Analiza Matematyczna I.1

Kresy zbiorów

1 Ważne zagadnienia

1.1 Definicja kresu

Podstawowym problemem, jaki pojawia się podczas rozwiązywania zadań o kresach, jest nieznajomość definicji kresu. Należy zatem zapoznać się **dogłębnie** z następującymi podstawowymi definicjami (co niektórym może zająć nawet kilka godzin myślenia).

Definicja 1. Liczba M jest o ograniczeniem górnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeśli dla każdego $a \in A$ mamy $a \leqslant M$.

Definicja 2. Liczba M jest ograniczeniem dolnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeśli dla każdego $a \in A$ mamy $a \geqslant M$.

Definicja 3. Liczba M będąca ograniczeniem górnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$ jest **kresem górnym** zbioru A (oznaczamy to $M = \sup(A)$), jeśli spełniony jest jeden z równoważnych warunków:

1. Jeśli m jest ograniczeniem górnym zbioru A, to $M \leqslant m$.
2. Jeśli $m < M$, to m nie jest ograniczeniem górnym zbioru A.
3. Jeśli $m < M$, to istnieje $a \in A$, dla którego $a > m$.
4. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $a \in A$, dla którego $a > M - \varepsilon$.
5. Istnieje ciąg (a_n) elementów zbioru A, dla którego $\lim_{n\to\infty} a_n = M$.

Uwaga. Równoważność tych definicji jest niemalże oczywista. Np. punkty 1 i 2 są równoważne na mocy prostej logiki (jedno i drugie zdanie mówi, że M jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A). Punkt 3 jest przepisaniem punktu 2. Aby to zobaczyć, należy tylko zauważyć, że zdanie „m nie jest ograniczeniem górnym zbioru A” jest zaprzeczeniem zdania „m jest ograniczeniem górnym zbioru A", czyli zdania „dla każdego $a \in A$ mamy $a \leqslant m$”. Zaprzeczeniem tego ostatniego zdania jest oczywiście „istnieje $a \in A$, dla którego $a > m$”. Równoważność punktów 3 i 4 jest jasna, gdyż fakt, że $m < M$ jest równoważny z tym, że istnieje $\varepsilon > 0$, dla którego $m = M - \varepsilon$. Równoważność punktu 5 z pozostałymi punktami okaże się jasna po wprowadzeniu definicji granicy ciągu.

Podobnie wprowadzamy definicję kresu dolnego.

Definicja 4. Liczba M będąca ograniczeniem dolnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$ jest **kresem dolnym** zbioru A (oznaczamy to $M = \inf(A)$), jeśli spełniony jest jeden z równoważnych warunków:

1. Jeśli m jest ograniczeniem dolnym zbioru A, to $M \geqslant m$.
2. Jeśli $m > M$, to m nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A.
3. Jeśli $m > M$, to istnieje $a \in A$, dla którego $a < m$.
4. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $a \in A$, dla którego $a < M + \varepsilon$.
5. Istnieje ciąg (a_n) elementów zbioru A, dla którego $\lim_{n\to\infty} a_n = M$

Uwaga. Jeżeli ograniczenie górne M zbioru A należy do zbioru A, to jest automatycznie kresem górnym, gdyż w punkcie 3 możemy wziąć $a = M$. Podobnie, jeżeli ograniczenie dolne M zbioru A należy do zbioru A, to jest automatycznie kresem dolnym.

Uwaga. W punkcie 4 możemy się ograniczyć do sprawdzenia warunku dla liczb ε należacych do przedziału $(0, \varepsilon_0]$ dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$. Jeżeli bowiem pokażemy, że $M - \varepsilon_0$ nie jest ograniczeniem górnym zbioru A, to również $M - \varepsilon$ dla dowolnego $\varepsilon > \varepsilon_0$ nie może być ograniczeniem górnym, gdyż $M - \varepsilon < M - \varepsilon_0$.

Uwaga. Jeżeli zbiór A nie jest ograniczony z góry, to piszemy $\sup(A) = \infty$ (ale zbiór A **nie ma** kresu górnego), a jeśli nie jest ograniczony z dołu, to piszemy $\inf(A) = -\infty$ (ale zbiór A **nie ma** kresu dolnego).

