Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

seminarul 8

2021-2022

Vectori liberi

Exemplu

Fie vectorii $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$. Să se calculeze:

(a) $2\bar{a} + 3\bar{b}$, $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$, $\angle(\bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \times \bar{b}$, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$, $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}, \bar{a})$;

(b) Aria paralelogramului construit pe vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$;

(c) Volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} + \bar{b} + \bar{a} \times \bar{b}$;

(d) Verificaţi dacă vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b} \times \bar{c}$ sunt paraleli;

(e) Verificaţi dacă vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b} + 2\bar{c}$ sunt perpendiculari;

(f) Verificaţi dacă vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari;

(g) Determinaţi proiecţiile scalare şi vectoriale ale lui $\bar{a}$ pe $\bar{b}$.

Soluție:

Avem $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deci:

- $2\bar{a} + 3\bar{b} = 2(2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) + 3(\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}) =$ $(2\cdot 2 + 3\cdot 1)\bar{i} + [2\cdot 1 + 3\cdot(-1)]\bar{j} + [2\cdot(-1) + 3\cdot 3]\bar{k} = 7\bar{i} - \bar{j} + 7\bar{k}$;

Soluție:

Avem $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deci:

- $2\bar{a} + 3\bar{b} = 2(2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) + 3(\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}) =$
  $(2\cdot 2+3\cdot 1)\bar{i}+[2\cdot 1+3\cdot(-1)]\bar{j}+[2\cdot(-1)+3\cdot 3]\bar{k} = 7\bar{i}-\bar{j}+7\bar{k}$;
- $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = -2$

Soluție:

Avem $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deci:

- $2\bar{a} + 3\bar{b} = 2(2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) + 3(\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}) = (2\cdot 2 + 3\cdot 1)\bar{i} + [2\cdot 1 + 3\cdot(-1)]\bar{j} + [2\cdot(-1) + 3\cdot 3]\bar{k} = 7\bar{i} - \bar{j} + 7\bar{k}$;
- $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 = -2$
- Notăm cu $\alpha = \angle(\bar{a}, \bar{b})$. Atunci, din definiția produsului scalar, obținem $\cos\alpha = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|}$. Rezultă

$$\cos\alpha = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|} = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}}$$

deci

$$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{66}}.$$

Soluție:

Avem $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deci:

- $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 7\bar{j} - 3\bar{k}.$

Soluție:

Avem $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deci:

- $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 7\bar{j} - 3\bar{k}.$
- $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -11$

Soluție:

Avem $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deci:

- $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 7\bar{j} - 3\bar{k}.$
- $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -11$
- $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}, \bar{a}) = 0$ deoarece

Soluție:

Avem $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deci:

- $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 7\bar{j} - 3\bar{k}.$
- $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -11$
- $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}, \bar{a}) = 0$ deoarece $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}, \bar{a}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\square$

Vectori liberi

Avem $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deci:

- $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ < \bar{a}, \bar{b} > & < \bar{a}, \bar{c} > \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{b} + 2\bar{c} = 3\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k}$.

Vectori liberi

Avem $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deci:

- $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ < \bar{a}, \bar{b} > & < \bar{a}, \bar{c} > \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{b} + 2\bar{c} =$ $3\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k}$.
- Aria paralelogramului construit pe vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ este

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{62},$$

deoarece $\bar{a} \times \bar{b} = 2\bar{i} - 7\bar{j} - 3\bar{k}$.

Vectori liberi

Avem $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deci:

- $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ < \bar{a}, \bar{b} > & < \bar{a}, \bar{c} > \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{b} + 2\bar{c} =$ $3\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k}$.
- Aria paralelogramului construit pe vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ este

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{62},$$

deoarece $\bar{a} \times \bar{b} = 2\bar{i} - 7\bar{j} - 3\bar{k}$.

- Volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} + \bar{b} + \bar{a} \times \bar{b}$ este $|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} + \bar{b} + \bar{a} \times \bar{b})|$.

