Curs 3
Spaţii vectoriale. Definiţie, exemple

În cursul anterior am făcut mai multe exemple de determinanţi. Voi începe cursul de astăzi cu o aplicaţie, anume expresia inversei unei matrice 2×2.

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversabilă $\Leftrightarrow \det(A) = ad - bc \neq 0$. Avem ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, de unde adjuncta $A^\star = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Astfel,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemplul 1. Fie $A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. $\det(A) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Conform formulei de mai sus, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = {}^tA$.

Observaţia 2. Să detailem înmulţirea dintre un vector şi o coloană.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \ldots + \alpha_n a_{1n} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \ldots + \alpha_n a_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \ldots + \alpha_n a_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_1 C_1(A) + \alpha_2 C_2(A) + \ldots + \alpha_n C_n(A).$$

Deci rezultatul înmulţirii dintre A şi coloana $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ este ceea ce se numeşte o combinaţie liniară a coloanelor matricii A cu coeficienţii elementele coloanei.

Reamintesc şi următorul rezultat enunţat cursul trecut

Teorema 3. *Pentru* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *avem* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demonstraţie: Folosim formula Laplace pentru calculul determinantului matricei $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Din exerciţiul (2) de la sfârşitul cursului 1 avem $\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Fie $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ şi $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Pentru fiecare $1 \leqslant j \leqslant n$, adunăm la $C_{n+j}(C)$ următoarea combinaţie liniară $b_{1j}C_1(C) + b_{2j}C_2(C) + \ldots + b_{nj}C_n(C) = \begin{pmatrix} A \\ -I_n \end{pmatrix} \cdot C_j(B)$. $\begin{pmatrix} A \\ -I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ iar $C_j(B) \in \mathcal{M}_{n,1}$. Făcând combinaţia liniară de mai sus, pe primele n linii ale coloanei $n+j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, ale noii matrice vom avea $0 + A \cdot C_j(B)$, iar pe ultimele n linii vom avea $C_j(B) + (-I_n) \cdot C_j(B)$.

Deci în urma acestor combinaţii liniare cu coloane obţinem matricea

$C' = \begin{pmatrix} A & A \cdot B \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Am obţinut C' prin combinaţii liniare cu coloane, deci $\det(C) = \det(C') = (-1)^{n^2} \det(A \cdot B) \det(-I_n) =$ (vezi exerciţiul (3) de la sfârşitul cursului 1) $= (-1)^{n^2}(-1)^n \det(A \cdot B) = (-1)^{n^2+n} \det(A \cdot B) = (-1)^{n(n+1)} \det(A \cdot B) = \det(A \cdot B)$. De aici egalitatea dorită.

$\square$

Corolarul 4. *Pentru* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *avem* $\det(AB) = \det(BA)$.

Demonstraţie: $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.

$\square$

Corolarul 5. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *inversabilă şi* $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Atunci* $\det(AXA^{-1}) = \det(X)$.

Demonstraţie: $\det(AXA^{-1}) = \det(A^{-1}AX) = \det(I_nX) = \det(X)$. $\square$

Ultimul rezultat legat de determinanţi pe care îl voi menţiona este

Teorema 6 (Binet-Cauchy)**.** *Fie* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R}), k \leqslant \min\{n,p,r\}$, $I = \{i_1, \ldots i_k\} \subset [n]$ *şi* $L = \{l_1, \ldots l_k\} \subset [r]$. *Atunci*

$$\det(A \cdot B)_{I,L} = \sum_{\substack{J \subset [p] \\ |J| = k}} \det(A_{I,J}) \det(B_{J,L})$$

Acest rezultat se foloseşte **esenţial** în demonstraţia teoremei matrice-arbore pe care am enunţat-o cursul trecut.

Observaţia 7. $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$. Voi da un exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\det(A+B) = 0 \neq 2 = 1 + 1 = \det(A) + \det(B)$.

Voi introduce o altă funcţie pe mulţimea matricelor pătrate.

Definiţia 8. Fie $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Urma* matricii $A, \operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}$.

