Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

cursul 7

2021-2022

Planul în spațiul real tridimensional. Dreapta în spațiu

Planul

Fie $\mathbb{E}_3$ spațiul geometriei euclidiene și $Oxyz$ reperul cartezian. Pentru a defini un plan în acest reper este necesar să precizăm un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ din plan și un vector nenu,l, $\mathbf{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$, ortogonal pe plan. Fie $M(x, y, z)$ punctul curent din reperul ortonormat $Oxyz$. Dacă vectorul $\mathbf{n}$ este perpendicular pe vectorul $\overline{M_0M}$, atunci acesta determină în mod unic un plan ce conține punctul M_0, a cărui **ecuație vectorială** este dată de

$$\pi : \langle \mathbf{n}, \overline{M_0M} \rangle = 0.$$

Numim vectorul **n vector normal la planul** π.

Planul

Observație

Dacă în reperul ortonormat $Oxyz$ notăm $\mathbf{r} = \overline{OM}$ și $\mathbf{r}_0 = \overline{OM_0}$ vectorii de poziție, atunci relația $\langle \mathbf{n}, \overline{M_0M} \rangle = 0$ este echivalentă cu $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$.

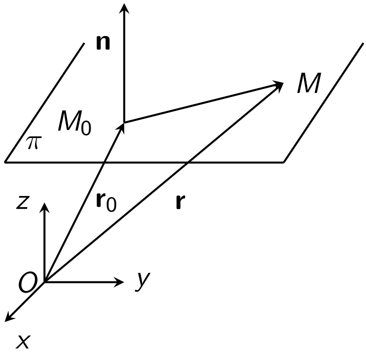


Figure: Vectorii de poziție $\mathbf{r}$ și $\mathbf{r}_0$ și planul π

Planul

Știind că $\overline{M_0M} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k}$, din ecuația vectorială $\langle \mathbf{n}, \overline{M_0M} \rangle = 0$ obținem ecuația planului π sub forma:

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

numită și **ecuația carteziană a planului**. După o simplă prelucrare, ajungem la ecuația

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0, \ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0,$$

numită **ecuația generală a planului.**

Exemplu

Ecuația planului ce conține punctul $M_0(2,3,-1)$ și are pe $\mathbf{n} = \bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}$ vector normal la plan este

$$\pi : 1(x-2) - 2(y-3) + 5(z+1) = 0,$$

echivalent cu $\pi : x - 2y + 5z + 9 = 0$.

Observație

Dată ecuația generală a planului

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0,$$

un vector normal la plan este $\mathbf{n} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$.

Exemplu

Dacă considerăm planul $\pi : 3x - y + 2z - 2 = 0$, vectorul $\mathbf{n} = 3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ este vector normal la plan. Mai mult, observăm că și vectorii $\mathbf{n}_1 = -6\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$ și $\mathbf{n}_2 = 9\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}$ sunt perpendiculari pe planul π deoarece avem relațiile $\mathbf{n}_1 = -2\mathbf{n}$ și $\mathbf{n}_2 = 3\mathbf{n}$.

De aici putem desprinde următoarea observație:

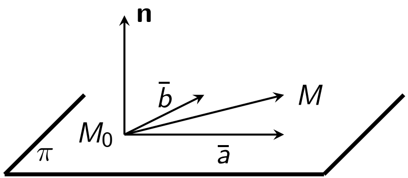
Observație

Orice vector nenul perpendicular pe plan este vector normal la plan, deci normala unui plan nu este unică.

Planul

Fie punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și vectorii necoliniari $\mathbf{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$ și $\mathbf{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$. Cum vectorul $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este perpendicular pe planul determinat de vectorii $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$, obținem că ecuația vectorială a planului π ce conține punctul M_0 și are vector normal pe $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este

$$\pi : \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \overline{M_0M} \rangle = 0.$$



Planul

Atunci **ecuația planului ce trece prin punctul** M_0 **și este paralel cu vectorii a și b** este

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Observație

În particular, obținem că ecuația unui plan paralel cu planul:

(a) xOy este $z = z_0$, unde z_0 este o constantă;

(b) xOz este $y = y_0$, unde y_0 este o constantă;

(c) yOz este $x = x_0$, unde x_0 este o constantă.

Într-adevăr, pentru primul caz, trebuie să scriem ecuația unui plan paralel cu doi vectori din planul xOy, deci putem să considerăm vectorii $\bar{i}$ și $\bar{j}$. Atunci, prin aplicarea formulei, obținem:

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $\pi : z = z_0$.