Vectori liberi

Avem
$\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b}=(2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k})+(\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k})+(2\bar{i}-7\bar{j}-3\bar{k})=5\bar{i}-7\bar{j}-\bar{k}$

- $|(\bar{a},\bar{b},\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b})| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & -1 \end{vmatrix} \right| = |62| = 62$

Avem
$\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b}=(2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k})+(\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k})+(2\bar{i}-7\bar{j}-3\bar{k})=5\bar{i}-7\bar{j}-\bar{k}$

- $|(\bar{a},\bar{b},\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b})| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & -1 \end{vmatrix} \right| = |62| = 62$
- Vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}\times\bar{c}$ sunt paraleli dacă și numai dacă $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{0}$. În cazul nostru, $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=3\bar{i}+\bar{j}+7\bar{k}\neq\bar{0}$, deci vectorii nu sunt paraleli.

Avem
$\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b} = (2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k})+(\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k})+(2\bar{i}-7\bar{j}-3\bar{k}) = 5\bar{i}-7\bar{j}-\bar{k}$

- $|(\bar{a},\bar{b},\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b})| = \left|\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & -1 \end{vmatrix}\right| = |62| = 62$
- Vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}\times\bar{c}$ sunt paraleli dacă și numai dacă $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{0}$. În cazul nostru, $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = 3\bar{i}+\bar{j}+7\bar{k} \neq \bar{0}$, deci vectorii nu sunt paraleli.
- Vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}+2\bar{c}$ sunt perpendiculari dacă și numai dacă $\langle\bar{a},\bar{b}+2\bar{c}\rangle = 0$.
  În cazul nostru, $\langle\bar{a},\bar{b}+2\bar{c}\rangle = \langle\bar{a},\bar{b}\rangle + 2\langle\bar{a},\bar{c}\rangle = -2+2\cdot 1 = 0$, deci vectorii sunt perpendiculari.

Vectori liberi

- Vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari dacă și numai dacă $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$. În cazul nostru, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -11 \neq 0$, deci vectorii sunt necoplanari.

- Vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari dacă și numai dacă $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$. În cazul nostru, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -11 \neq 0$, deci vectorii sunt necoplanari.
- Proiecția scalară a lui $\bar{a}$ pe $\bar{b}$ este:

$$pr_{\bar{b}}(\bar{a}) = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{b}\|} = -\frac{2}{\sqrt{11}}.$$

- Vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari dacă și numai dacă $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$. În cazul nostru, $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -11 \neq 0$, deci vectorii sunt necoplanari.
- Proiecția scalară a lui $\bar{a}$ pe $\bar{b}$ este:

$$pr_{\bar{b}}(\bar{a}) = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{b}\|} = -\frac{2}{\sqrt{11}}.$$

- Proiecția vectorială a lui $\bar{a}$ pe $\bar{b}$ este:

$$\overline{pr_{\bar{b}}(\bar{a})} = pr_{\bar{b}}(\bar{a}) \frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|} = -\frac{2}{11}\bar{b} = -\frac{2}{11}\bar{i} + \frac{2}{11}\bar{j} - \frac{6}{11}\bar{k}.$$

Exemplu

Se consideră vectorii liberi $\bar{a}$, $\bar{b}$, de lungimi 4 şi 6, iar unghiul dintre cei doi vectori este $\pi/3$. Dacă $\bar{u} = \bar{a} + 3\bar{b}$ şi $\bar{v} = 7\bar{a} - 2\bar{b}$, calculaţi:

(a) $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$, $\|\bar{a} + \bar{b}\|$, $\|\bar{a} - \bar{b}\|$;

(b) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, $\|\bar{u}\|$, $\|\bar{v}\|$, $\angle(\bar{u}, \bar{v})$;

(c) Aria paralelogramului construit pe vectorii $\bar{u}$, $\bar{v}$.

Soluție:

Aplicăm definițiile și proprietățile:

(a) Pentru $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ avem:

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \cdot \cos \angle(\bar{a}, \bar{b}) = 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

Soluție:

Aplicăm definițiile și proprietățile:

(a) Pentru $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ avem:

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \cdot \cos \angle(\bar{a}, \bar{b}) = 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

- Pentru $\|\bar{a} + \bar{b}\|$ avem:

$$\|\bar{a}+\bar{b}\| = \sqrt{\langle \bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b} \rangle} = \sqrt{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle + \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{b} \rangle} =$$

$$= \sqrt{\|\bar{a}\|^2 + 2\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + \|\bar{b}\|^2} = \sqrt{4^2 + 2 \cdot 12 + 6^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

