Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

cursul 3

2021-2022

Operații cu subspații. Matricea de schimbare a bazei. Transformări liniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{k}$ și U_1, U_2 două subspații vectoriale proprii ale lui V. Mulțimea

$$U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \in U_1 \text{ și } \mathbf{v} \in U_2\} \subset V$$

se numește **intersecția subspațiilor** U_1 și U_2.

Teoremă

Dacă V este un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{k}$ și U_1, U_2 sunt două subspații vectoriale proprii ale lui V, atunci $U_1 \cap U_2$ este subspațiu vectorial al lui V.

Operații cu subspații

Demonstrație:

Pentru a verifica dacă $U_1 \cap U_2$ este subspațiu vectorial al lui V, folosim teorema de caracterizare a subspațiilor. Pentru aceasta, considerăm $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U_1 \cap U_2$ și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{k}$ și arătăm că $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \in U_1 \cap U_2$. Cum $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U_1$ și U_1 este subspațiu vectorial al lui V, din teorema de caracterizare a subspatiilor obținem $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \in U_1$. Asemănător avem $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \in U_2$. Deci

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \in U_1 \cap U_2,$$

ceea ce încheie demonstrația. $\square$

Exemplu

În $\mathbb{R}^3$ considerăm subspațiile

$$U_1 = \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}, \ U_2 = \{(x, y, z) : x = y\}.$$

Din definiție, avem:

$$U_1 \cap U_2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in U_1 \text{ și } \mathbf{x} \in U_2\right\} =$$

$$= \{(x, y, z) : \ x + y - z = 0 \text{ și } x = y\} =$$

$$= \{(x, x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Operații cu subspații

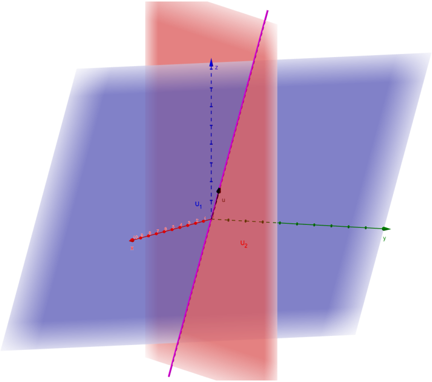


Figure: Intersecția subspațiilor U_1 și U_2

Operații cu subspații

Observație

Putem să extindem rezultatul pentru un număr finit de subspații vectoriale, adică dacă $U_1, \ldots U_s$ sunt subspații vectoriale proprii ale spațiului vectorial V, atunci $U_1 \cap \cdots \cap U_s$ este subspațiu vectorial al lui V.

Exemplu

Considerăm următoarele subspații ale lui $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{(x, y, z) : z = 0\}, \ U_2 = \{(x, y, z) : y = 0\},$$

$$U_3 = \{(x, y, z) : x = 0\}.$$

Geometric, cele trei subspații reprezintă, în sistemul ortonormat $Oxyz$, planele xOy, xOz, respectiv yOz. Intersecția lor este

$$U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{O(0, 0, 0)\}.$$

Operații cu subspații

Definiție

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $U_1, \ U_2$ două subspații ale lui V. Atunci $U_1 \cup U_2 = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \in U_1 \text{ sau } \mathbf{v} \in U_2\}$ se numește **reuniunea subspațiilor** U_1 și U_2.

Observație

În general, reuniunea a două subspații vectoriale nu este subspațiu vectorial.

Exemplu

În spațiul vectorial $\mathbb{R}^2$ considerăm subspațiile

$$U_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}, \; U_2 = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Geometric, dacă identificăm $\mathbb{R}^2$ cu reperul ortonormat xOy, atunci cele două subspații reprezintă axele Ox, respectiv Oy. Presupunem prin absurd că $U_1 \cup U_2$ este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$. Considerăm vectorii $\mathbf{e}_1 = (1,0) \in U_1$ și $\mathbf{e}_2 = (0,1) \in U_2$. Cum $U_1 \subset U_1 \cup U_2$ și $U_2 \subset U_1 \cup U_2$, obținem că $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in U_1 \cup U_2$. Din presupunerea făcută, avem că $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \in U_1 \cup U_2$. Dar $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (1,1) \notin U_1 \cup U_2$ deoarece $(1,1) \notin U_1$ și $(1,1) \notin U_2$. Deci presupunerea făcută este falsă, adică $U_1 \cup U_2$ nu este subspațiu vectorial.

