SEMINAR 4

Elemente de topologie generală. Topologia unui spațiu metric

- **Construcția topologiei asociată unei distanțe**

(X, d) spațiu metric

Distanței $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ i se asociază topologia

$\tau_d = \{\phi\} \cup \{G \subseteq X \mid G \neq \phi, \forall x \in G\ \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq G\}$

Proprietăți a) $B(x, r) \in \tau_d\ \forall x \in X, \forall r > 0$.

b) Orice bilă închisă din X este mulțime închisă relativ la topologia τ_d.

c) $A \subseteq X$

$x_0 \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \subseteq A$

d) $A \subseteq X$

$x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0$ avem că $B(x_0, r) \cap A \neq \phi$

e) $A \subseteq X$

$x_0 \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0$ avem că $B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \phi$

f) $A \subseteq X$

$x_0 \in \text{Izo}\, A \Leftrightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$

- **Topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$**

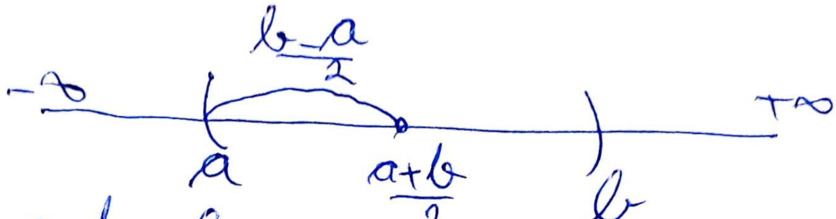
$(\mathbb{R}, d)$ spațiu metric

$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $d(x, y) = |x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ distanța uzuală

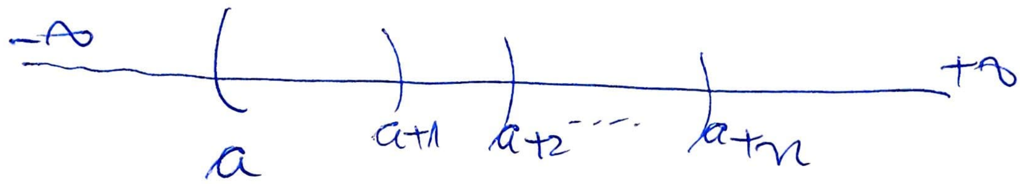
$\tau_{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \tau_d$ topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$.

Exercițiul 1 Să se arate că $(a,b) \in \tau_{\mathbb{R}}$ $\forall a<b$, $(a,+\infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ și $(-\infty, b) \in \tau_{\mathbb{R}}$ $\forall b \in \mathbb{R}$

REZOLVARE



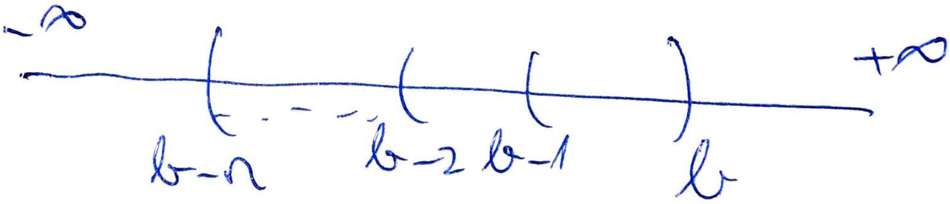
$$(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right) \in \tau_{\mathbb{R}} \quad \forall a<b$$



$$(a,+\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (a, a+n)$$

$$(a, a+n) \in \tau_{\mathbb{R}} \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (a, a+n) \in \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,+\infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$$



$$(-\infty, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (b-n, b)$$

$$(b-n, b) \in \tau_{\mathbb{R}} \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (b-n, b) \in \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\infty, b) \in \tau_{\mathbb{R}}.$$

Exercițiul 2 Să se arate că $[a,b]$ cu $a<b$, $[a,+\infty)$ și $(-\infty,b]$ sunt mulțimi închise în $\mathbb{R}$.

REZOLVARE

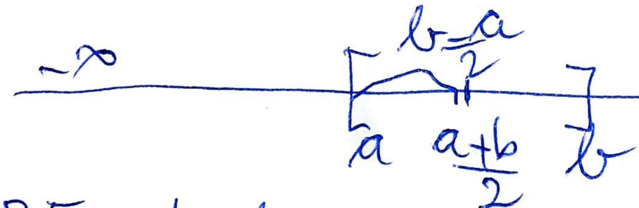
$C_{\mathbb{R}}[a,b] = \mathbb{R}\setminus[a,b] = (-\infty,a)\cup(b,+\infty)$

Conform exercițiului 1, avem că $(-\infty,a)\in\tau_{\mathbb{R}}$ și $(b,+\infty)\in\tau_{\mathbb{R}}$.

$$\left.\begin{array}{l}(-\infty,a)\in\tau_{\mathbb{R}}\\(b,+\infty)\in\tau_{\mathbb{R}}\end{array}\right\} \Rightarrow (-\infty,a)\cup(b,+\infty)\in\tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow C_{\mathbb{R}}[a,b]\in\tau_{\mathbb{R}}$$

$\overset{def}{\Longrightarrow}$ $[a,b]$ mulțime închisă din $\mathbb{R}$

Altă variantă de argumentare a faptului că $[a,b]$ este mulțime închisă în $\mathbb{R}$ este descrierea acestui interval ca o bilă închisă în $\mathbb{R}$.



