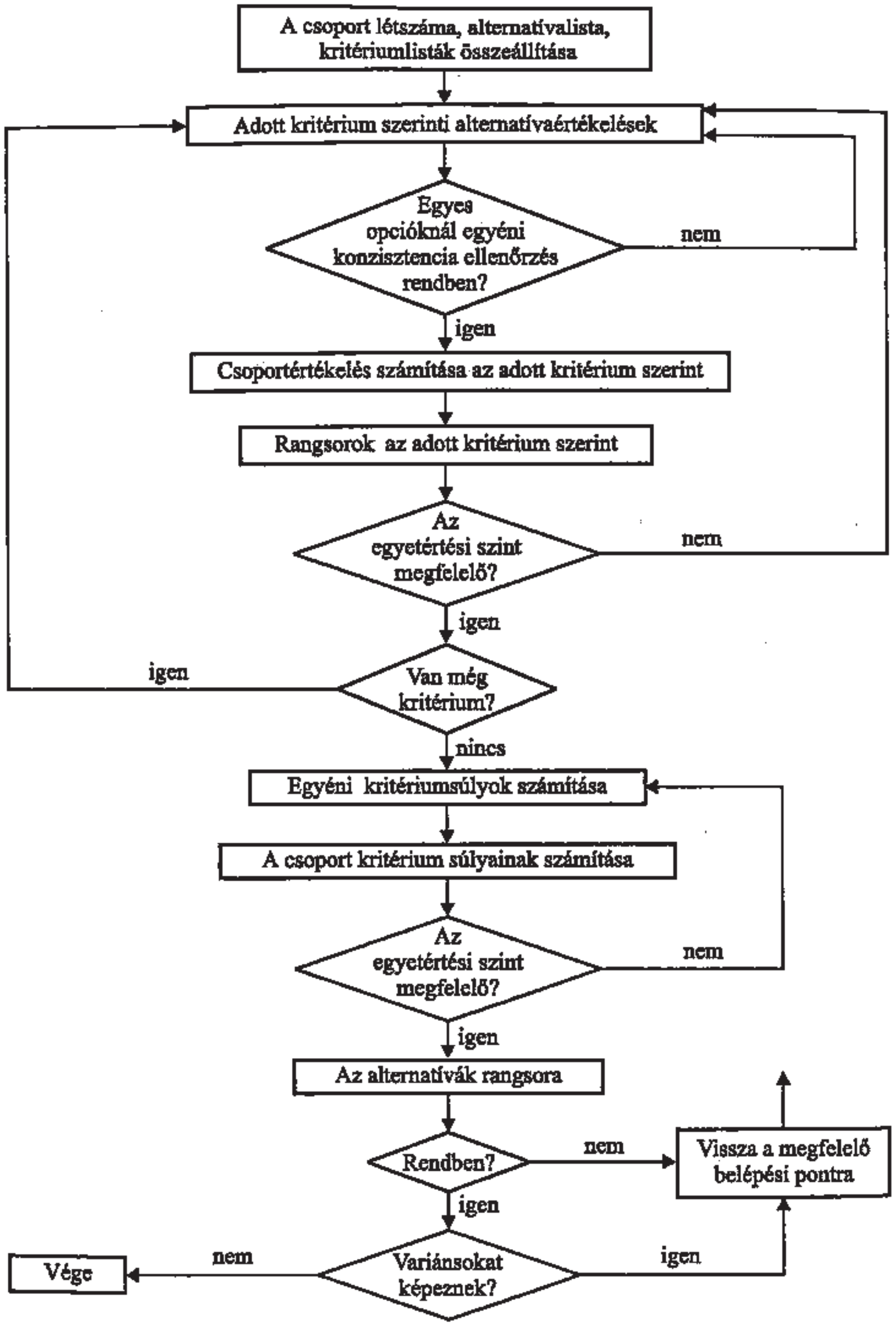
4. lépés: Ha a véleményeltérés elfogadható mértékű, végleges csoportértékeléseket és rangsort számolhatunk.

Sokkal hatékonyabb és "valódi" csoportmunkát végez a 2. típusú eljárás, amely személyes részvételen alapuló **döntési konferenciákat** feltételez. Nem tudunk belemenni a sokféle döntési konferencia-elv tárgyalásába, csak megemlítjük, hogy akár on-line módon is lebonyolítható a dolog: párhuzamosan halad az egyének és a csoport kritériumonkénti alternatíva értékeléseinek kialakítása. Ez úgy történik, hogy egy-egy kritériumra vonatkozóan (miután az egyén konzisztenciáját esetleges többszöri iterációval a saját képernyőjén már biztosítottuk), minden csoporttag képernyőjén megjelenítjük az összes résztvevő értékelő vektorát és az ebből származó, egyéni rangsorokat tartalmazó mátrixot.

A csoport tagjai elemezhetik a mátrixokat, megbeszélhetik az eredményeket. Ha az egyetértési együttható értéke rosszabb volt egy megadott küszöbszámnál, akkor egy szavazógombbal dönthetnek arról, hogy továbbmennek, vagy visszatérnek az adott kritérium szerinti értékeléshez.

A csoportsúlyok kialakítása hasonló módon történik.

Végül a kiválasztott értékelő eljárással megadjuk a végső sorrendet. Ennek az eljárásnak a sémáját mutatja a *9.1. ábra*.



9.1. ábra

9.2 Az Arrow-féle lehetetlenségi tétel

Joggal kérdezhetjük, hogy amint több tényező esetében többtényezős hasznossági függvényt határoztunk meg, nem lenne-e egyszerűbb több döntéshozó esetében egy olyan csoport-hasznossági függvényt kreálni, amelyik valamiféle módon tükrözi az egyének preferenciáit? A kérdés úgy is megfogalmazható, hogy lehet-e valamilyen aggregációs szabállyal csoportpreferenciákat létrehozni? Az egyik leghíresebb eredmény, Arrow lehetetlenségi tétele azt mutatja meg, hogy ha az egyéni preferenciákból indulunk ki, és bizonyos kézenfekvő feltételekből álló axiómarendszert alakítunk ki, akkor ez nem lehetséges.

Legyen a döntéshozók száma k, és tegyük fel, hogy mindegyikük egy teljes, tranzitív gyenge preferenciarendezést ad meg az A alternatívahalmazon, jelöljük ezeket R_i-vel. A csoport egy $(R_1, R_2, \dots, R_k)$ preferencia-profillal jellemezhető. Az f társadalmi jóléti függvény (aggregációs szabály) egy olyan szabályt jelent, amivel az egyéni preferenciaprofilokat egy lehetséges társadalmi preferenciarendezésbe visszük át. Sokféle aggregációs szabályt adhatunk meg. Arrow olyan követelményeket fogalmazott meg, amelyek teljesülése a társadalom és az egyének számára racionálisnak és elfogadhatónak látszik. Mellőzve a matematikai formalizmust, felsoroljuk ezeket a feltételeket és következményeiket:

1. A társadalmi jóléti függvénnyel meghatározott preferenciarendezés is legyen teljes és tranzitív.

2. Az f függvény az összes lehetséges preferenciaprofilra legyen definiálva.

3. Legyen az egyedi és a csoportrendezés pozitív kapcsolatban egymással, azaz ha az aggregációs szabály szerint az (a, b) alternatívapárra aRb, akkor ez a reláció nem változik meg, ha az a-t nem tartalmazó páros egyéni összehasonlítások változatlanok és ugyanakkor az a-t tartalmazó összehasonlítások az a javára módosulnak.

A Pareto-elv érvényesül: ha minden egyén az aR_ib preferenciával rendelkezik, akkor a társadalom számára is aRb.

4. A lényegtelen alternatíváktól való függetlenség. Legyen A_1 az A részhalmaza. Ha a preferenciaprofil úgy változik, hogy az A_1 szerinti páros összehasonlítások változatlanok maradnak, akkor az eredeti és a módosított profilokból adódó társadalmi rendezésnek az A_1-beli alternatívákra változatlanoknak kell maradniuk.

5. Az egyének szuverenitása teljesül: ha az aggregált rendezés aRb, akkor az egyéni preferenciarendezések között is kell aR_ib rendezést találnunk.

6. A csoportban nem találunk olyan személyt, akinek a preferenciái a többiek preferenciáinak figyelembe vétele nélkül meghatározná a csoport preferenciarendezését: nincs diktátor.

Arrow híres lehetetlenségi tételéből az következik, hogy **ha legalább három alternatíva van, akkor nincs olyan társadalmi jóléti függvény (aggregálási szabály), amelyik legalább az egyik követelményt meg ne sértené.**

Ez a tétel negatív volta ellenére igen nagy hatású: a társadalmi választásokkal, szavazásokkal, döntésekkel foglalkozó kutatók felhagytak egy olyan módszer keresésével, amely minden feltételt kielégít és figyelmüket az egyes feltételek jól értelmezhető lazításával kapott eljárások kidolgozására fordították.

Mivel a tétel szerint k teljes előrendezés információtartalma nem elegendő ahhoz, hogy egyértelműen meghatározzon egy aggregált teljes előrendezést, kétféle kiindulás lehetséges:

- extra információt kell megadni,
- a teljes előrendezésnél kevésbé gazdag struktúrákat kell megengednünk.

9.3 Szavazási eljárások

Nézzük meg most azt az esetet, amikor az egyének egy választási eljárásba úgy lépnek be, hogy preferenciáik egyértelműen meghatározott sorrendre vezettek — azaz már minden egyén megoldotta saját rangsorolási problémáját, s most csak arról van szó, hogy ezekből a sorrendekből egy csoportsorrendet kell képezni.

A továbbiakra nézve fontos megjegyzés, hogy az egyének a tárgyalásra kerülő eljárásokban nem változtatják preferenciasorrendjüket, azaz mindig annak alapján szavaznak. (Külön probléma a nem-manipulálható szavazási rendszerek kialakítása, amelyek "megfelelő" eredményt adnak akkor is, ha az egyének az általuk elvárt végeredmény érdekében a szavazásban nem a preferencia sorrendjük alapján, hanem kedvenc jelöltjük megsegítése érdekében akarnak szavazni. Ezzel a problémával most nem foglalkozunk.)

