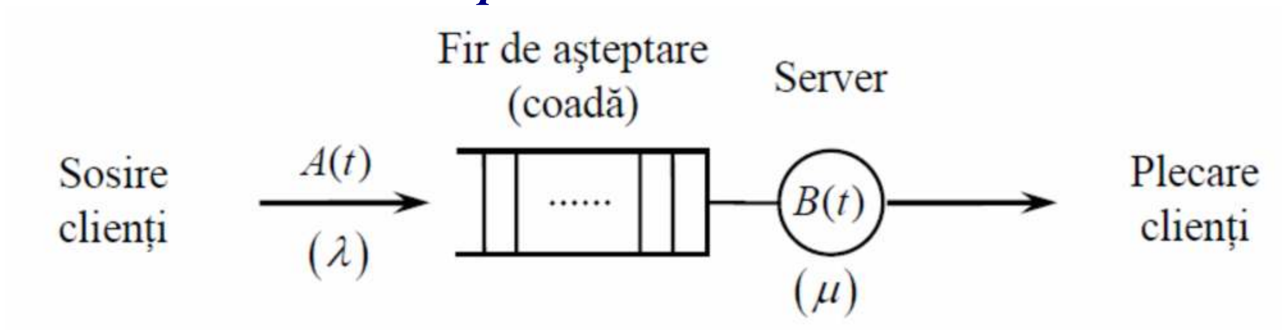
4. SISTEME DE AŞTEPTARE MARKOVIENE

4.1. Modelarea matematică a sistemelor de aşteptare

Notaţia lui Kendall: ***A* / *B* / *m* / *K* / *p***



- *modelele stohastice ale proceselor de sosire şi de servire* a clienţilor:

- sosirea clienţilor: T (*interarrival time*)

$$A(t) = P[T \le t],\ t \ge 0$$

average arrival rate: $\lambda = \dfrac{1}{\mathrm{M}[T]} > 0$

- servirea clienţilor: Z (*service time*)

$$B(t) = P[Z \le t],\ t \ge 0$$

average service rate: $\mu = \dfrac{1}{\mathrm{M}[Z]} > 0$

- ***M*** – distribuţie markoviană (exponenţială) de probabilitate
- $\boldsymbol{E_k}$ – distribuţie Erlang de ordinul k
- ***G*** – distribuţie generală (oarecare) de probabilitate
- ***D*** – durate deterministe (constante)

Exemple:

$M / M / 1$ $\qquad$ $M / E_3 / 1 / 10$ $\qquad$ $D / M / 1 / \ / 100$

- *parametrii structurali* ai sistemului:
    - numărul de servere: m
    - capacitarea sistemului de aşteptare: K (implicit $K = \infty$)
    - mărimea populaţiei din care provin clienţii (eng. *calling population*): p (implicit $p = \infty$)
- *regulile de operare* a sistemului:
    - servirea preferenţială (după priorităţi) a diferitelor clase de clienţi
        - *prioritate absolută* (eng. *pre-emptive priority*)
        - *prioritate relativă* (eng. *non pre-emptive priority*)
    - ordinea servirii clienţilor (*FIFO*, *LIFO*, *RS*) (impicit *FIFO*)
    - comportamentul clienţilor: clienţii "au răbdare" sau "îşi pierd răbdarea"
        - pleacă fără a fi serviţi (eng. *reneging*)
        - trec de la o coadă mai lungă la alta mai scurtă (eng. *jockeying*)
        - un client vede coada şi renunţă să mai intre (eng. *balking*)
        - mai mulți clienți colaborează și numai un client stă la coadă (eng. *colluding*)

Murphy' Laws on reliability and queueing (https://www.youtube.com/watch?v=Oo0Yr9r3zEk)

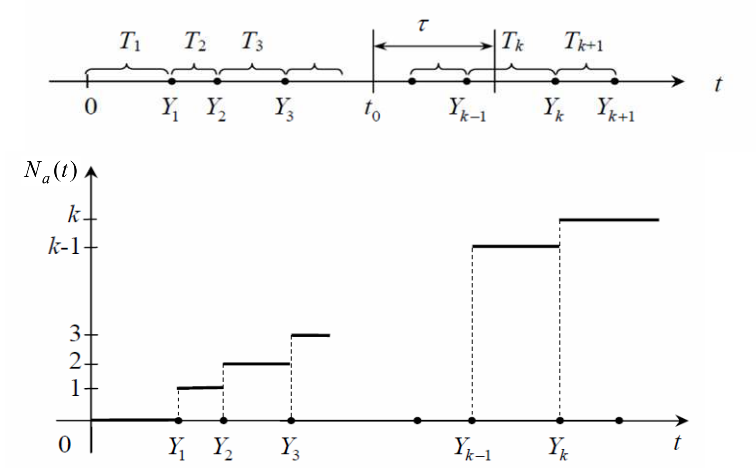
- *If anything can go wrong, it will.*
- *If you change queues, the one you have left will start to move faster than the one you are in now.*
- *Your queue always goes the slowest.*
- *Whatever queue you join, no matter how short it looks, it will always take the longest for you to get served.*

4.1.2. Dinamica unui sistem de aşteptare

➢ sistemul de aşteptare de tip G/G/1 cu disciplina de servire de tip FIFO

- variabile asociate clientului indice k:

arrival time: Y_k, *departure time*: D_k, *system time*: S_k, *waiting time*: W_k, *service time*: Z_k



  - cunoscute: *interarrival time*: T_k, $k = 1, 2, \ldots$

    service time: Z_k, $k = 1, 2, \ldots$

  - calculate:

arrival time: $Y_k = Y_{k-1} + T_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $Y_0 = 0$

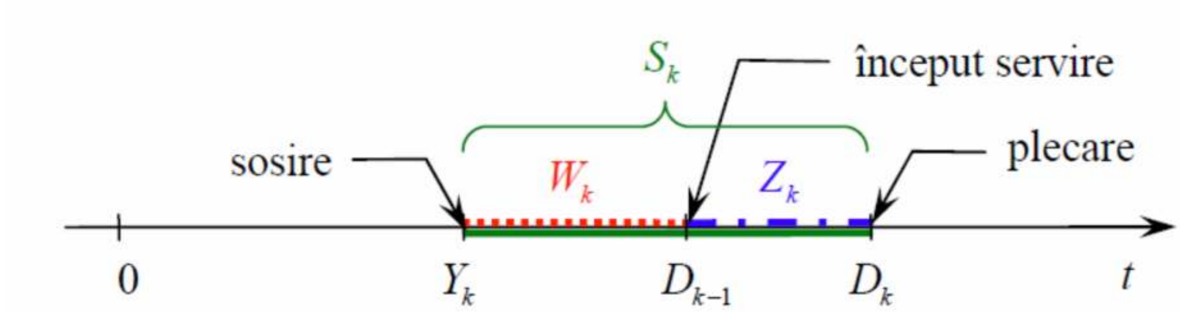
system time: $S_k = W_k + Z_k$

departure time: $D_k = Y_k + S_k = Y_k + W_k + Z_k$

waiting time:

$$\left.\begin{array}{l} D_{k-1} - Y_k \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad W_k = 0 \\ D_{k-1} - Y_k > 0 \quad \Leftrightarrow \quad W_k = D_{k-1} - Y_k \end{array}\right\} \Rightarrow W_k = \max\{0, D_{k-1} - Y_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

cazul $D_{k-1} > Y_k$:



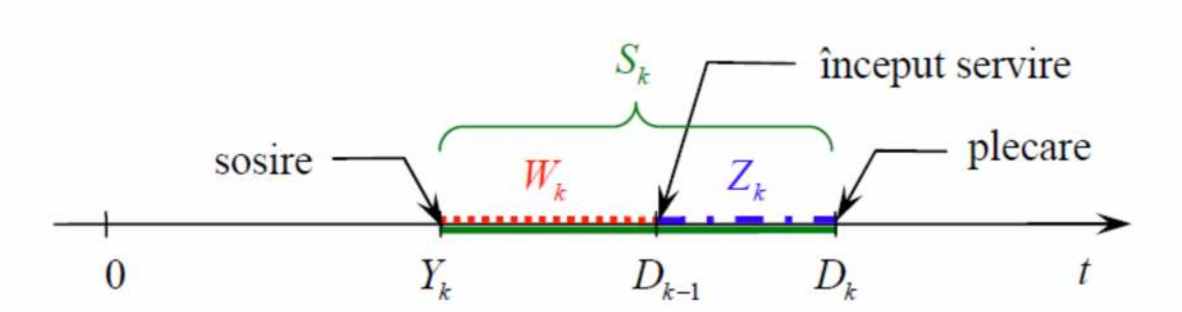
- formule de recurenţă:

considerând $S_0 = D_0 = W_0 = 0$

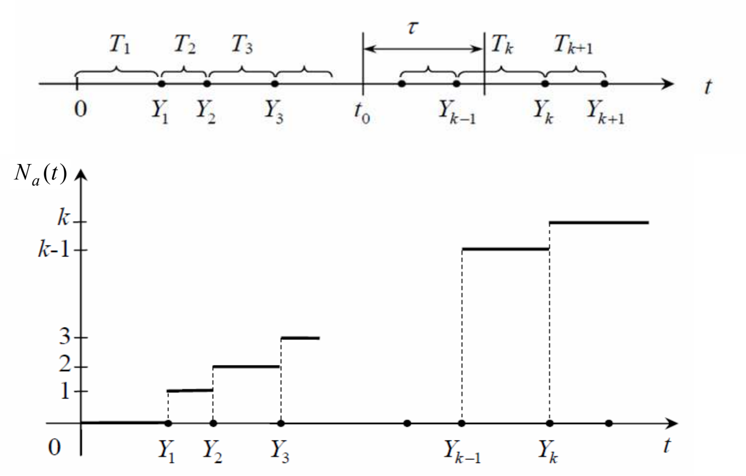
$$\left.\begin{aligned} W_k &= \max\{0,\, D_{k-1} - Y_k\} \\ D_{k-1} &= Y_{k-1} + W_{k-1} + Z_{k-1} \\ Y_{k-1} &= Y_k - T_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_k = \max\{0,\, W_{k-1} + Z_{k-1} - T_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (\textbf{\textit{ec. lui Lindley}})$$

$$S_k = Z_k + W_k = Z_k + \max\{0,\, S_{k-1} - T_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

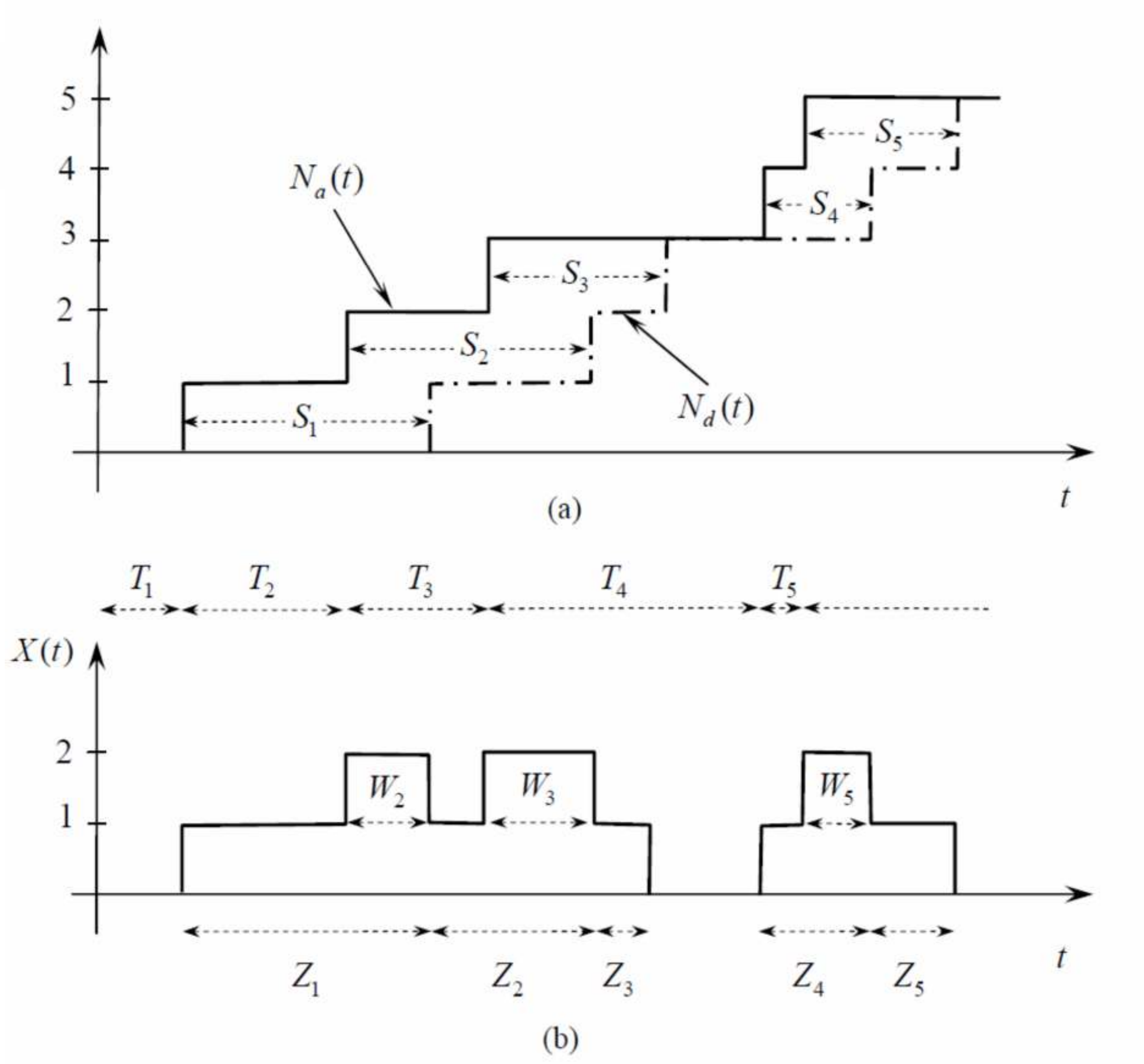
$$D_k = Y_k + W_k + Z_k = Y_k + Z_k + \max\{0,\, D_{k-1} - Y_k\} = Z_k + \max\{Y_k,\, D_{k-1}\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$



