FUNCTII INTEGRABILE RIEMANN IN $\mathbb{R}^n$

1) NOTIUNI GENERALE

Definitia 1. Fie $E \subset \mathbb{R}^n$ o multime marginita. Numarul real $\operatorname{diam} E \overset{def}{=} \sup\limits_{x,y\in E} \|x-y\|$ se numeste diametrul multimii E.

Definitia 2. Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$. Se numeste descompunere Jordan a multimii E o familie finita de multimi nevide, masurabile Jordan $\alpha = (E_i)_{1\le i\le p}$ astfel incat:

a) $\mu(E_i \cap E_j) = 0\ \forall i \neq j \in \{1, 2, ..., p\}$

b) $E = \bigcup\limits_{i=1}^{p} E_i$.

Notatie. $D(E) \overset{not}{=} \{\alpha |\, \alpha \text{ } \textit{descompunere Jordan a multimii } E\}$.

Definitia 3. Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$ si $\alpha = (E_i)_{1\le i\le p} \in D(E)$.

a) Numarul real $\|\alpha\| \overset{not}{=} \max\{\operatorname{diam} E_1, \operatorname{diam} E_2, ..., \operatorname{diam} E_p\}$ se numeste norma descompunerii α.

b) Multimea finita $\xi_\alpha = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p\}$ cu $\xi_i \in E_i\ \forall 1 \le i \le p$ se numeste sistem de puncte intermediare asociat descompunerii α.

Definitia 4. Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = (E_i)_{1\le i\le p} \in D(E)$, $\xi_\alpha = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p\}$ un sistem de puncte intermediare asociat descompunerii α si $f : E \to \mathbb{R}$ o functie. Numarul real $\sum\limits_{i=1}^{p} f(\xi_i)\,\mu(E_i)$ se numeste suma Riemann asociata functiei f, descompunerii α si sistemului de puncte intermediare ξ_α.

Notatie. $\sigma_\alpha(f;\xi_\alpha) \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{p} f(\xi_i)\,\mu(E_i)$

Definitia 5. Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$. Spunem ca functia $f : E \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe E daca $\exists I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea ca $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $|\sigma_\alpha(f;\xi_\alpha) - I| < \varepsilon\ \forall \alpha \in D(E)$ cu $\|\alpha\| < \delta_\varepsilon$ si oricare ar fi ξ_α un sistem de puncte intermediare asociat descompunerii α.

Notatie. $I \overset{def}{=} \int_E f(x)dx = \int \cdots \int_E f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1 dx_2 ... dx_n$

Teorema 1. Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$ si $f : E \to \mathbb{R}$ o functie integrabila Riemann pe E. Pentru orice $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sir de descompuneri Jordan ale multimii Ecu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha_n\| = 0$ si pentru orice ξ_{α_n}un sistem de puncte intermediare asociat descompunerii α_n avem ca $\lim\limits_{n\to\infty\alpha_n}(f;\xi_{\alpha_n}) = \int_E f(x)dx$.

Teorema 2. Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$ o multime inchisa. Orice functie continua $f : E \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe E.

Teorema 3. Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$. Atunci functia $f : E \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x) = 1\ \forall x \in E$ este integrabila Riemann pe E si $\mu(E) = \int_E f(x)dx$.

Teorema 4. Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$ cu $\mu(E) = 0$. Orice functie $f : E \to \mathbb{R}$ este integrabile Riemann pe E si $\int_E f(x)dx = 0$.

Teorema 5. Fie $E_1, E_2 \in J(\mathbb{R}^n)$ cu $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$ si $f : E_1 \cup E_2 \to \mathbb{R}$ o functie integrabila Riemann pe $E_1 \cup E_2$. Atunci f este integrabila Riemann pe E_1, f este integrabila Riemann pe E_2 si $\int_{E_1\cup E_2} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)\,dx$.

Teorema 6. (Proprietatile functiilor integrabile Riemann)

a) Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$ si $f, g : E \to \mathbb{R}$ doua functii integrabile Riemann pe E. Atunci $f \pm g, f \cdot g, \alpha \cdot f, |f| : E \to \mathbb{R}$ sunt functii integrabile Riemann pe E. In plus, avem ca

$$\int_E (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_E f(x)\, dx \pm \int_E g(x)\, dx$$

$$\int_E \alpha \cdot f(x)\, dx = \alpha \int_E f(x)\, dx$$

$$\left| \int_E f(x)\, dx \right| \leq \int_E |f(x)|\, dx$$

b) Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$ si $f : E \to \mathbb{R}$ o functie integrabila Riemann pe E. Daca $\overline{E} \subseteq \overset{0}{E}$, atunci f este functie marginita pe E.

c) Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$ si $f : E \to \mathbb{R}$ o functie marginita, integrabila Riemann pe E cu $m = \inf\limits_{x \in E} f(x), M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$. Sunt adevarate inegalitatile

$$m(E) \leq \int_E f(x)\, dx \leq M\mu(E).$$

2) CRITERII DE INTEGRABILITATE

Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue. Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$ si $f : E \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) f este integrabila Riemann pe E

b) D_f este multime neglijabila Lebesgue.