Tegyük fel, hogy egy 60 fős testület valamilyen posztra ki akarja választani a legalkalmasabb jelöltet. *Condorcet* egyik híres példájában a, b és c a jelöltek, s a 60 fő preferenciasorrendje az alábbi:

$aPcPb$	23 fő
$bPcPa$	19 fő
$cPbPa$	16 fő
$cPaPb$	2 fő

Első eljárásunkban mindenkinek legyen egyetlen szavazata, amelyet az általa legjobbnak tartott jelöltre ad le. A szavazatok összeszámlálása után az alábbi sorrend alakul ki:

a:	23 fő
b:	19 fő
c:	18 fő

Az **egyszerű többségi elv** alapján tehát az a jelölt nyeri el a pozíciót.

Ha **abszolút többséget** szeretnénk elérni, akkor ismételt fordulókra van szükség, például úgy, hogy mindig kiejtjük az utolsó helyezettet. Példánkban a c kiejtése után második fordulót rendezünk a és b között, amelyet **b** nyer meg, hiszen 35-en szavaznak rá, míg a-ra csak 25-en.

Mondhatjuk azt, hogy ezek a szavazások nem használták ki eléggé a rendelkezésre álló információkat, és ezért olyan szavazási eljárást konstruálunk, ahol minden jelölt megküzd egymással, azaz **páros összehasonlításokat** végzünk.

A páros összehasonlítások végeredménye:

$$aPb: 25 \qquad aPc: 23 \qquad bPc: 19$$

$$bPa: 35 \qquad cPa: 37 \qquad cPb: 41$$

azaz $cPbPa$, tehát most **c** nyeri el a pozíciót.

Melyik a helyes végeredmény? Ezt a kérdést nem tudjuk megválaszolni, hiszen itt is érvényes az Arrow-féle lehetetlenségi tétel. Bármelyik szavazási eljárást választhatjuk!

Ha mégis a páros összehasonlítást találnánk szimpatikusnak, az alábbi problémába ütközünk. Változtassuk meg a preferenciaprofilokat egy kissé:

$aPcPb$	23 fő
$bPcPa$	17 fő
$bPaPc$	2 fő
$cPaPb$	10 fő
$cPbPa$	8 fő

Ha most is elvégezzük a páros összehasonlításokat, akkor azt kapjuk, hogy

$$aPb: 33 \qquad aPc: 25 \qquad bPc: 42$$

$$bPa: 27 \qquad cPa: 35 \qquad cPb: 18$$

azaz aPb, bPc és cPa — nem tudunk a jelöltek közül választani, mivel a végeredmény nem tranzitív.

A probléma feloldását többféleképpen is megkísérelhetjük, s ezzel újabb szavazási eljárásokat definiálunk.

Condorcet a maximin elvet alkalmazta. Tekintsük azt a táblázatot, ahol mindenki minden páros összehasonlítási eredményével szerepel:

	a	**b**	**c**	**min**
a	–	33	25	25
b	27	–	42	27
c	35	18	–	18

Azt tekintjük győztesnek, akinek a legrosszabb eredménye a legjobb, azaz b$PaPc$ a sorrend.

Condorcet kortársa volt **Borda**, akinek eljárásában a legutolsó helyezett mindenkitől 0 pontot kap, az utolsó előtti 1-et és így tovább: az első helyezett $n-1$ pontot kap. A **helyezési pontokat** összeadva kapjuk meg a végső sorrendet. Példánkban

a: 58 pont
b: 69 pont
c: 53 pont

azaz itt is b$PaPc$ a végső sorrend.

A Borda-féle eljárást **eliminálással** is végezhetjük, azaz a legutolsó helyezettet törölve a maradék jelöltre mindig újra elvégezzük az eljárást. Példánkban a c törlése után az aPb sorrend a végeredmény.

Végül egy másféle gondolatmeneten alapuló módszer, amelyet **Cook és Seiford** alakított ki. Tekintsük azt a mátrixot, amelyben az i-edik sor j-edik eleme azt jelenti, hogy az i-edik jelölt j-edik helyezésével szemben hányszor történik ellenkező értelmű szavazás:

	1	2	3
a	62	48	58
b	51	29	69
c	67	43	53

A táblázat bal felső sarkában lévő elem például úgy adódik, hogy bPa 27 esetben és cPa 35 esetben teszi lehetetlenné, hogy az "a" az 1. helyre kerüljön. Az "a" 2. helyezését 48 preferencia sorrend teszi lehetetlenné. Végül a 3. helyezés lehetetlen, ha az aPb és aPc teljesül, amely 33+25 = 58 páros összehasonlításból adódik.

Minden jelöltet arra a helyre kell tennünk, amelyet akkor kapunk, ha az ehhez a sorrendhez tartozó teljes ellenzés a minimális. Könnyen belátható, hogy a fenti mátrixon értelmezett hozzárendelési feladat megoldása éppen a kívánt eredményt adja. Az így kapott sorrend: a$PbPc$.

9.4 Irodalomjegyzék a 9. fejezethez

ARROW, K.J. [1951]: *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York

BORDA, J.-C. [1781]: Mémoire sur les électiones au scrutin, *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, Paris

CONDORCET, M. [1785]: *Essai sur l'Application de l'Analyse á la Probabilité des Décisions Rendues á la Pluralité des Voix*, Paris

COOK, W.D.-SEIFORD, L.M. [1978]: Priority ranking and consensus formation, *Management Science*, 24, 1721-1732.

HWANG, C.L.-LIN, M.J. [1987]: *Group Decision Making under Multiple Criteria*, Springer, Berlin-New York

10. Fejezet

Rangsor módszerek

A véges számú alternatívát véges számú kritérium alapján értékelő módszerek közül azok, amelyek többtényezős értékelő vagy hasznossági függvényeket konstruáltak, vagy azokra visszavezethetőek voltak, kardinális információkat használtak fel. A döntéshozó számára ennél egyszerűbb az, ha csak ordinális információkat — rangsorokat — kell megadnia. Ebben a fejezetben a rangsorokra épülő döntési módszerek közül mutatunk be néhányat.

10.1 Rangsoroló eljárások egyes tulajdonságai

A 9.3 fejezetben a szavazási eljárások tárgyalásakor azt hangsúlyoztuk, hogy a döntéshozó preferenciái a különböző szavazási procedúrákban is megjelennek és olyan eseteket elemeztünk, ahol a preferenciák stabilitását magától értetődőnek tekintve a szavazási elv meghatározása és tulajdonságai képezik a vizsgálat tárgyát. Ebben a fejezetben a klasszikus szavazási rendszereket segédeszközként használjuk fel arra, hogy a többtényezős döntési problémákat új megközelítésben tárgyalhassuk.

Tekintsük azt a feladatot, ahol n alternatívát k kritérium szerint jellemzünk, s a legjobb alternatívát szeretnénk kiválasztani. Már az eddigiekben is találkozhattunk olyan módszerekkel, ahol a végeredmény nem feltétlenül a legjobb alternatíva kijelölése volt, hanem az alternatívák egy teljes rangsorát tudtuk az eljárás végén megadni (pl. súlyozásos módszerek, egyes outranking eljárások).

Használjuk fel ebben a feladatban azokat az eszközöket, amelyeket a szavazási eljárásoknál vezettünk be. Ez úgy történhet, hogy a többtényezős feladatban az egyes tényezőket "szavazóknak" tekintjük, s az egyes szavazók (a tényezők) az alternatívákra vonatkozó rangsorokat jelenítenek meg. A továbbiakban azután a feladat megoldását ezeknek a rangsoroknak (szavazásoknak) az eredményeire építjük, s az eljárások "jóságára" vonatkozó kritériumokat is a szavazási eljárások területéről kölcsönözzük.

Condorcet példáján keresztül vezettük be az egyszerű többségi szavazás fogalmát, amelyet több jelölt esetén a páros összehasonlításoknál is alkalmaztunk. Nevezzük **Condorcet nyertesnek** azt az alternatívát, amelyik az összes többi alternatíva ellen győztesen kerül ki a páros összehasonlításokból. Ha viszont az a célunk, hogy a legrosszabb alternatívát kiejtsük a jelöltek közül, akkor hasznos a **Condorcet vesztes** fogalma: azt az alternatívát nevezzük így, amelyik minden páros összehasonlításban alulmarad a többiekkel szemben.

Vezessük be még a **Condorcet rendezés** fogalmát. Az alternatívák olyan rendezését nevezzük így, amelyikben mindegyik alternatíva megnyeri a mögötte levőkkel történő páros összehasonlítást. Ha egy alternatívahalmazra vonatkozóan a Condorcet rendezés létezik, akkor a rendezésben első helyen álló alternatíva szükségképpen Condorcet nyertes, az utolsó helyen álló alternatíva pedig Condorcet vesztes.

Mint ahogyan azt a 9.3 fejezet példáiban láttuk, a Condorcet rendezés nem mindig létezik. Ugyanígy igaz, hogy egy alternatívahalmazra vonatkozóan nem mindig találunk Condorcet nyertest vagy vesztest. Ha viszont a Condorcet nyertes létezik, akkor több vonzó tulajdonsággal is rendelkezik. Az egyik ilyen tulajdonság a többségi elvből következik: általában elfogadhatónak tartjuk azt, ha valakit a többség választ meg. A Condorcet nyertes ezenkívül még azzal a kellemes tulajdonsággal is bír, hogy bármely kihívóját képes egy párharcban — a többségi elv alapján — legyőzni.

Tekintsünk egy olyan példát, ahol 5 alternatívát vizsgálunk 7 szempont szerint. Az egyes alternatíváknak az egyes szempontok szerint történő értékelését, ahol a nagyobb érték jobbat jelent, mutatja a *10.1 táblázat*.

	1	2	3	4	5	6	7
A	1.9	2.4	1.2	6.4	5.3	3.2	5.1
B	2.6	2.6	1.2	7.1	5.2	4.2	6.1
C	1.8	3.4	1.7	7.3	6.1	6.1	8.5
D	2.4	3.5	1.6	7.3	5.9	6.4	8.3
E	2.2	2.9	1.5	7.3	5.4	4.5	6.3

10.1 táblázat

A fentebbieknek megfelelően a táblázat adatait használjuk fel arra, hogy az egyes szempontokat szavazóknak tekintve az alternatíva-rangsorokat megállapítsuk! A rangsorokat a *10.2* táblázat tartalmazza.

