SEMINAR 10

Derivatele parțiale ale funcțiilor compuse. Puncte de extrem local

EXERCIȚIUL 1 Fie $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă și $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = g(xy, x^2+y^2)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției f.

REZOLVARE $f(x,y) = g(xy, x^2+y^2) = g(u(x,y), v(x,y))$, unde $u(x,y) = xy$ și $v(x,y) = x^2+y^2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Considerăm că funcția g depinde de variabilele u și v.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x^2+y^2) \cdot (xy)'_x + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x^2+y^2) \cdot (x^2+y^2)'_x =$$
$$= y \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x^2+y^2) + 2x \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x^2+y^2) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x^2+y^2) \cdot (xy)'_y + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x^2+y^2)(x^2+y^2)'_y =$$
$$= x \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x^2+y^2) + 2y \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x^2+y^2) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

EXERCIȚIUL 2 Fie $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă și $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = g\left(xy, \frac{x}{y}\right)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției f.

EXERCIȚIUL 3 Fie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = x\, g(x^2+y^2)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției f.

EXERCIȚIUL 4 Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

REZOLVARE f funcție continuă pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow D_f = \emptyset$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 12x^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 6y + 3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

$\Rightarrow f$ funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

$D_1 = \emptyset$.

Determinăm punctele critice rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$ pe mulțimea $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 4x^3 - 12x^2 = 0 \\ 3y^2 - 6y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2(x-3) = 0 \\ 3(y^2 - 2y + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(x-3) = 0 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

$(y-1)^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$

Sistemul are soluțiile $(0,1), (3,1)$

$(0,1), (3,1) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow C = \{(0,1), (3,1)\}$

Studiem diferențiabilitatea de ordin 2.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = (4x^3 - 12x^2)'_x = 12x^2 - 24x$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = (3y^2 - 6y + 3)'_x = 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = (4x^3 - 12x^2)'_y = 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = (3y^2 - 6y + 3)'_y = 6y - 6 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

f este funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow D_2 = \emptyset$.

Aplicăm criteriul lui Sylvester în punctele critice în care f este diferențiabilă de două ori

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = 0$

Nu ne putem pronunța în $(0,1)$ cu ajutorul criteriului lui Sylvester $\Rightarrow (0,1) \in D_4$

$$H_f(3,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 36 > 0$

$\Delta_2 = 0$

Nu ne putem pronunța în $(3,1)$ cu ajutorul criteriului lui Sylvester $\Rightarrow (3,1) \in D_4$

$D_3 = \phi$

$D_4 = \{(0,1), (3,1)\}$

verificăm cu ajutorul definiției dacă $(0,1)$ și $(3,1)$ sunt puncte de extrem local.

Evaluăm semnul diferenței $f(x,y) - f(0,1)$ când $(x,y) \in V$, $V \in \underset{\mathbb{R}^2}{\mathcal{V}}(0,1)$.

$f(x,y) - f(0,1) = x^4 - 4x^3 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1$

$= x^3(x-4) + y(y^2 - 3y + 3) - 1$

$f(\frac{1}{n}, 1) - f(0,1) = \frac{1}{n^3}(\frac{1}{n} - 4) + 1 - 1 = \frac{1}{n^3}(\frac{1}{n} - 4) < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$f(-\frac{1}{n}, 1) - f(0,1) = -\frac{1}{n^3}(-\frac{1}{n} - 4) + 1 - 1 = \frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^3} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow (0,1)$ nu este punct de extrem local al funcției f

Evaluăm semnul diferenței $f(x,y) - f(3,1)$ când $(x,y) \in V$, $V \in \underset{\mathbb{R}^2}{\mathcal{V}}(3,1)$

$f(x,y) - f(3,1) = x^3(x-4) + y(y^2 - 3y + 3) + 26$

$f(3, 1+\frac{1}{n}) - f(3,1) = (1+\frac{1}{n})^3 - 3(1+\frac{1}{n})^2 + 3(1+\frac{1}{n}) - 1 =$

$= (1 + \frac{1}{n} - 1)^3 = \frac{1}{n^3} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$f(3, 1-\frac{1}{n}) - f(3,1) = (1-\frac{1}{n})^3 - 3(1-\frac{1}{n})^2 + 3(1-\frac{1}{n}) - 1 =$

$= (1 - \frac{1}{n} - 1)^3 = -\frac{1}{n^3} < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$(3,1)$ nu este punct de extrem local al funcției f.
$E = \phi$

EXERCIȚIUL 4 Să se determine punctele de extrem local ale funcții $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + x^2 + 2xy + y^2$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCIȚIUL 5 Să se arate că ecuația
$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z - 8 = 0$ are o infinitate de soluții definite implicit sub forma $z = f(x,y)$ în vecinătatea punctului $(0,2,0)$. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}(0,2)$ și $\frac{\partial z}{\partial y}(0,2)$.

REZOLVARE Alegem funcția $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) =$
$= 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z - 8$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x - 8z \; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4y \; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 8x - 1 \; \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ mulțime deschisă

- f funcție de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$
- $f(0,2,0) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(0,2,0) = -1 \neq 0$

Aplicăm teorema funcțiilor implicite

$\exists\, r_1, r_2 > 0$ a.î. $B((0,2), r_1) \times B(0, r_2) \subseteq \mathbb{R}^3$,

$(\exists!)\ \varphi : B((0,2), r_1) \to B(0, r_2)$ funcție de clasă C

astfel încât

$$\begin{cases} \varphi(0,2) = 0 \\ f(x, y, \varphi(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in B((0,2), r_1). \end{cases}$$

$f(x, y, \varphi(x,y)) = 0 \ \forall (x,y) \in B((0,2), r_1) \Rightarrow$ ecuația $f(x,y,z) = 0$ are o infinitate de soluții de forma $z = \varphi(x,y)$, cu $(x,y) \in B((0,2), r_1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,2,0)} = -\frac{0}{-1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,2) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,2,0)} = -\frac{8}{-1} = 8.$$

<u>EXERCIȚIUL 6</u> Să se arate că ecuația $x^2 - y^3 + 2xy + 2 = 0$ are o infinitate de soluții definite implicit sub forma $y = \varphi(x)$ în vecinătatea punctului $(1,-1)$. Să se calculeze $y'(1)$, $y''(1)$.