Elemente de teoria mulțimilor

Cursul 1

Matematică - anul I

Facultatea de Informatică, UAIC

e-mail: adrian.zalinescu@info.uaic.ro

web: https://profs.info.uaic.ro/~adrian.zalinescu

2 Octombrie, 2018

Structura cursului

- Mulțimi. Relații. Funcții (*Curs 1*)
- Șiruri în $\mathbb{R}$ (*Curs 2*)
- Serii de numere reale (*Cursurile 3&4*)
- Spațiul $\mathbb{R}^n$: aspecte algebrice, topologice; aplicații liniare, biliniare și pătratice (*Cursurile 5–8*)
- Continuitatea funcțiilor de mai multe variabile (*Curs 9*)
- Diferențiabilitatea funcțiilor de mai multe variabile și aplicații (*Cursurile 10&11*)
- Integrare (*Cursurile 12&13*)

Modalitatea de evaluare

Nota finală va fi alcătuită din:

- **Prezență 10%**, constituită din:
  - 5% *prezență seminar*, unde se punctează: prezența $=10$, absența motivată (înainte de oră) $=5$, absența $=0$;
  - 5% *activitate seminar* (ieșiri la tablă): note de la 1 la 10;
- **Activitate seminar 30%: 2 lucrări** în săptămânile *S4* și *S12* la sfârșitul seminariilor, de $10-15$ minute. Nu este obligatorie prezența, nu se cere notă minimă.
- **Evaluare prin examene 60%: 2 examene scrise** în săptămânile de evaluare (*E1* în *S8* și *E2* în *S15*), timp de lucru în medie *1h30min*. Prezența este obligatorie.

Condiții de promovare a disciplinei:

- **Prezența obligatorie** la evaluările E1 și E2;
- **Media** evaluărilor E1 și E2: $\geq \mathbf{4,5}$;
- **Punctaj total:** $\geq \mathbf{4,5}$.

Exemplu:
Un student vine la 4 seminarii, obține notele 6 și 5 prin ieșiri la tablă, la o lucrare ia nota 7 (lipsește la cealaltă), iar la evaluări notele 4 și 7. Nota sa este calculată astfel:

$$\left(\frac{40}{130} * 5\% + \frac{6+5}{130} * 5\% + \frac{7}{20} * 30\% + \frac{4+7}{20} * 60\%\right) * 10 = \mathbf{4,55}.$$

Cum toate condițiile de promovare sunt îndeplinite, acesta promovează cu nota **5**.

Observații:

- Participanții la pregătirile pentru concursuri, cu rezultate în competițiile studențești de Matematică (minim medalie sau mențiune) vor avea echivalată activitatea de seminar (30% din punctajul final) cu nota 10.
- În sesiunea de restanțe se va da o probă scrisă la care studenții vor putea opta pentru refacerea evaluărilor E1 sau E2.

Cuprins

Ce este o mulțime?

Georg Cantor: "un tot unitar, cu elemente distincte, în care ordinea de dispunere a elementelor nu are importanță"

Adică:

- o *colecție* de *obiecte*, a căror ordine nu contează;
- pentru scopul nostru, obiect = *obiect matematic*;
- aceste colecții (mulțimi) trebuie ele însele tratate ca obiecte (matematice).

Mulți matematicieni și filosofi au încercat să stabilească o *fundație a matematicii* (sfârșitul secolului 19 / începutul secolului 20).
Noțiunea de *mulțime*, așa cum a fost ea introdusă de Cantor, s-a dovedit foarte valoroasă pentru acest scop.

Totuși, apar câteva probleme:

- Ce obiecte pot fi elementele unor mulțimi?

  Răspuns: pentru stabilirea unei baze solide a matematicii, e de ajuns ca *toate* obiectele să fie mulțimi (nu e foarte intuitiv).
  Conceptul de mulțime este unul *primar*, deci nu va avea definiție.

- Ce reguli pentru formarea mulțimilor sunt permise?

  La o primă vedere, dacă avem o proprietate $\mathcal{P}(x)$ despre x (x este o variabilă pentru obiecte), obiectul

  $$\{x \mid \mathcal{P}(x)\} \quad (\textit{a se citi: } \text{clasa (colecția) acelor } x \text{ astfel încât } \mathcal{P}(x))$$

  ar trebui să fie o mulțime.

