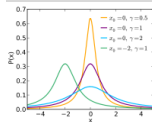


# fat tails und Marktrisiko

Vortrag am 7.12.2011



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distribution

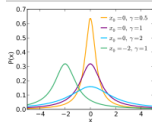
Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

Stefan Harinko  
Eigenleistung zur Vorlesung monetäre Risikomaße  
TU Dresden

## Literatur

- Vortrag basiert auf:
- Artikel von Haas, Pigorsch: "Financial Economics, Fat-Tailed Distributions", Complex Systems in Finance and Econometrics 2011
- und Buch "Quantitative Risk Management" von McNeil, Frey, Embrechts



## Outline

### Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distribution

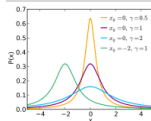
Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

## Outline

- fat-tail Motivation
- Charakterisierung Kurtosis vs. tail-index
- verschiedene Verteilungen mit heavy tails
- VaR zum Aktienindex DAX

- 1 Outline
- 2 Motivation
- 3 Charakterisierung Kurtosis vs. tail-index
- 4 Kurtosis
- 5 tail-index
- 6 alpha stable distribution
- 7 Generalized Hyperbolic distribution
- 8 DAX-VaR bei investierten 10.000 Euro



## Outline

### Motivation

### Charakterisierung Kurtosis vs. tail-index

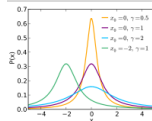
### Kurtosis

### tail-index

### alpha stable distribution

### Generalized Hyperbolic distribution

### DAX-VaR bei investierten 10.000 Euro



## Motivation

- Warum Verteilungen mit schweren Verteilungsenden?
- Beispiel aus Buch: "Quantitative Risk Management"
- Beispiel: DAX

## Outline

### Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

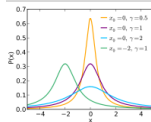
alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

$\alpha$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
$\text{VaR}_\alpha$ (normal model)	162.1	208.1	247.9	294.3	325.8
$\text{VaR}_\alpha$ ( $t$ model)	137.1	190.7	248.3	335.1	411.8
$\text{ES}_\alpha$ (normal model)	222.0	260.9	295.7	337.2	365.8
$\text{ES}_\alpha$ ( $t$ model)	223.4	286.3	356.7	465.8	563.5

Figure: aus QRM p.47,  $N(0, \frac{0.2}{\sqrt{(T)}})$ ,  $t(4)$



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

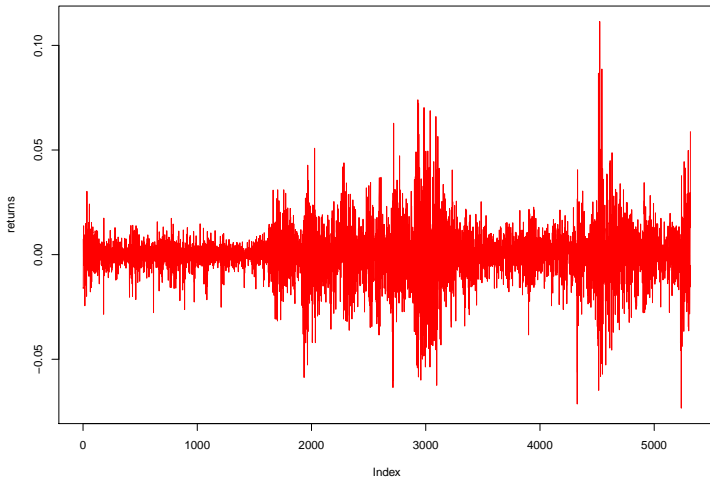
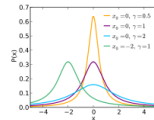


Figure: Dax Renditen von 26.11.1990 bis 30.11.2011



## Outline

## Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

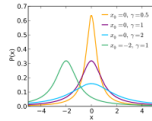
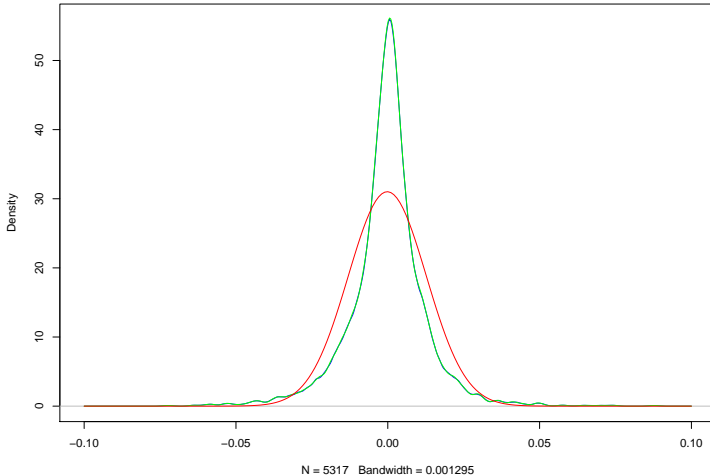
tail-index

alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

`density.default(x = returns, kernel = "epa", from = -0.1, to = 0.1)`



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

Figure:  $N(-0.00016, 0.0129)$  und Kerndichteplots

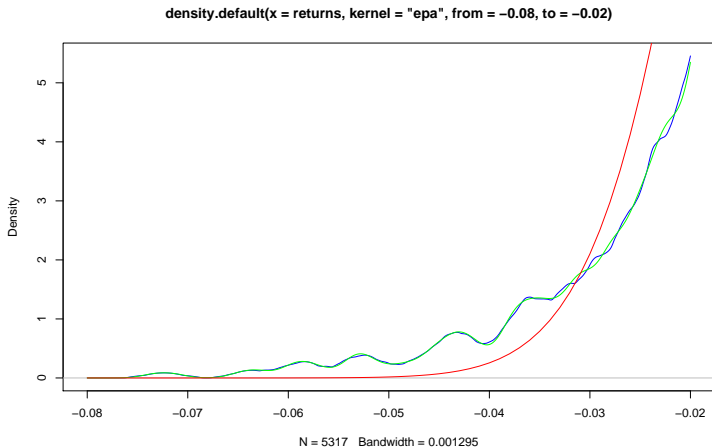
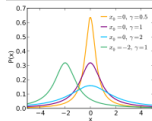


Figure: Zoom



## Outline

### Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

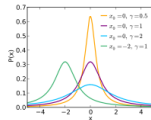
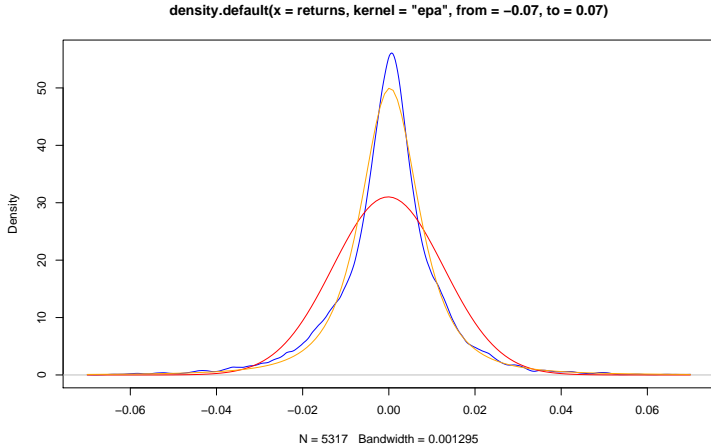
tail-index

alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro





#### Outline

#### Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

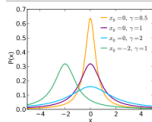
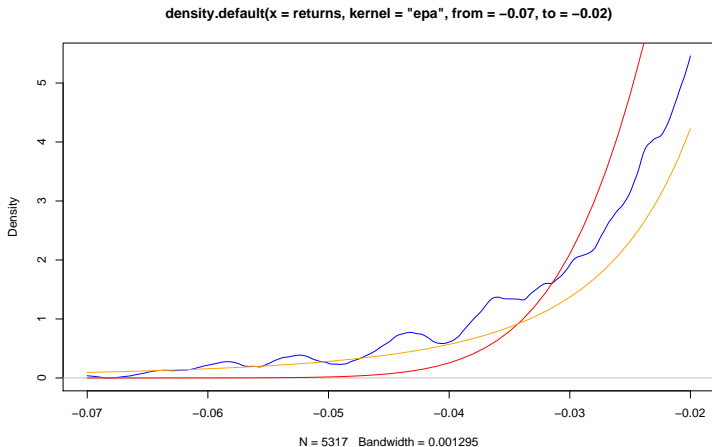
tail-index

alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

**Figure:** Student's t-Verteilung mit 3 Parameter (orange)



#### Outline

#### Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

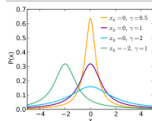
alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