Avem deci $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. De exemplu $\operatorname{tr}(I_n) = 1 + 1 + \ldots + 1 = n$.
Voi enumera proprietăţile de bază

- este clar că $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
- $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$.
  $\operatorname{tr}(\alpha A) = \sum_{j=1}^n (\alpha a_{jj}) = \alpha \sum_{j=1}^n a_{jj} = \alpha \operatorname{tr}(A)$.
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
  $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{kj} b_{jk}) = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n a_{kj} b_{jk}) =$
  $= \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n b_{jk} a_{kj}) = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \operatorname{tr}(BA)$.
- $A, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inversabilă. Din proprietatea anterioară rezultă
  $\operatorname{tr}(AXA^{-1}) = \operatorname{tr}(X)$.

Exemplul 9. Să se demonstreze că NU există $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $AB - BA = I_n$. Presupunem că ar exista două astfel de matrice A, B, atunci $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(I_n) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = n \Leftrightarrow 0 = n$. O contradicţie.

Spaţii vectoriale

Definiţia 10. Un spaţiu vectorial peste un corp comutativ $\mathbb{K}$ (vom lucra peste $\mathbb{R}$) este un grup abelian (comutativ) $(V, +)$ ce are şi o multiplicare externă cu scalari din $\mathbb{K}$ ($(\alpha, v) \longmapsto \alpha v \in V$, cu $\alpha \in \mathbb{K}$ şi $v \in V$), înmulţire ce îndeplineşte următoarele proprietăţi:

(1) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$, pentru $(\forall)\alpha \in \mathbb{K}$ şi $(\forall)v_1, v_2 \in V$,
(2) $(\alpha_1 + \alpha_2)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$, pentru $(\forall)\alpha_j \in \mathbb{K}$ şi $(\forall)v \in V$,
(3) $\alpha_1(\alpha_2 v) = (\alpha_1 \alpha_2)v$, pentru $(\forall)\alpha_j \in \mathbb{K}$ şi $(\forall)v \in V$,
(4) $1 \cdot v = v$.

De aici înainte toate consideraţiile vor fi făcute pentru corpul numerelor reale $\mathbb{R}$. Elementele din V se numesc vectori iar cele din $\mathbb{R}$ se numesc scalari.

Exemple:

(1) 0
(2) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$
(3) $\mathbb{R}^n = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R}\}$

Pentru $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, adunarea este $\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

şi înmulţirea cu scalari $\alpha\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$, pentru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Opusul unui vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ este obţinut schimbând semnul pe fiecare coordonotă.

(4) $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n} | a_{i,j} \in \mathbb{R}\}$. Operaţiile sunt cele prezentate în primul curs, adunarea matricelor şi înmulţirea acestora cu scalari.

$\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} | a_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^m$.

Similar $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} | a_j \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^n$.

(5) $\mathbb{R}[X]_{\leqslant n} = \mathbb{R}[X]_n = \{a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali de grad cel mult n.

Suma şi respectiv înmulţirea cu scalari sunt cele obişnuite.

(6) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} | \text{f funcţie}\}$ unde X este o mulţime nevidă.

Operaţiile sunt: fie $f, g \in \mathcal{F}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ptr. $x \in X$, iar $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, pentru $x \in X$.

(7) $\mathcal{C}((a, b), \mathbb{R}) = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} | \text{f funcţie continuă}\}$

(8) $\mathcal{C}^1((a, b), \mathbb{R}) = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} | \text{f funcţie derivabilă cu f' continuă}\}$.

Definiţia 11. Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$, $U \subset V$ se numeşte subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă pentru $(\forall) v_1, v_2 \in U$ şi pentru $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U$.