Paradoxul lui Russell

Această regulă duce la următorul “paradox” (printre altele), datorat lui **Bertrand Russell**:

- Este $\{x \mid x \notin x\}$ (“mulțimea” tuturor mulțimilor care nu se conțin pe ele însele) o mulțime?

Răspunsul este categoric **nu**.

Acest lucru ne spune că obiectul abstract construit mai sus *nu trebuie* considerat o mulțime. Totuși, putem păstra anumite proprietăți $\mathcal{P}(x)$ pentru care $\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ să fie mulțime. Aceste proprietăți (sau reguli de construcție a mulțimilor) sunt date de un set de *axiome*.
În continuare vom reda setul de axiome introduse de **Ernst Zermelo** and **Abraham Fraenkel** (la începutul secolului 20).

Teoria Zermelo-Fraenkel a mulțimilor

Matematica poate fi descrisă în *limbajul formal* al *teoriei mulțimilor* (ZFC)
În acest limbaj:

- toate obiectele pot fi considerate drept mulțimi - ele vor fi reprezentate de *variabile*: x,y, z, a, b, c, A, B, C, etc.;
- două relații primare între mulțimi vor fi considerate:
  - *egalitatea*: $=$ (relație logică);
  - *apartenența*: $\in$ (specifică teoriei mulțimilor);
- *formule* – sau *propretăți* – ce pot fi scrise cu ajutorul simbolurilor de mai sus și al altor simboluri logice: $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$, $\forall$.

Exemplu: "$\{x \mid x \notin x\}$ nu este o mulțime" se poate scrie în ZFC ca

$$\neg\left(\exists A \forall x \left(x \in A \Leftrightarrow \neg(x \in x)\right)\right).$$

Axioma extensionalității

Axioma $\mathtt{ZF}_1$

Două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elemente.

Interpretare: dacă A și B sunt mulțimi, atunci $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ implică $A = B$.

Definiție

Fie A și B mulțimi.

- $A \subseteq B$ (A este o *submulțime* a lui B): $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$;
- $A \subsetneq B$ (A este o *submulțime proprie* a lui B): $A \subseteq B$ și $A \neq B$.

Propoziție

Fie A, B și C mulțimi. Atunci:

i) $A \subseteq A$ (reflexivitate);

ii) $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$ implică $A = B$ (antisimetrie);

iii) $A \subseteq B$ și $B \subseteq C$ implică $A \subseteq C$ (tranzitivitate).

Axioma de comprehensiune

Axioma $\mathtt{ZF}_2$

Pentru orice mulțime A și orice proprietate $\mathcal{P}$ (privind elementele lui A), există o mulțime ce conține elementele lui A care satisfac $\mathcal{P}$ și numai acestea.

- Această mulțime se notează $\{x \in A \mid \mathcal{P}\}$ sau $\{x \in A; \mathcal{P}\}$ și este o submulțime a lui A.
- Este aceeași cu clasa $\{x \mid (x \in A) \wedge \mathcal{P}\}$ și este unică, datorită $\mathtt{ZF}_1$.

Axioma mulțimii vide

Axioma $\mathtt{ZF}_3$

Există o mulțime fără elemente.

- Această mulțime este unică (din $\mathtt{ZF}_1$) și se notează $\emptyset$.
- Avem: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

Axioma perechii

Axioma ZF_4

Pentru orice mulțimi x și y există o mulțime care are doar pe x și y ca elemente.

- Vom nota $\{x, y\}$ o astfel de mulțime.
- $\{x, y\}$ se numește *pereche neordonată*.
- Mulțimea $\{x, x\}$ se mai notează $\{x\}$.
- Bineînțeles, $\{x, y\} = \{z \mid (z = x) \vee (z = y)\}$.

Perechi ordonate

Definim *perechea ordonată* ca

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Propoziție

Fie x, y, x' și y' mulțimi. Atunci $(x, y) = (x', y')$ dacă și numai dacă $x = x'$ și $y = y'$.

Generalizare la n ($n \geq 3$) mulțimi: *n-uplu* (*ordonat*) cu elementele $x_1, \ldots, x_n$:

$$(x_1, \ldots, x_n) := ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n).$$

Axioma mulțimii părților

Axioma ZF_5

Pentru o mulțime A, există o altă mulțime care este formată numai din submulțimile lui A.

