CURSUL 1
ELEMENTE DE TEORIA MULŢIMILOR

1. Mulţimi

În viziunea lui Georg Cantor, o *mulţime* este "un tot unitar, cu elemente distincte, în care ordinea de dispunere a elementelor nu are importanţă". Totuşi, aceasta nu poate fi luată ca definiţia unei mulţimi, pentru că nu orice colecţie de obiecte poate fi gândită ca o mulţime, după cum arată următorul paradox al lui Bertrand Russell:

Fie M colecţia *tuturor* mulţimilor A cu proprietatea că $A \notin A$. Atunci M *nu poate fi* o mulţime (exerciţiu!).

De aceea, nu vom da definiţia unei mulţimi şi vom considera mulţimile ca obiecte primare ale teoriei mulţimilor (care reprezintă fundaţia întregii matematici). Vom preciza în schimb unele criterii care ne vor permite să decidem ce obiecte ale gândirii sunt mulţimi şi care nu. Pentru a realiza acest lucru, E. Zermelo şi A. Fraenkel au introdus un sistem de *axiome*, ce le poartă în prezent numele. În continuare vom prezenta o versiune a unui astfel de sistem. Să precizăm mai întâi că în contextul teoriei mulţimilor, toate obiectele de bază sunt mulţimi. Între mulţimi, două relaţii de bază sunt considerate: egalitatea (o relaţie logică) şi apartenenţa, notate $=$, respectiv $\in$. Ideea de *proprietate* (a unei mulţimi) este capturată de către *formule*, care pot fi scrise cu ajutorul *variabilelor* (ca x, y, A, B, etc.), a relaţiilor primare de mai sus, a conectivelor logice: $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ precum şi a simbolurilor auxiliare (*paranteze*).

ZF_1 **(axioma extensionalităţii)**. Două mulţimi sunt egale dacă au aceleaşi elemente.

Acest lucru este echivalent cu a afirma că dacă A şi B sunt mulţimi, atunci $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ implică $A = B$. Câteodată suntem interesaţi numai de un sens al echivalenţei ($\Leftrightarrow$) din formula de mai sus.

Definiţie. Fie A şi B două mulţimi. Dacă orice element al mulţimii A este de asemenea element al lui B, spunem că A este o *submulţime* a lui B sau că A este *inclusă* în B, notând acest lucru $A \subseteq B$. Dacă în plus $A \neq B$, spunem că A este o *submulţime proprie* a lui B şi notăm acest lucru $A \subsetneq B$.

Propoziţia 1.1. *Fie A, B şi C mulţimi. Atunci:*

i) $A \subseteq A$ *(reflexivitate);*
ii) $A \subseteq B$ *şi* $B \subseteq A$ *implică* $A = B$ *(antisimetrie);*
iii) $A \subseteq B$ *şi* $B \subseteq C$ *implică* $A \subseteq C$ *(transitivitate).*

ZF_2 **(axioma de comprehensiune)**. Pentru orice mulţime A şi orice proprietate $\mathcal{P}$ (privind elementele lui A), există o mulţime ce conţine elementele lui A care satisfac $\mathcal{P}$ şi numai acestea.

Această mulţime este de obicei notată $\{x \in A \mid \mathcal{P}\}$ sau $\{x \in A; \mathcal{P}\}$ şi este o submulţime a lui A.

Subliniem faptul că este esenţial ca mulţimea A să fie precizată. Într-adevăr, având doar proprietatea $\mathcal{P}$, putem nota $\{x \mid \mathcal{P}\}$ colecţia *tuturor* elementelor x satisfăcând proprietatea $\mathcal{P}$. Dar astfel de obiecte, numite *clase*, nu sunt întotdeauna mulţimi, aşadar trebuie manipulate cu grijă. De exemplu, paradoxul lui Russell se traduce prin faptul că clasa $\{x \mid x \notin x\}$ nu este o mulţime. O consecinţă imediată a axiomei ZF_2 este că clasa $\{x \mid x = x\}$ nu este o mulţime.

ZF_3 **(axioma mulţimii vide)**. Există o mulţime fără elemente.

Această mulţime (unică, din axioma extensionalităţii) se numeşte *mulţimea vidă* şi se notează $\varnothing$. Axioma mulţimii vide este importantă şi datorită faptului că ea stipulează existenţa a măcar unei mulţimi.