$\square$

- Pentru $\|\bar{a}-\bar{b}\|$ avem:

$$\|\bar{a}-\bar{b}\| = \sqrt{\langle \bar{a}-\bar{b}, \bar{a}-\bar{b}\rangle} = \sqrt{\langle \bar{a}, \bar{a}\rangle - \langle \bar{b}, \bar{a}\rangle - \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle + \langle \bar{b}, \bar{b}\rangle} =$$

$$= \sqrt{\|\bar{a}\|^2 - 2\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle + \|\bar{b}\|^2} = \sqrt{4^2 - 2\cdot 12 + 6^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

(b) Pentru $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ avem:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{a} + 3\bar{b}, 7\bar{a} - 2\bar{b} \rangle =$$
$$= 7\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle + 3 \cdot 7 \cdot \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle - 2\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + 3 \cdot (-2) \cdot \langle \bar{b}, \bar{b} \rangle =$$
$$= 7\|\bar{a}\|^2 + 19\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle - 6\|\bar{b}\|^2 = 7 \cdot 4^2 + 19 \cdot 12 - 6 \cdot 6^2 = 124.$$

(b) Pentru $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ avem:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{a} + 3\bar{b}, 7\bar{a} - 2\bar{b} \rangle =$$
$$= 7\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle + 3 \cdot 7 \cdot \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle - 2\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + 3 \cdot (-2) \cdot \langle \bar{b}, \bar{b} \rangle =$$
$$= 7\|\bar{a}\|^2 + 19\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle - 6\|\bar{b}\|^2 = 7 \cdot 4^2 + 19 \cdot 12 - 6 \cdot 6^2 = 124.$$

- Pentru $\|\bar{u}\|$ avem:

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle} = \sqrt{\langle \bar{a} + 3\bar{b}, \bar{a} + 3\bar{b} \rangle} =$$
$$\sqrt{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle + 3\langle \bar{b}, \bar{a} \rangle + 3\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + 9\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle} =$$
$$= \sqrt{\|\bar{a}\|^2 + 6\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + 9\|\bar{b}\|^2} = \sqrt{4^2 + 6 \cdot 12 + 9 \cdot 6^2} =$$
$$= \sqrt{412} = 2\sqrt{103}.$$

- Pentru $\|\bar{v}\|$ avem:

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} = \sqrt{\langle 7\bar{a} - 2\bar{b}, 7\bar{a} - 2\bar{b} \rangle} =$$

$$\sqrt{49\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle - 14\langle \bar{b}, \bar{a} \rangle - 14\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + 4\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle} =$$

$$= \sqrt{49\|\bar{a}\|^2 - 28\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + 4\|\bar{b}\|^2} = \sqrt{49 \cdot 4^2 - 28 \cdot 12 + 4 \cdot 6^2} =$$

$$= \sqrt{592} = 4\sqrt{37}.$$

Vectori liberi

Notăm $\theta = \angle(\bar{u}, \bar{v})$ și avem:

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} = \frac{124}{2\sqrt{103} \cdot 4\sqrt{37}} = \frac{31}{2\sqrt{103} \cdot \sqrt{37}}.$$

Notăm $\theta = \angle(\bar{u}, \bar{v})$ și avem:

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} = \frac{124}{2\sqrt{103} \cdot 4\sqrt{37}} = \frac{31}{2\sqrt{103} \cdot \sqrt{37}}.$$

Pentru (c), aria paralelogramului construit pe vectorii $\bar{u}$, $\bar{v}$ este $\|\bar{u} \times \bar{v}\|$.
Avem:

$$\bar{u} \times \bar{v} = (\bar{a} + 3\bar{b}) \times (7\bar{a} - 2\bar{b}) =$$

$$= 7\bar{a} \times \bar{a} + 21\bar{b} \times \bar{a} - 2\bar{a} \times \bar{b} - 6\bar{b} \times \bar{b}.$$

Cum $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$, $\bar{b} \times \bar{b} = \bar{0}$ și $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$, obținem:

$$\bar{u} \times \bar{v} = -23\bar{a} \times \bar{b}.$$

Atunci

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \| - 23\bar{a} \times \bar{b}\| = | - 23| \cdot \|\bar{a} \times \bar{b}\| =$$

$$= 23 \cdot \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \cdot \sin \angle(\bar{a}, \bar{b}),$$

deci

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = 23 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 276\sqrt{3}.$$

Exemplu

Fie vectorii $\bar{a} = 2\bar{i} - 5\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Să se afle înălţimea triunghiului construit pe cei doi vectori ca laturi, corespunzătoare laturii $\bar{b}$.