Teoremă

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $U_1,\ U_2$ două subspații ale lui V. Atunci $U_1 \cup U_2$ este subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă $U_1 \subseteq U_2$ sau $U_2 \subseteq U_1$.

Demonstrație:

Implicația "$\Leftarrow$" este imediată. Într-adevăr, dacă $U_1 \subseteq U_2$, atunci $U_1 \cup U_2 = U_2$ este subspațiu vectorial, din ipoteză.
Pentru implicația "$\Rightarrow$", presupunem că $U_1 \not\subseteq U_2$ și $U_2 \not\subseteq U_1$ și demonstrăm că $U_1 \cup U_2$ nu este subspațiu vectorial. Din $U_1 \not\subseteq U_2$ și $U_2 \not\subseteq U_1$, avem că există vectorii $\mathbf{u}_1 \in U_1$, $\mathbf{u}_1 \notin U_2$ și $\mathbf{u}_2 \in U_2$, $\mathbf{u}_2 \notin U_1$. Atunci $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \notin U_1$ și $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \notin U_2$, de unde $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \notin U_1 \cup U_2$, adică $U_1 \cup U_2$ nu este subspațiu vectorial. $\square$

Operații cu subspații

Definiție

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $U_1,\ U_2$ două subspații ale lui V. Atunci $U_1 + U_2 = \{\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in V : \mathbf{u}_1 \in U_1 \text{ și } \mathbf{u}_2 \in U_2\}$ se numește **suma subspațiilor** U_1 și U_2.

Teoremă

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $U_1,\ U_2$ două subspații ale lui V. Atunci $U_1 + U_2$ este subspațiu vectorial al lui V.

Teoremă

Dacă U_1 și U_2 sunt subspații ale spațiului vectorial V, atunci $U_1 + U_2 = \mathcal{S}pan(U_1 \cup U_2)$, adică este spațiul liniar generat de $U_1 \cup U_2$.

Exemplu

Considerăm subspațiile vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$$

$$U_2 = \mathcal{S}pan\left(\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (2, -1, 3), \mathbf{v}_4 = (0, -1, 1)\right)$$

Se remarcă ușor faptul că
$U_1 = \mathcal{S}pan\{\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1)\}$ și $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ formează bază pentru U_1 deoarece rangul matricei $A = [\ \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2\ ]$ este 2.
Pentru U_2 o bază este $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ deoarece

$$[\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4\ ] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 4 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}.$$

Un sistem de generatori pentru $U_1 + U_2$ este obținut prin reunirea bazelor celor două subspații, adică $U_1 + U_2 = \mathcal{S}pan\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Atunci o bază pentru $U_1 + U_2$ este $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\}$ deoarece

$$[\ \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4\ ] = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textbf{-1} & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiție

Fie U_1, U_2 subspații vectoriale ale spațiului vectorial V. Spunem că suma $U_1 + U_2$ este **sumă directă** dacă $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ și notăm $U_1 \oplus U_2$.

Teoremă

Fie U_1, U_2 subspații vectoriale ale spațiului vectorial V. Atunci suma este directă $U_1 \oplus U_2$ dacă și numai dacă orice vector $\mathbf{v} \in U_1 + U_2$ se descompune unic sub forma $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, unde $\mathbf{u}_1 \in U_1$ și $\mathbf{u}_2 \in U_2$.

Definiție

Fie U_1, U_2 subspații vectoriale ale spațiului vectorial V. Spunem că U_1 și U_2 sunt **suplementare** dacă $U_1 \oplus U_2 = V$.