Exemplu

Ecuația planului ce trece prin punctele $A(1,3,2)$ și $B(2,1,1)$ și este paralel cu vectorul $\mathbf{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$ este:

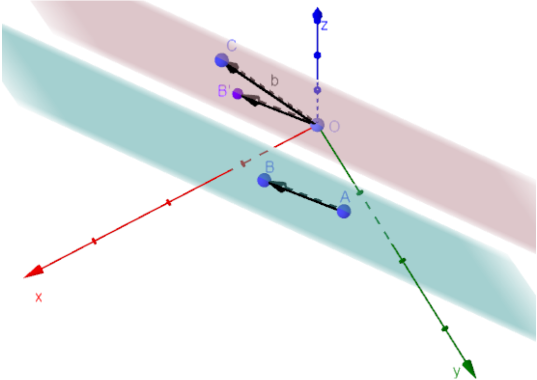


Figure: Planul ce conține punctele A, B și e paralel cu $\mathbf{b}$

Planul

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 2-1 & 1-3 & 1-2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

echivalentă cu $\pi : -9x - 6y + 3z + 21 = 0$. Am aplicat formula precedentă în care am considerat vectorul **a** ca fiind vectorul $\overline{AB}$.

Planul

Mai departe, date punctele necoliniare $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ și $C(x_C, y_C, z_C)$, **ecuația planului determinat de cele trei puncte** este

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

echivalentă cu

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

Observație

Această formulă se deduce din cazul anterior, în care considerăm punctul $M_0 = A$, vectorul $\mathbf{a} = \overline{AB}$ și vectorul $\mathbf{b} = \overline{AC}$.

Exemplu

Ecuația planului determinat de punctele $A(3, 2, -1)$, $B(1, -4, 0)$ și $C(2, 0, -2)$ este

$$\pi : \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ -2 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

iar după prelucrare obținem ecuația de forma

$$\pi : 8x - 3y - 2z - 20 = 0.$$

Planul

În cazul particular în care fiecare punct se află pe câte o axă de coordonate, adică $A(x_A, 0, 0) \in Ox$, $B(0, y_B, 0) \in Oy$ și $C(0, 0, z_C) \in Oz$, găsim ecuația planului sub forma

$$\pi : \frac{x}{x_A} + \frac{y}{y_B} + \frac{z}{z_C} - 1 = 0,$$

numită **ecuația planului prin tăieturi.**

Exemplu

Ecuația planului determinat de punctele $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ și $C(0, 0, 2)$ este

$$\pi : \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} - 1 = 0,$$

echivalentă cu $\pi : 4x + 3y + 6z - 12 = 0$, iar planul este reprezentat în figura următoare.

Planul

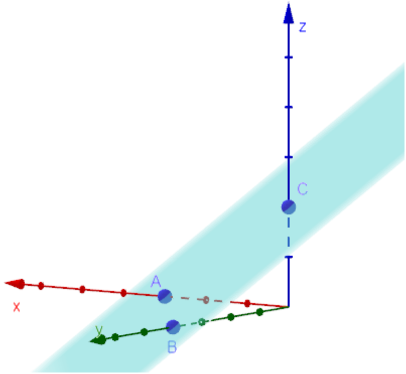


Figure: Planul prin taieturi

Dacă considerăm un punct și un plan, atunci ne interesează să determinăm distanța de la punct la plan. Evident, dacă punctul este inclus în plan, atunci distanța va fi nulă, așa cum reiese din următorul rezultat:

Teoremă

Fie punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și planul π ce are ecuația $\pi : Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. **Distanța de la punctul M_0 la planul π** *este egală cu*

$$d(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Planul

Demonstrație.

Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ punctul din planul π astfel încât vectorul $\overline{M_1M_0}$ este perpendicular pe plan. Atunci distanța de la M_0 la planul π este

$$d(M_0, \pi) = \|\overline{M_1M_0}\| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}.$$

Cum $M_1 \in \pi$, avem că $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Dar $\overline{M_1M_0}$ este perpendicular pe plan, deci $\overline{M_1M_0} \parallel \mathbf{n}$. Din condiția de paralelism obținem astfel relațiile:

$$x_0 - x_1 = tA,\ y_0 - y_1 = tB,\ z_0 - z_1 = tC,\ t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Planul

Dacă înlocuim $x_1 = x_0 - tA$, $y_1 = y_0 - tB$, $z_1 = z_0 - tC$ în relația $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, atunci avem că

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Din cele de mai sus, rezultă că

$$d(M_0, \pi) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{t^2A^2 + t^2B^2 + t^2C^2} = |t| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Planul

Definiție

Fie planele

$$\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,\ A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$$

şi

$$\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,\ A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0$$

şi fie $\mathbf{n}_1 = A_1 \bar{i} + B_1 \bar{j} + C_1 \bar{k}$, $\mathbf{n}_2 = A_2 \bar{i} + B_2 \bar{j} + C_2 \bar{k}$ vectori normali la π_1, respectiv π_2. **Unghiul dintre planele** π_1 **şi** π_2 este unghiul dintre normalele celor două plane $\mathbf{n}_1$ şi $\mathbf{n}_2$, adică:

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle}{\|\mathbf{n}_1\| \cdot \|\mathbf{n}_2\|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

unde θ este unghiul dintre $\mathbf{n}_1$ şi $\mathbf{n}_2$.

Planul

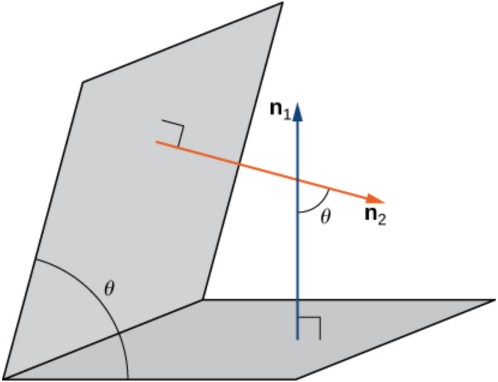


Figure: Unghiul dintre două plane [1]

[1] https://math.libretexts.org/@api/deki/files/3479/CNX_Calc_Figure_12_05_010.jfif?revision=1&size=bestfit&width=412&height=316

Observație

Poziția relativă a două plane: Plecând de la definiție, identificăm următoarele cazuri particulare:

- Planele sunt **paralele**, și notăm cu $\pi_1 \| \pi_2$, dacă și numai dacă $\mathbf{n}_1 \| \mathbf{n}_2$, echivalent cu

  $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

  Mai mult, dacă avem

  $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

  atunci spunem că planele **coincid**.
- Planele sunt **perpendiculare**, și notăm cu $\pi_1 \perp \pi_2$, dacă și numai dacă $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$, echivalent cu $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

Exemplu

Planul $\pi_1 : x - 2y + 4z - 1 = 0$ este paralel cu planul $\pi_2 : 5x - 10y + 20z + 1 = 0$ și coincide cu planul $\pi_3 : 5x - 10y + 20z - 5 = 0$, deoarece avem $\frac{1}{5} = \frac{-2}{-10} = \frac{4}{20}$, respectiv $\frac{1}{5} = \frac{-2}{-10} = \frac{4}{20} = \frac{-1}{-5}$. În schimb, planele $\pi_4 : x + z + 5 = 0$ și $\pi_5 : x = 0$ formează unghiul θ cu măsura de 45° deoarece $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Planul

Considerăm trei plane având ecuațiile
$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ și
$\pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$. Din punct de vedere algebric, a preciza **poziția relativă a celor trei plane** înseamnă a studia soluțiile sistemului de ecuații liniare

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}.$$

Distingem următoarele situații:

Planul

1. Sistemul algebric este compatibil determinat. Geometric, acest lucru semnifică faptul că cele trei plane se intersectează într-un singur punct, deci avem configurația planelor din figura:

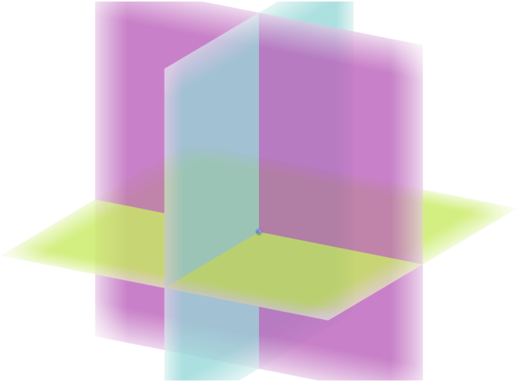


Figure: Sistem compatibil determinat

Planul

2. Sistemul algebric este compatibil nedeterminat. Obținem sistem compatibil simplu nedeterminat dacă intersecția celor trei plane este o dreapta sau dacă două plane coincid și intersectează al treilea plan după o dreaptă. Dacă cele trei plane coincid, atunci sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Cele trei situații sunt redate în figura:

Planul

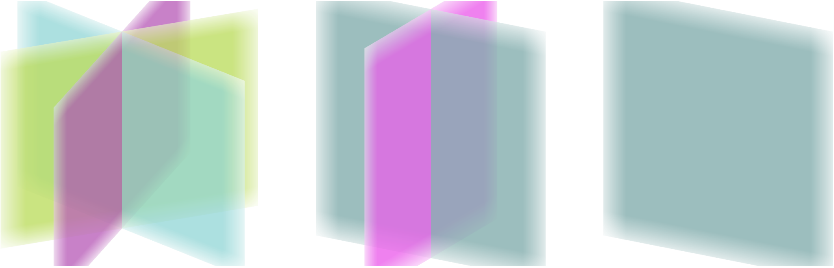


Figure: Sistem compatibil nedeterminat

Planul

3. Sistemul algebric este incompatibil. Pentru acest caz, avem mai multe configurații geometrice reprezentate în figura: cele trei plane sunt paralele, două plane sunt paralele și al treilea coincide cu unul dintre primele două sau le intersectează, cele trei plane nu au puncte comune de intersecție.

Planul

Figure: Sistem incompatibil

Dreapta în spațiu

Considerăm un vector nenul $\mathbf{v} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$, $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ și un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Ne propunem să obținem ecuația unei drepte Δ ce trece prin M_0 și este paralelă cu vectorul $\mathbf{v}$. Pentru aceasta, putem să presupunem că dreapta Δ este determinată de punctul $M(x, y, z)$ situat pe dreaptă, pentru care vectorul $\overline{M_0M}$ este paralel cu $\mathbf{v}$.
În coordonate, avem

$$\overline{M_0M} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k},$$

iar condiția de paralelism $\overline{M_0M} \parallel \mathbf{v}$ este echivalentă cu:

$$\Delta : \ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

numită **ecuația carteziană** a dreptei ce trece prin M_0 și este paralelă cu vectorul $\mathbf{v}$. Vectorul $\mathbf{v}$ se numește **vector director** al dreptei Δ.

Observație

Vector director al unei drepte este orice vector nenul care are aceeași direcție cu dreapta, deci vectorul director nu este unic.

O scriere echivalentă pentru condiția $\overline{M_0M} \parallel \mathbf{v}$ este ca

$$x - x_0 = tl, \; y - y_0 = tm, \; z - z_0 = tn, \; t \in \mathbb{R},$$

sau

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + tl, \\ y = y_0 + tm, \\ z = z_0 + tn, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

cele din urmă fiind numite **ecuațiile parametrice** ale dreptei Δ ce trece prin M_0 și are pe $\mathbf{v}$ ca vector director.

Observație

Ecuațiile parametrice ale unei drepte descriu coordonatele punctelor de pe dreaptă. În notațiile anterioare putem descrie dreapta Δ astfel:

$$\Delta = \left\{(x_0 + tm, y_0 + tm, z_0 + tn) : \; t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exemplu

Ecuația dreptei Δ ce trece prin punctul $M_0(2, -1, 0)$ și are vector director pe $\mathbf{v} = -2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ este

$$\Delta : \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}.$$

Vector director petru dreapta Δ poate fi considerat $\mathbf{v}_1 = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ sau $\mathbf{v}_2 = -6\bar{i} + 9\bar{j} - 3\bar{k}$, deoarece $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}$, respectiv $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}$.

Exemplu

Ecuațiile parametrice ale dreptei Δ ce trece prin punctul $M_0(2,-1,0)$ și are pe $\mathbf{v} = -2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ vector director sunt

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 - 2t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = -t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dacă atribuim parametrului t diverse valori nenule, obținem puncte pe dreapta Δ. De exemplu, pentru $t = 1$ obținem punctul $M(0,2,-1)$, iar punctul M_0 corespunde valorii $t = 0$.

