Zad. 1 Sprawdź czy dany zbiór jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wszystkich ciągów o wyrazach:

(a)$\{(x_n)_{n=0}^{\infty} : x_n = 0 \text{ poza skończonymi wieloma wartościami} n\}$

Po wymnożeniu przez skalar a nadal ciągi tej postaci będą równe zero poza skończenie wieloma wartościami czyli będzie należał do tego zbioru. Mając dane wektory v_1 oraz v_2 oznaczmy przez M_1 i M_2 takie liczby dla których $\forall_{n>M_1}\ x_n = 0$ analogicznie $\forall_{n>M_2}\ y_n = 0$, gdzie x_n i y_n są ciągami reprezentowanymi przez v_1 i v_2. Zauważmy, że $v_1 + v_2$ jest sumą wyrazów ciągu i $\forall_{n>max(M_1,M_2)} x_n + y_n = 0$ Zatem również jest to wektor z tej podprzestrzeni.
Zbiór jest podprzestrzenią.

(b)$\{(x_n)_{n=0}^{\infty} : \forall_{K\in\mathbb{R}}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}|x_n| > K\} \cup (0)$

Wystarczy wziąć wektory opisane następująco: $v_1 = \{\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n = 2n\}$ oraz $v_2 = \{\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n = -2n-1\}$ oba należą do zbioru lecz $v_1 + v_2 = \forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_n = -1$
Oczywiście $v_1 + v_2$ nie należy do zbioru zatem:
Zbiór nie jest podprzestrzenią.

(c)$\{(x_n)_{n=0}^{\infty} : \forall_{n\geqslant 1}\ |x_n| \leqslant |x_{n+1}|\}$

Wystarczy wziąć wektory opisane następująco: $v_1 = \{\forall_{n\in\mathbb{N}\cup 0}\ x_{2n} = 3n, x_{2n+1} = 3n+1\}$ oraz $v_1 = \{\forall_{n\in\mathbb{N}\cup 0}\ x_{2n} = -3n, x_{2n+1} = -3n-2\}$ wtedy: $v_1 + v_2 = \{\forall_{n\in\mathbb{N}\cup 0}\ x_{2n} = 0, x_{2n+1} = -1\}$ Ponownie $v_1 + v_2$ nie należy do zbioru, więc nie jest to podprzestrzeń.

(d)$\{(x_n)_{n=0}^{\infty} : \exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{n\geqslant 0} \sum_{i=0}^{n} a_i^2 < M\}$

Przy wymnożeniu przez skalar a suma nadal jest ograniczona $\sum_{i=0}^{n} a^2 a_i^2 < M \cdot a^2$ czyli wektor należy do przestrzeni. Przy sumowaniu wektorów v_1 i v_2 możemy ograniczyć sumę poprzez: $\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)^2 < 2(a_i^2 + b_i^2) < 2(M_1 + M_2)$ Uzyskaliśmy wektor z zbioru. Zbiór jest podprzestrzenią.

Zad. 2 Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie podprzestrzenią rozpiętą przez wektory $\alpha_1 = (2,2,3,4), \alpha_2 = (6,2,3,8), \alpha_3 = (2,1,6,11)$. Przedstaw V za pomocą układu równań liniowych. Czy wektor $\beta = (4,1,9,17)$ jest zawarty w V ? Jeśli $\beta \in V$, to przedstaw β jako liniową kombinację wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Czy taka reprezentacja β jest wyznaczona jednoznacznie?

Dane wektory wpiszmy do macierzy i sprowadźmy do postaci schodkowej:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 6 & 2 & -3 & 8 \\ -2 & 1 & 6 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}w_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 6 & 2 & -3 & 8 \\ -2 & 1 & 6 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[w_3-2w_1]{w_2-6w_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -4 & -12 & 20 \\ 0 & 3 & 9 & -15 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}w_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 9 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow[w_3-3w_2]{w_1-w_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zapiszmy te wektory jako układ równań którego rozwiązania będą wektorami:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + 0x_2 \\ x_2 = 0x_1 + x_2 \\ x_3 = -\frac{3}{2}x_1 + 3x_2 \\ x_4 = 3x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

By sprawdzić czy β należy do podprzestrzeni wystarczy podstawić β do uzyskanego układu równań:

$$\begin{cases} -4 = -4 \\ 1 = 1 \\ 9 = -\frac{3}{2} \cdot -4 + 3 \\ 17 = 3 \cdot -4 - 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -4 = -4 \\ 1 = 1 \\ 9 = -\frac{3}{2} \cdot -4 + 3 \\ 17 = 3 \cdot -4 - 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -4 = -4 \\ 1 = 1 \\ 9 = 9 \\ 17 = -17 \end{cases}$$

Wektor β nie spełnia układu zatem nie należy do V czyli nie ma też współrzędnych.

