Zad. 1 a) Wpierw przekształćmy wyrażenie:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^{2n+1}}-\frac{1}{n\pi^{n+1}}\right|}=\sqrt[n]{\left|\frac{n^3\pi^{n+1}-2^{2n+1}}{n2^{2n+1}\pi^{n+1}}\right|}=\frac{1}{\pi}\sqrt[n]{\left|\frac{n^3\pi^{n+1}-2^{2n+1}}{n2^{2n+1}\pi}\right|}=\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt[n]{|2n^3(\frac{\pi}{4})^{n+1}-1|}}{\sqrt[n]{n\pi}}$$

Zauważmy teraz że $\frac{\pi}{4}<1$ zatem $\lim\limits_{n\to\infty} 2n^3(\frac{\pi}{4})^{n+1}=0$.

Zatem d.d.d.n $2n^3(\frac{\pi}{4})^{n+1}-1<0$ czyli $1-2n^3(\frac{\pi}{4})^{n+1}=|1-2n^3(\frac{\pi}{4})^{n+1}|$

Oczywiście z tych dwóch faktów mamy:

$$\lim_{n\to\infty}|2n^3(\frac{\pi}{4})^{n+1}-1|=1$$

Oraz znanym faktem jest, że:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\pi}=1$$

Korzystając z własności arytmetycznych granic uzyskujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^{2n+1}}-\frac{1}{n\pi^{n+1}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt[n]{|2n^3(\frac{\pi}{4})^{n+1}-1|}}{\sqrt[n]{n\pi}}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{\pi}$$

b) Przekształćmy wyrazy ciągu i skorzystajmy z Tw Stolza:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{n}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}$$

Zatem jeżeli granica różnic kolejnych elemntów w liczniku i mianowniku istnieje to będzie równa pożądanej granicy, wiemy też że granica mianownika nie jest 0 bo dąży do ∞ zatem szukamy granicy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\frac{n\sqrt{n}+n\sqrt{n-1}}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}$$

Ponownie korzystamy z tw Stolza jeżeli to wyrażenie ma granice to jest to granica naszego początkowego ciągu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}+n\sqrt{n-1}-(n-1)\sqrt{n-1}-(n-1)\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1+(n-1)\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1+\frac{2(n-1)}{n+\sqrt{n^2-2n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1+\frac{2}{1+\frac{1}{n-1}+\sqrt{\frac{1-\frac{2}{n}}{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n}}}}=3$$

c) Ograniczmy ten ciąg przez dwa ciągi. Z nierówności AM-GM oraz ważonego AM-GM uzyskujemy:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n>\left(\sqrt[2n]{ab}\right)^n=\sqrt{ab}$$

Oraz:

$$\frac{2}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}} = \frac{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\cdot\sqrt[n]{a}+\frac{1}{\sqrt[n]{b}}\cdot\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}} > \frac{1}{\sqrt[n]{a}}^{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}^{\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}}$$

Czyli:

$$a^{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}}b^{\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}} > \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$$

Ale, zauważmy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt[n]{\frac{b}{a}}} = \frac{1}{2}$$

Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}}b^{\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}} = \sqrt{ab}$$

Korzystając ostatecznie z tw o 3 ciągach otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}$$

Zad. 2 Rozpatrzmy lewą stronę równości:

$$\bigcap_{\alpha>0}\bigcup_{\beta>0}\bigcap_{n>\beta}(x_n-\alpha, x_n+\alpha) = A$$

gdzie A to zbiór wartości przyjmowanych przez tą funkcję, udowodnimy, że g należy do tego zbioru wartości. Czyli dla każdego α, zbiór A zawiera się w:

$$\bigcup_{\beta>0}\bigcap_{n>\beta}(x_n-\alpha, x_n+\alpha)$$

Z definicji granicy możemy wziąć takie ε, że $\varepsilon < \alpha$ zatem d.d.d.N a w tym przypadku β
$\forall_{n>\beta} g-\varepsilon < a_n < \varepsilon + g$,czyli $a_n - \alpha < a_n - \varepsilon < g < a_n + \varepsilon < a_n + \alpha$. Zatem g należy do A.

Załóżmy, że istnieje element $g' \neq g, g' \in A$.
Ciąg x_n jest zbieżny tylko do punktu g zatem dla pewnego ε zachodzi $\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}(x_n - g') > \varepsilon$ inaczej g' byłoby granicą ciągu x_n Wystarczy zatem wziąć $\alpha = \varepsilon$ i dla tego α żaden ze przedziałów $(x_n-\alpha, x_n+\alpha)$ nie zawiera g' czyli nie może być w przecięciu żądanych zbiorów sprzeczność z założeniem $g' \in A$. Sprowadza nas to do: $A = \{g\}$ co chcieliśmy.

