Analiza Matematyczna I.1

Ciągi - kilka typów zadań

1 Twierdzenie o trzech ciągach

Twierdzenie 1 (Twierdzenie o trzech ciągach)**.** Załóżmy, że ciągi (a_n), (b_n) oraz (c_n) spełniają $a_n \le b_n \le c_n$ dla $n \ge 1$. Wówczas jeśli ciągi (a_n) oraz (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g, to ciąg (b_n) jest również zbieżny do g.

Dowód. Załóżmy, że $a_n, c_n \to g$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje N_1 takie, że dla $n \ge N_1$ mamy $g - \varepsilon < c_n < g + \varepsilon$. Podobnie istnieje N_2 takie, że dla $n \ge N_2$ mamy $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$. Stąd dla $n \ge \max(N_1, N_2)$ mamy $g - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < g + \varepsilon$, czyli $|b_n - g| < \varepsilon$. □

Uwaga. Oczywiście w powyższym twierdzeniu można zakładać, że nierówność $a_n \le b_n \le c_n$ jest prawdziwa jedynie dla dostatecznie dużych n.

Bardzo wiele przykładów użycia twierdzenia o trzech ciągach pojawiło się już przy omawianiu hierarchii ciągów. Tutaj zwrócimy jedynie uwagę na sytuację, gdy ciąg zadany jest za pomocą sumy, której nie umiemy policzyć. Można wówczas próbować szacować sumę z dwóch stron w taki sposób, aby otrzymane oszacowania miały prostszą postać.

Zadanie 1. Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n+n}{n^2+n}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$a_n \le \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+1} + \ldots + \frac{n+n}{n^2+1} = \frac{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})}{1 + \frac{1}{n^2}} \to \frac{3}{2}$$

oraz

$$a_n \ge \frac{n+1}{n^2+n} + \frac{n+2}{n^2+n} + \ldots + \frac{n+n}{n^2+n} = \frac{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n} = \frac{1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})}{1 + \frac{1}{n}} \to \frac{3}{2}.$$

Stąd $a_n \to \frac{3}{2}$. □

Kolejne zadanie wymaga nieco więcej pomysłowości przy szacowaniu. Pojawia się tu motyw tzw. *sumy teleskopowej*.

Zadanie 2. Oblicz granicę ciągu $a_n = n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$.

Rozwiązanie. Dla $n > 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Stąd

$$n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{k=n}^{2n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \le a_n \le n\sum_{k=n}^{2n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = n\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

Zatem

$$n \cdot \frac{n+1}{(2n+1)n} \le a_n \le n \cdot \frac{n+1}{2n(n-1)}.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach łatwo dostajemy $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. □

2 Ciąg $\sqrt[n]{a_1^n + \ldots + a_k^n}$

Fakt 1. Niech $a_1, \ldots, a_k \geq 0$. Wówczas $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Dowód. Niech $M = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Oczywiście

$$M = \sqrt[n]{M^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{kM^n} = M\sqrt[n]{k}.$$

Skoro $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$, więc teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach. □

Zadanie 3. Oblicz granicę ciągu $b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + e^n}$.

Rozwiązanie. Biorąc w powyższym fakcie $k = 3$, $a_1 = 2, a_2 = 3$ oraz $a_3 = e$ dostajemy, że $b_n \to \max(2, 3, e) = 3$. □

Niekiedy powyższa struktura jest nieco ukryta.

Zadanie 4. Oblicz granicę ciągu $b_n = \sqrt[n]{2^{5n+2} + 3^{3n} + 5^{2n}}$.

Rozwiązanie. Mamy $b_n = \sqrt[n]{4 \cdot 32^n + 27^n + 25^n}$, czyli biorąc $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 32$ oraz $a_5 = 27$ i $a_6 = 25$ dostajemy, że $b_n \to \max(32, 27, 25) = 32$. □

Czasem w zadaniu może pojawić się parametr.

Zadanie 5. Udowodnij, że granica $g = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(2^c+1)^{2n}} + (2^c - 1)^{2n}\right)^{1/n}$ istnieje dla każdego $c \in \mathbb{R}$ oraz wykaż, że $g \geq 3 - 2\sqrt{2}$.

