SEMINAR 1, SERIA 13

SPAȚII METRICE. ȘIRURI ÎN SPAȚII METRICE

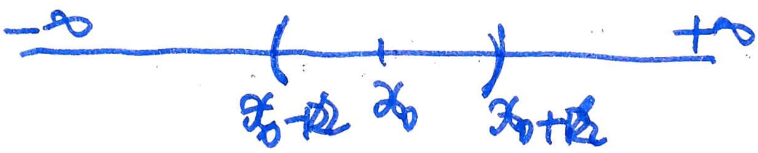
Exercițiul 1 Descrieți bilele deschise și bilele închise din spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$, unde $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $d(x,y) = |x-y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $d(x,y) = |x-y|$ distanța uzuală a lui $\mathbb{R}$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ și $r > 0$

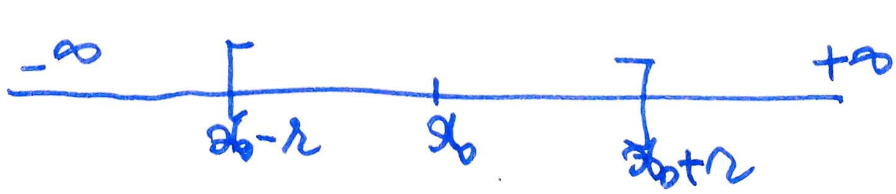
$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) < r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -r < x - x_0 < r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x < x_0 + r\} =$$
$$= (x_0 - R, x_0 + R)$$

$$\boxed{B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)}$$



$$B[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) \le r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -r \le x - x_0 \le r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r \le x \le x_0 + r\} = [x_0 - r, x_0 + r]$$

$$\boxed{B[x_0, r] = [x_0 - r, x_0 + r]}$$



<u>Exercițiul 2</u> Descrieți bilele deschise și bilele închise din spațiul metric $(\mathbb{R}^2, d_2)$, unde $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) =$

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^n$.

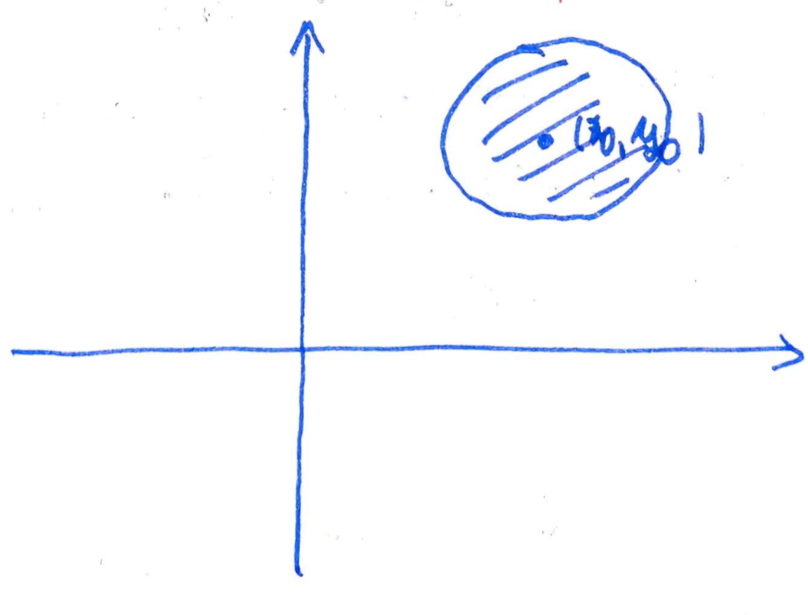
<u>Rezolvare</u> $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) =$

$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ distanța uzuală a lui $\mathbb{R}^2$.

Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ și $r > 0$

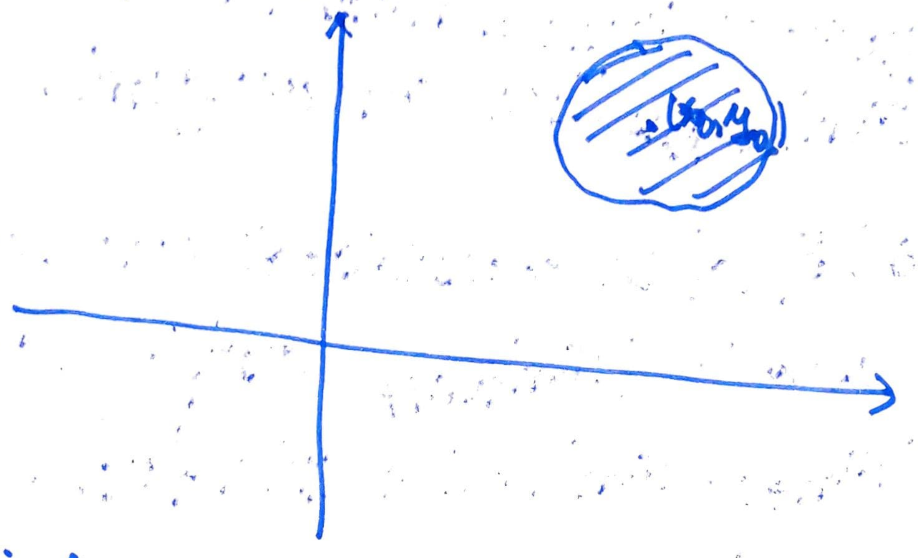
$$B((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_2((x, y), (x_0, y_0)) < r\}$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\} =$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\} =$$
$$= \operatorname{Int} \mathcal{C}((x_0, y_0), r).$$

$$\boxed{B(x_0, r) = \operatorname{Int} \mathcal{C}((x_0, y_0), r)}$$



$B[(x_0,y_0),r] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d_2((x,y),(x_0,y_0)) \le r\}$
$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le r^2\} = \mathcal{C}((x_0,y_0),r) \cup$
$\cup\ \mathrm{Int}\ \mathcal{C}((x_0,y_0),r)$

$\boxed{B[(x_0,y_0),r] = \mathcal{C}((x_0,y_0),r) \cup \mathrm{Int}\ \mathcal{C}((x_0,y_0),r).}$



Exercitiul 3 Să se calculeze următoarele limite de șiruri:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^{n!}}{n!}$, $a\in\mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^p+2^p+\ldots+n^p}$, $p>0$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha<1$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+n}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}{6\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n+2)}$.

h) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n ; a, b>0$

<u>Exercițiul 4</u> Se consideră $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ și $x_n = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

<u>Exercițiul 5</u> a) Se consideră un șir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel ca $\exists \lim_{n\to\infty} (x_{n+1}-x_n) = l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

b) Se consideră un șir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel ca $\exists \lim_{n\to\infty} [(n+1)x_{n+1} - n x_n] = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

<u>Rezolvare</u> a) $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = l \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{n+1-n} = l$$

Alegem șirul $b_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$b_{n+1} - b_n = 1 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_{n+1} > b_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$

Șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

Aplicăm Teorema lui l'Hospital și obținem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{b_n} = l$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

Se disting două cazuri:

1) $l > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} \cdot n = +\infty$

2) $l < 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} \cdot n = -\infty$

b) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} [(n+1)x_{n+1} - n x_n] = l \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)x_{n+1} - n x_n}{n+1-n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Alegem $b_n = n \ \forall n\in\mathbb{N}$ și $a_n = n x_n \ \forall n\in\mathbb{N}$

Șirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Aplicăm teorema lui l'Hospital și obținem că $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n x_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l.$

<u>Exercițiul 6</u> Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin relația de recurență

$x_{n+1} = \frac{n x_n}{n + x_n^2}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $x_1>0$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent și să se calculeze limita acestuia.