Zad. 1 a)

Oznaczmy zbiór wartości jako A wiemy,że $a \geqslant 100$ oraz $b \geqslant 100$.

$$\frac{2023a+16b}{120a+b} = 16 + \frac{103a}{120a+b} = 16 + \frac{103}{120+\frac{b}{a}} \leqslant 16 + \frac{103}{120+\frac{100}{a}} \leqslant 16 + \frac{103}{120+\frac{100}{a+1}} \leqslant 16 + \frac{103}{120+\epsilon}$$

Zatem możemy zbliżyć się dowolnie blisko $16 + \frac{103}{120}$ zatem $\mathbf{sup} A = 16 + \frac{103}{120}$

Z drugiej strony:

$$16 + \frac{103}{120+\frac{b}{a}} \geqslant 16 + \frac{103}{120+\frac{b}{100}} \geqslant 16$$

Ale b może być dowolnie duże zatem:

$$16 + \frac{1}{n} \geqslant 16 + \frac{103}{120+\frac{b}{100}}$$

dla dostatecznie dużych b zatem $\mathbf{inf} A = 16$

b) Wiemy, że $n, k \in \mathbb{N}$ oznaczmy zbiór przyjmowanych wartości jako A. Udowodnijmy nierówności:

$$\frac{1}{5} \geqslant \frac{n-k^2}{n^2+k^3} \geqslant -\frac{1}{3}$$

przekształćmy:

$$\frac{n-k^2}{n^2+k^3} \leqslant \frac{1}{5} \iff 5n - 5k^2 \leqslant n^2 + k^3 \iff 5n \leqslant n^2 + k^3 + 5k^2$$

Skoro $k \geqslant 1$ wystarczy udowodnić:$5n \leqslant n^2 + 6$ czyli $0 \leqslant (n-2)(n-3)$ co oczywiście dla $n \geqslant 1$ jest prawdą. Nierówność staje się równością, gdy $n = 2$ i $k = 1$ zatem $\sup A = \frac{1}{5}$

Przekształćmy drugą nierówność:

$$\frac{n-k^2}{n^2+k^3} \geqslant -\frac{1}{3} \iff 3n - 3k^2 \geqslant n^2 - k^3 \iff n^2 + k^3 + 3n \geqslant 3k^2$$

ale skoro $n \geqslant 1$ to wystarczy udowodnić $4 + k^3 \geqslant 3k^2 \iff \frac{4}{k^2} + k \geqslant 3$ dla $k = 1$ mamy: $4 + 1 \geqslant 3$ a dla $k = 2$ mamy $3 \geqslant 3$ a dla większych nierówność jest prawdziwa, gdyż $\frac{4}{k^2} + k \geqslant k \geqslant 3$ udowodniliśmy nierówność. Nierówność staje się równością, gdy $n = 1$ i $k = 2$ zatem $\inf A = -\frac{1}{3}$

Zad. 2 *Dowód.* Załóżmy nie wprost, że $\inf A > 4$ Z definicji supremum: $\forall_{\epsilon>0}\exists_{a\in\mathbb{A}} \inf A + \varepsilon > a$. Zatem wiemy, że istnieje pewien element należący do A taki, że $\sqrt{a} + 2 \geqslant b$, ale $b \geqslant \inf A$.
Przeto

$$\sqrt{\inf A + \varepsilon} + 2 > \sqrt{a} + 2 > \inf A$$

Skoro $A > 4$ to

$$\frac{\inf A}{2} > \frac{\inf A}{\sqrt{\inf A}} = \sqrt{\inf A}$$

łącząc podane nierówności dla ε spełniającego $\frac{\inf A}{2} > \sqrt{\inf A + \varepsilon}$ uzyskujemy :

$$\frac{\inf A}{2} + 2 > \inf A \iff 4 > \inf A$$

sprzeczność. □

Zad. 3 *Dowód.* Udowodnimy podany fakt poprzez indukcję. Niech $k = 2$ będzie to baza naszej indukcji. Niech $\forall_{n\geqslant i>2}\ a_i = A$ gdzie A jest średnią arytmetyczną n liczb gdzie wtedy:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_2}{n} = \frac{(n-2)A + a_1 + a_2}{n} \iff A = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Zatem dowodzimy:

$$\sqrt[n]{A^{n-2}a_1a_2} \leqslant A \iff \sqrt{a_1a_2} \leqslant A \iff 0 < (a_1 + a_2)^2$$

