Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

cursul 5

2021-2022

Spații euclidiene. Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt

În mecanică, vectorii joacă un rol foarte important utilizându-se foarte mult noțiuni precum mărimea unei forțe și unghiul dintre forțe.Considerăm noțiunile de lungime a unui vector și normă pentru diverse spații vectoriale. Pentru aceasta, vom defini noțiunea de produs scalar pe un spațiu vectorial și, cu ajutorul ei, definim noțiunea de ortogonalitate a vectorilor.

Definiție

Un produs scalar pe spațiul vectorial V peste corpul comutativ $\mathbb{R}$ este o funcție $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărei perechi de vectori $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V$ un scalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru oricare trei vectori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ și orice scalar $\alpha \in \mathbb{R}$ sunt îndeplinite condițiile:

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$;

(iii) $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;

(iv) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

Un spațiu vectorial V pe care a fost definit un produs scalar se numește **spațiu vectorial euclidian real**.

Exemplu

Fie spațiul vectorial $\mathbb{R}^n$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Atunci

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$ numit **produsul scalar euclidian**.

Soluție.

Verificăm cele patru condiții din definiție:
(i) Deoarece $a^2 \geq 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, avem că

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$$

și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ dacă și numai dacă $x_1 = \cdots = x_n = 0$. $\square$

(ii) Din comutativitatea înmulțirii numerelor reale avem că

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

(iii) Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) = (\alpha x_1) y_1 + \cdots + (\alpha x_n) y_n = \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

(iv) Fie $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$. Atunci

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = (x_1 + y_1) z_1 + \cdots + (x_n + y_n) z_n =$$

$$= x_1 z_1 + y_1 z_1 + \cdots + x_n z_n + y_n z_n =$$

$$= (x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n) =$$

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.$$

Exemplu

Fie spațiul vectorial $\mathbb{R}^n$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Atunci

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = a_1 x_1 y_1 + a_2 x_2 y_2 + \cdots + a_n x_n y_n$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$ numit **produsul scalar ponderat**.

În cazul în care cel puțin una dintre constantele $a_1, \dots, a_n$ este negativă sau zero, atunci funcția definită în ultimul exemplu nu mai este un produs scalar, așa cum se vede din exemplul următor:

Exemplu

Fie spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ şi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_4)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_4)$. Atunci

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 + 2 x_4 y_4$$

nu este un produs scalar pe $\mathbb{R}^4$.

Soluție.

Se observă că prima condiție nu se verifică. Într-adevăr, pentru vectorul $\mathbf{x} = (1, 2, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ obținem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = -1 < 0.$$

$\square$

Exemplu

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi f, g funcţii reale continue în spaţiul vectorial $C[a, b]$. Atunci

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

este un produs scalar pe $C[a, b]$. Acest produs se numeşte **produsul scalar canonic** pe $C[a, b]$.

Soluție.

Verificăm cele patru condiții din definiție:
(i) Deoarece $[f(x)]^2 \geq 0$ pentru orice x, avem că

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b [f(x)]^2 dx \geq 0$$

și $\langle f, f\rangle = \int_a^b [f(x)]^2 dx = 0$ dacă și numai dacă $f(x) = 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ (din ipoteză știm că $a < b$).
(ii) $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g, f\rangle$. $\square$

(iii) Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\alpha\langle f, g\rangle = \alpha \int_a^b f(x)g(x)dx =$$

$$= \int_a^b \alpha f(x)g(x)dx = \langle \alpha f, g\rangle.$$

(iv) Fie $f, g, h \in C[a, b]$. Atunci

$$\langle f + g, h\rangle = \int_a^b [f(x) + g(x)]h(x)dx =$$

$$= \int_a^b [f(x)h(x) + g(x)h(x)]dx =$$

$$= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle.$$

Exemplu

Considerăm $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ şi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Atunci

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A \cdot B^T)$$

este un produs scalar pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Acest produs se numeşte **produsul scalar canonic** pe $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soluție.

Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Folosind faptul că $\mathrm{Tr}(A) = a_1 + a_4$, verificăm cele patru condiții din definiție: $\square$

(i) Deoarece

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 a_3 + a_2 a_4 \\ a_1 a_3 + a_2 a_4 & a_3^2 + a_4^2 \end{pmatrix},$$

obținem că $\langle A, A \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq 0$. Atunci

$$\langle A, A \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0$$

dacă și numai dacă $a_1 = \cdots = a_4 = 0$ ceea ce este echivalent cu faptul că $A = \mathbf{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $\langle A, B\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 =$

$$= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 + b_4 a_4 = \langle B, A\rangle.$$

(iii) Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\alpha\langle A, B\rangle = \alpha(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4) =$$

$$= (\alpha a_1) b_1 + (\alpha a_2) b_2 + (\alpha a_3) b_3 + (\alpha a_4) b_4 = \langle \alpha A, B\rangle.$$

(iv) Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$. Atunci

$$\langle A+B, C\rangle = (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2 + (a_3+b_3)c_3 + (a_4+b_4)c_4 =$$

$$= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_4 c_4) + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4) =$$

$$= \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle.$$

Exemplu

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathbb{R}_n[x] = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}[x] \ : \ \deg(\mathbf{p}) \leq n\}$. Fie $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}_n[x]$ două polinoame de grad cel mult n cu coeficienți numere reale,
$\mathbf{p} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$ și
$\mathbf{q} = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n$.
Atunci

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_0 q_0 + p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}_n[x]$. Acest produs se numește **produsul scalar canonic** pe $\mathbb{R}_n[x]$.

Soluție.

Verificăm cele patru condiții din definiție:
(i) Deoarece $a^2 \geq 0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, avem că

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = p_0^2 + \cdots + p_n^2 \geq 0$$

și $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = p_0^2 + \cdots + p_n^2 = 0$ dacă și numai dacă $p_0 = \cdots = p_n = 0$ echivalent cu $\mathbf{p} = 0$.
(ii) $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_0 q_0 + \cdots + p_n q_n = q_0 p_0 + \ldots + q_n p_n = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$.

$\square$

(iii) Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\alpha\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = \alpha(p_0 q_0 + p_1 q_1 + \cdots + p_n q_n) =$$

$$= (\alpha p_0)q_0 + (\alpha p_1)q_1 + \cdots + (\alpha p_n)q_n = \langle \alpha\mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle.$$

(iv) Fie $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_n[x]$. Atunci

$$\langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{r}\rangle = (p_0 + q_0)r_0 + (p_1 + q_1)r_1 + \cdots + (p_n + q_n)r_n =$$

$$= (p_0 r_0 + p_1 r_1 + \cdots + p_n r_n) + (q_0 r_0 + q_1 r_1 + \cdots + q_n r_n) =$$

$$= \langle \mathbf{p}, \mathbf{r}\rangle + \langle \mathbf{q}, \mathbf{r}\rangle.$$

Propoziție

Fie $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vectori în spațiul vectorial euclidian V și $\alpha \in \mathbb{R}$ un scalar. Atunci:

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

(ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$.

(iii) $\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle$.

Demonstrație.

(i) Conform condiției (ii) din definiție știm că $\langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle$. Prin urmare, mai trebuie să demonstrăm că $\langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = \langle 0\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0.$$

(ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$.

(iii) $\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \alpha\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle$. □

Definiție

Un produs scalar pe spațiul vectorial V peste corpul comutativ $\mathbb{C}$ este o funcție $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ care asociază fiecărei perechi de vectori $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V$ un scalar $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \in \mathbb{C}$ astfel încât pentru oricare trei vectori $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$ și orice scalar $\alpha \in \mathbb{C}$ sunt îndeplinite condițiile:

(i) $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(ii) $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \overline{\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle}$;

(iii) $\alpha\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \alpha\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$;

(iv) $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y},\mathbf{z}\rangle$.

Un spațiu vectorial complex V pe care a fost definit un produs scalar se numește **spațiu vectorial euclidian complex**.

