GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 13
Conice, Cuadrice

În cursul anterior descris ecuaţiile reduse ale conicelor. O conică este descrisă printr-o ecuaţie de tipul:

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}, (\forall) i, j = \overline{1, 3}$ şi $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Conicei i se asociază matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Submatricea de ordin 2 din stânga sus $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ este matricea unei forme pătratice pe $\mathbb{R}^2$.

Notăm $\Delta = \det(A), \delta = \det(A_2), I = \operatorname{tr}(A_2) = a_{11} + a_{22}$.

Teorema 1. $\Delta = \det(A), \delta = \det(A_2), I = \operatorname{tr}(A_2)$ *sunt invarianţi la translaţii şi transformări ortogonale.*

Clasificarea conicelor

Putem da o clasificare a conicelor folosind invarianţii Δ, δ, I.

(1) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *nedegenerată*.

a) dacă $\delta > 0$, atunci $\mathcal{C}$ este $\begin{cases} \textit{elipsă} & \text{dacă } \Delta \cdot I < 0 \\ \textit{mulţimea vidă} & \text{dacă } \Delta \cdot I > 0 \end{cases}$

b) dacă $\delta = 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *parabolă*

c) dacă $\delta < 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *hiperbolă*

(2) Dacă $\Delta = 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este conică *degenerată*

a) dacă $\delta > 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *un punct*,

b) dacă $\delta = 0$, atunci conica este o reuniune de *drepte paralele* sau *confundate* sau *mulţimea vidă*,

c) dacă $\delta < 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este o reuniune de *drepte concurente*.

În cele ce urmează voi descrie metoda roto-translaţiei de aducere la forma redusă a ecuaţiei unei conice.

0. Din invarianţii Δ, δ, I se deduce tipul conicei

1. Se aduce la forma canonică forma pătratică dată de matricea A_2. Pentru aceasta se foloseşte metoda transformărilor ortogonale. Coeficienţii pătratelor perfecte sunt valorile proprii.

2. Se forţează pătratele perfecte în x şi y şi se obţine forma redusă.

Exemplul 2. Să se determine tipul conicei dată de ecuaţia $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$ şi să se aducă la forma redusă.

Matricea asociată conicei este $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\Delta = 16, \delta = \det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 9 = 16, I = 10$.

$\Delta = 16 \neq 0, \delta \cdot I = 160 > 0$, deci avem conică nedegenerată, care este de fapt mulţimea vidă.

Considerăm $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ pe care o aducem la forma diagonală folosind metoda transformărilor ortogonale.

$P_{A_2}(X) = X^2 - IX + \delta = X^2 - 10X + 16$. Rădăcinile sunt $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2$.

Vectorii proprii: $(A_2 - 8I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(A_2 - 2I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Am ales în $v_2, x = -1$ şi $y = 1$ pentru ca matricea formată cu coloanele v_1, v_2 să aibă det > 0. Matricea $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, are proprietatea ${}^tSS = I_2$, şi $\det(S) = 1$, deci S este matricea unei rotaţii în plan.

Schimbarea de variabile este $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, adică $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$ şi $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$.

Ecuaţia conicei în x' şi y' devine $\mathcal{C} : 8x'^2 + 2y'^2 - 2\sqrt{2}y' + 2 = 0$. De aici deducem ecuaţia redusă $8x'^2 + 2(y' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 1 = 0$. Suma a două pătrate perfecte plus 1, este mulţimea vidă. Coeficienţii pătratelor perfecte sunt valorile proprii ale matricii A_2.

Voi mai da un exemplu.

Exemplul 3. Să se determine tipul conicei dată de ecuaţia $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$ şi să se aducă la forma redusă.

Matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Invarianţii metrici ai conicei sunt $\Delta = 8 \neq 0, \delta = \det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4, I = 3$. Avem o conică nedegenerată, care este o hiperbolă.

Considerăm forma pătratică $3x^2 - 4xy$ în $\mathbb{R}^2$ pe care o aducem la forma canonică. Matricea asociată este $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. $P_{A_2}(X) = X^2 - 3X - 4$. Rădăcinile sunt $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$.

Vectorii proprii: $(A_2 - 4I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -2y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(A_2 + I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x = y \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Matricea formată cu vectorii e_1, e_2 (coloanele matricei), este $S = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. S este o matrice ortogonală de determinant 1, deci matricea unei rotaţii. Schimbarea de variabile este $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'), y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y')$.

Ecuaţia conicei în noile coordonate devine $\mathcal{C} : 4x'^2 - y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0$.

