CURSUL 2
ŞIRURI DE NUMERE REALE ŞI FUNCŢII REALE. INEGALITĂŢI REMARCABILE.

1. Mulţimea numerelor reale

Presupunem că cititorul este deja familiarizat cu proprietăţile algebrice ale mulţimilor $\mathbb{N}$ (*numere naturale*), $\mathbb{Z}$ (*numere întregi*), $\mathbb{Q}$ (*numere raţionale*) şi $\mathbb{R}$ (*numere reale*). Vom reaminti doar definiţia mulţimii numerelor reale:

Definiţie. O *mulţime de numere reale* este un *corp ordonat Dedekind-complet*, adică un cvadruplet $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, unde $\mathbb{R}$ este o mulţime cu cel puţin două elemente, $+$ (*adunarea*) şi $\cdot$ (*înmulţirea*) sunt două *operaţii algebrice* pe $\mathbb{R}$, iar $\leq$ este o ordine totală pe $\mathbb{R}$ astfel încât:

(F$_1$) $x + (y + z) = (x + y) + z,\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;
(F$_2$) $\exists 0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$;
(F$_3$) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = (-x) + x = 0$;
(F$_4$) $x + y = y + x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
(F$_5$) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;
(F$_6$) $\exists 1 \in R : x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
(F$_7$) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$;[1]
(F$_8$) $x \cdot y = y \cdot x,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
(F$_9$) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;
(O$_1$) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;
(O$_2$) $(x \leq y) \wedge (0 \leq z) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$;
(C) mulţimea ordonată $(\mathbb{R}, \leq)$ este Dedekind-completă.

Orice proprietate a numerelor reale poate fi dovedită pornind de la aceste "axiome". Ca de obicei, *scăderea* şi *împărţirea* pot fi introduse de:

$$x - y := x + (-y),\ x, y \in \mathbb{R};$$
$$\frac{x}{y} = x/y := x \cdot (y^{-1}),\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Se poate arăta (dar nu o vom face, acest lucru depăşind cadrul cursului) că există o unică mulţime a numerelor reale (până la un *homeomorfism* de corpuri ordonate), aşa că $\mathbb{R}$ va fi numită *mulţimea* numerelor reale (sau *dreapta reală*), iar elementele acesteia *numbere reale*. De fapt, se poate construi $\mathbb{R}$ pornind cu $\mathbb{N}$ (construit în cursul precedent ca ω), iar apoi continuând cu $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$.

Putem proceda şi invers, având deja dată mulţimea $\mathbb{R}$, putem defini $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ după cum urmează:

- $\mathbb{N} := \bigcap \{N \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid 0 \in N,\ n \in N \Rightarrow n + 1 \in N,\ \forall n \in N\} = \{0, 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, \dots\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
- $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- $\mathbb{Q} := \{m/n \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

De acum încolo vom adopta acest punct de vedere.

Valoarea absolută a unui număr x este definită ca

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Propoziţia 1.1. *Avem:*

i) $|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$;
iii) $|xy| = |x| \cdot |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
iv) $|x + y| \leq |x| + |y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

În ceea ce priveşte marginile superioară şi inferioară a lui $\mathbb{R}$, acestea pot fi caracterizate după cum urmează:

Propoziţia 1.2. *Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$.*

i) *Un element $\alpha \in \mathbb{R}$ este marginea superioară a lui A dacă şi numai dacă:*
(a) $x \leq \alpha,\ \forall x \in A$;
(b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A : \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$.

[1] $\mathbb{R}^*$ este abreviere pentru $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; notaţii similare avem pentru $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$

ii) *Un element $\beta \in \mathbb{R}$ este marginea inferioară a lui A dacă şi numai dacă:*
  (a) $x \geq \beta,\ \forall x \in A$;
  (b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A : \beta + \varepsilon > x_\varepsilon$.

Demonstraţie. Vom arăta doar prima proprietate, cea legată de marginea inferioară fiind similară.

$\Rightarrow$ Deoarece $\alpha = \sup A$, α este un majorant pentru A; de aceea, $x \leq \alpha,\ \forall x \in A$. Pe de altă parte, este cel mai mic majorant; aşadar există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\alpha - \varepsilon$ să nu fie un majorant pentru A. În consecinţă, ordinea $\leq$ fiind totală, există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$.

