Restklassenweise affine Darstellungen von Gruppen

Vorbemerkungen: Es sei $\mathbb{K}$ eine Kategorie. Unter einer $\mathbb{K}$-Darstellung eines Monoids G versteht man allgemein einen Homomorphismus

$$\varphi: \ G \ \longrightarrow \ \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(X)$$

für ein Objekt X von $\mathbb{K}$. In der Darstellungstheorie ist G in der Regel eine Gruppe und $\mathbb{K}$ typischerweise die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume über einem Körper oder die der endl.-dim. Moduln über einem Ring.

Hier sei $\mathbb{K}$ die Kategorie der unendlichen, nullteilerfreien, durch Wahl der Menge der Restklassen als Basis mit einer Topologie versehenen Hauptidealringe R, deren sämtliche Restklassenringe endlich sind.

Wir beschränken unseren Bildbereich jedoch aus Zweckmäßigkeitsgründen auf stetige Abbildungen einer gewissen Bauart.

Definition 1: Es sei R wie in den Vorbemerkungen, also z.B. $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{F}_q[x], \mathbb{Z}_{(\pi)}, \dots$.

Wir nennen eine Abbildung $f : R \to R$ *restklassenweise affin* oder kurz *rcwa*-Abbildung, wenn es ein $m_f \in R\backslash\{0\}$ so gibt, daß die Einschränkung von f auf eine beliebige Restklasse $r(m_f) \in R/m_fR$ gegeben ist durch

$$n \ \mapsto \ \frac{a_r \cdot n + b_r}{c_r}$$

für gewisse $a_r, b_r, c_r \in R$.

Wir bezeichnen die Menge aller rcwa-Abbildungen des Ringes R mit $\mathrm{Rcwa}(R)$, und setzen

$$\mathrm{RCWA}(R) \ := \ \mathrm{Rcwa}(R) \cap \mathrm{Sym}(R).$$

$\mathrm{Rcwa}(R)$ ist ein Monoid, und $\mathrm{RCWA}(R)$ ist echte Untergruppe von $\mathrm{Sym}(R)$ – Beweis elementar und einfach.

Beispiele 1:

$$T \in \mathrm{Rcwa}(\mathbb{Z}) : \; n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{3n+1}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\alpha \in \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z}) :$$

$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{falls } n \equiv 0 \ (2), \\ \frac{3n+1}{4} & \text{falls } n \equiv 1 \ (4), \\ \frac{3n-1}{4} & \text{falls } n \equiv 3 \ (4). \end{cases}$$

$$r \in \mathrm{RCWA}(\mathbb{F}_2[x]) :$$

$$P \mapsto \begin{cases} \frac{(x^2+x+1)P}{x^2+1} & \text{falls } P \equiv 0(x^2+1), \\ \frac{(x^2+x+1)P+x}{x^2+1} & \text{falls } P \equiv 1(x^2+1), \\ \frac{(x^2+x+1)P+x^2}{x^2+1} & \text{falls } P \equiv x(x^2+1), \\ \frac{(x^2+x+1)P+(x^2+x)}{x^2+1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 2: Es sei $f \in \mathrm{Rcwa}(R)$ und m_f, a_r, b_r und c_r wie in Definition 1. Das Element m_f ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt. Wir setzen nun den

- **Modul** $\mathrm{Mod}(f)$ von f gleich $|m_f|$, den
- **Multiplikator** $\mathrm{Mult}(f)$ von f gleich $|\operatorname{kgV}_r a_r|$, den
- **Divisor** $\mathrm{Div}(f)$ von f gleich $|\operatorname{kgV}_r c_r|$, und die
- **Primteilermenge** $\mathcal{P}(f)$ von f gleich der Menge der Primteiler des Produktes $\mathrm{Mod}(f) \cdot \mathrm{Mult}(f) \cdot \mathrm{Div}(f)$. (Hauptidealringe sind ZPE-Ringe!)

$|x|$: 'standard-assoziiertes' Element zu $x \in R$.

