Logica voor Informatici

Antwoorden Theorievragen 2017-2018

Authors:
Stef Tweepenninckx

1 februari 2018

Inhoudsopgave

Belangrijke definities

Term en formule

Een term is een string die kan bekomen worden door herhaaldelijke toepassing van de volgende regels:

- Een objectsymbool is een term.
- Als t_1, ..., t_n termen zijn en G een n-voudige functiesymbool, dan is $\mathrm{G}(\mathrm{t}_1, ..., \mathrm{t}_\mathrm{n})$ een term.

Een formule is een string die kan bekomen worden door herhaaldelijke toepassing van de volgende regels:

- Als t_1, ..., t_n termen zijn en P/n een relatiesymbool van ariteit n, dan is $\mathrm{P}(\mathrm{t}_1, ..., \mathrm{t}_\mathrm{n})$ een formule. We noemen dit een **atoom**.
- Als t_1, t_2 termen zijn, dan is $t_1 = t_2$ een formule. Dit noemen we een gelijkheidsatoom.
- Als A, B formules zijn, dan zijn $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \implies B)$ en $(A \iff B)$ ook formules.
- Als x een variabele is en A een formule, dan zijn $(\exists x : A)$ en $(\forall x : A)$ ook formules.

Structuur

Een structuur U bestaat uit een niet-lege verzameling D_U, het domein of universum van U, en een toekenning van waarden τ^U aan niet-logische symbolen τ:

- De waarde c^U voor een objectsymbool c is een element uit het domein D_U. c kan zowel een variabele als constante zijn.
- De waarde F^U voor een functie-symbool F/n: is een functie die n-tallen uit het domein op elementen van het domein afbeeldt.
- De waarde P^U voor een predikaatsymbool P/n is een n-voudige relatie P^U in D_U, dus $P^U \subset D_U^n$

We noemen τ^U de waarde of interpretatie van τ in U.

Formule A is waar in structuur U

Definitie 1 in formularium.

Logische waarheid, consistentie, equivalentie, tegenstrijdigheid

Logische waarheid

Een logische formule A is logisch waar, of is een **tautologie** als ze waar is in alle structuren U die A interpreteren. Notatie: $\models A$

Logische consistentie

Een logische formule A is logisch consistent als ze waar is in minstens één structuur.

Logische equivalentie

A is logisch equivalent met B indien A en B dezelfde waarheidswaarde hebben.

Logische tegenstrijdigheid

Een logische formule A is logisch inconsistent, tegenstrijdig of contradictorisch als er geen structuur bestaat waarin A waar is.

Inferentie

Een inferentieprobleem is een probleem met een input en een gewenste output. De input bestaat uit één of meerdere logische objecten. Hiermee bedoelen we:

- een symbool of vocabularium
- een waarde uit een domein
- een structuur: een toekenning van waardes aan symbolen
- een logische uitdrukking: een term, een verzamelingenuitdrukking, een formule of zin, een theorie.

De output bestaat uit één of meerdere logische objecten die aan een bepaalde logische voorwaarde in termen van de invoer voldoen.

Een afbeelding is berekenbaar dmv een registermachine

Een afbeelding is berekenbaar dmv een registermachine als er een registermachine M bestaat die bij iedere input $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \mathbb{N}$ stopt na een eindig aantal stappen met output $f(a_1, \cdots, a_k)$.
We zeggen dat R semi-beslisbaar is dmv een registermachine als er een registermachine bestaat die voor elke input $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in R$ eindigt en 1 antwoordt en voor elke input $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \notin R$ eindigt en 0 antwoordt ofwel niet eindigt.

Oefeningen en inzichtsvragen

Is de gegeven formule logisch waar? Leg uit.

Tegenvoorbeeld of bewijs met gevallen-onderscheid.
Vb: $\forall x : \exists y : GroterDan(y, x)$

Is de gegeven formule logisch consistent? Bewijs.

Voorbeeld geven van structuur waarin formule waar is of ??????
Vb: $\neg(\forall x : \exists y : x = y)$

Is de gegeven formule logisch equivalent met een andere formule? Leg uit en bewijs.

Waarheidstabellen
Vb: **ander voorbeeld zie p 21**

Stellingen

Bewijzen van waarheid in een oneindige structuur

Generalisatiepropositie

Toevoegen van kwantoren

Wanneer is een propositionele zin in disjunctieve normaalvorm consistent?

Bewijs van correctheid van KE-bewijzen

Onbeslisbaarheid van het stop-probleem

Bewijs van het bestaan van een algoritme voor KE-bewijzen