

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 7

Sisteme de ecuații liniare

Continuăm considerațiile începute cursul trecut.

Înainte de a trece la exemple voi menționa și algoritmul de rezolvare a unui sistem compatibil de ecuații liniare. Considerăm din nou sistemul

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Vom presupune că este compatibil.

Fie A matricea sistemului și presupunem că $\text{rang}(A) = r$ și considerăm $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ și $J = \{j_1 < \dots < j_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ a.î. $\det(A_{I,J}) \neq 0$. Vom rezolva sistemul în funcție de acest minor nenul de ordin r , pe care îl vom fixa..

Știm că $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e)$ (sistemul este compatibil) $= \dim < L_1(A^e), \dots, L_m(A^e) > .$ Cum $L_{i_1}(A^e), \dots, L_{i_r}(A^e)$ sunt liniar independente (altfel, ar rezulta că restricțiile acestor linii la J sunt liniar dependente, deci $\det(A_{I,J}) = 0$), avem că faptul că $< L_1(A^e), \dots, L_m(A^e) > = < L_{i_1}(A^e), \dots, L_{i_r}(A^e) >$, deci orice linie este combinație liniară de $L_{i_1}(A^e), \dots, L_{i_r}(A^e)$, asta însemnând că orice ecuație a sistemului este combinație liniară a ecuațiilor i_1, \dots, i_r deci sistemul (??) este echivalent cu sistemul format numai din ecuațiile i_1, \dots, i_r .

Reamintesc că două sisteme se numesc *echivalente* dacă au același soluții.

Din observațiile anterioare sistemul $AX = B$ este echivalent cu sistemul

$$A_{I,\{1,2,\dots,n\}}X = B_I$$

Notând cu $\bar{J} = [n] \setminus J$ avem $A_{I,\{1,2,\dots,n\}}X = A_{I,J}X_J + A_{I,\bar{J}}X_{\bar{J}}$, de unde

$$A_{I,\{1,2,\dots,n\}}X = B_I \Leftrightarrow A_{I,J}X_J + A_{I,\bar{J}}X_{\bar{J}} = B_I \Leftrightarrow A_{I,J}X_J = B_I - A_{I,\bar{J}}X_{\bar{J}} \Leftrightarrow$$

$$(A_{I,J} \text{ inversabilă}) \Leftrightarrow X_J = A_{I,J}^{-1}(B_I - A_{I,\bar{J}}X_{\bar{J}})$$

În termeni de ecuații și necunoscute :

- păstrăm în membrul stâng necunoscutele x_{j_1}, \dots, x_{j_r} , (*necunoscutele principale*). Acestea formează vectorul X_J .

- trecem în membrul drept celelalte necunoscute (*necunoscutele secundare*)
- dăm valori arbitrare necunoscutelor secundare ($X_{\overline{J}} \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{R})$ este arbitrar)
- calculăm necunoscutele principale în funcție de necunoscutele secundare. Obținem o unică soluție pentru fiecare vector $X_{\overline{J}}$.

Vedem că mulțimea soluțiilor este parametrizată de numărul necunoscutelor secundare, care variază independent una de alta în \mathbb{R} . Deci avem $n - r$ (numărul necunoscutelor secundare) ”grade de libertate” sau parametri.

La sfârșitul cursului anterior am prezentat metoda eliminării Gauss-Jordan și forma eșalon a unei matrice.

Am enunțat rezultatul că orice matrice poate fi transformată după un număr finit de operații cu linii într-o matrice eșalon.

În loc de demonstrație voi face exemple.

Exemplul 1. Fie matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}. \text{ Vedem că primul element de pe prima linie este 1, deci din}$$

definiția pivotului acesta este pivotul primei linii. Cum pivotul este singurul nenul pe coloana sa vom elimina elementele de pe prima coloană folosind acest pivot. Astfel $L'_2 = L_2 + L_1$ și $L'_3 = L_3 - 4L_1$. Avem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}. \text{ Vedem că elementul de pe a}$$

doua linie și a doua coloană este nenul. Acesta va fi pivotul celei de-a doua linii. Pentru a obține 1 în acea poziție trebuie să împărțim linia a doua cu 4, deci facem

$$\text{transformarea } L'_2 = \frac{1}{4}L_2. \text{ Astfel obținem matricea } \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}. \text{ Cu}$$

pivotul al doilea, cel de pe linia a doua, facem eliminări astfel încât acesta să rămână singurul nenul pe coloana sa. Eliminările sunt $L'_1 = L_1 - L_2$, $L'_3 = L_3 + L_1$. Obținem

$$\text{matricea } \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -12 \end{pmatrix}. \text{ Elementul nenul de pe linia 3 este -9, pe coloana}$$

a treia. Aici obținem al treilea pivot împărțind L_3 cu -9. După această operație

$$\text{matricea devine } \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}. \text{ În sfârșit vom face ultimele eliminări pe coloana}$$

a treia a.î. pivotul să rămână singurul nenul pe coloana sa.

Transformările sunt $L'_1 = L_1 - L_3$ și $L'_2 = L_2 - L_3$. Forma eșalon a matricii este

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Voi face mai multe observații.

În primul rând vedem că forma eșalon E are rangul maxim pe care îl poate atinge ($\text{rang}(E) \leq \min\{3, 4\} = 3$).

Întrebarea naturală care se pune este dacă $\text{rang}(A)$ este egal cu rangul formei eșalon E .

Răspunsul vine din faptul că toate operațiile pe care le-am făcut se pot scrie ca înmulțiri la stânga cu matrice.