Exemplu de traiectorie de stare a unui sistem de aşteptare:



$$Y_k = Y_{k-1} + T_k = T_1 + T_2 + \ldots + T_k$$



4.1.3. Performanţele de regim staţionar ale sistemelor de aşteptare

- sistemul de aşteptare de tip G/G/1 cu disciplina de servire de tip FIFO
- distribuţia de probabilitate a duratelor de servire:

$$B(t) = P\left[Z \le t\right],\ t \ge 0$$

mean service time: $\mathrm{M}[Z]$ *average service rate*: $\mu = {}^{1}\!/_{\mathrm{M}[Z]}$

- **ipoteză:** există o distribuţie staţionară de probabilitate a numărului de clienţi în sistem:

$$\lim_{t\to\infty} P\left[X(t) = n\right] = P\left[X = n\right] \overset{not}{=} \pi_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

average queue length: $\mathrm{M}[X]$

- **ipoteză:** există o distribuţie staţionară de probabilitate a duratelor de aşteptare:

$$\lim_{k\to\infty} P\left[W_k \le t\right] = P\left[W \le t\right]$$

mean waiting time: $\mathrm{M}[W]$

- **ipoteză:** există o distribuţie staţionară de probabilitate a duratelor petrecute de clienţi în sistem:

$$\lim_{k\to\infty} P\left[S_k \le t\right] = P\left[S \le t\right]$$

mean system time: $\mathrm{M}[S]$

- gradul de utilizare a serverului (*server utilization*)

$$\rho_s = \lambda \mathrm{M}[Z] = \frac{\lambda}{\mu}$$

condiţia de echilibru a sistemului G/G/1:

$$\rho_s < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < \mu$$

- rata cu care clienţii părăsesc sistemul după ce au fost serviţi (*throughput*)

în regim staţionar: $\lambda_d = \lambda$

4.1.4. Legea lui Little

Într-un sistem de aşteptare aflat în regim staționar, are loc relația

$$\mathrm{M}\left[X\right] = \lambda_e \mathrm{M}\left[S\right],$$

unde λ_e ***este rata efectivă de intrare a clienților în sistem.***

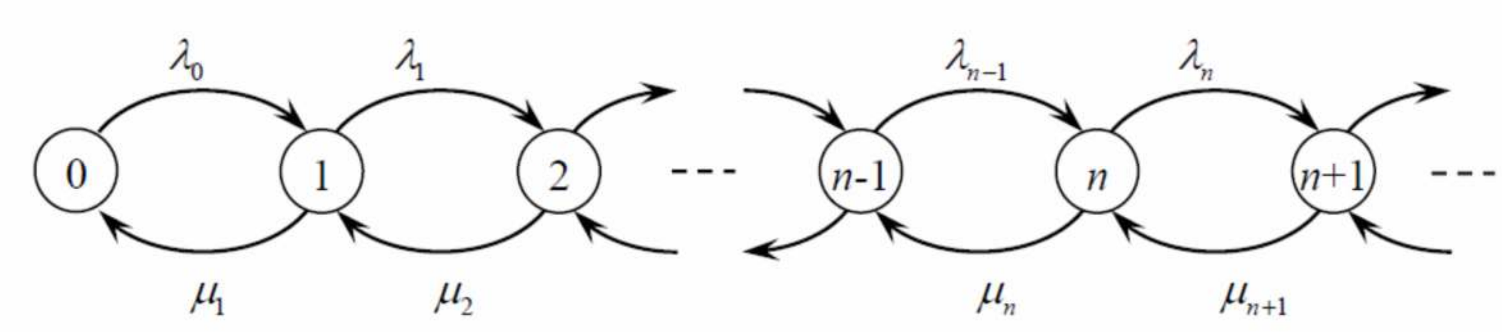
Legea lui Little poate fi aplicată:

- oricărui sistem, indiferent de:
  - tipul proceselor de sosire şi de servire a clienţilor (procese staţionare)
  - regulile de operare a sistemului
- reţelelor de aşteptare cu configuraţie arbitrară
- oricărui subsistem al unui reţele de aşteptare
- firului de aşteptare

$$\mathrm{M}[X_Q] = \lambda_e \mathrm{M}[W]$$

4.1.5. Sisteme simple de aşteptare de tip markovian

- sistem de aşteptare de tip ***M*** / ***M*** / **…**



***Analiza regimului staţionar*:**

În ce condiții există $\boldsymbol{\pi} = \lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{\pi}(t) = [\pi_0,\ \pi_1,\ \pi_2, \ldots],\ \pi_i = \lim\limits_{t\to\infty} \pi_i(t) = \lim\limits_{t\to\infty} P[X(t) = i],\ i = 0,1,2,...$

care satisface
$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{Q} = 0, \\ \sum\limits_{i\in S} \pi_i = 1. \end{cases}$$

Ecuaţia de bilanţ al „fluxului de probabilitate”

CTMC general

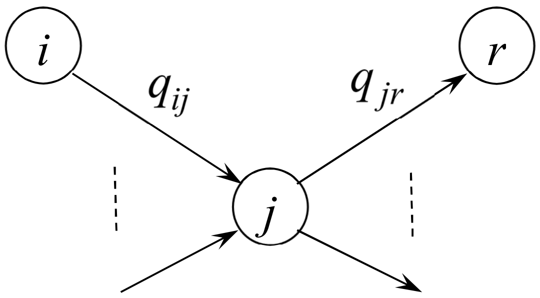
$$\pi \cdot \boldsymbol{Q} = 0$$

- pentru starea (nodul) $j \in \mathcal{S}$ din lanţul Markov

$$(\pi \cdot \boldsymbol{Q})_j = \sum_{i \in \mathcal{S}} q_{ij}\pi_i = q_{jj}\pi_j + \sum_{i \neq j} q_{ij}\pi_i = -Q_j^{(out)} + Q_j^{(in)} = Q_j^{(in)} - Q_j^{(out)}$$

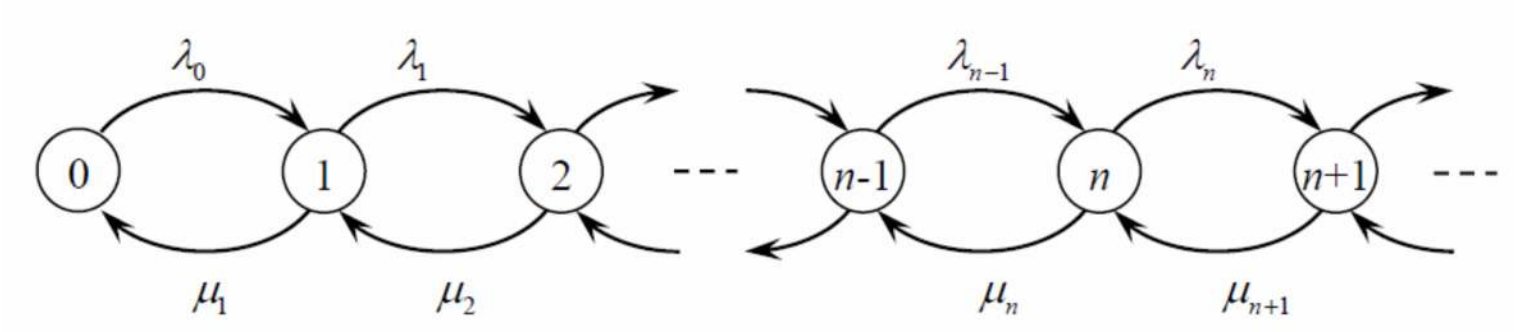
cu

$$Q_j^{(in)} = \sum\nolimits_{i \neq j} q_{ij}\pi_i\,, \qquad Q_j^{(out)} = -q_{jj}\pi_j = \left(\sum\nolimits_{r \neq j} q_{jr}\right)\pi_j$$



la echilibru: $\pi \cdot \boldsymbol{Q} = 0 \;\Leftrightarrow\; Q_j^{(in)} = Q_j^{(out)} \;\Leftrightarrow\; \sum\nolimits_{i \neq j} q_{ij}\pi_i = \left(\sum\nolimits_{r \neq j} q_{jr}\right)\pi_j,\ \forall j \in \mathcal{S}$

CTMC de tip birth-death



$$\pi \cdot \boldsymbol{Q} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0 \\ -(\lambda_n + \mu_n)\pi_n + \lambda_{n-1}\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1} = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \;\; \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0, \quad \pi_n = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n}\pi_0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \;\;\Leftrightarrow\;\; \pi_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}\right] = 1 \;\Rightarrow\; \pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}\right]^{-1}$$

dacă şi numai dacă

$$\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} < \infty \;\;\Leftrightarrow\;\; \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \;\; \forall n \geq n_0 : \;\; \frac{\lambda_n}{\mu_n} < 1$$

Analiza regimului staţionar al unui sisteme de aşteptare de tip M / M / …

- condiţia de stabilitate a sistemului de aşteptare (intrare în regim stațional):

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \geq n_0 : \frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1 \quad \Rightarrow \sigma = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} < \infty$$

- numărul de clienţi din sistem:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_n & \ldots \end{pmatrix}, \qquad \pi_n = P[X = n],\ n = 0,1,\ldots.$$

$$\pi_0 = \sigma^{-1}; \qquad \pi_n = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n} \pi_0, \quad n = 1,2,\ldots$$

numărul de clienţi din firul de aşteptare: $X_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots \\ \pi_0^Q & \pi_1^Q & \ldots & \pi_k^Q & \ldots \end{pmatrix}$	numărul de clienţi în curs de servire (nr. servere ocupate): $X_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & m \\ \pi_0^S & \pi_1^S & \ldots & \pi_m^S \end{pmatrix}$

$$X = X_Q + X_S$$

4.2. Sisteme de aşteptare de tip M/M/1

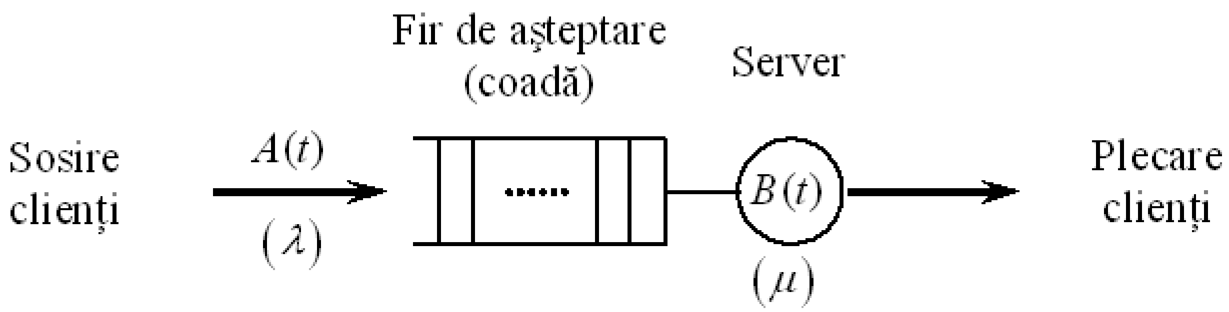
- fluxul de sosire a clienţilor în sistem este de tip Poisson, duratele dintre sosirile clienţilor în sistem sunt v.a.i. cu distribuţie exponenţială de rată $\lambda > 0$:

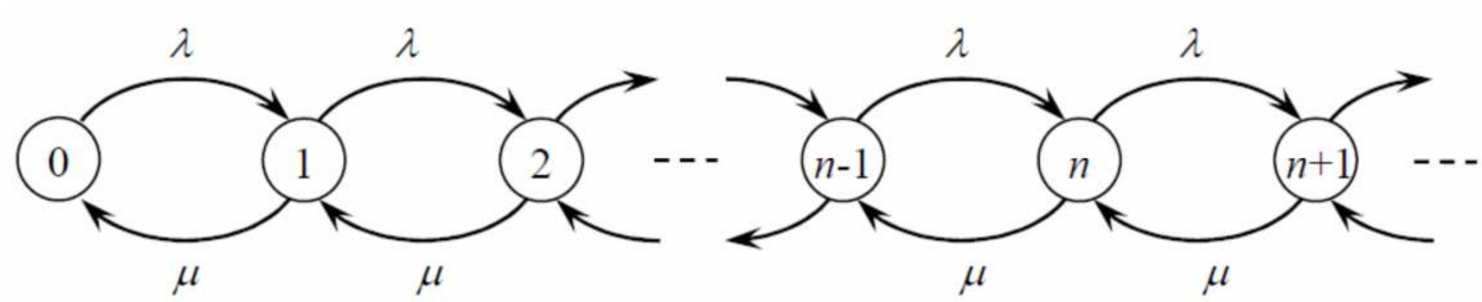
$$P[T \le t] = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \ge 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[T] = \frac{1}{\lambda}$$

- duratele de servire a clienţilor sunt v.a.i. cu distribuţie exponenţială de rată $\mu > 0$:

$$P[Z \le t] = 1 - \mathrm{e}^{-\mu t}, \quad t \ge 0, \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[Z] = \frac{1}{\mu}$$

- un singur server: $m = 1$
- capacitate infinită a firului de aşteptare: $K = \infty$
- disciplina de servire a clienţilor este cea implicită: *FIFO*





condiţia de stabilitate: $0 < \dfrac{\lambda}{\mu} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \lambda < \mu$

- *intensitatea traficului* (*traffic intensity*): $\rho = \lambda / \mu$, $0 < \rho < 1$

- distribuţia numărului de clienţi din sistem în regim staționar: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n & \dots \end{pmatrix}$

$$\pi_0 = P[X=0] = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\right]^{-1} = \left[\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1} = 1-\rho$$

$$\pi_n = P[X=n] = \rho^n \pi_0 = \rho^n (1-\rho), \quad n = 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow$ X are distribuţie geometrică modificată de parametru $1-\rho$

$$X = X_Q + X_S, \quad X_Q \in \mathbb{N}, \quad X_S \in \{0, 1\}$$

X	0	1	2	…	n	…
X_Q	0	0	1	…	$n-1$	…
X_S	0	1	1	…	1	…
π	π_0	π_1	π_2	…	π_n	…

Indicatori de performanţă (regim staţionar)

- **gradul de utilizare a serverului:** $\rho_s = \mathrm{M}[X_S] = 1 - \pi_0 = \rho < 1$

  $X_S = B$ = numărul de servere ocupate la un moment dat = numărul de clienţi în curs de servire:

$$X_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi_0 & 1-\pi_0 \end{pmatrix}$$

X	0	1	2	…	n	…
X_Q	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	1	…	$n-1$	…
X_S	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{\dots}$	$\boxed{1}$	$\boxed{\dots}$
$\boldsymbol{\pi}$	π_0	π_1	π_2	…	π_n	…