Lemma 1 (Komposita von rcwa-Abb.):
Sind f und g rcwa-Abbildungen eines Ringes R, so ist $f \cdot g$ ebenfalls solche, und es gilt

1. $\mathrm{Div}(f) \,|\, \mathrm{Mod}(f)$,
2. $\mathrm{Mod}(f \cdot g) \,|\, \mathrm{Mod}(f) \cdot \mathrm{Mod}(g)$,
3. $\mathrm{Mult}(f \cdot g) \,|\, \mathrm{Mult}(f) \cdot \mathrm{Mult}(g)$,
4. $\mathrm{Div}(f \cdot g) \,|\, \mathrm{Div}(f) \cdot \mathrm{Div}(g)$,
5. $\mathcal{P}(f \cdot g) \subseteq \mathcal{P}(f) \cup \mathcal{P}(g)$,
6. $p \in R$ prim $\wedge\ p \,|\, \mathrm{Mult}(f) \wedge p \nmid \mathrm{Div}(g)$
   $\Rightarrow p \,|\, \mathrm{Mult}(f \cdot g)$,
7. $p \in R$ prim $\wedge\ p \,|\, \mathrm{Div}(f) \wedge p \nmid \mathrm{Mult}(g)$
   $\Rightarrow p \,|\, \mathrm{Div}(f \cdot g)$,
8. f surjektiv $\wedge\ p \in R$ prim $\wedge\ p \nmid \mathrm{Mult}(f)$
   $\wedge\ p \,|\, \mathrm{Div}(g) \Rightarrow p \,|\, \mathrm{Div}(f \cdot g)$, und
9. f surjektiv $\wedge\ p \in R$ prim $\wedge\ p \nmid \mathrm{Div}(f)$
   $\wedge\ p \,|\, \mathrm{Mult}(g) \Rightarrow p \,|\, \mathrm{Mult}(f \cdot g)$.

Lemma 2 (Inverse von rcwa-Abb.):
Ist $\sigma \in \mathrm{RCWA}(R)$, so auch σ^{-1}, und es gilt

1. $\mathrm{Mod}(\sigma^{-1}) \mid \mathrm{Mult}(\sigma) \cdot \mathrm{Mod}(\sigma)$,
2. $\mathrm{Mult}(\sigma) \mid \mathrm{Mod}(\sigma^{-1})$,
3. $\mathrm{Mult}(\sigma^{-1}) = \mathrm{Div}(\sigma)$,
4. $\mathrm{Div}(\sigma^{-1}) = \mathrm{Mult}(\sigma)$, und
5. $\mathcal{P}(\sigma^{-1}) = \mathcal{P}(\sigma)$.

Lemma 3: Es gilt

1. Das Bild einer rcwa-Abbildung ist die Vereinigung einer endlichen Anzahl von Restklassen und einer endlichen Teilmenge von R.
2. Ist $f \in \mathrm{Rcwa}(R)$ auf keiner Restklasse konstant, und ist $M \subseteq R$ eine Vereinigung endlich vieler Restklassen, so sind Bild und Urbild von M unter f ebenfalls Vereinigungen endlich vieler Restklassen.
3. Die Kardinalitäten der Mengen R, $\mathrm{Rcwa}(R)$ und $\mathrm{RCWA}(R)$ sind gleich.

Definition 3: Es sei G ein Monoid. Dann nennen wir einen Homomorphismus

$$\varphi : G \to \mathrm{Rcwa}(R)$$

eine *restklassenweise affine* (R-) *Darstellung*, oder kurz *rcwa-Darstellung*, von G.

Bemerkung 1: Jede endliche Gruppe besitzt treue R-rcwa-Darstellungen.

Definition 4: Sei $f : R \to R$ eine rcwa-Abbildung, und $m \in R \backslash \{0\}$. Dann definieren wir den *Transitionsgraphen* $\Gamma_{f,m}$ *von* f *zum Modul* m wie folgt:

- Die Knoten sind die Restklassen (mod m).
- Es geht genau dann eine Kante von $r_1(m)$ nach $r_2(m)$, wenn es ein $n_1 \in r_1(m)$ mit $n_1^f \in r_2(m)$ gibt.