Observație

Considerăm ecuația carteziană a dreptei Δ ce trece prin M_0 și are pe $\mathbf{v} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$ vector director:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Dacă egalăm șirul de rapoarte cu $t \in \mathbb{R}$, atunci avem

$$x - x_0 = tl, \; y - y_0 = tm, \; z - z_0 = tn, \; t \in \mathbb{R},$$

ceea ce ne conduce la ecuațiile parametrice ale dreptei. Invers, date ecuațiile parametrice ale dreptei, prin eliminarea parametrului t, ajungem la ecuația carteziană.

Observație

Date punctele $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x_B, y_B, z_B)$, **ecuația carteziană a dreptei** AB este

$$AB : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A},$$

deoarece vectorul

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B - z_A)\bar{k}$$

este vector director al dreptei AB. Pentru ecuațiile parametrice ale dreptei AB avem:

$$AB : \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

Exemplu

Ecuația carteziană a dreptei determinată de $A(2,1,-1)$ și $B(2,-1,0)$ este

$$AB : \frac{x-2}{2-2} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z+1}{0+1},$$

adică

$$AB : \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

Dacă ne interesează ecuațiile parametrice ale dreptei AB, egalăm șirul de rapoarte cu parametrul $t \in \mathbb{R}$ și obținem:

$$AB : \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 - 2t, \\ z = t - 1, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dreapta în spațiu

În cele ce urmează, notăm cu $\mathbf{r}_0 = \overline{OM_0}$ vectorul de poziție al lui M_0, iar cu $\mathbf{r} = \overline{OM}$ vectorul de poziție al punctului M. Condiția $\overline{M_0M} \parallel \mathbf{v}$ este echivalentă cu $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{v} = \overline{0}$ sau cu $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$, unde $t \in \mathbb{R}$. Astfel, obținem **ecuația vectorială** a dreptei Δ.
O altă modalitate de a defini o dreaptă este să o considerăm ca fiind intersecția dintre două plane. Pentru aceasta, fie

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

și

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

două plane care se intersectează după o dreaptă. Notăm dreapta de intersecție cu Δ și avem:

$$\Delta : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Și în acest caz ne interesează să precizăm un vector director al dreptei. Pentru aceasta, folosim faptul că dreapta se află la intersecția celor două plane, deci $\Delta \subset \pi_1$ și $\Delta \subset \pi_2$. De aici obținem că $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_1$ și $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_2$, unde $\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2$ sunt normalele celor două plane. Rezultă că un vector director al dreptei poate fi considerat $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, adică:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (B_1 C_2 - B_2 C_1)\bar{i} + (A_2 C_1 - A_1 C_2)\bar{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\bar{k}.$$

Exemplu

Se consideră dreapta Δ definită ca intersecția planelor

$$\pi_1 : x + y + z - 2 = 0$$

și

$$\pi_2 : 2x - y - 3 = 0.$$

Vector director pentru dreapta Δ se obține astfel:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}.$$

Dacă rezolvăm sistemul algebric format din ecuațiile celor două plane, obținem soluțiile de forma:

$$\Delta : \begin{cases} x = t, \\ y = 2t - 3, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ z = 5 - 3t, \end{cases}$$

adică ecuațiile parametrice ale dreptei Δ. Prin eliminarea parametrului t, ajungem la ecuația carteziană a dreptei Δ

$$\Delta : \; x = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-3}.$$

Pentru a descrie prin ecuații axele de coordonate, putem să privim fiecare axă ca fiind intersecția dintre două plane. De exemplu, axa Ox este obținută ca intersecția dintre planul xOy, de ecuație $z = 0$, și planul xOz, de ecuație $y = 0$. Într-un mod asemănător procedăm și pentru celelalte axe. În felul acesta, obținem:

$$Ox : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad Oy : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} .$$

Dreapta în spațiu

Facem observația că vectori directori pentru cele trei axe sunt versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Ecuațiile carteziene ale celor trei axe sunt:

$$Ox : \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0},$$

$$Oy : \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0},$$

$$Oz : \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}.$$

Ecuațiile parametrice ale axelor sunt:

$$Ox : x = t, \; y = 0, \; z = 0, \; t \in \mathbb{R}$$

$$Oy : x = 0, \; y = t, \; z = 0, \; t \in \mathbb{R}$$

$$Oz : x = 0, \; y = 0, \; z = t, \; t \in \mathbb{R}.$$

În cele din urmă, putem să considerăm o dreaptă Δ definită ca intersecția dintre planele

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0,$$

și

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\ A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0.$$

