SEMINAR 1, SERIA 13
COMPLETARE

Exercițiul 1 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n+2)}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha<1$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^n+\ldots+n^n}{n^{n+1}}$

Exercițiul 2 Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ din $\mathbb{Z}$ este convergent dacă și numai dacă $\exists n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $x_n = x_{n_0}$ $\forall n\geq n_0$.

Exercițiul 3 Se consideră șirul $x_n = \left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right\}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că șirul este mărginit, dar nu este și convergent!

Exercițiul 4 Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin relația de recurență $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $x_1>0$. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

Exercițiul 5 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de elemente din $(0,1)$ astfel încât $x_n(1-x_{n+1})>\frac{1}{4}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Arătați că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și să se calculeze limita acestuia.

Exercițiul 6 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+$ care verifică inegalitatea $x_{n+1} \le x_n^2 - x_n^3$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent și să se calculeze limita acestuia.

Exercițiul 7 Se consideră $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir mărginit din $\mathbb{R}$ care verifică inegalitatea $x_{n+1} \ge x_n - \frac{1}{2^n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Exercițiul 8 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = l \in \mathbb{R}_+^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.