GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 10
Forme pătratice. Aducerea la forma canonică

Exemplul 1. Voi face o aplicaţie a diagonalizării matricelor. Şirului Fibonacci este definit recurent $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}, k \geqslant 3$ cu $f_1 = 1, f_2 = 1$. Dorim să aflăm termenul general al şirului, ca o expresie. Considerăm vectorii $w_k = \binom{f_k}{f_{k-1}}$ pentru $k \geqslant 2$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Avem $A \cdot w_k = w_{k+1}$, deci $A^{n-2} \cdot w_2 = v_n$. Deci trebuie să găsim o formulă pentru A^k. Pentru aceasta trebuie diagonalizată matricea A.

Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ polinomul caracteristic $P_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$. Deci în cazul matricii A asociată şirului Fibonacci avem $P_A(X) = X^2 - X - 1$, cu rădăcinile $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Produsul $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Vectorii proprii asociaţi valorilor proprii λ_j sunt $v_j = \binom{\lambda_j}{1}$.

Deci $A = QDQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ şi

$A^{n-2} = QD^{n-2}Q^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & -\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \lambda_2^{n-1}\lambda_1 \\ \lambda_1^{n-2} - \lambda_2^{n-2} & -\lambda_1^{n-2}\lambda_2 + \lambda_2^{n-2}\lambda_1 \end{pmatrix}$.

Folosind şi relaţia $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ obţinem $f_n = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} + \lambda_1^{n-2} - \lambda_2^{n-2}\right) =$
$= \frac{\lambda_1^{n-2}(\lambda_1+1)-\lambda_2^{n-2}(\lambda_2+1)}{\lambda_1-\lambda_2}$. Dar $\lambda_j + 1 = \lambda_j^2$. Deci am obţinut expresia

$$f_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Forme biliniare, forme pătratice

Înainte de a da definiţia unei forme pătratice să mai vedem exemple de forme biliniare. Fie V un spaţiu vectorial real cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$.

Exemplul 2.

- dacă $f_1, f_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt forme liniare atunci $F(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ este o formă biliniară.
- fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definim $F(x, y) = x^t \cdot A \cdot y = \sum_{i,j}^n a_{i,j}x_iy_j$.

Considerăm $n = 3$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Forma biliniară asociată acestei matrice este $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_2$$

.

Dacă alegem o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a spaţiului V, şi pe V avem o formă biliniară F, considerăm matricea $F(e_i, e_j) = a_{i,j}$. În funcţie de această matrice exprimăm valorile lui F pentru orice vectori. $F(x, y) = \sum_{i,j}^{n} a_{i,j}x_iy_j$.

Propoziţia 3. *$F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ este simetrică dacă şi numai dacă matricea asociată lui F într-o bază este simetrică.*

Deci avem o corespondenţă bijectivă între mulţimea aplicaţiilor biliniare şi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care se restricţionează la o bijecţie între mulţimea aplicaţiilor biliniare simetrice şi mulţimea matricelor simetrice.

Legătura matricelor formei biliniare F la schimbarea bazei este dată de

Propoziţia 4. *Fie $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ două baze ale spaţiului vectorial V şi $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ matricea de trecere din baza $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{C}$ şi $A_{\mathcal{B}}$ şi respectiv $A_{\mathcal{C}}$ matricele asociate formei biliniare F în cele două baze. Atunci avem $A_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^t \cdot A_{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.*

Exemplul 5. $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ este biliniară. matricea asociată în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $F(x, x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2$. Se vede că este pozitiv definită.

Definiţia 6. Forma *pătratică* asociată unei forme biliniare simetrice F, este $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = F(x, x)$.

F se numeşte *polara* formei pătratice. Dintr-o formă pătratică obţinem polara acesteia prin formula $F(x, y) = \frac{1}{2}\left(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\right)$, care este simetrică.

Avem o bijecţie între forme pătratice şi matrice simetrice.

Exemplul 7. $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 5x_2x_3$. Matricea A asociată lui Q în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 7 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

Definiţia 8. Spunem că forma pătratică Q este redusă la forma canonică dacă într-o bază avem $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_ix_i^2$.

Voi prezenta trei metode pentru aducerea formelor pătratice la forma canonică.

