Examen la algebră [1]
an I, sem. I
3.02.2022

Numele şi prenumele Tudose Alexandru-Ştefan**..............................**

Grupa 131**...........**

Γ **= numărul de litere al primului nume =** 6**.......**
Ω **= numărul de litere al primului prenume =** 9**........**

Subiectul I.

1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim relaţia binară
$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y \text{ sau } x + y = \Omega.$$
(i) Să se arate că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă.
(ii) Să se determine clasa de echivalenţă a numărului real 2022 în raport cu relaţia $\sim$.
(iii) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x(\Omega - x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, nu este nici injectivă, nici surjectivă.
(iv) Să se arate că mulţimea factor $\mathbb{R}/\sim$ este echipotentă cu imaginea funcţiei f de la punctul (iii). (**6 pct.**)

2. Definim funcţia $g : \mathbb{Z} \to [0, 1)$, $g(n) = \{2^n \sqrt[13]{\Gamma}\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului x. Să se arate că g este injectivă. (**3 pct.**)

Subiectul II.

1. Determinaţi elementele de ordin 2 şi elementele de ordin 3 din grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma+5}, +)$.

2. Determinaţi elementele de ordin 6 din grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma+5} \times \mathbb{Z}_{\Omega+12}, +)$. (**3 pct.**)

3. Conţine grupul $(\mathbb{Z}_\Gamma \times \mathbb{Z}_\Omega, +)$ un element de ordin $\Gamma \cdot \Omega$? (**3 pct.**)

---

[1] **Toate subiectele sunt obligatorii.**
La fiecare subiect, înlocuiţi Γ şi Ω cu valorile specificate mai sus! **La fiecare subiect, înlocuiţi Γ şi Ω cu valorile specificate mai sus!** **(Spre exemplu: dacă numele este Vasilescu Ştefan Alexandru consideraţi peste tot $\Gamma = 9$ şi $\Omega = 6$.)**
Toate răspunsurile trebuie justificate. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate.
Timp de lucru $2\frac{1}{2}$ ore. Succes!

Subiectul III. Se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

1. Descompuneţi σ în produs de cicluri disjuncte şi în produs de transpoziţii. (**3 pct.**)
2. Aflaţi ordinul şi signatura permutării σ. Calculaţi $\sigma^{2022+\Gamma}$. (**3 pct.**)
3. Determinaţi permutările $\tau \in S_{10}$ cu proprietatea că $\tau^2 = \sigma^{\Omega}$. (**3 pct.**)

Subiectul IV.

1. Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $X^4 + X^2 + \Gamma$ la $X^3 + X + \Omega$ în $\mathbb{Q}[X]$.
2. Să se determine cmmdc al polinoamelor $X^5 + X^2 + \hat{\Gamma}$ şi $X^3 + \hat{\Omega}X + \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_2[X]$.
3. Să se determine numărul elementelor inversabile, al elementelor nilpotente şi al elementelor idempotente din inelul $\mathbb{Z}_{6\Gamma}$.
4. Fie $I = (X - \Gamma, \Omega)$ idealul din $\mathbb{Z}[X]$ generat de $X - \Gamma$ şi Ω. Să se arate că $I \neq \mathbb{Z}[X]$.

4.2.2022.

Examen SAL

Judoc Alexandru-Ștefan ~~[illegible]~~

Grupa 131.

$\Gamma = 6$

$\Omega = 9$.

Subiectul I $\qquad \Omega = 9 \qquad \Gamma = 6$.

1. $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ sau $x + y = \Omega = 9$.

i) $\sim$ echiv rad. rel. de echivalență $\Leftrightarrow \sim$ reflexivă, simetrică, tranzitivă

① $\sim$ reflexivă $\Leftrightarrow x \sim x$, adică $x = x$ sau $x + x = 9$, ceea ce e adevărat

② $\sim$ simetrică $\Leftrightarrow$: $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ sau $x + y = 9 \Leftrightarrow y = x$ sau $y + x = 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \sim x$, ceea ce e adevărat

③ $\sim$ tranzitivă: $x \sim y$ și $y \sim z \Leftrightarrow x = y$ sau $x+y=9$ și $y = z$ sau $y + z = 9$
$\Downarrow$
$x = z$ sau $x + z = 9$.
Deci $\sim$ tranzitivă

Din ①, ②, ③ $\Rightarrow \sim$ este relație de echivalență

ii) $2022 \sim a \Leftrightarrow 2022 = a$ sau $2022 + a = 9$
$\Downarrow$
$a = 9 - 2022 = -2013$

Astfel, $[2022] = \{2022, -2013\}$.

iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(\Omega - x) = x(9 - x) = 9x - x^2$.

Testăm injectivitatea: $f(x) = f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$9x - x^2 = 9y - y^2$.

$x^2 - y^2 + 9y - 9x = 0$

$(x+y)(x-y) + 9(y-x) = 0$

$(x+y)(x-y) - 9(x-y) = 0$.

$(x+y-9)(x-y) = 0$.

① $x = y$

② $x + y - 9 = 0 \Rightarrow x + y = 9$, Ex $x = 5$, $y = 4$; $x \neq y$

f nu e inj

Pag 1

Iudoc Alexandru-Ștefan Examen SA1

Grupa 131. $r = 6$; $\Omega = 9$. 7

Subiectul I continuare

iii) Testăm surjectivitatea

f surj $\Leftrightarrow (\exists) x \in \mathbb{R}$ a. î. $f(x) = y \ (\forall) \ y \in \mathbb{R}$.

