Z1

~~Oznaczm~~
Zauważmy wpierw, że $a_n < a_{n+1}$, ponieważ
$\sqrt{2^n} < \sqrt{2^n + \sqrt{2^{n+1}}}$

Udowodnimy teraz, że $\forall_n\ a_n < 4$

Oznaczmy ~~pierw~~ element $x_n = \sqrt{2^n}$ elementy x_i, $i \le n$ będziemy generować w następujący sposób $x_{n-1} = \sqrt{2^{n-1} + \underbrace{\cancel{\sqrt{2^n}}}_{x_n}}$

Zauważmy, że $x_n = \sqrt{2^n} < 2^{n+1}$

Udowodnimy indukcyjnie, że $x_i < 2^{i+1}$

załóżmy $x_i < 2^{i+1}$, wtedy:

$$x_{i-1} = \sqrt{2^{i-1} + x_i} < \sqrt{2^{i-1} + 2^{i+1}} < 2^i$$

, ale $2^{i-1} + 2^{i+1} < 2^{2i} \iff 4 + 1 < 2^{i+1}$ co dla $i \ge 2$ jest prawdą zatem dla $a_n = x_1 < 2^{1+2} = 4$

Zatem $\forall n\ a_n < 4$ oraz $a_n < a_{n+1}$ czyli a_n jest zbieżny.

Z2

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$

$x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $\qquad a_2 = \frac{1}{2}$

$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ $\qquad (x-1)(x+\frac{1}{2}) = 0$

czyli $a_n = -\frac{1}{2}A + 1 \cdot B$

z a_0 i a_1 $\qquad 0 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 0$

$1 = -\frac{1}{2}A + 1B$

$\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 A + 1B$

$$\begin{cases} B = 1 + \frac{1}{2}A \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}A + 1 + \frac{1}{2}A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \\ A = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

a_n:

$-\frac{1}{2}$

1

$2 = \cancel{3}A + 4$

$A = -\frac{2}{3}$