Zad. 3 *Lemat.*

$$\text{Jeżeli } \lim_{n\to\infty} a_n = g \text{ to } \lim_{n\to\infty}\tfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = g$$

Dowód. Z definicji granicy weźmy takie N, że $\forall_{n>N}\ g-\varepsilon \leqslant a_n \leqslant g+\varepsilon$ dla pewnego ustalonego ε zatem możemy przepisać granicę jako:

$$\lim_{M\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_M}{M} \leqslant \lim_{M\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{N-1}}{M} + \frac{(g+\varepsilon)(M-N)}{M} = g+\varepsilon$$

Analogicznie ograniczamy dół. Zatem dla dowolnego ε:

$$g - \varepsilon \leqslant \lim_{M\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_M}{M} \leqslant g + \varepsilon$$

Czyli:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_M}{M} = g$$

$\square$

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Zauważmy, że skoro $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ to ciąg ten musi być ograniczony z góry, przez pewną stałą nazwijmy ją $\alpha > 0$. Zatem:

$$\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1}{n} = h\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_1(b_n - h) + a_2(b_{n-1} - h) + \ldots + a_n(b_1 - h)}{n} \leqslant$$

$$\leqslant h\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \alpha \cdot \frac{|b_1 - h| + |b_2 - h| + \ldots + |b_n - h|}{n}$$

Z lematu wiemy, że ten oto ciąg zbiega do:

$$\lim_{n\to\infty} h\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \alpha \cdot \frac{|b_1 - h| + |b_2 + h| + \ldots + |b_n + h|}{n} = g \cdot h + \alpha \cdot 0$$

Analogicznie dowodzimy ograniczenie przez ciąg z dołu który również zbiega do $g \cdot h$ zatem z trzech ciągów wykazaliśmy naszą pożądaną granice.

Zad. 4 Udowodnimy indukcyjnie równości:

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = q_n + \sqrt{2}r_n + \sqrt{3}s_n + \sqrt{6}t_n$$

$$(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = q_n - \sqrt{2}r_n + \sqrt{3}s_n - \sqrt{6}t_n$$
$$(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^n = q_n + \sqrt{2}r_n - \sqrt{3}s_n - \sqrt{6}t_n$$
$$(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})^n = q_n - \sqrt{2}r_n - \sqrt{3}s_n + \sqrt{6}t_n$$

Udowodnimy jedno równanie indukcyjnie reszta idzie analogicznie: dla $n = 1$ równość jest oczywista: załóżmy, że spełniona jest równość:

$$(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = q_n - \sqrt{2}r_n + \sqrt{3}s_n - \sqrt{6}t_n$$

z definicji s_n,t_n,r_n oraz q_n są zdefiniowane jako:

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = q_n + \sqrt{2}r_n + \sqrt{3}s_n + \sqrt{6}t_n$$

mnożąc przez $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ uzyskamy s_{n+1},t_{n+1},r_{n+1} oraz q_{n+1}

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^{n+1} = (q_n + 2r_n + 3s_n + \sqrt{2}(r_n + q_n + 3t_n) + \sqrt{3}(s_n + 2t_n + q_n) + \sqrt{6}(s_n + r_n + t_n)$$

$$= (q_{n+1} + \sqrt{2}r_{n+1} + \sqrt{3}s_{n+1} + \sqrt{6}t_{n+1})$$

czyli:

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + 2r_n + 3s_n \\ r_{n+1} = r_n + q_n + 3t_n \\ s_{n+1} = s_n + 2t_n + q_n \\ t_{n+1} = s_n + r_n + t_n \end{cases}$$

Dla $n + 1$:

$$(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})^{n+1} = (q_n - \sqrt{2}r_n + \sqrt{3}s_n - \sqrt{6}t_n)(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}) =$$

$$= (q_n + 2r_n + 3s_n - \sqrt{2}(r_n + q_n + 3t_n) + \sqrt{3}(s_n + 2t_n + q_n) - \sqrt{6}(s_n + r_n + t_n)$$
$$= (q_{n+1} - \sqrt{2}r_{n+1} + \sqrt{3}s_{n+1} - \sqrt{6}t_{n+1})$$

Czyli uzyskaliśmy tak jak wcześniej:

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + 2r_n + 3s_n \\ r_{n+1} = r_n + q_n + 3t_n \\ s_{n+1} = s_n + 2t_n + q_n \\ t_{n+1} = s_n + r_n + t_n \end{cases}$$