Metoda 1

Teorema 9 (Gauss)**.** *Fie V un spaţiu vectorial cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ şi $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică. Există o bază în care Q are forma canonică.*

Demonstraţie: Presupunem $Q \neq 0$. Pentru forma nulă nu avem ce demonstra. Demonstraţia ne va da algoritmul de obţinere a formei canonice. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza în care $Q(x) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j$. Avem două cazuri.

(1) $\exists i$ a.î. $a_{i,i} \neq 0$. Renumerotăm şi presupunm că $a_{1,1} \neq 0$. Cu acesta vom forţa un pătrat perfect.

Rescriem $Q(x) = a_{1,1}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^n a_{1,j}x_1x_j + \sum_{2\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j =$

$= \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ldots+a_{1,n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{1,1}}\sum_{2\leqslant i,j\leqslant n} a_{1,i}a_{1,j}x_ix_j + \sum_{2\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j =$

$= \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n)^2 + \sum_{2\leqslant i,j\leqslant n} a'_{i,j}x_ix_j,$

unde $a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{1,i}a_{1,j}}{a_{1,1}}$.

Facem notaţia $x'_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n, x'_2 = x_2, \ldots, x'_n = x_n$ şi obţinem $Q(x') = \frac{1}{a_{1,1}}(x'_1)^2 + \sum_{2\leqslant i,j\leqslant n} a'_{i,j}x'_ix'_j$.

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ sunt componentele vectorului x în baza $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$, în care forma pătratică Q este reprezentată de ecuaţia de mai sus. În această scriere suma $\sum_{2\leqslant i,j\leqslant n} a'_{i,j}x'_ix'_j$ este o formă pătratică în $n-1$ variabile căreia i se aplică cazul (1) sau/şi cazul (2) de mai jos.

(2) $a_{i,i} = 0, (\forall)i \in \{1, \ldots, n\}$. $(\exists)i \neq j$ a.î. $a_{i,j} \neq 0$ $(Q \neq 0)$. Renumerotând putem presupune că $a_{1,2} \neq 0$. Facem următoarea schimbare de coordonate $x_1 = x'_1 + x'_2, x_2 = x'_1 - x'_2, x_3 = x'_3, \ldots, x_n = x'_n$ şi obţinem

$Q(x') = 2a_{1,2}[(x'_1)^2 - (x'_2)^2] + \ldots$, formă care este în cazul (1).

După o repetare de un număr finit de ori a acestor cazuri vom ajunge la forma canonică.

□

Exemplul 10. Fie $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$. Folosind algoritmul Gauss obţinem $Q(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2x_3 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4(x_2^2 + x_2x_3 + \frac{1}{4}x_3^2) - x_3^2 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - x_3^2$.

Deci $Q(\overline{x}) = \overline{x}_1{}^2 - 4\overline{x}_2{}^2 - \overline{x}_3{}^2$, unde $\overline{x}_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \overline{x}_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3, \overline{x}_3 = x_3$.

Exemplul 11. Fie $Q(x) = 2x_2x_3$. Matricea acestei forme pătratice este cea din **exemplul ??**, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Folosind schimbarea de coordonate $x_2 = \overline{x}_2 + \overline{x}_3, x_3 = \overline{x}_2 - \overline{x}_3$, obţinem $Q(\overline{x}) = 2\overline{x}_2{}^2 - 2\overline{x}_3{}^2$.

Metoda 2

Teorema 12 (Jacobi)**.** *Fie V un spaţiu vectorial cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$, şi $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$, o formă pătratică $Q(x) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j$ într-o bază $\mathcal{B}$. Dacă matricea $A = (a_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ are toţi minorii principali $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det(A)$ nenuli, atunci există o bază $\overline{\mathcal{B}}$ a lui V în care $Q(\overline{x}) = \frac{1}{\Delta_1}\overline{x}_1{}^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\overline{x}_2{}^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\overline{x}_n{}^2$.*

Exemplul 13. Considerăm forma pătratică Q care într-o bază $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$ are matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru care $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 3, \Delta_3 = -1$. Toţi sunt nenuli, deci conform teoremei Jacobi forma canonică a formei pătratice Q este $Q(\overline{x}) = \overline{x}_1{}^2 + \frac{1}{3}\overline{x}_2^2 + \frac{3}{-1}\overline{x}_3^2$.