Zanim przystąpi się do robienia konkretnych zadań, warto odpowiedzieć na pytanie, jakie są kresy (i czy należą do zbiorów) w przypadku pewnych prostych zbiorów, znanych ze szkoły, np.

$$A = \left\{\frac{1}{4}, 1, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}\right\}, \qquad B = (0,1], \qquad C = [-5,0) \cup [1,7), \qquad D = (1,2) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

1.2 Ważne motywy w zadaniach

Kolejny rozdział ilustruje zastosowanie następujących ważnych idei, które występują często w zadaniach:

1. Monotoniczność po jednym z parametrów zbioru.
2. Symetrie:
   (a) dla zbiorów spełniających $A = -A$ mamy $\sup(A) = -\inf(A)$,
   (b) dla ciągów liczb dodatnich $(a_n)_{n \geqslant 1}$ oraz $(b_n)_{n \geqslant 1}$ kresy zbioru $\{\frac{a_n + a_m}{b_n + b_m} : n, m \geqslant 1\}$ są równe kresom zbioru $\{\frac{a_n}{b_n} : n \geqslant 1\}$.
3. Zwijanie do kwadratu.
4. Zastosowanie nierówności między średnimi.
5. Zastosowanie nierówności Cauchy'ego-Schwarza.
6. Zbiory postaci $f(A) = \{f(a) : \ a \in A\}$, gdzie f jest funkcją monotoniczną.
7. Wyrugowywanie zmiennej z więzu.

2 Przykładowe zadania

Zadanie 1. Wyznacz kresy zbioru $A = \left\{\frac{1}{n} : \ n \geqslant 1, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że 1 jest ograniczeniem górnym zbioru A, gdyż $\frac{1}{n} \leqslant 1$ dla wszystkich $n \geqslant 1$. Ponieważ $1 \in A$, jest to kres górny.

Oczywiście 0 jest ograniczeniem dolnym zbioru A, ponieważ $\frac{1}{n} > 0$ dla wszystkich $n \geqslant 1$. Widzimy tutaj, że $0 \notin A$. Aby wykazać, że 0 jest największym ograniczeniem dolnym, załóżmy, że $\varepsilon > 0$ i wykażmy, że ε nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Dla $n > \varepsilon^{-1}$ (z zasady Archimedesa wynika, takie n istnieje) mamy $\frac{1}{n} < \varepsilon$, zatem ε nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Stąd $\inf(A) = 0$. □

Zadanie 2. Wyznacz kresy zbioru $A = \left\{\frac{2n+3}{3n+2} : \ n \geqslant 1000\right\}$.

Rozwiązanie. Niech $a_n = \frac{2n+3}{3n+2}$. Zauważmy, że $a_n = \frac{\frac{2}{3}(3n+2)+\frac{5}{3}}{3n+2} = \frac{2}{3} + \frac{\frac{5}{3}}{3n+2}$. Stąd oczywiście $a_n \leqslant a_{1000}$ dla $n \geqslant 1000$, czyli $\sup(A) = a_{1000} = \frac{2003}{3002}$. Mamy również $a_n > \frac{2}{3}$ zatem $\frac{2}{3}$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Aby wykazać, że jest to kres dolny, wystarczy wykazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje n, dla którego $a_n < \frac{2}{3} + \varepsilon$. Jest to równoważne z $\frac{\frac{5}{3}}{3n+2} < \varepsilon$, co jest spełnione dla $n > \frac{\frac{5}{3} - 2\varepsilon}{3\varepsilon}$. □

Zadanie 3. Wyznacz kresy zbioru $A = \Big\{(a^2+b)(a+b^2) : \ a+b=1, \ a,b \in \mathbb{R}\Big\}$ lub udowodnij, że zbiór nie jest ograniczony.

Rozwiązanie. Jeśli $a+b=1$, to $b=1-a$, zatem

$$(a^2+b)(a+b^2) = (a^2-a+1)(a+(1-a)^2) = (a^2-a+1)(a+1-2a+a^2) = (a^2-a+1)^2.$$

Mamy $a^2-a+1 = (a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$. Wynika stąd, że $(a^2-a+1)^2 \geqslant \frac{9}{16}$, przy czym równość zachodzi dla $a=\frac{1}{2}$. Oznacza to, że $(a^2+b)(a+b^2) \geqslant \frac{9}{16}$ z równością dla $a=b=\frac{1}{2}$. Stąd $\inf(A) = \frac{9}{16}$.