- Vom nota $\mathscr{P}(A)$ o astfel de mulțime, pe care o vom numi *mulțimea părților* lui A.
- Astfel, $B \in \mathscr{P}(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$, adică $\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.
- Bineînțeles, $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$.

Axioma reuniunii

Axioma ZF_6

Pentru orice mulțime $\mathcal{A}$, există o altă mulțime ce conține numai elementele elementelor lui $\mathcal{A}$.

- Numim o astfel de mulțime *reuniunea* lui $\mathcal{A}$ și o notăm $\bigcup \mathcal{A}$.
- Avem: $x \in \bigcup \mathcal{A}$ dacă și numai dacă există $A \in \mathcal{A}$ astfel încât $x \in A$, adică

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x \mid \exists A : x \in A\}.$$

- Dacă $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, unde I este o mulțime de *indici*, vom scrie $\bigcup_{i \in I} A_i$ în loc de $\bigcup \{A_i\}_{i \in I}$. Evident,

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i.$$

Reuniunea unui număr finit de mulțimi

Definiție

Dacă A și B sunt mulțimi, numim *reuniunea* mulțimilor A și B mulțimea $A \cup B := \bigcup\{A, B\}$.

- Este clar că $x \in A \cup B$ dacă și numai dacă $x \in A$ *sau* $x \in B$.
- *Generalizare* la n ($n \geq 3$) mulțimi: *reuniunea* mulțimilor $A_1, \ldots, A_n$:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n := (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n.$$

- Avem: $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup \{A_1, \ldots, A_n\}$, dar mai întâi trebuie să introducem noțiunea de *n-uplu neordonat* cu elementele $x_1, \ldots, x_n$:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} := \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{x_n\}.$$

Intersecția

Dacă $\mathcal{A}$ este o mulțime, *intersecția* lui $\mathcal{A}$ este clasa

$$\bigcap \mathcal{A} := \{x \mid x \in A,\ \forall A \in \mathcal{A}\}\,.$$

Dacă $\mathcal{A}$ este nevidă, atunci $\bigcap \mathcal{A}$ este o mulțime și $\bigcap \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.
Prin analogie cu noțiunea de reuniune:

- Scriem $\bigcap_{i \in I} A_i$ în loc de $\bigcap \{A_i\}_{i \in I}$.
- Numim *intersecția* mulțimilor A și B mulțimea $A \cap B := \bigcap\{A, B\}$.
- Bineînțeles, $x \in A \cap B$ dacă și numai dacă $x \in A$ *and* $x \in B$.
- *Generalizare* la n ($n \geq 3$) mulțimi:*intersecția* mulțimilor $A_1, \ldots, A_n$:

$$\begin{aligned}\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap \cdots \cap A_n := (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n \\ &= \bigcap \{A_1, \ldots, A_n\}\,.\end{aligned}$$

Diferența mulțimilor

Fie A și B mulțimi.

- *Diferența* mulțimilor A și B este

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

- *Diferența simetrică* a mulțimilor A și B este

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Complemente

- Dacă A este o mulțime, *complementul absolut* al lui A este clasa
$$A^{c} := \{x \mid x \notin A\},$$
care nu este mulțime.
- Totuși, dacă $A \subseteq U$, *complementul relativ* al lui A în raport cu U, $\mathrm{C}_A^U := U \setminus A$ este în mod evident o mulțime.
- Câteodată, atunci când mulțimea U este implicită (un *univers*), notăm C_A în loc de C_A^U.

Proprietăți ale operațiilor cu mulțimi

Propoziție

Fie A, B, C mulțimi și U univers (în scopul efectuării de complemente relative). Atunci:

i) $A \cup A = A \cap A = A$ (*idempotență*);

ii) $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;

iii) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (*comutativitate*);

iv) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (*asociativitate*);

v) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (*distributivitate*);

vi) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$ (*absorbție*);

vii) $\complement_{\complement_A} = A$;

viii) $\complement_{A\cup B} = \complement_A \cap \complement_B$; $\complement_{A\cap B} = \complement_A \cup \complement_B$ (*legile De Morgan*);

ix) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$;
$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$;

x) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

xi) $A \triangle A = \emptyset$; $A \triangle \emptyset = A$;

xii) $A \triangle B = B \triangle A$;

xiii) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Produsul cartezian

Definiție

Numim *produsul cartezian* al mulțimilor A și B mulțimea

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

Propoziție

Fie A, B și C mulțimi. Atunci:

$i)$ $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

$ii)$ $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

$iii)$ $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

$iv)$ $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Generalizare la n ($n \geq 3$) mulțimi:

$$\begin{aligned} A_1 \times \cdots \times A_n := & \quad (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n \\ = & \quad \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}. \end{aligned}$$

Alte axiome

Axioma înlocuirii – ZF_7

Pentru orice mulțime A și orice proprietate $\mathcal{P}$ astfel încât

$$\forall x(x \in A \Rightarrow \exists! y : \mathcal{P}),$$

există o mulțime B astfel încât

$$\forall y(y \in B \Leftrightarrow \exists x \in A : \mathcal{P}).$$

Axioma infinitului – ZF_8

Există o mulțime C astfel încât:

i) $\emptyset \in C$;

ii) $x \in C \Rightarrow x \cup \{x\} \in C$.

Cu ajutorul ZF_8 putem construi *mulțimea numerelor naturale*:

- Fie C o mulțime ce satisface i) și ii); definim

$$\omega := \bigcap \{N \in \mathscr{P}(C) \mid N \text{ satisface i) și ii)}\}.$$

  Atunci ω însăși satisface i) și ii).

- Putem defini: $0 := \emptyset$, $1 := \{0\} = \{\emptyset\}$, $2 := 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 := 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, șamd ...
- Avem: $0, 1, 2, 3, \dots \in \omega$; astfel ω devine un prototip pentru *mulțimea numerelor naturale*, notată de obicei prin $\mathbb{N}$.
- Elementele acesteia se numesc *numere naturale*.

Axioma fundației – $\mathtt{ZF}_9$

Pentru orice mulțime nevidă A, există o mulțime $x \in A$ astfel încât $x \cap A = \emptyset$.

- Această axiomă are rolul de a preveni comportamente patologice ale mulțimilor.
- De exemplu, pentru orice mulțime x, avem $x \notin x$ (e de ajuns să luăm $A := \{x\}$ în $\mathtt{ZF}_9$).

Axioma alegerii – $\mathtt{ZF}_{10}$

Pentru orice mulțime $\mathcal{A}$ formată din mulțimi nevide și disjuncte două câte două, există o mulțime C astfel încât pentru orice $A \in \mathcal{A}$, C și A au precis un element comun.

Relații

Definiție

Fie A și B mulțimi.

- O *relație* (*binară*) *de la* A *la* B este o submulțime a lui $A \times B$.
- În cazul $A = B$, spunem că R este o *relație pe* A.

Terminologie: dacă R este o relație de la A la B și $(x, y) \in R$,

- spunem că x este în *relația* R cu y;
- notăm adesea xRy.

Definiție

Fie R o relație de la A la B și S o relație de la B la C.

- *Domeniul*, respectiv *imaginea* sau *codomeniul* relației R sunt:

$$\mathrm{Dom}\, R := \{x \in A \mid \exists y \in B : xRy\},$$
$$\mathrm{Im}\, R := \{y \in B \mid \exists x \in A : xRy\}.$$

- *Inversa* relației R este următoarea relație de la B la A:

$$R^{-1} := \{(y, x) \in B \times A \mid xRy\}.$$

- *Compunerea* lui S cu R este următoarea relație de la A la C:

$$S \circ R := \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B : xRy \wedge ySz\}.$$

Definiție

Fie A o mulțime. *Identitatea* pe A este relația

$$1_A := \{(x, x) \mid x \in A\}.$$

Definiție

Fie R o relație pe A. Spunem că R este:

- *reflexivă* dacă $xRx,\ \forall x \in A$, adică $1_A \subseteq R$;
- *simetrică* dacă $xRy \Rightarrow yRx,\ \forall x, y \in A$, adică $R^{-1} = R$;
- *antisimetrică* dacă $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y,\ \forall x, y \in A$, adică $R \cap R^{-1} = 1_A$;
- *tranzitivă* dacă $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz,\ \forall x, y, z \in A$, adică $R \circ R \subseteq R$;
- *totală* dacă $xRy \vee yRx,\ \forall x, y \in A$, adică $R \cup R^{-1} = A \times A$.