Astfel dacă dorim să adunăm L_1 la L_2 , adică să facem transformarea $L'_2 = L_2 + L_1$ matricii A , atunci înmulțim la stânga cu matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Este o matricea I_3

la care am adăugat un 1 pe linia 2 și coloana 1.

$$\text{Deci } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dacă procedăm mai departe și facem a doua eliminare pe coloana întâi, $L'_3 = L_3 - 4L_1$, înmulțim la stânga cu matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Avem } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$$

Pentru a obține al doilea pivot trebuie să împărțim linia a doua cu 4. Deci vom modifica numai linia a doua.

$$\text{Acest lucru se obține la stânga cu matricea } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Deci } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}.$$

Restul operațiilor pe care le-am descris în algoritmul de obținere a formei eșalon (se numește eșalonare) E , a matricei A , se fac similar. Le voi menționa la sfârșitul exemplului.

Deocamdată să observăm că matricele cu care înmulțim la stânga sunt matrice inversabile. Determinanții $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ (sunt matrice inferior triunghiulare), iar $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}$. Deci forma eșalon E a matricei A se obține din A prin înmulțire la stânga cu matrice inversabile.

Acum putem răspunde la întrebarea pe care am pus-o.

În cursul trecut am menționat că dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ inversabilă, atunci $\text{rang}(U \cdot A) = \text{rang}(A)$. Cum $E = U \cdot A$, avem $\text{rang}(E) = \text{rang}(A)$.

Voi scrie acum produsul matricelor prin care obținem matricea cu care înmulțim pe A la stânga pentru a obține E , forma eșalon.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Putem spune că $\text{rang}(A) = \text{rang}(E) = 3$.

Algoritmul Gauss-Jordan este folositor pentru a obține și inversa unei matrice.

Exemplul 2. Voi considera pentru ușurință matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ care

este formată din primele coloane ale matricei A din exemplul anterior. Vom calcula folosind operații cu linii (înmulțiri la stânga cu matrice inversabile) inversa B^{-1} .

Vedem că dacă înmulțim la stânga matricea B cu matricele cu care am înmulțit A la stânga, în aceeași ordine, vom obține primele trei coloane ale formei eșalon E

(înmulțirea se face linie pe coloană), adică I_3 . Deci acest produs de matrice este B^{-1} .

Aplicăm acest algoritm matricei $(B|I_3)$. Înmulțim la stânga cu B^{-1} și avem $B^{-1} \cdot (B|I_3) = (B^{-1} \cdot B | B^{-1} \cdot I_3) = (I_3 | B^{-1})$. Făcând eliminare Gauss-Jordan pentru matricea $(B|I_3)$ vom obține matricea $(I_3 | B^{-1})$, deci în dreapta, inversa lui B .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L'_2 = L_2 + L_1 \\ L'_3 = L_3 - 4L_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L'_2 = \frac{1}{4}L_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L'_1 = L_1 - L_2 \\ L'_3 = L_3 + L_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -\frac{15}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L'_3 = -\frac{1}{9}L_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{array} \right) \begin{array}{l} L'_1 = L_1 - L_3 \\ L'_2 = L_2 - L_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{12} & -\frac{8}{36} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{12} & \frac{10}{36} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{array} \right).$$

Deci

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{36} & -\frac{8}{36} & \frac{4}{36} \\ -\frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{4}{36} \\ \frac{15}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{4}{36} \end{pmatrix} = \frac{1}{-36} \begin{pmatrix} -12 & 8 & -4 \\ 6 & -10 & -4 \\ -15 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Numitorul -36 este bineînțeles $\det(B)$. Se verifică ușor că $B \cdot B^{-1} = I_3$.

Este un algoritm mult mai economic decât cel de aflare a adjunței matricei (deci a cofactorilor). Inversa este adjuncta înmulțită cu inversul determinantului matricei.

O ultimă observație, anume că forma eșalon a unei matrice inversabile este matricea unitate I_n . În acest exemplu forma eșalon a matricii B este I_3 .

Sisteme liniare omogene

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Considerăm sistemul liniar $AX = 0$, unde $0 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, adică

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Bineînțeles că un sistem omogen are întotdeauna soluția nulă, deci orice sistem omogen este compatibil.

Aplicăm același algoritm de rezolvare ca și în cazul sistemelor cu coloana termenilor liberi nenulă. Începem cu calculul rangului matricei. Cel mai economic este aplicarea algoritmului Gauss-Jordan, care ne dă nu numai rangul matricii, dar și o formă simplă, echivalentă, a sistemului de unde aflăm cu ușurință soluția.

Exemplul 3. Să rezolvăm sistemul omogen
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, matricea din **exemplul ??**.

Forma eșalon știm că este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Rangul este 3, primele trei necunoscute sunt principale și depind de a patra necunoscută, cea secundară. Sistemul devine
$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{4}{3}x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{4}{3}x_4 \\ x_3 = -\frac{4}{3}x_4 \end{cases}$$

Soluția are un parametru, $x_4 \in \mathbb{R}$.

Mulțimea soluțiilor este $S = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\alpha \\ \frac{4}{3}\alpha \\ -\frac{4}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$.

Indicele coloanelor pe care se află pivoții este indicele variabilelor principale. Acestea se află în funcție de cele secundare.

Dacă forma eșalon a matricii extinse conține pe ultima coloană un pivot atunci sistemul asociat este incompatibil.

Forma eșalon a unei matrice inversabile este matricea identitate.