Udowodnimy teraz, że $\sup(A) = \infty$, czyli zbiór A nie jest ograniczony z góry. Dla $M > \frac{9}{16}$ nierówność $((a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2 > M$ jest spełniona dla $(a-\frac{1}{2})^2 > \sqrt{M}-\frac{3}{4}$, czyli wystarczy wziąć $a > \frac{1}{2}+\sqrt{M^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}}$. Stąd para (a,b) dla $a > \frac{1}{2}+\sqrt{M^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}}$ oraz $b=1-a$ spełnia $(a^2+b)(a+b^2) > M$, czyli zbiór A nie jest ograniczony z góry. □

Zadanie 4. Wyznacz kresy zbioru $A = \left\{\frac{nm+m}{nm+3} : \ m \geqslant n \geqslant 1, m,n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\frac{nm+m}{nm+3} = \frac{n+1}{n+\frac{3}{m}}$. Widzimy, że $\frac{nm+m}{nm+3} < \frac{n+1}{n} \leqslant 2$, zatem 2 jest ograniczeniem górnym zbioru A. Wykażemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ liczba $2-\varepsilon$ nie jest ograniczeniem górnym. Dla $n=1$ mamy $\frac{nm+m}{nm+3} = \frac{2m}{m+3}$. Nierówność $\frac{2m}{m+3} > 2-\varepsilon$ jest równoważna z $2-\frac{6}{m+3} > 2-\varepsilon$, czyli jest spełniona dla $m > \frac{6}{\varepsilon}-3$. Stąd $\sup(A) = 2$.

Wyznaczymy infimum zbioru A. Mamy $\frac{n+1}{n+\frac{3}{m}} \geqslant \frac{n+1}{n+\frac{3}{n}} = \frac{n^2+n}{n^2+3}$. Niech $a_n = \frac{n^2+n}{n^2+3}$. Wówczas $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{6}{7}$, $a_3 = 1$ oraz oczywiście dla $n \geqslant 3$ mamy $a_n \geqslant 1$. Dostaliśmy zatem nierówność $\frac{nm+m}{nm+3} \geqslant \frac{1}{2}$, przy czym równość zachodzi dla $m=n=1$. Oznacza to, że $\inf(A) = \frac{1}{2}$. □

Zadanie 5. Wyznacz kresy zbiorów

$$A = \left\{ \sqrt[n]{n} \;\middle|\; n \geqslant 1, \ n \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad B = \left\{ \sqrt[n]{n^3} - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \;\middle|\; n \geqslant 1, \ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Rozwiązanie. Zajmiemy się najpierw zbiorem A. Oczywiście $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$, zatem $\inf(A) = 1$, gdyż $1 \in A$. Zajmiemy się kresem górnym. Niech $a_n = \sqrt[n]{n}$. Mamy $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt[3]{3}$ oraz $a_4 = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} = a_2$. Zatem $a_1 < a_2 < a_3 > a_4$. Indukcyjnie udowodnimy, że $a_n \leqslant a_4$ dla $n \geqslant 4$. Jest to równoważne z $2^n \geqslant n^2$ (podnosimy nierówność do potęgi $2n$). Dla $n=4$ mamy równość. Załóżmy, że $2^n \geqslant n^2$. Wtedy $2^{n+1} \geqslant 2n^2$, zatem wystarczy wykazać, że $2n^2 \geqslant (n+1)^2$, co jest równoważne z $n^2-2n-1 \geqslant 0$, czyli z $(n-1)^2 \geqslant 2$. Jest to oczywiście prawdą dla $n \geqslant 4$. Ponieważ dla $n \geqslant 4$ mamy $a_n \leqslant a_4 < a_3$, więc dla wszystkich n mamy $a_3 \geqslant a_n$, a zatem $a_3 = \sqrt[3]{3} = \sup(A)$.

Rozważmy teraz zbiór B. Niech $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ dla $x \geqslant 1$. Zauważmy, że $\sqrt[n]{n^3} - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = f(a_n)$ oraz funkcja f jest niemalejąca (zarówno x^3 jak i $-\frac{1}{x}$ są niemalejące). Ponieważ $a_1 \leqslant a_n \leqslant a_3$, mamy $f(a_1) \leqslant f(a_n) \leqslant f(a_3)$. Stąd $0 = f(a_1) = \inf(B)$ oraz $3 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = f(a_3) = \sup(B)$. □

Zadanie 6. Niech A będzie niepustym podzbiorem liczb rzeczywistych.

(a) Wykaż, że $\inf(-A) = -\sup(A)$, gdzie $-A = \{-a : \ a \in A\}$.

(b) Wywnioskuj, że $\sup(-A) = -\inf(A)$.

(c) Wywnioskuj, że jeśli $A = -A$, to $\sup(A) = -\inf(A)$.

Rozwiązanie. (a) Załóżmy najpierw, że A jest zbiorem ograniczonym. Niech $M = \sup(A) < \infty$. Wtedy dla każdego $a \in A$ mamy $a \leqslant M$, czyli $-a \geqslant -M$. Liczba $-M$ jest zatem ograniczeniem dolnym zbioru $-A$. Wykażemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $a \in A$ takie, że $-a < -M + \varepsilon$, co pokaże, że $-M$ jest najmniejszym ograniczeniem dolnym zbioru $-A$. Wystarczy wskazać a, dla którego $a > M - \varepsilon$. Takie a musi istnieć na mocy punktu 4 w warunkach równoważnych definicji kresu górnego.