Soluție:

Știm că înălțimea triunghiului corespunzătoare laturii $\bar{b}$ se obține din formula ariei:

$$\mathcal{A}ria_{\Delta} = \frac{h \cdot \|\bar{b}\|}{2},$$

deci

$$h = \frac{2\mathcal{A}ria_{\Delta}}{\|\bar{b}\|}.$$

Soluție:

Știm că înălțimea triunghiului corespunzătoare laturii $\bar{b}$ se obține din formula ariei:

$$\mathcal{A}ria_{\Delta} = \frac{h \cdot \|\bar{b}\|}{2},$$

deci

$$h = \frac{2\mathcal{A}ria_{\Delta}}{\|\bar{b}\|}.$$

Mai mult, aria triunghiului este jumătate din aria paralelogramului construit pe vectorii $\bar{a}, \bar{b}$, deci

$$h = \frac{2\mathcal{A}ria_{\Delta}}{\|\bar{b}\|} = \frac{\|\bar{a} \times \bar{b}\|}{\|\bar{b}\|}.$$

□

Avem $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 7\bar{k}$, deci

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{78}$$

și

$$\|\bar{b}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

Avem $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + 7\bar{k}$, deci

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{78}$$

și

$$\|\bar{b}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

Obținem

$$h = \frac{\|\bar{a} \times \bar{b}\|}{\|\bar{b}\|} = \sqrt{26}.$$

Exemplu

Fie vectorii $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ şi $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$. Să se afle înălţimea paralelipipedului construit pe cei trei vectori, baza fiind formată din $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Soluție:

Avem volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ este

$$\mathcal{V}ol = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|.$$

Dar volumul paralelipipedului este

$$\mathcal{V}ol = \mathcal{A}ria_{bazei} \cdot h.$$

Obținem deci

$$h = \frac{\mathcal{V}ol}{\mathcal{A}ria_{bazei}} = \frac{|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|}{\|\bar{a} \times \bar{b}\|}.$$

$\square$

Avem:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 10$$

și

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\bar{i} + 5\bar{j} + 5\bar{k}.$$

Rezultă că înălțimea paralelipipedului este

$$h = \frac{|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|}{\|\bar{a} \times \bar{b}\|} = \frac{10}{\sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Exemplu

(a) Să se afle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\bar{u} = \alpha\bar{i} + 7\bar{j} - 5\bar{k}$ şi $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} + \beta\bar{k}$ să fie coliniari.

(b) Să se afle $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} + \alpha\bar{k}$ şi $\bar{v} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ să fie perpendiculari. Aceeaşi cerinţă pentru ca vectorii să formeze un unghi de $\pi/3$.

(c) Să se afle $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{v} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ şi $\bar{w} = \alpha\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ să fie coplanari.

Soluție:

(a) Vectorii $\bar{u} = \alpha\bar{i} + 7\bar{j} - 5\bar{k}$ și $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} + \beta\bar{k}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $\bar{u} = t \cdot \bar{v}$, adică

$$\alpha\bar{i} + 7\bar{j} - 5\bar{k} = t(-3\bar{i} + \bar{j} + \beta\bar{k}).$$

Găsim $\alpha = -3t, 7 = t, -5 = t\beta$, deci $\alpha = -21$ și $\beta = -\frac{5}{7}$.

Soluție:

(a) Vectorii $\bar{u} = \alpha\bar{i} + 7\bar{j} - 5\bar{k}$ și $\bar{v} = -3\bar{i} + \bar{j} + \beta\bar{k}$ sunt coliniari dacă și numai dacă $\bar{u} = t \cdot \bar{v}$, adică

$$\alpha\bar{i} + 7\bar{j} - 5\bar{k} = t(-3\bar{i} + \bar{j} + \beta\bar{k}).$$

Găsim $\alpha = -3t, 7 = t, -5 = t\beta$, deci $\alpha = -21$ și $\beta = -\frac{5}{7}$.