$\Leftarrow$ Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ ce satisface (a) şi (b). Atunci, datorită (a), α este un majorant pentru A. Să presupunem atunci că ar mai exista un alt majorant al lui A, $\eta \in \mathbb{R}$, astfel încât $\alpha > \eta$. Atunci, luând $\varepsilon := \alpha - \eta > 0$, din (b) concludem că există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$, adică $\eta < x_\varepsilon$. Dar acest lucru contrazice faptul că η este un majorant pentru A.

În concluzie, α este marginea superioară a lui A.

□

Este uşor de verificat că, pentru $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, avem:

- $\inf[a,b] = \inf[a,b) = \inf(a,b] = \inf(a,b) = a$;
- $\sup[a,b] = \sup[a,b) = \sup(a,b] = \sup(a,b) = b$.

După recapitularea acestor proprietăţi algebrice şi de teoria mulţimilor ale lui $\mathbb{R}$, ne vom concentra pe aşa-zisele proprietăţi "topologice" ale *dreptei reale*.

2. Şiruri de numere reale

Un *şir* de numere reale este o funcţie $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Se obişnuieşte a se nota x_n în loc de $x(n)$, pentru $n \in \mathbb{N}$; de asemenea, funcţia x va fi notată $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\geq 0}$ sau chiar (x_n). Dacă $p \in \mathbb{N}^*$, prin $(x_n)_{n\geq p}$ înţelegem şirul $(x_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$ sau chiar funcţia $x : \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq p\} \to \mathbb{R}$. Prin $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ înţelegem mulţimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Câteodată, dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este o mulţime şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir, notăm (prin abuz de limbaj) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ în loc de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, adică $x_n \in A,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Definiţie. Spunem că un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este:

a) *mărginit superior* dacă $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit superior, adică există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$;
b) *mărginit inferior* dacă $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit inferior, adică există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \geq m,\ \forall n \in \mathbb{N}$;
c) *mărginit* dacă $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit, adică există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq x_n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$;
d) *nemărginit* dacă $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nu este mărginit.

De exemplu, şirul $((-1)^n)_{n\geq 1}$ este mărginit (devreme ce $\{(-1)^n\}_{n\geq 1} = \{-1, 1\}$), dar $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este mărginit (este mărginit inferior, dar nu mărginit superior).

Definiţie. Spunem că un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este:

a) *crescător* dacă $x_n \leq x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$;
b) *descrescător* dacă $x_n \geq x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$;
c) *monoton* dacă este crescător sau descrescător;
d) *strict crescător* dacă $x_n < x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$;
e) *strict descrescător* dacă $x_n > x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$;
f) *strict monoton* dacă este strict crescător sau strict descrescător.

Din nou, şirul $((-1)^n)_{n\geq 1}$ nu este monoton, dar $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ sunt (primul este strict crescător, al doilea strict descrescător).

Definiţie. Spunem că un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *convergent* dacă există un element $x \in \mathbb{R}$, numit *limita* şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\varepsilon,\ |x_n - x| < \varepsilon.$$

În acest caz spunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* la x şi scriem $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ (sau, mai simplu, $x_n \to x$) sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Ultima notaţie este legitimizată de următorul rezultat:

Propoziţia 2.1. *Limita unui şir de numere reale este unică.*

Demonstraţie. Să presupunem că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are două limite distincte x şi y. Fie $\varepsilon := |x - y|/2 > 0$. Atunci, din definiţie, există $n_\varepsilon, m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$|x_n - x| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon;$$
$$|x_n - y| < \varepsilon,\ \forall n \geq m_\varepsilon.$$

Dacă $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$ vom avea

$$|x-y| \leq |x-x_n| + |x_n - y| < 2\varepsilon = |x-y|,$$

ceea ce este absurd, întrucât $|x-y| > 0$. Prin urmare, nu putem avea $x \neq y$. □

Propoziţia 2.2. *Orice şir convergent este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir ce converge la $x \in \mathbb{R}$. Atunci, luând $\varepsilon := 1$, există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < 1$, $\forall n \geq n_1$. Acest lucru implică

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|, \ \forall n \geq n_1.$$

Luând $M := \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_1-1}|, 1+|x|\}$, vedem că

$$|x_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

adică şirul (x_n) este mărginit. □

Exemple.