Jeżeli $\sup(A) = \infty$, to A nie jest ograniczony z góry, a zatem $-A$ nie jest ograniczony z dołu, czyli $\inf(-A) = -\infty = -\sup(A)$.

(b) Aby udowodnić drugą część, wystarczy skorzystać z pierwszej części dla zbioru $-A$, mianowicie $\sup(-A) = -\inf(-(-A)) = -\inf(A)$, gdyż $-(-A) = A$.

(c) Mamy $\sup(A) = \sup(-A) = -\inf(A)$. $\square$

Zadanie 7. Wyznacz kresy zbioru $A = \left\{\frac{nm}{2n^2+m^2} :\ n, m \neq 0,\ n, m \in \mathbb{Z}\right\}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\frac{nm}{2n^2+m^2} = \frac{nm}{(\sqrt{2}n - m)^2 + 2\sqrt{2}mn} < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Stąd $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ jest ograniczeniem górnym zbioru A. Wykażemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje element a zbioru A, taki że $a > \frac{1}{2\sqrt{2}} - \varepsilon$, co wykaże, że $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ jest kresem górnym. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dobierzemy $\delta > 0$ takie, że jeśli $|\frac{m}{n} - \sqrt{2}| < \delta$, to $\frac{nm}{2n^2+m^2} > \frac{1}{2\sqrt{2}} - \varepsilon$. Oczywiście dla każdego $\delta > 0$ istnieją liczby $m, n \neq 0$, dla których $|\frac{m}{n} - \sqrt{2}| < \delta$, gdyż zbiór liczb wymiernych jest gęsty w $\mathbb{R}$. Weźmy $\delta \in (0, 1)$. Zauważmy, że $2\sqrt{2}\delta + \delta^2 \leqslant 2\sqrt{2}\delta + \delta \leqslant 8\delta$. Wtedy

$$\begin{aligned}\frac{nm}{2n^2+m^2} &= \frac{\frac{m}{n}}{2 + (\frac{m}{n})^2} \geqslant \frac{\sqrt{2} - \delta}{2 + (\sqrt{2} + \delta)^2} > \frac{\sqrt{2}}{2 + (\sqrt{2} + \delta)^2} - \frac{\delta}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}\delta + \delta^2} - \frac{\delta}{4} \\ &> \frac{\sqrt{2}}{4 + 8\delta} - \frac{\delta}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1 + 2\delta}\right) - \frac{\delta}{4} > \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - 2\delta) - \frac{\delta}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \delta\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z nierówności $\frac{1}{1+x} \geqslant 1 - x$, prawdziwej dla $x > -1$. Wystarczy zatem wziąć $\delta = \varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right)^{-1}$. Oczywiście kres górny nie należy do zbioru, bo $\frac{m}{n}$ nie może być równa $\sqrt{2}$, gdyż $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Zbadamy teraz kres dolny. Zauważmy, że jeśli $a \in A$ to również $-a \in A$ (wystarczy zamienić n na $-n$). Stąd $A = -A$ i mamy $\inf(A) = -\sup(A) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ na mocy Zadania 6(c). $\square$

Zadanie 8. Wykaż, że jeśli $A, B \subseteq \mathbb{R}$ oraz dla każdego $a \in A$ istnieje $b \in B$, dla którego $a \leqslant b$, to $\sup(A) \leqslant \sup(B)$. Podobnie, jeśli dla każdego $a \in A$ istnieje $b \in B$, dla którego $b \leqslant a$, to $\inf(B) \leqslant \inf(A)$.

Rozwiązanie. Wykażemy tylko pierwszą część, gdyż druga jest podobna. Niech $m < \sup(A)$. Wystarczy pokazać, że m nie jest ograniczeniem górym zbioru B. Istnieje $\varepsilon > 0$ tak mały, że $m < \sup(A) - \varepsilon$, np. jest nim $\varepsilon = \frac{1}{2}(\sup(A) - m)$. Istnieje $a \in A$, dla którego $a > \sup(A) - \varepsilon$. Istnieje zatem również $b \in B$, dla którego $b > \sup(A) - \varepsilon > m$, zatem istotnie m nie jest ograniczeniem górnym zbioru B. $\square$

Zadanie 9. Wyznacz kresy zbioru

$$A = \left\{\frac{n^2 + m^2}{n! + m!},\ n, m \in \mathbb{Z}, n, m \geqslant 1\right\}.$$

Rozwiązanie. Indukcyjnie udowodnimy, że $n^2 \leqslant 2n!$. Jest to prawda dla $n = 1, 2$. Jeśli dla pewnego $n \geqslant 2$ mamy $n^2 \leqslant 2n!$, to $2(n+1)! \geqslant (n+1)n^2 \geqslant (n+1)^2$, gdyż ostatnia nierówność jest równoważna z $n^2 \geqslant n+1$, czyli z $(n-\frac{1}{2})^2 \geqslant \frac{5}{4}$, co jest prawdą dla $n \geqslant 2$. Otrzymujemy stąd $n^2+m^2 \leqslant 2(n!+m!)$, zatem $\frac{n^2+m^2}{n!+m!} \leqslant 2$, a stąd $\sup(A) = 2$, gdyż równość dostajemy dla $n = m = 2$.