Damit ist $\Gamma_{f,m}$ ein gerichteter, i.a. nicht schlingenfreier Graph.

Beispiel 2: Es seien $\beta, \gamma \in \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ gegeben durch

$$n \longmapsto \begin{cases} n^\alpha + 3 & \text{falls } n \equiv 1 \ (4), \\ n^\alpha & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{bzw.}$$

$$n \longmapsto \begin{cases} n^\alpha + 3 & \text{falls } n \equiv -1 \ (4), \\ n^\alpha & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi: \ \mathrm{S}_{10} &\longrightarrow \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z}), \\ (1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 8) &\longmapsto [\alpha, \beta], \\ (3\ 5\ 7\ 6\ 9\ 10) &\longmapsto [\alpha, \gamma] \end{aligned}$$

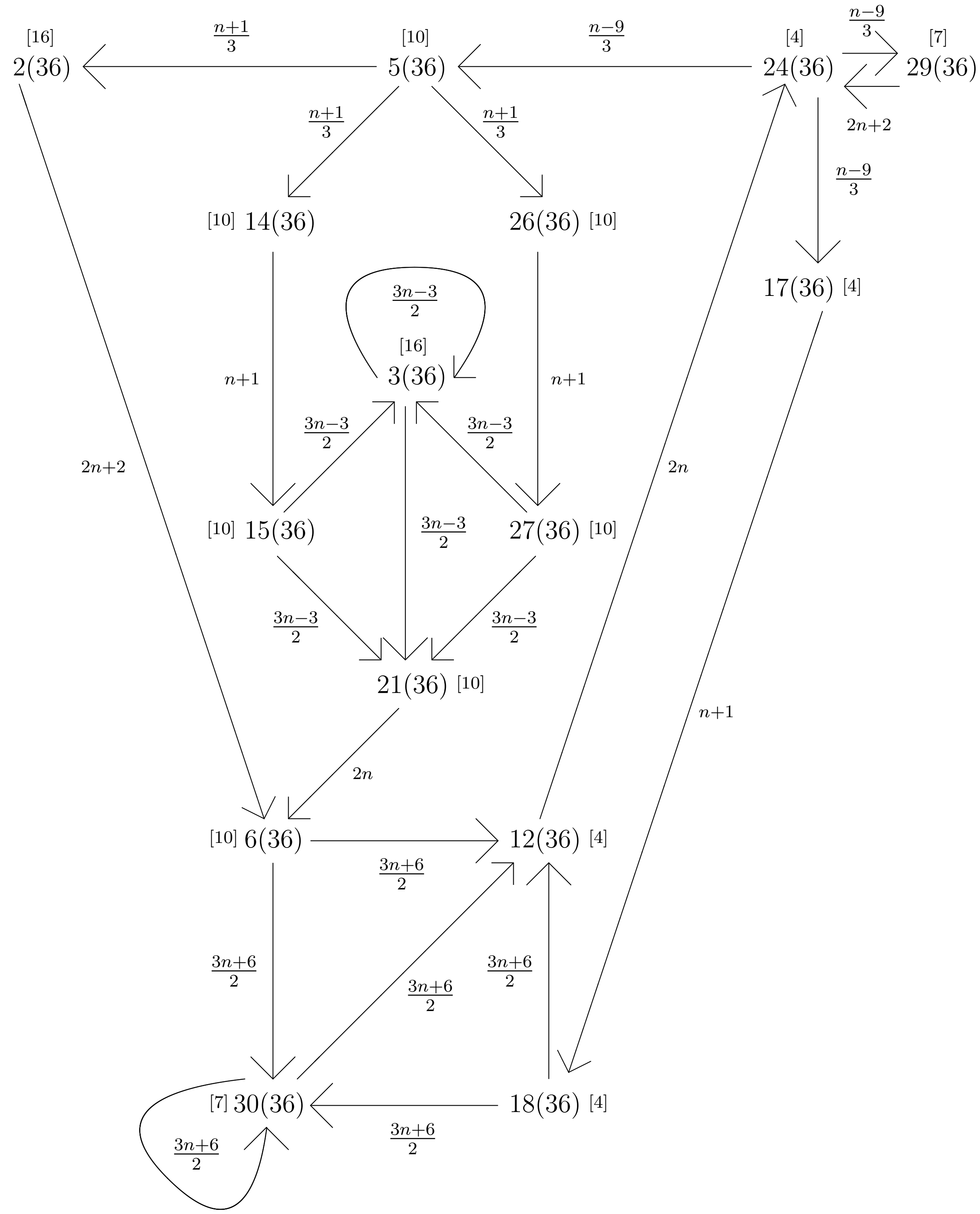
eine treue ganzzahlige rcwa - Darstellung der symmetrischen Gruppe vom Grad 10. Die Abbildung $[\alpha, \beta]$ ist gegeben durch