	1	2	3	4	5	6	7
A	4	5	4.5	5	4	5	5
B	1	4	4.5	4	5	4	4
C	5	2	1	2	1	2	1
D	2	1	2	2	2	1	2
E	3	3	3	2	3	3	3

10.2 táblázat

A táblázatból az is látható, hogy nem lehet mindig egyértelmű rangsorokat megállapítani: holtverseny is lehetséges. Példánkat szándékosan úgy választottuk meg, hogy a holtversenyek esetére érvényes szabályokat is bemutathassuk általa. A 3. és 4. szempont szerinti értékelésekben vannak a holtversenyek. A 3. szempont szerint holtverseny van a 4. és 5. helyen az A és B alternatíva között. Ilyenkor a köztes rangszámot osztjuk ki az alternatíváknak, azaz esetünkben az A és B egyaránt 4.5 rangszámot kap. A 4. szempont szerint hármas holtverseny van a C, D és E alternatíva között az első három helyen: mindhárom alternatíva a 2 rangszámot kapja.

Nézzük meg, hogy példánkban van-e Condorcet nyertes vagy Condorcet vesztes! Vegyük az egyes alternatívák páros összehasonlításait. Ha a sorban jelzett alternatíva valamely szempont szerint rangszámban előbb volt, mint az oszlopban jelzett alternatíva (nyert az adott összehasonlításban), akkor 1 értéket kap, ha hátrébb volt (vesztett az összehasonlításban) akkor -1 értéket kap. Az összes páros összehasonlítás nettó eredményét tartalmazza a *10.3 táblázat*. Az első sor második elemét tehát úgy kapjuk, hogy az A és B összehasonlításban az A alternatíva 5 szempont szerint rosszabb volt, mint a B (ezek az első, második, negyedik, hatodik és hetedik), vagyis kap -5 pontot, egyetlen szempont szerint volt jobb (ez az ötödik), tehát itt kap 1 pontot, míg a harmadik szempont szerinti rangsor egyenlőség nem hoz pontot sem A-nak, sem majd B-nek. Összegezve a pontokat megkapjuk az első sor második elemét, amely -4. Vegyük észre, hogy a táblázat mátrixa az előállítás módja miatt negatívan szimmetrikus, azaz a második sor első eleme (B összehasonlítása A-val) 4.

	A	B	C	D	E
A	–	-4	-5	-7	-7
B	4	–	-5	-5	-5
C	5	5	–	0	4
D	7	5	0	–	6
E	7	5	-4	-6	–

10.3 táblázat

A táblázat akkor tartalmazna Condorcet nyertest, ha lenne olyan sor, amelyikben minden elem pozitív. Esetünkben ez nem áll fenn, tehát nincs Condorcet nyertes, miközben azt is látjuk, hogy két pályázó is lenne erre a definícióra: a C és a D alternatíva, azonban ők az egymás elleni mérkőzésben holtversenyben vannak, tehát egyiküket sem tekinthetjük Condorcet nyertesnek.

Létezik viszont Condorcet vesztes: az A alternatíva, amelynek sora kizárólag negatív elemeket tartalmaz (természetesen most és az előbb a diagonális elemeket nem tekintettük). Mindebből következően a példában nem tudunk Condorcet rendezést felállítani.

Miért vizsgáljuk a Condorcet rendezés és a Condorcet nyertes létezését? Ha ugyanis egy adott problémára vonatkozóan létezik a Condorcet nyertes, illetve a Condorcet rendezés, és egy adott rangsoroló módszer nem a Condorcet nyertest hozza ki első helyen, illetve az adott módszer szerint kapott rangsor nem egyezik meg a Condorcet rendezéssel, akkor ezt a rangsoroló módszer hiányosságának tekinthetjük — természetesen csak azon az intuitív alapon, amelyet ezen fogalmak bevezetésekor vonzó tulajdonságként írtunk le.

A Condorcet nyertes fogalma klasszikusnak számít. Bemutatunk azonban egy másik tulajdonságot is, amelyet *Arrow* és *Raynaud* [1986] definíciója nyomán *Lansdowne* [1996] általánosított. Ezek a növekvő sorozat-függetlenség és a csökkenő sorozat-függetlenség. **Növekvő sorozat-független** egy relatív rangsor akkor, ha a legjobb p alternatíva rangsora csak ezen alternatívák függvénye, akármilyen értéket is vesz fel p az 1 és n között. Másként fogalmazva ez azt jelenti, hogy az első p-nek rangsorolt alternatíva relatív rangsorának változatlannak kell maradnia akkor is, ha bármely egyéb alternatívát törlünk az összehasonlítandó alternatívák listájáról. A **csökkenő sorozat-függetlenség** a legrosszabb p alternatívára mondja ki ugyanezt.

Újfent azt mondhatjuk, hogy ez a tulajdonság rendkívül vonzónak tűnik, hiszen elfogadhatónak látjuk azt az elvet, hogy a hátrébb rangsorolt alternatívák kiejtése (vagy bevonása) ne változtassa meg az elöl rangsoroltak egymás közötti rangsorát. Ha például alternatíváinkat a hasznossági függvények alapján kapott értékek szerint rangsoroljuk, akkor mindkét függetlenségi elv teljesül. Az AHP viszont (eredeti formájában) nem elégíti ki ezt az elvet, mivel új alternatívák bekapcsolásakor előfordulhat rangsor-váltás.

Ugyanazt mondhatjuk azonban most is, mint az előzőekben: egy rangsoroló módszer értékelésekor a függetlenségi elvek teljesülése pozitív módon befolyásol bennünket. Ezek után nézzünk meg néhány rangsoroló eljárást.

10.2 Borda módszere

Ezt a módszert a szavazási problémák tárgyalásakor már megismertük. *Borda* [1781] módszere a következő: adjunk $n-1, n-2, \ldots, 0$ pontot minden szempont szerint az elsőnek, a másodiknak, és így tovább, ..., az utolsónak rangsorolt alternatívának, ezeket a pontokat adjuk össze, és az lesz a nyertes, akinek a legmagasabb összpontszáma van. (Holtverseny esetén osszuk el a pontokat.)

Borda módszeréről a szavazási eljárások művelői nagyon sok jó tulajdonságot mutattak ki. A pontozásos rangmódszerek közül például optimális abból a szempontból, hogy a legkevesebb szavazási paradoxont produkálja (*Saari* [1980]). Nézzük meg a Borda számlálás eredményét mintapéldánkban (*10.4 táblázat*).

	1	2	3	4	5	6	7	Összesen
A	1	0	0.5	0	1	0	0	2.5
B	4	1	0.5	1	0	1	1	8.5
C	0	3	4	3	4	3	4	21
D	3	4	3	3	3	4	3	23
E	2	2	2	3	2	2	2	15

10.4 táblázat

A Borda módszerrel kapott rangsor tehát $DCEBA$.

Nézzük meg, hogy a Borda módszer teljesíti-e az előzőekben bevezetett jó tulajdonságokat. Megmutatható, (*Fishburn-Gehrlein* [1980]), hogy a Borda módszer a Condorcet nyertest nem mindig teszi az első helyre. Legyen például három alternatívánk és hét értékelő tényezőnk. Három tényező szerint legyen ABC a rangsor, kettő szerint BCA, egy szerint BAC és végül egy szempont szerint a rangsor legyen CAB. A Condorcet rendezés ebben a példában ABC, míg a Borda módszer eredménye BAC.

Arrow és Raynaud azt is kimutatta, hogy a Borda módszer sem a növekvő, sem a csökkenő sorozat-függetlenség elvét nem teljesíti. Legyen négy alternatívánk és öt értékelő tényezőnk, egyenként az alábbi rangsorokat adva: $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$, $DABC$ és $DCBA$. A Borda módszer a $DCBA$ rangsort adja. Tekintsük most csak az első két helyen rangsorolt alternatívát (azaz töröljük a többit). A Borda módszer erre a két alternatívára a CD rangsort hozza ki, megsértve ezzel a növekvő sorozat-függetlenség elvét (hiszen a négy alternatíva rangsorában a D megelőzte a C-t). Ha kizárólag az AB alternatívákat nézzük, akkor azt látjuk, hogy a csökkenő sorozat-függetlenség is sérül, mivel a két alternatívára szűkített Borda számlálás eredménye az AB rangsor, ellentétben a négy alternatíva esetében kapott BA rangsorral.

10.3 Cook és Seiford módszere

A szavazásokkal foglalkozó fejezetben ugyancsak megismerkedtünk a *Cook-Seiford* [1978] módszerrel, amely az adott rangsor minimális ellenzésének elvére épült, azaz a következőképpen számolt. Tekintsük a

$$d_{ij} = \sum_k |r_{ik} - j| \tag{10.1}$$

mértéket, ahol r_{ik} az i-edik alternatívának a k-adik kritérium szerinti rangszáma. A D távolságmátrix esetünkben a következőképpen épül fel.

Tegyük fel, hogy az A alternatíva (ez most az 1-es indexet kapja) első helyre kerülését vizsgáljuk. A valóságban az első alternatíva a 4., az 5., holtversenyben a 4. és 5., az 5., a 4., az 5. majd újra az 5. helyen van.

$$d_{11} = |(4-1)+(5-1)+(4.5-1)+(5-1)+(4-1)+(5-1)+(5-1)| = 25.5 \quad (10.2)$$

Ugyanilyen módon számolva a D mátrix többi eleme a *10.5 táblázatban* található.

	1. hely	2. hely	3. hely	4. hely	5. hely
A	25.5	18.5	11.5	4.5	2.5
B	19.5	14.5	9.5	4.5	8.5
C	7	6	11	16	21
D	5	2	9	16	23
E	13	6	1	8	15

10.5 táblázat

Könnyen belátható, hogy olyan rangsort keresünk, amely az alternatívákhoz (a táblázat soraihoz) olyan helyezéseket (a táblázat oszlopai) rendel, ahol az adott helyezéshez tartozó ellenzések (a táblázat elemei) összege minimális: ez pedig nem más, mint az adott táblázathoz tartozó hozzárendelési feladat megoldása. Esetünkben a hozzárendelési feladatot megoldva a $CDEBA$ az egyetlen optimális megoldás.