Relații de echivalență

Definiție

Fie R o relație pe A. Spunem că R este o *relație de echivalență* pe A dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Definiție

Fie R o relație de echivalență pe A.

- *Clasa de echivalență* a lui $x \in A$ este:

$$\widehat{x}_R = [x]_R := \{y \in A \mid xRy\}.$$

- *Câtul* lui A în raport cu R este:

$$A/_R := \{\widehat{x}_R \mid x \in A\}.$$

Propoziție

Fie R o relație de echivalență pe A. Atunci:

i) $x \in \widehat{x}, \ \forall x \in A$;

ii) $y \in \widehat{x} \Leftrightarrow \widehat{x} = \widehat{y} \Leftrightarrow xRy, \ \forall x, y \in A$.

Clasele de echivalență sunt de obicei notate $\sim$, $\simeq$, $\approx$, $\equiv$, $\cong$, etc.

Relații de ordine

Definiție

Fie R o relație pe A. Spunem că R este:

- o *ordine* pe A dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă;
- o *preordine* pe A dacă este reflexivă și tranzitivă;
- o *ordine totală* pe A dacă este o ordine pe A și este o relație totală.

- În cazurile de mai sus, numim perechea (A, R) o mulțime *ordonată* (*preordonată*, respectiv *total ordonată*).
- Relațiile de ordine sunt de obicei notate prin $\leq$, $\preceq$, $\lesssim$, $\leqslant$, etc.
- Inversele acestora sunt notate $\geq$, $\succeq$, $\gtrsim$, respectiv $\geqslant$.
- De asemenea, dacă $\preceq$ este o preordine pe A, $\prec$ va nota relația $\preceq \setminus 1_A$, adică $x \prec y \Leftrightarrow (x \preceq y) \wedge (x \neq y)$ pentru orice $x, y \in A$ (convenții similare se aplică și celorlalte simboluri).

Definiție

Fie $(A, \preceq)$ o mulțime preordonată și $B \subseteq A$.

- Un element $a \in A$ se numește un *majorant* pentru B dacă $x \preceq a, \ \forall x \in B$.
- Un element $a \in A$ se numește un *minorant* pentru B dacă $x \succeq a, \ \forall x \in B$.
- Dacă B admite un majorant, un minorant sau ambii, spunem că B este *mărginită superior*, *mărginită inferior*, respectiv *mărginită*.
- Dacă $a \in A$ este un majorant pentru B și $a \in B$, spunem că a este un punct de *maxim* pentru B.
- Dacă $a \in A$ este un minorant pentru B și $a \in B$, spunem că a este un punct de *minim* pentru B.

- În general, pot exista mai multe puncte de maxim sau de minim pentru B.
- Totuși, dacă $\preceq$ este o preordine, atunci punctele de maximum și de minimum, dacă există, sunt unice.
- Le notăm $\max_{\preceq} B$, respectiv $\min_{\preceq} B$ ($\max B$, respectiv $\min B$, dacă nu există posibilitate de confuzie).

Definiție

Fie $(A, \preceq)$ o mulțime ordonată și $B \subseteq A$.

- Spunem că un element $a \in A$ este *marginea superioară* (sau *supremum*) a lui B dacă a este cel mai mic majorant al lui B, adică $a = \min U$, unde U este mulțimea tuturor majoranților lui B. Un astfel de element, dacă există, se notează $\sup_{\preceq} B$ (sau, mai simplu $\sup B$).
- Spunem că un element $a \in A$ este *marginea inferioară* (sau *infimum*) a lui B dacă a este cel mai mare minorant al lui B, adică $a = \max L$, unde L este mulțimea tuturor minoranților lui B. Un astfel de element, dacă există, se notează $\inf_{\preceq} B$ (sau, mai simplu $\inf B$).

Definiție

Fie $(A, \preceq)$ o mulțime ordonată.

- Spunem că $(A, \preceq)$ este *Dedekind completă* dacă orice submulțime nevidă a lui A care este mărginită superior admite un supremum.
- Spunem că $(A, \preceq)$ este *bine ordonată* dacă orice submulțime nevidă a lui A admite un minimum.

- O mulțime ordonată este Dedekind completă dacă și numai dacă fiecare submulțime nevidă a sa care este minorată admite un infimum.
- O mulțime bine ordonată este o mulțime total ordonată.
- Dacă acceptăm axima alegerii $\mathtt{ZF}_{10}$, se poate demonstra că orice mulțime poate fi bine ordonată (adică, pentru orice mulțime A există o ordine $\preceq$ pe A astfel încât $(A, \preceq)$ să fie bine ordonată).

