Zad. 1 Rozwiąż układ równań w zależności od s i t gdzie $s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 + tx_3 + sx_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + tx_4 = s \\ x_1 + x_3 = t \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Podany układ równań zapisujemy do macierzy i przekształcamy ją do postaci schodkowej:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & t & s & 2 \\ 1 & 1 & 1 & t & s \\ 1 & 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & t & s & 2 \\ 0 & 1 & 0 & t & s-t \\ 0 & 0 & 1-t & -s & t-2 \end{array}\right]$$

Zauważmy , że jedynie ostanie równanie może być sprzeczne. Gdyż inne równania
zawierają współczynniki wiodące, które nie są zerami. Zatem, gdy $s = 0$ i $t = 1$ dany układ nie ma rozwiązania.

Rozpatrzmy przypadki:

$1^\circ s \neq 0$ i $t \neq 1$
x_1, x_2, x_3 są zmiennymi zależnymi a x_4 parametrem. Dzieląc ostanie równanie przez $1 - t$, uzyskujemy układ równań, który po przekształceniach zadaje jawne rozwiązania:

$$\begin{cases} x_1 + tx_3 + sx_4 = 2 \\ x_2 + tx_4 = s - t \\ x_3 + \frac{-s}{1-t}x_4 = \frac{t-2}{1-t} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + tx_3 = 2 - sx_4 \\ x_2 = s - t - tx_4 \\ x_3 = \frac{t-2}{1-t} - \frac{-s}{1-t}x_4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2-t^2}{1-t} - \frac{1+st-t}{1-t}x_4 \\ x_2 = s - t - tx_4 \\ x_3 = \frac{t-2+sx_4}{1-t} \end{cases}$$

$2^\circ s \neq 0$ i $t = 1$
Macierz wtedy wygląda następująco, dla uproszczenia wykonajmy przekształcenia:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & s & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & s-1 \\ 0 & 0 & 0 & -s & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{s}\cdot w_3]{w_1 + w3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & s-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{s} \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s-1-\frac{1}{s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{s} \end{array}\right]$$

Uzyskujemy:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = s - 1 - \frac{1}{s} \\ x_4 = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$3^\circ s = 0$ i $t \neq 1$
Macierz sprowadza się do:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & t & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & t & -t \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & t-2 \end{array}\right]$$

Natychmiast otrzymujemy równania które zadają zbiór rozwiązań gdzie x_4 jest parametrem:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - tx_3 \\ x_2 = -t - tx_4 \\ x_3 = \frac{t-2}{1-t} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2-t^2}{1-t} \\ x_2 = -t - tx_4 \\ x_3 = \frac{t-2}{1-t} \end{cases}$$

Znaleźliśmy wszystkie rozwiązania.

Zad. 2 Znajdź współczynniki wielomianu: $W(x) = ax^2 + b^x + c \in \mathbb{C}[x]$, który przyjmuje wartości $W(1+i) = 0$,$W(2-i) = 1$ oraz $W(1) = i$.

Rozwiązanie:
Tworzymy układ równań, który reprezentujemy macierzą której zmiennymi są współczynniki wielomianu $W[x]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & i \\ (2-i)^2 & 2-i & 1 & 1 \\ (1+i)^2 & 1+i & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & i \\ 3-4i & 2-i & 1 & 1 \\ 2i & 1+i & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2-3w_1+2w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & i \\ 0 & 1+i & 0 & 1-3i \\ 2i & 1+i & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{w_3-2iw_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & i \\ 0 & 1+i & 0 & 1-3i \\ 0 & 1-i & 1-2i & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3+iw_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & i \\ 0 & 1+i & 0 & 1-3i \\ 0 & 0 & 1-2i & 5+i \end{array}\right]$$

Uzyskaliśmy macierz w postaci schodkowej wystarczy teraz obliczyć rozwiązania:

$$\begin{cases} a = i - b - c \\ b = \frac{1-3i}{1+i} \\ c = \frac{5+i}{1-2i} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = i + 1 + 2i - \frac{3+11i}{5} \\ b = -1 - 2i \\ c = \frac{3+11i}{5} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{2+4i}{5} \\ b = -1 - 2i \\ c = \frac{3+11i}{5} \end{cases}$$

Sprawdzamy:

$$W(1+i) = \frac{2+4i}{5}(1+i)^2 - (1+2i)(1+i) + \frac{3+11i}{5} = \frac{4i-8}{5} - (3i-1) + \frac{3+11i}{5} = 0$$

$$W(2-i) = \frac{2+4i}{5}(2-i)^2 - (1+2i)(2-i) + \frac{3+11i}{5} = \frac{22+4i}{5} - (4+3i) + \frac{3+11i}{5} = 1$$

$$W(1) = \frac{2+4i}{5} - (1+2i) + \frac{3+11i}{5} = 1 + 3i - (1+2i) = i$$

Wszystkie równania są spełnione znaleźliśmy współczynniki wielomianu $W[x]$.