$$n \longmapsto \begin{cases} n & \text{falls } n \equiv 0, 2, 3, 8 \ (9), \\ 2n - 5 & \text{falls } n \equiv 1 \ (9), \\ n + 3 & \text{falls } n \equiv 4, 7 \ (9), \\ 2n - 4 & \text{falls } n \equiv 5 \ (9), \\ \frac{n+2}{2} & \text{falls } n \equiv 6 \ (18), \\ \frac{n-5}{2} & \text{falls } n \equiv 15 \ (18). \end{cases}$$

Beispiel 3: Die Abbildung $\sigma \in \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ sei gegeben durch

$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{3n-3}{2} & \text{falls } n \equiv 3 \ (12), \\ \frac{3n+6}{2} & \text{falls } n \equiv 6 \ (12), \\ \frac{n+1}{3} & \text{falls } n \equiv 5 \ (36), \\ \frac{n-9}{3} & \text{falls } n \equiv 24 \ (36), \\ 2n & \text{falls } n \equiv 12, 21 \ (36), \\ 2n+2 & \text{falls } n \equiv 2, 29 \ (36), \\ n+1 & \text{falls } n \equiv 14, 17, 26 \ (36), \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist σ eine Permutation unendlicher Ordnung, besitzt jedoch vermutlich ausschließlich endliche Zykel (!).


[16] 2(36)
[10] 5(36)
[4] 24(36)
[7] 29(36)
[10] 14(36)
26(36) [10]
17(36) [4]
[16] 3(36)
[10] 15(36)
27(36) [10]
21(36) [10]
[10] 6(36)
12(36) [4]
[7] 30(36)
18(36) [4]
$\frac{n+1}{3}$
$\frac{n-9}{3}$
$2n+2$
$n+1$
$\frac{3n-3}{2}$
$2n$
$\frac{3n+6}{2}$

Definition 5:

- Wir nennen eine rcwa-Abbildung f *zahm*, falls die Menge der Moduln ihrer Potenzen beschränkt ist, und *wild* anderenfalls.
- Wir nennen eine rcwa-Abbildung f *flach*, falls $\mathrm{Mult}(f) = \mathrm{Div}(f) = 1$, und *ausbalanciert*, falls die Mengen der Primteiler von $\mathrm{Mult}(f)$ und $\mathrm{Div}(f)$ gleich sind. Die flachen Abbildungen bilden nach Lemma 1, Aussage (3), (4) ein Untermonoid von $\mathrm{Rcwa}(R)$. Flache Abbildungen sind offenkundig zahm.

Beispiele 4: Die Abbildung

$$n \longmapsto \begin{cases} n & \text{falls } n \equiv 0 \ (7), \\ n+1 & \text{falls } n \equiv 1,2,3,4,5 \ (7), \\ n-5 & \text{falls } n \equiv 6 \ (7) \end{cases}$$

ist flach und zu $[\alpha, \beta]$ sowie zu $[\alpha, \gamma]$ konjugiert.

Die Abbildung

$$n \longmapsto \begin{cases} 16n+2 & \text{falls } n \equiv 0 \ (32), \\ 16n+18 & \text{falls } n \equiv 1 \ (2) \\ & \text{und } n \not\equiv -1 \ (32), \\ n-31 & \text{falls } n \equiv -1 \ (32), \\ \frac{n}{16} & \text{falls } n \equiv 16 \ (32), \\ n+16 & \text{falls } n \equiv 2,4,\ldots,14 \ (32), \\ n-14 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt Ordnung 257.

