

1. Wellen

1.1. Allgemeines

f = 1/T Wellengeschwindigkeit v = λ / T = λ · f z.B. c0 = λ · f

1.1.1 Wellenfunktion

λ(x,t) = A · sin(k · x - ω · t)

Kreisfrequenz ω = 2πf [ω] = 1/s

Wellenzahl k = 2π/λ [k] = 1/m

ω = k · v

1.1.2 Transversalgeschwindigkeit

Vy = ∂y(x,t)/∂t = ∂/∂t · A · sin(k · x - ωt) =

= ω · A cos(k · x - ωt)

V̂y

1.1.3 Transversalbeschleunigung

ay = ∂²y/∂t² = -ω · A · sin(k · x - ωt)

1.2. Reflexion

Reflexionskoeffizient R = (v2-v1)/(v2+v1)

R < 0 falls V1 > V2 ⇒ Invertierung (Phasensprung) der Welle.

Transmissionskoeffizient T = (2v2)/(v2+v1) Es gilt T ≥ 0

Energieerhaltung: 1 = R² + (v1/v2) · T²

1.3. Überlagerung

y1 = A · sin(k · x - ωt)

y2 = A · sin(k · x - ωt + δ)

Bei gleicher Frequenz und Amplitude:

y1 + y2 = 2A · cos(½δ) · sin(k · x - ωt + ½δ)

Konstruktive Interferenz: δ = 0(2kπ) k ∈ ℤ

Destruktive Interferenz: δ = 180° + 2k · 180° k ∈ ℤ

Schwebung (periodische Amplitudenänderung):

fSchwebung = f2 - f1 = Δf (klein)

1.4. Phasensprung

Wenn n1 < n2, z.B. von Luft in Wasser ⇒ Phasensprung.

1.5. Senkrechter Einfall (kleine Winkel)

Phasendifferenz δ = z · Δx = 2π · Δx/λ' = 2π · (n · Δx)/λEinfall

eventueller Phasensprung: +π

Δx = 2s (s: Dicke der Schicht)

Konstruktive Interferenz:

Gangunterschied muss 0 (bzw. k · 2π) sein. Phasensprung beachten.

Gleichung aufstellen für z.B. δ = k · 2π und mit Gleichung von oben gleichsetzen.

Bei einem Phasensprung gilt: λ = (2n · s)/(z - ½)

Bei zwei Phasensprüngen gilt: λ = (n · 2s)/z

Destruktive Interferenz:

δ = (z + ½)2π, z ∈ ℤ

Mit einem Phasensprung gilt: λ = (2n · s)/(z - ½)

Bei zwei Phasensprüngen gilt: λ = (2n · s)/(z - ½)

2. Interferenz

Der m-te dunkle Streifen tritt auf, wenn der Gangunterschied 2s gleich m Wellenlängen beträgt.

2s = m · λ

2.1. Interferenz am Doppelspalt

Interferenzmaximum

d · sin θm = m · λ; m = 0, 1, 2, ...

Anzahl der Maxima bei N > 2 Lichtquellen: N - 2

Interferenzminimum

d · sin θm = (m - ½) · λ; m = 0, 1, 2, ...

Mit Ordnung m, Abstand der beiden Spalte d und Winkel des Maximums/Minimums θ.

Phasendifferenz δ und Gangunterschied Δx:

δ = 2π · Δx/λ = 2π · (d · sin θ)/λ

tan θm = λm/d

Spezialfall für kleine Winkel

Interferenzmaxima bei ym = m · λ/d ⇒ gleiche Abstände: "Äquidistant"

2.2. Interferenz am Einzelspalt

Intensitätsminima

a · sin θm = m · λ; m = 1, 2, ... mit Spaltbreite a.

1. Beugungsminimum bei tan θ = λ/a

⇒ Zunahme von a führt zu Abnahme von θ1

Wenn a < λ dann wäre sin θ > 1½, d.h. kein Beugungsbild.