Miközben a Cook-Seiford módszer a felhasznált távolságfogalom révén több axiomatikusan is igazolható jó tulajdonsággal rendelkezik, sem a Condorcet rendezési, sem a sorozat-függetlenségi tulajdonságokat nem teljesíti. A Condorcet rendezéshez alkalmazzuk a következő példát. Legyen 5 alternatívánk hét szempont szerint értékelve az alábbi rangsorokkal adva: $BDEAC$, $DCEBA$, $CDEBA$, $DECBA$, $CDEAB$, $EDCBA$ és $CDEBA$. A Condorcet rendezés $DCEBA$, a Cook-Seiford rendezés azonban a $CDEBA$ rangsort adja.

A növekvő sorozat-függetlenség elve megsértésének bemutatására használjuk ugyanazt a példát, mint amit a Borda módszernél láttunk.

10.4 Bernardo módszere

Bernardo [1977] módszere a rangsorokkal való egyezőség egyetértési szintjét maximálja. Az egyetértési mátrixot a következőképpen definiáljuk. Legyen m_{ij} azoknak a szempontoknak a száma, amelyeknél az i-edik alternatíva a j-edik helyen van. Az így felépített M mátrixot mutatja a *10.6 táblázat*.

	1. hely	2. hely	3. hely	4. hely	5. hely
A	0	0	0	2.5	4.5
B	1	0	0	4.5	1.5
C	3.33	2.33	0.33	0	1
D	2.33	4.33	0.33	0	0
E	0.33	0.33	6.33	0	0

10.6 táblázat

(A holtversenyek esetében arányosan szétosztottuk az adható értéket. Így például a C, D és E alternatívák negyedik szempont szerinti azonosan első helyezése mindegyik alternatívánál 1/3 hozzáadását eredményezte mind az első, mind a második, mind a harmadik helyezésnél.)

Ismét könnyen belátható, hogy a most maximum feladatként képzett hozzárendelési feladat megoldása szolgáltatja a megfelelő sorrendet, ami esetünkben $CDEBA$.

A Bernardo módszer a Cook-Seiford módszerhez hasonlóan sem a Condorcet rendezési, sem a függetlenségi tulajdonságokat nem teljesíti, s ez ugyanazokkal az ellenpéldákkal mutatható be.

10.5 Köhler módszere

Köhler [1978] módszerének bemutatásához tekintsük azt az outranking mátrixot, amit úgy állítunk elő, hogy megszámoljuk: az i-edik alternatívát hány szempont helyezte a j-edik alternatíva elé. Látható, hogy Köhler a "francia iskolához" tartozván a rangsor-módszerek esetére alkalmazza a 6. fejezetben látott nem-klasszikus preferencia rendezési elveket. Példánkban a *10.7 táblázat* tartalmazza az outranking mátrix elemeit.

	A	B	C	D	E
A	–	1	1	0	0
B	5	–	1	1	1
C	6	6	–	3	5
D	7	6	3	–	6
E	7	6	1	0	–

10.7 táblázat

Köhler egy primál és egy duál algoritmust épít fel. A *primál algoritmusban* az r-edik lépésben meghatározza a *minimális* a_{ij} értéket az aktuális outranking mátrix minden *sorára*, majd veszi ezen minimumok maximumát. Ha holtverseny van, akkor tetszőlegesen választ az azonos értékek közül. Azt az alternatívát teszi az r-edik helyre, amely sorhoz a maximális érték tartozott. Ha az eljárás nem fejeződött még be, akkor az éppen rangsorolt alternatívának megfelelő sort és oszlopot törli a mátrixból és folytatja az eljárást mindaddig, amíg erre lehetőség van.

Példánkra alkalmazva Köhler primál algoritmusát, a C és D alternatívákhoz tartozó minimális érték egyaránt 3 és egyben ez a minimumok maximuma. Akár C, akár D kerül az első helyre, az algoritmus a továbbiakban holtverseny nélküli, és így két megoldás van: $CDEBA$ és $DCEBA$.

Köhler *duál algoritmusa* az r-edik lépésben mindegyik *oszlop maximumát* határozza meg, majd veszi ezen maximumok minimumát és az ehhez az oszlophoz tartozó alternatívát az r-edik helyre téve a megfelelő oszlop és sor törlésével halad addig, míg a mátrix ki nem ürül (miközben az egyező minimum értékeket a primál algoritmushoz hasonlóan kezeli.)

Azt látjuk, hogy a duál algoritmus ugyanahhoz a két megoldáshoz vezet, mint amit a primál algoritmus alkalmazása során kaptunk: $CDBEA$ és $DCBEA$ a két sorrend.

A két eljárás minden lépésben törli a már rangsorolt oszlopokat és sorokat, és csak azokat tartja meg, amelyeket még nem rangsoroltunk. Ezáltal a Köhler eljárás definíció szerint teljesíti a csökkenő sorozat- függetlenségi elvet, a növekvőt azonban nem.

Megmutatható (lásd pl. *Arrow-Raynaud* [1986], vagy *Lansdowne* [1996]), hogy ha a rangsorokban nincs holtverseny és van Condorcet nyertes, akkor Köhler algoritmusai is ezt hozzák ki nyertesnek, valamint ha a Condorcet rendezés létezik, akkor a Köhler algoritmusok is ezt a rendezést biztosítják. Bizonyos feltételek teljesülése esetén ez holtverseny esetén is igaz.

10.6 Arrow és Raynaud módszere

Arrow és *Raynaud* [1978] primál és duál algoritmusai nagyon hasonlóak Köhler algoritmusaihoz, azonban a csökkenő sorozat-függetlenségi elv helyett a növekvő sorozat-függetlenségi elvet elégítik ki.

Arrow és Raynaud *primál algoritmusában* az r-edik lépésben meghatározzuk az outranking mátrix *sorainak maximumait*, majd megkeressük ezen maximumok minimumát. (Egyezés esetén tetszőlegesen választunk közülük.) A minimum sorának megfelelő alternatívát az $(n-r+1)$-edik helyre rangsoroljuk, majd töröljük a sort és oszlopot. Ezt az eljárást folytatjuk mindaddig, míg a sorok és oszlopok el nem fogytak.

A *duál algoritmus* az r-edik lépésben az outranking mátrix *oszlopainak minimumát* határozza meg, majd veszi ezen értékek maximumát. A maximum oszlopának megfelelő alternatívát az $(n-r+1)$-edik helyre rangsorolva töröljük a megfelelő sort és oszlopot, majd addig folytatjuk az eljárást, amíg lehetséges.

Példánkban — könnyen ellenőrizhetően — mind a primál, mind a duál algoritmus egyaránt a $CDBEA$ és $DCBEA$ sorrendeket hozza ki végső sorrendeknek.

Érdekeség, hogy az Arrow-Raynaud algoritmusok (ha nincs holtverseny) a Condorcet rendezésnek megfelelően rangsorolnak (amennyiben az létezik), viszont a Condorcet nyertest (ha létezik) nem mindig hozzák ki első helyre. Tekintsük azt a példát, ahol négy alternatívát három szempont szerint rangsorolunk. A szempontok szerinti egyedi rangsorok legyenek rendre: $ADBC$, $BDCA$ és $CDAB$. A Condorcet nyertes a D alternatíva, de az outranking mátrixot felírva azt látjuk, hogy mind a primál, mind a duál algoritmus helyezheti a D alternatívát az utolsó helyre.

10.7 Irodalomjegyzék a 10. fejezethez

ARROW, K.J.- RAYNAUD,H. [1986]: *Social Choice and Multicriterion Decision-Making*, The MIT Press, Cambridge, MA.

BERNARDO, J.J. [1977]: An assignment approach to choosing R&D experiments, *Decision Sciences*, 8, 489-501.

BORDA, J.-C. [1781]: Mémoire sur les électiones au scrutin, *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, Paris

CONDORCET, M. [1785]: *Essai sur l'Application de l'Analyse á la Probabilité des Décisions Rendues á la Pluralité des Voix*, Paris

COOK, W.D.-SEIFORD, L.M. [1978]: Priority ranking and consensus formation, *Management Science*, 24, 1721-1732.

COOK, W.D.-SEIFORD, L.M. [1982]: On the Borda-Kendall consensus method for priority ranking problems, *Management Science*, 28, 621-637.

FISHBURN, P.C.-GEHREIN, W.V. [1976]: Borda's rule, positional voting, and Condorcet's simple majority principle, *Public Choice*, 28, 79-88.

KÖHLER, G. [1978]: *Choix Multicritére et Analyse Algébrique des Données Ordinales*, Thesis of the 3rd cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France

LANSDOWNE, Z.F. [1996]: Ordinal ranking methods for multicriterion decision making, *Naval Research Logistics*, 43, 613-627.

SAARI, D.G. [1980]: *Geometry of Voting*, Springer, New York

STAHL, J.-TEMESI, J. [1991]: Application of group decision methods for tender evaluation, *PU.M.A. (Pure Mathematics and Applications)*, Institute of Mathematics and Computer Science, Budapest University of Economics, 1, 15-22.

11. Fejezet

Döntéstámogatási eljárások

Ebben a részben térünk ki a pótlólagos információnak a döntésekben játszott szerepére, s az interaktív eljárások bemutatására. A döntési módszertannal foglalkozó könyvek nagy része nem foglalkozik részletesebben a döntési feladatok tipológiájával. Mi ebben a fejezetben részletesen kifejtjük, hogy milyen típusú feladatok megoldását várhatjuk el a könyvben tárgyalt módszerektől, s milyen előnyei és korlátjai vannak a módszerek alkalmazásának. Bemutatunk egy olyan döntéstámogató keretet, amely a különböző típusú feladatoknál eligazítást nyújt a legmegfelelőbb módszer megtalálására és az eredmények helyes elemzésére.

11.1 A pótlólagos információ bekapcsolása

Nyilvánvaló, hogy mivel a Pareto-optimális (nem-dominált) megoldások matematikai értelemben egymással definíció szerint egyenértékűek, ezért egy kompromisszumos megoldásban megtestesülő *döntéshozatalhoz* **pótlólagos információra** van szükség. A pótlólagos információval a probléma gazdájának, a döntéshozónak kell rendelkeznie, s ezáltal ez csak tőle szerezhető be: **a többcélú döntési probléma megoldásához mindig szükség van a döntéshozótól származó vagy a döntéshozóra vonatkozó információra.**

Ha az információ a **döntéshozótól származik**, a döntési probléma megoldása kétféle szemléletben is elvégezhető. Az egyik lehetséges út az, hogy a ***megoldást két, egymástól elkülönülő lépésben bonyolítjuk le:***

1. Előállítjuk a Pareto-optimális megoldások halmazát.

2. A pótlólagos információk segítségével kiválasztunk egyet ebből a halmazból.

Az is kivitelezhető, hogy ***a pótlólagos információ megadása nem válik el a megoldási folyamattól.*** Három, egymástól különböző megközelítést sorolunk fel:

1. A Pareto-optimális halmaznak egy megfelelő részhalmazát előállítva, azt a pótlólagos információk segítségével fokozatosan egyetlen pontra szűkítjük.