Figure: Zoom in Student's t-Verteilung mit 3 Parameter (orange)

- Aus Kerndichteschätzung erkennt man, dass Renditen eher aus einer leptokurtischen Verteilung kommen
- Leptokurtose bezeichnet mehr Peaks in der Mitte und schwere Ränder
- Kurtosis:  $K[X] = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4}$
- Normalverteilung hat Kurtosis  $K=3$
- oft wird  $K > 3$ , die excess Kurtosis betrachtet (in DAX-Daten: 4.66577)
- darauf aufbauend auch z.B. Jarque-Bera-Test auf Normalität (DAX-Daten: X-squared = 4836.325, df = 2, p-value < 2.2e-16)
- wichtig: ist eine Verteilung leptokurtisch dann hat sie Excess-Kurtosis
- $K > 3$  ist zusammen mit Satz von Finuncan (Dichefkt schneiden sich zwei mal) mehr ein Indiz



[Outline](#)

[Motivation](#)

[Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index](#)

[Kurtosis](#)

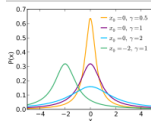
[tail-index](#)

[alpha stable  
distribution](#)

[Generalized  
Hyperbolic distribution](#)

[DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro](#)

- betrachte  $P(X > x)$  also  $1 - F_X(x)$  für große/extreme  $x$ , also  $x \rightarrow \infty$  bei Renditen ist 10% oft groß genug
- $1 - F_X(x) = x^{-\alpha} L(x)$ ,  $L(x)$  "slowly varying"
- $\alpha$  ist der tail-index, der bestimmt wie schnell (falls) der tail gegen 0 abfällt
- es gibt leptokurtische (peaked und breiter als Normal-tails) Verteilungen, die aber trotzdem noch leicht nach dem tail-index-Maß sind
- Pareto Verteilung hat dieses Tail-Verhalten mit  $L(x) = \text{const.}$
- $L(x) = c + o(1)$  asymptotisch Pareto wie Cauchy & t-Verteilung



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

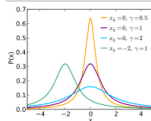
Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro



- betrachte  $P(|\text{return}| > x)$  also  $1 - F_{\text{return}}(x)$  der empirischen Daten auf log-log-Skala
- da  $1 - F_{\text{return}}(x) \approx cx^{-\alpha}$  sollte das Verhalten linear sein

Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

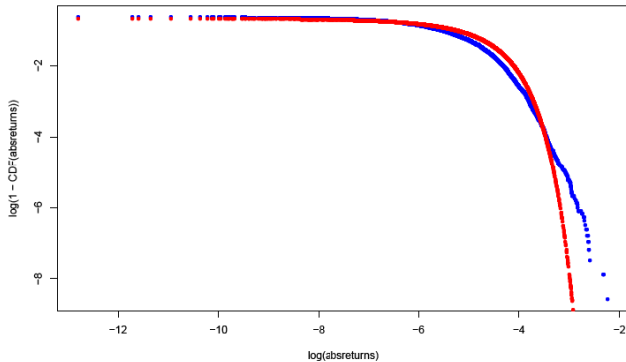
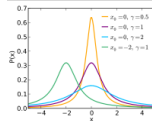


Figure:  $\log(1 - CDF(|returns|)), \log(|returns|)$



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distribution

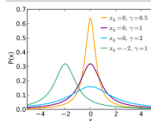
Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

## $\alpha$ -stable

- Namensgebung: alpha stable distributions or stable Paretian or Levy stable or stable laws
- verschiedene Paramter führen zu verschiedenen "Unterklassen" von Verteilungen: bekannte wie Normal- oder Cauchyverteilungen ( $\alpha = 2$  bzw.  $\alpha = 1, \beta = 0$ )
- und exotischere wie: tempered stable, modified stable (generalized inverse Gaussian), ...
- für  $\alpha < 2$  :  $P(X > x) \approx c^\alpha d(1 + \beta)x^{-\alpha}$

$$E[\exp(itX)] = \begin{cases} \exp(-c^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{2}))) + i\tau t & \alpha \neq 1 \\ \exp(-c|t|(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln(|t|))) + i\tau t & \alpha = 1 \end{cases}$$