$X = X_Q + X_S$

$S = W + Z$

- **rata de plecare** a clienţilor din sistem:

$$\lambda_d = \mu\rho_s = \mu(1-\pi_0) = \lambda$$

- **numărul mediu de clienţi din sistem**: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n & \dots \end{pmatrix}$

$$\mathrm{M}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n \;\Rightarrow\; \mathrm{M}[X] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- **durata medie petrecută de un client în sistem**: (legea lui Little)

$$\mathrm{M}[S] = \frac{1}{\lambda}\mathrm{M}[X] = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

X	0	1	2	…	n	…
X_Q	0	0	1	…	$n-1$	…
X_S	0	1	1	…	1	…
π	π_0	π_1	π_2	…	π_n	…

$$X = X_Q + X_S$$
$$S = W + Z$$

- **numărul mediu de clienţi din firul de aşteptare**:

$$X_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ \pi_0 + \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \dots & \pi_{n+1} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}[X_Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_{n+1} = \mathrm{M}[X] - \rho_s = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

- **durata medie de aşteptare**:

$$\mathrm{M}[W] = \mathrm{M}[S] - \mathrm{M}[Z] = \frac{1}{\lambda}\mathrm{M}[X_Q] = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

- **probabilitatea de aşteptare la coadă** (*queueing probability*)

$$P_Q = P[X \geq 1] = 1 - \pi_0 = \rho$$

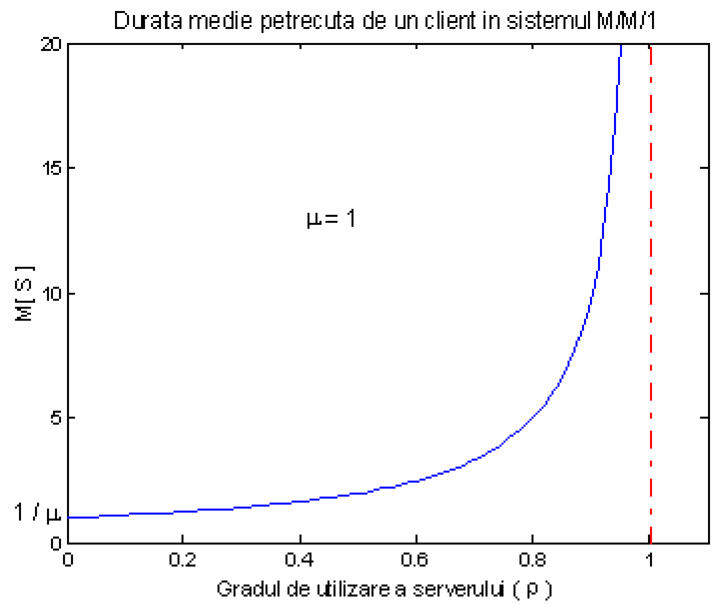
- distribuţia de probabilitate a duratei petrecute de un client în sistem:

$$P[S \le t] = 1 - \mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad S \sim \mathrm{Exp}(\mu - \lambda)$$

- distribuţia de probabilitate a duratei de aşteptare:

$$P[W \le t] = 1 - \rho\,\mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t \ge 0$$

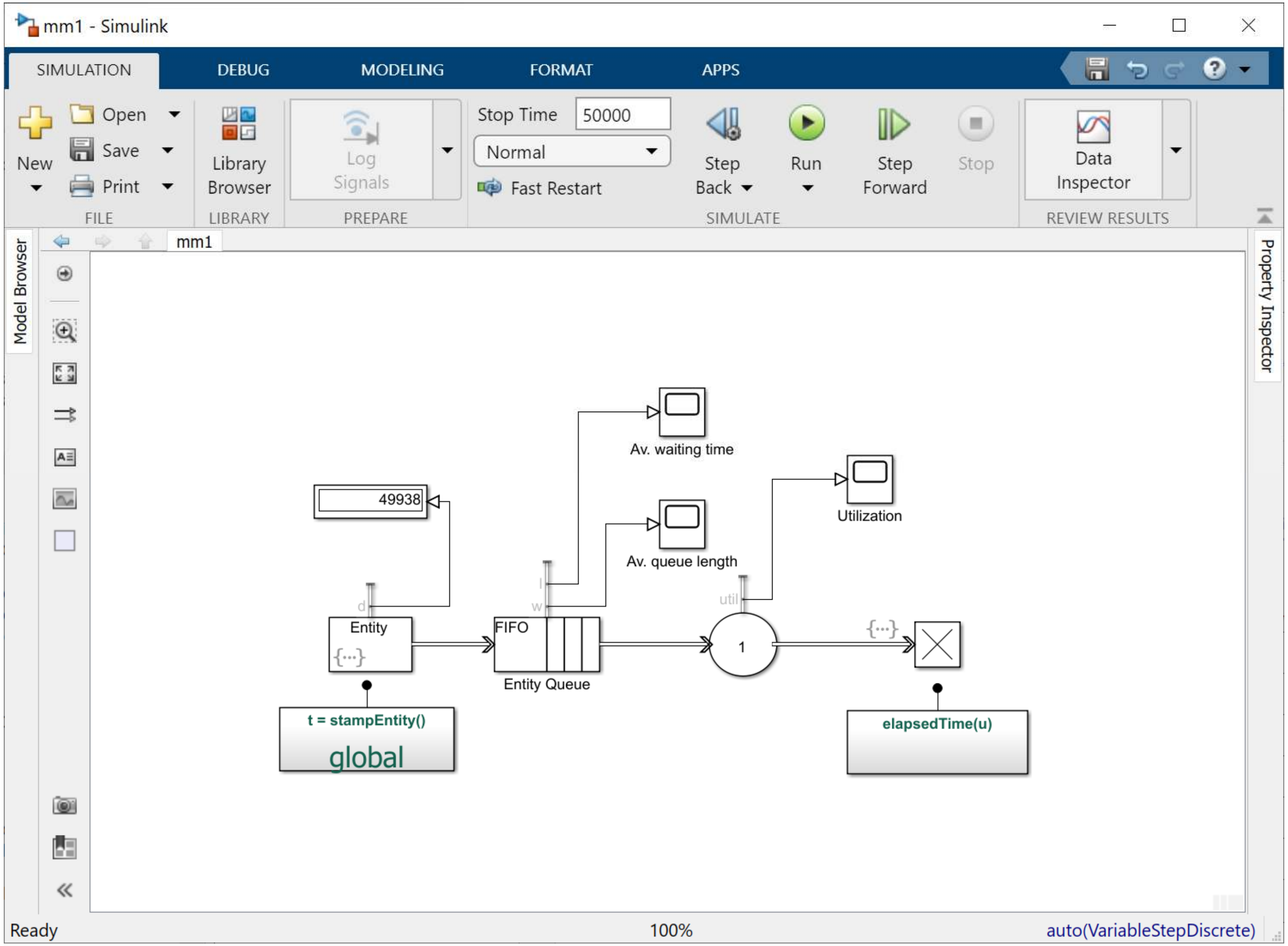
Durata medie petrecută de un client într-un sistem de aşteptare de tip M/M/1
în funcţie de gradul de utilizare a serverului

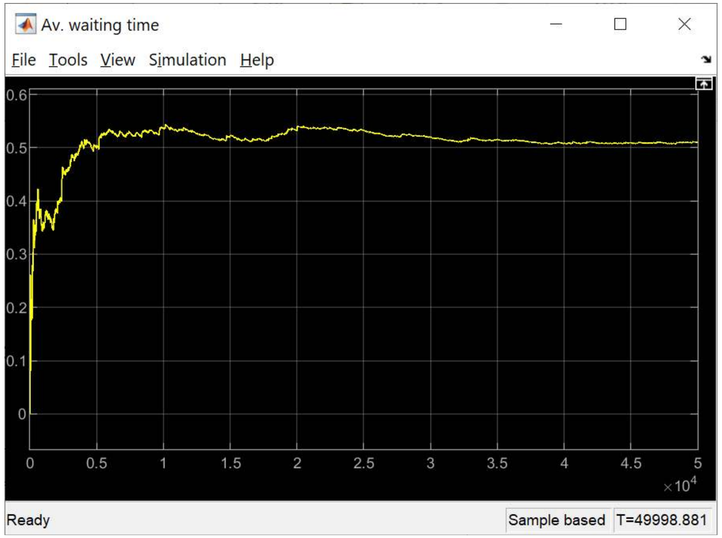


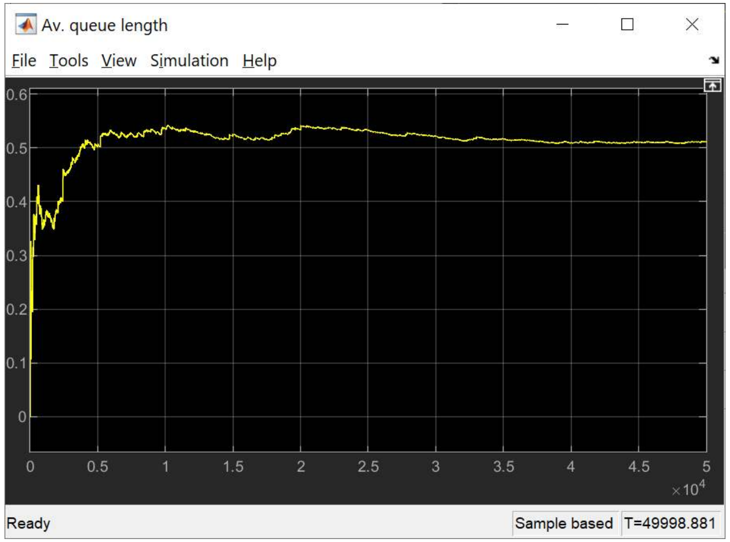
observaţie: $\lim\limits_{\rho \nearrow 1} \mathrm{M}[X] = +\infty, \ \lim\limits_{\rho \nearrow 1} \mathrm{M}[S] = +\infty, \ \lim\limits_{\rho \nearrow 1} \mathrm{M}[W] = +\infty$

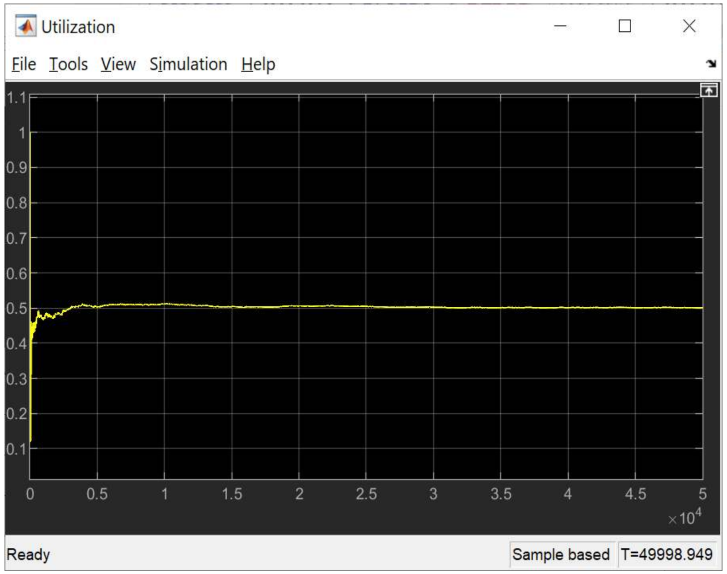
Simularea unui sistem de aşteptare M/M/1: $\lambda = 1\ s^{-1},\ \mu = 2\ s^{-1} \Rightarrow \rho = 0,5$

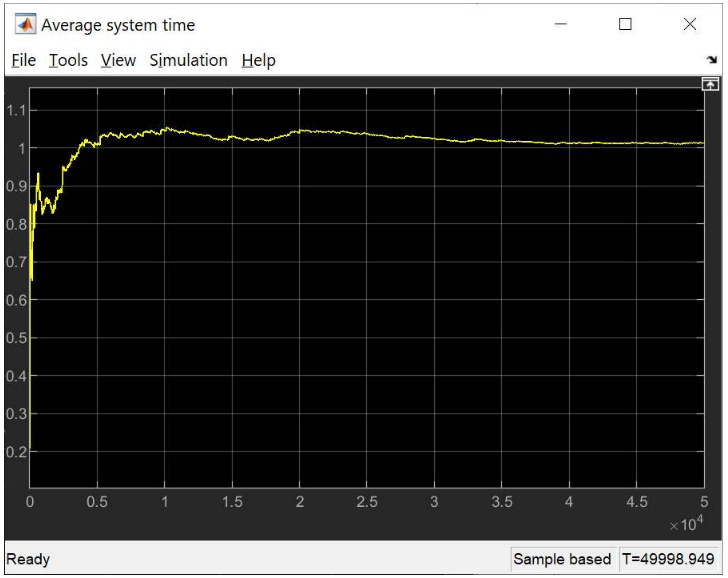
model SimEvents




Av. waiting time
File Tools View Simulation Help
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5
×10^4
Ready
Sample based
T=49998.881

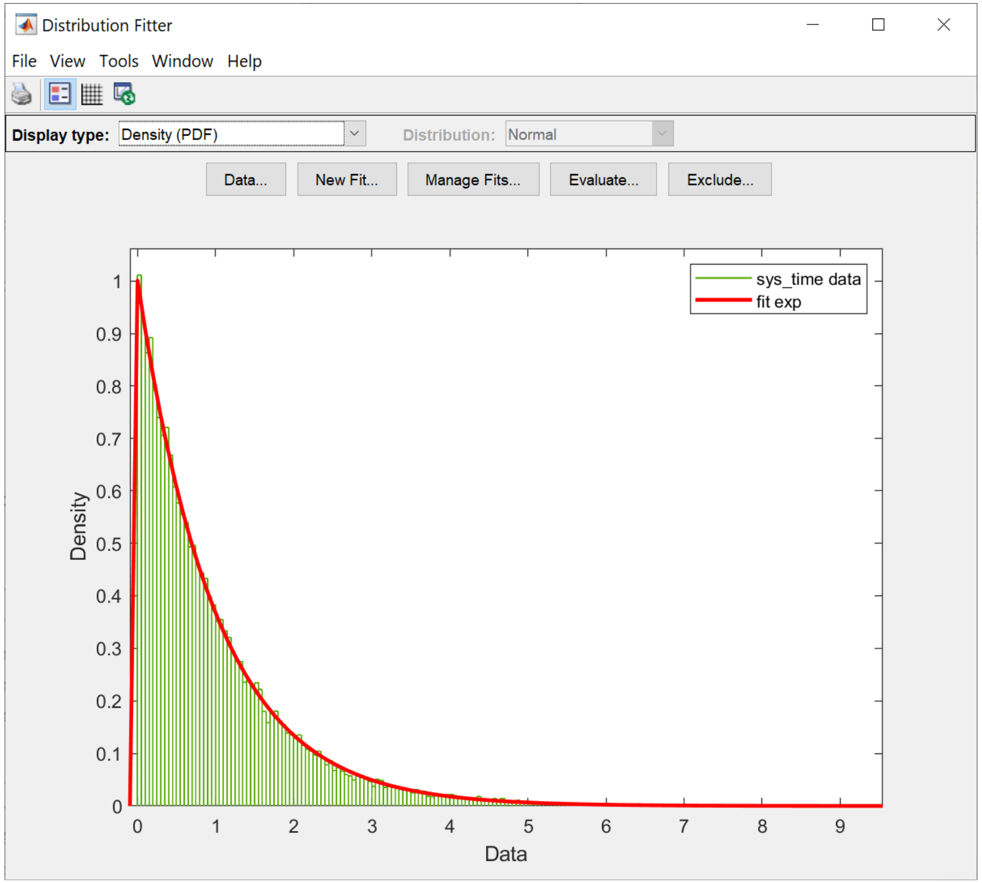

Av. queue length
File Tools View Simulation Help
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5
×10^4
Ready
Sample based
T=49998.881

