

INTEGRALE IMPROPRII

A) NOTIUNI GENERALE

Intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ poate avea forma (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, \mathbb{R} .

Pe parcursul cursului se alege $I = [a, b)$

Definitia 1. Functia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numeste local integrabila pe I daca $\forall \alpha, \beta \in I$ cu $\alpha < \beta$ avem ca $f|_{[\alpha, \beta]}$ este functie integrabila Riemann pe $[\alpha, \beta]$.

Notatie. $\mathfrak{R}_{loc}(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ functie local integrabila pe } I\}$

Teorema 1. a) Orice functie continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este local integrabila pe I .

b) Orice functie monotona $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este local integrabila pe I .

c) Fie o functie marginita $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea ca $D_f = \{x \in I \mid f \text{ nu este continua in } x\}$ este multime neglijabila Lebesgue. Atunci f este local integrabila pe I .

Definitia 2. Fie $f \in \mathfrak{R}_{loc}([a, b))$ cu $a < b \in \mathbb{R}$.

a) Spunem ca integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta daca $\exists \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt \in \mathbb{R}$.

b) Spunem ca integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este divergenta daca aceasta nu este convergenta.

c) Spunem ca integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta daca integrala improprie $\int_a^{b-0} |f(x)|dx$ este convergenta.

Criteriul lui Cauchy pentru integralele improprii. Fie $f \in \mathfrak{R}_{loc}([a, b))$.

a) Integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta daca si numai daca $\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon \in (a, b)$ astfel incat $\left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon \forall x, y \in [a, b)$ cu $c_\varepsilon \leq x < y < b$.

b) Integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta daca si numai daca $\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon \in (a, b)$ astfel incat $\int_x^y |f(t)|dt < \varepsilon \forall x, y \in [a, b)$ cu $c_\varepsilon \leq x < y < b$.

Teorema 2. Se considera $f \in \mathfrak{R}_{loc}([a, b))$. Daca integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta, atunci aceasta este convergenta.

Observatie. Reciproca Teoremei 2 este falsa.

Daca, in plus, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b)$ sau $f(x) \leq 0 \forall x \in [a, b)$, atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergenta daca si numai daca aceasta este convergenta.

Criteriul lui Abel pentru integralele improprii. Se considera $f, g \in \mathfrak{R}_{loc}([a, b))$ care verifica urmatoarele proprietati:

$$\text{i) } f \text{ este functie descrescatoare si } \exists \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = 0;$$

$$\text{ii) } \exists M > 0 \text{ astfel incat } \left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq M \quad \forall x \in [a, b).$$

Atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)g(x)dx$ este convergenta.

Criteriul lui Dirichlet pentru integralele improprii. Se considera $f, g \in \mathfrak{R}_{loc}([a, b))$ care verifica urmatoarele proprietati:

$$\text{i) } f \text{ este functie descrescatoare si } \exists \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \in (-\infty, +\infty];$$

$$\text{ii) } \text{integrala improprie } \int_a^{b-0} g(x)dx \text{ este convergenta.}$$

Atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)g(x)dx$ este convergenta.

Criteriul de comparatie cu inegalitati pentru integralele improprii. Fie $f, g \in \mathfrak{R}_{loc}([a, b))$ doua functii pozitive care verifica inegalitatea $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b)$.

a) Daca integrala improprie $\int_a^{b-0} g(x)dx$ este convergenta, atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta.

b) Daca integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este divergenta, atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} g(x)dx$ este divergenta.

Criteriul de comparatie cu limite pentru integralele improprii. Fie $f, g \in \mathfrak{R}_{loc}([a, b))$ doua functii pozitive pentru care $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$

a) Daca $l \in (0, +\infty)$, atunci integralele improprii au aceiasi natura.

b) Daca $l = 0$ si integrala improprie $\int_a^{b-0} g(x)dx$ este convergenta, atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta.

c) Daca $l = +\infty$ si integrala improprie $\int_a^{b-0} g(x)dx$ este divergenta, atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este divergenta.