$[a,b] = B\left[\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$

$C_{\mathbb{R}}[a,+\infty) = \mathbb{R}\setminus[a,+\infty) = (-\infty,a) \in\tau_{\mathbb{R}}$ (conform exercițiului 1)

$C_{\mathbb{R}}[a,+\infty)\in\tau_{\mathbb{R}} \overset{def}{\Longrightarrow} [a,+\infty)$ mulțime închisă în $\mathbb{R}$

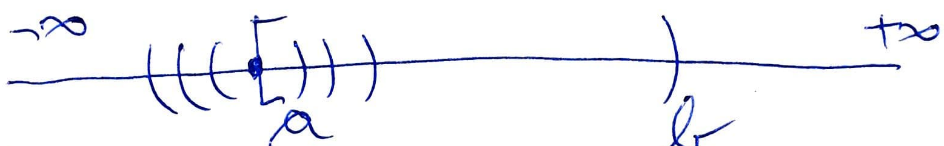
$\cancel{C_{\mathbb{R}}[b,+\infty) = \mathbb{R}\setminus}$

$C_{\mathbb{R}}(-\infty,b] = \mathbb{R}\setminus(-\infty,b] = (b,+\infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$ (conform exercițiului 1)

$C_{\mathbb{R}}(-\infty,b] \in \tau_{\mathbb{R}} \overset{def}{\Longrightarrow} (-\infty,b]$ mulțime închisă din $\mathbb{R}$.

<u>Exercițiul 3</u> Fie $a<b\in\mathbb{R}$. Să se arate că $[a,b)$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$ și că $[a,b)$ nu este mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

<u>REZOLVARE</u>



Alegem elementul $a \in [a,b)$

Se observă că $(a-r,a+r) \not\subseteq [a,b)\ \forall r>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(a,r) \not\subseteq [a,b)\ \forall r>0$.

Din definiția topologiei $\tau_{\mathbb{R}}$ deducem că $[a,b) \notin \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow [a,b)$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

$C_{\mathbb{R}}[a,b) = \mathbb{R}\setminus[a,b) = (-\infty,a)\cup[b,+\infty)$

Fie $b \in C_{\mathbb{R}}[a,b)$

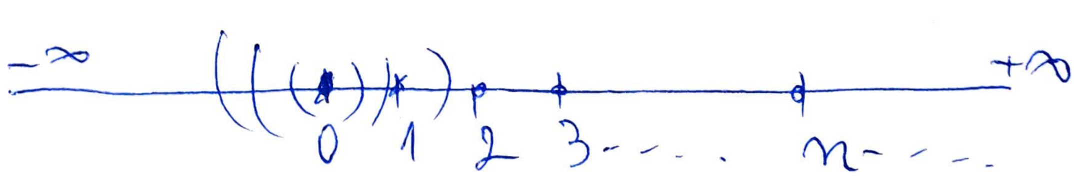
Se observă că $(b-r, b+r) \not\subset C_{\mathbb{R}}[a,b)$ $\forall r>0$
$\Rightarrow B(b,r) \not\subset C_{\mathbb{R}}[a,b)$ $\forall r>0 \Rightarrow C_{\mathbb{R}}[a,b) \notin \tau_{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow [a,b)$ nu este mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

<u>Exercițiul 4</u> Fie $a<b \in \mathbb{R}$. Să se arate că $(a,b]$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$ și că $(a,b]$ nu este mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

<u>Exercițiul 5</u> a) Să se arate că $\mathbb{N}$ este mulțime închisă în $\mathbb{R}$, dar nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$

b) Să se arate că orice mulțime finită $A \subseteq \mathbb{R}$ este închisă în $\mathbb{R}$, dar nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

<u>REZOLVARE</u>



Alegem elementul $0 \in \mathbb{N}$

Se observă că $(0-r, 0+r) \not\subset \mathbb{N}$ $\forall r>0 \Rightarrow B(0,r) \not\subset \mathbb{N}$ $\forall r>0$
$\Rightarrow \mathbb{N} \notin \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{N}$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