Rozwiązanie. Biorąc $a_1 = (2^c + 1)^{-2}$ oraz $a_2 = (2^c - 1)^2$ dostajemy $g = \max(a_1, a_2)$. Biorąc $t = 2^c \in (0, \infty)$ mamy $g = \max((t + 1)^{-2}, (t - 1)^2)$. Należy zatem wykazać, że $\max((t + 1)^{-2}, (t - 1)^2) \geq 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$. Należy zatem wykazać, że $\max(\frac{1}{t+1}, |t - 1|) \geq \sqrt{2} - 1$. Jeśli $t \geq \sqrt{2}$ nierówność zachodzi, gdyż $|t - 1| \geq \sqrt{2} - 1$. Jeśli $0 < t < \sqrt{2}$, to $\frac{1}{1+t} \geq \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$. □

Zadanie 6. Oblicz granicę ciągu $b_n = \frac{\ln(2^n+3^n+4^n)}{\sqrt{n^2+n+1}}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że z ciągłości logarytmu mamy

$$c_n := \frac{1}{n}\ln(2^n + 3^n + 4^n) = \ln(\sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}) \to \ln(\max(2, 3, 4)) = \ln 4 = 2\ln 2.$$

Stąd $b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}} c_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} c_n \to 1 \cdot 2\ln 2 = 2\ln 2$. □

Uwaga. Niestety Fakt 1 da się zastosować tylko w bardzo szczególnych sytuacjach. Dla przykładu, nie będzie się go dało bezpośrednio użyć w przypadku ciągów $\sqrt[n]{2^n + n^2}$ lub $\sqrt[n]{3^n - 2^n}$.

3 Mała sztuczka z logarytmem

Będziemy korzystali z podstawowego faktu: jeśli $x_n \to 0$ oraz $x_n \neq 0$, to $\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \to 1$.

Zadanie 7. Niech $a > 0$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$.

Rozwiązanie. Niech $a_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$. Jeśli $a = 1$ to $a_n = 0$, więc oczywiście $a_n \to 0$. Załóżmy, że $a \neq 1$. Niech $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Wtedy $\ln(1 + b_n) = \frac{\ln a}{n}$. Oczywiście $b_n \to 0$. Mamy

$$a_n = nb_n = n \cdot \ln(1 + b_n) \cdot \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} = \ln a \cdot \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} \to \ln a.$$

$\square$

Uwaga. Zadanie to można również rozwiązać zauważając, że jest prawdziwy ogólniejszy fakt: jeśli $x_n \to 0$ oraz $x_n \neq 0$, to $\frac{a^{x_n}-1}{x_n} \to \ln a$. Powyższe zadanie otrzymujemy biorąc $x_n = \frac{1}{n}$. Fakt jest natomiast bardzo prosty do udowodnienia, gdyż biorąc $y_n = x_n \ln a \to 0$, dostajemy $\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \frac{e^{x_n \ln a}-1}{x_n \ln a} \cdot \ln a = \frac{e^{y_n}-1}{y_n} \cdot \ln a \to \ln a$, gdyż na mocy znanego faktu mamy $\frac{e^{y_n}-1}{y_n} \to 1$.

Kolejne zadanie przyda nam się w następnym rozdziale, dlatego sformułujemy je jako fakt.

Zadanie 8. Niech $a \in \mathbb{R}$. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} n\left((1 + \frac{1}{n})^a - 1\right) = a$.

Rozwiązanie. Dla $a = 0$ teza zachodzi w oczywisty sposób. Niech $b_n = (1 + \frac{1}{n})^a - 1$. Oczywiście $b_n \to 0$. Ponadto, jeśli $a \neq 0$ to $b_n \neq 0$. Mamy $\ln(1 + b_n) = a\ln(1 + \frac{1}{n})$. Zatem

$$a_n = nb_n = \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} \cdot n\ln(1 + b_n) = \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} \cdot na\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} \cdot a \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to a.$$

Skorzystaliśmy dwukrotnie z podstawowego faktu: raz dla $x_n = b_n$ i drugi raz dla $x_n = \frac{1}{n}$. $\square$

Możemy również sformułować ogólniejszy fakt.