ZF_4 **(axioma perechii)**. Pentru orice mulţimi x şi y există o mulţime care are doar pe x şi y ca elemente.

Vom nota $\{x, y\}$ o astfel de mulţime; bineînţeles, $z \in \{x, y\}$ dacă şi numai dacă $z = x$ sau $z = y$. Pentru o mulţime x, se obişnuieşte a nota $\{x\}$ în loc de $\{x, x\}$.

Evident, $\{x, y\} = \{y, x\}$, deci *ordinea* elementelor x şi y nu contează. De aceea $\{x, y\}$ se mai numeşte câteodată *pereche neordonată*. Dacă dorim să introducem o noţiune de pereche în care ordinea elementelor x şi $y$contează, definim pur şi simplu mulţimea

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

pe care o numim *pereche ordonată*.

Propoziţia 1.2. *Fie x, y, x' şi y' mulţimi. Atunci $(x, y) = (x', y')$ dacă şi numai dacă $x = x'$ şi $y = y'$.*

ZF_5 **(axioma mulţimii părţilor)**. Pentru o mulţime A, există o altă mulţime care este formată numai din submulţimile lui A.

O astfel de mulţime o vom numi *mulţimea părţilort* lui A şi o vom nota $\mathscr{P}(A)$. Astfel, $B \in \mathscr{P}(A) \Leftrightarrow B \subseteq A$. Bineînţeles, pentru orice mulţime A, $\varnothing \in \mathscr{P}(A)$.

ZF_6 **(axioma reuniunii)**. Pentru orice mulţime $\mathcal{A}$, există o altă mulţime ce conţine numai elementele elementelor lui $\mathcal{A}$.

Numim o astfel de mulţime *reuniunea* lui $\mathcal{A}$ şi o notăm $\bigcup \mathcal{A}$. Pentru un element x, $x \in \bigcup \mathcal{A}$ dacă şi numai dacă există $A \in \mathcal{A}$ astfel încât $x \in A$.

De obicei vom avea de a face cu *familii indexate* de forma $\{A_i\}_{i \in I}$, unde I este o mulţime de *indici*t; în loc de $\bigcup \{A_i\}_{i \in I}$ vom scrie, mai simplu, $\bigcup_{i \in I} A_i$. Evident,

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i.$$

Dacă A şi B sunt mulţimi, vom numi *reuniunea* mulţimilor A şi B mulţimea $A \cup B := \bigcup\{A, B\}$. Este clar că $x \in A \cup B$ dacă şi numai dacă $x \in A$ *sau* $x \in B$.

O noţiune duală celei de reuniune este aceea de *intersecţie*. Dacă $\mathcal{A}$ este o mulţime, *intersecţia* lui $\mathcal{A}$ este clasa

$$\bigcap \mathcal{A} := \{x \mid x \in A,\ \forall A \in \mathcal{A}\}.$$

Dacă $\mathcal{A}$ este nevidă, atunci $\bigcap \mathcal{A}$ este o mulţime şi $\bigcap \mathcal{A} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Ca şi în cazul reuniuni, dacă $\{A_i\}_{i \in I}$ este o familie de mulţimi, vom scrie $\bigcap_{i \in I} A_i$ în loc de $\bigcap \{A_i\}_{i \in I}$. De asemenea, dacă A şi B sunt mulţimi, vom numi *intersecţia* mulţimilor A şi B mulţimea $A \cap B := \bigcap\{A, B\}$. Bineînţeles, $x \in A \cap B$ dacă şi numai dacă $x \in A$ şi $x \in B$.

Noţiunile introduse până acum pot fi generalizate (prin recurenţă) la un *număr finit* ($n \geq 3$) de mulţimi:

- *n-uplu neordonat* cu elementele $x_1, \ldots, x_n$: $\{x_1, \ldots, x_n\} := \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{x_n\}$;
- *n-uplu* (*ordonat*) cu elementele $x_1, \ldots, x_n$: $(x_1, \ldots, x_n) := ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$;
- *reuniunea* mulţimilor $A_1, \ldots, A_n$: $\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n := (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n = \bigcup\{A_1, \ldots, A_n\}$;
- *intersecţia* mulţimilor $A_1, \ldots, A_n$: $\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap \cdots \cap A_n := (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n = \bigcap\{A_1, \ldots, A_n\}$.