Definition 6: Wir übertragen nun die Begriffe *Modul*, *Multiplikator*, *Divisor*, *Primteilermenge*, *zahm*, *wild* und *flach* in natürlicher Weise auf rcwa-Monoide G und auf rcwa-Darstellungen – es sei

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}(G) &:= \operatorname*{kgV}_{g \in G} \mathrm{Mod}(g), \\ \mathrm{Mult}(G) &:= \operatorname*{kgV}_{g \in G} \mathrm{Mult}(g), \\ \mathrm{Div}(G) &:= \operatorname*{kgV}_{g \in G} \mathrm{Div}(g) \text{ und} \\ \mathcal{P}(G) &:= \cup_{g \in G} \mathcal{P}(g), \end{aligned}$$

wobei wir $\mathrm{Mod}(G) := 0$, $\mathrm{Mult}(G) := \infty$ bzw. $\mathrm{Div}(G) := \infty$ setzen, falls die jeweiligen kgV's nicht existieren. Ferner sei

$$\begin{aligned} G \text{ zahm} &:\Longleftrightarrow \mathrm{Mod}(G) \neq 0, \\ G \text{ wild} &:\Longleftrightarrow \mathrm{Mod}(G) = 0 \text{ und} \\ G \text{ flach} &:\Longleftrightarrow \mathrm{Mult}(G) = \mathrm{Div}(G) = 1. \end{aligned}$$

Lemma 4: Für rcwa-Monoide G, H gilt:

1. G Gruppe $\Rightarrow \mathrm{Mult}(G) | \mathrm{Mod}(G)$,
2. $\mathrm{Div}(G) | \mathrm{Mod}(G)$,
3. $H \leq G \Rightarrow \mathrm{Mod}(H) | \mathrm{Mod}(G)$,
4. $H \leq G \Rightarrow \mathcal{P}(H) \subseteq \mathcal{P}(G)$, und
5. G Gruppe $\Rightarrow \mathcal{P}(G)$ ist Menge der Primteiler von $\mathrm{Mod}(G)$.

Wir setzen hierbei $0|0$ und $\infty|0$.

Satz 1: Ist f eine zahme R-rcwa-Abbildung und $\sigma \in \mathrm{RCWA}(R)$, so ist f^σ ebenfalls zahm.

Beweis: Da f nach Voraussetzung zahm ist, können wir $m \in R \backslash \{0\}$ so wählen, daß

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \mathrm{Mod}(f^n) | m, \quad \text{falls } f \text{ bijektiv, bzw.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Mod}(f^n) | m \quad \text{sonst.}$$

Es gilt $\mathrm{Mod}((f^\sigma)^n) = \mathrm{Mod}(\sigma^{-1} \cdot f^n \cdot \sigma)$, und dies ist nach Lemma 1, Aussage (2) ein Teiler von $\mathrm{Mod}(\sigma^{-1}) \cdot \mathrm{Mod}(f^n) \cdot \mathrm{Mod}(\sigma)$, also nach obigem auch von $m \cdot \mathrm{Mod}(\sigma) \cdot \mathrm{Mod}(\sigma^{-1})$. Da letzterer Ausdruck nicht von n abhängt, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 2: Ist $f \in \mathrm{Rcwa}(R)$ surjektiv, aber nicht injektiv, so ist f wild.

Satz 3: Ist $f \in \mathrm{Rcwa}(R)$ surjektiv, aber nicht ausbalanciert, so ist f wild.