Mulțimea planelor ce trec prin dreapta Δ formează un **fascicul de plane de axă** Δ ce are ecuația:

$$\pi_{\mu,\lambda} : \mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Dreapta în spațiu

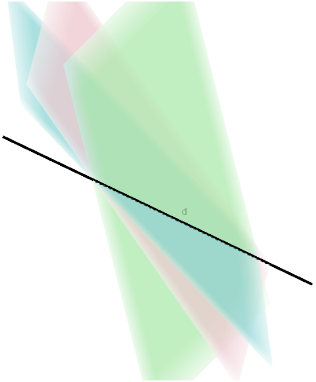


Figure: Fascicul de plane de axă Δ

Exemplu

Fie dreapta Δ, definită ca intersecția planelor $\pi_1 : x + y + 7z - 1 = 0$ și $\pi_2 : 2x - y - 3z + 5 = 0$. Atunci ecuația unui plan ce conține dreapta Δ se obține din ecuația fasciculului de plane de axă Δ

$$\pi_{\mu,\lambda} : \mu(x + y + 7z - 1) + \lambda(2x - y - 3z + 5) = 0,$$

echivalentă cu

$$\pi_{\mu,\lambda} : (\mu + 2\lambda)x + (\mu - \lambda)y + (7\mu - 3\lambda)z + (5\lambda - \mu) = 0.$$

De exemplu, ecuația planului ce conține dreapta Δ și trece prin punctul $A(2, 1, 0)$ se obține din condiția

$$(\mu + 2\lambda) \cdot 2 + (\mu - \lambda) \cdot 1 + (\mu - 3\lambda) \cdot 0 + (5\lambda - \mu) = 0.$$

Găsim astfel $\lambda = \frac{3}{7}\mu$, deci planul căutat are ecuația

$$13x + 4y + 40z + 8 = 0,$$

unde am ales $\mu = 7$, deci $\lambda = 3$.

Dreapta în spațiu

Fie α, β, γ unghiurile pe care le face vectorul director $\mathbf{v} = l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k}$ al dreptei Δ cu axele de coordonate. Avem următoarele:

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{v}, \bar{i}\rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\bar{i}\|} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\langle \mathbf{v}, \bar{j}\rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\bar{j}\|} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\langle \mathbf{v}, \bar{k}\rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\bar{k}\|} = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

iar versorul vectorului director este

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \cos\alpha\bar{i} + \cos\beta\bar{j} + \cos\gamma\bar{k}.$$

În plus, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se numesc **cosinusuri directoare** și verifică relația

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Definiţie

Fie dreptele Δ_1, Δ_2 cu $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ vectori directori. **Unghiul** dintre dreptele Δ_1 şi Δ_2 este unghiul format de vectorii directori ai celor două drepte şi se obţine din relaţia:

$$\cos\psi = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}, \psi \in [0, \pi].$$

Exemplu

Considerăm dreptele

$$\Delta_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

și

$$\Delta_2 : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-5}.$$

Unghiul dintre cele două drepte este unghiul dintre vectorii $\mathbf{v}_1 = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ și $\mathbf{v}_2 = -2\overline{j} - 5\overline{k}$, adică

$$\cos\psi = \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|} = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{29}}.$$

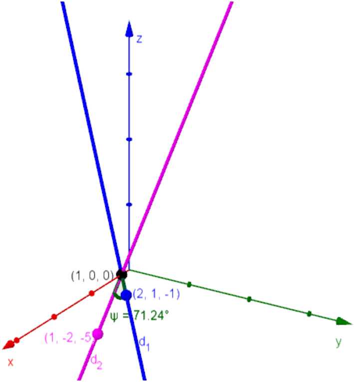


Figure: Unghiul dreptelor Δ_1 și Δ_2

Observație

Poziția relativă a două drepte: Putem să considerăm următoarele cazuri particulare:

- **dreptele sunt paralele** dacă $\mathbf{v}_1 || \mathbf{v}_2$;
- **dreptele sunt perpendiculare** dacă $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.

Lungimea proiecției ortogonale dintr-un punct pe o dreaptă poate fi calculată folosind următorul rezultat:

Teoremă

Fie dreapta Δ cu $\mathbf{v}$ vector director și punctul A arbitrar. Atunci **distanța de la punctul A la dreapta Δ** *este egală cu*

$$d(A, \Delta) = \frac{\|\overline{MA} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|},$$

unde M este un punct ales arbitrar pe dreapta Δ.