Aby wyznaczyć infimum, zauważmy, że 0 jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Aby wykazać, że jest to kres dolny, dla $\varepsilon > 0$ należy wskazać n, m, dla których $\frac{n^2+m^2}{n!+m!} < \varepsilon$. Biorąc $m = n$ dostajemy $\frac{n^2+m^2}{n!+m!} = \frac{n^2}{n!}$. Dla $n \geqslant 3$ mamy $\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{(n-2)!} \leqslant 2 \cdot \frac{1}{(n-2)!} \leqslant \frac{2}{n-2}$. To ostatnie wyrażenie jest mniejsze od ε dla $n > 2 + \frac{2}{\varepsilon}$, zatem wówczas również $\frac{n^2}{n!} < \varepsilon$. □

Uwaga. Dla ciągów dodatnich liczb rzeczywistych $(a_n)_{n\geqslant 1}$ oraz $(b_n)_{n\geqslant 1}$ zdefiniujmy zbiory

$$A = \left\{ \frac{a_n + a_m}{b_n + b_m} : \ n, m \geqslant 1 \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{a_n}{b_n} : \ n \geqslant 1 \right\}$$

Jest prawdą, że kresy zbiorów A i B są sobie równe, co znacznie upraszcza liczenie kresu zbioru A. Aby to wykazać, zauważmy najpierw, że $B \subseteq A$, gdyż w zbiorze A możemy brać elementy odpowiadające $n = m$, które dają elementy zbioru B. Wynika stąd, że $\sup(A) \geqslant \sup(B)$ oraz $\inf(A) \leqslant \inf(B)$. Zauważmy, że $\frac{a_n+a_m}{b_n+b_m} \leqslant \max\{\frac{a_n}{b_n}, \frac{a_m}{b_m}\}$. Faktycznie, jeśli $M = \max\{\frac{a_n}{b_n}, \frac{a_m}{b_m}\}$, to $\frac{a_n}{b_n} \leqslant M$ oraz $\frac{a_m}{b_m} \leqslant M$. Stąd $a_n \leqslant Mb_n$ oraz $a_m \leqslant Mb_m$, czyli $a_n + a_m \leqslant M(b_n + b_m)$, a zatem $\frac{a_n+a_m}{b_n+b_m} \leqslant M$. Z nierówności $\frac{a_n+a_m}{b_n+b_m} \leqslant \max\{\frac{a_n}{b_n}, \frac{a_m}{b_m}\}$ wynika, że dla każdego $a \in A$ istnieje $b \in B$ spełniające $a \leqslant b$, zatem na mocy Zadania 8 mamy $\sup(A) \leqslant \sup(B)$, czyli $\sup(A) = \sup(B)$.

Aby wykazać, że $\inf(A) \geqslant \inf(B)$, wystarczy wykazać, że $\frac{a_n+a_m}{b_n+b_m} \geqslant \min\{\frac{a_n}{b_n}, \frac{a_m}{b_m}\}$ i skorzystać z drugiej części Zadania 8. Niech $M' = \min\{\frac{a_n}{b_n}, \frac{a_m}{b_m}\}$. Wtedy $\frac{a_n}{b_n}, \frac{a_m}{b_m} \geqslant M'$, zatem $a_n \geqslant M'b_n$ oraz $a_m \geqslant M'b_m$. Stąd $a_n + a_m \geqslant M'(b_n + b_m)$, czyli $\frac{a_n+a_m}{b_n+b_m} \geqslant M'$.