2. Iteratív módon haladunk egy induló efficiens pontból a másikba, értékeltetve ezeket a Pareto-optimális pontokat a döntéshozóval mindaddig, míg a keresési eljárás le nem áll.

3. A megoldó módszerbe beépítjük a pótlólagos információt, s az így kapott (általában egyetlen célfüggvényes) feladatot megoldva egyetlen efficiens pontot kapunk, ami egyben a döntési probléma megoldása.

A többcélú programozási feladatban a

- súlyozásos módszer, a
- lexikografikus eljárás, a
- korlátok módszere és a
- kompromisszumprogramozás elve

egy-egy efficiens megoldáshoz vezet, amelyet tekinthetnénk a döntési probléma megoldásának is. Mivel azonban az eljárások paraméteresek, nem magától értetődő, hogy milyen

- súlyok,
- célprioritások,
- korlátok,
- távolságfüggvények

szerint adjuk meg a kompromisszumos megoldást. Ha a feladat véges elemszámú alternatívát tartalmaz, szintén felmerül súlyok, prioritások, referenciapontok alkalmazása - a programozási eljárásokkal analóg módon.

Nagyon ritka azonban, hogy a döntési probléma megoldását direkt módon a fenti módszerekkel kezelnénk. Ennek oka az, hogy a módszerekben megjelenő paraméterek értékét és a döntéshozó preferenciáit kifejező döntési függvények paramétereit kívánjuk egymásnak megfeleltetni, s ez a megfeleltetés a döntéshozóra vonatkozó eltérő feltevések esetén különböző.

Ha a pótlólagos információ a **döntéshozóról** áll rendelkezésre, akkor megkísérelhetjük egy olyan axiomatikus eljárás kidolgozását, amely a döntéshozó általános tulajdonságaira, elvárásaira, az általa követett, de mindenki által elfogadott vagy elfogadható szabályokra épít. Ez az axiomatikusan felépített eljárás is kérhet közvetlen információkat a döntéshozótól, de általában inkább úgy tekintjük, hogy a döntési probléma egyedi, szubjektív elemei beépültek a feltételi rendszerbe vagy a döntési mátrixba, s a kiértékelés automatikusan történik.

Az axiomatikus felépítés általában háromféle biztosítékot tartalmaz: a módszer racionális voltára vonatkozókat (pl. a lényegtelen alternatíváktól való függetlenség, mértékegységtől való függetlenség), a végső megoldásra vonatkozókat

(pl. Pareto-optimalitás) és a döntéshozó magatartására vonatkozókat (pl. teljes preferenciarendezés létezése, konzisztencia). A különböző referencia-elven működő eljárások tartoznak például ebbe a kategóriába.

Az elterjedt módszerek többségénél az információ a döntéshozótól származik, miközben az egyéni vagy elvont döntéshozóról nincsenek axiomatikusan megalapozott feltevéseink.

(Megjegyezzük azonban, hogy a döntéshozó magatartására vonatkozó, a háttérben mindig meghúzódó alapfeltevések egyike, hogy a döntéshozó nem irracionális, azaz nem véletlenszerű, ad hoc módon közelít problémája megoldásához. Ez a feltevés természetes és mindössze annyit jelent, hogy érdemes a problémamegoldás preferenciamodellezésen alapuló vonulatával foglalkozni. A racionalitás (vagy a korlátozott racionalitás) hiányában a döntéshozás vizsgálata a pszichológia és a szociológia egyes területeinek privilégiumává válna.)

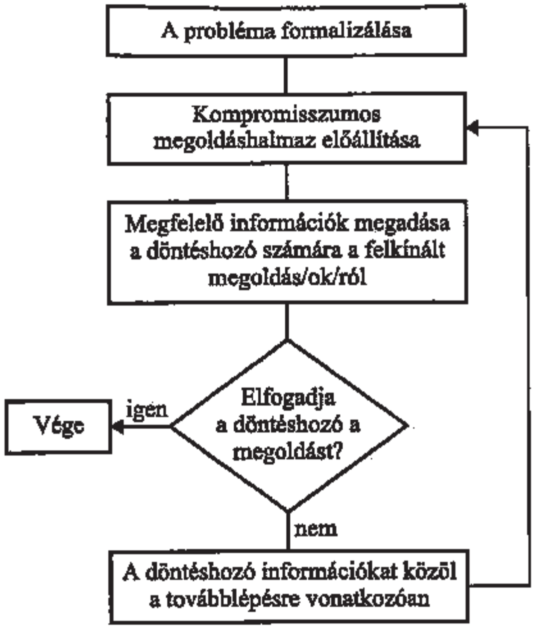
Lényeges kérdés azonban az, hogy milyen módon érvényesül ez a racionalitás: leírható, operacionalizálható-e? A döntéshozói magatartás vizsgálatának könyvtárnyi irodalma van, s a döntéstudománnyal foglalkozó szakmai folyóiratok is feloszthatók aszerint, hogy a magatartás-elméleti, szervezetelméleti aspektusokat, vagy a módszertani aspektusokat helyezik előtérbe.

11.2 Interaktív eljárások

A döntési feladatok megoldásának magától értetődő módja lenne az, ha a döntéshozó közvetlenül jelen lehetne a folyamatban. A 80-as évekig azonban ennek gyakorlati akadályai voltak, ezért a döntéshozó legtöbbször a folyamat elején vagy végén nyilvánította ki véleményét, adta meg a szükséges információkat. Bár ebben az időben már megjelentek azok a módszerek, amelyek iteratív felépítésüknél fogva a döntéshozóval való párbeszédet követeltek volna meg, az alkalmazásoknál ez legtöbbször úgy zajlott le, hogy a nagyteljesítményű számítógépen lefutott egy számítási szakasz, az eredményt megmutatták a döntéshozónak (vagy a döntéstámogató szakember helyettesítette őt, némileg felgyorsítva a folyamatot), s az ő válasza révén elkezdődhetett egy újabb számítási szakasz, vagy befejeződött a megoldás.

Az interaktív módszerek felvirágzása, s a régebben kidolgozott, inkább csak elméletinek tekintett módszerek reaktiválása a nyolcvanas évek második felére tehető, amikor már a személyi számítógép nyújtotta lehetőségek egyetlen napra vagy órákra zsugorítják az eljárás lebonyolítását.

Az interaktív eljárások a *11.1. ábrán* látható egyszerű sémát követik:



11.1. ábra

11.3 Döntéstámogatás

A döntési probléma megoldásánál egy olyan modellkeretre van szükség, amelyik nem csak a döntéshozatali folyamat egyik lépését, a konkrét döntési algoritmust támogatja, hanem a teljes döntési folyamatot. Mi tartozzon ebbe a döntéstámogató rendszerbe?

Egyéni döntéshozatal esetén a rendszernek a döntéshozót kell a középpontba állítania és minden lehetőséget megadni, hogy jobban megismerhesse a problémát magát és saját viszonyát a feladatban megfogalmazott célokhoz, kritériumokhoz. Ezáltal a döntéstámogató rendszer egy **tanulási folyamatot** segít, amely azzal kezdődik, hogy a döntéshozó először alaposan végiggondolhatja a döntésbe bevont alternatívák és kritériumok körét.

A döntéstámogató rendszer tehát az alábbi alrendszereket tartalmazza:

Alternatívák generálása. Biztosítani kell, hogy a szóbajöhető változatok mindegyike valóban bekerüljön a rendszerbe. Ez azt jelenti, hogy a programozási feladatnál a feltételi rendszer konstruálását is át kell gondolnia a döntéshozónak, esetleg lehetőséget biztosítani neki, hogy a feltételi rendszer által meghatározott döntési halmazról információkat szerezzen. Véges számú alternatívát tartalmazó feladatoknál a rendszernek kevesebb lehetősége van új alternatívák bevonásának

segítésére. Itt inkább a meglévő alternatívák szűrése, a dominált alternatívák kiemelése lesz a cél.

Kritériumok generálása és elemzése. Többcélú feladatoknál ez az egyedi célfüggvényekkel végzett vizsgálatokat tartalmazhatja. Véges feladatoknál ez a blokk rendkívül lényeges és fontos feladatot lát el. A cél az, hogy a rendszer ne csak regisztrálja, hanem elemezze is a kritériumokat abból a szempontból, hogy mennyire felelnek meg az 1. fejezetben megfogalmazott követelményeknek.

Adatrendszer előállítása. Nem csak előállítani, hanem elemezni is kell az adatrendszert. A döntési feladat megoldásában sokat segíthet az adatok előzetes statisztikai elemzése pl. függetlenségi vizsgálatok, entrópiaszámítások végezhetők, adattranszformációkra kerülhet sor. Látható, hogy az alrendszerek összefüggései miatt a kritériumok generálása után vissza kell térni az alternatívákhoz, s csak ezután következik a megoldó algoritmus elindítása.

Megoldó algoritmus, a pótlólagos információk megadása. A módszer — mint láttuk — interaktív is lehet, tehát a megoldási folyamatban szükség van a döntéshozó jelenlétére és válaszaira.

Érzékenységvizsgálat. A rendszert egy érzékenységvizsgáló, a megoldásokat elemző modul zárja le. Az elemzés legtöbbször csak a megoldó algoritmus paramétereiben bekövetkező változások hatásait vizsgálja, de visszatérhet az alternatívalista vagy a kritériumlista módosítására is.