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

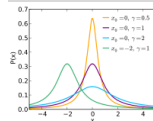
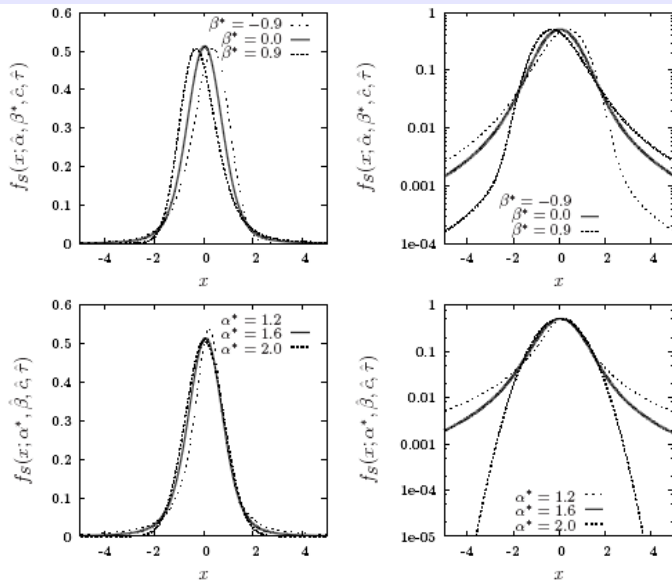
Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distributionGeneralized  
Hyperbolic distributionDAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

Figure: aus Haas/Pigorsch: alphastable mit verschiedenen Parametern

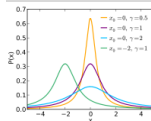


- normal variance-mean mixture
- $X = \mu + \beta V + \sqrt{V}Z$  mit  $Z$  normalverteilt,  $V$  positive Zufallsvariable
- mit  $V \sim$  "generalized inverse Gaussian" (entsteht aus alpha-stabil mit Escher-Transformation)
- $V \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$ ,  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  und  $Z \sim N(0, 1)$  unabhängig von  $V$
- liefert  $x \sim GH(\lambda, \alpha, \beta, \mu, \delta)$

$$f_{GH}(x; \lambda, \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{(\delta\gamma)^\lambda (\delta\alpha)^{\frac{1}{2-\lambda}}}{\sqrt{2\pi}\delta K_\lambda(\delta\gamma)} \left(1 + \frac{(x - \mu)^2}{\delta^2}\right)^{\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}} * \\ * K_{\lambda-1/2}(\alpha\delta\sqrt{1 + \frac{(x - \mu)^2}{\delta^2}}) \exp(\beta(x - \mu))$$

wobei  $K$ : modified Bessel function of the third kind and or order  $\lambda \in \mathcal{R}$

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\lambda-1} \exp(-\frac{1}{2}z(y + y^{-1})) dy$$



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

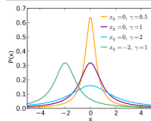
alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

#### GH tail Verhalten

- GH hat semi-heavy tails: zwischen Normal- und Pareto-tails
- bestimmte Parameter liefern Hyperbolic, NIG(normal inverse gaussian)
- Parameter Grenzwerte u.a. variance gamma, skew t, gamma, reciprocal gamma, Dirac measure
- Normal, Cauchy



#### Outline

#### Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

#### Kurtosis

#### tail-index

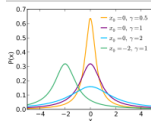
alpha stable  
distribution

#### Generalized Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

Table 1: Maximum-likelihood parameter estimates of the iid model.

distribution	parameters					loglik
GH	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	-7479.2
	-1.422 (0.351)	0.087 (0.018)	0.322 (0.222)	-0.046 (0.022)	1.152 (0.139)	
$t_{GH}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$		-7479.7
	0.084 (0.018)	1.271 (0.052)	3.445 (0.181)	-0.041 (0.021)		
$t_{JF}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\beta}$		-7480.0
	3.348 (0.179)	0.098 (0.025)	0.684 (0.012)	0.091 (0.049)		
$t_{AC}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\beta}$		-7480.1
	3.433 (0.180)	0.130 (0.042)	0.687 (0.013)	-0.123 (0.068)		
$t_{FS}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\beta}$		-7480.3
	3.432 (0.180)	0.085 (0.020)	0.684 (0.012)	0.972 (0.017)		
symmetric $t$	$\hat{\nu}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$			-7481.7
	3.424 (0.179)	0.056 (0.011)	0.684 (0.012)			



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

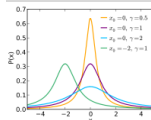
Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distributionGeneralized  
Hyperbolic distributionDAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