Formăm pătrate perfecte şi obţinem $4(x' - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - (y' - \frac{3}{\sqrt{5}})^2 - 2 = 0$.

Notăm $X = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}, Y = y' - \frac{3}{\sqrt{5}}$. Aceasta reprezintă o translaţie. Împărţim cu 2 şi obţinem ecuaţia redusă a hiperbolei.

$$\mathcal{C} : 2X^2 - \frac{1}{2}Y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} - 1 = 0$$

unde $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi $b = \sqrt{2}$. Centrul hiperbolei este intersecţia dreptelor $X = 0$ şi $Y = 0$ iar noile coordonate în funcţie de x şi y sunt $X = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) - \frac{1}{\sqrt{5}}, Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) - \frac{3}{\sqrt{5}}$. Acestea se obţin folosind $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tS\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cât şi formulele pentru X şi Y în funcţie de x' şi y'. Matricea ${}^tS = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dreapta $X = 0$ în sistemul Oxy are ecuaţia $y = 2x - 1$ iar dreapta $Y = 0$ are ecuaţia $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Intersecţia acestora este punctul $o(1, 1)$. Acesta este centrul sistemului de coordonate oXY. În acest sistem de axe se reprezintă hiperbola. Asimptotele hiperbolei sunt $Y = \pm\frac{b}{a}X = \pm 2X$. În sistemul Oxy aceste drepte au ecuaţiile $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ şi respectiv $x = 1$.

Voi adăuga teorema Sylvester de caracterizare a formelor pătratice. Considerăm V un spaţiu vectorial real cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n < \infty$ şi $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică. Reamintesc că forma pătratică Q este *pozitiv (negativ) definită* dacă $Q(v) > 0$ ($Q(v) < 0$), pentru orice $v \in V \backslash \{0_V\}$.

Teorema 4 (Sylvester). *Fie $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică ca mai sus şi $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V în care forma pătratică are matricea $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Fie $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ minorii principali ai matricei A. Atunci:*
1) Q este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_i > 0$, pentru $(\forall) i = \overline{1, n}$,
2) Q este negativ definită dacă şi numai dacă $(-1)^i \Delta_i > 0$, pentru $(\forall) i = \overline{1, n}$.

Cuadrice

Voi enumera cuadricele specificându-le ecuaţiile reduse.
Elipsoidul Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $a, b, c > 0$.

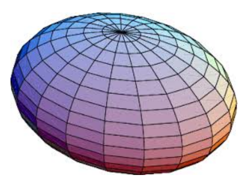

FIGURE 1. Elipsoid

Pentru $a = b = c = r > 0$, obţinem sfera de rază r, ce are ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Sfera este locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct dat. Atât elipsoidul cât şi sfera descrise prin ecuaţiile de mai sus au centrul $O(0, 0, 0)$. Elisoidul de centru (x_0, y_0, z_0) are ecuaţia $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} - 1 = 0$, şi similar sfera de centru (x_0, y_0, z_0) şi rază r are ecuaţia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$. Intersecţia elipsoidului cu un plan paralel cu unul dintre planele de coordonate este o elipsă. Intersecţia sferei cu un plan paralel cu unul dintre planele de coordonate este un cerc. Sfera se intersectează cu orice plan ce trece prin origine într-un cerc mare. Mai mult, sfera este o suprafaţă de rotaţie.

Hiperboloidul cu o pânză

Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, cu $a, b, c > 0$.

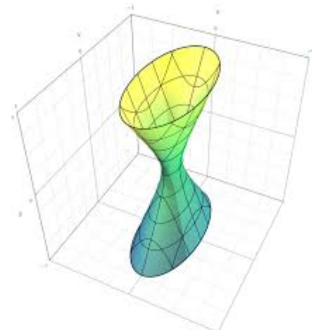

Figure 2. Hiperboloid cu o pânză

Pentru $a = b$ este o suprafaţă care se poate obţine prin rotaţia unei drepte în jurul axei verticale. Prin orice punct al hiperboloidului trec două drepte distincte ce sunt conţinute în suprafaţă. O astfel de suprafaţă se numeşte *dublu riglată.*

Intersecţia cu un plan orizontal $z = \alpha$ este o elipsă, iar intersecţia cu plane paralele cu Oxz şi Oyz sunt hiperbole. Să descriem intersecţia cu un plan orizontal. Aceasta este soluţia sistemului $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - (\frac{\gamma^2}{c^2} + 1) = 0$, ceea ce reprezintă ecuaţia unei elipse.

Hiperboloidul cu două pânze Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, cu $a, b, c > 0$.