Definitia 6. Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$, $f : E \to \mathbb{R}$ o functie marginita, $\alpha = (E_i)_{1 \leq i \leq p}$ o descompunere Jordan a lui E si $m_i = \inf\limits_{x \in E_i} f(x), M_i = \sup\limits_{x \in E_i} f(x)\ \forall 1 \leq i \leq p$.

a) Numarul real $s_\alpha(f) = \sum\limits_{i=1}^{p} m_i \cdot \mu(E_i)$ se numeste suma Darboux inferioara asociata functiei f si descompunerii α.

b) Numarul real $S_\alpha(f) = \sum\limits_{i=1}^{p} M_i \cdot \mu(E_i)$ se numeste suma Darboux superioara asociata functiei f si descompunerii α.

Criteriul de integrabilitate al lui Darboux. Fie $E \in J(\mathbb{R}^n)$ si $f : E \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) f este integrabila Riemann pe E

b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha_\varepsilon \in D(E)$ astel incat $S_{\alpha_\varepsilon}(f) - s_{\alpha_\varepsilon}(f) < \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $S_\alpha(f) - s_\alpha\ (f) < \varepsilon\ \forall \alpha \in D(E)$ cu $\|\alpha\| < \delta_\varepsilon$.

Teorema 7. Se considera $E \in J(\mathbb{R}^n)$ si $f : E \to \mathbb{R}$ o functie marginita, integrabila Riemann pe E. Sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) $\int_E f(x)\, dx = \sup\limits_{\alpha \in D(E)} s_\alpha(f) = \inf\limits_{\alpha \in D(E)} S_\alpha(f)$;

b) $\forall (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir de descompuneri ale multimii E cu $\lim\limits_{n \to \infty} \|\alpha_n\| = 0$, avem ca $\int_E f(x)dx = \lim\limits_{n \to \infty} S_{\alpha_n}(f) = \lim\limits_{n \to \infty} s_{\alpha_n}(f)$.

3) METODE DE CALCUL PENTRU INTEGRALA RIEMANN MULTIPLA

Teorema lui Fubini pe intervale inchise, marginite n-dimensionale. Fie $E = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ un interval inchis, marginit n-dimensional si $f : E \to \mathbb{R}$ o functie integrabila Riemann pe E astfel incat functia $x_k \longrightarrow f(x_1, .., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, .., x_n)$ este integrabila Riemann pe $[a_k, b_k]$ cu $1 \leq k \leq n$. Atunci:

a) functia $\left(x_1, .., x_{k-1}, \overset{\wedge}{x_k}, x_{k+1}, .., x_n\right) \longrightarrow \int\limits_{a_k}^{b_k} f(x_1, .., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, .., x_n)\, dx_k$ este integrabila Riemann pe $[a_1, b_1] \times ... \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times ... \times [a_n, b_n]$;

b) $\int_E f(x)dx = \int_{[a_1,b_1]\times...\times[a_{k-1},b_{k-1}]\times[a_{k+1},b_{k+1}]\times...\times[a_n,b_n]} \left(\int\limits_{a_k}^{b_k} f(x)dx_k\right)$.

Corolar. Daca $f : E \to \mathbb{R}$ este functie continua pe E, atunci $\int_E f(x)dx = \int_{[a_1,b_1]\times...\times[a_{k-1},b_{k-1}]\times[a_{k+1},b_{k+1}]\times...\times[a_n,b_n]} \left(\int\limits_{a_k}^{b_k} f(x)dx_k\right)$.