Figure: aus Haas/Pigorsch S&amp;P500 maximum likelihood Schätzungen

NIG	$\hat{\mu}$ 0.088 (0.018)	$\hat{\alpha}$ 0.784 (0.043)	$\hat{\beta}$ −0.048 (0.022)	$\hat{\delta}$ 0.805 (0.028)		−7482.0
HYP	$\hat{\mu}$ 0.090 (0.018)	$\hat{\alpha}$ 1.466 (0.028)	$\hat{\beta}$ −0.053 (0.023)	$\hat{\delta}$ 0.176 (0.043)		−7499.5
VG	$\hat{\mu}$ 0.092 (0.013)	$\hat{\alpha}$ 1.504 (0.048)	$\hat{\beta}$ −0.054 (0.019)	$\hat{\lambda}$ 1.115 (0.054)		−7504.2
alpha stable	$\hat{\alpha}$ 1.657 (0.024)	$\hat{\beta}$ −0.094 (0.049)	$\hat{c}$ 0.555 (0.008)	$\hat{\tau}$ 0.036 (0.015)		−7522.5
finite mixture ( $k = 2$ )	$\lambda_1$ 0.872 (0.018)	$\hat{\mu}_1$ 0.063 (0.012)	$\hat{\mu}_2$ −0.132 (0.096)	$\hat{\sigma}_1^2$ 0.544 (0.027)	$\hat{\sigma}_2^2$ 4.978 (0.530)	−7580.8
Cauchy	$\hat{\mu}$ 0.060 (0.010)	$\hat{\sigma}$ 0.469 (0.008)				−7956.6
normal	$\hat{\mu}$ 0.039 (0.014)	$\hat{\sigma}$ 1.054 (0.010)				−8168.9



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

Figure: aus Haas/Pigorsch S&P500 maximum likelihood Schätzungen

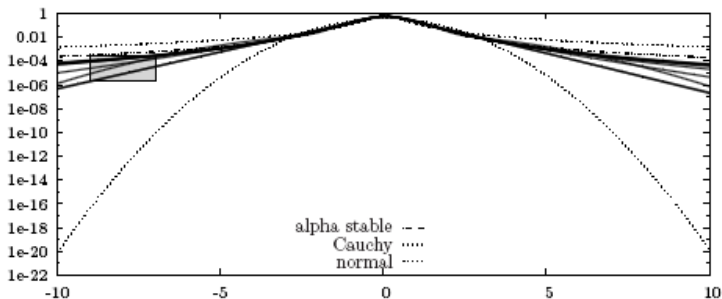
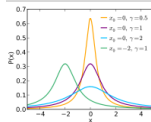


Figure: aus Haas/Pigorsch verschiedene Verteilungen



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

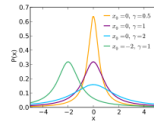
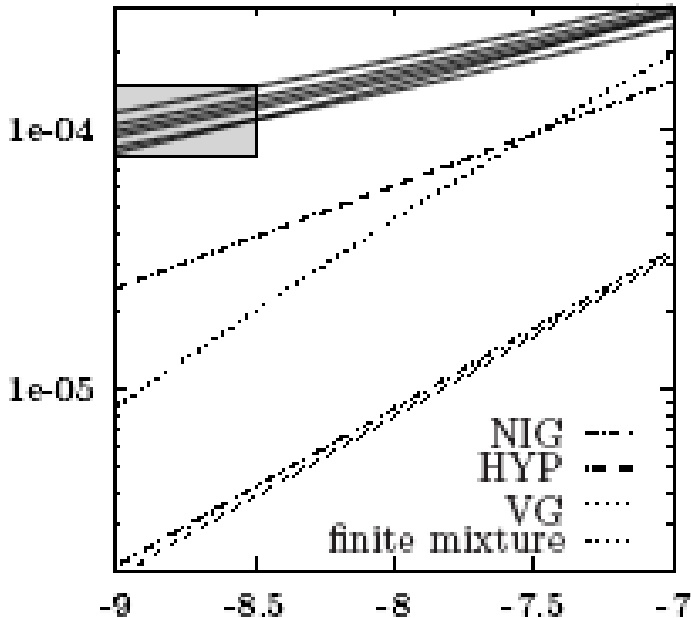
Kurtosis