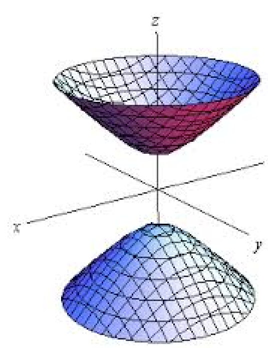

Figure 3. Hiperboloid cu o pânze

Intersecţia cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: mulţimea vidă pentru $|\gamma| < c$, un punct pentru $|\gamma| = c$ şi o elipsă pentru $|\gamma| > c$.

Intersecţiile cu plane paralele cu atât cu Oxz cât şi cu Oyz sunt hiperbole. Punctele $V_1(0, 0, c)$ şi $V_2(0, 0, -c)$ se numesc *vârfurile hiprboloidului.*

Paraboloidul eliptic Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$, cu $a, b, > 0$.

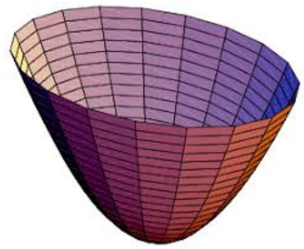

FIGURE 4. Paraboloid eliptic

Intersecţia acestei suprafeţe cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: o elipsă pentru $\gamma > 0$, un punct pentru $\gamma = 0$, şi mulţimea vidă pentru $z < 0$. Intersecţia cu orice plan paralel cu Oxz sau Oyz este o parabolă. Punctul $O(0, 0, 0)$ se numeşte vârful paraboloidului.

Paraboloidul hiperbolic sau şa Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$, cu $a, b, > 0$.

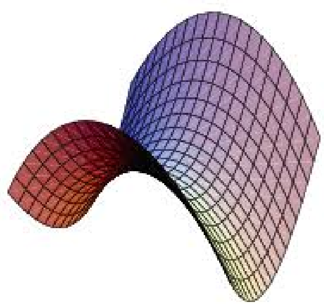

FIGURE 5. Paraboloid hiperbolic

Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu un plan $z = \gamma$, este o hiperbolă pentru $\gamma \neq 0$ şi o reuniune de drepte concurente pentru $\gamma = 0$, $(z = 0, y = \pm\frac{b}{a}x)$. Intersecţia cu un plan paralel cu Oxz $(y = \beta)$ sau cu Oyz $(x = \alpha)$ este o parabolă. Originea $O(0, 0, 0)$ este vârful sau punctul şa al paraboloidului hiperbolic. Acoperişul gării din Predeal este o astfel de suprafaţă.

Prin orice punct al paraboloidului hiperbolic trec două drepte distincte conţinute în suprafaţă. Deci şi aceasta este o suprafaţă dublu riglată.

Conul Ecuaţia redusă a conului este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, cu $a, b, c > 0$.

Intersecţia conului cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: punctul $O(0, 0, 0)$ pentru $\gamma = 0$ şi o elipsă pentru $\gamma \neq 0$. Intersecţia cu un plan $y = \beta$ este o reuniune de drepte concurente pentru $\beta = 0$ şi o hiperbolă pentru $\beta \neq 0$. La fel, intersecţia cu

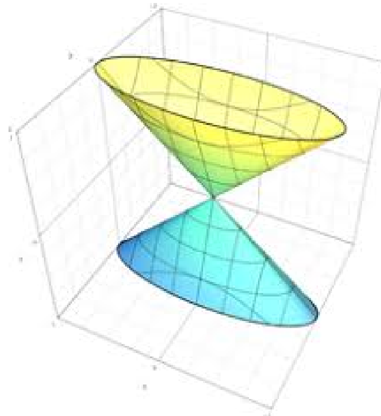

FIGURE 6. Con

un plan $x = \gamma$ este o reuniune de drepte concurente pentru $\gamma = 0$ şi o hiperbolă pentru $\gamma \neq 0$.

Dacă $a \neq b$ conul se numeţe *eliptic* iar dacă $a = b$ avem un con *circular*. Punctul $O(0, 0, 0)$ se numeşte *vârful* conului.

Conul este asimptotic atât hiperboloidului cu o pânză cât şi celui cu două pânze. Hiperboloidul cu o pânză este exterior conului, iar hiperboloidul cu două pânze este interior conului.

Cilindru eliptic Ecuaţia redusă a cilindrului eliptic este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a, b > 0$. Intersecţia unui cilindru eliptic cu un plan orizontal $z = \gamma$ este o elipsă.

