SEMINAR 12

ÎNTEGRALE IMPROPRII

Exercițiul 1 Să se studieze natura integralelor improprii $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ și $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$.

Rezolvare Fie $f, g: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ $\forall x \in [1,+\infty)$.

f, g funcții continue pe $[1,+\infty) \Rightarrow f, g$ funcții local integrabile pe $[1,+\infty)$.

$f(x) \geq 0$ $\forall x \in [1,+\infty)$

$g(x) \geq 0$ $\forall x \in [1,+\infty)$

În cazul în care funcția are semn constant, prin studierea naturii integralei improprii se înțelege studierea convergenței sau divergenței acesteia.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_1^a$$

$$= \lim_{a\to+\infty} (\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$$

Conform definiției, integrala improprie $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ este convergentă!

$1+x^2 \leq 2x^2$ $\forall x \in [1,+\infty) \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}x$ $\forall x \in [1,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+x^2 \leq \sqrt{2}x\sqrt{1+x^2}$ $\forall x \in [1,+\infty) \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}x\sqrt{1+x^2}}$ $\forall x \in [1,+\infty)$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{1+x^2} \geq \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ $\forall x \in [1,+\infty) \Rightarrow g(x) \leq \sqrt{2} f(x)$ $\forall x \in [1,+\infty)$

$0 \leq g(x) \leq \sqrt{2}\, f(x)\ \forall x \in [1, +\infty)$

$\int_1^{+\infty} \sqrt{2} f(x)\, dx = \sqrt{2} \int_1^{+\infty} f(x)\, dx = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$

Aplicând criteriul de comparație cu inegalități pentru integralele improprii, deducem că integrala improprie $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx$ este convergentă.

<u>Exercițiul 2</u> Să se studieze natura integralei improprii $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^4}{x^4}\, dx$.

<u>Rezolvare</u> Fie $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x^4}{x^4}\ \forall x \in [1, +\infty)$

f funcție continuă pe $[1, +\infty) \Rightarrow f$ funcție local integrabilă pe $[1, +\infty)$.

Funcția f nu are semn constant pe $[1, +\infty)$.

Studiem mai întâi absolut convergența integralei improprii.

$|f(x)| = \left| \frac{\sin x^4}{x^4} \right| = \frac{|\sin x^4|}{x^4} \leq \frac{1}{x^4}\ \forall x \in [1, +\infty)$

Alegem $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = \frac{1}{x^4}\ \forall x \in [1, +\infty)$

g funcție descrescătoare pe $[1, +\infty) \Rightarrow g$ funcție local integrabilă pe $[1, +\infty)$

$\int_1^{+\infty} g(x)\, dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{1}{x^4}\, dx = \lim_{a \to +\infty} -\frac{1}{3x^3} \Big|_1^a =$

$= \lim_{a \to +\infty} \left(-\frac{1}{3a^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

$0 \le |f(x)| \le g(x) \ \forall x \in [1, +\infty)$

$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

Aplicând criteriul de comparație cu inegalități, deducem că integrala improprie $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ este convergentă.

$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ convergentă $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx$ absolut convergentă $\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx$ convergentă.

EXERCIȚIUL 3 Să se studieze natura următoarelor integrale improprii:

a) $\int_0^{1-0} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx$

b) $\int_{0+0}^{\pi-0} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+[x]^2} dx$.

d) $\int_{0+0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

e) $\int_{0+0}^{1} \frac{1}{\sqrt[7]{x^3} + \sqrt[11]{x^4}} dx$

f) $\int_{0+0}^{1} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx$.

__Exercițiul 4__ Să se calculeze, folosind funcțiile B și Γ, următoarele integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \cos^{11} x \, dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{tg\, x} \, dx$

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} \, dx$

d) $\int_0^{1-0} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

__Rezolvare__ a) Se folosește definiția funcției $B : (0,\infty)\times(0 \to \mathbb{R}$

$$B(p,q) = 2\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} (\sin x)^{2p-1}(\cos x)^{2q-1} x \quad \forall p,q \in (0,+\infty).$$

$$\begin{cases} 2p-1=7 \\ 2q-1=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=4 \\ q=6 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \cos^{11} x \, dx = \frac{1}{2} B(4,6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(4)\cdot\Gamma(6)}{\Gamma(4+6)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(4)\cdot\Gamma(6)}{\Gamma(10)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3! \cdot 5!}{9!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}{6\cdot 7\cdot \underset{4}{\cancel{8}}\cdot \underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6\cdot 7\cdot 4\cdot}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} = \frac{1}{1008}$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{tg\, x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} (\sin x)^{\frac{1}{2}} \cdot (\cos x)^{-\frac{1}{2}} d$

Se rezolvă sistemul $\begin{cases} 2p-1 = \frac{1}{2} \\ 2q-1 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2p = \frac{3}{2} \\ 2q = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{3}{4} \\ q = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

c) În acest caz folosim definiția funcției $B : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $B(p, q) = \int_{0+0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} p - 1 = \frac{1}{4} \\ p + q = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} p = 1 + \frac{1}{4} \\ q = 2 - p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{5}{4} \\ q = \overset{4}{2} - \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{5}{4} \\ q = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1!} = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{3}{4}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\cancel{4}}\cdot \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

d) $$\int_0^{1-0} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{1-0} x^4 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Pentru calculul acestei integrale improprii se folosește definiția alternativă a funcției $B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $B(p,q)=\int_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ $\forall\, p,q\in(0,\infty)$.

Se utilizează schimbarea de variabilă.

$x^2 = t$:

$x^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{t}$.

$$dx = (\sqrt{t})'\,dt = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt.$$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x \nearrow 1 \Rightarrow t \nearrow 1.$

$$\int_0^{1-0} x^4(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^{1-0} t^2(1-t)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1-0} t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Se rezolvă sistemul $\begin{cases} p-1=\frac{3}{2} \\ q-1=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$$\begin{cases} p = 1+\frac{3}{2} \\ q = 1-\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\frac{5}{2} \\ q=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\int_0^{1-0} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\cdot B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\cdot 2!} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4.} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{\frac{3}{4}\left(\sqrt{\pi}\right)^2}{4} = \frac{3\pi}{16}$$

<u>Exercițiul 5</u> Să se calculeze integrala improprie $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

<u>Rezolvare</u> Pentru calculul integralei improprii propuse folosim funcția Gamma a lui Euler.

$\Gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\Gamma(p) = \int_{0+0}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$.

Mai întâi, utilizăm schimbarea de variabilă $x^2 = t$.

$x^2 = t \Rightarrow x = \sqrt{t}$

$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt.$

$x \searrow 0 \Rightarrow t \searrow 0$

$x \nearrow 1 \Rightarrow t \nearrow 1$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{0+0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{0+0}^{1-0} e^{-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0+0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt$$

$$\int_{0+0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{0+0}^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt.$$

Rezolvăm relația

$$p-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow p=\frac{1}{2}$$

$$\int_{0+0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \Rightarrow \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercițiul 6 Să se ~~rezolve~~ calculeze următoarele integrale:

a) $\displaystyle\int_{0+0}^{1-0} \frac{1}{\sqrt[6]{x^5(1-x)}} dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^2} dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\sin^5 x \cos^3 x}\, dx.$

d) $\displaystyle\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\operatorname{ctg} x} \cdot \cos^2 x\, dx;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

e) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^4} dx.$