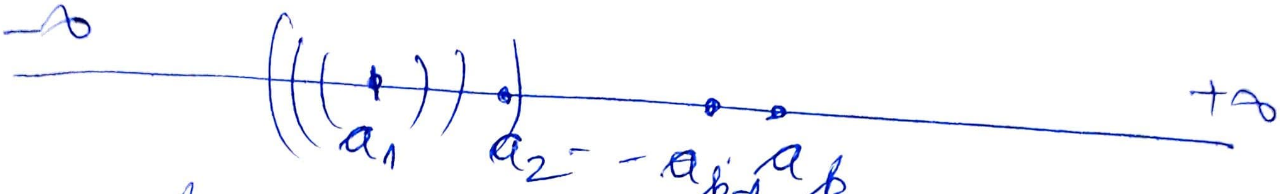
$C_{\mathbb{R}}\mathbb{N} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup \dots \cup (n, n+1) \cup \dots$
$= (-\infty, 0) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$.

$(-\infty, 0) \in \tau_{\mathbb{R}}$

$(n, n+1) \in \tau_{\mathbb{R}}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n+1) \in \tau_{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow (0, \infty) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n+1) \in \tau_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow C_{\mathbb{R}}\mathbb{N} \in \tau_{\mathbb{R}} \xRightarrow{def} \mathbb{N}$ mulțime ~~deschisă~~ închisă în $\mathbb{R}$.

b) $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}$



Alegem elementul $a_1 \in A$.
Se observă că $(a_1 - r, a_1 + r) \not\subseteq A\ \forall r > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow B(a_1, r) \not\subseteq A\ \ \forall r > 0 \Rightarrow A \notin \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow A$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

$C_{\mathbb{R}}A = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup \ldots \cup (a_{k-1}, a_k) \cup (a_k, +\infty)$

$(-\infty, a_1) \in \tau_{\mathbb{R}}$

$(a_k, +\infty) \in \tau_{\mathbb{R}}$

$(a_i, a_{i+1}) \in \tau_{\mathbb{R}}\ \forall 1 \le i \le k-1$

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A \in \tau_{\mathbb{R}} \Rightarrow C_{\mathbb{R}} A \in \tau_{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow A$ mulțime închisă în $\mathbb{R}$

Exercițiul 5 Să se demonstreze că $\mathbb{Z}$ este mulțime închisă în $\mathbb{R}$, dar nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

Exercițiul 6 Să se arate că $\mathbb{Q}$ nu este mulțime deschisă și mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

Rezolvare Demonstrăm prin reducere la absurd că $\mathbb{Q}$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

Presupun că $\mathbb{Q}$ este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$ $\overset{def}{\Longrightarrow}$
$\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists r>0$ a.î. $(x-r, x+r) \subseteq \mathbb{Q}$

Fie $x=0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists r>0$ a.î. $(0-r, 0+r) \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow (-r, r) \subseteq \mathbb{Q}$

$-\frac{r}{2} \in (-r, r)$

$\frac{r}{2} \in (-r, r)$

Între numerele reale $-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}$ există cel puțin un număr irațional α.

$-\frac{r}{2} \leq \alpha \leq \frac{r}{2} \Rightarrow \alpha \in (-r, r)$

$(-r, r) \subseteq \mathbb{Q}$ $\Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$ contradicție

Presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow \mathbb{Q}$ nu este mulțime deschisă în $\mathbb{R}$.

Demonstrăm prin reducere la absurd că $\mathbb{Q}$ nu este mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

Presupun că ~~$C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$~~ $\mathbb{Q}$ este mulțime închisă în $\mathbb{R} \Rightarrow C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \exists r>0$ a.î. $(x-r, x+r) \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Fie $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow \exists r>0$ a.î. $(\sqrt{2}-r, \sqrt{2}+r) \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Între numerele reale $\sqrt{2}-\frac{r}{2}$ și $\sqrt{2}+\frac{r}{2}$ există cel puțin un număr rațional β.

$\sqrt{2}-\frac{r}{2} \le \beta \le \sqrt{2}+\frac{r}{2} \Rightarrow \beta \in (\sqrt{2}-r, \sqrt{2}+r)$

$(\sqrt{2}-r, \sqrt{2}+r) \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\Rightarrow \beta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

contradicție

Presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ nu este mulțime închisă în $\mathbb{R}$.

Exercițiul 7 Să se arate că $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nu este mulțime deschisă și mulțime închisă în $\mathbb{R}$

Exercițiul 8 Fie $A = [a, b) \cup \{c\}$ cu $a < b < c$

a) Să se determine $\mathring{A}$, $\bar{A}$, $\mathrm{Fr}A$, A' și $\mathrm{Izo}\,A$.

b) Este A mulțime deschisă în $\mathbb{R}$?

c) Este A mulțime închisă în $\mathbb{R}$?