Analiza Matematyczna I.1

Piotr Nayar, podstawowe fakty I

1. (nierówności między średnimi) Jeśli $a_1, \ldots, a_n > 0$, to
$$\frac{n}{a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1}} \le \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$
2. (nierówność Cauchy'ego-Schwarza) Mamy $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$.
3. (twierdzenie o 3 ciągach) Jeśli $a_n \le b_n \le c_n$ oraz $a_n, c_n \to g$, to $b_n \to g$.
4. Dla $a_1, \ldots, a_k > 0$ mamy $\sqrt[n]{a_1^n + \ldots + a_k^n} \to \max(a_1, \ldots, a_k)$, gdy $n \to \infty$.
5. Jeśli $a_n \to g$, to $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \to g$.
6. Jeśli $a_n > 0$ oraz $a_n \to g$, to $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \to g$.
7. Jeśli $a_n > 0$ oraz $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to g$, to $\sqrt[n]{a_n} \to g$.
8. (twierdzenie Stolza) Załóżmy, że $b_n \neq 0$ oraz (b_n) jest ściśle monotoniczny oraz $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to g$. Załóżmy ponadto, że $a_n, b_n \to 0$ **lub** $b_n \to \infty$. Wtedy $\frac{a_n}{b_n} \to g$.
9. $\limsup_{n\to\infty} a_n \le M \iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n \ge N}\ a_n < M + \varepsilon$.
10. $\liminf_{n\to\infty} a_n \ge m \iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n \ge N}\ a_n > m - \varepsilon$.
11. Niech f będzie niemalejąca. Wtedy ciąg (a_n) spełniający $a_{n+1} = f(a_n)$ jest monotoniczny.
12. Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący, a ciąg $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ malejący. Ponadto $a_n, b_n \to \mathrm{e}$.
13. Mamy $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Po zlogarytmowaniu $\ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n} < \ln(n) - \ln(n-1)$.
14. Jeśli $x > -1$ oraz $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 0$, to $(1+x)^n \ge 1 + nx$. Jeśli $-1 < x < \frac{1}{n}$, to $(1+x)^n \le \frac{1}{1-nx}$.
15. Dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $\mathrm{e}^x \ge 1 + x$. Dla $x < 1$ mamy $\mathrm{e}^x \le \frac{1}{1-x}$.
16. Dla $x > -1$ mamy $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$.
17. Jeśli $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, to $\frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} \to 1$ oraz $\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \to 1$.
18. Jeśli $a_n \to 0$ oraz $a_n b_n \to g$, to $(1 + a_n)^{b_n} \to e^g$.
19. (warunek Cauchy'ego) (a_n) zbieżny $\iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n,m>N} |a_n - a_m| < \varepsilon$.
20. Jeśli $a > 0$ to $\sqrt[n]{n^a} \to 1$ oraz $\sqrt[n]{a} \to 1$.
21. Jeśli $a, b > 0$, to $\frac{(\ln n)^a}{n^b} \to 0$. Ponadto ciąg ten jest od pewnego miejsca monotoniczny.
22. Jeśli $a \in \mathbb{R}$ oraz $|b| < 1$, to $b^n n^a \to 0$.

23. Jeśli $a, b > 0$, to $a^n n^{bn} \to \infty$ oraz $\dfrac{\mathrm{e}^{n^a}}{n^b} \to \infty$

24. Dla $n \geq 1$ mamy $\mathrm{e}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq n\,\mathrm{e}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

25. Jeśli $b > 0$ to $\frac{b^n}{n!} \to 0$ oraz $\frac{n!}{n^n} \to 0$.