(b) Vectorii $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} + \alpha\bar{k}$ și $\bar{v} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ sunt perpendiculari dacă și numai dacă $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$. Obținem

$$0 = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + \alpha \cdot (-1),$$

deci $\alpha = 5$.

$\square$

Vectori liberi

Soluție:

- Vectorii $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} + \alpha\bar{k}$ și $\bar{v} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ formează un unghi de $\pi/3$, deci

$$\cos\pi/3 = \frac{\langle\bar{u},\bar{v}\rangle}{\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|} = \frac{5-\alpha}{\sqrt{1^2+2^2+\alpha^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}},$$

Soluție:

- Vectorii $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} + \alpha\bar{k}$ și $\bar{v} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ formează un unghi de $\pi/3$, deci

$$\cos \pi/3 = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\|} = \frac{5 - \alpha}{\sqrt{1^2 + 2^2 + \alpha^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}},$$

deci $2(5 - \alpha) = \sqrt{11} \cdot \sqrt{5 + \alpha^2}$. Obținem:

$$9\alpha^2 + 40\alpha - 45 = 0,$$

de unde găsim că $\alpha = \frac{-20 \pm \sqrt{805}}{9}$.

$\square$

(c) Vectorii $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{v} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ și $\bar{w} = \alpha\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ sunt coplanari dacă și numai dacă $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 0$. Avem:

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ \alpha & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha - 1,$$

deci $\alpha = 1/3$.

Exemplu

Să se determine vectorul v de lungime $3\sqrt{2}$, perpendicular pe $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$ şi care formează un unghi de $\pi/3$ cu $\bar{b} = \bar{i} - \bar{k}$.

Soluție:

Vrem să determinăm vectorul $v = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ astfel încât:

Soluție:

Vrem să determinăm vectorul $v = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ astfel încât:

- v este de lungime $3\sqrt{2}$, deci

Soluție:

Vrem să determinăm vectorul $v = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ astfel încât:

- v este de lungime $3\sqrt{2}$, deci $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3\sqrt{2}$;
- v este perpendicular pe $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$, deci

Soluție:

Vrem să determinăm vectorul $v = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ astfel încât:

- v este de lungime $3\sqrt{2}$, deci $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3\sqrt{2}$;
- v este perpendicular pe $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$, deci $\langle v, \bar{a} \rangle = 0$, adică $2a - 2b + 3c = 0$;
- v formează un unghi de $\pi/3$ cu $\bar{b} = \bar{i} - \bar{k}$, deci

Soluție:

Vrem să determinăm vectorul $v = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ astfel încât:

- v este de lungime $3\sqrt{2}$, deci $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3\sqrt{2}$;
- v este perpendicular pe $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$, deci $\langle v, \bar{a} \rangle = 0$, adică $2a - 2b + 3c = 0$;
- v formează un unghi de $\pi/3$ cu $\bar{b} = \bar{i} - \bar{k}$, deci $\cos \pi/3 = \frac{\langle v, \bar{b} \rangle}{\|v\| \cdot \|\bar{b}\|}$, adică $\frac{1}{2} = \frac{a-c}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$.

Obținem sistemul:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 18 \\ 2a - 2b + 3c = 0 \\ a - c = 3 \end{cases}$$

$\square$

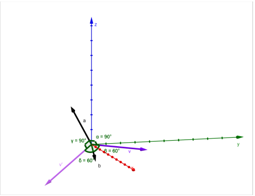
Rezultă că $a = 3 + c$, $b = \frac{5c+6}{2}$ și $33c^2 + 84c = 0$. Găsim $c = 0$ sau $c = -\frac{28}{11}$, deci avem:

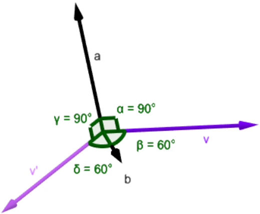
$$v = 3\bar{i} + 3\bar{j},$$

și

$$v' = \frac{5}{11}\bar{i} - \frac{67}{11}\bar{j} - \frac{28}{11}\bar{k}.$$

Vectori liberi





Exemplu

(a) Să se calculeze $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b})$, ştiind că $\left\|\bar{a} \times \bar{b}\right\| = 3$.