Fakt 2. Niech $a \in \mathbb{R}$ i niech $x_n \to 0$ oraz $x_n \neq 0$. Wtedy $\frac{(1+x_n)^a-1}{x_n} \to a$.

Dowód. Możemy ponownie założyć, że $a \neq 0$. Niech $b_n = (1 + x_n)^a - 1 \to 0$. Wtedy

$$\frac{(1 + x_n)^a - 1}{x_n} = \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} \cdot \frac{\ln(1 + b_n)}{x_n} = \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} \cdot a \cdot \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} \to 1 \cdot a \cdot 1 = a.$$

$\square$

Zadanie 9. Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n} - 1)$.

Rozwiązanie. Niech $b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \to 0$. Wtedy $\ln(1 + b_n) = \frac{1}{n}\ln n$. Zatem $a_n = \frac{b_n}{\ln(1+b_n)} \to 1$. $\square$

4 Mnożenie przez sprzężenie

Zadanie 10. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Rozwiązanie. Ponieważ $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, mamy $x - y = \frac{x^2-y^2}{x+y}$ dla $x + y \neq 0$. Niech $x_n = \sqrt{n+1}$ oraz $y_n = \sqrt{n}$. Wtedy $x_n^2 - y_n^2 = 1$ i mamy

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n}(x_n - y_n) = \sqrt{n} \cdot \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n + y_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \to \frac{1}{2}.$$

Skorzystaliśmy z twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic i z faktu, że jeśli $a_n \to g$, $a_n \geq 0$, to $\sqrt{a_n} \to \sqrt{g}$ (fakt z notatek o hierarchii ciągów). $\square$

Zadanie 11. Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt{n^6 + n^3 + 1} - n^3$.

Rozwiązanie. Biorąc $x_n = \sqrt{n^6 + n^3 + 1}$ oraz $y_n = n^3$ dostajemy

$$a_n = x_n - y_n = \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n + y_n} = \frac{n^3 + 1}{\sqrt{n^6 + n^3 + 1} + n^3} = \frac{1 + \frac{1}{n^3}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} + 1} \to \frac{1}{2}$$

z ciągłości pierwiastka i twierdzenia o arytmetycznych własnościach granic. □

Uwaga. Zadanie to można również rozwiązać korzystając z Faktu 2. Biorąc $x_n = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6} \to 0$ (zauważmy, że $n^3 x^n \to 1$) dostajemy

$$a_n = n^3 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} - 1 \right) = n^3((1 + x_n)^{\frac{1}{2}} - 1) = n^3 x_n \cdot \frac{(1 + x_n)^{\frac{1}{2}} - 1}{x_n} \to 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 12. Oblicz granicę ciągu $a_n = n^3(\sqrt[5]{n^5 + n} - \sqrt[5]{n^5 - n})$.

Rozwiązanie. Ze względu na występowanie pierwiasta piątego stopnia, możemy skorzystać ze wzoru

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1}), \qquad k \geq 2$$

dla $k = 5$, który w tym przypadku daje

$$x - y = \frac{x^5 - y^5}{x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4}, \qquad x \neq y.$$

Niech $x_n = \sqrt[5]{n^5 + n}$ oraz $y_n = \sqrt[5]{n^5 - n}$. Wówczas

$$a_n = n^3(x_n - y_n) = n^3 \cdot \frac{x_n^5 - y_n^5}{x_n^4 + x_n^3 y_n + x_n^2 y_n^2 + x_n y_n^3 + y_n^4} = \frac{2n^4}{x_n^4 + x_n^3 y_n + x_n^2 y_n^2 + x_n y_n^3 + y_n^4}.$$

Niech $b_n = \sqrt[5]{1 + \frac{1}{n^4}}$ oraz $c_n = \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n^4}}$. Oczywiście $b_n, c_n \to 1$. Zauważmy, że $\frac{x_n}{n} = b_n$ oraz $\frac{y_n}{n} = c_n$. Stąd

$$\frac{x_n^k y_n^{4-k}}{n^4} = \left(\frac{x_n}{n}\right)^k \left(\frac{y_n}{n}\right)^{4-k} = b_n^k c_n^{4-k}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Mamy zatem

$$a_n = \frac{2}{b_n^4 + b_n^3 c_n + b_n^2 c_n^2 + b_n c_n^3 + c_n^4} \to \frac{2}{5}.$$