2.3. Gitter

Wie beim Doppelspalt: g · sin θm = m · λ; m = 0, 1, 2, ...

mit Gitterkonstante g. [g] = m

z.B. 1800 Linien pro Millimeter: g = 1/(1800 · 10³) m

Bei schrägem Einfall unter Winkel φ: g' = g · cos φ

2.4. Fraunhofer'sches Beugungsmuster

Kreisförmige Öffnung mit Durchmesser D und Brechungsindex n (= 1)

1. Beugungsminimum bei sin θ = 1,22 · λ/(D · n)

2.5. Auflösung und kritischer Winkel

"Rayleigh'sches Kriterium der Auflösung" αk = 1,22 · λ/(D · n)

Damit Objekte unterscheidbar: 2αk (Alle Winkel im Bogenmaß)

Auflösungsvermögen

A = λ/Δλ = m · N mit kleinster noch trennbarer Wellenlängendifferenz

Δλ, Anzahl der Spalte N und Beugungsordnung m

3. Thermodynamik

Zwei Systeme im thermischen Gleichgewicht haben dieselbe Temperatur!

3.1. Konstanten

Boltzmannkonstante k = Rm/NA = 1,381 J/K

mit universeller Gaskonstante Rm = 8,314 J/molK

und Avogadrokonstante (Teilchen/Mol) NA = 6,022 · 10²³ 1/mol

spezielle Gaskonstante Rs = Rm/M mit molarer Masse M

3.2. Geschwindigkeitsverteilung von Teilchen

Wahrscheinlichste Geschwindigkeit vP = √(2kT/m)

mittlere Geschwindigkeit vgem = ∫₀^∞ v · P(v) dv = √(8kT/πm)

quadratisch gemittelte Geschwindigkeit vrms = √(v²)gem = √(3kT/m) mit Boltzmannkonstante k, Temperatur T und Masse eines Teilchens m.

Es gilt vP < vgem < vrms

Ebenso gilt: kT/m = RT/M

hierbei ist M die molare Masse [kg/mol] und R die universelle Gaskonstante.

Kinetische Energie eines Teilchens Ekin = ½ · m · vrms² = ¾ kT

Kinetische Energie von N Teilchen: Ekin = N · ¾ kT

Kinetische Energie von vielen Teilchen: Ekin = ¾ mges · Rs · T

Mit spezifischer Gaskonstante Rs = R/M [J/kg K]

Es gilt mges · Rs = N · k = n · R

wobei n die Anzahl der Mole ist.

3.3. Druck

Druck p = Kraft/Fläche = F/A; [N/m²] = [Pa]

p = (N · k · T)/V = (n · R · T)/V = mges · Rs · T/V

mit Boltzmann-Konstante k, Anzahl der Mole n, Anzahl der Teilchen N, universeller Gaskonstante R, spezifischer Gaskonstante Rs

3.4. ideales Gas (niedriger Druck, hohe Temperatur)

p · V = n · R · T

mit Druck p, Volumen V, Anzahl Mole n, universeller Gaskonstante R und Temperatur T.

Es gilt ebenfalls:

p · V = m/M · R · T

p · V = N · k · T

p · V = m · Rs · T

mit molarer Masse M, Teilchenanzahl N, Boltzmannkonstante k, Dichte ρ und spezifischer Gaskonstante Rs.

p1V1/T1 = p2V2/T2

p = ρ · Rs · T

3.5. Röntgen

Planck

Energie eines Photons E = hf = hc/λ (= e · U)

Duane-Hunt

vmax = eV/h

λmin = hc/eV

mit plankschem Wirkungsquantum

h ≈ 6,626 · 10⁻³⁴ Js ≈ 4,136 · 10⁻¹⁵ eVs

Elektronenladung

e ≈ 1,602 · 10⁻¹⁹ C

Lichtgeschwindigkeit

c ≈ 299 792 458 m/s

Bragg-Gleichung

n · λ = 2d sin θ n ∈ ℕ

Mit Gitterebenenabstand d und Glanzwinkel (zwischen Kristall-Netzebene und Röntgenstrahl) θ.