Zadanie 10. Wyznacz kresy zbioru

$$A = \left\{ a + 4b + 8c : \ a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 = 1 \right\}.$$

Rozwiązanie. Sposób 1. Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\left(a - \frac{t}{2}\right)^2 + (b - 2t)^2 + (c - 4t)^2 \geqslant 0.$$

Korzystając ze wzoru $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ dostajemy

$$a^2 + b^2 + c^2 + t^2 \left(\frac{1}{4} + 4 + 16\right) \geqslant t(a + 4b + 8c).$$

Skoro $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, dla $t > 0$ dostajemy

$$a + 4b + 8c \leqslant \frac{1 + t^2 \left(\frac{1}{4} + 4 + 16\right)}{t} = \frac{4 + 81t^2}{4t}.$$

Zauważmy, że $(9t - 2)^2 \geqslant 0$, zatem $81t^2 + 4 \geqslant 36t$, czyli $\frac{4+81t^2}{4t} \geqslant 9$, przy czym równość zachodzi dla $t = \frac{2}{9}$. Biorąc $t = \frac{2}{9}$ otrzymujemy $a + 4b + 8c \leqslant 9$, przy czym równość zachodzi dla $(a, b, c) = (t/2, 2t, 4t) = (\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9})$. Łatwo sprawdzić, że te liczby spełniają $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Stąd $\sup(A) = 9$.

Infimum jest równe -9, gdyż zbiór spełnia $-A = A$ (jeśli $x = a + 4b + 8c$ dla $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, to $-x = -a + 4(-b) + 8(-c)$ oraz $(-a)^2 + (-b)^2 + (-c)^2 = 1$).

Sposób 2. Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy $|a+4b+8c|^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)(1+4^2+8^2) = 81(a^2 + b^2 + c^2)$. Stąd dla $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ mamy $|a + 4b + 8c| \leqslant 9$. W szczególności $a + 4b + 8c \leqslant 9$. Jeśli $(a, b, c) = t(1, 4, 9)$, w nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy równość. Pisząc warunek $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ otrzymujemy $t^2 = 81$. Zatem $(a, b, c) = (\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9})$ daje $a + 4b + 8c = 9$. Dostaliśmy, że $\sup(A) = 9$. Infimum wyznaczamy tak samo, jak w pierwszej metodzie. □

Zadanie 11. W zależności od parametru $p > 0$ wyznacz kresy zbioru $A_p = \left\{t^3 + \frac{p}{t} :\ t > 0\right\}$ (lub udowodnij, że zbiór nie jest ograniczony).

Rozwiązanie. Po pierwsze zauważmy, że dla $M > 0$ biorąc $t = \sqrt[3]{M}$ otrzymujemy $t^3 + \frac{p}{t} > t^3 = M$, zatem $\sup(A_p) = \infty$, gdyż A_p nie jest ograniczony z góry.

Wyznaczymy teraz infimum zbioru A_p. Rozważmy liczby $t^3, \frac{p}{3t}, \frac{p}{3t}, \frac{p}{3t}$ i zastosujmy do tych liczb nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną. Otrzymamy wówczas

$$\frac{t^3 + \frac{p}{t}}{4} = \frac{t^3 + \frac{p}{3t} + \frac{p}{3t} + \frac{p}{3t}}{4} \geqslant \sqrt[4]{t^3 \cdot \left(\frac{p}{3t}\right)^3} = \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Stąd $t^3 + \frac{p}{t} \geqslant 4\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$. Zatem liczba $4\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A_p. Aby wykazać, że jest ona infimum zbioru A, wystarczy wskazać $t > 0$, dla którego $t^3 + \frac{p}{t} = 4\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$. Aby tak było, potrzeba i wystarczy, aby w zastosowanej nierówności między średnimi liczby były równe, co prowadzi do warunku $t^3 = \frac{p}{3t}$. Stąd $t = \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$. Łatwo sprawdzić, że dla tego t równość $t^3 + \frac{p}{t} = 4\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ faktycznie ma miejsce. □

Zadanie 12. Wyznacz kresy zbioru $A = \{a^3b^2c : a + b + c = 1,\ a, b, c > 0\}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że 0 jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Ponadto dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 1)$ biorąc dodatnie liczby $(a, b, c) = (\frac{1}{2}(1 - \varepsilon), \frac{1}{2}(1 - \varepsilon), \varepsilon)$, których suma jest równa 1, otrzymujemy $a^3b^2c < c = \varepsilon$. Stąd ε nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Wykazaliśmy, że $\inf(A) = 0$.