- Un prim exemplu este şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

deoarece pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ astfel încât[2] that $n \geq n_\varepsilon$ implies

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

- Şirul constant $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ (pentru $c \in \mathbb{R}$) este crescător şi descrescător în acelaşi timp; evident, converge la c.
- Şirul $(a^n)_{n\geq 1}$ este convergent pentru $a \in (-1, 1]$ şi divergent pentru $a \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$; avem

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & -1 < a < 1; \\ 1, & a = 1. \end{cases}$$

- O altă limită bine cunoscută este

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},$$

unde e este numărul lui *Euler* (de fapt, şirul $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ este crescător şi mărginit, aşa încât e poate fi definit ca limita acestui şir – vezi Teorema 2.6 de mai jos).

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Un *subşir* al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un altşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, unde $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ este un şir strict crescător de numere naturale.

Propoziţia 2.3. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir ce converge la $x \in \mathbb{R}$. Dacă $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este un subşir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge la x.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $x_n \to x$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$. Pe de altă parte, şirul $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este strict crescător, deci există k_ε astfel încât

$$n_k \geq n_\varepsilon, \ \forall k \geq k_\varepsilon$$

(altfel am avea $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{0, 1, \ldots, n_\varepsilon - 1\}$). În concluzie,

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon, \ \forall k \geq k_\varepsilon,$$

ceea ce demonstrează că $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. □

Astfel, un mod simplu de a demonstra că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nu* converge este să găsim două subşiruri $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ care *converg* la limite *diferite*. De exemplu, şirul $((-1)^n)_{n\geq 1}$ nu este convergent, deoarece subşirul $\left((-1)^{2k}\right)_{k\geq 1}$ este şirul constant ce converge la 1, iar subşirul $\left((-1)^{2k+1}\right)_{k\geq 0}$ este şirul constant ce converge la -1.

În ceea ce priveşte legătura între şiruri şi operaţiile pe $\mathbb{R}$, avem următoarele proprietăţi:

Propoziţia 2.4. *Fie (x_n) şi (y_n) şiruri de numere reale, convergente la $x \in \mathbb{R}$, repectiv la $y \in \mathbb{R}$. Atunci:*

i) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$;
ii) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$;
iii) $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y$;
iv) *dacă $y \neq 0$, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $y_n \neq 0$, $\forall n \geq n_0$ şi* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$;

[2] pentru $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor := \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ se numeşte *partea întreagă* a lui x.

v) *dacă* $x_n \le y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *atunci* $x \le y$;

vi) (criteriul cleştelui) *dacă şirul* (z_n) *este astfel încât* $x_n \le z_n \le y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *şi* $x = y$, *atunci* (z_n) *este convergent şi* $\lim_{n\to\infty} z_n = x$.

O consecinţă imediată a ultimei proprietăţi este următorul criteriu de convergenţă:

Propoziţia 2.5. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale şi* $x \in \mathbb{R}$. *Dacă există un şir* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *care converge la* 0 *astfel încât*

$$|x_n - x| \le \alpha_n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

atunci (x_n) *converge la* x.

Următorul rezultat este cunoscut drept *Teorema convergenţei monotone.*

Teorema 2.6 (Weierstrass). *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale.*

i) *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este crescător şi mărginit superior, atunci el converge la* $\sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este descrescător şi mărginit inferior, atunci el converge la* $\inf\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Putem rezuma teorema de mai sus în felul următor: orice şir mărginit şi monoton este convergent.

Demonstraţie. Vom arăta doar prima parte, cealaltă demonstrându-se de o manieră asemănătoare.

Deoarece mulţimea nevidă $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginită superior, ea are margine superioară; fie $\alpha := \sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Datorită Propoziţiei 1.2,

$$x_n \le \alpha, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

şi

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \alpha - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}.$$

Deoarece (x_n) este crescătoare, avem $x_n \ge x_{n_\varepsilon}$, $\forall n \ge n_\varepsilon$. Combinând cele două inegalităţi, obţinem, pentru $\varepsilon > 0$,

$$\alpha - \varepsilon < x_n, \ \forall n \ge n_\varepsilon.$$

În consecinţă,

$$|x_n - \alpha| = \alpha - x_n < \varepsilon, \ \forall n \ge n_\varepsilon.$$

Această relaţie exprimă faptul că (x_n) converge la α, ε fiind ales într-un mod arbitrar. □

Lema 2.7. *Orice şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de numere reale are un subşir monoton.*

Demonstraţie. Pentru $n \in \mathbb{N}$, fie mulţimea $A_n \subseteq \mathbb{N}$ definită de

$$A_n := \{k > n \mid x_k \ge x_n\}.$$

I. Să presupunem mai întâi că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât A_n este o mulţime nevidă pentru orice $n \ge n_0$. Atunci, începând cu $k := 0$, se poate construi un şir strict crescător $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $n_{k+1} \in A_{n_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Acest lucru implică faptul că şirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este crescător.