□

Uwaga. To zadanie można również rozwiązać przy pomocy Faktu 2. Mamy bowiem

$$a_n = n^4 \left(\sqrt[5]{1 + \frac{1}{n^4}} - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n^4}} \right) = \frac{\sqrt[5]{1 + \frac{1}{n^4}} - 1}{\frac{1}{n^4}} + \frac{\sqrt[5]{1 - \frac{1}{n^4}} - 1}{-\frac{1}{n^4}} \to \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

Skorzystaliśmy dwukrotnie z Faktu 2 dla $a = \frac{1}{5}$ oraz $x_n = \frac{1}{n^4}$ i $x_n = -\frac{1}{n^4}$.

Zadanie 13. Oblicz granicę ciągu $a_n = n(\sqrt{n + \sqrt{n + 1}} - \sqrt{n + \sqrt{n - 1}})$.

Rozwiązanie. Zastosujemy trik ze sprzężeniem dwukrotnie. Niech $x_n = \sqrt{n+\sqrt{n+1}}$ oraz $y_n = \sqrt{n+\sqrt{n-1}}$. Mamy

$$\begin{aligned} a_n = n(x_n - y_n) = n \cdot \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n + y_n} = n \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{x_n + y_n} = \frac{n}{x_n + y_n} \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\ = \frac{1}{\frac{x_n}{\sqrt{n}} + \frac{y_n}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

gdyż $\frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \to 1$ oraz $\frac{y_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} \to 1$. □

5 Ciągi postaci $(1+a_n)^{b_n}$

Zaczniemy od dowodu następującego kluczowego faktu.

Fakt 3. Niech g będzie liczbą rzeczywistą. Wówczas jeśli $a_n \to 0$ oraz $a_n b_n \to g$, to $(1+a_n)^{b_n} \to \mathrm{e}^g$.

Rozwiązanie. Wystarczy wykazać, że $b_n \ln(1+a_n) \to g$. Wówczas z ciągłości funkcji e^x mamy $(1+a_n)^{b_n} = \mathrm{e}^{b_n \ln(1+a_n)} \to \mathrm{e}^g$. Jeżeli istnieje nieskończony podciąg (a_{n_k}) taki, że $a_{n_k} = 0$, to $a_{n_k} b_{n_k} = 0$, zatem $g = 0$ oraz dla tego podciągu $(1+a_{n_k})^{b_{n_k}} = 1 \to 1$. Pozostaje zatem wykazać tezę dla podciągu o wyrazach różnych od 0 (oczywiście jeśli taki nieskończony podciąg istnieje) i skorzystać z twierdzenia o scalania. Przyjmijmy zatem bez straty ogólności, że $a_n \neq 0$. Wtedy $b_n \ln(1+a_n) = a_n b_n \cdot \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to g \cdot 1 = g$. □

Zadanie 14. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

Rozwiązanie. Mamy $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = (1+\frac{-1}{n})^n$, zatem biorąc $a_n = -\frac{1}{n}$ oraz $b_n = n$ w Fakcie 3 dostajemy $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1}$, gdyż $a_n \to 0$ oraz $a_n b_n = -1 \to -1$. □

Uwaga. Oczywiście, jeśli funkcja e^x została zdefiniowana jako granica ciągu $\mathrm{e}^x := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, to zadanie 14 rozwiązujemy biorąc $x = -1$ w tej definicji.

Zadanie 15. Dla $a, b > 0$ oblicz $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

Rozwiązanie. Mamy $\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2} = 1 + \frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}$. Niech zatem $a_n = \frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-2}{2}$ oraz $b_n = n$. Nasz ciąg jest równy $(1+a_n)^{b_n}$. Skorzystamy z Faktu 3. Zauważmy, że $a_n \to 0$. Na mocy Zadania 7 mamy również

$$a_n b_n = \frac{1}{2} n(\sqrt[n]{a} - 1) + \frac{1}{2} n(\sqrt[n]{b} - 1) \to \frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{2}\ln b = \ln(\sqrt{ab}).$$

Zatem $(1+a_n)^{b_n} \to \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{ab})} = \sqrt{ab}$. □

Zadanie 16. Niech $b_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})^{-2}$. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{b_n}$.