Metoda transformărilor ortogonale

A treia metodă de aducere la forma canonică a unei forme pătratice Q este metoda transformărilor ortogonale.

Ce înseamnă aducerea la forma canonică a unei forme pătratice la nivel de matrice? Înseamnă aducerea la forma diagonală a matricei A asociate formei pătratice, care este o matrice simetrică. Ştim din **teorema 15** din cursul 8, că orice matrice simetrică este diagonalizabilă, deci Q poate fi adusă la forma canonică.

Forma canonică pentru Q, va fi $Q(v) = \lambda_1\overline{x}_1^2 + \lambda_2\overline{x}_2^2 + \ldots + \lambda_n\overline{x}_n^2$, unde λ_i sunt valorile proprii ale matricei A.

Metodă constă în aflarea valorilor proprii dar şi a vectorilor proprii asociaţi acestora. Aceşti vectori proprii formează bază pentru spaţiul vectorial pe care este definită forma pătratică. Un ultim pas în această metodă constă în obţinea unei baze ortonormate de vectori proprii din vectorii proprii deja obţinuţi. Obţinem nu numai forma canonică, dar şi baza în care este exprimată această formă canonică. Această metodă funţionează numai pentru spaţii euclidiene.

Sigur că şi în cazul metodelor Gauss şi Jacobi se poate obţine baza în care este exprimată forma canonică, dar prin această metodă obţinem o bază ortonormată.

Voi începe cu exemplul de la începutul cursului anterior.

Exemplul 14. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matricea formei pătratice $Q(v) = 2x_2x_3$, unde $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Ştim că polinomul caracteristic $P_A(X) = X(X-1)(X+1)$, cu rădăcinile $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Vectorii proprii asociaţi acestor valori proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Folosind produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^3$, (pentru $x, y \in \mathbb{R}^3$, $< x, y >= \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$) vedem că $< v_i, v_j >= 0$ pentru $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$, adică $\{v_1, v_2, v_3\}$ reprezintă o bază ortogonală pentru $\mathbb{R}^3$. Dorim să obţinem o bază ortonormată. Pentru aceasta normăm vectorii adică împărţim cu norma fiecăruia şi obţinem vectori de normă 1. $||v_1|| = 1, ||v_2|| = \sqrt{2}, ||v_3|| = \sqrt{2}$. Deci $e_1 = v_1, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2, e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$.

Punem aceşti vectori ca şi coloane ale unei matrice $S = (e_1\ e_2\ e_3)$. Pentru că e_i sunt vectori proprii asociaţi aceloraşi valori proprii ca şi v_i, avem $A = SDS^{-1}$, unde D este matricea diagonală $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, iar $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. În acest caz vedem că $S^{-1} = S = {}^tS$.

Forma canonică a formei pătratice Q este $Q(v) = x_2'^2 - x_3'^2$, asociată matricei diagonale D, ce are pe diagonala principală valorile proprii.

Prin acest procedeu am obţinut nu numai forma canonică pentru Q ci şi baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, e_3\}$ în care Q se scrie în forma canonică.

$S = (e_1\ e_2\ e_3) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3}) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, este matricea de trecere din baza $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$, în care a fost exprimată matricea A a formei pătratice Q, în baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Să mai facem o observaţie legat de matricea S. $S = (e_1\ e_2\ e_3)$ şi astfel matricea transpusă, ${}^tS = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$. Fiecare componentă a produsului $({}^tS \cdot S)_{ij} =< e_i, e_j >= \delta_{ij}$ (δ_{ij} este simbolul Kronecker şi este 1 pentru $i = j$ şi 0 pentru $i \neq j$). Adică ${}^tS \cdot S = I_3$, de unde egalitatea ${}^tS = S^{-1}$ menţionată anterior. Particular acestui exemplu este faptul că ${}^tS = S^{-1}$ este egală cu S.

Un ultim comentariu. În **propoziţia ??** am menţionat legătura între matricele asociate unei forme biliniare la schimbarea de bază. Matricea asociată unei forme biliniare simetrice F este aceeaşi cu matricea asociată formei pătratice a formei F. În notaţiile din acest exemplu formula este $A_{\mathcal{B}'} = {}^tM_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. Avem $A_{\mathcal{B}'} = D$, $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = S$ şi relaţia este $D = {}^tSAS = SAS$.

