Zadanie 1

Niech $c_0, c_1, \dots c_k \in \mathbb{C}$, przy czym $c_0 \cdot c_k \neq 0$. Rozważmy rekurencję

$$c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_k a_{n+k} = 0. \tag{1}$$

Niech $W(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_k z^k$ i niech $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_l$ będą wszystkimi różnymi pierwiastkami wielomianu W o krotnościach $w_1, w_2, \dots w_l$ odpowiednio. Innymi słowy

$$W(z) = c_k (z-\lambda_1)^{w_1} (z-\lambda_2)^{w_2} \dots (z-\lambda_l)^{w_l}.$$

Niech $P_1, P_2, \dots P_l$ będą dowolnymi wielomianami, przy czym stopień wielomianu P_j jest $< w_j$, dla każdego $j = 1, \dots, l$. Udowodnimy, że ciąg

$$a_n = P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_l(n)\lambda_l^n \tag{2}$$

spełnia rekurencję (1).

Rozwiązanie zadania zacznimy od lematu.

Lemat 1

Niech $F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ będzie dowolnym wielomianem oraz niech λ będzie jego pierwiastkiem o krotności $s \geq 2$. Innymi słowy F jest taki, że $F(z) = (z-\lambda)^s G(z)$ dla pewnego wielomianu G. Zdefiniujmy F' następująco:

$$F`(z) = a_0 \cdot 0 + a_1 z \cdot 1 + a_2 z^2 \cdot 2 + \cdots + a_n z^n \cdot n.$$

Tezą naszego lematu jest, że λ jest pierwiastkiem F' krotności $s-1$. Innymi słowy

$$F'(z) = (z-\lambda)^{s-1} T(z),$$

gdzie $T(z)$ jest wielomianem.

Dowód

Udowodnimy lemat przez indukcję po stopniu wielomianu. Jeżeli F jest stopnia 2 oraz λ jest 2-krotnym pierwiastkiem F, to mamy

$$F(z) = (z-\lambda)^2 = z^2 - 2\lambda z + \lambda^2.$$

Wtedy

$$F'(z) = (z-\lambda)^2 = z^2 \cdot 2 - 2\lambda z \cdot 1 + \lambda^2 \cdot 0 = 2z^2 - 2\lambda z = 2z(z-\lambda),$$

co dowodzi, że λ jest 1-krotnym pierwiastkiem F'.

Teraz przejdźmy do kroku indukcyjnego. Weźmy wielomian F stopnia $n \geq 3$ oraz λ będące jego s-krotnym pierwiastkiem, gdzie $2 \leq s \leq n$. Zakładamy, że nasza teza zachodzi dla każdego wielomianu stopnia mniejszego niż n. Mamy

$$F(z) = (z-\lambda)^s G(z) = (z-\lambda)^2 (z-\lambda)^{s-2} G(z) = (z-\lambda)^2 T(z),$$

gdzie $T(z) := G(z)(z-\lambda)^{s-2}$. Zauważmy przy tym, że λ jest $s-2$-krotnym pierwiastkiem T. Zauważmy także, że skoro F jest stopnia n, to T jest stopnia $n-2$. Możemy więc zapisać T jako

$$T(z) = \sum_{i=0}^{n-2} t_i z^i.$$

Wtedy mamy

$$F(z) = (z-\lambda)^2 T(z) = (z^2 - 2z\lambda + \lambda^2) T(z) = \sum_{i=0}^{n-2} t_i z^{i+2} - 2\lambda \sum_{i=0}^{n-2} t_i z^{i+1} + \lambda^2 \sum_{i=0}^{n-2} t_i z^i.$$

Jeżeli jeżeli zdefiniujemy $t_x = 0$ dla $x < 0$ oraz $x > n-2$, to mamy

$$F(z) = \sum_{i=0}^{n} t_{i-2} z^i - 2\lambda \sum_{i=0}^{n} t_{i-1} z^i + \lambda^2 \sum_{i=0}^{n} t_i z^i = \sum_{i=0}^{n} (t_{i-2} - 2\lambda t_{i-1} + \lambda^2 t_i) z^i.$$

Wtedy

$$
\begin{aligned}
F'(z) &= \sum_{i=0}^{n} i(t_{i-2} - 2\lambda t_{i-1} + \lambda^2 t_i) z^i \\
&= z^2 \sum_{i=0}^{n-2} (i+2) t_i z^i - 2z\lambda \sum_{i=0}^{n-2} (i+1) t_i z^i + \lambda^2 \sum_{i=0}^{n-2} i t_i z^i \\
&= z^2 \sum_{i=0}^{n-2} i t_i z^i + 2z^2 \sum_{i=0}^{n-2} t_i z^i - 2z\lambda \sum_{i=0}^{n-2} i t_i z^i - 2z\lambda \sum_{i=0}^{n-2} t_i z^i + \lambda^2 \sum_{i=0}^{n-2} i t_i z^i \\
&= z^2 T'(z) + 2z^2 T(z) - 2z\lambda T'(z) - 2z\lambda T(z) + \lambda^2 T'(z) \\
&= T'(z)(z^2 - 2z\lambda + \lambda^2) + T(z)(2z^2 - 2z\lambda) \\
&= T'(z)(z-\lambda)^2 + 2zT(z)(z-\lambda).
\end{aligned}
$$