O altă operaţie cu mulţimi este *diferenţa mulţimilor*:

Fie A şi B mulţimi. Atunci mulţimea

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

se numeşte *diferenţa* mulţimilor A şi B. *Diferenţa simetrică* a mulţimilor A şi B este

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Dacă A este o mulţime, *complementul absolut* al lui A este clasa $A^c := \{x \mid x \notin A\}$. Se poate demonstra uşor că A^c nu este o mulţime (exerciţiu!). Totuşi, dacă U este o mulţime mai mare decât A (adică $A \subseteq U$), *complementul relativ* al lui A în raport cu U, $\complement_A^U := U \setminus A$ este evident o mulţime. Câteodată, atunci când mulţimea U este subînţeleasă (şi, de obicei, destul de mare ca să fie considerată un *univers*), vom nota $\complement_A$ în loc de $\complement_A^U$.

În continuare redăm o serie de prorietăţi ale noţiunilor deja introduse.

Propoziţia 1.3. *Fie A, B, C mulţimi şi U univers (în scopul efectuării de complemente relative). Atunci:*

i) $A \cup A = A \cap A = A$ *(idempotenţă);*
ii) $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;
iii) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ *(comutativitate);*
iv) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(asociativitate);*
v) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ *(distributivitate);*
vi) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$ *(absorbţie);*
vii) $\complement_{\complement_A} = A$;
viii) $\complement_{A \cup B} = \complement_A \cap \complement_B$; $\complement_{A \cap B} = \complement_A \cup \complement_B$ *(legile De Morgan);*
ix) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$; $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$;
x) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
xi) $A \triangle A = \varnothing$; $A \triangle \varnothing = A$;
xii) $A \triangle B = B \triangle A$;
xiii) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Definiţie. Fie A şi B mulţimi. Vom numi *produsul cartezian* al mulţimilor A şi B mulţimea

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$ [1]

Este uşor de verificat că $A \times B$ este într-adevăr o mulţime; într-adevăr, pentru orice $x \in A$ şi $y \in B$, $(x, y) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$ (exerciţiu!).

Propoziţia 1.4. *Fie A, B şi C mulţimi. Atunci:*

[1] din punct de vedere riguros, această notaţie este o abreviere pentru $\{z \mid \exists x \in A,\ \exists y \in B : z = (x, y)\}$

i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$; *iii)* $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;
ii) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$; *iv)* $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$.

Ca şi în cazul altor operaţii, se poate defini *produsul cartezian* al unui *număr finit* ($n\geq 3$) de mulţimi:

$$A_1\times\cdots\times A_n := (A_1\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n = \{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_1\in A_1,\ldots,x_n\in A_n\}.$$

ZF$_7$ **(axioma înlocuirii)**. Pentru orice mulţime A şi orice proprietate $\mathcal{P}$ astfel încât

$$\forall x(x\in A\Rightarrow \exists! y:\mathcal{P}),$$

există o mulţime B astfel încât

$$\forall y(y\in B\Leftrightarrow \exists x\in A:\mathcal{P}).$$

ZF$_8$ **(axioma infinitului)**. Există o mulţime C astfel încât:

(i) $\varnothing\in C$;
(ii) $x\in C\Rightarrow x\cup\{x\}\in C$.

Cu ajutorul acestei axiome putem construi *mulţimea numerelor naturale*, după cum urmează. Fie C o mulţime ce satisface (i) şi (ii); definim

$$\omega := \bigcap\{N\in\mathscr{P}(C)\mid N \text{ satisface (i) şi (ii)}\}.$$

Atunci chiar mulţimea ω satisface (i) şi (ii). Putem defini $0:=\varnothing$, $1:=\{0\}=\{\varnothing\}$, $2:=1\cup\{1\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $3:=2\cup\{2\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, şi aşa mai departe ... Atunci $0,1,2,3,\dots\in\omega$; astfel ω devine un prototip al *mulţimii numerelor naturale*, notat de obicei prin $\mathbb{N}$. Elementele sale vor fi numite *numere naturale*.

ZF$_9$ **(axiom fundaţiei)**. Pentru orice mulţime nevidă A, există o mulţime $x\in A$ astfel încât $x\cap A=\varnothing$.