3.6. Thermodynamik - Prozesse

3.6.1 Allgemeines

$$\Delta U = Q - \int p dV$$

$$Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T$$

mit innerer Energie U , Wärme Q und spezifischer Wärmekapazität $c[\frac{\text{J}}{\text{kg K}}]$

$$c_p = c_v + R_s = \left(\frac{f}{2} + 1\right) \cdot R_s$$

$$c_v = \frac{f}{2} \cdot R_s$$

$$\text{Enthalpie } H = U + p \cdot V$$

H = innere Energie + "Platz" für System

$$\Delta U = c_v \cdot m(T_2 - T_1) = Q + W_V$$

$$\Delta H = c_p \cdot m(T_2 - T_1) = Q + W_t$$

$$p \cdot V = R \cdot T$$

$$c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot R_s = \kappa \cdot c_v = c_v + R_s$$

$$c_v = \frac{1}{\kappa-1} \cdot R_s$$

3.7. Technische Arbeit (Wellenarbeit / reversibler Anteil)

Arbeit, die beim Verschieben eines Volumens gegen den Druck der Umgebung geleistet wird.

$$W_t = \int_{p_1}^{p_2} V dp \quad |W_t| = Q_{zu} - Q_{ab}$$

3.8. Verschiebearbeit

Arbeit, die das Gas gegen den Umgebungsdruck leisten muss.

$$W_{VA} = p_1 \cdot V_1 - p_2 \cdot V_2$$

3.9. Volumenänderungsarbeit

Arbeit, die zu leisten ist, um ein Volumen V_1 auf ein Volumen V_2 zu bringen. Wird einem Gas mechanische Energie zugeführt, so ist die Arbeit als **positiv** definiert.

$$W_V = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

3.10. Zusammenhang der Arten von Arbeit

$$W_t = W_V - W_{VA}$$

3.11. 1. Hauptsatz

In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie konstant.

$$\Delta U_{12} = Q_{12} + W_{V,12} = Q_{12} - \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

3.12. 2. Hauptsatz

Es kann niemals Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen, wenn nicht gleichzeitig eine andere damit zusammenhängende Änderung eintritt

3.13. 3. Hauptsatz

Es ist unmöglich, durch irgendeinen Prozess, und sei er noch so idealisiert, die Temperatur irgendeines Systems in einer endlichen Anzahl von Schritten auf den absoluten Temperaturnullpunkt 0K zu senken.

3.14. Kreisprozesse

3.14.1 isotherm $T = \text{const.}$

$$p \cdot v = \text{const.} \Rightarrow p \propto \frac{1}{v}$$

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

Volumenänderungsarbeit

$$W_{V,12} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{n \cdot R \cdot T}{V} dV = \underbrace{-n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}}_{=m R_s T} \quad \left(\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}\right)$$

Technische Arbeit

$$W_t = W_{V,12} - \underbrace{(p_1 V_1 - p_2 V_2)}_{=0} = W_{V,12}$$

Aus dem 1. Hauptsatz folgt zudem:

$$\Delta U_{12} = \Delta Q_{12} + W_{V,12} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta Q_{12} = -W_{V,12}$$

3.14.2 isochor $V = \text{const.}$

$$\frac{p}{T} = \text{const.} \Rightarrow p \propto T \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

Volumenänderungsarbeit

$$W_{V,12} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = 0$$

Technische Arbeit

$$W_t = W_{V,12} - (p_1 V_1 - p_2 V_2) = V \cdot (p_2 - p_1)$$

Aus dem 1. Hauptsatz folgt:

$$\Delta U_{12} = \Delta Q_{12} + W_{V,12} = \Delta Q_{12} = c_V \cdot m \cdot \Delta T$$