II. Cealaltă posibilitate este ca mulţimea

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid A_n = \varnothing\}$$

să fie infinită. Fie $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir strict crescător astfel încât $A = \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (un astfel de şir poate fi construit pe baza existenţei unei funcţii bijective între $\mathbb{N}$ şi A).

De aceea, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $A_{n_k} = \varnothing$, ceea ce implică faptul că $x_{n_{k+1}} < x_{n_k}$. Astfel, şirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este strict descrescător. □

Următorul rezultat nu este acum decât o simplă consecinţă a Teoremei 2.6 şi a rezultatului de mai sus.

Teorema 2.8 (Bolzano–Weierstrass). *Dacă un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este mărginit, atunci el posedă un subşir convergent* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Definiţie. Spunem că un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este *Cauchy* (sau *fundamental*) dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \forall n, m \ge n_\varepsilon, \ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Următorul rezultat reprezintă un criteriu important pentru determinarea convergenţei unui şir, fără a cunoaşte presupusa lui limită.

Teorema 2.9. *Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este Cauchy.*

Afirmaţia "dacă" a acestui rezultat, aplicată unor spaţii mai generale unde poate fi definit conceptul de convergenţă, este definiţia unui *spaţiu complet*; în felul acesta, teorema de mai sus ne spune că $\mathbb{R}$ este un spaţiu complet.

Demonstraţie.

$\Rightarrow$ Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir convergent la un element $x \in \mathbb{R}$. Atunci, conform definiţiei convergenţei, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_n - x| < \varepsilon/2, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Aşadar, dacă $m, n \geq n_\varepsilon$, avem

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < \varepsilon.$$

Acest lucru demonstrează că (x_n) este un şir Cauchy.

$\Leftarrow$ Să presupunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy. Atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit (demonstraţia este asemănătoare celei a Propoziţiei 2.2: dacă $\varepsilon := 1$, atunci $|x_n| \leq |x_{n_1}| + |x_{n_1} - x_n| < 1 + |x_{n_1}|$, $\forall n \geq n_1$). Conform teoremei Bolzano-Weierstrass, acesta are un şir convergent $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Fie $x \in \mathbb{R}$ limita acestui subşir. Să arătăm acum că întregul şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x.

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece $x_{n_k} \to x$, există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2, \ \forall k \geq k_\varepsilon.$$

Pe de altă parte, cum (x_n) este Cauchy, există un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_m - x_n| < \varepsilon/2, \ \forall m, n \geq n_\varepsilon.$$

Fie $n'_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ şi k'_ε astfel încât $n_{k'_\varepsilon} \geq n'_\varepsilon$. Dacă $n \geq n_{k'_\varepsilon}$, atunci

$$|x_n - x| \leq \left|x_n - x_{n_{k'_\varepsilon}}\right| + \left|x_{n_{k'_\varepsilon}} - x\right| < \varepsilon,$$

deoarece $n \geq n_{k'_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ şi $k'_\varepsilon \geq k_\varepsilon$.

□

3. Dreapta reală extinsă. Puncte de acumulare

În mod evident, nu orice submulţime a lui $\mathbb{R}$ posedă o margine inferioară şi superioară (de exemplu, chiar $\mathbb{R}$); o condiţie necesară pentru acest lucru este ca mulţimea respectivă să fie mărginită. Dacă vrem să eliminăm această restricţie, trebuie să adăugăm "margini" lui $\mathbb{R}$, una inferioară şi una superioară.

Fie $+\infty$ şi $-\infty$ două obiecte distincte, nicunul element al lui $\mathbb{R}$ ($-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$), pe care le vom numi "plus infini", respectiv "minus infinit". Notăm $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *dreapta reală extinsă.* Extindem de asemenea ordinea naturală $\leq$ de la $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$ în modul următor:

- $-\infty \leq +\infty$;
- $-\infty \leq x, \ x \leq +\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}$ (de fapt, inegalităţile sunt stricte, fiindcă elementele comparate sunt distincte).