Această axiomă are rolul de a preveni comportamente patologice ale mulţimilor. De exemplu, pentru orice mulţime x, avem $x\notin x$ (este de ajuns să luăm $A:=\{x\}$ în ZF$_9$).

ZF$_{10}$ **(axioma alegerii)**. Pentru orice mulţime $\mathcal{A}$ formată din mulţimi nevide şi disjuncte două câte două, există o mulţime C astfel încât pentru orice $A\in\mathcal{A}$, C şi A au precis un element comun.

2. Relaţii

Următoarea definiţie încearcă să dea un înţeles matematic conceptului de relaţie.

Definiţie. Fie A şi B mulţimi. O *relaţie (binară) de la A la B* este o submulţime a lui $A\times B$. În cazul în care $A=B$, spunem că R este o *relaţie pe A*.

Dacă R este o relaţie de la A la B şi $x\in A$, $y\in B$, spunem adeseori că x este în relaţia R cu y dacă $(x,y)\in R$. Câteodată vom nota xRy în loc de $(x,y)\in R$.

Definiţie. Fie R o relaţie de la A la B şi S o relaţie de la B la C.

a) Mulţimile

$$\operatorname{Dom} R := \{x\in A\mid \exists y\in B: xRy\},$$
$$\operatorname{Im} R := \{y\in B\mid \exists x\in A: xRy\}$$

se numesc *domeniul*, repectiv *imaginea* relaţiei R.

b) Relaţia de la B la A, definită prin

$$R^{-1} := \{(y,x)\in B\times A\mid xRy\}$$

se numeşte *inversa* relaţiei R.

c) Relaţia de la A la C, definită prin

$$S\circ R := \{(x,z)\in A\times C\mid \exists y\in B: xRy\wedge ySz\}$$

se numeşte *compunerea* lui S cu R.

Definiţie. Fie A o mulţime. Relaţia

$$1_A := \{(x,x)\mid x\in A\}$$

se numeşte *identitatea* pe A.

Definiţie. Fie R o relaţie pe A. Spunem că relaţia R este:

a) *reflexivă* dacă $1_A\subseteq R$, *adică* $xRx,\ \forall x\in A$;
b) *simetrică* dacă $R^{-1}=R$, *adică* $xRy\Rightarrow yRx,\ \forall x,y\in A$;
c) *antisimetrică* dacă $R\cap R^{-1}=1_A$, *adică* $xRy\wedge yRx\Rightarrow x=y,\ \forall x,y\in A$;
d) *tranzitivă* dacă $R\circ R\subseteq R$, *adică* $xRy\wedge yRz\Rightarrow xRz,\ \forall x,y,z\in A$;

e) *totală* dacă $R \cup R^{-1} = A \times A$, *adică* $xRy \vee yRx,\ \forall x, y \in A$.

Un prim tip de relaţie pe care îl vom întâlni este *relaţia de echivalenţă*:

Definiţie. Fie R o relaţie pe A. Spunem că R este o *relaţie de echivalenţă* pe A dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Definiţie. Fie R o relaţie de echivalenţă pe A.

a) Pentru un element $x \in A$, numim *clasă de echivalenţă* a lui x mulţimea

$$\widehat{x}_R := \{y \in A \mid xRy\},$$

(notată de asemenea $[x]_R$; câteodată, atunci când este clar din context, vom renunţa la indicele R).

b) Familia claselor de echivalenţă ale lui R,

$$A/_R := \{\widehat{x}_R \mid x \in A\}$$

se numeşte *câtul* lui A în raport cu R.

Propoziţia 2.1. *Fie R o relaţie de echivalenţă pe A. Atunci:*

i) $x \in \widehat{x},\ \forall x \in A$;

ii) $y \in \widehat{x} \Leftrightarrow \widehat{x} = \widehat{y} \Leftrightarrow xRy,\ \forall x, y \in A$.

Se obişnuieşte a se nota relaţiile de echivalenţă prin simboluri precum $\sim$, $\simeq$, $\approx$, $\equiv$, $\cong$, etc.

Un alt tip de relaţii des întâlnit este *relaţia de ordine*:

Definiţie. Fie R o relaţie pe A. Spunem că R este:

a) o *ordine* pe A dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă;

b) o *preordine* pe A dacă este reflexivă şi tranzitivă;

c) o *ordine totală* pe A dacă R este o ordine pe A şi este o relaţie totală.

