SEMINAR 11

Funcții integrabile RIEMANN

EXERCIȚIUL 1 Studiați integrabilitatea Riemann a următoarelor funcții:

a) $f:[0,\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}, & x\in(0,\frac{\pi}{4})\\ 0, & x=0\\ 1, & x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$

b) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\in(0,1)\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}$

c) $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,2]\setminus\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*\}\\ 0, & \exists n\in\mathbb{N}^* \text{ a.î. } x=\frac{1}{n}\end{cases}$

REZOLVARE a) Studiem continuitatea funcției.

f funcție continuă pe $(0,\frac{\pi}{4})$.

$\left.\begin{aligned}&\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}=-1\\ &f(0)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f$ nu este continuă în 0

$\left.\begin{aligned}&\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} f(x)=\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}=0\\ &f(\tfrac{\pi}{4})=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow f$ nu este continuă în $\frac{\pi}{4}$

Observăm că f este continuă pe $(0, \frac{\pi}{4})$.

$D_f = \{0, \frac{\pi}{4}\}$

D_f mulțime finită $\Rightarrow D_f$ mulțime neglijabilă Lebesgue (1)

Studiem mărginirea funcției f.

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin x - \cos x}{1+\sin 2x}\right| = \frac{|\sin x - \cos x|}{1+\sin 2x} \leq |\sin x - \cos x|$$

$\leq |\sin x| + |\cos x| \leq 2 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{4})$

$f(0) = 0$

$f(\frac{\pi}{4}) = 1$

Așadar, f este funcție mărginită pe $[0, \frac{\pi}{4}]$ (2)

Din (1) și (2), aplicând criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, rezultă că $f \in R([0, \frac{\pi}{4}])$.

b) f este continuă pe $(0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x-1} = -1 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ nu este continuă în } x_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ nu este continuă în } x_1 = 1.$$

$D_f = \{0, 1\}$ mulțime finită $\Rightarrow D_f$ mulțime neglijabilă Lebesgue

Studiem mărginirea funcției

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty \Rightarrow f$ este nemărginită inferior (2)

f este funcție nemărginită inferior pe $[0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]$ (se aplică criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue)

c) Se observă că $0 \le f(x) \le 1$ $\forall x \in [0,2] \Rightarrow f$ este funcție mărginită pe $[0,2]$ (3)

Studiem continuitatea funcției.

f funcție continuă pe $[0,2] \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{1}{n}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{n}} x^2 = \frac{1}{n^2} \\ f(\frac{1}{n}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ nu este continuă în } \frac{1}{n}.$$

$D_f = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ mulțime numărabilă

D_f mulțime neglijabilă Lebesgue (4)

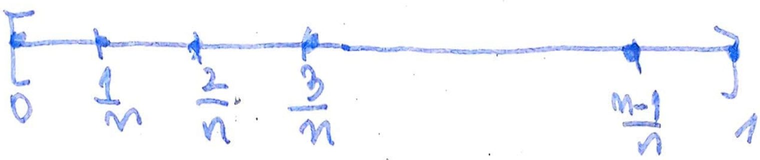
Din (3) și (4), aplicând criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, rezultă că $f \in R([0,2])$.

<u>EXERCIȚIUL 2</u> Să se arate că funcția $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]$.

<u>Rezolvare</u> Se observă că f este funcție mărginită pe $[0,1]$.

Pentru a justifica că $f \notin R([0,1])$ vom utiliza criteriul de integrabilitate al lui DARBOUX.
Construim un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ale intervalului $[0,1]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \left(S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)\right) \neq 0$.



$\Delta_n : 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{3}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$

$\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$

Fie: $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$m_i = \inf\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) = -1, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$M_i = \sup\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) = 1 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

$S_{\Delta_n}(f) = M_0\left(\frac{1}{n} - 0\right) + M_1\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right) + \dots + M_{n-1}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) =$

$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1. \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$s_{\Delta_n}(f) = m_0\left(\frac{1}{n} - 0\right) + m_1\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right) + \dots + m_{n-1}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$

$= -\frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \dots - \frac{1}{n} = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f) = 1 - (-1) = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)\right) = 2 \neq 0 \Rightarrow f \notin R([0,1])$

EXERCIȚIUL 3 Fie $f:[0,\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}, & x\in(0,\frac{\pi}{4})\\ 0, & x=0\\ 1, & x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$.