Mamy bazę indukcji. Przeprowadźmy krok, załóżmy prawdziwość tezy dla k udowodnimy, że zachodzi dla $k + 1$. Niech $\forall_{n\geqslant i>k}\ a_i = A$ jeżeli jeden z pozostałych elementów jest równy A korzystamy z założenie indukcyjnego zatem, załóżmy $\forall_{k\geqslant i\geqslant 1}\ a_i \neq 1$ wtedy istnieją takie x i y, że $a_x > A > a_y$, b.s.o niech $x = 1$ a $y = 2$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_2}{n} = \frac{(a_1 + a_2 - A) + A + \cdots + a_2}{n}$$

Średnia arytmetyczna elementów nie uległa zmianie ale ilość równych A owszem zatem skorzystajmy z założenia indukcyjnego:

$$A \geqslant \sqrt[n]{(a_1 + a_2 - A)Aa_3 \dots a_n} \overset{?}{\geqslant} \sqrt[n]{a_1a_2 \dots a_n}$$

Wystarczy udowodnić:

$$(a_1 + a_2 - A)A \geqslant a_1a_2 \iff (a_1 - A)(A - a_2) \geqslant 0$$

co jest prawdą gdyż $a_1 - A > 0$ oraz $A - a_2 > 0$ Udowodniliśmy krok indukcyjny.

□

Zad. 4 *Dowód.* Wiemy, że na przekrojach Dedekinda możemy wykonywać operacje mnożenia oraz dla każdego istnieje jednoznaczny element przeciwny, zatem: $\beta = (\beta + \gamma) - \gamma$ mnożąc obustronnie przez α możemy tak zrobić gdyż α jest dodatnie uzyskujemy:

$$\alpha\beta = \alpha(\beta + \gamma) - \alpha\gamma \iff \alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$$

□

Zad. 5 *Dowód.* Udowodnimy mocniejszą nierówność dla $n \geqslant 6$: Przed przystąpieniem do rozwiązania sprawdźmy przypadki od $n = 1$ do $n = 5$ zatem:

$$n = 1 : 2\sqrt{3} < 4 \iff 12 < 16$$

$$n = 2 : 6\sqrt{6} < 16 \iff 216 < 256$$

$$n = 3 : 60 < 64$$

$$n = 4 : 7 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} < 4^4 \iff 3 \cdot 5^2 7^2 < 4^7 \iff 3675 < 16384$$

$$n = 5 : 252\sqrt{15} < 1024 \iff 63 \cdot \sqrt{15} < 256 \iff 59535 < 65536$$

Wzmocnimy ją następująco:

$$\binom{2n}{n}\sqrt{3n} < 4^n\sqrt{\frac{n+5}{n+6}}$$

dla $n = 6$ mamy:

$$924 \cdot 3\sqrt{2} < 4^6\sqrt{\frac{11}{12}} \iff 231 \cdot 3\sqrt{6} < 2 \cdot 4^4\sqrt{11} \iff 2881494 < 2883584$$

Znaleźliśmy bazę indukcyjną. Przejdźmy do kroku indukcyjnego załóżmy prawdziwość tej nierówności dla n przejdźmy do kroku:

$$4^{n+1}\sqrt{\frac{n+6}{n+7}} > 4\sqrt{\frac{n+6}{n+5}}\sqrt{\frac{n+6}{n+7}}\binom{2n}{n}\sqrt{3n} \overset{?}{>} \binom{2n+2}{n+1}\sqrt{3n+1}$$

Udowadniamy drugą z tych nierówności przekształconą jako:

$$\frac{(n+6)\sqrt{n}}{\sqrt{(n+7)(n+5)(n+1)}} \geqslant \frac{\cancel{(2n+2)}(2n+1)}{\cancel{2(n+1)}(2n+2)} \iff$$

$$(n+6)(2n+2)\sqrt{n} > (2n+1)\sqrt{(n+7)(n+5)(n+1)} \overset{\square^2}{\iff}$$

$$(4n^2+4n)(n^2+12n+36)n > (4n^2+4n+1)(n^2+12n_35) \iff$$

Niech $A = (4n^2+4n)(n^2+12n+35)$, wtedy:

$$A + 4n^2 + 4n > A + n^2 + 12n + 35 \iff$$

$$3n^2 - 8n - 35 > 0 \iff$$

$$(n-5)(3n+7) > 0$$

gdy $n \geqslant 6$ to $n - 5 > 0$ oraz oczywiście $3n + 7 > 0$.

$\square$