Cu această ordine extinsă, fiecare submulţime a lui $\mathbb{R}$ admite margine superioară şi inferioară. Astfel, pentru $A \subseteq \mathbb{R}$, avem:

- $\sup A = +\infty$ dacă şi numai dacă A nu este mărginită superior;
- $\inf A = -\infty$ dacă şi numai dacă A nu este mărginită inferior;
- $\sup A = -\infty \Leftrightarrow \inf A = +\infty \Leftrightarrow A = \emptyset$.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($x_n \to +\infty$) sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ($x_n \to -\infty$) dacă pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există $n_a \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$x_n > a, \ \forall n \geq n_a,$$

respectiv

$$x_n < a, \ \forall n \geq n_a.$$

Propoziţia 3.1. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.*

i) *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*

ii) *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.*

Aşadar, orice şir monoton în $\mathbb{R}$ are o limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

În ceea ce priveşte operaţiile uzuale, ele pot fi extinse parţial la $\overline{\mathbb{R}}$ astfel încât să obţinem un rezultat analog Propoziţiei 2.4 privind operaţiile cu şiruri (exerciţiu: formulaţi şi demonstraţi un astfel de rezultat!). Mai precis, vom introduce:

- $(-\infty) + a = a + (-\infty) := -\infty$, pentru $-\infty \leq a < +\infty$; $(+\infty) + a = a + (+\infty) := +\infty$, pentru $-\infty < a \leq +\infty$;
- $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) := -\infty$, $(+\infty) \cdot a = a \cdot (+\infty) := +\infty$, pentru $0 < a \leq +\infty$;
  $(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) := +\infty$, $(+\infty) \cdot a = a \cdot (+\infty) := -\infty$, pentru $-\infty \leq a < 0$;
- $-(-\infty) := +\infty$, $-(+\infty) := -\infty$, $1/(-\infty) = 1/(+\infty) = 0$.

Operaţiile $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)-(+\infty)$, $(+\infty)-(-\infty)$, $0\cdot(-\infty)$, $0\cdot(+\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{0}$ (parţial) rămân nedefinite.

Definiţie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.

a) Numim $x\in\overline{\mathbb{R}}$ *punct de acumulare* al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă există un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $x_{n_k}\to x$.

b) Mulţimea punctelor de acumulare a şirurilor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va fi notată $\mathrm{L}_{(x_n)}$.

O aplicare imediată a Lemei 2.7 arată că $\mathrm{L}_{(x_n)}\neq\varnothing$ pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$.

Definiţie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.

a) Numim *limită inferioară* a lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numărul (din $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n := \inf \mathrm{L}_{(x_n)}\,.$$

b) Numim *limită superioară* a lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numărul (din $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n := \sup \mathrm{L}_{(x_n)}\,.$$

Remarci. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale.

- Avem
$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n.$$
- Dacă $x\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ dacă şi numai dacă $\mathrm{L}_{(x_n)}=\{x\}$, adică
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x.$$
- Se poate arăta (vezi demonstraţia Lemei 2.7) că există un subşir monoton al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care are limita $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ şi există un subşir monoton al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care are limita $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Şiruri de funcţii

Câteodată, termenii unui şir depind de un *parametru*, ca de exemplu şirul $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq1}$, unde $x\in\mathbb{R}$ (ştim deja că acest şir converge la e^x). Putem privi un astfel de şir ca un şir de funcţii (în acest exemplu, funcţiile sunt $x\mapsto\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$).

În general, fie E o mulţime şi, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, $f_n : E\to\mathbb{R}$ o funcţie. Prin analogie cu şirurile numerice, spunem că funcţia $F:\mathbb{N}\to\mathscr{F}(E;\mathbb{R})$ definită prin $F(n):=f_n$, este un *şir de funcţii*. De asemenea, vom nota $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în loc de F.

În cele mai multe aplicaţii, E va fi o submulţime a lui $\mathbb{R}$ (sau, spre finalul cursului, a lui $\mathbb{R}^m$).