Voi mai prezenta încă un exemplu de aducere la forma canonică a unei forme pătratice.

Exemplul 15. Considerăm forma pătratică $Q(v) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ pe $\mathbb{R}^3$, cu matricea asociată $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Metoda Gauss: $Q(v) = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2$. Deci $Q(v) = \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2$. Schimbarea de coordonate este $\overline{x}_1 = x_1 + x_3$, $\overline{x}_2 = x_2$, $\overline{x}_3 = x_3$. Matricea formei Q în baza $\overline{\mathcal{B}}$ este $M_{\overline{\mathcal{B}}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Doresc să specific în acest caz baza în care am obţinut forma canonică. Considerăm A scrisă în baza canonică $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$. Pentru orice vector $v \in \mathbb{R}^3$ legătura dintre coordonatele lui v în baza $\mathcal{B}$ şi baza $\overline{\mathcal{B}}$ este $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix}$. Rezolvăm sistemul $\overline{x}_1 = x_1 + x_3$, $\overline{x}_2 = x_2$, $\overline{x}_3 = x_3$ în funcţie de x_i-uri şi obţinem $x_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}_3, x_2 = \overline{x}_2, x_3 = \overline{x}_3$, de unde $M_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Astfel $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{e}_1 = e_1, \overline{e}_2 = e_2, \overline{e}_3 = -e_1 + e_3\}$. Se verifică relaţia între matricele formei pătratice în cele două baze (menţionată în **propoziţia 5** din cursul 9) $M_{\overline{\mathcal{B}}}(Q) = {}^tM_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(Q)M_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}}$, adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

2. Metoda Jacobi nu se poate aplica pentru că $\Delta_3 = \det(A) = 0$. $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$.

3. Metoda transformărilor ortogonale

Polinomul caracteristic este $P_A(X) = X(X-1)(X-2)$ cu rădăcinile $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Vectorii proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ cu $||v_1|| = \sqrt{2}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cu

$||v_2|| = 1$, şi $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ cu $||v_3|| = \sqrt{2}$. Se vede imediat că $< v_i, v_j >= \delta_{ij}$, deci $\{v_1, v_2, v_3\}$ este bază ortogonală. Baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ unde $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1, e'_2 = v_2, e'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$. Matricea $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Avem ${}^tS \cdot S = I_3$, deci $S^{-1} = {}^tS$, şi $A = SDS^{-1}$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să mai facem o observaţie legat de matricea S. $S = (e'_1 \ e'_2 \ e'_3)$ şi astfel matricea transpusă, ${}^tS = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix}$. Fiecare componentă a produsului $({}^tS \cdot S)_{ij} =< e'_i, e'_j >= \delta_{ij}$ (δ_{ij} este simbolul Kronecker şi este 1 pentru $i = j$ şi 0 pentru $i \neq j$), adică ${}^tS \cdot S = I_3$, de unde $S^{-1} = {}^tS$.

Relaţia $A = SDS^{-1}$ se mai scrie $D = S^{-1}AS = {}^tSAS$, exact relaţia de transformare între matricele formei Q în bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$, menţionată la metoda Gauss. Forma canonică a formei pătratice este asociată matricei D, adică l $Q(v') = x_2'^2 + 2x_3'^2$ expresie ce se obţine în baza ortonormată $\mathcal{B}'$.

Am mai menţionat faptul că trecerea de la baza $\mathcal{B}$ la baza ortonormată $\mathcal{B}'$ se face prin matricea $S = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ cu proprietatea ${}^tSS = I_n$ (în exemplu ${}^tSS = I_3$). O matrice cu această proprietate se numeşte *ortogonală*.

Matrice şi morfisme ortogonale

Notăm pentru orice spaţiu vectorial V, $\mathrm{End}(V) = \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ morfism}\}$.

Definiţia 16. O matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte *ortogonală* dacă ${}^tSS = I_n$. Un endomorfism $f : (V, <,>) \longrightarrow (V, <,>)$ al unui spaţiu euclidian se numeşte *ortogonal* dacă pentru $(\forall)v, w \in V$, $< f(v), f(w) >=< v, w >$ (adică păstrează produsul scalar).

Exemplul 17. $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ este un endomorfism ortogonal, oricare ar fi V spaţiul euclidian.