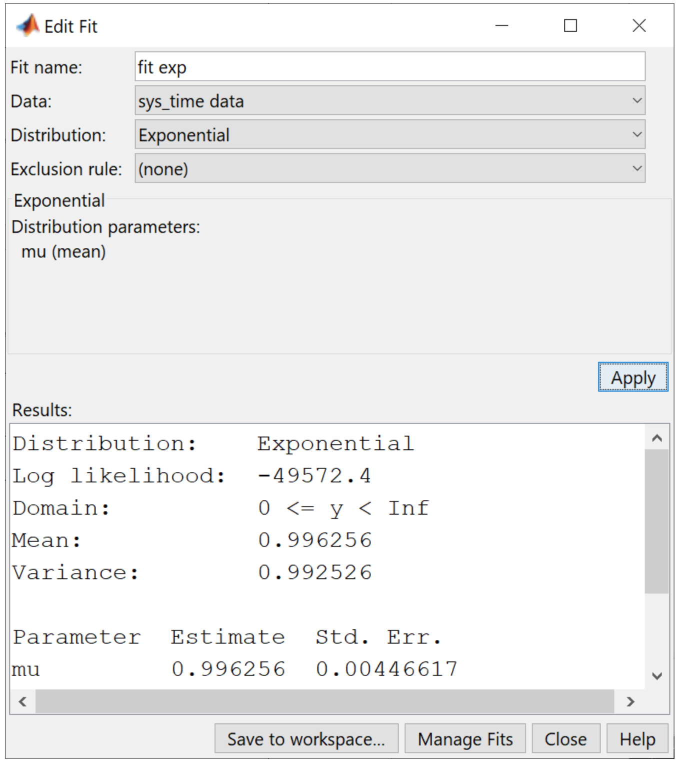

Utilization
File Tools View Simulation Help
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5
×10^4
Ready
Sample based
T=49998.949


Average system time
File Tools View Simulation Help
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5
×10^4
Ready
Sample based
T=49998.949

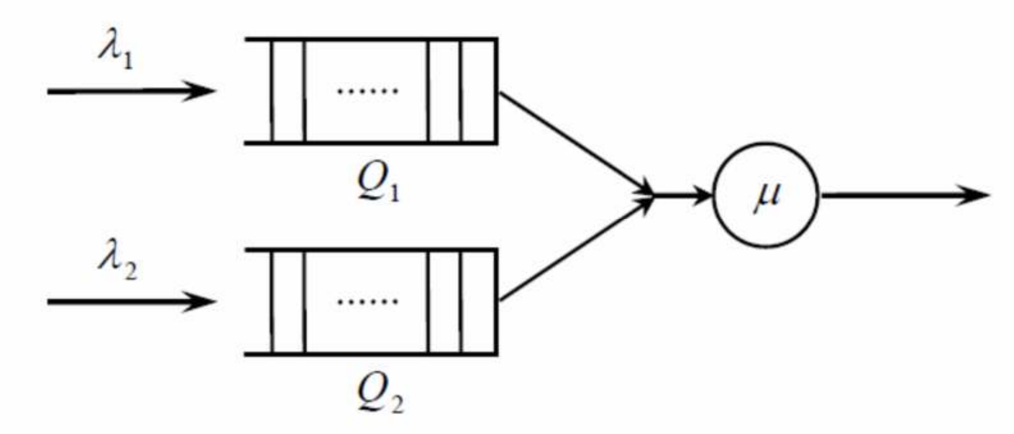
determinarea experimentală a distribuţiei de probabilitate pentru Service Time:

$$P[S \le t] = 1 - \mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad S \sim \mathrm{Exp}(\mu - \lambda)$$





Sistem de aşteptare M/M/1 cu două clase de clienţi



- sosirea clienţilor de tipul 1 are loc după un proces Poisson de rată λ_1
- sosirea clienţilor de tipul 2 are loc după un proces Poisson de rată λ_2
- cele două procese de sosire a clienţilor sunt independente
- clienţii de tipul 1 sunt serviţi cu prioritate faţă de clienţii de tipul 2
- pentru ambele tipuri de clienţi, durata de servire are distribuţie exponenţială de rată μ

- **ipoteza:**

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}, \quad i = 1, 2, \qquad \rho_1 + \rho_2 < 1$$

A. Prioritate absolută (*pre-emptive resume priority*)

- Dacă în cursul servirii clientului de tipul 2 apare un client de tipul 1, servirea clientului curent este întreruptă, acesta fiind trimis din nou în firul de aşteptare, şi începe servirea clientului nou sosit.
- Clienţii de tipul 1 sunt serviţi în ordinea sosirii.
- Atunci când în sistem nu mai există nici un client de tipul 1 este reluată servirea clientului de tipul 2 din punctul în care a fost întreruptă la sosirea clientului de tipul 1.

➢ pentru clienţii de tipul 1, clienţii de tipul 2 nu există

$$\mathrm{M}[X_1]=\frac{\rho_1}{1-\rho_1},\quad \mathrm{M}[S_1]=\frac{1}{\lambda_1}\mathrm{M}[X_1]=\frac{1}{\mu(1-\rho_1)}=\frac{1}{\mu-\lambda_1}$$

➢ d.p.d.v. al numărului total de clienţi, sistemul de aşteptare se comportă ca şi cum clienţii ar fi serviţi în ordinea sosirii (cu rata $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$), indiferent de priorităţi

$$\mathrm{M}[X_1]+\mathrm{M}[X_2]=\frac{\rho_1+\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2}$$

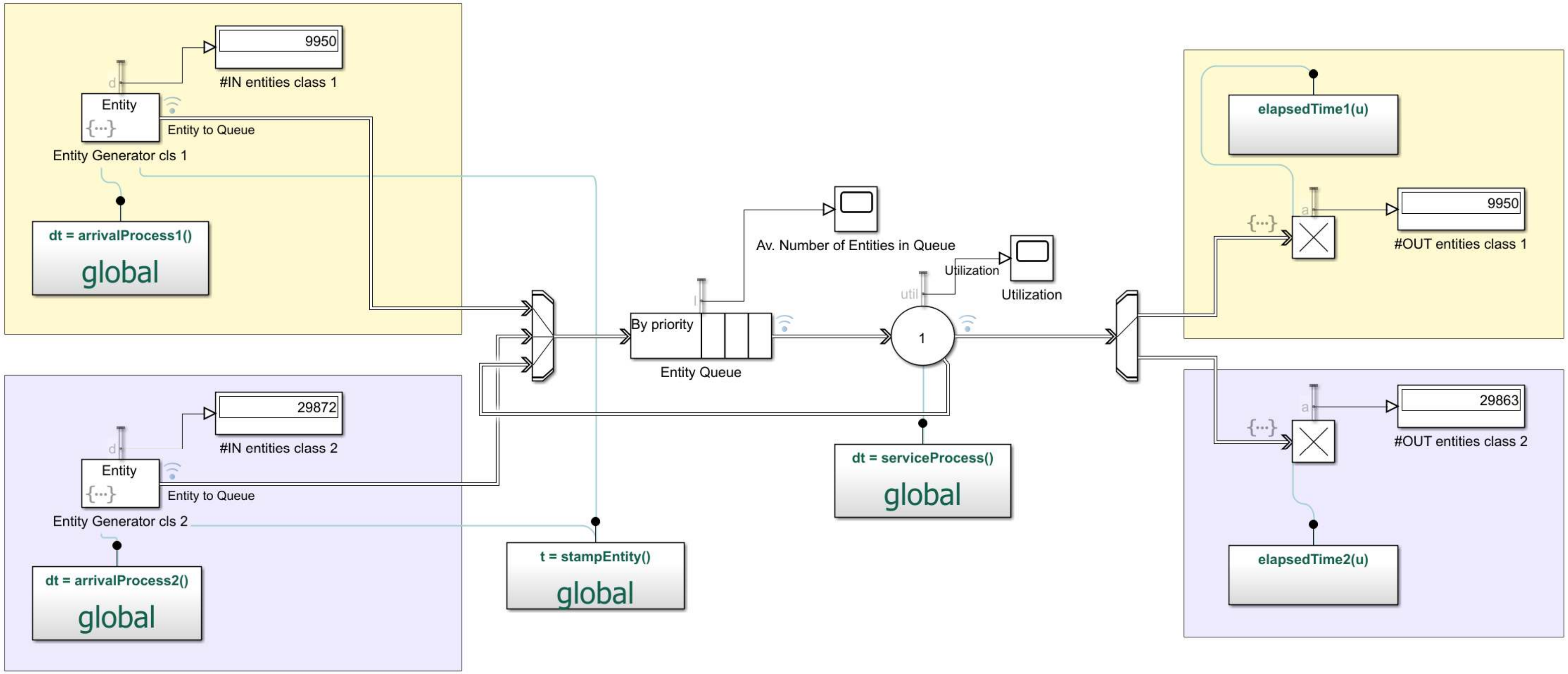
$$\mathrm{M}[X_2]=\frac{\rho_1+\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2}-\frac{\rho_1}{1-\rho_1}=\frac{\rho_2}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

$$\mathrm{M}[S_2]=\frac{1}{\lambda_2}\mathrm{M}[X_2]=\frac{1}{\mu(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

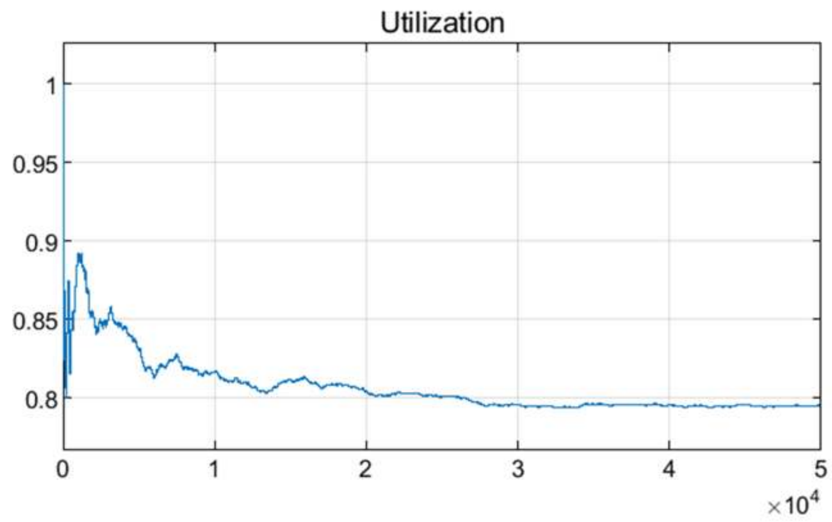
$$\mathrm{M}[W_i]=\mathrm{M}[S_i]-\frac{1}{\mu},\quad \mathrm{M}\left[X_{iQ}\right]=\mathrm{M}[X_i]-\rho_i,\quad i=1,2$$

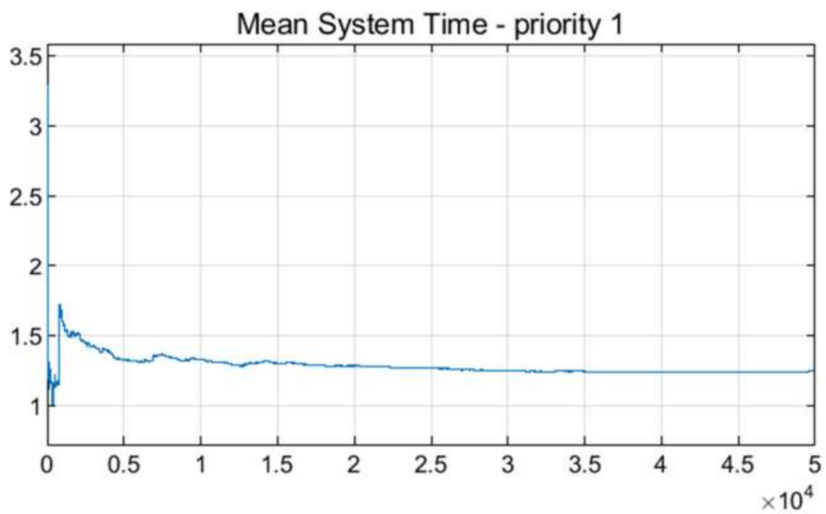
model SimEvents: $\lambda_1 = 0{,}2\ \text{s}^{-1},\ \lambda_2 = 0{,}6\ \text{s}^{-1},\ \mu = 1\ \text{s}^{-1} \Rightarrow \rho_1 = 0{,}2,\ \rho_2 = 0{,}6$

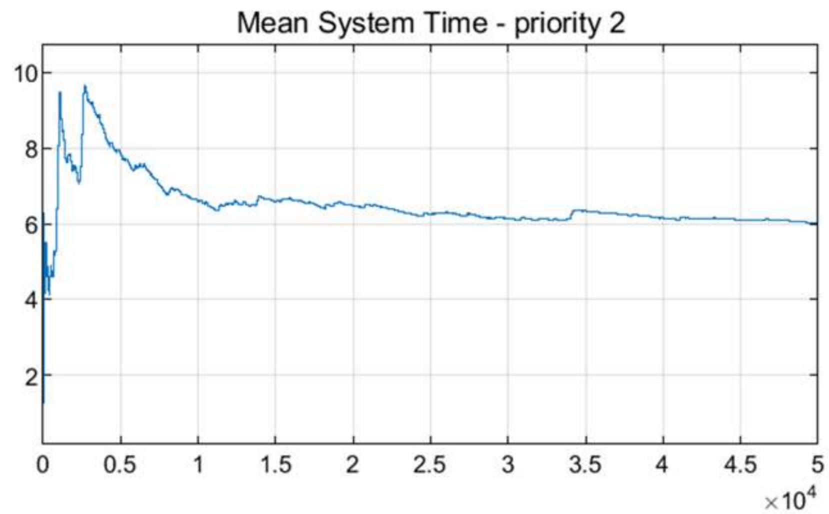
Preemptive priorities



Rezultate teoretice: $\mathrm{M}\left[S_1\right]=1.25$, $\mathrm{M}\left[S_2\right]=6.25$