Fie A o mulţime şi R o ordine (preordine, ordine totală) pe A. Spunem că perechea (A, R) este o mulţime *ordonată* (*preordonată*, *total ordonată*). Relaţiile de ordine se notează îndeobşte prin simboluri ca $\leq$, $\preceq$, $\lesssim$, $\leqslant$, etc. Inversele acestor relaţii (despre care se poate demonstra că sunt tot relaţii de ordine) sunt notate prin $\geq$, $\succeq$, $\gtrsim$, repsectiv $\geqslant$. De asemenea, dacă $\leq$ este o preordine pe A, $<$ va nota relaţia $\leq \setminus 1_A$, adică $x < y \Leftrightarrow (x \leq y) \wedge (x \neq y)$ pentru orice $x, y \in A$ (convenţii similare se aplică şi pentru alte simboluri).

Definiţie. Fie $(A, \leq)$ o mulţime preordonată.

a) Un element $a \in A$ se numeşte *majorant* pentru submulţimea $B \subseteq A$ dacă $x \leq a,\ \forall x \in B$.

b) Un element $a \in A$ se numeşte *minorant* pentru submulţimea $B \subseteq A$ dacă $x \geq a,\ \forall x \in B$.

c) Dacă $B \subseteq A$ admite un majorant, un minorant sau ambii, spunem că B este *marginită superior*, *marginită inferior*, respectiv *marginită*.

d) Dacă $a \in A$ este un majorant pentru o submulţime $B \subseteq A$ şi $a \in B$, spunem că a este un *maxim* sau *cel mai mare element* al lui B.

e) Dacă $a \in A$ este un minorant pentru o submulţime $B \subseteq A$ şi $a \in B$, spunem că a este un *minim* sau *cel mai mic element* al lui B.

Remarcă. O submulţime B poate avea mai multe puncte de maxim sau puncte de minim; totuşi, dacă $\leq$ este o ordine, atunci maximul şi minimul, dacă există, sunt unice. În cazul acesta le vom nota $\max_{\leq} B$, respectiv $\min_{\leq} B$. Dacă nu există posibilitate de confuzie, vom folosi notaţiile $\max B$, respectiv $\min B$.

Definiţie. Fie $(A, \leq)$ o mulţime ordonată şi B o submulţime a lui A.

a) Spunem că un element $a \in A$ este *marginea superioară* (sau *supremum*) a lui B dacă a este cel mai mic majorant al lui B, adică $a = \min U$, unde U este mulţimea tuturor majoranţilor lui B. Un astfel de element, dacă există, se notează $\sup_{\leq} B$ (sau, mai simplu $\sup B$).

b) Spunem că un element $a \in A$ este *marginea inferioară* (sau *infimum*) a lui B dacă a este cel mai mare minorant al lui B, adică $a = \max L$, unde L este mulţimea tuturor minoranţilor lui B. Un astfel de element, dacă există, se notează $\inf_{\leq} B$ (sau, mai simplu $\inf B$).

Definiţie. Fie $(A, \leq)$ o mulţime ordonată.

a) Spunem că $(A, \leq)$ este *Dedekind completă* dacă orice submulţime nevidă a lui A care este mărginită superior admite un supremum.

b) Spunem că $(A, \leq)$ este *bine ordonată* dacă orice submulţime nevidă a lui A admite un minimum.

Se poate arăta (exerciţiu!) că o mulţime este Dedekind completă dacă şi numai dacă orice submulţime nevidă a sa care este mărginită inferior admite un infimum.

De asemenea, este uşor de demonstrat (exerciţiu!) că o mulţime bine ordonată este total ordonată. În cazul în care acceptăm axioma alegerii, se poate arăta că orice mulţime poate fi bine ordonată(adică pentru orice mulţime A există o ordine $\leq$ pe A astfel încât $(A, \leq)$ este bine ordonată).

3. Funcţii

Definiţie. Fie A şi B mulţimi. Spunem că o relaţie $f \subseteq A \times B$ este o *funcţie de la A la B* şi notăm $f : A \to B$ dacă:

(i) $\operatorname{Dom} f = A$;
(ii) $(x, y) \in f,\ (x, z) \in f \Rightarrow y = z,\ \forall x \in A,\ \forall y, z \in B$.