Exemplu

Fie spațiul vectorial $\mathbb{C}^n$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Atunci

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \cdots + x_n \bar{y}_n$$

este un produs scalar pe $\mathbb{C}^n$ numit **produsul scalar euclidian**.

Exemplu

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi f, g funcţii complexe continue în spaţiul vectorial $C[a, b]$. Atunci

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

este un produs scalar pe $C[a, b]$. Acest produs se numeşte **produsul scalar canonic** pe $C[a, b]$.

Exemplu

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\mathbb{C}_n[x] = \{\mathbf{p} \in \mathbb{C}[x] \ : \ \deg(\mathbf{p}) \leq n\}$. Fie $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}_n[x]$ două polinoame de grad cel mult n cu coeficienți numere reale,
$\mathbf{p} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$ și
$\mathbf{q} = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n$. Atunci

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_0 \bar{q}_0 + p_1 \bar{q}_1 + \cdots + p_n \bar{q}_n$$

este un produs scalar pe $\mathbb{C}_n[x]$. Acest produs se numește **produsul scalar canonic** pe $\mathbb{C}_n[x]$.

Propoziție

Fie $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vectori în spațiul vectorial euclidian complex V și $\alpha \in \mathbb{C}$ un scalar. Atunci:

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

(ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$.

(iii) $\overline{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle$.

Demonstrație.

(iii) $\overline{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\alpha \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \overline{\langle \alpha \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y} \rangle$. $\square$

Definiție

Fie un spațiu vectorial euclidian V (real sau complex) și $\alpha \in \mathbb{R}($ sau $\mathbb{C})$. Funcția $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ se numește **normă** pe V dacă:

(i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ și $\|\mathbf{x}\| = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(ii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$.

(iii) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Un spațiu vectorial pe care s-a definit o normă se numește **spațiu normat**.

Exemplu

- Pe $\mathbb{R}$ funcția $\|\cdot\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $\|x\| = |x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este o normă.
- Pe $\mathbb{R}^n$ funcția $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă.
- Pe $\mathbb{R}^n$ funcția $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă.

Exemplu

- Pe $\mathbb{R}^n$ funcția $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}$, pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă.
- Dacă V este un spațiu euclidian, atunci funcția $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, definită prin $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, pentru orice $\mathbf{x} \in V$, este o normă și se numește **norma indusă de produsul scalar**.

Observație

Norma indusă de produsul scalar pe $\mathbb{R}^n$ este

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \ \forall \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Teoremă

Fie $\mathbf{x}$ *și* $\mathbf{y}$ *vectori într-un spațiu vectorial euclidian* V*. Atunci:*

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ *(Inegalitatea Cauchy–Schwarz).*
2. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$.

Demonstrație.

(1) Dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sau $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, inegalitatea este evident adevărată. Presupunem că $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Fie $t \in \mathbb{R}$ un scalar și considerăm vectorul $\mathbf{z} = t\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Deoarece $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \geq 0$, obținem că

$$\langle t\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \geq 0$$

echivalent cu

$$t^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2t \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq 0.$$

Notând $a = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, $b = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ și $c = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$, inegalitatea devine

$$at^2 + bt + c \geq 0.$$

Această inegalitate trebuie să fie adevărată pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Prin urmare, ținând cont că $a = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, trebuie să avem

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

echivalent cu

$$4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq 0$$

sau

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}.$$

(2) Avem

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$$

și

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$$

Adunăm cele două relații și obținem
$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$.

Observație

Dacă $\|\mathbf{x}\| = 1$, atunci vectorul $\mathbf{x}$ se numește **vector unitate** sau **versor**. Dacă $\mathbf{x}$ este un vector din spațiul vectorial euclidian V atunci vectorul $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$ este un vector de lungime 1 și se numește **versor** (sau **vector unitate**) **în direcția vectorului x**.