Teoremă (Teorema dimensiunii (a lui Grassmann))

Fie U_1 și U_2 două subspații vectoriale ale $\Bbbk$-spațiului vectorial finit generat V. Atunci are loc:

$$\dim_{\Bbbk}(U_1 + U_2) = \dim_{\Bbbk} U_1 + \dim_{\Bbbk} U_2 - \dim_{\Bbbk}(U_1 \cap U_2).$$

În particular,

$$\dim_{\Bbbk}(U_1 \oplus U_2) = \dim_{\Bbbk} U_1 + \dim_{\Bbbk} U_2.$$

Exemplu

În spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$ considerăm subspațiile

$$U_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\},$$

$$U_2 = \{(x, y, z) : \ x + y - z = 0 \text{ și } x - y = 0\}.$$

Se obține imediat că $U_1 = \mathcal{S}pan\,(\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0)\,, \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1))$ și că $\{\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0)\,, \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1)\}$ este o bază pentru U_1, în timp ce $U_2 = \mathcal{S}pan\,(\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2))$, iar $\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)\}$ formează bază pentru U_2. Deci obținem $\dim_{\mathbb{R}} U_1 = 2$ și $\dim_{\mathbb{R}} U_1 = 1$.

Avem că

$$U_1 \cap U_2 = \{(x,y,z) : \ x+y+z=0, \ x+y-z=0, \ x-y=0\} =$$

$$= \{(0,0,0)\},$$

de unde $\dim_{\mathbb{R}} U_1 \cap U_2 = 0$. Din Teorema lui Grassmann, avem că $\dim_{\mathbb{R}} U_1 + U_2 = 3$, deci $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$.

Operații cu subspații

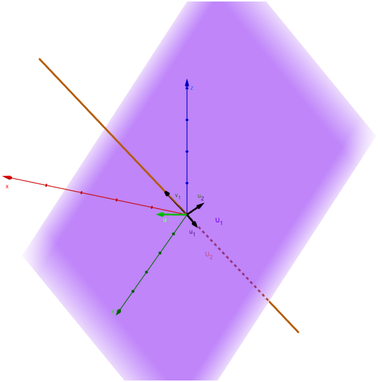


Figure: Subspațiile vectoriale U_1 și U_2

Matricea de schimbare a bazei

Am văzut că, într-un spațiu vectorial, baza nu este unică. Natural apar următoarele probleme:

- Cum facem trecerea de la o bază la alta?
- Dacă avem un vector exprimat într-o bază, cum se modifică coordonatele acestui vector la schimbarea bazei?

Considerăm V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{k}$ de dimensiune $\dim_{\mathbb{k}} V = n < \infty$ și fixăm două baze ale lui V:

$$B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \text{ și } B' = \{\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n\}.$$

Pentru fiecare element $\mathbf{v}'_i \in B'$, determinăm coordonatele în raport cu baza B, astfel:

Matricea de schimbare a bazei

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{v}_1 + \alpha_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{n1}\mathbf{v}_n \\
\mathbf{v}'_2 &= \alpha_{12}\mathbf{v}_1 + \alpha_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{n2}\mathbf{v}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{v}'_n &= \alpha_{1n}\mathbf{v}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{nn}\mathbf{v}_n.
\end{aligned}
$$

unde $\alpha_{i,j} \in \mathbb{k}$

Matricea de schimbare a bazei

Cum coordonatele unui vector în raport cu o bază sunt unice, coeficienții α_{ij} determină o unică matrice, notată cu $T_{B\to B'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$,

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{v}'_1]_B & [\mathbf{v}'_2]_B & \dots & [\mathbf{v}'_n]_B \end{pmatrix},$$

numită **matricea de trecere de la baza** B **la baza** B'. Am notat prin $[\mathbf{v}'_i]_B$ matricea coloană având coordonatele lui $\mathbf{v}'_i$ în baza B.