B) METODE DE CALCUL PENTRU INTEGRALELE IMPROPRII

Formula Leibniz-Newton pentru integralele improprii. Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o functie local integrabila care admite primitive, $F : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fiind una dintre primitive. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergenta

b) $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} F(x) \in \mathbb{R}.$

In plus, $\int_a^{b-0} f(x)dx = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} F(x) - F(a).$

Formula de integrare prin parti pentru integralele improprii. Fie $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ doua functii derivabile astfel ca $f', g' \in \mathfrak{R}_{loc}([a, b))$ si $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)g(x) \in \mathbb{R}.$

$\mathbb{R}.$ Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) integrala improprie $\int_a^{b-0} f'(x)g(x)dx$ este convergenta

b) integrala improprie $\int_a^{b-0} g'(x)f(x)dx$ este convergenta.

In plus, $\int_a^{b-0} f'(x)g(x)dx = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^{b-0} g'(x)f(x)dx.$

Teorema de schimbare de variabila pentru integralele improprii. Fie $f \in \mathfrak{R}_{loc}([a, b))$ si $g : [\alpha, \beta) \rightarrow [a, b)$ o functie bijectiva, derivabila, strict monotona cu $g' \in \mathfrak{R}_{loc}([\alpha, \beta))$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) integrala improprie $\int_{\alpha}^{\beta-0} f(g(t))g'(t)dt$ este convergenta

b) integrala improprie $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta-0)} f(x)dx$ este convergenta.

In plus, $\int_{\alpha}^{\beta-0} f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta-0)} f(x)dx.$

C) FUNCTIILE BETA SI GAMMA ALE LUI EULER

Teorema 3. a) Oricare ar fi $p, q > 0$ integrala improprie $\int_{0+0}^{1-0} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ este convergenta.

b) Oricare ar fi $p > 0$ integrala improprie $\int_{0+0}^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ este convergenta.

Definitia 3. a) Functia $B : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita prin $B(p, q) = \int_{0+0}^{1-0} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad \forall p, q \in (0, +\infty)$ se numeste functia Beta a lui Euler.

b) Functia $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita prin $\Gamma(p) = \int_{0+0}^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad \forall p \in (0, +\infty)$ se numeste functia Gamma a lui Euler.

Teorema 4. (Proprietatile functiei Gamma) Functia Gamma are urmatoarele proprietati:

- a) $\Gamma(1) = 1$
- b) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad \forall p > 0$
- c) $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- d) $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \quad \forall p \in (0, 1)$
- e) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Teorema 5. (Proprietatile functiei Beta) Functia Beta are urmatoarele proprietati:

- a) $B(p, q) = B(q, p) \quad \forall p, q \in (0, +\infty)$
- b) $B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q) \quad \forall p, q \in (0, +\infty)$
 $B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q) \quad \forall p, q \in (0, +\infty)$
- c) $B(p, q) = 2 \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx \quad \forall p, q \in (0, +\infty)$
- d) $B(p, q) = \int_{0+0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx \quad \forall p, q \in (0, +\infty)$.

Teorema 6. (Legatura intre functiile Beta si Gamma) Sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

- a) $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \forall p, q \in (0, +\infty)$
- b) $B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \quad \forall p \in (0, 1)$.

Exemple. Sa se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx$ si $\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{tgx} dx$.

Integralele se calculeaza folosind functiile Gamma si Beta.

$$B(p, q) = 2 \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx \quad \forall p, q \in (0, +\infty).$$

$$\text{Rezolvam sistemul } \begin{cases} 2p-1=n \\ 2q-1=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\frac{n+1}{2} \\ q=\frac{m+1}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2}+\frac{m+1}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+m}{2}+1)}$$

Vom calcula $\Gamma(\frac{n+1}{2})$ pe doua cazuri.

Cazul 1. $n = 2k+1$

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2k+2}{2}\right) = \Gamma(k+1) = k!$$

Cazul 2. $n = 2k$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}-1\right) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}-1\right) = \left(k+\frac{1}{2}-1\right) \left(k+\frac{1}{2}-2\right) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}-2\right) = \\ &= \left(k+\frac{1}{2}-1\right) \left(k+\frac{1}{2}-2\right) \dots \left(1+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}-1\right) \left(k+\frac{1}{2}-2\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(k+\frac{1}{2}-1\right) \left(k+\frac{1}{2}-2\right) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{tgx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x dx$$

Rezolvam sistemul $\begin{cases} 2p-1 = \frac{1}{2} \\ 2q-1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{3}{4} \\ q = \frac{1}{4} \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{tgx} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2} \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) =$$

$$\frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$