A csoportos döntéseknél kétféle megoldás képzelhető el. Az egyik esetben *egyéni lépések és egyeztetések* folyamatából alakul ki a végeredmény. Az egyeztetés szinte tetszőleges helyeken szakíthatja meg a rendszer futását, ezáltal különböző típusú megoldási folyamatok generálhatók. Például az alternatívalista és a kritériumlista generálása egyénileg történik, s a rendszeren kívül folyik egy egyeztetési folyamat, majd az egyeztetett listákkal megindul az egyéni kiértékelés, amelyet az *egyéni értékelések aggregálása* zár le. Ettől némileg eltér az a megoldás, ha az egyedi megoldások lefuttatása után csoportos érzékenységvizsgálat is végezhető, míg egy közösen generált megoldásban a csoport *konszenzusra* nem jut.

Egy másik, a számítógépes hálózatok fejlődésének mai fokán már kivitelezhető megoldás az *on-line felépítés:* a döntéshozók egymással állandó kapcsolatban vannak, kommunikálnak, a rendszer minden lépésben segíti őket egyetértésre jutni (pl. közli velük egyet nem értésük mértékét, vagy kölcsönösen elfogadható kompromisszumokat ajánl). Ezen a módon elkerülhetők az aggregáció elvi problémái.

11.4 A döntési feladatok egy tipológiája

Eltérő karakterisztikájú döntési problémákat jelentenek a

- fogyasztói döntések,
- társadalmi döntések,
- szakértői döntések,

még akkor is, ha *a modellezés során többcélú döntési problémaként fogalmazódtak meg.*

A következőkben az egyes típusok leglényegesebb különbségeit foglaljuk össze.

Az egyének fogyasztói döntéseinél (*consumer choice*) a klasszikus mikroökonómiai megközelítés egybeesik a döntéselemzés klasszikus szemléletével, amely a döntéshozó szubjektuma révén a fenti három tényezőt teljes kölcsönhatásban kezeli. Ebbe a körbe tartoznak a hétköznapi vásárlási döntések (consumer choice), a márkaválasztás (brand- choice), de ugyanitt szerepeltethetjük a magánember egyéb tipikus döntési szituációit is: lakást, állást, férjet vagy feleséget választ. (Lásd az 1. fejezet példáját.) Egyes esetekben - ismét csak a mikroökonómiával párhuzamosan - tekinthetjük úgy, hogy a háztartás, a család működik egységként, s dönt a gyerek iskoláztatásáról, autóvásárlásról, nyaralásról, stb.

Ezeknek a döntési szituációknak egyik sajátossága a sok, néha áttekinthetetlen számosságú alternatíva explicit vagy implicit jelenléte, a több, egymásnak akár ellentmondó döntési szempont, kritérium.

Osztályozásunk szempontjából ezeknek a szituációknak az a sajátja, hogy megoldásuk kizárólag az egyén, a szubjektív individuum szemszögéből vizsgálható. Tekintsünk egy olyan vásárlói döntési szituációt, ahol az alternatívák valamilyen szempontból adottak, s az egyszerűség kedvéért azt is feltehetjük, hogy egy olyan kritériumlistát készítettünk, amely a döntés elé állított személyek kritériumlistáinak uniója. Tegyük fel, hogy az alternatívák száma 100, s legalább száz döntéshozónk is van. Kérjük meg az egyéneket, hogy válasszanak egy olyan terméket, amelyik számukra a legjobb. Kérdésünk az, hogy van-e valamiféle elvárásunk a száz döntéshozó végső döntéseit illetően?

Mivel minden egyes döntéshozót a saját ízlése, neveltetése, vallása, tapasztalatai, stb. által kialakult preferenciái vezérelnek, s ezekre vonatkozóan semmilyen megkötés nincsen (egyeseket a legextrémebb kívánságok is irányíthatnak) nem vagyunk meglepve azon, ha akár mind a száz döntéshozó más-más alternatívát választ. De ha például a döntéshozók valamilyen szoros közösség tagjai, ahol az illető termékkel kapcsolatban elvárások, tradíciók, előítéletek jelenhetnek meg a preferenciákban, akkor azon sem vagyunk meglepve, ha a száz döntéshozó mindössze két vagy három alternatívát részesít előnyben.

A lényeg az, hogy a döntés valóban és teljes mértékben szubjektív: ha vannak is benne társadalmi elvárások, azok is az egyéni preferenciákon keresztül érvényesülnek. *A döntéshozónak nincs "felelőssége"*: saját kárán tanul, nyer vagy veszít.

Ha egy egyéni döntést támogatni akarunk, akkor elsősorban azzal tudunk a döntéshozónak segíteni, ha "saját maga megtanulásában" segítjük.

Van-e elvárt alternatívalista, vagy kritériumlista? Nincs ilyen. A döntéshozó szabad belátása alapján dönt ezekről, a rendszer legfeljebb figyelmeztetheti a halmozódásokra, inkonzisztenciákra.

Mi a döntés jóságának mértéke? A döntésnek összhangban kell lennie a döntéshozó preferenciáival, s ez akkor van így, *ha a döntéshozó elégedett az eljárás végeredményével.*

Követelmény-e, hogy különböző megoldási módszerek azonos alternatívára vezessenek ugyanazon döntéshozó ugyanazon problémájának megoldása esetében? Az egybeesést csak akkor követelhetjük meg, ha a probléma modellezése azonos elven történt, s a döntéshozó preferenciái explicit módon is meghatározhatók. Minden egyéb esetben ugyanis a modellek különbözőségéből és a döntéshozó nem tökéletes információiból adódhatnak eltérések. Melyik megoldást fogadjuk el ilyenkor? Természetesen azt, amelyiket a döntéshozó. Jelenti-e ez azt, hogy a más eredményre vezető módszer nem volt jó? Nem, legfeljebb annyit, hogy a konkrét esetben a módszer mögött levő modell-feltételezések nem voltak adekvátak a problémával. Megeshet, hogy egy másik esetben, vagy egy másik döntéshozóval ez a módszer (és modellezés) a megfelelő.

Az egyéni döntéseknél tehát megengedhető a matematikailag tiszta, előfeltételezéseit megfelelően interpretáló módszerek sokaságának létezése, s bele kell törődnünk abba, hogy sem univerzális módszer, sem egyetlen döntés nem létezik.

A döntéstámogató módszerek annál jobbak, minél többre megtanítják a döntéshozót. Az egyik *tanulási vonal* a módszer (a módszer mögött álló feltételezések, a módszerben használt fogalmak) "megtanítása", a végeredmény interpretálásának tisztasága. A másik, ennél talán még fontosabb tanulási vonal a döntéshozó saját preferenciáinak megtanítása, tisztázása. Ha mindez teljesül, akkor *a módszerválasztás ezekben a rendszerekben valóban lehet szubjektív: múljon azon, hogy a döntéshozó milyen információkat tud vagy akar a legkönnyebben megadni.*

A következő csoportba azok a **döntések** tartoznak, **amelyeket az egyének a közösség vagy a társadalom részeként hoznak meg** (*social choice*). Ezek a döntések formailag hasonlítanak a fogyasztói döntésekre, azonban itt már a szituáció maga nem olyan végletesen szubjektív, egyéni. A döntéshozó a közösség vagy társadalom tagjaként, bizonyos felelősséggel hoz döntést, amely nem csak őt, hanem másokat is érint (lásd például az 1. fejezetben a 4. mintafeladatot). Tipikusan ilyen döntések azok, amelyeket az egyén egy politikai testület tagjaként, esküdtként, társadalmi szervezetekben, lakóközösségekben hoz. A döntési szituáció itt is alternatívákat tartalmaz, azonban ezek az alternatívák nem kimondottan a döntéshozó szabad választásának eredményei. Ugyanez a helyzet a kritériumlistával is: ***vannak az adott döntésnél elvárható, "kötelező" kritériumok.***

Bár az ilyen döntési szituációkra a kevés számú alternatíva a jellemző, ismét tegyük fel, hogy száz alternatívával és száz döntéshozóval van dolgunk. Meglepődünk-e azon, ha mindenki mást dönt? Igen. Ezeknél a döntéseknél az esetek zömében vannak favorizált és kullogó alternatívák.

Nem tagadható a szubjektum erőteljes jelenléte, ugyanakkor a szakértői döntések egyes vonásai is megjelennek, azaz a döntéshozónak "kívülről" is kapnia kell bizonyos ismereteket - vagy legalábbis ez a kívánatos.

A döntéstámogató rendszernek tehát ugyanúgy foglalkoznia kell az egyén preferenciáinak feltérképezésével, mint a tőle független tudásbázis kialakításával.

Mi lehet a döntés jóságának mértéke? ***Egy adott problémánál lehetnek bizonyos elvárások,*** azonban a döntés még mindig erősen szubjektív.

A harmadik típus a **szakértői döntés** (*expert choice*). Olyan döntési szituációkról, problémákról van szó, ahol jól meghatározott szakterületen kell bizonyos alternatívák közül választani, mint például az 1. fejezet 5. mintafeladatában. Itt az alternatívák lehetnek teljesen pontosan adottak is, de előfordulhat az ellenkező véglet is: ***a problémamegoldásnak része az alternatívák generálása.*** Viszont ***a kritériumlista*** már egyáltalán ***nem*** olyan ***szabad,*** mint az egyéni fogyasztói döntéseknél. Mivel itt például pénzügyi, befektetési, mérnöki, katonai, orvosi döntésekről van szó, az egyén szerepe a kritériumok összeállításánál aránylag kicsi. Minden szakterületen vannak kötelezően figyelembe veendő szempontok, s vannak olyanok, amelyek hol szerepet játszanak a döntésben, hol nem. Az egyén szabadsága legfeljebb ezek bevételében, vagy kihagyásában nyilvánul meg. Ebből azonnal következik a szakértői döntések támogatásának egyik alapkövetelménye: ***feltétlenül ki kell alakítani azt a tudásbázist, amely az adott problémakörre jellemző,*** s ebbe beletartozhat a kritériumlistára tett ajánlás is.

Míg tehát az egyéni döntéseknél egy üres, vagy egy-két elemet javaslatként tartalmazó kritériumlistát töltünk fel, a szakértői döntésnél a meglévő kritériumlista szűkítéséről vagy bővítéséről lehet szó.

Az egyéni fogyasztói döntések és a szakértői döntések között lényegi különbség az, hogy ha egy adott problémát megold valaki, akkor a fogyasztói döntés esetén egy másik egyén másik választása, a harmadik ettől való eltérése semmilyen gondot nem okoz. ***A szakértői döntéseknél azonban elvárjuk, hogy egy másik, vagy egy harmadik szakértő (vagy szakértői csoport) döntése essen egybe az elsőével,*** s ha ez nem történik meg, akkor azonnal oknyomozásba kezdünk. Ha mindezt az előzőekben citált száz alternatíva-száz döntéshozó példán keresztül tekintjük, akkor azt mondhatjuk, hogy most az a megnyugtató számunkra, minél többen választják ugyanazt az alternatívát. Ha mind a százan, akkor szinte biztosak vagyunk abban, hogy a megoldás "jó".