Zad. 3 Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie fukcją zadaną wzorem $f(z) = i \cdot z + 1$. Niech $A_0, A_1, A_2, \cdots$ będą podzbiorami $\mathbb{C}$ zdefiniowanymi indukcyjnie $A_0 = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ oraz $A_i = f(A_{i-1})$ dla $i > 0$.

(a) Znaleźć wszystkie elementy $z \in \mathbb{C}$ takie, że $f(z) = z$.

Zatem z musi spełniać $z = f(z) = i \cdot z + 1$, więc $z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$

(b) Naszkicować zbiory A_1, A_2, A_3 oraz A_4.

Zauważmy ,że : $f(z) = zi + 1$ Czyli każdy element ze zbioru przekształcanego przez tą funkcję jest obrócony o $90°$ oraz przesunięty o wektor $(0, 1)$. Obliczmy zatem:

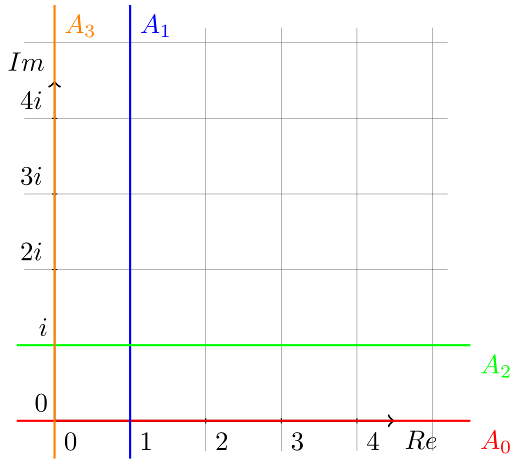
$f(z) = zi + 1$
A_1 oś liczb urojonych przesunięta o wektor $(0, 1)$.

$f^2(z) = -z + i + 1$
A_2 oś liczb rzeczywistych przesunięta o wektor $(i, 0)$

$f^3(z) = -zi + i$
A_3 oś liczb urojonych

$f^4(z) = z$
A_4 powracamy do osi liczb rzeczywistych

Szkic zbiorów widoczny po prawej.



(c) Uzasadnić, że $A_3 \cap A_{33} = \emptyset$

Funkcja z podpunktu (b) uzyskuje co 4 złożenia element początkowy. Zatem $A_i = A_j$ gdy $i \equiv_4 j$. Dlatego też $A_{33} = A_1$. Jednak zbiory A_1 oraz A_3 są różnymi równoległymi prostymi. Wynika stąd, że $A_3 \cap A33 = \emptyset$

Zad. 4 *Dowód.* Załóżmy, że układ równań liniowych U o współczynnikach całkowitych ma dokładnie jedno rozwiązanie w ciele reszt $\mathbb{Z}_p$ dla dowolnej liczby pierwszej p. Czy istnieje całkowitoliczbowe rozwiązanie U? Odpowiedź uzasadnij.

Układ U doprowadzimy do postaci schodkowej w liczbach $\mathbb{Q}$. Będziemy robić to w następujący sposób:

Załóżmy, że wszystkie wcześniejsze kolumny zostały już sprowadzone do postaci schodkowej i znajdujemy się w $i-tej$ kolumnie. Niech $a_l, a_{l+1}, \cdots, a_k$ będą współczynnikami w $i-$tej kolumnie, które nie należą do wierszy, które są już w postaci schodkowej. Wyzerujemy wszystkie współczynniki oprócz a_l wykorzystując algorytm Euklidesa.

Weźmy pewien niezerowy współczynnik w kolumnie $l-$tej a_i wiersza nie zeschodkowanego różnego od wiersza l-tego. Za pomocą algorytmu Euklidesa odejmując odpowiednie wiersze według jego zasady działania, doprowadzamy współczynniki do równości: $a_l' = a_i' = NWD(a_l, a_i)$. Operacje są postaci $w_l - aw_i$ oraz $w_i - aw_l$, zauważmy że po wykonaniu takiej operacji w dowolnym $\mathbb{Z}_p$ otrzymany układ jest równoważny układowi U (w ciele $\mathbb{Z}_p$ możemy wykonywać operacje dodawania i odejmowania wierszy pomnożone przez stałą).

Po wykonaniu tych operacji odejmujemy: $w_i - w_l$ czyli zerujemy współczynnik wiersza w_i w tej kolumnie. Powtarzamy tą operacje do dla pozostałych "nie zeschodkowanych" wierszy w kolumnie $i-$tej. Kontynuując przechodzimy do kolumny $i+1$ i powtarzamy nasze kroki aż do zeschodkowania całego układu.

Uzyskaliśmy układ U' w postaci schodkowej, który jest równoważny do U w każdym $\mathbb{Z}_p$. Niech q będzie taką liczbą pierwszą, że nie dzieli żadnego z współczynników układu U'. Zatem U' nie może być układem sprzecznym, ani posiadającym parametry. Gdyż inaczej układ byłby sprzeczny lub posiadał wiele rozwiązań w $\mathbb{Z}_q$.