Definiție

Fie V un spațiu euclidian real și $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ doi vectori din V. **Unghiul** θ dintre vectorii nenuli $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ este dat de formula

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Propoziție

Doi vectori nenuli $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ din spaţiul vectorial euclidian V cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sunt **ortogonali** (şi scriem $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$) dacă şi numai dacă $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Demonstrație.

Fie $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ doi vectori nenuli. Vectorii $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ sunt ortogonali dacă și numai dacă unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{2}$ ceea ce este echivalent cu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. $\square$

Propoziție

Dacă V este un spațiu normat, atunci vectorii $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ sunt ortogonali dacă și numai dacă $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$. (Teorema lui Pitagora)

Demonstrație:

Fie $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ doi vectori ortogonali, ceea ce inseamnă că $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Atunci

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle =$$

$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 0 + \|\mathbf{y}\|^2$$

Presupunând acum că are loc egalitatea $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$, obținem că

$$0 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2 =$$

$$= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Prin urmare, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ ceea ce implică $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

Definiție

Fie V o mulțime nevidă. Funcția $d(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ se numește **distanță sau metrică** pe V dacă:

(i) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$ și $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;

(ii) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$;

(iii) $d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z})$

O mulțime pe care s-a definit o metrică se numește **spațiu metric**.

Exemplu

Orice mulțime V poate fi spațiu metric cu funcția

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & , \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ 1 & , \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \end{cases}$$

Observație

Fie V un spațiu vectorial euclidian. Funcția $d(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, definită prin $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, pentru orice $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ este o distanță.

Definiție

Fie $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ vectori într-un spaţiu vectorial euclidian V, astfel încât $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. **Proiecţia ortogonală a vectorului $\mathbf{x}$ pe vectorul $\mathbf{y}$** este dată de

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{y}}\mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}\mathbf{y}$$

Exemplu

Fie $\mathbf{p} = 1 - 3x^2$, $\mathbf{q} = 6 - 5x + 2x^2$ şi $\mathbf{r} = 1 - 2x$ polinoame în spaţiul vectorial euclidian $\mathbb{R}_2[x]$ înzestrat cu produsul scalar canonic. Să se calculeze: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$, $\langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$, $\|\mathbf{q}\|$, $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ şi $\mathrm{pr}_{\mathbf{q}}\mathbf{r} = \dfrac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle}\mathbf{q}$.

Soluție.

Folosind definiția produsului scalar avem:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1 \cdot 6 + 0 \cdot (-5) + (-3) \cdot 2 = 0$$

și

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle = 6 \cdot 1 + (-5) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 = 16.$$

Pentru a calcula $\|\mathbf{q}\|$, avem

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\langle q, q \rangle} = \sqrt{6^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{65}.$$

Pentru a determina $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, trebuie să calculăm $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$. Avem

$$\mathbf{p} - \mathbf{q} = (1 - 3x^2) - (6 - 5x + 2x^2) = -5 + 5x - 5x^2,$$

prin urmare

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{3}.$$

Pentru proiecția ortogonală a vectorului $\mathbf{p}$ pe vectorul $\mathbf{q}$ avem:

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{q}}\mathbf{r} = \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{q} \rangle}{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle}\mathbf{q} = \frac{16}{65}\mathbf{q} = \frac{16}{65}(6 - 5x + 2x^2).$$

Definiție

O mulţime S de vectori dintr-un spaţiu vectorial euclidian V se numeşte **ortogonală** dacă fiecare pereche de vectori din S este ortogonală, i.e. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Dacă, în plus, fiecare vector din S este un vector unitate, atunci S se numeşte **mulţime ortonormată**.

Dacă S este o bază pentru spațiul vectorial V, atunci S este o bază ortogonală sau ortonormată, după caz.