Z powyższego równania widzimy, że jeśli $s = 2$, to nasza teza jest spełniona, bo λ jest 1-krotnym pierwiastkiem F'. Jeżeli $s > 2$, to z założenia indukcyjnego λ jest $s-3$ krotnym pierwiastkiem T, tak więc λ jest $s-1$-krotnym pierwiastkiem $T'(z)(z-\lambda)^2$. Następnie, skoro λ jest $s-2$-krotnym, to λ jest $s-1$-krotnym pierwiastkiem $2zT(z)(z-\lambda)$. To dowodzi, że λ jest $s-1$-krotnym pierwiastkiem F'.

Lemat 2

Niech $F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ będzie dowolnym wielomianem oraz niech λ będzie jego pierwiastkiem o krotności $s \geq 2$. Innymi słowy F jest taki, że $F(z) = (z-\lambda)^s G(z)$ dla pewnego wielomianu G. Zdefiniujmy F_j następująco:

$$F_j(z) = a_0 \cdot 0^j + a_1 z \cdot 1^j + a_2 z^2 \cdot 2^j + \cdots + a_n z^n \cdot n^j,$$

przy czym zakładamy, że $0^0 = 1$. Tezą naszego lematu jest, że dla każdego j takiego, że $0 \leq j < s$ liczba λ jest pierwiastkiem o krotności $s - j$ wielomianu F.

Dowód

Ten lemat udowodnimy przez indukcję po j. Dla $j = 0$ mamy $F_0 = F$, więc λ jest pierwiastkiem o krotności s wielomianu F_0. Teraz weźmy j takie, że $1 \leq j < s$ i załóżmy, że λ jest $s-(j-1)$-krotnym pierwiastkiem wielomianu F_{j-1}. Widzimy, że

$$F_j = F'_{j-1},$$

gdzie notacja G' dla dowolnego wielomianu G jest zdefiniowane tak jak w treści lematu (1). Skoro $j < s$, to $s-(j-1) \geq 2$, zatem z lematu (1) mamy, że λ jest pierwiastkiem F_j o krotności $s-(j-1)-1 = s-j$, co kończy dowód lematu.

Rozwiązanie Zadania

Teraz przejdźmy do rozwiązania zadania. Przekształcimy równoważnie tezę. Wstawmy definicję (2) do równania (1). Mamy

$$\sum_{i=0}^{k} c_i a_{n+i} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{l} c_i P_j(n+i) \lambda_j^{n+i} = 0.$$

Możemy zamienić kolejność sumowania, zatem powyższe równanie sprowadza się do

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{i=0}^{k} c_i P_j(n+i) \lambda_j^{n+i} = 0.$$

Aby to wykazać pokażemy, że dla każdego $j = 1, \ldots, l$ mamy

$$\sum_{i=0}^{k} c_i P_j(n+i) \lambda_j^{n+i} = 0.$$

Jeżeli $\lambda_j = 0$, to powyższe równanie jest trywialne spełnione. W przeciwnym przypadku dzielimy równanie stronami przez λ^n. Mamy

$$\sum_{i=0}^{k} c_i P_j(n+i)\lambda_j^i = 0.$$

Możemy teraz zapisać $P_j(x)$ jako $P_j(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots p_r x^r$, gdzie $r < w_j$, czyli stopień P_j jest mniejszy od krotności pierwiastka λ. Wtedy powyższe równanie możemy zapisać jako

$$\sum_{i=0}^{k} c_i \lambda_j^i \sum_{t=0}^{r} p_t (n+i)^t = 0.$$

Ponownie korzystamy z przemienności sumy

$$\sum_{t=0}^{r} p_t \sum_{i=0}^{k} c_i \lambda_j^i (n+i)^t = 0.$$

Teraz pokażemy, że dla każdego $t = 0, 1, \dots, r$ mamy

$$\sum_{i=0}^{k} c_i \lambda_j^i (n+i)^t = 0.$$

Korzystając z rozwinięcia dwumianu $(a+b)^n$, mamy

$$\sum_{i=0}^{k} c_i \lambda_j^i \sum_{h=0}^{t} \binom{t}{h} i^h n^{t-h} = 0.$$

Ponownie skorzystamy z przemienności sumy

$$\sum_{h=0}^{t} \binom{t}{h} n^{t-h} \sum_{i=0}^{k} c_i \lambda_j^i i^h = 0.$$

Widzimy jednak, skoro λ jest w_j-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_k z^k$ oraz $0 \leq h \leq t \leq r < w_j$, to z lematu (1) mamy

$$\sum_{i=0}^{k} c_i \lambda_j^i i^h = 0,$$

co dowodzi tezę, a ponieważ powyższe przekształcenia były równoważne, kończy także rozwiązanie zadania.