B. Prioritate relativă (*non pre-emptive priority*)

- Dacă în cursul servirii unui client de prioritate 2 apare un client de prioritate 1, servirea clientului curent este continuată, clientul de tipul 1 fiind servit abia după terminarea servirii.
- Probabilitate ca un client de tipul 1 să găsească serverul ocupat de un client de tipul 2 = ρ_2.
- Un client de tipul 1 nou sosit trebuie să aştepte servirea clienţilor de acelaşi tip sosiţi înaintea sa, sau terminarea servirii unui client de tipul 2

$$\mathrm{M}[S_1] = \mathrm{M}[X_1]\frac{1}{\mu} + \rho_2\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}, \quad \mathrm{M}[X_1] = \lambda_1 \mathrm{M}[S_1]$$

$$\mathrm{M}[X_1] = \rho_1 \mathrm{M}[X_1] + \rho_1 + \rho_1\rho_2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[X_1] = \frac{\rho_1(1+\rho_2)}{1-\rho_1}, \quad \mathrm{M}[S_1] = \frac{1+\rho_2}{\mu(1-\rho_1)}$$

- d.p.d.v. al numărului total de clienţi, sistemul de aşteptare se comportă ca şi cum clienţii ar fi serviţi în ordinea sosirii (cu rata $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$), indiferent de priorităţi

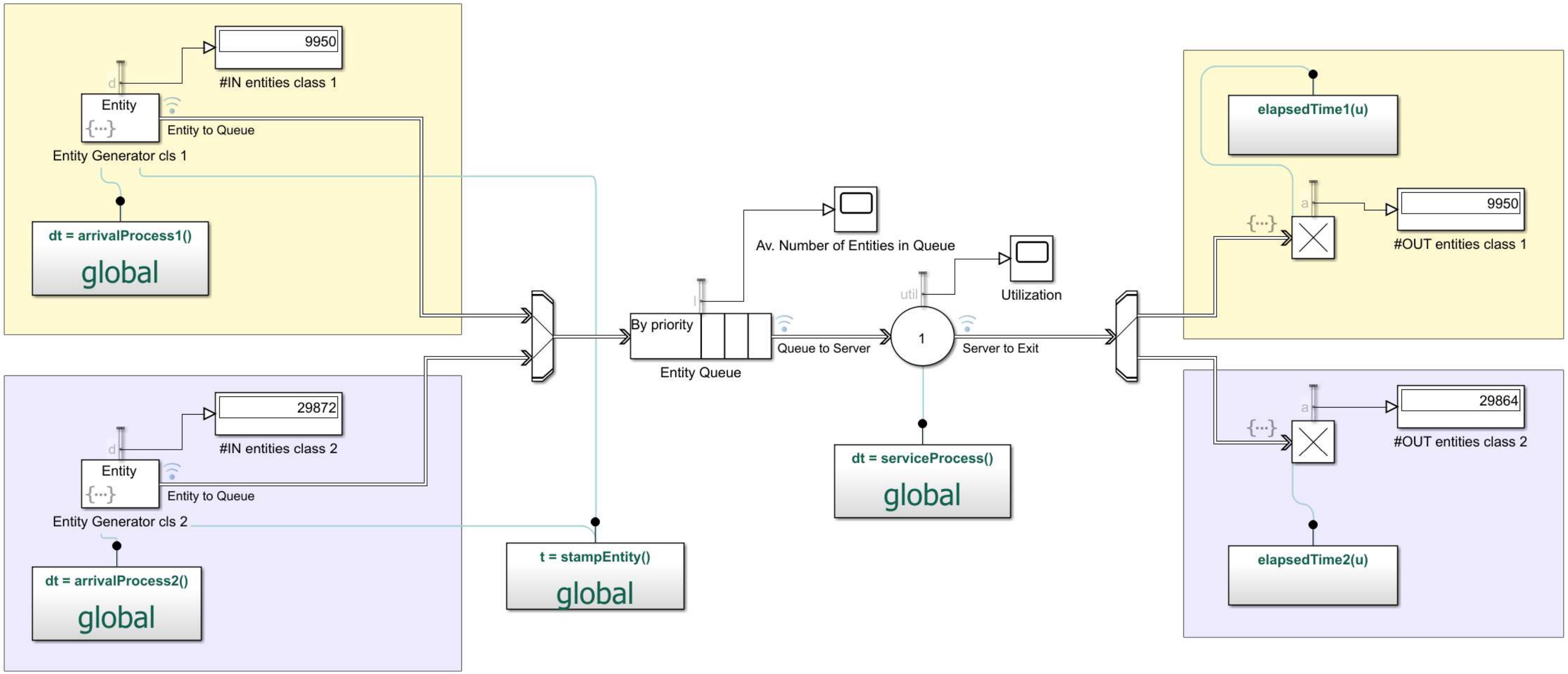
$$\mathrm{M}[X_1] + \mathrm{M}[X_2] = \frac{\rho_1+\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2}$$

$$\mathrm{M}[X_2] = \frac{\rho_1+\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2} - \frac{\rho_1(1+\rho_2)}{1-\rho_1} = \frac{\rho_2[1-\rho_1(1-\rho_1-\rho_2)]}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

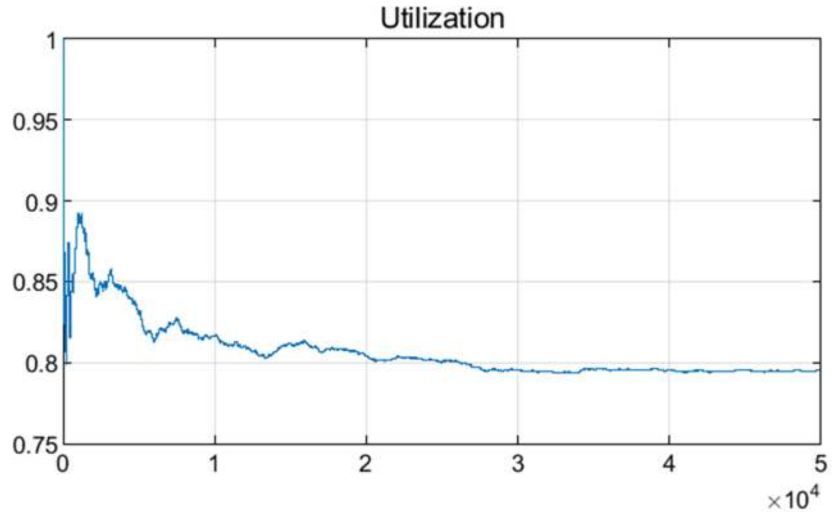
$$\mathrm{M}[S_2] = \frac{1}{\lambda_2}\mathrm{M}[X_2] = \frac{1-\rho_1(1-\rho_1-\rho_2)}{\mu(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}$$

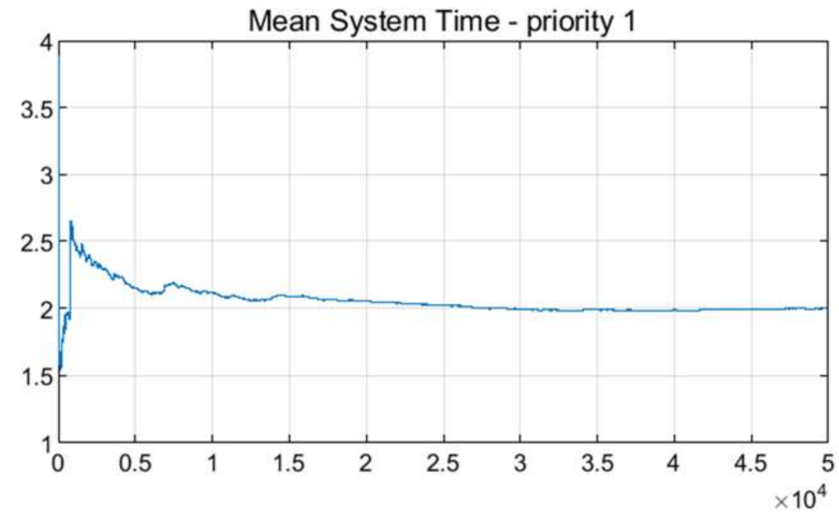
$$\mathrm{M}[W_i] = \mathrm{M}[S_i] - \frac{1}{\mu}, \quad \mathrm{M}\left[X_{iQ}\right] = \mathrm{M}[X_i] - \rho_i, \quad i = 1,2$$

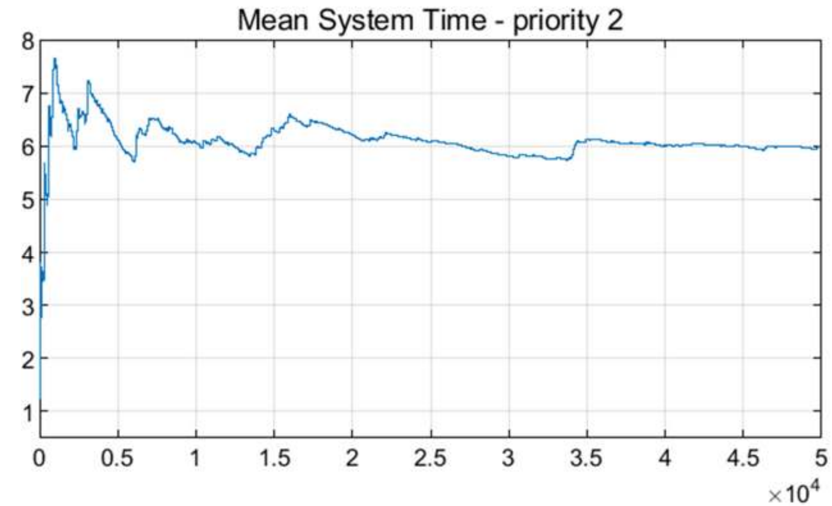
Non-preemptive priorities



Rezultate teoretice: $\mathrm{M}[S_1]=2$, $\mathrm{M}[S_2]=6$







4.3. Sisteme de aşteptare M/M/m

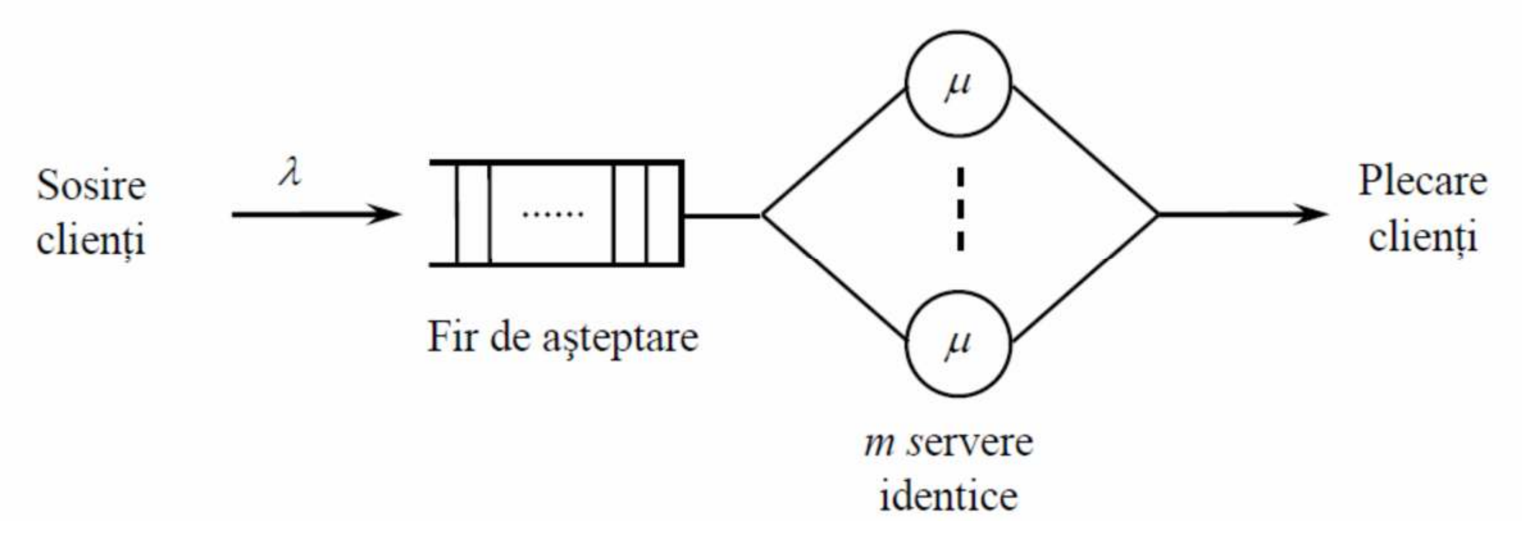
- fluxul de sosire a clienţilor în sistem este de tip Poisson de rată $\lambda > 0$:

$$P[T \le t] = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0, \qquad \Rightarrow \quad M[T] = \frac{1}{\lambda}$$

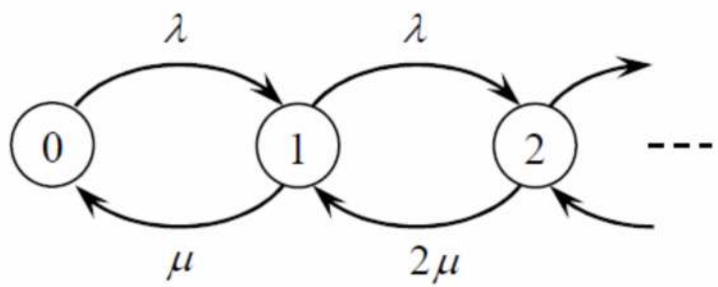
- un număr de *m* servere identice
- duratele de servire a clienţilor sunt v.a.i. cu distribuţie exponenţială de rată $\mu > 0$:

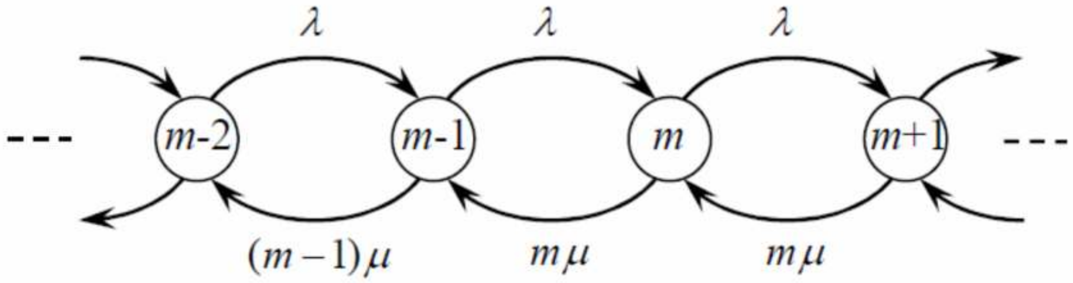
$$P[Z \le t] = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \ge 0, \qquad \Rightarrow \quad M[Z] = \frac{1}{\mu}$$

- capacitate infinită a firului de aşteptare: $K = \infty$
- disciplina de servire a clienţilor este cea implicită: *FIFO*



lanţ *birth-death:*





X	0	1	2	$\ldots$	$m-1$	m	$m+1$	$\ldots$
X_Q	0	0	0	$\ldots$	0	0	1	$\ldots$
X_S	0	1	2	$\ldots$	$m-1$	m	m	$\ldots$

$S = W + Z$

$$\lambda_n = \lambda\,,\quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad \mu_n = \min(n,m)\mu = \begin{cases} n\mu, & \text{dacă } \ 1 < n < m, \\ m\mu, & \text{dacă } \ n \geq m. \end{cases}$$

condiţia de stabilitate: $0 < \dfrac{\lambda}{m\mu} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \lambda < m\mu$

- *intensitatea traficului* (eng. *traffic intensity*): $\rho = \dfrac{\lambda}{m\mu},\ 0 < \rho < 1$

- distribuţia staţionară a numărului de clienţi din sistem: $\pi_n = P[X = n],\ n = 0,1,\ldots.$

$$\sigma \overset{not}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = 1 + \left[\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] + \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{m-1} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{m\mu} \right)^p =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} \right] + \frac{(m\rho)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \rho^p = \frac{(m\rho)^m}{m!} \cdot \frac{1}{1-\rho} + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!}$$

$$\pi_0 = P[X = 0] = \sigma^{-1} = \left[\frac{(m\rho)^m}{m!} \cdot \frac{1}{1-\rho} + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

$$\pi_n = P[X = n] = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)\ldots(n\mu)} \pi_0 = \frac{(m\rho)^n}{n!} \pi_0, \quad n = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$\pi_n = P[X = n] = \frac{\lambda^{m-1}}{\mu(2\mu)\ldots[(m-1)\mu]} \left(\frac{\lambda}{m\mu} \right)^{n-m+1} \pi_0 = \frac{m^m}{m!} \rho^n \pi_0 = \frac{(m\rho)^m}{m!} \rho^{n-m} \pi_0, \quad n = m, m+1, \ldots.$$

Indicatori de performanţă (regim staționar)

X	0	1	2	$\dots$	$m-1$	m	$m+1$	$\dots$
X_Q	0	0	0	$\dots$	0	0	1	$\dots$
X_S	0	1	2	$\dots$	$m-1$	m	m	$\dots$

$S = W + Z$

- **gradul de utilizare a unui server:**

$$\rho_s = \mathrm{M}[X_S]/m = \rho$$

v.a. X_S = numărul de servere ocupate din sistem, $X_S \in \{0,1,\dots,m\}$

$$X_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m-1 & m \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_{m-1} & \pi_m + \pi_{m+1} + \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}[X_S] = \sum_{n=0}^{m-1} n\pi_n + mP[X \geq m]$$

$$P[X \geq m] = \sum_{n=m}^{\infty} \pi_n = \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{1}{1-\rho}\pi_0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[X_S] = m\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- **rata de plecare a clienţilor din sistem:** $\lambda_d = \lambda$

- **numărul mediu de clienţi din sistem:**

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}[X]=\sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n=\left[\sum_{n=0}^{m-1} n\frac{m^n\rho^n}{n!}+\sum_{n=m}^{\infty} n\frac{m^m\rho^n}{m!}\right]\pi_0=m\rho+\frac{(m\rho)^m}{m!}\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)^2}\cdot\pi_0$$

- **durata medie petrecută de un client în sistem:**

$$\mathrm{M}[S]=\frac{1}{\lambda}\mathrm{M}[X]=\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}\cdot\frac{(m\rho)^m}{m!}\cdot\frac{\pi_0}{m(1-\rho)^2}$$

- **probabilitatea de aşteptare la coadă:** *formula C a lui Erlang*

$$P_Q=P[X\geq m]=\sum_{n=m}^{\infty}\pi_n=\frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{1}{1-\rho}\pi_0$$

X	0	1	2	…	$m-1$	m	$m+1$	…
X_Q	0	0	0	…	0	0	1	…
X_S	0	1	2	…	$m-1$	m	m	…

$$S = W + Z$$

- **numărul mediu de clienţi din firul de aşteptare:**

$$X_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ \pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_m & \pi_{m+1} & \pi_{m+2} & \dots & \pi_{m+n} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}[X_Q] = \mathrm{M}[X] - \mathrm{M}[X_S] = \frac{(m\rho)^m}{m!} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \pi_0 = \frac{\rho}{1-\rho} P_Q$$

- **durata medie de aşteptare:**

$$\mathrm{M}[W] = \frac{1}{\lambda} \mathrm{M}[X_Q] = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} P_Q = \frac{1}{m\mu - \lambda} P_Q$$

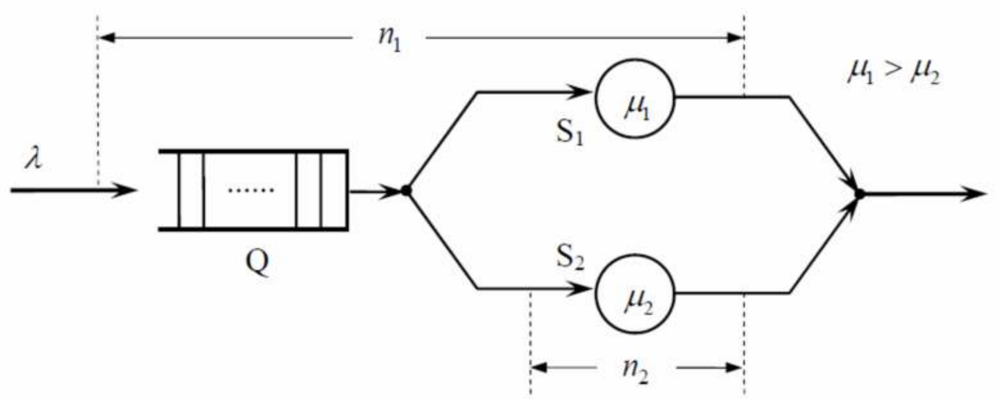
sau

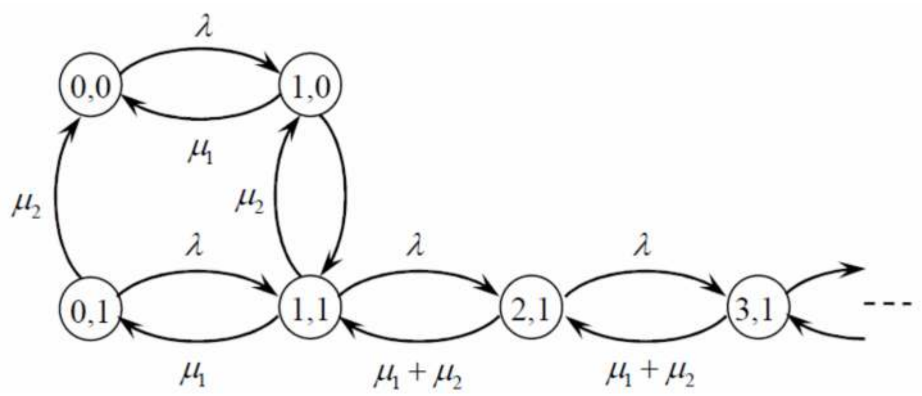
$$\mathrm{M}[W] = \mathrm{M}[S] - \mathrm{M}[Z] = \frac{1}{\mu} \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\pi_0}{m(1-\rho)^2} = \frac{1}{m\mu - \lambda} P_Q$$

- **distribuţia de probabilitate a duratei de aşteptare a unui client:**

$$P[W > t] = P_Q \mathrm{e}^{-(m\mu - \lambda)t}, \quad t \ge 0$$

Sistem de aşteptare M/M/ cu 2 servere eterogene





$$\lambda = 0{,}8\ \text{s}^{-1},\ \mu_1 = 2\ \text{s}^{-1},\ \mu_2 = 1\ \text{s}^{-1} \Rightarrow \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} = 0{,}2667 < 1$$

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda\pi(0,0) = \mu_1\pi(1,0) + \mu_2\pi(0,1), \\
(\lambda + \mu_1)\pi(1,0) = \mu_2\pi(1,1) + \lambda\pi(0,0), \\
(\lambda + \mu_2)\pi(0,1) = \mu_1\pi(1,1), \\
(\lambda + \mu_1 + \mu_2)\pi(1,1) = (\mu_1 + \mu_2)\pi(2,1) + \lambda\pi(0,1) + \lambda\pi(1,0), \\
(\lambda + \mu_1 + \mu_2)\pi(n,1) = (\mu_1 + \mu_2)\pi(n+1,1) + \lambda\pi(n-1,1), \ n > 1
\end{array}\right\} \Rightarrow
\left\{\begin{array}{l}
\pi(0,1) = \dfrac{\rho}{1+2\rho}\dfrac{\lambda}{\mu_2}\pi(0,0), \quad \pi(1,0) = \dfrac{1+\rho}{1+2\rho}\dfrac{\lambda}{\mu_1}\pi(0,0) \\
\pi(1,1) = \dfrac{\rho}{1+2\rho}\dfrac{\lambda(\lambda+\mu_2)}{\mu_1\mu_2}\pi(0,0) \\
\pi(n,1) = \dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\pi(n-1,1) = \rho\pi(n-1,1) = \rho^{n-1}\pi(1,1), \quad n > 1
\end{array}\right.$$

$$\pi(0,0) + \pi(0,1) + \pi(1,0) + \sum_{n=1}^{\infty}\pi(n,1) = 1 \ \Rightarrow \ \pi(0,0) = \left[1 + \frac{\lambda(\lambda+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(1-\rho)(1+2\rho)}\right]^{-1} = 0{,}6096,\ \pi(1,1) = 0{,}0763,\ \ldots$$

$$\mathrm{M}[X] = \pi(1,0) + \pi(0,1) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\pi(n,1) = 1 - \pi(0,0) + \frac{\pi(1,1)}{(1-\rho)^2} = 0{,}5323$$

4.4. Sisteme de aşteptare M/M/∞

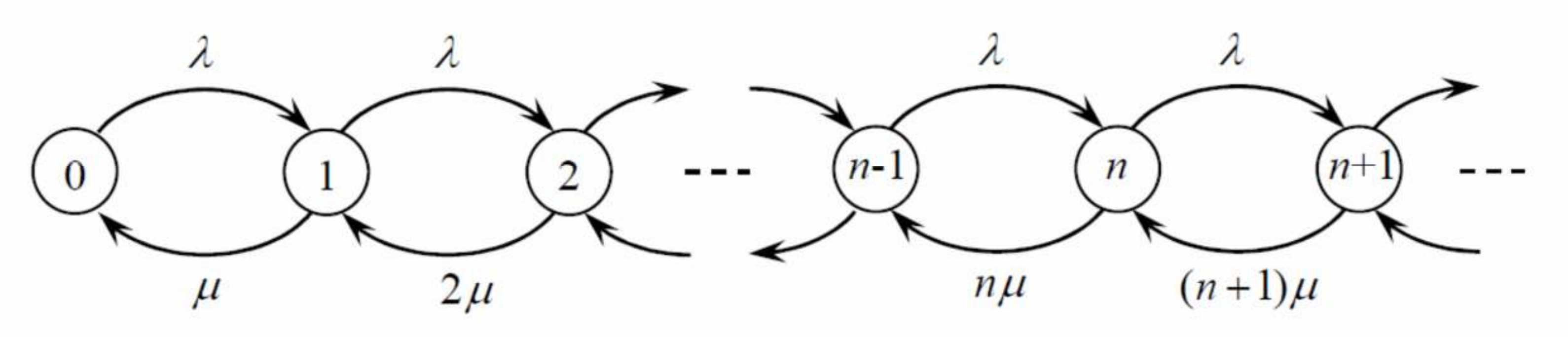
- sistemul de tip M/M/∞ este utilizat pentru a modela acele sisteme fizice în care clienţii nu aşteaptă niciodată, ca de exemplu:
  - sistemele de transmitere a mesajelor electronice
  - sistemele de fabricaţie în care există benzi transportoare în continuă mişcare
  - sistemele cu autoservire (*self service system*)
- fluxul de sosire a clienţilor în sistem este de tip Poisson de rată $\lambda > 0$:

$$P[T \leq t] = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[T] = \frac{1}{\lambda}$$

- duratele de servire a clienţilor sunt v.a.i. cu distribuţie exponenţială de rată $\mu > 0$:

$$P[Z \leq t] = 1 - \mathrm{e}^{-\mu t}, \quad t \geq 0, \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[Z] = \frac{1}{\mu}$$

lanţ *birth-death:*



$$\lambda_n = \lambda\,, \quad \mu_n = n\mu\,, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\rho \overset{not}{=} \frac{\lambda}{\mu}$$ **NU** reprezintă intensitatea traficului în sistem!