Zajmiemy się teraz kresem górnym. Rozważmy liczby $c, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b, \frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a$ i zastosujmy do nich nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną. Dostajemy

$$\frac{1}{6} = \frac{a + b + c}{6} = \frac{c + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}a}{6} \geqslant \sqrt[6]{c\left(\frac{1}{2}b\right)^2\left(\frac{1}{3}a\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{1}{2^2 \cdot 3^3}} \cdot \sqrt[6]{a^3b^2c},$$

zatem $a^3b^2c \leqslant \frac{2^2 \cdot 3^3}{6^6} = \frac{3}{6^4} = \frac{1}{2 \cdot 6^3} = \frac{1}{432}$. Liczba $\frac{1}{432}$ jest zatem ograniczeniem górnym zbioru A. Równość w nierówności między średnimi mamy dla $c = \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}a$. Stąd $1 = a + b + c = 6c$, skąd dla $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ mamy $a^3b^2c = \frac{1}{432}$. Stąd $\sup(A) = \frac{1}{432}$. □

Zadanie 13. Wyznacz kresy zbioru $A = \{\sqrt[3]{n} - [\sqrt[3]{n}] :\ n \geqslant 1,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Rozwiązanie. Oczywiście $\sqrt[3]{n} - [\sqrt[3]{n}] \geqslant 0$ oraz dla $n = 1$ mamy równość, skąd wynika, że $\inf(A) = 0$. Zajmiemy się supremum zbioru A. Oczywiście $\sqrt[3]{n} - [\sqrt[3]{n}] < 1$, zatem 1 jest ograniczeniem górnym zbioru A. Wykażemy, że jest to kres górny. Niech $n = k^3 - 1$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 2$. Wykażemy, że $[\sqrt[3]{n}] = k - 1$. Oczywiście $\sqrt[3]{k^3 - 1} < \sqrt[3]{k^3} = k$, zatem $[\sqrt[3]{k^3 - 1}] < k$. Pokażemy, że $\sqrt[3]{k^3 - 1} \geqslant k - 1$, co da $k > [\sqrt[3]{k^3 - 1}] \geqslant k - 1$, czyli $[\sqrt[3]{k^3 - 1}] = k - 1$. Nierówność jest równoważna z $k^3 - 1 \geqslant (k - 1)^3$, czyli z $3k^2 \geqslant 3k$, co jest prawdą. Otrzymaliśmy $\sqrt[3]{n} - [\sqrt[3]{n}] = \sqrt[3]{k^3 - 1} - (k - 1)$. Niech $\varepsilon > 0$. Wystarczy udowodnić, że istnieje $k \geqslant 2$, dla którego $\sqrt[3]{k^3 - 1} - (k - 1) > 1 - \varepsilon$, czyli $k - \sqrt[3]{k^3 - 1} < \varepsilon$. Korzystając ze wzoru $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ dla $x = k$ oraz $y = \sqrt[3]{k^3 - 1}$ otrzymamy

$$k - \sqrt[3]{k^3 - 1} = x - y = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \leqslant \frac{1}{x^2} = \frac{1}{k^2},$$

co jest mniejsze od ε dla $k > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. □

Zadanie 14. Wyznacz kresy zbioru $A = \{ab + bc + ca :\ a + b + c = 1,\ a, b, c \geqslant 0\}$.

Rozwiązanie. Oczywiście $ab + bc + ca \geqslant 0$ z równością dla $(a, b, c) = (0, 0, 1)$, zatem $\inf(A) = 0$. Wyznaczymy supremum zbioru A. Zauważmy, że

$$1 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca).$$

Stąd

$$ab + bc + ca = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Z nierówności między średnią kwadratową i arytmetyczną mamy

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geqslant \frac{a + b + c}{3} = \frac{1}{3}.$$

Zatem $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$, czyli $ab + bc + ca \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Równość zachodzi dla $a = b = c = \frac{1}{3}$, czyli $\sup(A) = \frac{1}{3}$. □

Zadanie 15. Dany jest zbiór $A = \left\{\frac{m^2+n^2}{2^m+3^n} : n, m \geqslant 1, n, m \in \mathbb{Z}\right\}$. Wykaż, że zbiór A jest ograniczony. Czy $\sup(A) \in A$? Czy $\inf(A) \in A$?

Rozwiązanie. Po pierwsze zauważmy, że dla $n \geqslant 1$ mamy $\frac{n^2}{2^n} \leqslant \frac{9}{8}$. Dla $n = 1, 2, 3$ jest to prawdą, wystarczy zatem indukcyjnie udowodnić, że $n^2 \leqslant 2^n$ dla $n \geqslant 4$, co zostało zrobione w rozwiązaniu Zadania 5. Skoro $\frac{n^2}{2^n} \leqslant \frac{9}{8}$ oraz $\frac{m^2}{2^m} \leqslant \frac{9}{8}$, to $n^2 \leqslant \frac{9}{8} \cdot 2^n$ oraz $m^2 \leqslant \frac{9}{8} \cdot 2^m$, a stąd $n^2 + m^2 \leqslant \frac{9}{8}(2^n + 2^m)$, czyli $0 < \frac{n^2+m^2}{3^n+2^m} \leqslant \frac{n^2+m^2}{2^n+2^m} \leqslant \frac{9}{8}$. Dowodzi to ograniczoności zbioru A.

