$\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$

$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \Vdash \neg\Box\neg\varphi$

$\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \nVdash \Box\neg\varphi \Leftrightarrow$ nu oricare $v \in W$ Rwv implică $\mathcal{M}, v \Vdash \neg\varphi \Leftrightarrow$ există $v \in W$ a.î. ~~M~~ Rwv și $\underbrace{\mathcal{M}, v \nVdash \neg\varphi}_{\mathcal{M}, v \Vdash \varphi}$

$\Leftrightarrow$ există $v \in W$ a.î. Rwv și $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$

$\neg(p \rightarrow q) = \neg(\neg p \vee q) = p \wedge \neg q$

$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \Vdash \neg\Box\neg p \Leftrightarrow$
$\mathcal{M}, w \nVdash \Box\neg p \Leftrightarrow$ nu e adevărat că (pentru orice $v \in W$, Rwv implică $\mathcal{M}, v \Vdash \neg p$)
$\Leftrightarrow$ există $v \in W$, a.î. Rwv nu implică $\mathcal{M}, v \Vdash \neg p \Leftrightarrow$ există $v \in W$, a.î.
Rwv și $\mathcal{M}, v \Vdash p$.

$\neg(\neg Rwv \lor \mathcal{M},v \Vdash \neg p)$

$Rwv \land \underbrace{\neg \mathcal{M},v \Vdash \neg p}$

$\mathcal{M},v \nVdash \neg p$

$\mathcal{M},v \Vdash p$

$\forall p \Leftrightarrow \neg\exists\neg p$

$a \lor b \Leftrightarrow \neg a \land \neg b$

$a \land b \Leftrightarrow \neg a \lor \neg b$

$a \to b \Leftrightarrow \neg a \lor b$

$\neg(a \to b) \Leftrightarrow a \land \neg b$

I $\mathcal{M},w_1 \Vdash \Diamond\Box p$ $\Leftrightarrow$ există $v \in V$ a.î. Rw_1v și $\underbrace{\mathcal{M},v \Vdash \Box p}_{A}$. $v = w_2$ $\leftrightarrow$ A

Rămâne să dem. că $\mathcal{M},w_2 \Vdash \Box p$

avem doar Rw_2w_3 și $w_3 \in V(p)$

II $\mathcal{M},w_1 \nVdash \Diamond\Box p \to p \Leftrightarrow \mathcal{M},w_1 \nVdash \neg\Diamond\Box p \lor p$

$\Leftrightarrow \mathcal{M},w_1 \Vdash \neg(\neg\Diamond\Box p \lor p) \Leftrightarrow \mathcal{M},w_1 \Vdash \Diamond\Box p \land \neg p$

$\Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{M},w_1 \Vdash \Diamond\Box p}_{\text{I}\ A}$ și $\underbrace{\mathcal{M},w_1 \Vdash \neg p}_{w_1 \notin V(p)\ A}$

A

III $\mathcal{M}, w_2 \Vdash \Diamond(p \wedge \neg r) \Leftrightarrow$ există $v \in V$ a.î. $R w_2 v$ și $\mathcal{M}, v \Vdash p \wedge \neg r$

singura tranziție w_3 deci $R w_2 w_3$ adevărat.

Rămâne de dem. că:

$\mathcal{M}, w_3 \Vdash p \wedge \neg r \Leftrightarrow \mathcal{M}, w_3 \Vdash p$ și $\mathcal{M}, w_3 \nVdash r$

$w_3 \in V(p)$ și $w_3 \notin V(r) \Rightarrow$ A

IV $\mathcal{M}, w_1 \Vdash q \wedge \Diamond(\ldots\ldots \ldots) \Longleftrightarrow$

$\mathcal{M}, w_4 \Vdash q \wedge \Diamond q \Leftrightarrow \mathcal{M}, w_4 \Vdash q$ și

$w_4 \in V(q)$

$\mathcal{M}, w_4 \Vdash \Diamond q \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ există $v \in V$ a.i. $R w_4 v$ și $\mathcal{M}, v \Vdash q$

singura relație e cu w_5, deci $v = w_5$

și $\mathcal{M}, w_5 \Vdash q$ pt. că $w_5 \in V(q)$.

V $M \Vdash \Box q \Leftrightarrow$ pentru orice $v \in W$, $\mathcal{M}, v \Vdash \Box q$

Fie $v \in W$ ales arbitrar.