Matricea de schimbare a bazei

Dacă considerăm un vector oarecare $v \in V$, acesta se scrie unic sub formele:

$$\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{v}_n,$$

unde $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sunt coordonatele lui $\mathbf{v}$ în baza B, și

$$\mathbf{v} = \gamma_1 \mathbf{v}'_1 + \cdots + \gamma_n \mathbf{v}'_n,$$

unde $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sunt coordonatele lui $\mathbf{v}$ în baza B'. Atunci avem:

$$[\mathbf{v}]_B = [\gamma_1 \mathbf{v}'_1 + \cdots + \gamma_n \mathbf{v}'_n]_B = \gamma_1 [\mathbf{v}'_1]_B + \cdots + \gamma_n [\mathbf{v}'_n]_B,$$

de unde, scris matriceal, obținem:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} [\mathbf{v}'_1]_B & [\mathbf{v}'_2]_B & \ldots & [\mathbf{v}'_n]_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Astfel, legătura dintre cele două reprezentări ale vectorului **v** în raport cu cele două baze este dată prin relația

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = T_{B\to B'} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \text{ echivalent cu } [\mathbf{v}]_B = T_{B\to B'}[\mathbf{v}]_{B'}.$$

numită **formula schimbării coordonatelor la schimbarea bazei**.

Observație

Formula schimbării coordonatelor la schimbarea bazei poate fi rescrisă astfel:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = T^{-1}_{B \to B'} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ sau } [\mathbf{v}]_{B'} = T^{-1}_{B \to B'} [\mathbf{v}]_B.$$

Deci, dacă cunoaștem coordonatele vectorului **v** în raport cu una din bazele B sau B', putem să obținem coordonatele aceluiași vector în raport cu cealaltă bază, folosind una dintre cele două forme ale formulei de schimbare a coordonatelor la schimbarea bazei.

Matricea de schimbare a bazei

Exemplu

În $\mathbb{R}_2[x]$ considerăm bazele
$B = \{p_1 = 1, p_2 = 1 + x, p_3 = 1 + x + x^2\}$ și
$B' = \{p'_1 = 2, p'_2 = x, p'_3 = 1 + x^2\}$. Pentru a obține matricea de trecere de la baza B la baza B', trebuie ca, pentru fiecare vector din baza B', să determinăm, pe rând, coordonatele în baza B. Se observă că $p'_1 = 2p_1 + 0p_2 + 0p_3$, coordonate ce vor fi trecute pe prima coloană în matricea $T_{B\to B'}$. Pentru p'_2 avem:

$$p'_2 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3,$$

de unde rezultă, prin înlocuire și prin identificarea coeficienților, că

$$p'_2 = -p_1 + p_2 + 0p_3.$$

Coordonatele obținute vor fi trecute pe a doua coloană din matricea $T_{B\to B'}$.

Matricea de schimbare a bazei

Pentru ultimul vector p_3' avem

$$p_3' = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3,$$

de unde obținem, după mici calcule, $p_3' = p_1 - p_2 + p_3$, coordonate ce ne vor da ultima coloană din matrice.

Pentru ultimul vector p_3' avem

$$p_3' = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3,$$

de unde obținem, după mici calcule, $p_3' = p_1 - p_2 + p_3$, coordonate ce ne vor da ultima coloană din matrice.
Rezultă astfel că matricea de trecere de la baza B la baza B' este

$$T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea de schimbare a bazei

Dacă alegem polinomul $p = 3 + 2x + x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, atunci în raport cu baza B' polinomul se scrie unic $p = p'_1 + 2p'_2 + p'_3$, deci coordonatele sale în baza B sunt

$$[p]_{B'} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci, aplicând prima formă a formulei de schimbare a coordonatelor la schimbarea bazei, putem să aflăm coordonatele polinomului p în baza B, astfel:

Matricea de schimbare a bazei

$$[p]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = T_{B \to B'} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

deci

$$[p]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel, în baza B, polinomul p poate fi scris $p = p_1 + p_2 + p_3$.

Matricea de schimbare a bazei

Propoziție

Într-un spațiu vectorial finit generat au loc următoarele:

- Matricea de schimbare a bazei este o matrice inversabilă și inversa ei este $T^{-1}_{B \to B'} = T_{B' \to B}$.
- Dacă $B,\ B',\ B''$ sunt trei baze ale unui spațiu vectorial, atunci $T_{B \to B''} = T_{B \to B'} \cdot T_{B' \to B''}$.