Intersecţia cu un plan $y = \beta$ este o reuniune de drepte paralele pentru $|\beta| < b$, o dreaptă pentru $|\beta| = b$ şi mulţimea vidă pentru $|\beta| > b$. Similar, intersecţia cu un plan $x = \alpha$ este o reuniune de drepte paralele pentru $|\alpha| < a$, o dreaptă pentru $|\alpha| = a$ şi mulţimea vidă pentru $|\alpha| > a$.

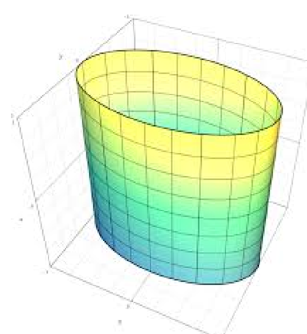

FIGURE 7. Cilindru eliptic

Dacă $a = b = r$, suprafaţa este un cilindru circular cu ecuaţia $x^2 + y^2 = r^2$. Intersecţia unui cilindru circular cu un plan orizontal $z = \gamma$ este un cerc. Intersecţiile cu plane paralele cu Oxz şi Oyz sunt la fel ca în cazul cilindrului eliptic.

Cilindru hiperbolic Ecuaţia redusă a cilindrului hiperbolic este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a, b > 0$.

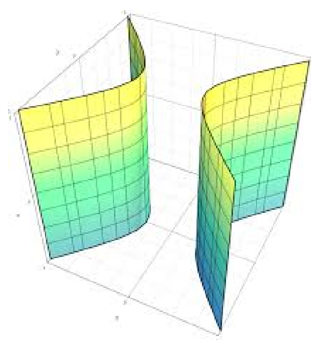

Figure 8. Cilindru hiperbolic

În figură este reprezentat un cilindru hiperbolic de ecuaţie $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Intersecţia acestuia cu un plan $z = \gamma$ este o hiperbolă. Intersecţia cilindrului hiperbolic cu un plan $y = \beta$ este mulţimea vidă pentru $|\beta| < b$, o dreaptă pentru $|\beta| = b$ şi reuniunea a două drepte paralele pentru $|\beta| > b$, iar intersecţia cu un plan $x = \alpha$ este o pereche de drepte paralele

Cilindru parabolic Ecuaţia redusă este $y^2 = 2px$ cu $p > 0$

Intersecţia cu un plan orizontal $z = \gamma$ este o parabolă. Intersecţia cu un plan $y = \beta$ este dreapta de ecuaţie $x = \frac{\beta^2}{2p}$, iar intersecţia cu un plan $x = \alpha$ este mulţimea vidă dacă $\alpha < 0$, dreapta $y = 0$ pentru $\alpha = 0$, şi o reuniune de drepte $y = \pm\sqrt{2p\alpha}$ pentru $\alpha > 0$.

Reuniune de plane secante Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

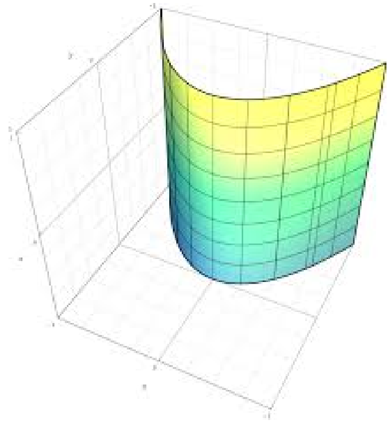

FIGURE 9. Cilindru parabolic

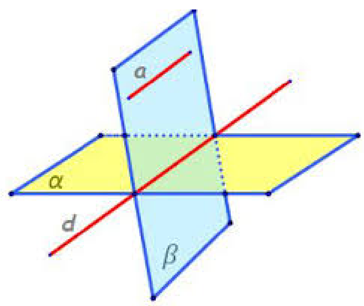

FIGURE 10. Plane secante

Reuniune de plane paralele Ecuaţia redusă este $x^2 - a^2 = 0$.

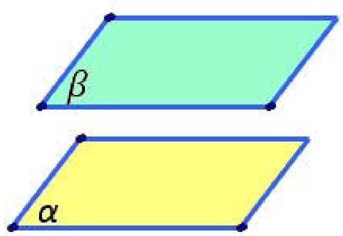

FIGURE 11. Plane paralele

Reuniune de plane confundate Ecuaţia redusă: $x^2 = 0$.

O dreaptă Ecuaţia redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Fiind în $\mathbb{R}^3$, z fiind un parametru.

Un punct Ecuaţia redusă: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$

Mulţimea vidă Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$, $a,b,c>0$.

Ecuaţia generală prin care este dată o cuadrică este

$$\mathcal{S}: a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

unde $a_{ij}\in\mathbb{R}, (\forall)i,j=\overline{1,4}$ şi $a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2\neq 0$.