- **distribuţia staţionară a numărului de clienţi din sistem:**

$$\pi_n = P\left[X = n\right],\ n = 0,1,\ldots\,.$$

$$\sigma = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)\ldots(n\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = \mathrm{e}^{\rho}$$

$$\pi_0 = P\left[X = 0\right] = \sigma^{-1} = \mathrm{e}^{-\rho}$$

$$\pi_n = P\left[X = n\right] = \frac{\rho^n}{n!}\mathrm{e}^{-\rho}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

distribuţie Poisson de parametru ρ

Indicatori de performanţă (regim staționar)

- **gradul de utilizare a sistemului:**

$$\rho_s = 1 - \pi_0 = 1 - \mathrm{e}^{-\rho}$$

- **rata de plecare a clienţilor din sistem:**

$$\lambda_d = \lambda$$

- **numărul mediu de clienţi din sistem**

$$\mathrm{M}[X] = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- **durata medie petrecută de un client în sistem**

$$\mathrm{M}[S] = \frac{1}{\lambda}\mathrm{M}[X] = \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu} = \mathrm{M}[Z]$$

4.5. Sisteme de aşteptare M/M/1/K

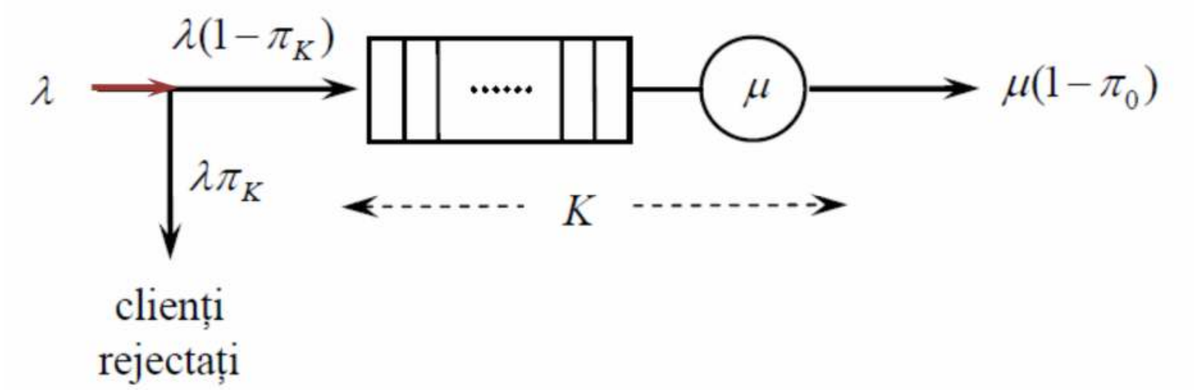
- fluxul de sosire a clienţilor în sistem este de tip Poisson, de rată $\lambda > 0$:

$$P[T \le t] = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \ge 0, \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[T] = \frac{1}{\lambda}$$

- un singur server: $m = 1$
- duratele de servire a clienţilor sunt v.a. i.i.d. cu distribuţie exponenţială de rată $\mu > 0$:

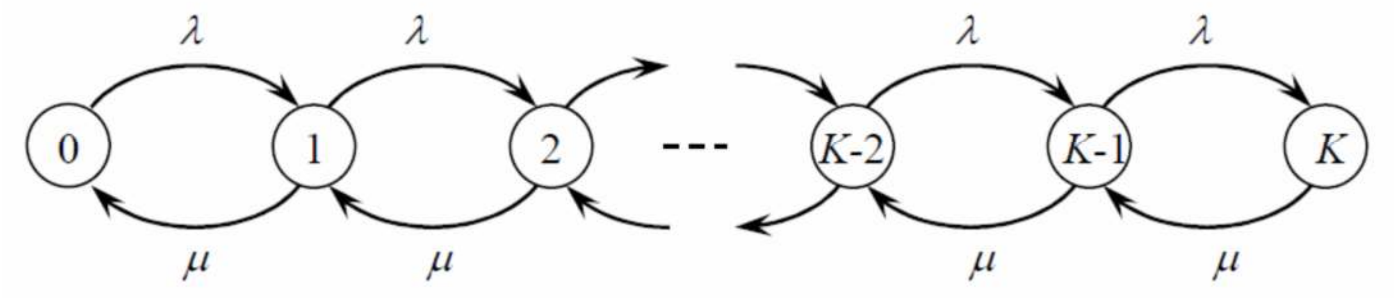
$$P[Z \le t] = 1 - \mathrm{e}^{-\mu t}, \quad t \ge 0, \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[Z] = \frac{1}{\mu}$$

- sistem de capacitate K



- Proesul Poisson de sosire a clienţilor este întrerupt dacă în sistem sunt K clienţi.
- Datorită faptului că un proces Poisson nu are memorie, structura markoviană a diagramei ratelor tranziţiilor de stare se păstrează.

lanţul *birth death:*



$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{pentru } n = 0,1,2,\ldots,K-1, \\ 0, & \text{pentru } n \geq K, \end{cases} \qquad \mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{pentru } n = 1,2,\ldots,K, \\ 0, & \text{pentru } n > K. \end{cases} \qquad \rho \overset{not}{=} \frac{\lambda}{\mu} > 0$$

- distribuţia staţionară a numărului de clienţi din sistem: $\pi_n = P[X = n],\ n = 0,1,\ldots,K$

$$\sigma = 1 + \sum_{n=1}^{K} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \sum_{n=0}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \sum_{n=0}^{K} \rho^n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}, & \text{dacă } \rho \neq 1 \\ K+1, & \text{dacă } \rho = 1 \end{cases}$$

$$\pi_0 = P[X = 0] = \sigma^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \text{dacă } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{K+1}, & \text{dacă } \rho = 1 \end{cases}$$

$$\pi_n = P[X = n] = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n} \pi_0 = \rho^n \pi_0, \quad n = 1,2,\ldots,K$$

Indicatori de performanţă – cazul $\rho \neq 1$

- gradul de utilizare a serverului

$$\rho_s = 1 - \pi_0 = 1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = \rho \frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

- rata de plecare a clienţilor din sistem

$$\lambda_d = \mu\left(1-\pi_0\right) = \mu\rho \frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}} = \lambda \frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}, \quad \lambda_d < \lambda$$

- probabilitatea de blocare (*blocking probability*) = probabilitatea ca un client care soseşte să găsească sistemul ocupat şi să fie rejectat

$$P_B = \pi_K = \left(1-\rho\right) \frac{\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

- rata efectivă de intrare a clienţilor în sistem: $\lambda_e = \lambda(1-P_B) = \mu(1-\pi_0) = \lambda_d$
- numărul mediu de clienţi din sistem

$$\mathrm{M}[X] = \sum_{n=0}^{K} n\pi_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \sum_{n=1}^{K} n\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho^{K+1}}\left[\frac{1-\rho^K}{1-\rho} - K\rho^K\right]$$

- numărul mediu de clienţi din firul de aşteptare

$$\mathrm{M}[X_Q] = \mathrm{M}\left[X\right] - \rho_s = \frac{\rho^2}{1-\rho^{K+1}}\left[\frac{1-\rho^K}{1-\rho} - K\rho^{K-1}\right]$$

- durata medie petrecută de un client în sistem

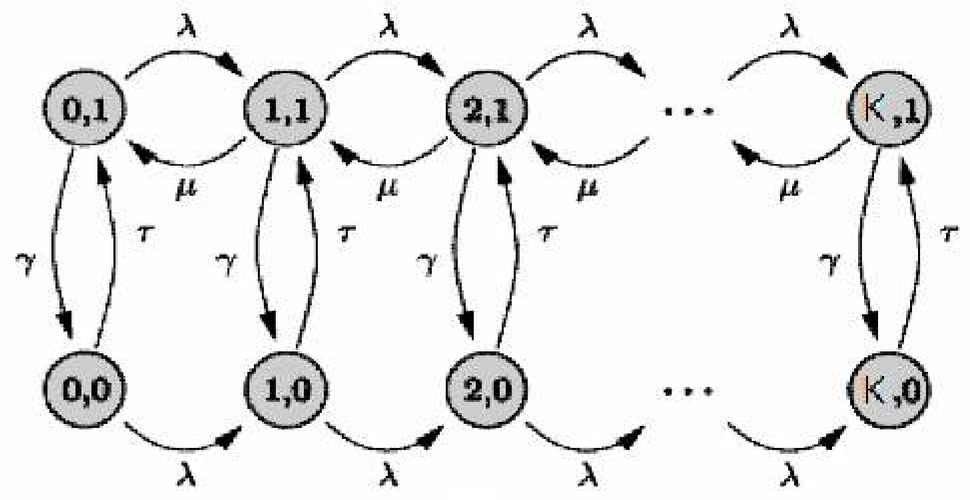
$$\mathrm{M}[S]=\frac{\mathrm{M}[X]}{\lambda_e}=\frac{1}{\lambda(1-P_B)}\mathrm{M}[X]=\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{1-\rho}-\frac{K\rho^K}{1-\rho^K}\right]$$

- durata medie de aşteptare

$$\mathrm{M}[W]=\mathrm{M}[S]-\frac{1}{\mu}=\frac{M[X_Q]}{\lambda_e}$$

Sistem de aşteptare M/M/1/K cu posibilităţi de defectare

λ - arrival rate, μ - service rate,
γ - failure rate, τ - repair rate



Temă: Să se determine indicatorii de performanţă în cazul $K = 2$.

$\mathcal{S} = \{(0,1), (0,0), (1,1), (1,0), (2,1), (2,0)\}$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -(\gamma+\lambda) & \gamma & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \tau & -(\tau+\lambda) & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & 0 & -(\mu+\lambda) & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau & -(\tau+\lambda) & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & 0 & -(\mu+\lambda) & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & -\tau \end{bmatrix}$$

4.6. Sisteme de aşteptare M/M/m/m

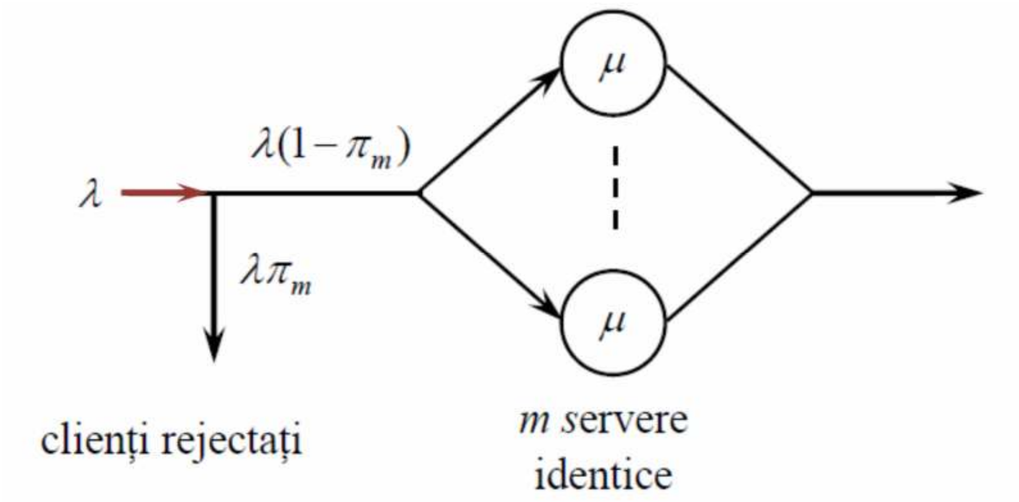
- fluxul de sosire a clienţilor în sistem este de tip Poisson, de rată $\lambda > 0$:

$$P[T \le t] = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \ge 0, \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[T] = \frac{1}{\lambda}$$

- un număr de m servere identice
- duratele de servire a clienţilor sunt v.a. i.i.d. cu distribuţie exponenţială de rată $\mu > 0$:

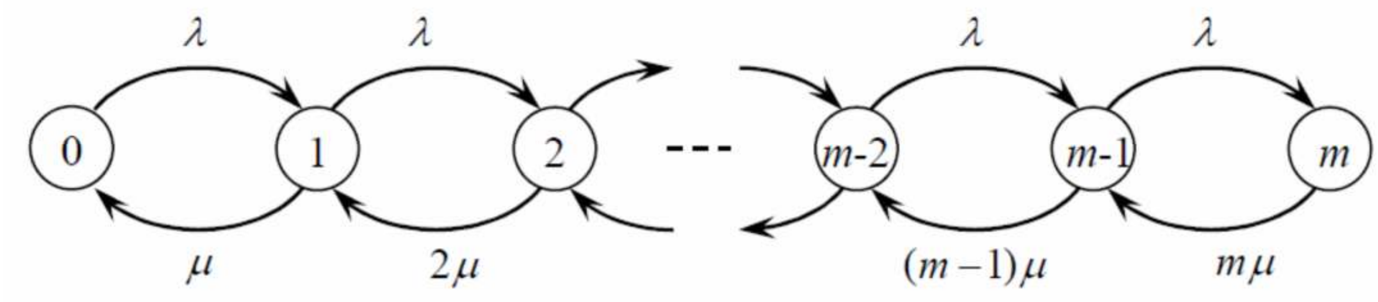
$$P[Z \le t] = 1 - \mathrm{e}^{-\mu t}, \quad t \ge 0, \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[Z] = \frac{1}{\mu}$$

- sistem de capacitate $K = m$
- nu există fir de aşteptare



- Procesul Poisson de sosire a clienţilor este întrerupt dacă toate serverele sunt ocupate.

lanţul *birth death:*



$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{pentru } \; n = 0,1,2,\ldots,m-1, \\ 0, & \text{pentru } \; n \geq m, \end{cases} \qquad \mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{pentru } \; n = 1,2,\ldots,m, \\ 0, & \text{pentru } \; n > m. \end{cases} \qquad \rho \overset{not}{=} \frac{\lambda}{\mu} > 0$$

- distribuţia staţionară a numărului de clienţi din sistem: $\pi_n = P\left[X = n\right],\ n = 0,1,\ldots,m$

$$\sigma = 1 + \sum_{n=1}^{K} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^n}{n!}$$

$$\pi_0 = P[X = 0] = \sigma^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$$

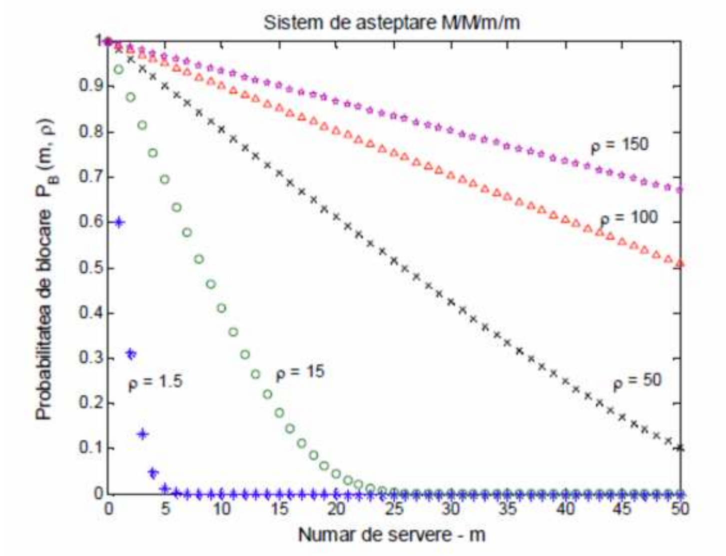
$$\pi_n = P[X = n] = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \ldots \mu_n} \pi_0 = \frac{\rho^n}{n!}\left[\sum_{n=0}^{m} \frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}, \quad n = 1,2,\ldots,m$$