Teorema 18 (de caracterizare a endomorfismelor ortogonale)**.** *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real şi $f \in \mathrm{End}(V)$. f este ortogonal dacă şi numai dacă pentru $(\forall)v \in V, ||f(v)|| = ||v||$.*

Teorema ne spune că un endomorfism este ortogonal (păstrează produsul scalar) dacă şi numai dacă păstrează norma.

Propoziţia 19. *Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune finită şi $f \in \mathrm{End}(V)$. Atunci f este injectiv $\Leftrightarrow$ f este surjectiv $\Leftrightarrow$ f este bijectiv.*

Demonstraţie: f injectiv $\Rightarrow f$ surjectiv. Aplicăm teorema rang-defect lui $f : V \longrightarrow V$. Avem $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$.$f$ injectiv $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = 0_V \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Deci $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$, iar $\mathrm{Im}(f)$ este subspaţiu în V, deci $\mathrm{Im}(f) = V$, adică f surjectiv.

Pentru f surjectiv $\Rightarrow f$ bijectiv trebuie să arătăm că f este injectiv. Argumentul este similar cu cel de mai sus.

f bijectiv $\Rightarrow f$ injectiv din definiţie.

□

Propoziţia 20. *Fie $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfism ortogonal al unui spaţiu euclidian. Atunci f este bijectiv.*

Demonstraţie: Folosind propoziţia anterioară trebuie să arătăm că f este injectiv. $v \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(v) = 0_V$, dar $||v|| = ||f(v)|| = ||0_V|| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$.

□

Pentru $(V, <,>)$ spaţiu euclidian notăm $\mathcal{O}(V) = \{f : V \longrightarrow V \mid \text{f morfism ortogonal}\}$. $\mathcal{O}(V)$ formează grup în raport cu compunerea endomorfismelor spaţiului V.

Următorul rezultat face legătura între endomorfisme şi matrice ortogonale.

Notăm $O_n(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) |\ {}^tSS = I_n\}$. Acesta este subgrup al grupului $GL_n(\mathbb{R})$. Parte stabilă: fie $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBI_nB = {}^tBB = I_n$. Restul axiomelor grupului se verifică uşor.

Teorema 21. *Fie V un spaţiu euclidian, cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Atunci $f \in \mathcal{O}(V)$ dacă şi numai dacă $M_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$ pentru $\mathcal{B}$ o bază ortonormată a spaţiului V.*

Pentru $S \in O_n(\mathbb{R})$ avem $\det({}^tSS) = \det(I_n) \Leftrightarrow \det({}^tS)\det(S) = 1 \Leftrightarrow \det(S)^2 = 1 \Rightarrow \det(S) = \pm 1$. Deci pentru orice $S \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(S) = \pm 1$.

Notăm $SO_n(\mathbb{R}) = \{S \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(S) = 1\}$. Este clar că $SO_n(\mathbb{R})$ este subgrup al grupului $O_n(\mathbb{R})$.

Se arată uşor că toate matricele din $SO_2(\mathbb{R})$ sunt de forma $R = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.
(Considerăm o matrice $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, punemi condiţiile ca aceasta să fie în $SO_2(\mathbb{R})$. Rezultă $d = a$, $c = -b$, şi $a^2 + b^2 = 1$) Acestea sunt rotaţii.

Elementele $S \in O_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det(S) = -1$, au forma $S = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.
Sunt simetrii (reflecţii). De exemplu pentru $t = \frac{\pi}{2}$ obţinem $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ care este simetria în prima bisectoare a axelor de coordonate. Este clar că $S^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Pentru $t = \pi$ obţinem $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, simetria în axa Oy.

Dacă matricele ortogonale corespund operatorilor ortogonali, pentru matrice simetrice există o clasă specială de operatori cu care acestea sunt asociate.

Definiţia 22. Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian şi $f \in \mathrm{End}(V)$, f se numeşte *autoadjunct* dacă pentru $(\forall) v, w \in V, < f(v), w >=< v, f(w) >$.

Teorema 23. *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian finit dimensional şi $f \in \mathrm{End}(V)$. Fie $\mathcal{B}$ bază ortonormată în V şi $S = M_{\mathcal{B}}(f)$. f este autoadjunct dacă şi numai dacă $S = {}^tS$.*