A döntéstámogató rendszernek tehát azzal kell elsősorban foglalkoznia, hogy a döntéshozót a probléma szakmai kifejtésében segítse. A megoldó módszer má-

sodlagos. Hol van mégis szerepe? Ott, hogy most kevésbé vagyunk elnézőek a különböző módszerekkel kapott különböző eredmények iránt. Tudni szeretnénk, hogy az eltérő eredmények mögött pontosan milyen modellezési eltérések vannak, s ***meg akarjuk találni a probléma számára legmegfelelőbb eljárást.***

A tanulás szerepe ezeknél a feladatoknál ***a szakmai tudásanyag biztosítása,*** és erre csak enyhe hatással lehet a döntéshozó individuuma, egyéni meggyőződése.

	Fogyasztói döntés	**Társadalmi döntés**	**Szakértői döntés**
A döntéshozó felelőssége	nincs	részleges	teljes
Van-e előírt kritériumlista?	nincs	részben	van
A megoldásban felhasznált hasznossági függvény	egyéni	egyéni vagy társadalmi	szakmailag kialakított
Van-e a problémával adekvát módszer?	nincs	általában nincs	adaptációval kialakítandó
Módszer-választás	szubjektív	problémához kötött	problémához kötött
A döntés "jóságának" kritériuma	a döntéshozó elégedettsége	a társadalmi elvárások kielégítése	a szakma ítélete
A különböző módszerek azonos eredményre vezetnek?	nem feltétlenül	kívánatos	igen
Mire szolgál a tanulás?	saját preferenciák megtanulása; a módszer elsajátítása	saját preferenciák vagy társadalmi elvárások felderítése; a módszer elsajátítása	a feladat kibontása, a tudásbázis kialakítása
Érzékenység-vizsgálat szerepe	a tanulás segítése	a tanulás segítése	a megoldás javítása
A csoportos döntés jellemző-e?	nem	igen	igen
A döntéstámogató rendszer lényeges hozzájárulása a döntéshez	a döntéshozó segítése a szubjektív információ megadásában	a döntéshozó problémafel-ismerésének segítése	a tudásbázis alapján folyó konzultáció

11.1. táblázat

Az eddig elmondottaknak egy strukturáltabb formája látható a *11.1. táblázatban.* Az egyes oszlopok a különböző döntéstípusokat jelenítik meg, míg a sorok azokat a kérdéseket teszik fel, amelyek kiemelt jelentőségűek a modellezés és a módszerválasztás fázisában.

Zárjuk le ezt a gondolatmenetet azzal a hasonlattal, miszerint tekinthetjük úgy, hogy az egyes feladatok egy "szubjektivitási skála" eltérő pontjain helyezkednek el. A skála egyik végpontján a fogyasztó szuverén döntései helyezkednek el, ahol egyértelműen és végletesen szubjektív információkat vár a megoldó módszer. A másik végpontot a szakértői döntések jelentik, ahol az információknak csak egy töredék részét jelenti a döntéshozó szubjektív hozzáállása a feladathoz, a döntő hányadot az adott szakterület "kollektív bölcsességéből" kell meríteni - még ha ezt az egyéni szakértő közvetíti is.

(Érdemes megjegyezni, hogy ebben a fejezetben és a 11.1 táblázat fejlécében megjelenő elnevezések nem a "klasszikus értelemben" vett fogyasztói, társadalmi vagy szakértői döntéseket kívánják lefedni, hanem egy szűkített értelmezésben használják ezeket a fogalmakat, azaz *a tárgyalás során mindvégig olyan fogyasztói, társadalmi és szakértői döntésekről van szó, amelyek a döntési feladat modellezése során valamely döntési modellel kezelhetők.*)

11.5 Validálási kérdések

Minden modellezéshez hozzátartozik bizonyos **érvényességi** (*validálási*) **problémák** felvetése. A validálás során kérdések merülnek fel

- a felhasznált módszerre és adatokra, valamint a döntéshozóra vonatkozóan,
- a konkrét megoldásra vonatkozóan, és
- az eredmények és a módszer együttes megítéléséről az eredeti feladat szempontjából.

Az első esetben **tesztelési feladataink** vannak. Az adott feladat megoldására kiválasztott módszer *matematikai és társadalomtudományi előfeltevésekre* épül. Nagyon lényeges, hogy ezek az alapfeltevések explicit módon tudottak legyenek, s ezáltal az adott feladatnál vizsgálható legyen meglétük. A feltevések többfélék, vonatkozhatnak

- a módszerben felhasznált függvények, összefüggések (logikai és matematikai) tulajdonságaira,
- az adatokra,
- a döntéshozó magatartására.

Ha például a döntéshozó explicit többtényezős hasznossági függvényét szeretnénk egy adott feladatban megkapni, akkor az eljárás során több olyan tesztet is el kell végezni, amely a paraméterbecslést megalapozza: a tényezők és a hasznosságok függetlenségi tesztjeit; majd a függvény alakjára vonatkozóan is többféle teszt végzendő. Ezek nélkül az eredmények megbízhatatlanok.

Egyes esetekben lényeges kérdés, hogy a döntéshozó milyen kockázati magatartást tanúsít: kockázat-elfogadó, kockázat-elutasító vagy semlegesen viszonyul a kockázathoz. Ennek vizsgálata is egy tesztsorozat elvégzését követeli meg.

Ha a döntéshozó az implicit hasznossági függvényen alapuló parciális információkat adja meg, akkor általában konzisztencia-teszteket kell a módszerbe beépíteni, vagy egyéb módon biztosítani a döntéshozó konzekvens magatartását. A páros összehasonlításokon alapuló módszereknél is elengedhetetlen a döntéshozó inkonzisztenciájából fakadó megbízhatatlan értékelések törlése és újakkal való helyettesítése.

Az outranking módszerek ugyan eleve a döntéshozó bizonytalanságával és részleges döntésképtelenségével (adatmegadási gondjaival) számolnak, azonban itt is feltétel a döntéshozó legalább részleges racionalitása, amit tesztelni illene, illetve az inkonzisztencia mérésére a módszereken belül megoldást kell találni.

Azokban az esetekben, amikor a rendszer a szubjektív információkon kívül objektív adatokat is tartalmaz, szükséges lehet az adatrendszerre vonatkozó statisztikai vizsgálatok elvégzése.

Fontos, hogy ha egy módszer mértékegység-független inputot kíván meg, akkor ezt valamilyen eljárással biztosítsuk.

A fenti — a módszer, az adatok és a döntéshozó magatartását tesztelő — eljárások a *módszer lebonyolításának kezdetén* illetve *a módszer végrehajtása közben* végezhetők el.

Az adott modell adott módszerrel kapott konkrét eredményeinek érvényességét, megbízhatóságát elemző klasszikus megoldási mód az **érzékenységvizsgálat**. Az érzékenységvizsgálat szokásos módja *a módszer egyszeri végrehajtása utáni* újabb egy- vagy többmenetes elemzés.

Ha a módszer tetszőleges preferencia-információkat, helyettesítési határarányokat, súlyokat, aspirációs szinteket vagy egyéb paramétereket használ, akkor az érzékenységvizsgálat egyik lehetséges módja a modell újbóli lefuttatása megváltoztatott paraméter-értékekkel. Eközben természetesen valamiféle nyilvántartást kell végezni a változtatások irányáról és eredményeiről, hogy a döntéshozó számára nyilvánvalóak legyenek a változó eredmények ok-okozati viszonyai. A jelenlegi számítógépen futtatható módszerek többsége tartalmaz érzékenységvizsgálati modult, és grafikus megjelenítéssel is igyekszik segíteni a döntéshozó eligazodását.

Mind a fogyasztói, mind a társadalmi választási problémák esetén a hasznossági (preferencia) relációk feltérképezésében, a tanulásban nyújt jelentős segítséget az érzékenységvizsgálat. A szakértői döntések eleve azt sugallják, hogy új és új megoldási utakat keressünk (minél többször "futtassuk le" a rendszert), ezáltal megtanulva és bővítve a modell tudásbázisát. A tanuláson alapuló, vagy azt felhasználó rendszerek tehát eleve az érzékenységvizsgálat gondolatkörében fogantak.

Végül említsük meg, hogy elvileg a modellezés része a **visszacsatolás** , azaz a kapott eredményeknek a verifikálása. Ez a verifikálás a fogyasztói döntéseknél akár a megoldással egyidejűleg is elvégezhető, hiszen a döntéshozó elégedettségén alapul. Társadalmi döntéseknél (még akkor is, ha az egyén társadalmi jellegű problémájáról van szó, pl. egy szavazásról) általában társadalmi visszacsatolás van, ami hosszabb időt vesz igénybe. A szakértői döntéseknél a verifikálás a tudásbázishoz való viszonyítást jelenti: minél gazdagabban kidolgozott ez a tudásanyag, annál inkább megvalósítható a ***modellen belüli verifikálás*** — akár az érzékenységvizsgálatot is felhasználva.

11.6 Kitérő: a csoportos döntések támogatásáról

Ebből a komplex problémakörből egyetlen szálat vizsgálunk csak meg nagyon röviden, egy olyan kérdést, amely a kialakítható döntéstámogató rendszer felépítésére is hatással van.

Az előzőekben jellemzett döntési típusok abban is különböznek egymástól, hogy milyen mértékű a csoportos döntéshozatal esélye, s ha a csoportos megközelítés dominál, akkor mennyire jelentős a preferenciák (hasznosságok, rangsorok, értékelések) aggregálásának problémája.