Rozwiązanie. Niech $a_n = -\frac{2}{n+1}$. Wtedy $a_n \to 0$. Mamy

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}},$$

więc

$$a_n b_n = -\frac{2}{(n+1)} \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})^2 = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}}\right)^2 \to -2.$$

Z Faktu 3 dostajemy $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{b_n} = (1+a_n)^{b_n} \to \mathrm{e}^{-2}$. □

6 Twierdzenie Stolza

Twierdzenie 2. (Twierdzenie Stolza) Dane są ciągi (a_n) i (b_n), przy czym $b_n \neq 0$ oraz (b_n) jest ściśle monotoniczny. Załóżmy, że $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to g$. Załóżmy ponadto, że $a_n, b_n \to 0$ **lub** $b_n \to \infty$. Wówczas $\frac{a_n}{b_n} \to g$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $a_n, b_n \to 0$. Możemy założyć, że (b_n) jest ściśle rosnący (w przeciwnym przypadku należy rozważyć ciąg $(-b_n)$). Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że dla $k \geq N$ mamy $g - \varepsilon < \frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k} < g + \varepsilon$. Stąd $(g-\varepsilon)(b_{k+1} - b_k) < a_{k+1} - a_k < (g+\varepsilon)(b_{k+1} - b_k)$. Sumując tę nierówność dla $k = n, n+1, \ldots, m-1$ otrzymujemy dla $m > n > N$ nierówność $(g-\varepsilon)(b_m - b_n) < a_m - a_n < (g+\varepsilon)(b_m - b_n)$, czyli $g - \varepsilon < \frac{a_m - a_n}{b_m - b_n} < g + \varepsilon$. Biorąc $m \to \infty$ otrzymujemy $g - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq g + \varepsilon$ dla $n > N$.

Zajmijmy się teraz przypadkiem, gdy $b_n \to \infty$. Oczywiście (b_n) jest w tym przypadku ściśle rosnący i bez straty ogólności możemy założyć, że jest on dodatni. Ponownie mamy $(g-\varepsilon)(b_m - b_n) < a_m - a_n < (g+\varepsilon)(b_m - b_n)$ dla $m > n > N$. Stąd

$$(g-\varepsilon)\left(1 - \frac{b_n}{b_m}\right) + \frac{a_n}{b_m} < \frac{a_m}{b_m} < \frac{a_n}{b_m} + (g+\varepsilon)\left(1 - \frac{b_n}{b_m}\right).$$

Biorąc $m \to \infty$ otrzymujemy

$$g - \varepsilon \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} \leq \limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} \leq g + \varepsilon.$$

Biorąc teraz $\varepsilon \to 0$ otrzymujemy $\liminf_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = \limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = g$. □

Zadanie 17. Niech $a_n \to 0$. Wykaż, że $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \to g$.

Rozwiązanie. Wynika natychmiast z twierdzenia Stolza. □

Zadanie 18. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

Rozwiązanie. Niech $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ oraz $b_n = \ln n$. Wtedy $b_n \to \infty$ i jest to ciąg ściśle rosnący. Mamy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1) - \ln n} = \frac{1}{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})} \to 1 \cdot 1 = 1.$$

Z twierdzenia Stolza $\frac{a_n}{b_n} \to 1$. □

Zadanie 19. Dla $a > -1$ oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \frac{1^a + 2^a + \ldots + n^a}{n^{a+1}}$.

Rozwiązanie. Niech $a_n = 1^a + 2^a + \ldots + n^a$ oraz $b_n = n^{a+1}$. Oczywiście $b_n \to \infty$ w sposób ściśle monotoniczny. Mamy

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^a}{(n+1)^{a+1} - n^{a+1}} = \frac{(n+1)^a}{n^{a+1}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{a+1} - 1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \cdot \frac{1}{n\left((1+\frac{1}{n})^{a+1} - 1\right)} \to \frac{1}{a+1}$$

na mocy Faktu 2. □

Zadanie 20. Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} n\left(n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1\right) = -\frac{1}{2}$.