Zad. 3 Dla ustalonego $n \geqslant 1$ rozpatrzmy funkcje $f_1, \ldots, f_n \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pokaż, że funkcje $f_1, \ldots, f_n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy istnieją liczby rzeczywiste $a1 < a2 < \ldots < an$ takie, że wektory $v_i = (f_1(a_i), \ldots, f_n(a_i)) \in \mathbb{R}^n$, gdzie $i = 1, \ldots, n$, są liniowo niezależne.

Udowodnijmy wpierw lemat:
Jeżeli wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są wierszami macierzy a $w_1, w_2, \ldots, w_n$ są kolumnami to jeżeli $v_1, v_2, \ldots, v_n$ liniowo niezależne $\iff$ $w_1, w_2, \ldots, w_n$ liniowo niezależne.

Dowód. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ liniowo niezależne to daną macierz da się sprowadzić do postaci schodkowej zredukowanej. Zatem żadnego wektora z $w_1, w_2, \ldots, w_n$ nie da się przedstawić jako kombinacji liniowych pozostałych, zatem $w_1, w_2, \ldots, w_n$ są liniowo niezależne. Argument w drugą stronę idzie analogicznie. $\square$

Wpierw udowodnimy wynikanie w jedną stronę. Załóżmy, że wektory $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są liniowo zależne i istnieją takie różne liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że wektory $v_i = (f_1(a_i), f_2(a_i), \ldots f_n(a_i))$ są liniowo niezależne. Z lematu wpisując te wektory w wiersze macierzy uzyskujemy, że wektory $w_i = (f_i(a_1), f_i(a_2), \ldots, f_i(a_n))$ również są liniowo niezależne.
Jednak wektory $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są liniowo zależne czyli istnieją takie skalary $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, że

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) = 0$$

Zatem:

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n w_n = 0$$

Sprzeczność. Pozostało udowodnić wynikanie w drugą stronę: Załóżmy, że wektory $f_1, f_2, \dots, f_n$ nie są liniowo zależne i nie istnieją takie różne liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$, że wektory $v_i = (f_1(a_i), f_2(a_i), \dots f_n(a_i))$ są liniowo niezależne.$(*)$

Udowodnimy je indukcyjnie:
Zauważmy wpierw, że dla $n = 1$ teza jest oczywista, ponieważ skoro f_1 liniowo nie zależne to nie jest funkcją stale równą zero. Zatem oczywiście istnieje takie a, że $v_1 = f_1(a) \neq 0$ a ta funkcja jest oczywiście liniowo niezależna.

Załóżmy zatem, że teza jest spełniona dla dowolnych $n-1$ funkcji $f_1, f_2 \dots f_{n-1}$. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ Z założenia niezależności wektorów $f_1, f_2, \dots, f_n$ wynika niezależność wektorów $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$.
Korzystając z założenia indukcyjnego uzyskujemy, że istnieją takie $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, że wektory

$$v_i = (f_1(a_i), f_2(a_i), \dots f_{n-1}(a_i))$$

są liniowo niezależne z lematu wynika zatem, że wektory

$$w_i = (f_i(a_1), f_i(a_2), \dots, f_i(a_{n-1}))$$

dla $1 \leqslant i \leqslant n-1$, również są niezależne.

Rozpatrzmy wektory $w'_i = (f_i(a_1), f_i(a_2), \dots, f_i(a_{n-1}), f_i(x))$ gdzie z założenia nie wprost $f_1, f_2, \dots, f_n$ są liniowo niezależne.

Jeżeli istnieje taki x, że podane wektory w'_i są niezależne dochodzimy do sprzeczności z założeniem nie wprost (korzystając z lematu), zatem zakładamy, że dla dowolnego x podane wektory są niezależne.
Ze schodkujmy macierz wektorów w'_i do postaci zredukowanej dla $n-1$ kolumn, możemy tak zrobić gdyż wektory w_i są niezależne.