(b) Să se calculeze $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{b} \times \bar{c}, \bar{c} \times \bar{a})$, ştiind că $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 2$.

Soluție:

(a) Avem
$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{a}, \bar{b}) = \langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b} \rangle = \|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = 9.$

Soluție:

(a) Avem
$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{a}, \bar{b}) = \langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b} \rangle = \|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = 9.$

- Avem $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{b} \times \bar{c}, \bar{c} \times \bar{a}) = \langle \bar{a} \times \bar{b}, (\bar{b} \times \bar{c}) \times (\bar{c} \times \bar{a}) \rangle.$

Soluție:

(a) Avem
$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{a}, \bar{b}) = \langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b} \rangle = \|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = 9.$

- Avem $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{b} \times \bar{c}, \bar{c} \times \bar{a}) = \langle \bar{a} \times \bar{b}, (\bar{b} \times \bar{c}) \times (\bar{c} \times \bar{a}) \rangle$. Dar pentru dublul produs vectorial avem:

$$(\bar{b} \times \bar{c}) \times (\bar{c} \times \bar{a}) = \begin{vmatrix} \bar{c} & \bar{a} \\ \langle \bar{b} \times \bar{c}, \bar{c} \rangle & \langle \bar{b} \times \bar{c}, \bar{a} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{c} & \bar{a} \\ (\bar{b}, \bar{c}, \bar{c}) & (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) \end{vmatrix}.$$

Soluție:

(a) Avem
$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{a}, \bar{b}) = \langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b} \rangle = \|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = 9.$

- Avem $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{b} \times \bar{c}, \bar{c} \times \bar{a}) = \langle \bar{a} \times \bar{b}, (\bar{b} \times \bar{c}) \times (\bar{c} \times \bar{a}) \rangle$. Dar pentru dublul produs vectorial avem:

$$(\bar{b} \times \bar{c}) \times (\bar{c} \times \bar{a}) = \begin{vmatrix} \bar{c} & \bar{a} \\ \langle \bar{b} \times \bar{c}, \bar{c} \rangle & \langle \bar{b} \times \bar{c}, \bar{a} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{c} & \bar{a} \\ (\bar{b}, \bar{c}, \bar{c}) & (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) \end{vmatrix}.$$

Avem: $(\bar{b}, \bar{c}, \bar{c}) = 0$ și $(\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 2$, deci

$$(\bar{b} \times \bar{c}) \times (\bar{c} \times \bar{a}) == \begin{vmatrix} \bar{c} & \bar{a} \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\bar{c}.$$

□

Vectori liberi

Dar

$$(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{b} \times \bar{c}, \bar{c} \times \bar{a}) = \langle \bar{a} \times \bar{b}, (\bar{b} \times \bar{c}) \times (\bar{c} \times \bar{a}) \rangle =$$

$$= \langle \bar{a} \times \bar{b}, 2\bar{c} \rangle = 2\langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{c} \rangle = 2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 4.$$

Vectori liberi

Exemplu

Să se demonstreze expresia analitică a produsului scalar:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

unde $\bar{u} = u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j} + u_3 \bar{k}$, $\bar{v} = v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j} + v_3 \bar{k}$.

Soluție:

Fie vectorii $\bar{u} = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}$, $\bar{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$. Avem:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}, v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k} \rangle =$$

$$= u_1 v_1 \langle \bar{i}, \bar{i} \rangle + u_1 v_2 \langle \bar{i}, \bar{j} \rangle + u_1 v_3 \langle \bar{i}, \bar{k} \rangle +$$

$$+ u_2 v_1 \langle \bar{j}, \bar{i} \rangle + u_2 v_2 \langle \bar{j}, \bar{j} \rangle + u_2 v_3 \langle \bar{j}, \bar{k} \rangle + u_3 v_1 \langle \bar{k}, \bar{i} \rangle + u_3 v_2 \langle \bar{k}, \bar{j} \rangle + u_3 v_3 \langle \bar{k}, \bar{k} \rangle$$

$\square$

Aplicând definiția, avem:

$$\langle \bar{i}, \bar{i} \rangle = \|\bar{i}\|^2 = 1, \langle \bar{j}, \bar{j} \rangle = \|\bar{j}\|^2 = 1, \ \langle \bar{k}, \bar{k} \rangle = \|\bar{k}\|^2 = 1$$