tail-index

alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

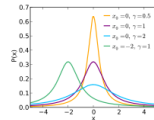
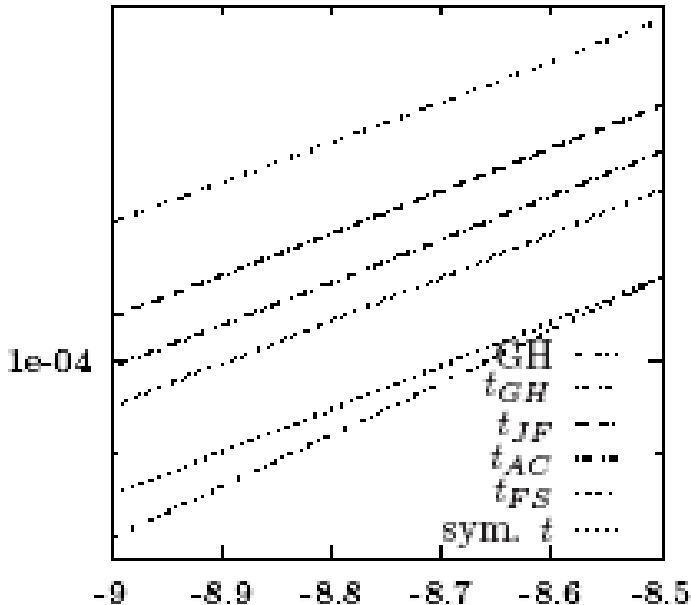
tail-index

alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

Figure: aus Haas/Pigorsch verschiedene Verteilungen



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

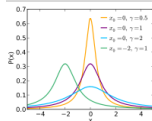
alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

Figure: aus Haas/Pigorsch verschiedene Verteilungen

distribution	$U_{0.001}$	$U_{0.0025}$	$U_{0.005}$	$U_{0.01}$	$U_{0.025}$	$U_{0.05}$
GH	0.04	0.11**	0.24***	0.73*	2.70	5.89***
$t_{GH}$	0.07	0.11**	0.22***	0.75*	2.75	5.96***
$t_{JF}$	0.04	0.11**	0.31**	0.88	2.64	5.32
$t_{AC}$	0.04	0.11**	0.26**	0.84	2.48	5.16
$t_{FS}$	0.07	0.13*	0.33**	0.95	2.77	5.38
symmetric $t$	0.07	0.15	0.31**	0.92	3.08**	6.35***
NIG	0.07	0.15	0.26**	0.70**	2.35	5.34
HYP	0.13	0.24	0.51	0.95	2.50	5.16
VG	0.13	0.24	0.51	0.92	2.46	5.10
alpha stable	0.04	0.11**	0.33**	0.75*	2.44	4.90
finite mixture ( $k = 2$ )	0.04	0.07***	0.11***	0.37***	2.99**	6.40***
Cauchy	0.00***	0.00***	0.00***	0.00***	0.09***	0.88***
normal	0.48***	0.64***	0.97***	1.36**	2.44	4.02***
GARCH(1,1) Models						
distribution	$U_{0.001}$	$U_{0.0025}$	$U_{0.005}$	$U_{0.01}$	$U_{0.025}$	$U_{0.05}$
normal	0.40***	0.66***	0.92***	1.36**	2.95*	4.57
GED	0.20*	0.33	0.44	0.79	2.48	4.79
symmetric $t$	0.11	0.26	0.40	0.92	2.86	5.45



Outline

Motivation

Charakterisierung  
Kurtosis vs. tail-index

Kurtosis

tail-index

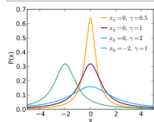
alpha stable  
distribution

Generalized  
Hyperbolic distribution

DAX-VaR bei  
investierten 10.000  
Euro

Figure: aus Haas/Pigorsch S&P500 backtesting





#### example DAX VaRs bei investierten 10.000 Euro

- Marktrisiko: statt  $P[V \leq VaR_\alpha] = \alpha$
- ungefaehr:  $P[r * V \leq VaR_\alpha] = 1 - \alpha = P[r \leq -\frac{VaR_p}{V}] = 1 - \alpha$

	unbedingte Anpassung	GARCH(1,1)
normal	335.1349	542.5062
t	381.1684	599.1886

#### Outline

#### Motivation

#### Charakterisierung Kurtosis vs. tail-index

#### Kurtosis

#### tail-index

#### alpha stable distribution

#### Generalized Hyperbolic distribution

#### DAX-VaR bei investierten 10.000 Euro