Exemplu

În spațiul vectorial $\mathbb{R}_2[x]$, considerăm bazele
$B = \{p_1 = 1, p_2 = 1 + x, p_3 = 1 + x + x^2\}$,
$B' = \{p_1' = 2, p_2' = x, p_3' = 1 + x^2\}$ și $B'' = \{1, x, x^2\}$, baza canonică. Am văzut că

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru a calcula matricea de trecere de la baza canonică la orice altă bază este suficient să trecem pe coloane coordonatele vectorilor din acea bază. În cazul nostru:

$$T_{B''\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } T_{B''\to B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplu

Considerăm reperul ortonormat $x'Oy'$, obținut din reperul xOy pe care-l rotim cu unghiul θ. Coordonatele unui punct $P(x, y)$ fixat arbitrar în reperul xOy verifică:

$$\begin{cases} x = OP \cdot \cos\phi \\ y = OP \cdot \sin\phi \end{cases}$$

Dacă considerăm același punct P în reperul $x'Oy'$, obținem că punctul P are coordonatele x', y' ce verifică relațiile:

$$\begin{cases} x' = OP \cdot \cos(\phi - \theta) \\ y' = OP \cdot \sin(\phi - \theta) \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} x' = & x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = & -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}.$$

În formă matriceală, avem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

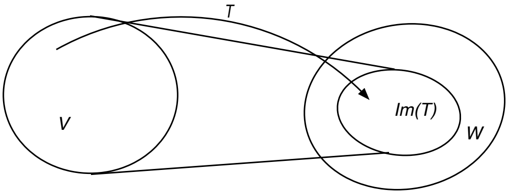
sau, în forma echivalentă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

ceea ce reprezintă formula schimbării coordonatelor. Ultima matrice obținută reprezintă matricea unei rotații de unghi θ efectuate în sens trigonometric.

Fie V și W două spații vectoriale peste același corp comutativ, $\mathbb{k}$. Considerăm o funcție $T : V \to W$. Vom numi V **domeniul** funcției T și W **codomeniul** funcției T. Pentru un element $\mathbf{v} \in V$, $T(\mathbf{v})$ se numește **imaginea lui v prin T**. **Imaginea aplicației T** se notează cu $\mathrm{Im}(T)$ și este mulțimea tuturor imaginilor vectorilor din V, i.e.

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}.$$



Definiție

Fie V şi W două $\Bbbk$-spaţii vectoriale şi $T : V \to W$ o funcţie. Funcţia T se numeşte **transformare liniară** dacă:

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
2. $T(\alpha \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v})$, pentru orice vector $\mathbf{v} \in V$ şi orice scalar $\alpha \in \Bbbk$.

Definiție

Fie V şi W două $\mathbb{k}$-spaţii vectoriale şi $T : V \to W$ o funcţie. Funcţia T se numeşte **transformare liniară** dacă:

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
2. $T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v})$, pentru orice vector $\mathbf{v} \in V$ şi orice scalar $\alpha \in \mathbb{k}$.

Observație

Trebuie observat că deşi au fost notate la fel, operaţiile din definiţie sunt diferite. Astfel, dacă ţinem cont de spaţiul vectorial în care sunt definite operaţiile, avem

1. $T(\mathbf{u} +_V \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) +_W T(\mathbf{v})$ pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
2. $T(\alpha \cdot_V \mathbf{v}) = \alpha \cdot_W T(\mathbf{v})$, pentru orice vector $\mathbf{v} \in V$ şi orice scalar $\alpha \in \mathbb{k}$.

Exemplu

Exemple evidente de transformări liniare sunt: transformarea nulă $T : V \to W$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$, pentru orice $\mathbf{v} \in V$ și transformarea identică $T : V \to V$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ pentru orice $\mathbf{v} \in V$.

Transformări liniare

Exemplu

Exemple evidente de transformări liniare sunt: transformarea nulă $T : V \to W$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$, pentru orice $\mathbf{v} \in V$ și transformarea identică $T : V \to V$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ pentru orice $\mathbf{v} \in V$.