Funcții

Definiție

Fie A și B mulțimi. O *funcție de la A la B* este o relație $f \subseteq A \times B$ care satisface:

- $\mathrm{Dom}\, f = A$;
- $(x, y) \in f,\ (x, z) \in f \Rightarrow y = z$, $\forall x \in A,\ \forall y, z \in B$.

Notăm acest lucru $f : A \to B$.

- Dacă $f : A \to B$ și $x \in A$, notăm $f(x)$ unicul element $y \in B$ astfel încât $(x, y) \in f$.
- Dacă dorim *să definim* o funcție $f : A \to B$, este de ajuns *să specificăm* valoarea $f(x)$ pentru fiecare $x \in A$.
- Pentru o funcție $f : A \to B$, $f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$; când "uităm" că f este o relație, numim aceasta din urmă *graficul* lui f.

- Identitatea pe o mulțime A este o funcție, $1_A : A \to A$ $(1_A(x) = x, \ \forall x \in A)$.
- Dacă X și Y sunt mulțimi, notăm $\mathscr{F}(X; Y)$ mulțimea funcțiilor de la X la Y.

Definiție

Fie $f : A \to B$ o funcție.

- Dacă $E \subseteq A$, funcția $f|_E := f \cap (E \times B)$ (adică $f|_E(x) := f(x),\ \forall x \in E$) se numește *restricția* lui f la E.
- Dacă $E \subseteq A$, *imaginea* lui f prin E este:

$$f[E] := \{y \in B \mid \exists x \in E : (x, y) \in f\}.$$

- Dacă $F \subseteq B$, *preimaginea* sau *imaginea inversă* a lui f prin F este:

$$f^{-1}[F] := \{x \in A \mid \exists y \in F : (x, y) \in f\}.$$

Pentru o funcție $f : A \to B$,

- $f[\emptyset] = \emptyset$,
- $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$,
- $f[A] = \mathrm{Im}\, f$,
- $f^{-1}[B] = \mathrm{Dom}\, f = A$.

Definiție

O funcție $f : A \to B$ se numește:

- *injectivă* dacă pentru orice $x, y \in A$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;
- *surjectivă* dacă $\mathrm{Im}\, f = B$;
- *bijectivă* dacă este atât injectivă cât și surjectivă;
- *inversabilă* dacă există $g : B \to A$ astfel încât $f \circ g = 1_B$ și $g \circ f = 1_A$.

O funcție $f : A \to B$ este injectivă dacă și numai dacă relația f^{-1} este o funcție de la $\mathrm{Im}\, f$ to A.

Propoziție

O funcție $f : A \to B$ este bijectivă dacă și numai dacă este inversabilă. În acest caz, f^{-1} este o funcție de la B la A și

- $f \circ f^{-1} = 1_B$,
- $f^{-1} \circ f = 1_A$.

Fie o mulțime U suficient de mare. Dacă $A \subseteq U$, numim *funcția caracteristică* a lui A funcția $\chi_A : U \to \{0, 1\}$ definită de

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in \complement_A. \end{cases}$$

Propoziție

Fie A și B două submulțimi ale lui U. Atunci:

i) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$;

ii) $\chi_{\complement_A} = 1 - \chi_A$;

iii) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;

iv) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$.

Bibliografie selectivă

- M. Gorunescu, *Lecții de analiză matematică pentru informaticieni*, Ed. Univ. Craiova, 2000.
- M. Postolache, *Analiză matematică (teorie și aplicații)*, Ed. Fair Partners, București, 2011.
- J. Roitman, *Introduction to Modern Set Theory*, 2011.
- V. Postolică, *Baze ale matematicii actualizate prin eficiență*, Matrix Rom, București, 2008.
- F. L. Țiplea, *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iași, 1998.
- B. Poonen, *Infinity: Cardinal Numbers*, 2002.
- W. F. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Pearson Education Publ., 2009
- E. Cioară, M. Postolache, *Capitole de analiză matematică*, Ed. Fair Partners, București, 2010.
- G. O'Regan, *Mathematics in Computing* (Ch. 2), Springer Verlag, London, 2013.