Ciąg nasz jest równy $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{u_n}{v_n}$. Dla $a_n = \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$ oraz $b_n = \frac{1}{n^2}$ spełnione są założenia pierwszej wersji twierdzenia Stolza. Mamy

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\ln(1+\frac{1}{n+1}) - \ln(1+\frac{1}{n}) + \frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}} = -\frac{\ln(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}) + \frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}}$$
$$= -\frac{n(n+1)^2\ln(1-\frac{1}{(n+1)^2}) + (n+1)}{\frac{2n+1}{n}}.$$

Wystarczy zatem wykazać, że

$$n(n+1)^2 \ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) + (n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Skorzystamy z nierówności $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ dla $x > -1$. Mamy

$$n(n+1)^2 \ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) + (n+1) \leq n(n+1)^2\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) + (n+1) = 1.$$

Ponadto

$$n(n+1)^2 \ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) + (n+1) \geq n(n+1)^2 \frac{-\frac{1}{(n+1)^2}}{1-\frac{1}{(n+1)^2}} + (n+1)$$
$$= \frac{-n}{1-\frac{1}{(n+1)^2}} + (n+1) = 1 + n\left(1 - \frac{1}{1-\frac{1}{(n+1)^2}}\right) = 1 - \frac{\frac{n}{(n+1)^2}}{1-\frac{1}{(n+1)^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach.

7 Lemat o średniej geometrycznej

Fakt 4. Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Wówczas jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to również $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

Dowód. Sposób I. W rozwiązaniu będziemy używać oznaczenia $x_+ = \max(0, x)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Istnieje liczba naturalna $N > 0$ taka, że dla $n \geq N$ mamy $(g - \frac{\varepsilon}{2})_+ \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq g + \frac{\varepsilon}{2}$. Zatem korzystając z iloczynu teleskopowego dla $n > N$ mamy $(g-\frac{\varepsilon}{2})_+^{n-N} < \frac{a_n}{a_N} < (g+\frac{\varepsilon}{2})^{n-N}$. Stąd dla $n > N$ mamy

$$\left(g-\frac{\varepsilon}{2}\right)_+ \cdot \sqrt[n]{a_N\left(g-\frac{\varepsilon}{2}\right)_+^{-N}} < \sqrt[n]{a_n} < \left(g+\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \sqrt[n]{a_N\left(g+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-N}}.$$

Jeśli $g = 0$ to wystarczy zauważyć, że istnieje N_1 takie, że dla $n > N_1$ mamy $\sqrt[n]{a_N(g+\frac{\varepsilon}{2})^{-N}} < 2$ (lewa strona zbiega do 1) i wówczas dla $n > \max(N, N_1)$ jest $\sqrt[n]{a_n} < \varepsilon$. Jeśli natomiast $g > 0$, to możemy zakładać, że $\varepsilon < g$. Istnieje wówczas N_1 takie, że dla $n > N_1$ mamy

$$\sqrt[n]{a_N\left(g-\frac{\varepsilon}{2}\right)_+^{-N}} > \frac{g-\varepsilon}{g-\frac{\varepsilon}{2}}, \qquad \sqrt[n]{a_N\left(g+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-N}} < \frac{g+\varepsilon}{g+\frac{\varepsilon}{2}},$$

gdyż $\frac{g-\varepsilon}{g-\frac{\varepsilon}{2}} < 1$ oraz $\frac{g+\varepsilon}{g+\frac{\varepsilon}{2}} > 1$, zaś drugie strony tych nierówności zbiegają do 1. Stąd dla $n > \max(N, N_1)$ mamy $g - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < g + \varepsilon$.

Sposób II. Niech $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} > 0$ dla $n \geq 1$. Mamy $b_n \to g$ oraz $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{b_n b_{n-1} \ldots b_1 a_0} = \sqrt[n]{b_n b_{n-1} \ldots b_1}\sqrt[n]{a_0}$. Ponieważ $\sqrt[n]{a_0} \to 1$, wystarczy wykazać, że $\sqrt[n]{b_n b_{n-1} \ldots b_1} \to g$. Załóżmy, że $g > 0$. Wtedy

$$\frac{n}{\frac{1}{b_1} + \ldots + \frac{1}{b_n}} \leq \sqrt[n]{b_n b_{n-1} \ldots b_1} \leq \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}.$$