Udowodniliśmy indukcyjnie jeden ze wzorów pozostałe udowadniamy analogicznie.
Korzystając z nich wyliczamy q_n,s_n,r_n oraz t_n:

$$\begin{cases} A_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = q_n + \sqrt{2}r_n + \sqrt{3}s_n + \sqrt{6}t_n \\ B_n = (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = q_n - \sqrt{2}r_n + \sqrt{3}s_n - \sqrt{6}t_n \\ C_n = (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^n = q_n + \sqrt{2}r_n - \sqrt{3}s_n - \sqrt{6}t_n \\ D_n = (1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})^n = q_n - \sqrt{2}r_n - \sqrt{3}s_n + \sqrt{6}t_n \end{cases}$$

Zapisujemy dany układ jako macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6} & A_n \\ 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -\sqrt{6} & B_n \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -\sqrt{6} & C_n \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{3} & \sqrt{6} & D_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_n+B_n+C_n+D_n}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{A_n-B_n+C_n-D_n}{4\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{A_n+B_n-C_n-D_n}{4\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{A_n-B_n-C_n+D_n}{4\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

czyli:

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{A_n+B_n+C_n+D_n}{4} \\ r_n &= \frac{A_n-B_n+C_n-D_n}{4\sqrt{2}} \\ s_n &= \frac{A_n+B_n-C_n-D_n}{4\sqrt{3}} \\ t_n &= \frac{A_n-B_n-C_n+D_n}{4\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Pozostaje nam obliczyć granice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n - B_n + C_n - D_n}{A_n + B_n + C_n + D_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{B_n}{A_n} + \frac{C_n}{A_n} - \frac{D_n}{A_n}}{1 + \frac{B_n}{A_n} + \frac{C_n}{A_n} + \frac{D_n}{A_n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ostatnie równość jest prawdziwa ponieważ granice postaci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})}^n = 0$$

Ponieważ,

$$\left| \frac{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})} \right| < 1$$

Analogicznie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{A_n} = 0$$

Analogicznie wyliczamy granice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{q_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{q_n} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Zad. 5 Rozbijmy zadanie na przypadki pierwszy $a_0, a_1 \geqslant 4$

Dla każdego n zachodzi $a_n > 4$, ponieważ $a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n} > 2 + 2 = 4$

Zauważmy, że $max(a_n, a_{n-1}) \geqslant 2\sqrt{max(a_n, a_{n-1})} \geqslant \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n} \geqslant a_{n+1}$
Pierwsza nierówność jest prawdziwa, ponieważ $max(a_n, a_{n-1}) > 4$ oraz $2\sqrt{max(a_n, a_{n-1})} \geqslant 2\sqrt{max(a_n, a_{n+1})} \geqslant a_{n+2}$ Jesteśmy zatem wstanie oszacować 2 poprzednie liczby przez maximum ich poprzedników zatem łącząc otrzymujemy:

$$2\sqrt{2\sqrt{max(a_n, a_{n-1})}} = 2\sqrt{max(2\sqrt{max(a_n, a_{n-1})}, 2\sqrt{max(a_n, a_{n-1})})} \geqslant 2\sqrt{max(a_{n+1}, a_{n+2})} \geqslant a_{n+3}$$

Analogicznie a_{n+4}

cofając się tym oszacowaniem możemy oszacować liczby a_{2k} oraz a_{2k+1} za pomocą a_0 i a_1

$$2\ \sqrt[2^k]{2^{2^k-1}} \cdot \sqrt[2^{2k+1}]{max(a_0, a_1)} \geqslant a_{2k}, a_{2k+1}$$

Ale:

$$\lim_{k\to\infty} 2\ \sqrt[2^k]{2^{2^k-1}} \cdot \sqrt[2^{2k+1}]{max(a_0, a_1)} = \lim_{n\to\infty} 2\ \sqrt[n]{2^{n-1}}\ \sqrt[2n]{max(a_0, a_1)} = 4$$

Zatem ciąg a_n z Tw o trzech ciągach również dąży do 4

Analogicznie rozpatrzmy przypadek $a_0, a_1 \leqslant 4$ zastępujemy max na min oraz odwracamy wszystkie nierówności.

pozostają przypadki: $a_0 > 4 > a_1$ Powtarzamy operację jak dla wcześniejszego przypadku tylko tym razem szacujemy tymi ciągami z obu stron, jeżeli w pewnym momencie zajdzie $x_n, x_{n-1} < 4$ lub $x_n, x_{n-1} > 4$ to zadanie sprowadza się do poprzednich przypadków. Jeżeli taka sytuacja nie zajdzie to możemy wykorzystać oszacowanie z obu przypadków na min i max, ponieważ $min(x_n, x_{n-1}) < 4$, a $max(x_n, x_{n-1}) > 4$ oba te oszacowania dolne i górne dążą do 4