$\mathcal{M}, v \Vdash \Box g \Leftrightarrow$ pentru orice $v' \in W$, dacă

Rvv' atunci $\mathcal{M}, v' \Vdash g$

$\forall\ v \in W,\ Rwv \rightarrow v \in V(g)$

1

0	$\rightarrow$	0	A
0	$\rightarrow$	1	A
1	$\rightarrow$	1	A
1	$\rightarrow$	0	F

$\forall\ v \in W,$ ~~$v \in V(g)$~~

$W \qquad \mathcal{M}, v \Vdash g \qquad V(g) = \{w_1, w_2, w_3 \ldots$

$V(g) = \{w_1, \ldots, w_5\} = W$

Pentru orice formule φ, ψ

$\Diamond(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$

Vrem ca pentru orice cadru $\mathcal{F}$, orice stare $w \in W$ și orice model $\mathcal{M}(\mathcal{F}, V)$, $(\mathcal{F} = (W, R))$

$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$

Presupunem că $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow$

există $v \in W$ a.î. Rwv și $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow$

$\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$ sau $\mathcal{M}, v \Vdash \psi$

A

Vrem: $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi \Leftrightarrow$

$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$ sau $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\psi$

I $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi \Rightarrow \mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi \Rightarrow \mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$

II $\mathcal{M}, v \Vdash \psi \Rightarrow \mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$

Vream $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$ e validă în clasa tuturor cadrelor Kripke.

Fie un cadru $\mathcal{F} = (W, R)$. Fie $w \in W$ o stare în $\mathcal{F}$. Fie $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model bazat pe $\mathcal{F}$. Vrear să dem că $\mathcal{M}, w \Vdash \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow$

$(\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$.

Presupun că $\mathcal{M}, w \Vdash \Box(\varphi \to \psi) \iff$ pentru orice $v \in W$, Rwv implică $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi \to \psi$

$\iff$ Rwv implică $\mathcal{M}, v \Vdash \neg\varphi \vee \psi \iff$

Rwv implică $\mathcal{M}, v \Vdash \neg\varphi$ (I) sau

Rwv implică $\mathcal{M}, v \Vdash \psi$ (II)

! Dacă $(w, r) \notin R$ atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \Box p$ și $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\psi \Rightarrow \mathcal{M}, w \Vdash \Box p \to \Box\psi$

II pentru orice $v \in W$, Rwv și $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi \to \psi$

$\iff$ pentru orice $v \in W$, Rwv și ($\mathcal{M}, v \Vdash \neg\varphi$ sau $\mathcal{M}, v \Vdash \psi$).

$\boxed{\Box\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\varphi}$

I $\mathcal{M}, v \Vdash \neg\varphi$. Atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\neg\varphi$

$\iff$ oricare $v \in W$, Rwv implică $\neg\varphi$

cum $Rwv \Rightarrow$ oricare $v \in W$, Rwv și $\neg\varphi$

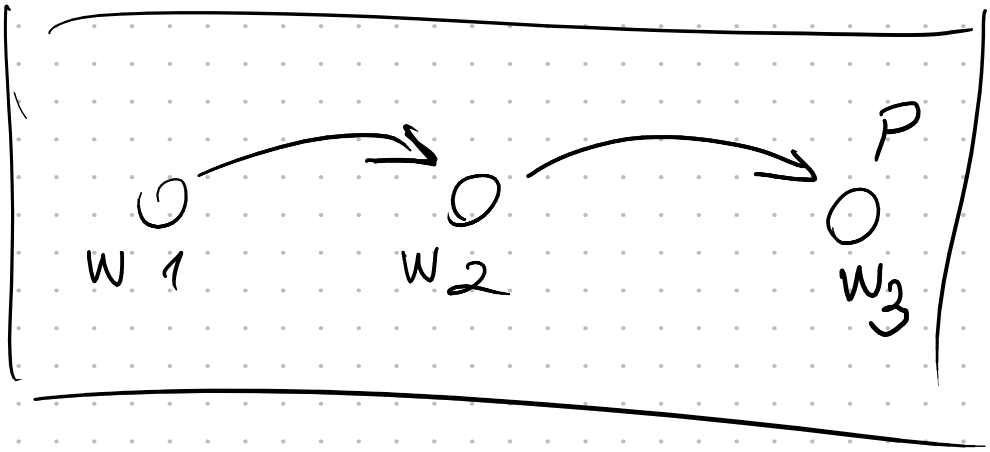
$\Rightarrow$ există $v \in W$ a.î. Rwv și $\neg\varphi$

$\iff$ nu pentru oricare $v \in W$ avem că Rwv implică $\varphi \iff \mathcal{M}, w \Vdash \neg\Box\varphi$ | OK

II $\mathcal{M}, v \Vdash \psi$. Atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\psi$

Deci $\mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi \to \Box\psi$

$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ nu e validă în clasa tuturor cadrelor Kripke



Fie cadru Kripke $\mathcal{F} = (W, R)$, o stare $w \in W$ și un model $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$