Observație

Transformările liniare mai pot fi denumite aplicații liniare sau morfisme de spații vectoriale. O transformare liniară $T : V \to V$ se mai numește și **endomorfism**.

Exemplu

Exemple evidente de transformări liniare sunt: transformarea nulă $T : V \to W$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$, pentru orice $\mathbf{v} \in V$ și transformarea identică $T : V \to V$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ pentru orice $\mathbf{v} \in V$.

Observație

Transformările liniare mai pot fi denumite aplicații liniare sau morfisme de spații vectoriale. O transformare liniară $T : V \to V$ se mai numește și **endomorfism**.

Definiție (Definiție echivalentă)

Fie V şi W două $\mathbb{k}$-spaţii vectoriale şi $T : V \to W$ o funcţie. Funcţia T se numeşte **transformare liniară** dacă şi numai dacă

$$T(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}),$$

pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ şi orice doi scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

Exemplu

Funcţia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$T(\mathbf{v}) = (v_1 - 3v_2 + v_3, 2v_1 + v_2),$$

unde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ este o aplicaţie liniară. Pentru a demonstra, verificăm că este îndeplinită condiţia din definiţie:

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}).$$

Observăm că

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) =$$

$$= (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3).$$

Transformări liniare

Prin urmare

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) =$$

$$= (\alpha u_1 + \beta v_1 - 3\alpha u_2 - 3\beta v_2 + \alpha u_3 + \beta v_3, 2\alpha u_1 + 2\beta v_1 + \alpha u_2 + \beta v_2) =$$

$$= \alpha(u_1 - 3u_2 + u_3, 2u_1 + u_2) + \beta(v_1 - 3v_2 + v_3, 2v_1 + v_2) =$$

$$= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}).$$

Prin urmare

$$T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) =$$

$$= (\alpha u_1+\beta v_1-3\alpha u_2-3\beta v_2+\alpha u_3+\beta v_3, 2\alpha u_1+2\beta v_1+\alpha u_2+\beta v_2) =$$

$$= \alpha(u_1 - 3u_2 + u_3, 2u_1 + u_2) + \beta(v_1 - 3v_2 + v_3, 2v_1 + v_2) =$$

$$= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}).$$

Exemplu

Funcţia $T : \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ definită prin $T(A) = A^T$ este o transformare liniară. Pentru a verifica acest lucru, demonstrăm că sunt îndeplinite condiţiile din definiţie. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$T(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B)$$

şi

$$T(\alpha A) = (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha T(A).$$

Exemplu

Funcţia $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definită prin $T(\mathbf{p}(x)) = \mathbf{p}'(x)$ este o transformare liniară. Pentru demonstraţie, folosim definiţia echivalentă. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}_3[x]$. Demonstrăm că

$$T(\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q}) = \alpha T(\mathbf{p}) + \beta T(\mathbf{q})$$

folosind proprietăţile derivatei. Prin urmare

$$T(\alpha\mathbf{p}(x) + \beta\mathbf{q}(x)) = (\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q})'(x) = (\alpha\mathbf{p})'(x) + (\beta\mathbf{q}')(x) =$$

$$= \alpha\mathbf{p}'(x) + \beta\mathbf{q}'(x) = \alpha T(\mathbf{p}(x)) + \beta T(\mathbf{q}(x)).$$

Exemplu

Funcţiile T_1, $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite prin

$$T_1(\mathbf{v}) = (v_1 + v_2, 5)$$

şi

$$T_2(\mathbf{v}) = (v_1^2, v_2)$$

nu sunt aplicaţii liniare. Într-adevăr, considerând vectorii $\mathbf{u} = (1, 1)$ şi $\mathbf{v} = (2, 0)$ din $\mathbb{R}^2$, observăm că $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 1)$ şi

$$T_1(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (4, 5) \neq T_1(\mathbf{u}) + T_1(\mathbf{v}) = (2, 5) + (2, 5) = (4, 10).$$

