Analiza Matematyczna I.1

Piotr Nayar, podstawowe fakty I

1. Jeśli $a_1, \ldots, a_n > 0$, to $\frac{n}{a_1^{-1}+\ldots+a_n^{-1}} \leq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}$.
2. Mamy $(\sum_{k=1}^n a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^n a_k^2)(\sum_{k=1}^n b_k^2)$.
3. Jeśli $a_n \leq b_n \leq c_n$ oraz $a_n, c_n \to g$, to $b_n \to g$.
4. Dla $a_1, \ldots, a_k > 0$ mamy $\sqrt[n]{a_1^n + \ldots + a_k^n} \to \max(a_1, \ldots, a_k)$, gdy $n \to \infty$.
5. Jeśli $a_n \to g$, to $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \to g$.
6. Jeśli $a_n > 0$ oraz $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to g$, to $\sqrt[n]{a_n} \to g$.
7. Jeśli $a_n > 0$ oraz $a_n \to g$, to $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \to g$.
8. Załóżmy, że $b_n \neq 0$ oraz (b_n) jest ściśle monotoniczny oraz $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to g$. Załóżmy ponadto, że $a_n, b_n \to 0$ **lub** $b_n \to \infty$. Wtedy $\frac{a_n}{b_n} \to g$.
9. $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq M \iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n \geq N}\ a_n < M + \varepsilon$.
10. $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq m \iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n \geq N}\ a_n > m - \varepsilon$.
11. Niech f będzie niemalejąca. Wtedy ciąg (a_n) spełniający $a_{n+1} = f(a_n)$ jest monotoniczny.
12. Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący, a ciąg $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ malejący. Ponadto $a_n, b_n \to e$.
13. Mamy $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Po zlogarytmowaniu $\ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n} < \ln(n) - \ln(n-1)$.
14. Jeśli $x > -1$ oraz $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, to $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Jeśli $-1 < x < \frac{1}{n}$, to $(1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}$.
15. Dla $x \in \mathbb{R}$ mamy $e^x \geq 1 + x$. Dla $x < 1$ mamy $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.
16. Dla $x > -1$ mamy $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.
17. Jeśli $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, to $\frac{e^{x_n}-1}{x_n} \to 1$ oraz $\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \to 1$.
18. Jeśli $x_n \to 0$, to $e^{x_n} = 1 + x_n + \frac{x_n^2}{2!} + \ldots + \frac{x_n^k}{k!} + o(x_n^k)$
19. Jeśli $x_n \to 0$, to $\ln(1+x_n) = x_n - \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{1}{3}x_n^3 - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}x_n^k + o(x_n^k)$.
20. Jeśli $a_n \to 0$ oraz $a_n b_n \to g$, to $(1 + a_n)^{b_n} \to e^g$.
21. Warunek Cauchy'ego: (a_n) zbieżny $\iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_N \forall_{n,m>N} |a_n - a_m| < \varepsilon$.
22. Jeśli $a, b > 0$, to $\frac{(\ln n)^a}{n^b} \to 0$.
23. Jeśli $a \in \mathbb{R}$ oraz $|b| < 1$, to $b^n n^a \to 0$.
24. Jeśli $a, b > 0$, to $a^n n^{bn} \to \infty$ oraz $\frac{e^{n^a}}{n^b} \to \infty$
25. Dla $n \geq 1$ mamy $e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq ne(\frac{n}{e})^n$.