$W = \{w_1, w_2, w_3\}$, $R = \{(w_1, w_2); (w_2, w_3)\}$

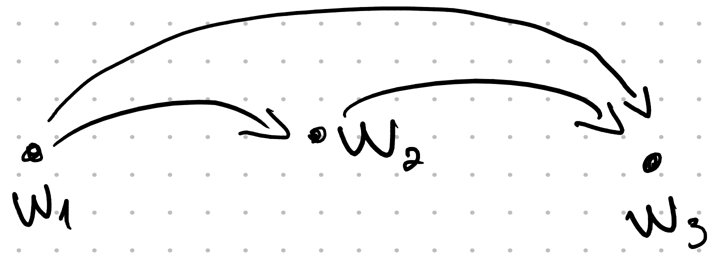
$V(p) = \{w_3\}$. $\Phi = \{p\}$

$\mathcal{M}, w_1 \Vdash \Diamond\Diamond p \iff$ există $w_2 \in W$ a.î. $\cancel{\mathcal{M}, w_2 \Vdash}$

$\mathcal{M}, w_2 \Vdash \Diamond p \iff$ ——— , — există $w_3 \in W$ a.î. $\mathcal{M}, w_3 \Vdash p$.

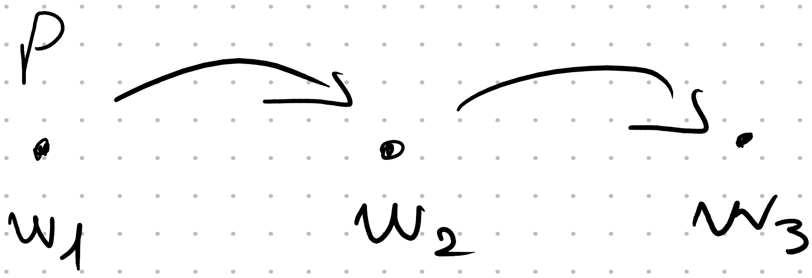
$\mathcal{M}, w_1 \nVdash \Diamond p$ pt că există $R w_1 w_2$ dar $\mathcal{M}, w_2 \nVdash p$

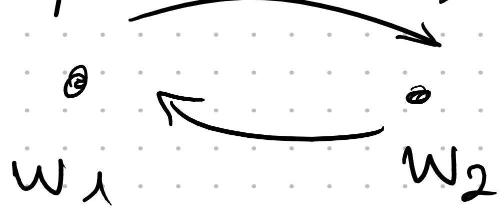
$Rab \quad Rbc \Rightarrow Rac$



$\mathcal{M}, w_1 \Vdash \Diamond\Diamond p \Rightarrow \mathcal{M}_{w_1} \Vdash \Diamond p$

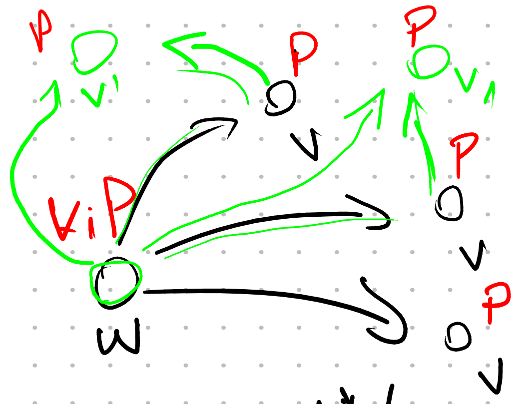
$p \to \Box\Diamond p$





$\Box p \to \Diamond p$

I tranzitiv.



Vreau

$M, w \Vdash K_i\varphi \to K_iK_i\varphi$

Presupunem $M, w \Vdash K_i\varphi \Leftrightarrow$ oricare $v \in W$, K_iwv implică $M, v \Vdash \varphi$.

I. Dacă nu există $v' \in W$ a.î. K_ivv' atunci $M, v \Vdash K_i\varphi$, deci $M, w \Vdash K_iK_i\varphi$

II. Fie $v' \in W$ a.î. K_ivv'. Presupun K_iw și din tranzitivitate K_iwv'.

Știu $M, w \Vdash K_i\varphi \Rightarrow M, v' \Vdash \varphi \Rightarrow$ oricare $v \in W$, K_iwv implică $M, v \Vdash K_i\varphi$

$\Leftrightarrow M, w \Vdash K_iK_i\varphi$

I simetric $\Leftrightarrow$ pentru orice K_iuv, K_ivu

Vreau $M, w \Vdash \varphi \to K_i\neg K_i\neg\varphi$

Presupun că $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ | $K_i \neg K_i \neg \varphi \Leftrightarrow K_i \hat{K}_i \varphi$

Pentru că $\mathcal{F}$ e simetric și $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \Rightarrow$

pentru orice $v \in W$, $K_i w v$ implică $K_i v w$

$\Rightarrow$ pentru orice $v \in W$, $K_i w v$ implică

că există $w' = w$ a.î. $w' \in W$, $K_i v w'$ și $\mathcal{M}, w' \Vdash \varphi$

$\Leftrightarrow$ pentru orice $v \in W$, $K_i w v$ implică

$\mathcal{M}, v \Vdash \hat{K}_i \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \Vdash K_i \hat{K}_i \varphi$