Baze ortonormate într-un spaţiu vectorial euclidian

Baza canonică din $\mathbb{R}^n$ este o bază ortonormată, dar ea nu este unica cu această proprietate. De exemplu, dacă vom considera cazul particular $V = \mathbb{R}^3$, o altă bază ortonormată ar putea fi obținută rotind vectorii care formează baza în jurul axei Oz și obținem baza

$$B = \{(\cos\theta, \sin\theta, 0), (-\sin\theta, \cos\theta, 0), (0, 0, 1)\}$$

așa cum reiese din figura următoare:

Baze ortonormate într-un spaţiu vectorial euclidian

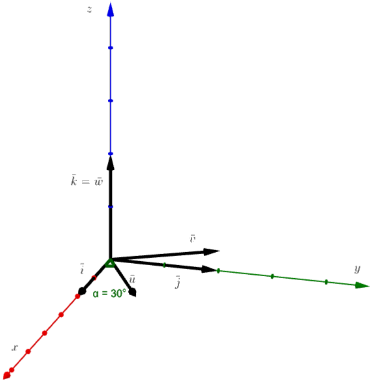

Figure: Alta bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$

Exemplu

În spaţiul vectorial euclidian real $\mathbb{R}_4[x]$ înzestrat cu produsul scalar

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4,$$

unde $\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ şi $\mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4$, baza canonică $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ este o bază ortonormată. Într-adevăr, se poate verifica uşor că produsul scalar al oricăror doi vectori diferiţi din bază este 0 şi că norma vectorilor din bază este 1.

Exemplu

Considerăm spaţiul vectorial $C[0, 2\pi]$ pe care considerăm definit produsul scalar $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Mulţimea

$$S = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots\}$$

este ortogonală în $C[0, 2\pi]$ care nu este însă ortonormată. Într-adevăr, se poate verifica uşor că

$$\langle 1, \sin mx \rangle = \int_0^{2\pi} \sin mx dx = 0$$

şi

$$\langle 1, \cos mx \rangle = \int_0^{2\pi} \cos mx dx = 0$$

pentru $1 \leq m \leq n$.

Pentru $1 \leq m < r \leq n$ avem

$$\langle \sin mx, \sin rx \rangle = \int_0^{2\pi} \sin mx \sin rx dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(m-r)x - \cos(m+r)x] dx = 0,$$
$$\langle \cos mx, \cos rx \rangle = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos rx dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(m+r)x + \cos(m-r)x] dx = 0,$$

și

$$\langle \sin mx, \cos rx \rangle = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos rx dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(m+r)x + \sin(m-r)x] dx = 0.$$

De asemenea,

$$\langle \sin mx, \cos mx \rangle = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2mx) dx = 0.$$

Mulțimea nu este ortonormată deoarece

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

De asemenea,

$$\| \sin mx\|^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 mx dx = \pi$$

și

$$\| \cos mx\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 mx dx = \pi.$$

Normând fiecare vector din mulțime obținem

$$S' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots \right\}$$

Baze ortonormate într-un spațiu vectorial euclidian

Teoremă

Fie V un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian și $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ o mulțime ortogonală de vectori nenuli din V. Atunci S este mulțime liniar independentă.

Demonstrație.

Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ scalari astfel încât

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Trebuie să demonstrăm că $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Fie $1 \leq i \leq n$. Considerăm produsul scalar

$$\langle \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle$$

echivalent cu $\alpha_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + \alpha_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = 0.$ □

Cum vectorii din S sunt ortogonali, avem că $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ pentru orice $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$. Deci

$$\alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0.$$

Dar vectorii din S sunt nenuli, ceea ce înseamnă că $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 \neq 0$. Prin urmare $\alpha_i = 0$. Cum i a fost ales arbitrar, am obținut că

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

deci vectorii sunt liniar independenți.

Corolar

Fie V un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian de dimensiune n. Atunci orice mulțime de n vectori ortogonali nenuli formează o bază pentru V.

Teoremă

Fie $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ o bază ortonormată în spațiul vectorial euclidian V și $\mathbf{w} \in V$ un vector. Atunci reprezentarea vectorului $\mathbf{w}$ în baza B este

$$\mathbf{w} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \cdots + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n.$$

Demonstraţie.

