

SEMINAR 11 - COMPLETARE

Funcții integrabile Riemann

EXERCITIUL 1 Să se studieze integrabilitatea Riemann a următoarelor funcții:

a) $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \{x\}$

b) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \\ \frac{1}{x-2}, & x \in (1, 2) \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

c) $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, & x = 0 \\ -1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

EXERCITIUL 2 Să se calculeze următoarele limite de funcții:

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_{2x}^{5x} \frac{\cos t - 1}{t^2} dt$

b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_{2x}^{5x} \frac{\cos t - 1}{t^3} dt$

EXERCITIUL 3 Să se calculeze următoarele limite de serii:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x \cos nx}{n^2 + 2x^2} dx$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx$, unde $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă.

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 (2x - x^2)^n dx$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^n}{x^2 + 1} dx$$

EXERCITIUL 4 Să se calculeze următoarele

limite de funcții:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{-t^2} \cos t dt}{x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^n \sqrt{1+t^2} dt}{x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\int_1^{\lg x} e^{-t^2} x^{n+2} dt}{\int_1^{\lg x} e^{t^2} dt}$$