SEMINAR 1

S1.1. Arătaţi că dacă mulţimile A, B şi C satisfac egalităţile

$$A \cup B = C,$$
$$(A \cup C) \cap B = C,$$
$$(A \cap C) \cup B = A,$$

atunci ele sunt egale.

S1.2. Arătaţi că dacă A şi B sunt două submulţimi ale unei mulţimi (univers) U, are loc:

$$(\complement_A \Delta \complement_B) \cap \complement_{B \setminus A} = A \setminus B.$$

S1.3. Arătaţi că pentru orice mulţimi A, B şi C avem:

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

S1.4. Arătaţi mai întâi că pentru mulţimile A, B şi C avem

$$A \Delta B = C \iff B = A \Delta C.$$

Rezolvaţi apoi ecuaţia

$$A \Delta X = B$$

în cazul $A := \{a, b, c, d\}$ şi $B := \{b, d, e\}$.

S1.5. Comparaţi A cu C şi B cu C, apoi determinaţi $A \cap B$, unde mulţimile A, B şi C sunt date de:

$$A := \{(a - b, a + b, 2ab) \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$
$$B := \{(\alpha + 2\beta, \alpha - 3\beta, 2\alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$
$$C := \{(x - 1, x + 1, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

S1.6. Fie $X := \{1, 2, 3\}$ şi următoarele relaţii pe X:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}, \quad S = \{(1, 2), (2, 3)\}.$$

Determinaţi domeniul, imaginea şi inversa fiecărei relaţii. Apoi verificaţi egalitatea

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

S1.7. Fie următoarele relaţii:

$$\rho = \{(3a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}; \quad \delta = \{(b, 3b) \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

Arătaţi că $\rho \circ \delta = 1_{\mathbb{R}}$.

S1.8. Stabiliţi unele proprietăţi ale divizibilităţii în $\mathbb{R}[X]$, clasa polinoamelor cu coeficienţi reali.

S1.9. Fie $f \in \mathcal{F}(X; Y)$ şi $g \in \mathcal{F}(Y; Z)$. Arătaţi că dacă $g \circ f$ este o surjecţie, atunci şi g este o funcţie surjectivă.

S1.10. Două mulţimi A şi B se numesc *echipotente* dacă există cel puţin o funcţie bijectivă $f : A \to B$.
Fie U o mulţime. Arătaţi că relaţia de echipotenţă pe $\mathscr{P}(U)$ este o relaţie de echivalenţă.

S1.11. Arătaţi că o funcţie $f : X \to Y$ este injectivă dacă şi numai dacă $f^{-1}[f[A]] = A,\ \forall A \in \mathscr{P}(X)$.

S1.12. Fie $G := \{(z, u) \in \mathbb{C} \mid \exists a, b \in \mathbb{R} : u = a + ib,\ z = e^u = e^a(\cos b + i \sin b)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Este G o funcţie?

S1.13. Arătaţi că *funcţia caracteristică* a unei mulţimi U, $\chi : U \to \{0, 1\}$, definită prin

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in \complement_A, \end{cases}$$

are următoarele proprietăţi:

$$(\chi_A)^p = \chi_A,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,$$
$$\chi_{\complement_A} = 1 - \chi_A, \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B,$$
$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B, \quad \chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B.$$

S1.14. Fie X o mulţime cu cel puţin două elemente. Definim relaţia $\preccurlyeq$ pe $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ prin:

$$f \preccurlyeq g \iff f(x) \le g(x),\ \forall x \in X,$$

dacă $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$. Arătaţi că $(\mathcal{F}(X;\mathbb{R}), \preccurlyeq)$ este o mulţime ordonată, dar nu total ordonată.

S1.15. Folosind proprietăţile funcţiei caracteristice, daţi alte soluţii problemelor **S1.1**, **S1.2** şi **S1.3**.

S1.16. Stabiliţi ce fel de relaţie este între mulţimile

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid \exists a \in (0,1] : x + ay = 1,\ y - a(x+1) = 0\},$$

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \in [0,1),\ y \in (0,1],\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

S1.17. Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Arătaţi că f este bijectivă dacă şi numai dacă

$$\mathrm{C}_{f[A]} = f[\mathrm{C}_A],\ \forall A \in \mathscr{P}(X).$$

S1.18.

a) Fie A o mulţime. Rezolvaţi ecuaţia:

$$X \cap A = X \cup A.$$

b) Arătaţi că pentru orice A şi B avem

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

S1.19. Pe $\mathbb{N}^*$ considerăm relaţia div definită prin

$$a \operatorname{div} b \iff \exists c \in \mathbb{N}^* : b = a \cdot c.$$

Arătaţi că $(\mathbb{N}^*, \operatorname{div})$ este o mulţime ordonată. Este $(\mathbb{N}^*, \operatorname{div})$ total ordonată?

S1.20. Fie X o mulţime. Definim relaţia $\sim$ pe $\mathcal{F}(X;X)$, cerând ca $f \sim g$ dacă şi numai dacă există o funcţie bijectivă $h \in \mathcal{F}(X;X)$ astfel încât $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Ce fel de relaţie este $\sim$?

Bibliografie recomandată

[1] C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă, *Analiză matematică.Probleme I*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.
[2] I. Radomir, A. Fulga, *Analiză matematică.Culegere de probleme*, Ed. Albastră, Cluj-Napoca, 2005.
[3] F. L. Ţiplea, *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.
[4] V. Postolică, Genoveva Spătaru-Burcă, *Analiză matematică.Exerciţii şi probleme I*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2005.
[5] R. Gologan, A. Halanay ş.a., *Probleme de examen. Analiză matematică*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2004.
[6] W. Weiss, *An introduction to Set Theory*, 2008
[7] W. F. Trench, *Introduction to Real Analysis,* Pearson Education Publ., 2009
[8] J. Goudsmit, R. Iemhoff, *On sets, functions and relations*, 2012.