și

$$\langle \bar{i}, \bar{j} \rangle = \langle \bar{j}, \bar{i} \rangle = \|\bar{i}\| \cdot \|\bar{j}\| \cdot \cos \pi/2 = 0$$

$$\langle \bar{i}, \bar{k} \rangle = \langle \bar{k}, \bar{i} \rangle = \|\bar{i}\| \cdot \|\bar{k}\| \cdot \cos \pi/2 = 0$$

$$\langle \bar{j}, \bar{k} \rangle = \langle \bar{k}, \bar{j} \rangle = \|\bar{k}\| \cdot \|\bar{j}\| \cdot \cos \pi/2 = 0.$$

Înlocuim și obținem

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Aplicând definiția, avem:

$$\langle \bar{i}, \bar{i} \rangle = \|\bar{i}\|^2 = 1, \langle \bar{j}, \bar{j} \rangle = \|\bar{j}\|^2 = 1, \ \langle \bar{k}, \bar{k} \rangle = \|\bar{k}\|^2 = 1$$

și

$$\langle \bar{i}, \bar{j} \rangle = \langle \bar{j}, \bar{i} \rangle = \|\bar{i}\| \cdot \|\bar{j}\| \cdot \cos \pi/2 = 0$$

$$\langle \bar{i}, \bar{k} \rangle = \langle \bar{k}, \bar{i} \rangle = \|\bar{i}\| \cdot \|\bar{k}\| \cdot \cos \pi/2 = 0$$

$$\langle \bar{j}, \bar{k} \rangle = \langle \bar{k}, \bar{j} \rangle = \|\bar{k}\| \cdot \|\bar{j}\| \cdot \cos \pi/2 = 0.$$

Înlocuim și obținem

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Exemplu

Să se demonstreze expresia analitică a produsului vectorial:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

unde $\bar{u} = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}$, $\bar{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$.

Soluție:

Fie vectorii $\bar{u} = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}$, $\bar{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$. Avem:

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}) \times (v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}) =$$

$$= u_1 v_1\bar{i} \times \bar{i} + u_1 v_2\bar{i} \times \bar{j} + u_1 v_3\bar{i} \times \bar{k} +$$

$$+ u_2 v_1\bar{j} \times \bar{i} + u_2 v_2\bar{j} \times \bar{j} + u_2 v_3\bar{j} \times \bar{k} + u_3 v_1\bar{k} \times \bar{i} + u_3 v_2\bar{k} \times \bar{j} + u_3 v_3\bar{k} \times \bar{k}$$

$\square$

Din definiție avem:

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{0}, \bar{j} \times \bar{j} = \bar{0}, \ \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$$

și $\bar{i} \times \bar{j} = -\bar{j} \times \bar{i}$ este un vector perpendicular pe planul vectorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$, sensul este "în sus" și lungimea este

$$\|\bar{i} \times \bar{j}\| = \|\bar{i}\| \cdot \|\bar{j}\| \cdot \sin \pi/2 = 1,$$

deci

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k} = -\bar{j} \times \bar{i}$$

. Analog avem

$$\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i} = -\bar{k} \times \bar{j}$$

și

$$\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j} = -\bar{i} \times \bar{k}.$$

Înlocuim și obținem:

Vectori liberi

$$\bar{u} \times \bar{v} = u_1 v_1 \bar{i} \times \bar{i} + u_1 v_2 \bar{i} \times \bar{j} + u_1 v_3 \bar{i} \times \bar{k} +$$

$$+ u_2 v_1 \bar{j} \times \bar{i} + u_2 v_2 \bar{j} \times \bar{j} + u_2 v_3 \bar{j} \times \bar{k} + u_3 v_1 \bar{k} \times \bar{i} + u_3 v_2 \bar{k} \times \bar{j} + u_3 v_3 \bar{k} \times \bar{k} =$$

$$= u_1 v_2 \bar{k} - u_1 v_3 \bar{j} - u_2 v_1 \bar{k} + u_2 v_3 \bar{i} + u_3 v_1 \bar{j} - u_3 v_2 \bar{i} =$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\bar{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\bar{j} + (u_2 v_1 - u_1 v_2)\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$