SEMINAR 3

SERII DE NUMERE REALE

EXERCIȚIUL 1 Să se studieze natura următoarelor serii de numere reale:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{7^n+3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\right]^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, a>0$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{\ln n}, a>0$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdot \ldots \cdot (a+n)}, a>0$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sin \frac{\pi}{n}, \alpha \in \mathbb{R}$

g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-n+7}$

REZOLVARE a) $x_n = \frac{1}{7^n+3^n}, n \in \mathbb{N}$

$x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{7^{n+1}+3^{n+1}}}{\frac{1}{7^n+3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n+3^n}{7^{n+1}+3^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{7^n}\left(1+\left(\frac{3}{7}\right)^n\right)}{7^{\cancel{n+1}}\left(1+\left(\frac{3}{7}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1}{7}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă

b) $x_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^{\alpha}, n \in \mathbb{N}^*$

$x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]^{\alpha} \cdot \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^{\alpha} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\alpha} = 1.$$

Nu putem să aplicăm criteriul raportului

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{\alpha} - 1\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{\alpha} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{\alpha}-1}{\frac{1}{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{2n+1}}_{\downarrow \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{\alpha}-1}{\frac{1}{2n+1}}}_{\downarrow \alpha} = \frac{\alpha}{2}$$

Cazul 1 $\alpha < 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} < 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este divergentă

Cazul 2 $\alpha > 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} > 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este convergentă

Cazul 3 $\alpha = 2$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2$$

Sunt adevărate inegalitățile

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{4n} < x_n < \frac{1}{2n}$$

$x_n > \frac{1}{4n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$ serie divergentă (2)

Din (1) și (2) rezultă că seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este divergentă

c) $x_n = \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a^{n+1}}^{a} \cdot \cancel{(n+1)!}^{n+1}}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{a^n} \cdot \cancel{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}$$

Cazul 1 $a < e \Rightarrow \frac{a}{e} < 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este convergentă

Cazul 2 $a > e \Rightarrow \frac{a}{e} > 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este divergentă

Cazul 3 $a = e$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Știm că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \Rightarrow \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} x_n \neq 0 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este divergentă

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{\ln n}$, $a > 0$

$x_n = a^{\ln n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\ln(n+1)}}{a^{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\ln(n+1) - \ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{\ln \frac{n+1}{n}} = a^0 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1}{\ln\frac{n}{n+1}}\cdot\ln\frac{n}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n}{n+1}\cdot\frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1}{\ln\frac{n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}}-1}{\ln\frac{n}{n+1}}=\ln\frac{1}{e}\cdot\ln a=-\ln a$$

Cazul 1 $a<\frac{1}{e} \Rightarrow -\ln a>1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este convergentă

Cazul 2 $a>\frac{1}{e} \Rightarrow -\ln a<1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este divergentă

Cazul 3 $a=\frac{1}{e}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^1}$$ seria divergentă

e) $x_n=\frac{n!}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$, $a>0$

$x_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n+1)!}^{\,n+1}}{\cancel{(a+1)\ldots(a+n+1)}_{\,a+n+1}}\cdot\frac{\cancel{(a+1)\ldots(a+n)}}{\cancel{n!}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a+n+1}=1$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{a}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+1}=a$$

Cazul 1 $a<1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este divergentă

Cazul 2 $a>1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este convergentă

Cazul 3 $a=1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}$$

$\sum_{n=1} \frac{\dots}{(n+1)!} = \sum_{n=1} \frac{1}{n+1} \overset{m=n+1}{=} \sum_{m=2} \frac{1}{m} = \sum_{m=2} \frac{1}{m^1}$ serie divergentă

f) $x_n = \frac{1}{n^\alpha} \sin\frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vom aplica criteriul de comparație cu limită.

Știm că ~~...~~ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$.

Alegem șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \Leftrightarrow \frac{\pi}{n} x_n = y_n \sin\frac{\pi}{n} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \sin\frac{\pi}{n} = y_n \cdot \sin\frac{\pi}{n} \Leftrightarrow y_n = \frac{\pi}{n^{\alpha+1}}$

Fie $y_n = \frac{\pi}{n^{\alpha+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Din alegerea lui $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ obținem că

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1 \in (0, +\infty) \Rightarrow$ seriile $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ și $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ au aceeași natură.

$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{n^{\alpha+1}}$ → serie convergentă $\Leftrightarrow \alpha+1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$

→ serie divergentă $\Leftrightarrow \alpha+1 \le 1 \Leftrightarrow \alpha \le 0$

g) $x_n = \frac{1}{4n^2 - n + 7}$, $n \in \mathbb{N}$

$x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Știm că $n^2 - n + 7 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 4n^2 - n + 7 > 3n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{1}{4n^2 - n + 7} < \frac{1}{3n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Alegem șirul $y_n = \frac{1}{3n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Sunt adevărate inegalitățile

$0 < x_n < y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ serie convergentă (2)

Din (1) și (2) deducem că seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este convergentă

EXERCIȚIUL 2 Să se studieze ~~con~~ natura seriei de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

REZOLVARE $x_n = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (nu are neapărat semn constant)

Studiem absolut convergența seriei.

Fie $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos(nx)|}{n^2}$

$\frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ serie convergentă (2)

Din (1) și (2) obținem că seria $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ este convergentă

$\Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este absolut convergentă

$\Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este convergentă.

EXERCIȚIUL 3 Să se studieze convergența seriei de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\frac{1}{n} \cos n}{n}$.

INDICAȚIE Se utilizează criteriul lui DIRICHLET pentru serii de numere reale.

EXERCIȚIUL 4 Se consideră șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ din $\mathbb{R}_+^*$. Să se arate că seria de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ este divergentă.

REZOLVARE $x_n = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}, n\in\mathbb{N}^*$

$x_n > 0 \ \forall n \in\mathbb{N}^*$

$$x_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} > \frac{a_1}{n} \ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Alegem $y_n = \frac{a_1}{n}, n\in\mathbb{N}^*$

$x_n > y_n \ \forall n\in\mathbb{N}^*$ (1)

$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1}{n} = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^1}$ serie divergentă (2)

Din (1) și (2) avem că $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ este serie divergent