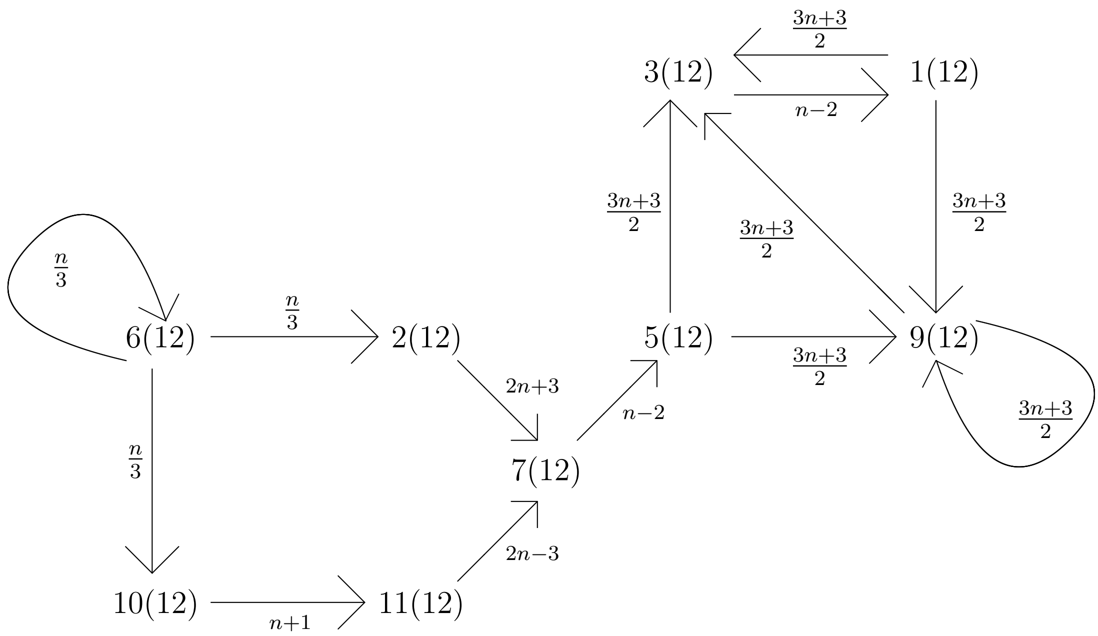
Satz 4: Ist $f \in \mathrm{Rcwa}(R)$ und $S \subseteq R$ eine Vereinigung endlich vieler Restklassen so, daß $S^f \supsetneq S$, dann ist f wild.

Satz 5: Ist $f \in \mathrm{Rcwa}(R)$ surjektiv und gibt es ein $m \in R$ so, daß der Transitionsgraph $\Gamma_{f,m}$ von f zum Modul m schwache Zusammenhangskomponenten besitzt, die nicht stark zusammenhängend sind, so ist f wild.

Beispiel 5:

$$\sigma \in \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z}),$$

$$n \longmapsto \begin{cases} n & \text{falls } n \equiv 0 \ (4), \\ \frac{3n+3}{2} & \text{falls } n \equiv 1 \ (4), \\ 2n+3 & \text{falls } n \equiv 2 \ (12), \\ n-2 & \text{falls } n \equiv 3, 7 \ (12), \\ \frac{n}{3} & \text{falls } n \equiv 6 \ (12), \\ n+1 & \text{falls } n \equiv 10 \ (12), \\ 2n-3 & \text{falls } n \equiv 11 \ (12). \end{cases}$$



Definition 7: Wir sagen, $f \in \mathrm{Rcwa}(R)$ sei *kontrahierend*, falls es eine Folge endlicher Teilmengen

$$S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \dots$$

von R so gibt, daß

$$\forall k \in \mathbb{N} \ S_k^f = S_{k-1}$$

und daß

$$R = \cup_{k=0}^{\infty} S_k.$$

Bemerkung 2: Die Eigenschaft 'kontrahierend' ist unter Konjugation invariant.

Definition 8: Es sei $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(\pi)}\}$. Wir nennen $f \in \mathrm{Rcwa}(R)$ *monotonisierbar*, falls es ein $\sigma \in \mathrm{Sym}(R)$ so gibt, daß f^σ monoton ist, und *rcwa-monotonisierbar*, wenn $\sigma \in \mathrm{RCWA}(R)$ gewählt werden kann. Als *fast (rcwa-)monotonisierbar* bezeichnen wir f, wenn selbiges zumindest auf $R \backslash S$ für eine endliche Teilmenge S von R gilt.

