SEMINAR 8

Serii de puteri

Serii de puteri remarcabile

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1,1)$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1,1)$

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

EXERCIȚIUL 1 Să se determine raza de convergență, mulțimea de convergență și suma următoarelor serii de puteri!

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

Rezolvare a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$

Se identifică x_0 și coeficienții seriei de puteri a_n.

$x_0 = 0$

$a_0 = 0$

$a_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Raza de convergență se calculează cu formula din teorema Cauchy-Hadamard

$R = \frac{1}{\rho} \in [0, +\infty]$

$\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}.$

Aplicăm criteriul radicalului pentru șiruri de numere reale pozitive.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Longrightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \rho = 1.$

$\rho = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1} = 1.$

Mulțimea de convergență A are următoarele proprietăți:

- $A \subseteq \mathbb{R}$ nevidă $(x_0 \in A)$
- $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$.

$(0-1, 0+1) \subseteq A \subseteq [0-1, 0+1] \Rightarrow (-1,1) \subseteq A \subseteq [-1,1]$.

Pentru a identifica corect mulțimea A trebuie să verificăm dacă $1 \in A$ și $-1 \in A$.

$1 \in A \Longleftrightarrow$ seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{n} =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este convergentă

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^1}$ (seria armonică cu $\alpha=1$)
serie divergentă de numere reale $\Rightarrow$ $\underline{1 \notin A}$.

$-1 \in A \Leftrightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Leibniz}]{\text{crit.}}$ seria alternată $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă $\Rightarrow \underline{\underline{-1 \in A}}$

Așadar, $A = [-1, 1)$

Suma seriei de puteri $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ este funcția $f: A \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ $\forall x \in A$.

$f: [-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

f are următoarele proprietăți:

a) $f(x_0) = a_0$

b) $f|_{(x_0-R, x_0+R)}$ este indefinit derivabilă

$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(x-x_0)^n)^{(k)}$ $\forall x \in (x_0-R, x_0+R)$
$\forall k \in \mathbb{N}$

$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int a_n(x-x_0)^n dx$, $x \in (x_0-R, x_0+R)$

c) Dacă $x_0 - R \in A$, atunci f este continuă în $x_0 - R$

d) Dacă $x_0+R \in A$, atunci f este continuă în x_0+R.

$f(x_0)=a_0 \Rightarrow f(0)=0$.

f este indefinit derivabilă pe $(-1,1)$

f este continuă în -1.

$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n}x^{n-1}}{\cancel{n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1} \underline{\underline{m=n-1}}$

$=\sum_{m=0}^{+\infty}x^m=\frac{1}{1-x}\ \forall x\in(-1,1)$

$f'(x)=\frac{1}{1-x}\ \forall x\in(-1,1) \Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{1-x}\,dx=$

$=-\ln|1-x|+C=-\ln(1-x)+C\ \forall x\in(-1,1)$.

$f(x)=-\ln(1-x)+C\ \forall x\in(-1,1) \Rightarrow f(0)=-\ln 1+C=$

$=C$

$f(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=-\ln(1-x)\ \forall x\in(-1,1)$

f continuă în $-1 \Rightarrow f(-1)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} -\ln(1-x)$

$=-\ln 2$

$f:[-1,1)\to\mathbb{R}$

$f(x)=-\ln(1-x)\ \forall x\in[-1,1)$.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_0(x-x_0)^n$

$x_0=0$

$a_0=1$

$a_n=(n+1)\ \forall n\in\mathbb{N}$.

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|n+1|}{|n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$$

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A \subseteq [x_0 - R, x_0 + R] \Rightarrow (-1,1) \subseteq A \subseteq [-1,1]$$

$x = 1 \in A \Leftrightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\cdot 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)$ este convergentă

$\lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)$ serie divergentă

$\Rightarrow 1 \notin A$

$x = -1 \in A \Leftrightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-1)^n$ este convergentă.

$$\lim_{k\to+\infty} (2k+1)(-1)^{2k} = +\infty$$

$$\lim_{k\to+\infty} (2k+2)(-1)^{2k+1} = -\infty \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} (n+1)(-1)^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ seria $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-1)^n$ este divergentă $\Rightarrow -1 \notin A$.

Așadar, $A = (-1,1)$

$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n \ \forall x \in (-1,1)$

$f(x_0) = a_0 \Rightarrow f(0) = 1$

f indefinit derivabilă pe $(-1,1)$

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int (n+1)x^n\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} + C \overset{m=n+1}{=}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} x^m + C = \sum_{m=0}^{+\infty} x^m + C - 1 = \frac{1}{1-x} + C - 1 \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{1-x} + C - 1 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{1-x} + C - 1\right)' =$$

$$= -\frac{(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \forall x \in (-1,1)$$

$f : (-1,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \forall x \in (-1,1)$$

c) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$x_0 = 0$

$a_0 = 0$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$a_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|0|} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}}$$

Știm că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ (vezi punctul (a)) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}} = 1 \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \sup\{0,1\} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A \subseteq [x_0 - R, x_0 + R] \Rightarrow (-1,1) \subseteq A \subseteq [-1,1]$

$x = -1 \in A \Leftrightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ este convergentă

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n+1}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \\ \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\| \xrightarrow[\text{LEIBNIZ}]{\text{crit.}}$ seria alternată $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ este convergentă $\Rightarrow -1 \in A$.

$1 \in A \Leftrightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1^{2n+1}}{2n+1} =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ este convergentă.

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ serie convergentă $\Rightarrow$

$-1 \in A$.

Așadar, $A = [-1, 1]$.

$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \ \forall x \in [-1,1]$.

$f(x_0) = a_0 \Rightarrow f(0) = 0$

f indefinit derivabilă pe $(-1,1)$

f continuă în -1 și în 1.

~~$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int (-1)^n x$~~

$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \ \forall x \in (-1,1)$

Știm că $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \ \forall x \in (-1,1) \xrightarrow{x \to x^2}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \ \forall x^2 \in (-1,1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\forall x \in (-1,1)$

$f(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C \ \forall x \in (-1,1)$

$\left.\begin{array}{l} f(0) = \operatorname{arctg} 0 + C = C \\ f(0) = 0 \end{array}\right\| \Rightarrow C = 0$

$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad \forall x \in (-1,1)$

f continuă în $1 \Rightarrow f(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

f continuă în $-1 \Rightarrow f(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(-1) =$
$= -\frac{\pi}{4}$

$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \; f(x) = \operatorname{arctg} x \quad \forall x \in [-1,1]$

EXERCIȚIUL 2 Să se determine raza de convergență și mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n + 3^n}$

b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n! \, x^n}{n^2 + 1}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ (se calculează și suma seriei

d) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+1} \cdot x^n$

e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$ (se calculează și suma seriei

f) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) x^n$ (se calculează și suma seriei).