Z poprzedniego zadania łatwo dostać, że obydwa ogranicenia są zbieżne do g (zauważmy, że $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{g}$, a zatem $\frac{\frac{1}{b_1}+\ldots+\frac{1}{b_n}}{n} \to \frac{1}{g}$). Wystarczy zatem skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach. Jeśli $g = 0$, to wystarczy oszacować w następujący sposób

$$0 \leq \sqrt[n]{b_n b_{n-1} \ldots b_1} \leq \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}$$

i ponownie skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach. □

Uwaga. Jak widzieliśmy w drugim sposobie, równoważne sformułowanie powyższego faktu jest następujące: jeśli (b_n) jest ciągiem liczb dodatnich i $b_n \to g$, to również $\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \to g$. Alternatywny dowód tego faktu korzysta z twierdzenia Stolza: mamy

$$\ln \sqrt[n]{b_1 \ldots b_n} = \frac{\ln b_1 + \ldots + \ln b_n}{n} \to \ln g.$$

Wystarczy teraz użyć ciągłości eksponenty.

Zadanie 21. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.

Rozwiązanie. Niech $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \mathrm{e}^{-1}.$$

Zatem na mocy Faktu 4 dostajemy $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \to \mathrm{e}^{-1}$. □

8 Kilka zadań treningowych

Zadanie 1. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{3n+1}}{\ln(2n)}$

Zadanie 2. Oblicz granicę ciągu $a_n = n\sqrt{n^2+1} - n^2$.

Zadanie 3. Wyznacz granicę $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b^{2n} + (2b)^{-n} + 1}$ w zależności od parametru $b > 0$. Dla jakich wartości b granica ta jest równa 1?

Zadanie 4. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n(1 - \sqrt[n]{\ln n})$.

Zadanie 5. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1}$ w zależności od parametru $x > 0$.

Zadanie 6. Oblicz $\lim_{n\to\infty} n^{a_n}$, gdzie $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}\right)$.

Zadanie 7. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}(1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}) \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)$.

Zadanie 8. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1\cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n\cdot n}}$.

Zadanie 9. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

Zadanie 10. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{3}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{n}{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}\right)$.

Zadanie 11. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}\right)^n$

Zadanie 12. Oblicz granicę ciągu $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\ln(\sqrt[n]{1+k^{-1}})}$.

Zadanie 13. Niech $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{1/k}$. Oblicz granicę ciągu $\frac{S_n - n}{(\ln n)^2}$

Zadanie 14. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \frac{1^1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}$.

Zadanie 22. Niech $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Zadanie 15. Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{\lfloor\sqrt{2}\rfloor}{n^2+1} + \frac{\lfloor 2\sqrt{2}\rfloor}{n^2+2} + \ldots + \frac{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}{n^2+n}$.

Zadanie 16. Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{e^{\frac{1}{1}}+e^{\frac{1}{2}}+\ldots+e^{\frac{1}{n}}-n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

Zadanie 17. Oblicz granicę ciągu $a_n = \left(\ln\left(e\cdot\frac{n+1}{n-1}\right)\right)^n$.

Zadanie 18. Oblicz granicę ciągu $a_n = \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right)^{n^2}$.

Zadanie 19. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{\binom{4n}{n}}$.

Zadanie 20. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \frac{\sqrt[n^2]{1^1\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot n^n}}{\sqrt{n}}$.

Zadanie 21. Niech (a_n) będzie dodatnim ciągiem arytmetycznym. Wyznacz wszystkie wartości, jakie może przyjmować granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}.$$

Zadanie 22. Oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n^2}} - n$.

Zadanie 23. Oblicz granicę ciągu $a_n = \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}} - 1\right)^2 (1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n})$.

Zadanie 24. Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{\ln n}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}$.

Zadanie 25. Oblicz granicę ciągu $a_n = (1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\ldots(1+\frac{n}{n^2})$.

Zadanie 26. Oblicz granicę ciągu $a_n = \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Zadanie 27. Oblicz granicę ciągu $a_n = n\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$,.

Zadanie 28. Oblicz $\lim_{n\to\infty}(n^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - n(n+1))$.