Lemma 5: Ist $f \in \mathrm{Rcwa}(\mathbb{Z})$ surjektiv, nicht injektiv und fast monotonisierbar, so ist f kontrahierend.

Satz 6: Ist $f \in \mathrm{Rcwa}(\mathbb{Z})$ surjektiv, nicht injektiv und (fast) rcwa-monotonisierbar und ist $\mathrm{Mult}(f) \neq 0$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so, daß es höchstens endlich viele $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n^{f^k}| \geq |n|$ gibt.

Bemerkung 3: Aus Satz 6 können wir folgern, daß die Collatz-Abbildung T (siehe Beispiele 1) nicht fast rcwa-monotonisierbar ist, denn T ist zwar surjektiv, nicht injektiv, und es gilt $\mathrm{Mult}(T) = 3 \neq 0$, aber ist $n = 2^k m - 1$ für beliebige $k, m \in \mathbb{N}$, so haben wir

$$n^{T^k} \;=\; \frac{3^k n + (3^k - 2^k)}{2^k} > n.$$

Bemerkung 4: Im Falle $R = \mathbb{Z}$ ist unsere Topologie diejenige, die Harry Fürstenberg in seinem topologischen Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen verwendet hat.

Satz 7: Nach Lemma 3, Aussage (2) folgt: $\mathrm{RCWA}(R)$ ist Gruppe von Homöomorphismen. Ferner sind alle $f \in \mathrm{Rcwa}(R)$ stetig, und f ist offen, falls $\mathrm{Mult}(f) \neq 0$.

Satz 8: Ist die Gruppe $G < \mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ zahm, so sind deren Bahnen auf $\mathbb{Z}$ abgeschlossen.

Satz 9: Enthält R unendlich viele Primelemente, so ist $\mathrm{RCWA}(R)$ nicht endlich erzeugt.

Beweis: Da es zu jedem Primelement $p \in R$ ein $\sigma_p \in \mathrm{RCWA}(R)$ mit $\mathcal{P}(\sigma_p) = \{p\}$ gibt (z.B. dasjenige, das durch p teilbare $x \in R$ auf $x + p$ abbildet und alle übrigen Elemente fixiert), und $\mathcal{P}(\sigma)$ für alle $\sigma \in \mathrm{RCWA}(R)$ endlich ist, folgt die Beh. aus Lemma 1, Aussage (5) und Lemma 2, Aussage (5). $\square$

Satz 10: Die Gruppe RCWA($\mathbb{Z}$) operiert hoch transitiv auf $\mathbb{Z}$.

Nach Dixon / Mortimer: Permutation Groups, Korollar 7.2A operiert damit ein etwaiger nichttrivialer Normalteiler von RCWA($\mathbb{Z}$) ebenfalls hoch transitiv auf $\mathbb{Z}$.

Lemma 6: Ist $N \lhd \mathrm{RCWA}(R)$ ein nichttrivialer Normalteiler, so enthält N ein flaches Element $g \neq 1$.

Frage: Ist RCWA($\mathbb{Z}$) einfach? Wie sieht's mit RCWA(R) für andere Ringe R aus?

Definition 9: Wir sagen, R *besitze die Restklassenteilbarkeitseigenschaft*, wenn sich jede Restklasse von R als (disjunkte) Vereinigung zweier anderer Restklassen schreiben läßt.

Bemerkung 5: Besitzt R die Restklassenteilbarkeitseigenschaft, so folgt induktiv, daß sich eine Vereinigung von k Restklassen von R auch als Vereinigung einer beliebigen Anzahl $\tilde{k} > k$ von Restklassen von R schreiben läßt.

Der Ring $\mathbb{Z}$ zum Beispiel besitzt die Restklassenteilbarkeitseigenschaft (z.B. läßt sich in $\mathbb{Z}$ eine Restklasse $a(m)$ schreiben als Vereinigung von $a(2m)$ und $a + m(2m)$), die Ringe $\mathbb{Z}_{(\pi)}$ mit $2 \notin \pi$ und $\mathbb{F}_q[x]$ mit $q \neq 2$ hingegen nicht.