Dacă $f : A \to B$ şi $x \in A$, notăm $f(x)$ unicul element $y \in B$ astfel încât $(x, y) \in f$. Dacă dorim să *definim* o funcţie $f : A \to B$, este de ajuns să *specificăm* valoarea $f(x)$ pentru orice $x \in A$.

Pentru o funcţie $f : A \to B$, $f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$. Totuşi, atunci când "uităm" că f este o relaţie, numim mulţimea $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ *graficul* of f.

Bineînţeles, identitatea pe o mulţime A este o funcţie, $1_A : A \to A$ ($1_A(x) = x,\ \forall x \in A$).

Dacă X şi Y sunt mulţimi, notăm $\mathscr{F}(X; Y)$ familia funcţiilor de la X la Y.

Definiţie. Fie $f : A \to B$ o funcţie.

a) Dacă E este o submulţime a lui A, funcţia $f|_E := f \cap (E \times B)$ (adică $f|_E(x) := f(x),\ \forall x \in E$) se numeşte *restricţia* lui f la E.

b) Dacă E este o submulţime a lui A, mulţimea

$$f[E] := \{y \in B \mid \exists x \in E : (x, y) \in f\}$$

se numeşte *imaginea* lui f prin E.

c) Dacă F este o submulţime a lui B, mulţimea

$$f^{-1}[F] := \{x \in A \mid \exists y \in F : (x, y) \in f\}$$

se numeşte *preimaginea* sau *imaginea inversă* a lui f prin F.

Pentru o funcţie $f : A \to B$, $f[\varnothing] = \varnothing$, $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$, $f[A] = \operatorname{Im} f$, $f^{-1}[B] = \operatorname{Dom} f = A$.

Definiţie. O funcţie $f : A \to B$ se numeşte:

a) *injectivă* dacă pentru orice $x, y \in A$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (cu alte cuvinte, relaţia f^{-1} este o funcţie de la $\operatorname{Im} f$ la A);
b) *surjectivă* dacă $\operatorname{Im} f = B$;
c) *bijectivă* dacă este şi injectivă şi surjectivă;
d) *inversabilă* dacă există $g : B \to A$ astfel încât $f \circ g = 1_B$ şi $g \circ f = 1_A$.

Propoziţia 3.1. *O funcţie $f : A \to B$ este bijectivă dacă şi numai dacă este inversabilă.În acest caz, f^{-1} este o funcţie de la B la A şi $f \circ f^{-1} = 1_B$, $f^{-1} \circ f = 1_A$.*

Definiţie. Fie $(A, \leq)$ şi $(B, \leq)$ mulţimi ordonate şi $f : A \to B$ o funcţie. Spunem că f este:

a) *monotonă*, dacă pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
b) *strict monotonă*, dacă pentru orice $x, y \in A$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Să considerăm acum o mulţime U suficient de mare pentru ceea ce ne propunem (şi considerată un univers atunci când trecem la complementare). Dacă A este o submulţime a lui U, numim *funcţia caracteristică* a lui A funcţia $\chi_A : U \to \{0, 1\}$, definită prin

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \in \complement_A. \end{cases}$$

Propoziţia 3.2. *Fie A şi B două submulţimi ale lui U. Atunci:*

i) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$;
ii) $\chi_{\complement_A} = 1 - \chi_A$;
iii) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;
iv) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$.

Bibliografie selectivă

[1] M. Gorunescu, *Lecţii de analiză matematică pentru informaticieni*, Ed. Univ. Craiova, 2000.
[2] M. Postolache, *Analiză matematică (teorie şi aplicaţii)*, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2011.
[3] J. Roitman, *Introduction to Modern Set Theory*, 2011.
[4] V. Postolică, *Baze ale matematicii actualizate prin eficienţă*, Matrix Rom, Bucureşti, 2008.
[5] F. L. Ţiplea, *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi, 1998.
[6] B. Poonen, *Infinity: Cardinal Numbers*, 2002.
[7] W. F. Trench, *Introduction to Real Analysis*, Pearson Education Publ., 2009
[8] E. Cioară, M. Postolache, *Capitole de analiză matematică*, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2010.
[9] G. O'Regan, *Mathematics in Computing* (Ch. 2), Springer Verlag, London, 2013.