Indicatori de performanţă (regim staționar)

- probabilitatea de blocare: ***formula B a lui Erlang***

$$P_B = P_B(m,\rho) = \pi_m = \frac{\rho^m}{m!}\left[\sum_{n=0}^{m}\frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$P_B(m,\rho) = \frac{\dfrac{\rho^m}{m!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^m}{m!}} = \frac{\dfrac{\rho P_B(m-1,\rho)}{m}}{1+\dfrac{\rho P_B(m-1,\rho)}{m}} = \frac{\rho P_B(m-1,\rho)}{m+\rho P_B(m-1,\rho)}$$



4.7. Sisteme de aşteptare M/M/1/ /N

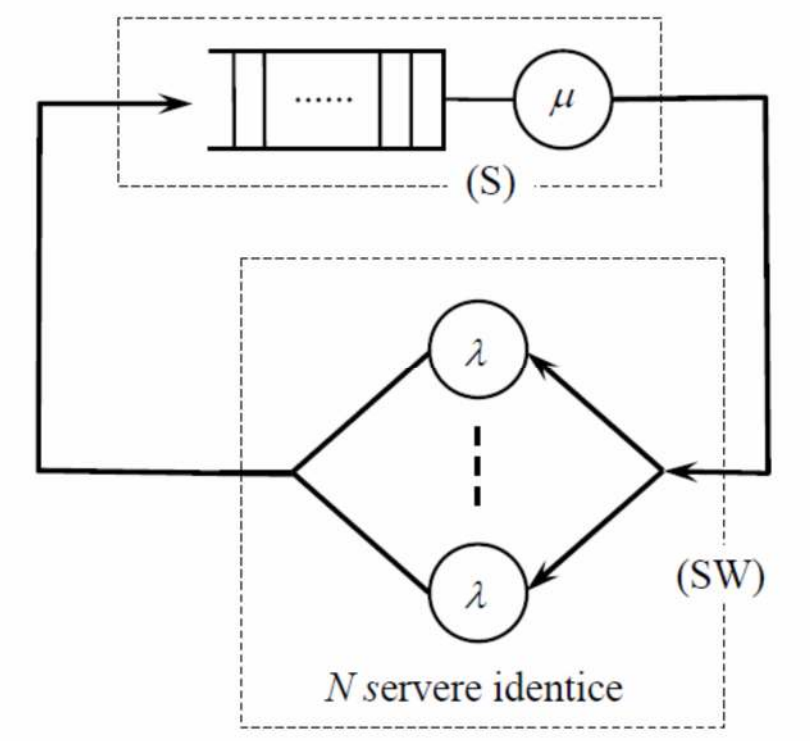
- un server, $m = 1$
- capacitate infinită (orice client doreşte să intre în sistem este admis, poate intra)
- duratele de servire a clienţilor sunt v.a. i.i.d. cu distribuţie exponenţială de rată $\mu > 0$:

$$P[Z \le t] = 1 - \mathrm{e}^{-\mu t}, \quad t \ge 0, \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[Z] = \frac{1}{\mu}$$

- populaţie finită de N clienţi

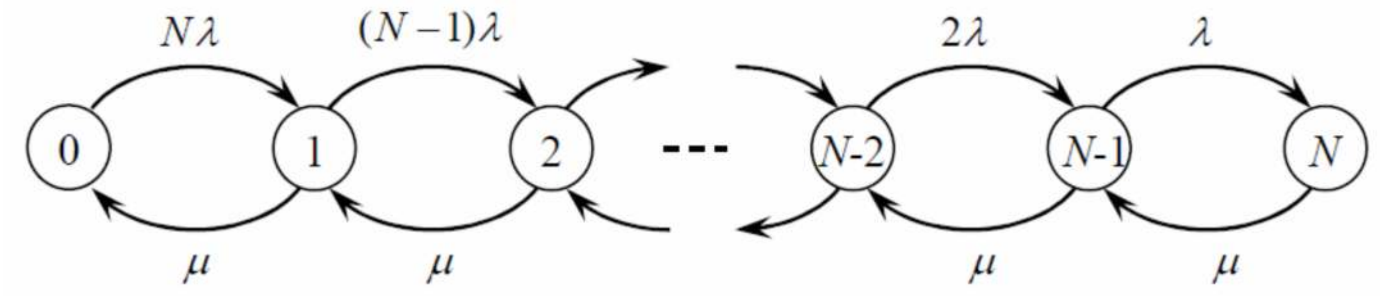
- fiecare client, după ce a fost servit, reintră în sistem după expirarea unei durate de intîrziere (în subsistemul SW) cu distribuție exponențială de rată $\lambda > 0$:

$$P[T \le t] = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \ge 0, \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[T] = \frac{1}{\lambda}$$



Fluxul de sosire a clienţilor în sistem NU mai este de tip Poisson.

lanţul *birth death:*



$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\lambda, & \text{pentru } n = 0,1,2,\ldots,N-1, \\ 0, & \text{pentru } n \geq N, \end{cases} \qquad \mu_n = \begin{cases} \mu, & \text{pentru } n = 1,2,\ldots,N, \\ 0, & \text{pentru } n > N. \end{cases} \qquad \rho \overset{not}{=} \frac{\lambda}{\mu} > 0$$

- distribuţia staţionară a numărului de clienţi din sistem: $\pi_n = P[X = n],\ n = 0,1,\ldots,N$.

$$\sigma = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{[N\lambda][(N-1)\lambda]\ldots[(N-n+1)\lambda]}{\mu^n} = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\rho^n$$

$$\pi_0 = P[X = 0] = \sigma^{-1}$$

$$\pi_n = P[X = n] = \frac{[N\lambda][(N-1)\lambda]\ldots[(N-n+1)\lambda]}{\mu^n}\pi_0 = \frac{N!}{(N-n)!}\rho^n\sigma^{-1}, \quad n = 1,2,\ldots,N$$

Indicatori de performanţă (regim staționar)

- gradul de utilizare a serverului

$$\rho_s = 1 - \pi_0$$

- rata efectivă de sosire în sistem:

$$\lambda_e = \mu(1 - \pi_0)$$

- rata de plecare a clienţilor din sistem: $\lambda_d = \lambda_e$
- durata medie de răspuns (*mean response time*) a sistemului M/M/1/ /N

  R = intervalul de timp dintre momentul sosirii unui client în firul de aşteptare şi momentul în care servirea clientului este terminată

  legea lui Little pentru sistemul (S):

$$\mathrm{M}[X] = \mu(1 - \pi_0)\mathrm{M}[R]$$

  legea lui Little pentru sistemul (SW):

$$\mathrm{M}[N - X] = \mu(1 - \pi_0)\frac{1}{\lambda}$$

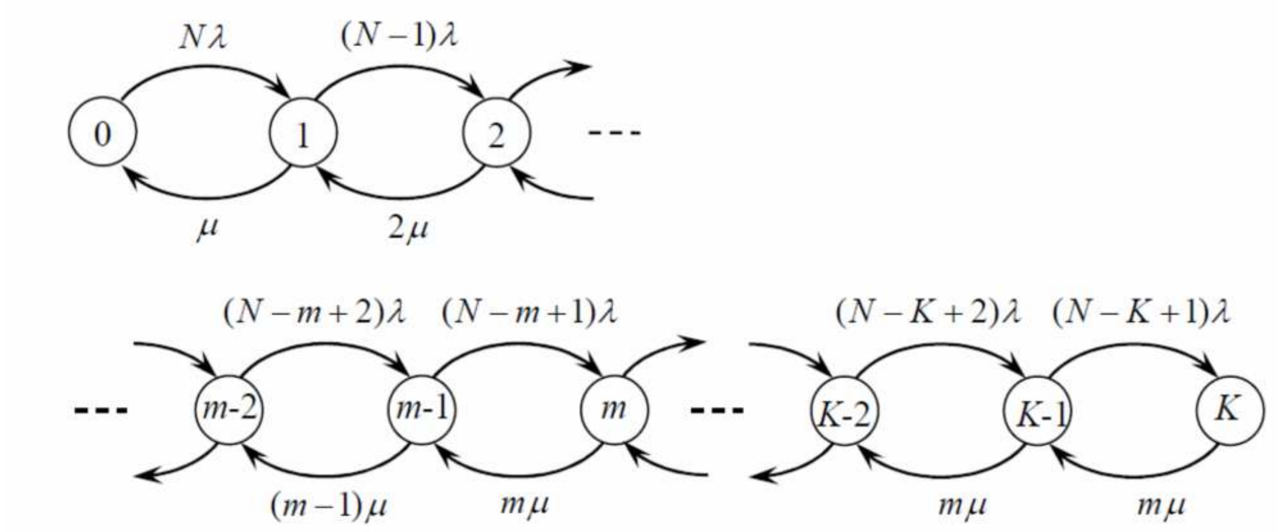
$$N = \mathrm{M}[X] + \mathrm{M}[N - X] = \mu(1 - \pi_0)\frac{1}{\lambda} + \mu(1 - \pi_0)\mathrm{M}[R] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}[R] = \frac{N}{\mu(1 - \pi_0)} - \frac{1}{\lambda}$$

4.8. Sisteme de aşteptare M/M/m/K/N

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\lambda, & n = 0,1,\ldots,K-1, \\ 0, & n \geq K, \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n = 1,2,\ldots,m, \\ m\mu, & n = m+1,\ldots,K, \\ 0, & n > K. \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$



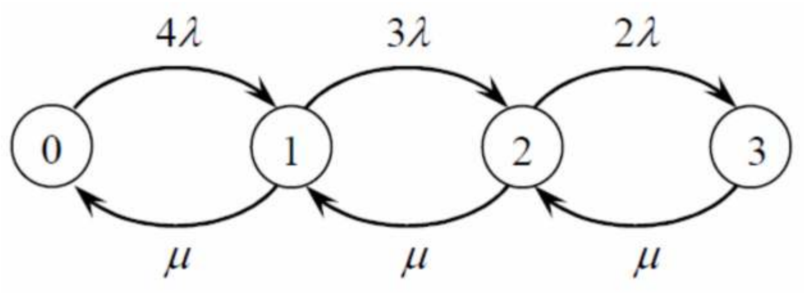
- distribuţia staţionară a numărului de clienţi din sistem: $\pi_n = P[X = n],\ n = 0,1,\ldots,K$.

$$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 C_N^n \rho^n, & \text{pentru } n = 1,2,\ldots,m-1, \\ \pi_0 C_N^n \dfrac{n!}{m!} m^{m-n} \rho^n, & \text{pentru } n = m, m+1,\ldots,K, \end{cases}$$

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} C_N^n \rho^n + C_N^{m-1} \rho^{m-1} \sum_{n=m}^{K} \frac{(N-m+1)!}{(N-n)!} \left(\frac{\rho}{m} \right)^{n-m+1} \right]^{-1}$$

Exemplu.

Sistem de tip M/M/1/3/4



$$\begin{cases} 4\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\ (3\lambda+\mu)\pi_1 = 4\lambda\pi_0 + \mu\pi_2 \\ 2\lambda\pi_2 = \mu\pi_3 \end{cases} \overset{\rho=\lambda/\mu}{\Rightarrow} \begin{cases} \pi_1 = 4\rho\pi_0 \\ \pi_2 = 3\rho\pi_1 = 12\rho^2\pi_0 \\ \pi_3 = 2\rho\pi_2 = 24\rho^3\pi_0 \end{cases}$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \left(1 + 4\rho + 12\rho^2 + 24\rho^3\right)^{-1}$$

pentru $\lambda = 2$ [s^{-1}] şi $\mu = 1$ [s^{-1}]:

$\rho = 2$, $\pi_0 = 0,004$, $\pi_1 = 0,0321$, $\pi_2 = 0,1928$, $\pi_3 = 0,7711$

$\rho_s = 1 - \pi_0 = 0,996$, $\lambda_d = \mu(1-\pi_0) = 0,996$ [s^{-1}],

$\mathrm{M}[X_Q] = 1\cdot\pi_2 + 2\cdot\pi_3 = 1,7349$, $\mathrm{M}[X] = \mathrm{M}[X_Q] + (1-\pi_0) = 2,7309$

Procesul de sosire a clienţilor NU mai este un proces de tip Poisson!

Un client care doreşte să intre în firul de aşteptare „vede” sistemul în starea j cu probabilitatea

$$\pi_j^* = \frac{\lambda_j^* \pi_j}{\sum_{i=0}^{3} \lambda_i^* \pi_i} = \frac{\left(\lambda_j^* / \mu\right) \pi_j}{\sum_{i=0}^{3} \left(\lambda_i^* / \mu\right) \pi_i}, \quad j = 0,1,2,3.$$

unde λ_j^* este rata cu care clientul încearcă să intre în sistem, ca în cazul sistemului M/M/1/ /N,

$$\lambda_0^* = 4\lambda, \ \lambda_1^* = 3\lambda, \ \lambda_2^* = 2\lambda, \ \lambda_3^* = \lambda.$$

Se obţin valorile

$$\pi_0^* = \frac{\lambda_0^* \pi_0}{\sum_{i=0}^{3} \lambda_i^* \pi_i} = \frac{4\rho\pi_0}{4\rho\pi_0 + 3\rho\pi_1 + 2\rho\pi_2 + \rho\pi_3} = 0,0127$$

$$\pi_1^* = \frac{\lambda_1^* \pi_1}{\sum_{i=0}^{3} \lambda_i^* \pi_i} = \frac{3\rho\pi_1}{4\rho\pi_0 + 3\rho\pi_1 + 2\rho\pi_2 + \rho\pi_3} = 0,0759$$

$$\pi_2^* = \frac{\lambda_2^* \pi_2}{\sum_{i=0}^{3} \lambda_i^* \pi_i} = \frac{2\rho\pi_2}{4\rho\pi_0 + 3\rho\pi_1 + 2\rho\pi_2 + \rho\pi_3} = 0,3038$$

$$\pi_3^* = \frac{\lambda_3^* \pi_3}{\sum_{i=0}^{3} \lambda_i^* \pi_i} = \frac{\rho\pi_3}{4\rho\pi_0 + 3\rho\pi_1 + 2\rho\pi_2 + \rho\pi_3} = 0,6076$$

Probabilitatea de blocare a unui client este π_3^*.