Satz 11: Besitzt der Ring R die Restklassenteilbarkeiteigenschaft, so operiert die Gruppe $\mathrm{RCWA}(R)$ transitiv auf der Menge der von $\emptyset$ und R verschiedenen Vereinigungen endlich vieler Restklassen von R.

Bemerkung 6: Die Forderung der Restklassenteilbarkeitseigenschaft in Satz 11 ist notwendig: z.B. ist für $R = \mathbb{Z}_{(3)}$ die Parität der Anzahl der Restklassen unter der Operation von $\mathrm{RCWA}(R)$ invariant.

Definition 10: Ist $G < \mathrm{RCWA}(R)$ und $\mathcal{P}$ eine Partition von R in eine endliche Menge einzelner Restklassen, auf der die Gruppe G in natürlicher Weise als Permutationsgruppe operiert, und ist darüberhinaus die Einschränkung eines Elementes von G auf eine der Restklassen in $\mathcal{P}$ stets affin, so sagen wir, G *respektiere* die Partition $\mathcal{P}$.

Lemma 7: Sind $G, H < \mathrm{RCWA}(R)$ rcwa-Gruppen, $\mathcal{P}$ eine von G und H respektierte Partition von R und $\sigma \in \mathrm{RCWA}(R)$ auf jedem Element von $\mathcal{P}$ affin, so gilt:

1. Das Erzeugnis $\langle G, H \rangle < \mathrm{RCWA}(R)$ respektiert $\mathcal{P}$ ebenfalls.
2. Die Gruppe G^σ respektiert die Partition $\mathcal{P}^\sigma$.

Satz 12: Eine rcwa-Gruppe $G < \mathrm{RCWA}(R)$ ist genau dann zahm, wenn G eine Partition von R in endlich viele einzelne Restklassen respektiert.

Bemerkung 7: Ist $G < \mathrm{RCWA}(R)$ zahm, so respektiert G nach Satz 12 eine Partition $\mathcal{P}$ von R. Ist die Operation von G auf R transitiv, so ist $\mathcal{P}$ ein Blocksystem für G. Daher operiert G imprimitiv, also maximal einfach transitiv auf R. Operiert nun $\mathrm{RCWA}(R)$ hoch transitiv auf R (dies gilt nach Satz 10 z.B. für $R = \mathbb{Z}$), so kann deswegen eine nichttriviale zahme Gruppe kein Normalteiler von $\mathrm{RCWA}(R)$ sein.

Satz 13: Besitzt der Ring R die Restklassenteilbarkeitseigenschaft, so besitzen je zwei zahme Gruppen $G, H < \mathrm{RCWA}(R)$ zueinander konjugierte zahme Obergruppen.

Satz 14: Besitzt der Ring R Restklassenringe jeder von Null verschiedenen endlichen Kardinalität, so sind genau diejenigen Abbildungen $\sigma \in \mathrm{RCWA}(R)$ und genau diejenigen endlich erzeugten Gruppen $G < \mathrm{RCWA}(R)$ zahm, die zu einer flachen Abbildung bzw. Gruppe konjugiert sind.

Satz 15: Eine Gruppe G besitzt genau dann eine treue zahme R-rcwa-Darstellung, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ so gibt, daß G isomorph zu einer Untergruppe des Kranzprodukts

$$\mathrm{Aff}(R) \wr \mathrm{S}_m$$

ist.

Korollar 1: Eine zahme R-rcwa-Gruppe G besitzt stets eine treue Matrixdarstellung über dem Quotientenkörper K von R.

Satz 16: Zu geradem $r \in \mathbb{N}$ besitzt die Gruppe $\mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ unendlich viele Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung r. Insbesondere gibt es unendlich viele Konjugiertenklassen von Involutionen.

Vermutung 1: Zu ungeradem $r \in \mathbb{N}$ besitzt die Gruppe $\mathrm{RCWA}(\mathbb{Z})$ genau so viele Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung r, wie es Teilmengen der Menge der Teiler von r mit kleinstem gemeinsamen Vielfachen r gibt.