SEMINAR 2, SERIA 13

Limita inferioară și superioară a unui șir de numere reale

EXERCIȚIUL 1 Să se calculeze $\liminf x_n$ și $\limsup x_n$ în următoarele cazuri:

a) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi}{2}$

b) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos \frac{n\pi}{2}$

REZOLVARE a) Se identifică punctele limită ale șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și folosim formulele

$\limsup x_n = \sup \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \overline{\mathbb{R}}$

$\liminf x_n = \inf \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \overline{\mathbb{R}}$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n=2k \\ -1, & n=2k+1 \end{cases}$$

$$(-1)^{n+1} = \begin{cases} 1, & n=2k+1 \\ -1, & n=2k \end{cases}$$

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n=2k \\ 1, & n=4k+1 \\ -1, & n=4k+3 \end{cases}$$

Se aleg subșirurile $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ și $(x_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}}$. Calculăm limitele acestor subșiruri și obținem punctele limită ale acestui șir.

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left[\frac{1+(+1)}{2} \cdot 1 \cdot 0\right] = 1 \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{4k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \left[\frac{1+(-1)}{2} + 1\right] = +1 \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{4k+3} = \lim\limits_{k\to\infty} \left[\frac{1+(-1)}{2} - 1\right] = -1 \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{-1, 1\} \Rightarrow \limsup x_n = 1$

$\liminf x_n = -1$

$\limsup x_n \neq \liminf x_n \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu are limită

$\limsup x_n, \liminf x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

b) $(-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases}$

$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ 1, & n = 4k \\ -1, & n = 4k+2 \end{cases}$

Se aleg subșirurile $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k})_{k\in\mathbb{N}}$ și $(x_{4k+2})_{k\in\mathbb{N}}$.

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{2}-1\right) + 0 =$

$= -\frac{1}{2}e \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{4k} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{4k}\right)^{4k} \cdot \left(\frac{1}{2}+1\right) + 1 = \frac{3}{2}e + 1 \in$

$\in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{4k+2} = \lim\limits_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4k+2}\right)^{4k+2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-2 = \frac{3}{2}e-1 \in$

$\in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$\mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3e}{2}+1, \frac{3e}{2}-1\right\}$

$\limsup x_n = \frac{3e}{2}+1$

$\liminf x_n = -\frac{1}{2}$

$\limsup x_n \neq \liminf x_n \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu are limită

$\limsup x_n, \liminf x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

<u>EXERCIȚIUL 2</u> Se consideră $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir mărginit din $\mathbb{R}_+$. Să se arate că $\liminf (2-x_{n+1})x_n \leq 1$.

<u>REZOLVARE</u> Pentru acest exercițiu folosim definiția limitei inferioare a unui șir de numere reale.

$\liminf y_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k\geq n} y_k\right)$.

Demonstrăm afirmația prin reducere la absurd. Presupun că $\liminf (2-x_{n+1})x_n > 1$

Există $l\in\mathbb{R}$ astfel încât $\liminf(2-x_{n+1})x_n > l > 1$.

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{k\geq n}(2-x_{k+1})x_k\right) > l \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ a.î.

$\inf\limits_{k\geq n_0}(2-x_{k+1})x_k > l \Rightarrow (2-x_{k+1})x_k > l \ \forall k\geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x_k - x_{k+1}x_k > l \ \forall k \geq n_0$ (1)

Știm că $(x_k-1)^2 \geq 0 \; \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow x_k^2 - 2x_k + 1 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2x_k}\; x_k^2 \geq 2x_k - 1 \; \forall k \in \mathbb{N}$ ②

Adunăm inegalitățile ① și ② și obținem că

$x_k^2 - x_{k+1} x_k > l - 1 \; \forall k \geq n_0 \Rightarrow x_k(x_k - x_{k+1}) > l-1 > 0$

$\forall k \geq n_0$.

Cum $x_k \geq 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$, avem că $x_k - x_{k+1} > 0 \; \forall k \geq n_0$

$\Rightarrow x_{k+1} < x_k \; \forall k \geq n_0 \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \geq n_0}$ este strict descrescător.

Cum $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este și mărginit, rezultă că ~~s~~este convergent.

Notăm $l_1 = \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} (2 - x_{n+1}) x_n =$

$= (2 - l_1) l_1 = 2l_1 - l_1^2 \Rightarrow \underline{\lim}\inf (2 - x_{n+1}) x_n = 2l_1 - l_1^2$

Conform presupunerii făcute, avem că

$2l_1 - l_1^2 > l > 1 \Rightarrow 2l_1 - l_1^2 > 1 \Rightarrow l_1^2 - 2l_1 + 1 < 0$

$\Rightarrow (l_1 - 1)^2 < 0$ contradicție.

Presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow \underline{\lim} (2 - x_{n+1}) x_n \leq$

≤ 1.

SERII DE NUMERE REALE

EXERCIȚIUL 3 Să se studieze, folosind definiția, convergența următoarelor serii de numere reale:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$

c) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

REZOLVARE a) $x_n = \frac{n}{(n+1)!}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Pentru a studia convergența seriei de numere reale, folosind definiția este necesar să calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, unde $s_n = x_1 + \dots + x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$= \frac{1}{1!} - \cancel{\frac{1}{2!}} + \cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\Big[1-\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{\downarrow}\Big] = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

este convergentă și are suma 1.

b) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n+2-n} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{k+2}}{2} - \sum_{k=0}^{n}\frac{\sqrt{k}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n+2}}{2} - \frac{\sqrt{1}+\dots+\sqrt{n}}{2} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1}{n} = +\infty \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ este divergentă și are suma $+\infty$.

c) $x_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{n^2-1}{n^2} = \ln\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$ $\forall n\geq 2$.

$s_n = \sum\limits_{k=2}^{n} x_k = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \ln \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$

$= \ln\left(\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) =$

$= \ln \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n+1)}{2^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot n^2} =$

$= \ln\frac{\cancel{2}\cdot \cancel{3^2}\cdot \cancel{4^2}\cdot\ldots\cdot \cancel{(n-1)^2}\cdot \cancel{n}(n+1)}{\cancel{2^2}\cdot\cancel{3^2}\cdot\ldots\cdot\cancel{n^2}} = \ln\frac{n+1}{2n}$ $\forall n\geq 2$

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{2n} = \ln\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ seria $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă și are suma $-\ln 2$.

<u>EXERCIȚIUL 4</u> Să se studieze convergența următoarelor serii de numere reale:

a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!+(n+1)!}$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cdot 2^n}{(n+2)!}$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.