Demonstrație.

Considerăm M un punct ales arbitrar pe dreapta Δ.

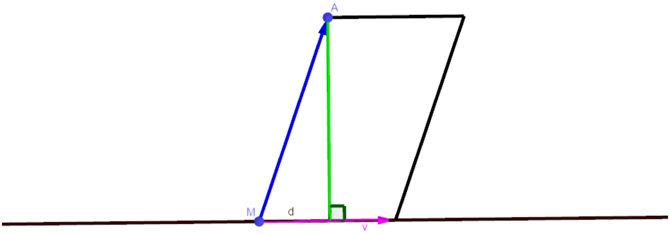


Figure: Distanța de la un punct la o dreaptă

Atunci aria paralelogramului construit pe vectorii $\mathbf{v}$ și $\overline{MA}$ este egală cu $\mathcal{A} = \|\overline{MA} \times \mathbf{v}\|$. Pe de altă parte, știm că $\mathcal{A} = d(A, \Delta) \cdot \|\mathbf{v}\|$. Din cele două relații rezultă egalitatea dorită.

Definiție

Fie dreapta Δ având vector director $\mathbf{v}$ şi planul π cu vector normal la plan notat cu $\mathbf{n}$. **Unghiul dintre dreapta Δ şi planul π**, notat cu $\phi \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, este unghiul dintre dreapta Δ şi proiecţia dreptei pe plan. În plus, avem:

$$\sin \phi = \cos \sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{n}\|}.$$

Dreapta în spațiu

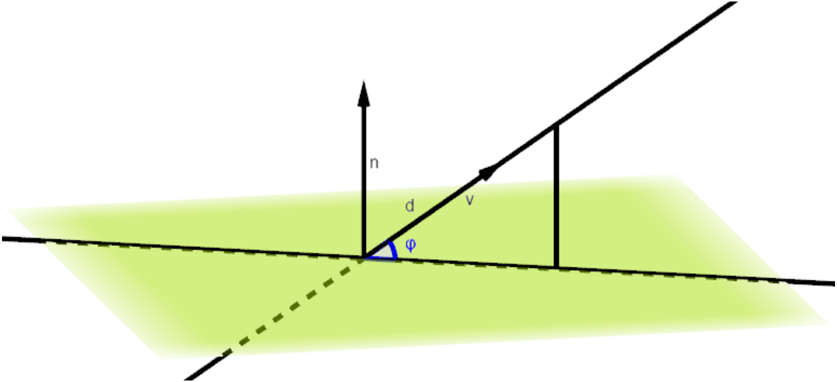


Figure: Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Observație

Poziția relativă a unei drepte față de un plan: Pornind de la definiție, distingem două cazuri particulare:

- dreapta este paralelă cu planul sau este conținută în plan dacă $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$;
- dreapta este perpendiculară pe plan dacă $\mathbf{v} \parallel \mathbf{n}$.

Exemplu

Se consideră planul

$$\pi : z = 2$$

și dreapta

$$\Delta : \begin{cases} x = t, \\ y = 3, \\ z = -t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Unghiul ϕ dintre dreapta Δ și planul π are măsura de 45°, deoarece avem: $\sin\phi = \cos\sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{n}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Am folosit faptul că ecuația carteziană a dreptei Δ este $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{-1}$, deci un vector director pentru dreaptă este $\mathbf{v} = \bar{i} - \bar{k}$, iar $\mathbf{n} = \bar{k}$ este vector normal la planul π.

Dreapta în spațiu

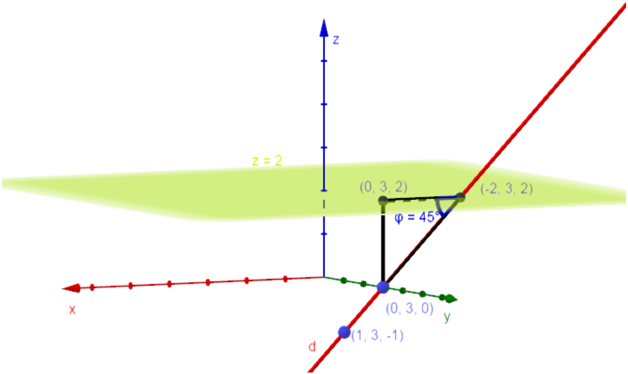


Figure: Unghiul dintre Δ și π