Deoarece B este o bază în V, există și sunt unici scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n.$$

□

Fie $1 \leq i \leq n$ ales arbitrar. Considerând produsul scalar cu $\mathbf{v}_i$, obţinem

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle.$$

Având în vedere că baza B este ortonomată şi folosind liniaritatea produsului scalar, obţinem că

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle = \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle.$$

Ţinând cont că baza B este ortonormată, avem că $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1$, deci $\alpha_i = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle$.

Observație

Coeficienţii vectorului **w** relativ la baza ortonormată B determinaţi în teorema anterioară se mai numesc şi **coeficienţii Fourier ai lui w relativ la** B.

Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt

Teoremă (Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt)

1. *Fie* $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *o bază în spațiul vectorial euclidian* V.
2. *Fie* $B' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$, *unde* $\mathbf{w}_i$ *este obținut astfel:*

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{n-1} \rangle}{\langle \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-1} \rangle}\mathbf{w}_{n-1}.$$

Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt

Atunci B' este o bază ortogonală în V.

3. Fie versorii $\mathbf{u}_i = \dfrac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$, $1 \leq i \leq n$. Atunci mulțimea $B'' = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ este o bază ortonormată în V.

Corolar

Orice spaţiu vectorial euclidian finit dimensional are o bază ortonormată

Exemplu

Fie vectorii $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$ şi $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$ vectori în $\mathbb{R}^3$ care generează un plan. Determinaţi o bază ortonormată pentru acest subspaţiu.

Soluție.

Fie $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (0,1,0)$. Atunci $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1$. Cum $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = 1$ și $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 1$, obținem

$$\mathbf{w}_2 = (1,1,1) - \frac{1}{1}(0,1,0) = (1,0,1).$$

Deci $S' = \{(0,1,0),(1,0,1)\}$. Normând vectorii $\mathbf{w}_1$ și $\mathbf{w}_2$, obținem $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = (0,1,0)$ și $\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Prin urmare, $S'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ este o bază ortonormată pentru subspațiul considerat. $\square$

Observație

Baza ortonormată obţinută prin procedeul de ortonormare Gram-Schmidt depinde de ordinea vectorilor din bază.
Într-adevăr, dacă în exemplul anterior considerăm $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ şi $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$ atunci $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ şi

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1.$$

Cum $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = 1$ şi $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 3$, obţinem

$$\mathbf{w}_2 = (0, 1, 0) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

Având în vedere forma vectorului obţinut, putem lua

$$\mathbf{w}_2' = 3\mathbf{w}_2 = (-1, 2, -1).$$

Deci $S' = \{(1,1,1), (-1,2,-1)\}$. Normând vectorii $\mathbf{w}_1$ și $\mathbf{w}_2'$, obținem

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

și

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2'}{\|\mathbf{w}_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

Prin urmare, $S'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ este o bază ortonormată pentru subspațiul considerat și este diferită de cea obținută în exemplul precedent.

Exemplu

Aplicaţi procedeul de ortonormalizare Gram-Schmidt bazei $B = \{1, x, x^2\}$ în $\mathbb{R}_2[x]$ folosind produsul scalar

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(x)\mathbf{q}(x)dx.$$

Soluție.

Fie $B = \{1, x, x^2\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Atunci

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = 1,$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 = x - \frac{0}{2} \cdot 1 = x$$

unde am ținut cont că $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x dx = 0$ și

$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} dx = 2.$

$\square$

Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 =$$

$$= x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - \frac{0}{2/3} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}$$

unde am ținut cont că

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 0, \ \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} dx = 2,$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 \text{ și } \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Am obținut baza ortogonală $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$. Normăm această bază având în vedere că

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} dx = 2,$$

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

și

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} \right) dx = \frac{8}{45}.$$

Obținem

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2/3}}x = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

și

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{8/45}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{10}}{4}\left(3x - 1\right).$$

Deci baza $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ este o bază ortonormată pentru $\mathbb{R}_2[x]$ cu acest produs scalar.

Observație

Polinoamele $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ şi $\mathbf{u}_3$ din exemplul anterior se numesc primele trei **polinoame Legendre normalizate**.