Spre deosebire de şirurile de numere reale, vom avea mai multe tipuri de convergenţă:

Definiţie. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii de la E la $\mathbb{R}$ şi $f:E\to\mathbb{R}$. Spunem că:

a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge punctual* la f dacă $f_n(x)\to f(x)$, $\forall x\in E$ (notăm $f_n \overset{\mathrm{p}}{\to} f$ sau $f_n \xrightarrow[E]{\mathrm{p}} f$, dacă vrem să specificăm mulţimea de convergenţă);

b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniform* la f dacă
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_\varepsilon,\ \forall x\in E,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$
În acest caz notăm $f_n\overset{\mathrm{u}}{\to} f$ sau $f_n\xrightarrow[E]{\mathrm{u}} f$.

Bineînţeles, dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform la f, atunci va converge şi punctual la f (exerciţiu!).

De asemenea, $f_n\overset{\mathrm{u}}{\to} f$ dacă şi numai dacă $\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\in\mathbb{R}$ pentru n suficient de mare şi
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=0. \tag{*}$$

Exemplu. Fie $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ definite prin $f_n(x):=x^n$, pentru $n\geq1$. Este clar că
$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x\in[0,1);\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

Aşadar, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge punctual la f, unde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este definită ca $f(x):=\begin{cases} 0, & x\in[0,1);\\ 1, & x=1.\end{cases}$

Pe de altă parte,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1,$$

deci $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \not\to 0$. Conform (*), acest lucru înseamnă că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu converge uniform la f.

Următoarele rezultate precizează câteva criterii de convergenţă uniformă ale şirurilor de funcţii:

Propoziţia 4.1. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii definite pe E cu valori reale şi $f : E \to \mathbb{R}$. Dacă există un şir de numere reale $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care converge la 0 astfel încât*

$$|f_n(x) - f(x)| \le \alpha_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in E$$

atunci (f_n) converge uniform la f.

Teorema 4.2. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii definite pe E cu valori reale. Atunci există o funcţie $f : E \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ dacă şi numai dacă $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de funcţii uniform Cauchy, adică for any there exists such that:*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \forall m, n \ge n_\varepsilon, \ \forall x \in E, \ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

După cum vom vedea mai târziu, convergenţa uniformă păstrează proprietăţi precum mărginirea, continuitatea sau integrabilitatea.

5. Inegalităţi remarcabile

O primă inegalitate pe care o vom prezenta este aşa-zisa *inegalitate a mediilor.*

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Numerele

$$m_{\mathrm{a}} := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

$$m_{\mathrm{g}} := \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n},$$

$$m_{\mathrm{arm}} := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

se numesc *mediile aritmetică*, *geometrică*, respectiv *armonică* a numerelor $x_1, \ldots, x_n$, ori de câte ori acestea sunt definite.

Propoziţia 5.1 (inegalitatea mediilor). *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Atunci*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Fiecare dintre aceste relaţii devine egalitate dacă şi numai dacă $x_1 = \cdots = x_n$.

Propoziţia 5.2 (inegalitatea lui Hölder). *Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$ şi $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ [3]astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=0}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Este uşor de demonstrat (exerciţiu!) o variantă a acestei inegalităţi, numită *inegalitatea lui Hölder cu ponderi*:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$ şi $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

În cazul $p = q = 2$ obţinem *inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz*:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă există $u, v \in \mathbb{R}$ cu $u^2 + v^2 \ne 0$, astfel încât $ua_i + vb_i = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$.

Propoziţia 5.3 (inegalitatea lui Minkowski). *Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$ şi $p \in \mathbb{R}_+^*$.*

i) *Dacă $p \ge 1$, atunci*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

[3]reamintim că $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ şi $\mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = (0, +\infty)$

ii) Dacă $0 < p < 1$*, atunci*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

În ambele cazuri, dacă $p \neq 1$*, egalitatea are loc dacă n-uplele* $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *şi* $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ *sunt proporţionale.*

Propoziţia 5.4 (inegalitatea lui Carleman). *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ *are loc*

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1 a_2 \ldots a_k)^{\frac{1}{k}} \leq \mathrm{e}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Bibliografie selectivă

[1] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.
[2] C. G. Denlinger, *Elements of Real Analysis*, International Series in Mathematics, Jones and Bartlett Publishers International, London, 2012.
[3] M. O. Drâmbe, *Inegalităţi. Idei şi metode.*, Ed. GIL, Zalău, 2003.
[4] R. Luca-Tudorache, *Analiză matematică*, Editura Tehnopress, Iaşi, 2005.
[5] G. Păltineanu, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura AGIR, Bucureşti, 2002.
[6] M. Postolache, *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2011.
[7] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.