Zauważmy, że $\frac{m^2+n^2}{2^m+3^n} > 0$, czyli 0 jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Wykażemy, że jest to kres dolny. Biorąc $n = m$ dostajemy $\frac{m^2+n^2}{2^m+3^n} = \frac{2n^2}{2^n+3^n} \leqslant \frac{2n^2}{2^n+2^n} = \frac{n^2}{2^n}$. Wystarczy udowdnić, że dla $\varepsilon > 0$ istnieje n, dla którego $\frac{n^2}{2^n} < \varepsilon$. Można to pokazać na kilka sposobów. Pierwszym z nich jest wykazanie indukcyjnie, że $\frac{n^2}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$ dla $n \geqslant 10$. Teza zachodzi dla $n = 10$. Załóżmy, że $2^n \geqslant n^3$. Wtedy z założenia indukcyjnego mamy $2^{n+1} \geqslant 2n^3$, a zatem wystarczy pokazać nierówność $2n^3 \geqslant (n+1)^3$, która jest równoważna z $n^3 \geqslant 3n^2+3n+1$. Ponieważ dla $n \geqslant 10$ mamy $\frac{1}{3}n^3 \geqslant 3n^2$, $\frac{1}{3}n^3 \geqslant 3n$ oraz $\frac{1}{3}n^3 \geqslant 1$, dostajemy $n^3 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{3}n^3 \geqslant 3n^2 + 3n + 1$.

Innym sposobem jest zauważenie, że dla $n \geqslant 3$ mamy $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{3}$, co daje $\frac{n^2}{2^n} \leqslant \frac{n^2}{\binom{n}{3}} = \frac{6n}{(n-1)(n-2)}$. Ponieważ $\frac{n}{n-1} \leqslant 2$ (gdyż jest to równoważne z $n \leqslant 2n - 2$, czyli z $n \geqslant 2$) mamy $\frac{6n}{(n-1)(n-2)} \leqslant \frac{12}{n-2}$, co jest mniejsze od ε dla $n > \frac{12}{\varepsilon} + 2$.

Otrzymaliśmy, że $\inf(A) = 0 \notin A$. Pokażemy teraz, że supremum należy do zbioru A. Widzieliśmy już, że dla $n \geqslant 10$ mamy $\frac{n^2}{2^n} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{10}$. Załóżmy, że $\max(n, m) \geqslant 10$. Wtedy dla $n \geqslant m$ mamy $\frac{n^2+m^2}{2^m+3^n} \leqslant \frac{2n^2}{3^n} \leqslant 2 \cdot \frac{n^2}{2^n} \leqslant \frac{1}{5}$. Jeśli $m \geqslant n$ mamy $\frac{n^2+m^2}{2^m+3^n} \leqslant \frac{2m^2}{2^m} = 2 \cdot \frac{m^2}{2^m} \leqslant \frac{1}{5}$. Otrzymaliśmy, że dla $\max(n, m) \geqslant 10$ mamy $\frac{m^2+n^2}{2^m+3^n} \leqslant \frac{1}{5}$. Niech $M = \max_{n,m \leqslant 10} \frac{m^2+n^2}{2^m+3^n}$ (oczywiście $M \in A$, gdyż bierzemy maksimum po zbiorze skończonym). Wtedy $M \geqslant \frac{1^2+1^2}{2^1+3^1} = \frac{2}{5} > \frac{1}{5}$. Wynika stąd, że dla wszystkich $m, n \geqslant 1$ mamy $\frac{m^2+n^2}{2^m+3^n} \leqslant M$ oraz $M \in A$, zatem $\sup(A) = M \in A$. □

Uwaga. W powyższym rozwiązaniu nie wyznaczyliśmy supremum zbioru A, nie byliśmy bowiem o to proszeni. Można to jednak zrobić przy większym nakładzie pracy. Niech $f(n, m) = \frac{m^2+n^2}{2^m+3^n}$. Wykażemy, że $f(n, m) \leqslant f(1, 3)$, zatem $\sup(A) = \frac{10}{11}$. Nierówność $\frac{n^2}{2^n} \leqslant \frac{10}{22}$ jest prawdziwa dla $n \geqslant 7$ (indukcja). Zatem powyższe rozumowania pokazują, że wystarczy ograniczyć się do $1 \leqslant m, n \leqslant 6$. Jeśli $n \geqslant 4$, to $f(n, m) \leqslant \frac{2 \cdot 6^2}{3^4} = \frac{8}{9} < \frac{10}{11}$. Wystarczy zatem rozważyć $(n, m) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, co daje 18 przypadków, które można sprawdzić ręcznie (ćwiczenie).