

Examen la algebră ¹
an I, sem. I
3.02.2022

Numele și prenumele^{Tudose Alexandru-Ștefan}

Grupa¹³¹

Γ = numărul de litere al primului nume =⁶

Ω = numărul de litere al primului prenume =⁹

Subiectul I.

1. Pe mulțimea \mathbb{R} definim relația binară

$$x \sim y \iff x = y \text{ sau } x + y = \Omega.$$

- (i) Să se arate că " \sim " este o relație de echivalență.
 - (ii) Să se determine clasa de echivalență a numărului real 2022 în raport cu relația \sim .
 - (iii) Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x(\Omega - x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, nu este nici injectivă, nici surjectivă.
 - (iv) Să se arate că mulțimea factor \mathbb{R}/\sim este echipotentă cu imaginea funcției f de la punctul (iii). **(6 pct.)**
2. Definim funcția $g : \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1)$, $g(n) = \{2^n \sqrt[13]{\Gamma}\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x . Să se arate că g este injectivă. **(3 pct.)**

Subiectul II.

- 1. Determinați elementele de ordin 2 și elementele de ordin 3 din grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma+5}, +)$.
- 2. Determinați elementele de ordin 6 din grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma+5} \times \mathbb{Z}_{\Omega+12}, +)$. **(3 pct.)**
- 3. Conține grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma} \times \mathbb{Z}_{\Omega}, +)$ un element de ordin $\Gamma \cdot \Omega$? **(3 pct.)**

¹Toate subiectele sunt obligatorii.

La fiecare subiect, înlocuiți Γ și Ω cu valorile specificate mai sus! La fiecare subiect, înlocuiți Γ și Ω cu valorile specificate mai sus! (Spre exemplu: dacă numele este Vasilescu Ștefan Alexandru considerați peste tot $\Gamma = 9$ și $\Omega = 6$.)

Toate răspunsurile trebuie justificate. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate.

Timp de lucru $2\frac{1}{2}$ ore. Succes!

Subiectul III. Se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

1. Descompuneți σ în produs de cicluri disjuncte și în produs de transpoziții. **(3 pct.)**
2. Aflați ordinul și signatura permutării σ . Calculați $\sigma^{2022+\Gamma}$. **(3 pct.)**
3. Determinați permutările $\tau \in S_{10}$ cu proprietatea că $\tau^2 = \sigma^\Omega$. **(3 pct.)**

Subiectul IV.

1. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $X^4 + X^2 + \Gamma$ la $X^3 + X + \Omega$ în $\mathbb{Q}[X]$.
2. Să se determine cmmdc al polinoamelor $X^5 + X^2 + \hat{\Gamma}$ și $X^3 + \hat{\Omega}X + \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_2[X]$.
3. Să se determine numărul elementelor inversabile, al elementelor nilpotente și al elementelor idempotente din inelul $\mathbb{Z}_{6\Gamma}$.
4. Fie $I = (X - \Gamma, \Omega)$ idealul din $\mathbb{Z}[X]$ generat de $X - \Gamma$ și Ω . Să se arate că $I \neq \mathbb{Z}[X]$.