De asemenea

$$T_2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (9, 1) \neq T_2(\mathbf{u}) + T_2(\mathbf{v}) = (1, 1) + (4, 0) = (5, 1).$$

Propoziție

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale și $T : V \to W$ o transformare liniară. Atunci:

a. $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$;
b. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$ pentru orice $\mathbf{v} \in V$;
c. $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$ pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
d. Dacă $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \in V$, atunci

$$T(\mathbf{v}) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n).$$

Demonstrație.

a. Fie $\mathbf{v} \in V$ un vector arbitrar. Atunci

$$T(\mathbf{0}_V) = T(0 \cdot \mathbf{v}) = 0\,T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W.$$

b. Fie $\mathbf{v} \in V$ un vector arbitrar. Atunci

$$T(-\mathbf{v}) = T((-1)\mathbf{v}) = (-1)\,T(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v}).$$

c. Fie $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ doi vectori din V. Atunci

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + (-1)\,T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}).$$

$\square$

Exemplu

Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o transformare liniară cu proprietatea că

$$T(1,0,0) = (2,-1,4),$$

$$T(0,1,0) = (1,5,-2),$$

$$T(0,0,1) = (0,3,1).$$

Determinaţi $T(4,5,-2)$.

Soluție.

Cum $(4,5,-2) = 4(1,0,0) + 5(0,1,0) - 2(0,0,1)$, conform propoziției anterioare (d), avem că

$$T(4,5,-2) = 4T(1,0,0) + 5T(0,1,0) - 2T(0,0,1) =$$

$$= 4(2,-1,4) + 5(1,5,-2) - 2(0,3,1) = (13,15,4).$$

Propoziție

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale, $\gamma \in \mathbb{k}$ un scalar și $S, T : V \to W$ două transformări liniare. Atunci $S + T : V \to W$ și $\gamma T : V \to W$ definite prin

$$(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$$

și

$$(\gamma T)(\mathbf{v}) = \gamma T(\mathbf{v}),$$

pentru orice $\mathbf{v} \in V$ sunt transformări liniare.

Demonstrație.

Fie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. Atunci, folosind faptul că S și T sunt transformări liniare, avem

$$(S+T)(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = S(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) + T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) =$$

$$= \alpha S(\mathbf{u}) + \beta S(\mathbf{v}) + \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) =$$

$$= \alpha(S+T)(\mathbf{u}) + \beta(S+T)(\mathbf{v}).$$

Similar

$$(\gamma T)(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \gamma T(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) =$$

$$= \gamma(\alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})) =$$

$$= \alpha(\gamma T)(\mathbf{u}) + \beta(\gamma T)(\mathbf{v}).$$

$\square$

Observație

Notăm cu $\mathcal{L}(V, W)$ mulţimea tuturor transformărilor liniare definite de la V la W. Folosind adunarea şi înmulţirea cu scalari din propoziţia anterioară, putem defini pe $\mathcal{L}(V, W)$ o structură de $\mathbb{k}$-spaţiu vectorial.

Propoziție

Fie U, V și W $\mathbb{k}$-spații vectoriale și $T : U \to V$, $S : V \to W$ două transformări liniare. Atunci $S \circ T$ este o transformare liniară.

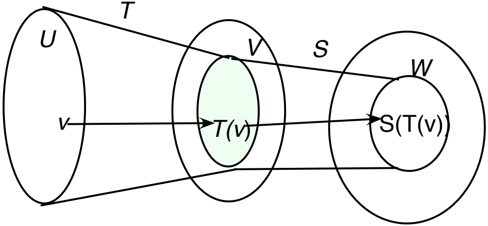


Figure: Compunerea transformărilor liniare

Demonstrație.

Fie $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in U$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. Trebuie să demonstrăm că are loc egalitatea din definiția echivalentă. Observăm că

$$(S \circ T)(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = S(T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})) = S(\alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v})) =$$

$$= \alpha S(T(\mathbf{u})) + \beta S(T(\mathbf{v})) = \alpha(S \circ T)(\mathbf{u}) + \beta(S \circ T)(\mathbf{v}).$$

$\square$