$f(x) = 9x - x^2 = y$

$x(9-x) = y$.

$x_1 = 0$

$x_2 = 9$.

$\Delta = 81$

$$V_f\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V_f\left(\frac{9}{2}, \frac{81}{4}\right), \quad f(x) = 9x - x^2, \quad a = -1 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \left(-\infty, \frac{81}{4}\right) \neq \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ nu este surjectivă

iv) Fie $x, y \in \mathbb{R}$

$x \sim y \Leftrightarrow x = y$ sau $x + y = 9$.

$[x] = \{x, 9 - x\}$

$x = 9 - x$.

$9 = 2x$.

$x = \frac{9}{2} \Rightarrow R/\sim = \left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$ sau $R/\sim = \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$

Conform iii), $\operatorname{Im} f = \left(-\infty, \frac{81}{4}\right)$; $V_f\left(\frac{9}{2}, \frac{81}{4}\right)$ ~~$\Rightarrow (\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{9}{2}\}$~~

$\Rightarrow (\forall) x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{9}{2}\}$, pentru $A = \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) = x\}$, $|A| = 2$, iar pentru $(\forall) x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right)$, A definită la fel ca mai devreme va avea un singur element $\Rightarrow$

x_{V_f}.

~~cerința~~

$\Rightarrow R/\sim$ echipotentă cu $\operatorname{Im} f$.

Pag 2

$r = 6, \quad n = 9.$

Subiectul II (unu) continuare

$g : \mathbb{Z} \to [0,1), \; g(n) = \{2^n \sqrt[n]{r}\} = \{2^n \sqrt[9]{6}\}$

$\sqrt[13]{6}$ irational

$r=6$, $\Omega=9$.

Subiectul II

1. $(\mathbb{Z}_{r+5}, +)$ echivalent

$\Downarrow$

$(\mathbb{Z}_{11}, +)$

Testăm fiecare element în parte cu $\hat{0}$ elem neutru.

Ex $\hat{0}=\hat{0}$ → ordin 1

$\underbrace{\hat{1}+\hat{1}+\hat{1}+\ldots+\hat{1}}_{de\ 11ori}=\hat{0}=\widehat{11}$

$\underbrace{\hat{2}+\hat{2}+\ldots+\hat{2}}_{11ori}=\widehat{22}=\hat{0}$

$\underbrace{\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}+\ldots+\hat{3}}_{11ori}=\hat{0}=\widehat{33}$

$\ldots, \ldots$

11 este prim, deci toate elementele ~~sale~~ lui $\mathbb{Z}_{11}$ vor fi 11 (în afară de elem. neutru) ⇒ nu sunt elemente cu ordinul 2, nici cu ordinul 3.

2. $(\mathbb{Z}_{r+5} \times \mathbb{Z}_{\Omega+12}, +)$

$\Downarrow$

$(\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{21}, +)$

Datorită aceluiași raționament ca în cazul anterior, nu există elemente de ordinul 6 pe grupul dat.

3. Grupul $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9, +)$ nu conține niciun element de ordinul 55, deoarece ordinul maxim al unui element trebuie să dividă cel mai mic multiplu comun al lui 6 și al lui 9, deci pe 18.

Subiectul III $r=6, \quad n=9.$

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Produs de cicluri disjuncte:

$\sigma=(1\ 2\ 9)(3\ 5\ 10\ 8\ 6)(7\ 11\ 4)$

Produs de transpozitii:

$\sigma=(1\ 9)(1\ 2)(3\ 6)(3\ 8)(3\ 10)(3\ 5)(7\ 4)(7\ 11).$

2.) ~~$\sigma = (1\ 2$~~ $\sigma=\underbrace{(1\ 2\ 9)}_{\alpha_1}\underbrace{(3\ 5\ 10\ 8\ 6)}_{\alpha_2}\underbrace{(7\ 11\ 4)}_{\alpha_3}$

~~ord(1 2~~

$ord(\alpha_1)=lungime(\alpha_1)=3.$

$ord(\alpha_2)=lungime(\alpha_2)=5$

$ord(\alpha_3)=lung(\alpha_3)=3.$

$ord(\sigma)=cmmmc(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=15.$

σ are următoarele inversiuni:

$(1, 9); (2, 3), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (2, 11),$
$(3, 6), (3, 9), (3, 4), (4, 6), (4, 8), (4, 9)(4, 11), (5, 6)$
$(5, 7), (5, 9), (5, 10), (5, 11), (6, 9), (7, 8), (7; 9), (7, 10);$
$(7, 11), (8, 9), (8, 11), (10, 11) \Rightarrow m(\sigma)=27.$

$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}=(-1)^{27}=-1.$

signatura

$\sigma^{2022+r}=\sigma^{2022+6}=\sigma^{2028}=(\sigma^{15})^{135+3}=e\cdot\sigma^3=\sigma^3$

Pag 5

$\Gamma = 6 \quad \Omega = 9.$

<u>Subiectul III</u> Continuare

2. $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 10 & 11 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \sigma^2 \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 10 & 11 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 6 & 10 & 7 & 5 & 9 & 6 & 11 \end{pmatrix} = \sigma^{2028}.$$

~~Sfd~~

Subiectul IV $\quad \Gamma = 6 \quad \Omega = 9$.

1. $x^4 + x^2 + 6 \mid x^3 + x + 9$

$-x^4 - x^2 - 9x \mid x$

$/ \quad / \quad -9x + 6$

$\Rightarrow$ Câtul este x, iar restul este $-9x+6$.