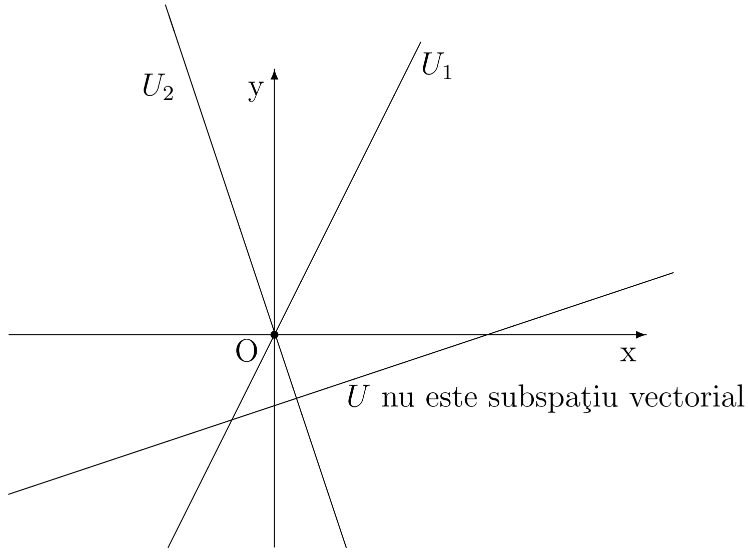
Observaţia 12. O condiţie necesară pentru o submulţime U a spaţiului vectorial V să fie subspaţiu vectorial este ca $0 \in U$, unde 0 este elementul neutru din V.

Exemplul 13. Considerăm $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ şi $U = \{(x, mx) | x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid y = mx, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

Să vedem că într-adevăr avem un subspaţiu vectorial.

Fie $v_1 = (x_1, mx_1), v_2 = (x_2, mx_2) \in U$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Avem $\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(x_1, mx_1) + \beta(x_2, mx_2) = (\alpha x_1, \alpha m x_1) + (\beta x_2, \beta m x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha m x_1 + \beta m x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, m(\alpha x_1 + \beta x_2)) \in U$.



U din figura de mai sus nu este un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^2$, nu conţine originea. Pe de altă parte, U_1 şi U_2 sunt. Cele două linii U_1 şi U_2 sunt reprezentări grafice pentru aceste subspaţii. U_1 este o dreaptă de pantă pozitivă, pe când, U_2 are panta negativă.

Observaţia 14. Fie $(V_i)_{i\in I}$ subspaţii vectoriale ale unui $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial V. Atunci $\bigcap_{i\in I} V_i$ este un subspaţiu vectorial a lui V.

Demonstraţie: Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $v_1, v_2 \in \bigcap_{i\in I} V_i$. Din definiţia intersecţiei rezultă că $v_1, v_2 \in V_i, (\forall) i \in I$. Dar V_i sunt subspaţii vectoriale, deci $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_i$ pentru $(\forall) i \in I$, deci $(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \bigcap_{i\in I} V_i$.

$\square$

Definiţia 15. Fie $S \subset V$, submulţime. Notăm

$$< S > = \bigcap_{\substack{W \text{ subspaţiu în} V \\ S \subset W}} W$$

intersecţia tuturor subspaţiilor lui V ce conţin pe S. $< S >$ se numeşte subspaţiul generat de mulţimea S.

Se observă că $< \emptyset >= 0$.
$< S >$ se descrie astfel:
$< S >= \{a_1 v_1 + \ldots a_n v_n | n \in \mathbb{N}^\star, v_1, \ldots, v_n \in S, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$
Mai mult dacă $(V_i)_{i\in I}$ sunt subspaţii în V, cu $I \neq \emptyset$, atunci

$$< \bigcup_{i\in I} V_i >= \{x_{i_1} + \ldots + x_{i_n} | n \in \mathbb{N}^\star, i_1, \ldots, i_n \in I, x_{i_j} \in V_{i_j}\}$$

este cel mai mic spubspaţiu care include toate V_i- urile, şi se notează $\sum_{i\in I} V_i$. Dacă $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci $\sum_{i\in I} V_i = V_1 + \ldots + V_n$.

Definiţia 16. $S \subset V$ se numeşte sistem de generatori pentru V dacă $< S >= V$.

Exemplul 17. Fie $S = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$. După cum am menţionat mai sus, $< S >$ este mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ai vectorilor v_1, v_2 cu coeficienţi în $\mathbb{R}$, deci $< S >= \{\alpha v_1 + \beta v_2 | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Să demonstrăm că $< S >= \mathbb{R}^2$. $< S >\subset \mathbb{R}^2$ prin definiţie. Fie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ atunci $(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) \in< S >$. Avem deci egalitate şi astfel S este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^2$.