Teorema lui Fubini pe multimi simple in raport cu axa Ox_j. Fie $K \in J\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ o multime compacta, $\varphi_1, \varphi_2 : K \to \mathbb{R}$ doua functii continue, $E = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | . \left(x_1, .., x_{j-1}, \overset{\wedge}{x_j}, x_{j+1}, .., x_n\right) \in K, \varphi_1\left(x_1, .., x_{j-1}, \overset{\wedge}{x_j}, x_{j+1}, .., x_n\right) \leq x_j \leq \varphi_2\left(x_1, .., x_{j-1}, \overset{\wedge}{x_j}, x_{j+1}, .., x_n\right)\} \subseteq \mathbb{R}^n$ o multime simpla in raport cu axa Ox_j si $f : E \to \mathbb{R}$ o functie continua pe E. Atunci:

a) $E \in J(\mathbb{R}^n)$;

b) f este integrabila Riemann pe E;

c) $\int_E f(x)dx = \int_K \left(\int\limits_{\varphi_1\left(x_1,..,x_{j-1},\overset{\wedge}{x_j},x_{j+1},..,x_n\right)}^{\varphi_2\left(x_1,..,x_{j-1},\overset{\wedge}{x_j},x_{j+1},..,x_n\right)} f(x_1, x_2, .., x_n)\, dx_j\right) dx_1 dx_2..dx_{j-1}dx_{j+1}...dx_n$.

Definitia 7. Functia $\varphi : D = \overset{0}{D} \subset \mathbb{R}^n \to D_1 = \overset{0}{D_1} \subset \mathbb{R}^n$ se numeste difeomorfism de clasa C^1 daca φ este functie bijectiva, de clasa C^1 pe multimea D si φ^{-1} este functie de clasa C^1 pe multimea D_1.

Teorema 7. Fie $\varphi : D = \overset{0}{D} \subset \mathbb{R}^n \to D_1 = \overset{0}{D_1} \subset \mathbb{R}^n$ un difeomorfism de clasa C^1 si $A \subset D$ o multime marginita cu $\overline{A} \subset D$. Sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) $A \in J(\mathbb{R}^n)$ daca si numai daca $\varphi(A) \in J(\mathbb{R}^n)$;

b) A este multime neglijabila Lebesgue daca si numai daca $\varphi(A)$ este multime neglijabla Lebesgue;

c) $A \in J_0$ daca si numai daca $\varphi(A) \in J_0$.

Teorema de schimbare de variabila pentru integrala multipla. Fie $D = \overset{0}{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ o functie injectiva, de clasa C^1 pe multimea D cu $\det J_\varphi(x) \neq 0\ \forall x \in D$. Pentru orice multime $E \subset D$ cu $\overline{E} \subset D$ si pentru orice functie $f : \varphi(E) \to \mathbb{R}$ integrabila Riemann pe $\varphi(E)$ avem ca functia $f \circ \varphi \cdot |\det J_\varphi| : E \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe E si $\int_E (f \circ \varphi)(x) |\det J_\varphi(x)|\, dx = \int_{\varphi(E)} f(y)dy$.

Corolar. Fie $D = \overset{0}{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ o functie de clasa C^1 pe multimea D si $E \in J(\mathbb{R}^n)$ cu $\overline{E} \subset D$ astfel ca $\varphi(E) \in J(\mathbb{R}^n)$ si $\det J_\varphi(x) \neq 0\ \forall x \in \overset{0}{E}$

. Pentru orice functie $f : \varphi(E) \to \mathbb{R}$ integrabila Riemann pe $\varphi(E)$ avem ca functia functia $f \circ \varphi \cdot |\det J_\varphi| : E \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe E si $\int_E (f \circ \varphi)(x) |\det J_\varphi(x)| \, dx = \int_{\varphi(E)} f(y) dy$.

EXEMPLE DE SCHIMBARI DE VARIABILA PENTRU INTEGRALA MULTIPLA

1) Trecerea la coodonate polare

$\varphi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \varphi(R, \alpha) = (R\cos\alpha, R\sin\alpha)$

φ functie de clasa C^1 pe $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$

$\det J_\varphi(R, \alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -R\sin\alpha \\ \sin\alpha & R\cos\alpha \end{vmatrix} = R \neq 0 \ \forall (R, \alpha) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$

2) Trecerea la coodonate polare generalizate

$\varphi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \varphi(R, \alpha) = (aR\cos\alpha, bR\sin\alpha)$ cu $a, b \in \mathbb{R}^*$

φ functie de clasa C^1 pe $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$

$\det J_\varphi(R, \alpha) = \begin{vmatrix} a\cos\alpha & -aR\sin\alpha \\ b\sin\alpha & bR\cos\alpha \end{vmatrix} = abR \neq 0 \ \forall (R, \alpha) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$

3) Trecerea la coodonate sferice

$\varphi : [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \varphi(R, \alpha, \beta) = (R\sin\alpha\cos\beta . R\sin\alpha\sin\beta, R\cos\alpha)$

φ functie de clasa C^1 pe $(0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$

$\det J_\varphi(R, \alpha, \beta) = -R^2 \sin\alpha \neq 0 \ \forall (R, \alpha, \beta) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$