REZOLVARE Știm din exercițiul 1 că $f\in\mathcal{R}([0,\frac{\pi}{4}])$.

Fie $g:[0,\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}$ $\forall x\in[0,\frac{\pi}{4}]$

g funcție continuă pe $[0,\frac{\pi}{4}]\Rightarrow g\in\mathcal{R}([0,\frac{\pi}{4}])$.

$A=\{x\in[0,\frac{\pi}{4}]\mid f(x)\neq g(x)\}=\{0,\frac{\pi}{4}\}$ mulțime finită

Din toate afirmațiile precedente deducem că

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$$

$t=\sin x+\cos x$

$dt=-(\sin x-\cos x)\,dx\Rightarrow -dt=(\sin x-\cos x)\,dx$

$x=0\Rightarrow t=1$

$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=\int_1^{\sqrt{2}}-\frac{dt}{t^2}\,\cancel{dt}=-\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2}=+\frac{1}{t}\Big|_1^{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-1=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

EXERCIȚIUL 4 Fie $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\int_1^{x^2-2x}\sqrt{1+t^3}\,dt\ \forall x\in[1,+\infty)$. Să se calculeze derivata funcției f.

REZOLVARE Fie $\alpha,\beta:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definite prin $\alpha(x)=x^2-2x\ \forall x\in[1,\infty)$ și $\beta(x)=1\ \forall x\in[1,+\infty)$.

Alegem $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $g(t)=\sqrt{1+t^3}\ \forall t\in\mathbb{R}$.

$$f(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}g(t)\,dt\ \forall x\in[1,+\infty).$$

g funcție continuă pe $\mathbb{R}$

α,β funcții derivabile pe $[1,+\infty)$ $\Rightarrow$ f este derivabilă pe $[1,\infty)$ și $f'(x)=g(\beta(x))\cdot\beta'(x)-g(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$ ~~$\forall x\in[1,\infty)$~~

$$f'(x)=\sqrt{1+(x^2-2x)^3}\cdot(x^2-2x)'-\sqrt{1+1^3}\cdot 1'=$$

$$=\sqrt{1+(x^2-2x)^3}\,(2x-2)\ \forall x\in[1,+\infty).$$

EXERCIȚIUL 5 Fie $f:[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=\int_1^{\operatorname{tg}x}e^{t^2}\,dt$. Să se calculeze derivata funcției f și să se studieze monotonia funcției.

EXERCIȚIUL 6 Să se calculeze următoarele limite de funcții:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\int_x^{2x}\frac{\operatorname{tg}t}{t}\,dt$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^{2x} \frac{tg\, t}{t^2}\, dt$.

REZOLVARE a) Pentru calculul limitei de funcții de la punctul (a) folosim corolarul teoremei de medie pentru funcțiile integrabile Riemann.

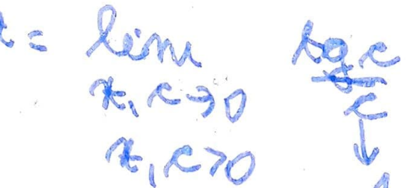
Fie $f:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{tg\, t}{t}$ $\forall t\in(0,\frac{\pi}{2})$

f funcție continuă pe $(0,\frac{\pi}{2})$.

Fie $x\in(0,\frac{\pi}{4})$.

Există $c\in(x,2x)$ astfel încât $\int_x^{2x} f(t)\,dt = f(c)(2x-x)$

$\Rightarrow \int_x^{2x} f(t)\,dt = \frac{tg\, c}{c}\cdot x$.