A *személyes (fogyasztói) döntések* is kialakulhatnak csoportos környezetben: család vagy háztartás dönt. Jellemzőbb azonban az, hogy nincs több érintett személy, a *preferenciák aggregálásának problémája elhanyagolható.*

A második típus, *a társadalmi döntések esetében* is előfordulhatnak egyéni döntések: itt viszont sokszor csak arról van szó, hogy valakinek ugyan vállalnia kell a döntés felelősségét, a döntés kialakítása azonban csoportos döntéshozatalként modellezhető. Az esetek zömében tehát *valódi csoportos döntésről van szó*: egy vezetőség, egy választmány, egy esküdtszék - egyenlő státuszú emberek összessége alakítja ki az eredményt. Kérdés, tehát, hogy a döntési folyamatban *mit tekintsünk társadalmi vagy csoportpreferenciának?* Mivel az Arrow-féle lehetetlenségi tétel nem sok jóval bíztat bennünket az egyedi preferenciák aggregálását illetően, a legjobb útnak az látszik, ha a döntéshozók egymással állandó kommunikációban vannak, és a módszer számára a csoport egyetlen egyénként adja meg az információkat. Természetesen ilyen ideális helyzet a valóságban ritkán fordul elő, a csoport szociológiai és pszichológiai összetétele egyes esetekben megnehezíti az egyetértést, más esetekben az egyetértés csak látszólagos, mert hangadók vagy diktátorok állnak mögötte.

Hogyan kell az ilyen típusú csoportos döntéseket támogatni? A döntéstámogató rendszer jelentős energiáit most nem az egyének preferenciáinak megtanulására, hanem a csoport összetételének feltérképezésére kell fordítani. A csoportos társadalmi döntéseket támogató rendszereknek tehát szerves részét

alkotják és a megoldási folyamat tetemes idejét viszik el a különböző *csoporttechnikák*, puhább és keményebb véleményegyeztetési módszerek.

A tanulás szerepe: a csoport megismeri önmagát.

A *szakértői döntések* ebből a szempontból elvileg hasonlónak látszhatnak a társadalmi döntésekkel, azonban nem ez a helyzet. Egyrészt a szakértői döntések jó része újra tisztán egyéni döntés. A cég tulajdonosa, a hadseregtábornok, a mérnök, a pénzügyi szakember vállalhatja az egyedül-döntés kockázatát. Megeshet azonban, hogy itt is csoportos döntéshozatalra - bár inkább úgy kellene fogalmaznunk, hogy *csoportos döntéselőkészítésre* kerül sor. Ezeknél a csoportos döntéseknél is fontos lehet a csoport szociológiai, pszichológiai összetétele, azonban ennek felderítése csak egy mellékszál a rendszer működtetésében. Ennél fontosabb annak a ***tudásbázisnak az előállítása, amely a csoport kollektív bölcsességét jeleníti meg.*** Az adott problémánál most a kívülről adott tudásanyagon kívül - amelyről az egyedi szakértői döntésnél már szóltunk - egy minőségileg más lépés is végrehajtható: ***a csoport értékelheti, vagy újraértékelheti ezt a tudásbázist, hozzáadva együttes és egyetértésben kialakított szakértelmüket.***

A döntéstámogató rendszerben tehát az egyéni preferenciák aggregálásának problémája újra csak háttérbe szorítható. Megváltozik a tanulás szerepe is: a csoportnak a tudás összegzését és felhasználását kell megtanulnia.

11.7 Döntéstámogató rendszerek tervezése

A *11.2. ábra* az eddig elmondottak tükrében egy olyan ideális döntéstámogató rendszer felépítését mutatja be, amely nagymértékben felhasználja a számítógépes interaktivitás lehetőségeit. Ez a döntéstámogatási keret sokféleképpen feltölthető az előző fejezetekben megismert módszerekkel.

A probléma-orientált többcélú döntéstámogató rendszer legfontosabb vonásai:

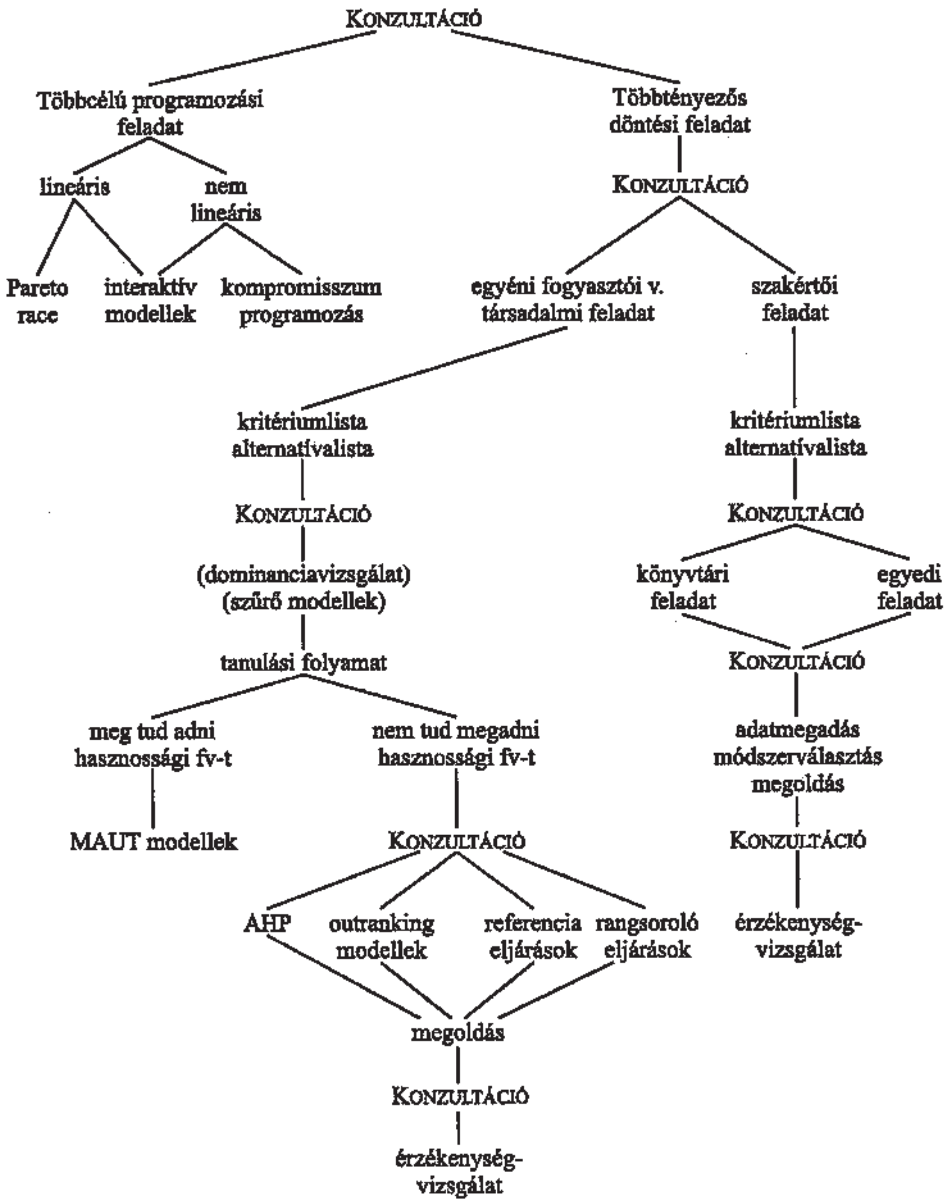
a. *Elválik egymástól a szakértő és a naiv felhasználó.* A rendszer indításakor egyértelműen ki kell derülnie, hogy milyen típusú a feladat és a döntéshozó milyen szinten közeledik a probléma modellezéséhez.

b. *A konzultációs és eljárási szakaszok váltják egymást.* Minden eljárási részt meg kell előznie egy olyan konzultációs blokknak, amelyben a döntéshozó felkészül a rendszer következő fázisába történő átlépésre és dönt arról, hogy az adott fázisban milyen irányban folytatja a rendszer működtetését.

c. *A rendszer beépített része egy standard módszer-gyűjtemény.* A rendszer a lehető legtöbb módszert tartalmazza, ám nem csak az algoritmus, hanem a módszer által felhasznált feltételek (ez majd a felhasználói konzultáció információja lesz) és a szükséges tesztek (amelyeknek a megoldási folyamatban lesz szerepük) is megtalálhatók benne.

d. *A rendszer nyitott,* kétféle értelemben is. Lehetőség van a kereskedelemben kapható szoftverek beépítésére, illetve a meglévő programok új verzióval történő kicserélésére. A másik, talán ennél is fontosabb vonása, hogy a rendszer típusfeladatokkal bővíthető, s ezek a típusfeladatok a konzultáció során elérhetők.

e. A felhasználóval folytatott konzultáció során *a módszertan háttérbe vonul és az elemzés lép előtérbe.*



11.2. ábra

11.8 Irodalomjegyzék a 11. fejezethez

CSÁKI, P-CSISZÁR, L.-FÖLSZ, F.-KELLER, K.-LÓRÁNT, G.- MÉSZÁROS, CS.- RAPCSÁK, T.-TURCHÁNYI, P. [1994]: A vezetői döntéshozatal folyamatának támogatása személyi számítógépen, Windows környezetben, *Szigma*, 25, 169-190.

FORGÓ, F.-TEMESI, J. [1987]: Computer aided licence selection, *Engineering Cost and Production Economics*, No.11., 161-170.

CSÁKI, P.-FÖLSZ, F.-RAPCSÁK, T.-SÁGI, Z. [1988]: On tender evaluations, *Journal of Decision Systems*, 7, 179-194.

FUTÓ, I.-GÁBOR, A.-TEMESI, J. [1993] The risk evaluation expert system of World EXPO 1996, *Journal of Computing and Information Technology*, 1, 57-68.

HENIG, M.I.-BUCHANAN, J.T. [1996]: Solving MCDM problems: Process concepts, *Multi-Criteria Decision Analysis*, 5, 3-11.

ROY, B. [1996]: *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*, Kluwer, Dordrecht

TEMESI, J. [1991]: A szubjektív információ szerepe a többcélú döntéshozatalban, *Szigma*, 53-62.

TEMESI, J. [1998]: Modellek, módszerek, alkalmazások: nyitott kérdések a többcélú döntések támogatásában, A "túlzott központosítástól" az átmenet stratégiájáig, *Tanulmányok Kornai Jánosnak*, szerk. Gács J.-Köllő J., Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 49-63.

VÁRI, A.-VECSENYI, J. [1989]: *Döntéselemzés vezetőkkel*, SZÁMALK, Budapest

VINCKE, P. [1992]: *Multicriteria Decision-aid*, Wiley, New York