Cuadricei $\mathcal{S}$ îi asociem matricea simetrică $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{pmatrix}$. Notăm cu $A_3=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$ submatricea din colţul stânga sus, $\Delta=\det(A), \delta=\det(A_3), I=\operatorname{tr}(A_3)=a_{11}+a_{22}+a_{33}$ şi $J=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$ se numesc invarianţii metrici ai cuadricei $\mathcal{S}$.

Teorema 5. $\Delta=\det(A), \delta=\det(A_3), I$ *şi* J *sunt invarianţi la translaţii şi transformări ortogonale.*

Aducerea la forma canonică a cuadricelor

Considerăm forma pătratică pe $\mathbb{R}^3$, $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$ a cărei matrice este A_3. Folosim metoda transformărilor ortogonale pentru a o aduce la forma normală. Deci calculăm valorile proprii şi vectorii proprii asociaţi, găsim matricea ortogonală S, care realizează rotaţia. Se forţează pătratele perfecte în ecuaţia cuadricei $\mathcal{S}$ în noile coordonate şi se pune în evidenţă translaţia.

Exemplul 6. Utilizând metoda roto-translaţiei să se aducă la forma canonică cuadrica $\mathcal{S}: x^2+3y^2+4yz-6x+8y+8=0$.

Matricea $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$. $P_{A_3}(X)=\det(XI_3-A)=(X-1)(X+1)(X-4)$. valorile proprii sunt $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=4$. Vectorii prprii asociaţi acestor valori proprii sunt $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=e_1$, $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow e_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ şi $v_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow e_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. Am obţinut matricea $S=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$, cu

$\det(S) = 1$, ${}^tSS = I_n$. Schimbarea de coordnate este $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Astfel schimbarea de coordonate este $x = x', y = \frac{1}{\sqrt{5}}(y'-2z'), z = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y'+z')$. Introducând în formula cuadricei $\mathcal{S}$ se obţine $x'^2 - y'^2 + 4z'^2 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0 \Leftrightarrow (x'-3)^2 - (y' - \frac{4}{\sqrt{5}})^2 + 4(z' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{7}{5} = 0$. Este un hiperboloid cu două pânze. Putem împărţi cu $\frac{7}{5}$. Ecuaţia redusă este $\frac{1}{\frac{7}{5}}X^2 - \frac{1}{\frac{7}{5}}Y^2 + \frac{1}{\frac{7}{20}}Z^2 + 1 = 0$. Coeficienţii $a = b = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}, c = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}}$.

Exemplul 7. Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu pentru care raportul distanţelor la punctele $A(2,-2,3)$ şi $B(-2,2,-3)$ este constant.

Punctul B este simetricul punctului A faţă de origine. Fie P un punct al locului geometric. Pentru un astfel de punct P avem $\frac{d(P,A)}{d(P,B)} = \sqrt{\lambda}$, pentru $\lambda > 0$. Distanţele sunt cantităţi pozitive, deci raportul este o cantitate pozitivă şi putem scrie membrul drept $\sqrt{\lambda} > 0$. Înlocuind coordonatele punctelor A şi B şi ridicând la pătrat obţinem $\frac{(x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2}{(x+2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2} = \lambda$. Înmulţind şi dând factori comuni vom obţine
$(1-\lambda)x^2 + (1-\lambda)y^2 + (1-\lambda)z^2 - 4(1+\lambda)x + 4(1+\lambda)y - 6(1+\lambda)z + 17(1-\lambda) = 0.$

Avem următoarele două cazuri:

1. $\lambda = 1$ atunci ecuaţia este $-8x+8y-12z = 0 \Leftrightarrow -4x+4y-6z = 0$. Este ecuaţia unui p lan ce trece prin origine. Este planul mediator al segmentului AB, adică este planul perpendicular pe AB ce trece prin mijlocul acestui segment $O(0,0,0)$. Dreapta normală la acest plan are vectorul director $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-4,4,-6)$, acestă dreptă AB care trece prin origine şi este complementul ortogonal al planului mediator.

2. Pentru $\lambda \neq 1$, adică $\lambda \in (0,1) \cup (0,\infty)$ obţinem sfera de centru $C(2\alpha, -2\alpha, 3\alpha)$ şi rază $\frac{\sqrt{68\lambda}}{|1-\lambda|}$, unde $\alpha = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$. Ecuaţia sferei este $(x-2\alpha)^2 + (y+2\alpha)^2 + (z-3\alpha)^2 = \frac{68\lambda}{(1-\lambda)^2}$.