$\left.\begin{matrix} x\to 0\\ x>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} c\to 0\\ c>0.\end{matrix}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^{2x} f(t)\,dt = \lim_{\substack{x,c\to 0\\ x,c>0}} \underbrace{\frac{tg\, c}{c}}_{1}\cdot \underbrace{x}_{0} = 1\cdot 0 = 0.$$

b) Pentru a calcula limita respectivă vom utiliza teorema de medie pentru funcții integrabile Riemann.

$$\frac{tg\, t}{t^2} = \frac{tg\, t}{t}\cdot\frac{1}{t}$$

Fie $f, g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definite prin $f(t) = \frac{tg\, t}{t}$ $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $g(t) = \frac{1}{t}$ $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

f, g funcții continue pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$g(t) \geq 0$ $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

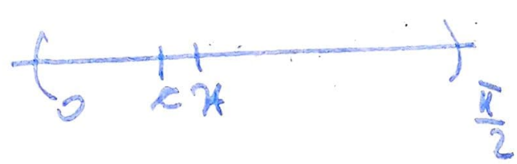
Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Există $c \in (x, 2x)$ astfel încât $\int_x^{2x} f(t)\, g(t)\, dt =$

$= f(c) \int_x^{2x} g(t)\, dt.$

$$\int_x^{2x} f(t) g(t)\, dt = \frac{tg\, c}{c} \cdot \int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt = \frac{tg\, c}{c} \cdot \ln|t| \Big|_x^{2x} =$$

$$= \frac{tg\, c}{c} \cdot (\ln(2x) - \ln x) = \frac{tg\, c}{c} \cdot \ln 2$$



$\begin{matrix} x \to 0 \\ x > 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c \to 0 \\ c > 0 \end{matrix}$

$$\int_x^{2x} \frac{tg\, t}{t^2}\, dt = \frac{tg\, c}{c} \cdot \ln 2 \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{tg\, t}{t^2}\, dt =$$

$$= \lim_{\substack{c, x \to 0 \\ c, x > 0}} \underbrace{\frac{tg\, c}{c}}_{1} \cdot \ln 2 = 1 \cdot \ln 2 = \ln 2.$$

EXERCIȚIUL 7 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.

REZOLVARE a) Alegem șirul de funcții $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\ln(1+x^n)$ $\forall x\in[0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

f_n funcție continuă pe $[0,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow f_n\in\mathcal{R}[0,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ (1)

Studiem convergența simplă a șirului de funcții.

Fie $x\in[0,1]$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\ln(1+x^n)=\begin{cases}\ln 1, & x\in[0,1)\\ \ln 2, & x=1\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ \ln 2, & x=1\end{cases}$$

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ \ln 2, & x=1.\end{cases}$ $\forall x\in[0,1]$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$ (2)

f funcție crescătoare pe $[0,1] \Rightarrow f\in\mathcal{R}[0,1]$ (3)

Se studiază mărginirea uniformă a șirului de funcții.

$x \in [0,1] \Rightarrow x^n \in [0,1] \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 1+x^n \in [1,2] \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(1+x^n) \in [0, \ln 2] \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 \le \ln(1+x^n) \le \ln 2$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Am demonstrat că $0 \le f_n(x) \le \ln 2 \ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow |f_n(x)| \le \ln 2 \ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$ (4)

Din (1), (2), (3), (4), aplicând teorema convergenței mărginite pentru integrala Riemann, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx =$

$= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

b) Alegem șirul de funcții $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$,

$f_n(x) = (1-x^2)^n \ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

f_n funcție continuă pe $[0,1] \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n \in \mathcal{R}([0,1])$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ (5)

Fie $x \in [0,1]$.

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (1-x^2)^n = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \in (0,1] \end{cases}$

$f: [0,1] \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x \in (0,1] \end{cases}$

f funcție descrescătoare pe $[0,1] \Rightarrow f \in \mathcal{R}([0,1])$ (6)

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$ (7)

Studiem monotonia șirului de funcții.

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (1-x^2)^{n+1} - (1-x^2)^n = (1-x^2)^n[(1-x^2)-1] = (1-x^2)^n(-x^2) = -x^2(1-x^2)^n \leq 0 \ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$

Avem că $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \ \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$ (8)

(șirul de funcții este descrescător).

Din (4), (5), (6), (7), (8), aplicând teorema convergenței monotone pentru integrala Riemann, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

EXERCIȚIUL 8 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n}\,dx$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 nx^2(1-x^2)^n\,dx$.