SEMINAR 2

S2.1. Demonstraţi Propoziţia 1.1 din Cursul 2.

S2.2. Demonstraţi partea ***ii)*** a Propoziţiei 1.2 din Cursul 2.

S2.3. Determinaţi care din şirurile următoare este un şir Cauchy:

i) pentru un parametru real a,

$$x_n = \frac{\sin a}{2} + \frac{\sin 2a}{2^2} + \ldots + \frac{\sin na}{2^n},\ n \in \mathbb{N}^*;$$

ii)

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

S2.4. (Lema Stolz–Cesàro) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ un şir şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^*$ un şir strict monoton şi nemărginit. Arătaţi că dacă există

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \in \overline{\mathbb{R}},$$

atunci există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ şi are loc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

S2.5. Arătaţi că şirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,\ n \in \mathbb{N}^*$$

este convergent (limita sa fiind cunoscută drept constanta lui Euler constant, $c = 0,577215\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

S2.6. Arătaţi că şirul definit de

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^*$$

este convergent (vom vedea mai târziu că limita sa este $\frac{\pi^2}{6}$).

S2.7. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq (0, +\infty)$. Arătaţi că dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ (în $\overline{\mathbb{R}}$), atunci există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, de asemenea. Mai mult, are loc:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

S2.8. Calculaţi următoarele limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(n!)^3}};\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n};\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}{n}.$$

S2.9. Determinaţi punctele de acumulare pentru fiecare din şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, unde:

$$x_n = \frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{n} + e^{\frac{1}{n}}};\ x_n = 2 + (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{2};\ x_n = \frac{(-1)^n + n\operatorname{tg}\frac{n\pi}{4}}{n}.$$

S2.10. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit de $x_1 = 1$ şi

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n^2}\right)x_n,\ n \in \mathbb{N}^*$$

este convergent şi apoi calculaţi-i limita.

S2.11. Calculaţi următoarele limite:

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n};$

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{\pi}{n}};$

iii) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}}$.

S2.12. Găsiţi punctele de acumulare ale şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, unde

$$x_n = \left[1+(-1)^n\right]\cdot n^{(-1)^n} + \cos\frac{n\pi}{6},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

S2.13. Studiaţi convergenţa punctuală şi uniformă a şirului de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, cu $f_n : E\to\mathbb{R}$, definit de:

i) $E=(0,1)$, $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$;

ii) $E=[0,1]$, $f_n(x)=nx(1-x)^n$;

iii) $E=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{\sqrt{n^2x^2+1}}{n}$;

iv) $E=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+n(n+1)x^2}$;

v) $E=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\left(|\sin x|^n+|\cos x|^n+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)^{1/n}$;

vi) $E=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{\sin(nx+3)}{\sqrt{n+1}}$;

vii) $E=[0,1]$, $f_n(x)=n^2x^2\mathrm{e}^{-n^2x^2}$.

S2.13. Sunt următoarele şiruri de funcţii uniform convergente:

i) $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{n-(x-1)\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{nx}+n}$, $n\in\mathbb{N}$;

ii) $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(kx)}{k(k+1)}$, $n\in\mathbb{N}^*$;

iii) $f_n:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sqrt{(n^2+1)\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+nx}-\sqrt{nx}$, $n\in\mathbb{N}$?

S2.15. Demonstraţi inegalitatea lui *Hölder*:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k||b_k|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q},$$

unde $n\in\mathbb{N}^*$, $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$, $p,q\in(1,\infty)$ cu $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

S2.16. Demonstraţi inegalitatea lui *Minkowski*:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p},$$

unde $n\in\mathbb{N}^*$, $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$ şi $p\geq 1$.

S2.17. (inegalitatea generalizată a mediilor). Arătaţi că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}_+^*$, $t_1,\ldots,t_n\in[0,1]$ cu $t_1+t_2+\ldots+t_n=1$, avem:

$$x_1^{t_1}\cdot x_2^{t_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{t_n}\leq t_1x_1+t_2x_2+\ldots+t_nx_n.$$

S2.18. Arătaţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}_+$, are loc inegalitatea lui *Carleman*:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1a_2\ldots a_k)^{1/k}\leq\mathrm{e}\sum_{k=1}^{n}a_k;$$

constanta e se dovedeşte a fi optimală. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$.

S2.19. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ şi $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$, are loc inegalitatea lui *Titu Andreescu*:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

S2.20. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, avem:

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}\right)^{1/2} \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Recommended bibliography

[1] W. Anscombe, *Cauchy Sequences: Cauchy's Criterion as a useful test for convergence*, University of Leeds, United Kingdom, 2013.

[2] N. Cotfas, L. A. Cotfas, *Elemente de analiză matematică,* Ed. Universit. din Bucureşti, 2010.

[3] C. Drăguşin, O. Olteanu, M. Gavrilă, *Analiză matematică.Probleme I*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

[4] L. Fehér, G. Kós, Á. Tóth, *Mathematical Analysis. Problems and Exercises-II*, Eötvös Loránd University, Faculty of Science, Typotex, 2014.

[5] W. J. Kaczor, M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis. Real numbers, sequences, series*, Student Mathematical Library, vol. 4, AMS Publ.,2000.

[6] E. Popescu, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

[7] V. Postolică, *Eficienţă prin matematica aplicată*, Ed. Matrix Rom, Bucureşti, 2006.

[8] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, ediţia a III-a, Ed. Polirom, Iaşi, 1998.