Jednak n-ta kolumna zawiera kombinacje liniową $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0 \quad (*)$, ponieważ operacje na wierszach stworzyły kombinację i skoro układ ten jest zależny dla każdego x a współczynniki dla dowolnego x przy kombinacji liniowej się nie zmieniają oznacza to, że $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n = 0$ sprzeczność z niezależnością $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Zad. 4 Załóżmy nie wprost, że wektory $v_1, v_2, \dots, v_n$ są liniowo zależne istnieją wówczas takie skalary $b_1, b_2, \dots, b_n$, spośród których nie wszystkie są równe zero, że:

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n = 0 \quad (*)$$

Załóżmy b.s.o, że $|b_1| = max(|b_1|, |b_2|, \dots, |b_n|)$ Z założeń zadania wiemy, że dla $p = 1$ istniej takie q b.s.o załóżmy, że jest to $q = 1$, że:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{j1}| < 2|a_{11}| \iff \sum_{i=2}^{n} |a_{j1}| < |a_{11}|$$

Skoro zachodzi $(*)$ to dla każdej współrzędnej również musimy dostawać zero, zatem:

$$a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + \dots + b_n a_{n1} = 0$$

skoro $|b_1| = max(|b_1|, |b_2|, \dots, |b_n|)$ to $b_1 \neq 0$ inaczej każde $b_i = 0$. Możemy podzielić:

$$a_{11} = -a_{21}\frac{b_2}{b_1} - \dots - a_{a_n 1}\frac{b_n}{b_1}$$

Uzyskujemy:

$$|a_{11}| = |-a_{21}\frac{b_2}{b_1} - \dots - a_{n1}\frac{b_n}{b_1}| \leqslant |a_{21}| + |a_{31}| + \dots + |a_{n1}| < |a_{11}|$$

Sprzeczność wektory $v_1, v_2, \dots, v_n$ są liniowo niezależne.

Zad. 5 *Dowód.* Wpierw przekształćmy wyrażenie:

$$(x^{k-1}+\cdots+1)\cdot w_k^n(x)=(x^{n-k}+\cdots+1)\cdot w_{k-1}^n(x) \iff$$

$$\frac{x^k-1}{x-1}\cdot w_k^n(x)=\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1}\cdot w_{k-1}^n(x) \iff$$

$$w_k^n(x)=\frac{x^{n-k+1}-1}{x^k-1}\cdot w_{k-1}^n(x) \quad (*) \iff$$

$$\prod_{i=0}^{k-1}\frac{x^n-x^i}{x^k-x^i}=\frac{x^{n-k+1}-1}{x^k-1}\cdot\prod_{i=0}^{k-2}\frac{x^n-x^i}{x^{k-1}-x^i} \iff$$

$$\prod_{i=0}^{k-1}\frac{x^n-x^i}{x^k-x^i}=\frac{x^n-x^{k-1}}{x^k-1}\cdot\prod_{i=0}^{k-2}\frac{x^n-x^i}{x^k-x^{i+1}}$$

Co jest oczywiście prawdą. Zauważmy również równość:

$$w_k^n(x)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{x^n-x^i}{x^k-x^i}=\frac{x^n-1}{x^k-1}\cdot\prod_{i=0}^{k-2}\frac{x^{n-1}-x^i}{x^{k-1}-x^i}=\frac{x^n-1}{x^k-1}w_{k-1}^{n-1}(x)$$

Prawdziwa zatem jest równość:

$$w(x)_k^n=\frac{x^n-1}{x^k-1}w(x)_{k-1}^{n-1}=\frac{x^n-x^k+x^k-1}{x^k-1}w(x)_{k-1}^{n-1}=x^k\frac{x^{n-k}-1}{x^k-1}w(x)_{k-1}^{n-1}+w(x)_{k-1}^{n-1}\overset{(*)}{=}x^kw(x)_k^{n-1}+w(x)_{k-1}^{n-1}$$

Prostym wnioskiem z tej równości jest, że jeżeli $w(x)_k^{n-1}$ oraz $w(x)_{k-1}^{n-1}$ są wielomianami o nieujemnych współczynnikach całkowitych nieujemnych
to $w(x)_k^n$ również, dla każdego $n \geqslant k > 1 (w(x)_1^n = \frac{x^n-1}{x-1}$ co oczywiście jest wielomianem, dla $k=1$ indukcja również działa)

Zatem indukcyjnie jeżeli każdy wyraz postaci $w(x)_k^i$ gdzie $i<n$ da się przedstawić poprzez wielomian oznacza to, że każdy wyraz w_k^n również jest wielomianem o współczynnikach całkowitych nieujemnych.

Sprawdźmy jeszcze bazę. Dla $w(x)_1^1$,$w(x)_1^2$,$w(x)_1^2$, $w(x)_1^n$ teza jest oczywista. □

Dziękuję za uwagę.

Pozdrowienia dla sprawdzającego.

P.S
W przypadku przeczytania tej wiadomości po 24:00: Dobranoc.