3.14.3 isobar $p = \text{const.}$

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow \frac{V}{T} = \text{const.} \Rightarrow V \propto T$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$\text{Volumenänderungsarbeit } W_{V,12} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \cdot (V_1 - V_2)$$

Technische Arbeit

$$W_t = W_{V,12} - (p_1 V_1 - p_2 V_2) = -p \Delta V + p \Delta V = 0$$

Aus dem 1. Hauptsatz folgt: $\Delta U_{12} = \Delta Q_{12} + W_{V,12}$

$$\Delta Q_{12} = c_p \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow \Delta U_{12} = c_p \cdot m \cdot (T_2 - T_1) - p \Delta V = c_V \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$$

3.14.4 Mischung / Kalorimeter

$$Q_{\text{abgegeben}} = Q_{\text{aufgenommen}}$$

$$m_1 \cdot c_1 \cdot (T_1 - T_m) = m_2 \cdot c_2 \cdot (T_m - T_2)$$

$$T_m = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_2}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}$$

Wärmekapazität Kalorimeter

$$m_1 c_1 (T_1 - T_m) = m_2 c_2 (T_m - T_2) + C_{cal} (T_m - T_2)$$

$$\Rightarrow C_{cal} = \frac{m_2 c_2 (T_2 - T_m) + m_1 c_1 (T_1 - T_m)}{T_m - T_1}$$

3.14.5 isentrop/adiabatisch $\Delta Q = 0$

$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa$$

$$T_1 \cdot V_1^{\kappa-1} = T_2 \cdot V_2^{\kappa-1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}\right)}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} > 1$$

$$p \propto \frac{1}{V^\kappa} \text{ (isentrop steiler als isotherme)}$$

$$\Delta Q = 0$$

Volumenänderungsarbeit

$$W_{V,12} = c_v (T_2 - T_1) = \frac{R_s}{\kappa-1} (T_2 - T_1)$$

$$W_{V,12} = \frac{R_s \cdot T_1}{\kappa-1} \cdot \left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right) = \frac{R_s \cdot T_1}{\kappa-1} \left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right)$$

$$\text{mit } R_s \cdot T_1 = p_1 \cdot v_1$$

$$W_{V,12} = \frac{1}{\kappa} W_t$$

Technische Arbeit

$$W_t = c_p \cdot (T_2 - T_1) = R_s \frac{\kappa}{\kappa-1} (T_2 - T_1)$$

$$W_t = \frac{\kappa}{\kappa-1} R_s \cdot T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right)$$

$$W_t = \frac{\kappa}{\kappa-1} R_s \cdot T_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} - 1\right)$$

$$W_t = \kappa \cdot W_{V,12}$$

3.14.6 Wirkungsgrad

$$\eta_{th} = \frac{|W_t|}{Q_{zu}}$$

$$\text{Carnotscher Wirkungsgrad } \eta_C = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$$

3.14.7 Stirling-Motor

$$\eta_{\text{Stirling}} = \eta_C$$

3.14.8 Ottomotor

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \text{ mit Verdichtung (Hubraum } V_h, \text{ komprimiert } V_k) \varepsilon = \frac{V_h + V_k}{V_k}$$

3.15. Reale Gase

$$\underbrace{\left(p + \overbrace{a \cdot \left(\frac{n}{V}\right)^2}^{\text{Binnendruck}}\right)}_{\text{Druck}} \cdot \underbrace{\left(V - \overbrace{b \cdot n}^{\text{Kovolumen}}\right)}_{\text{Volumen}} = n \cdot R \cdot T$$

3.16. Phasenübergänge

Schmelzwärme $Q_S = m \cdot \lambda_S$ mit spezifischer Schmelzwärme λ_S

Verdampfungswärme $Q_P = m \cdot \lambda_D$

mit spezifischer Verdampfungswärme λ_D

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$$