Układ U' jest w postaci schodkowej, nie posiada parametrów ani nie jest sprzeczny. Zatem istnieje rozwiązanie tego układu w liczbach wymiernych, udowodnimy że to rozwiązanie jest tak naprawdę w liczbach całkowitych.

Niech i będzie największym takim i, że $x_i \notin \mathbb{Z}$. Oznaczmy współczynnik przy x_i jako a a liczbę po drugiej stronie równości jako b. Wiemy, że obie te liczby są całkowite, ponieważ b jest wynikiem działań dodawania i odejmowania na liczbach całkowitych. Albowiem z założenia $\forall_{j>i}\ x_j \in \mathbb{Z}$. Zatem $ax_i = b$ dla każdego $\mathbb{Z}_p$ weźmy zatem takie p, że $p|a$, wiemy że $p \nmid b$ gdyż wtedy a_i byłby parametrem w $\mathbb{Z}_p$. Zatem skoro $p|a$ to $0 = b$ w $\mathbb{Z}_p$ układ wtedy jest sprzeczny. Dlatego też $\neg\exists_{p\in\mathbb{P}}\ p|a$, czyli $a = 1$ a zatem $x_i = b$ czyli $x_i \in \mathbb{Z}$

□

Zad. 5 Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ spełniających warunek $ad - bc \neq 0$ zbiór

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{az+b}{cz+d} \right| = 1 \right\}$$

jest okręgiem lub prostą na płaszczyźnie zespolonej. Wykaż, że każdy okrąg i każdą prostą na płaszczyźnie zespolonej można przedstawić jako powyższy zbiór dobierając odpowiednio $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

Dowód. Wpierw rozpatrzmy przypadek gdy $c = 0$, zauważmy, że wtedy $d \neq 0$ oraz $a \neq 0$, gdyż w przeciwnym wypadku $ad = 0 = bc$ sprzeczność z założeniem $ad - bc \neq 0$.

Zatem:

$$1 = \left| \frac{az+b}{cz+d} \right| = \left| \frac{az+b}{d} \right| = \left| \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \right| = \left| \frac{a}{b} \right| \cdot \left| z + \frac{b}{a} \right|$$

Czyli:

$$\left| z + \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{d}{a} \right| = A \in \mathbb{R}$$

Gdzie $A \in \mathbb{R}$ jest pewną stałą. Oznacza to, że liczby zespolone postaci $z + \frac{b}{a}$ leżą na okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu A. Przesuwając ten okrąg o wektor $-\frac{b}{a}$ otrzymujemy zbiór wartości z, który jest okręgiem, gdyż jest przesuniętym okręgiem w przestrzeni.

Przypadek $a = 0$ jest analogiczny gdyż:

$$\left| \frac{az+b}{cz+d} \right| = 1 \iff \left| \frac{cz+d}{az+b} \right| = 1$$

Załóżmy zatem, że $a \neq 0$ i $c \neq 0$. Przekształcamy daną równość:

$$1 = \left| \frac{az+b}{cz+d} \right| = \left| \frac{a}{c} \right| \cdot \left| \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \right| \iff \left| \frac{c}{a} \right| = \left| \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \right| = \frac{|z - (-\frac{b}{a})|}{|z - (-\frac{d}{c})|}$$

Zatem stosunek odległości punktu z od punktów $-\frac{b}{a}$ i $-\frac{d}{c}$ jest zawsze stały. Dlatego też zbiór punktów z jest okręgiem Apoloniusza. Okrąg ten jest zdegenerowany gdy stosunek odległości jest równy jeden. Wtedy gdy $\left| \frac{c}{a} \right| = 1 \iff |a| = |c|$. Zatem każdy zbiór wyznacza prostą lub okrąg na płaszczyźnie zespolonej.

Udowodnimy jeszcze, że każdą prostą i okrąg można przedstawić w wcześniej zdefiniowanej postaci:

Dla prostych wystarczy wziąć pewne dwa punkty$a \neq b$ $a, b \in \mathbb{C}$ symetrycznie odbite względem owej prostej. Dla każdego punktu należącego do prostej odległość od a i b jest równa zatem:

$$\left| \frac{z + (-a)}{z + (-b)} \right| = 1$$

Wiemy, że $1 \cdot a \neq b \cdot 1 \iff 1 \cdot a - 1 \cdot b \neq 0$ Zatem dowolną prostą przedstawiliśmy w żądanej formie.

Pozostaje przedstawienie okręgów. Mając dany okrąg w istnieje wektor przesuwający go na okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$. Oznaczmy go jako a jest on również liczbą zespoloną. Niech $b \in \mathbb{C}$ będzie taki, że $|b|$ jest równe promieniowi okręgu w, nie jest on zerowy. Okrąg w możemy zapisać jako:

$$|z + a| = |b| \iff \left| \frac{z+a}{b} \right|$$

Oczywiście $a \cdot 0 \neq 1 \cdot b$, więc uzyskaliśmy żądane przedstawieni zbioru punktów okręgu w □