Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

seminarul 4

2021-2022

Operații cu subspații vectoriale. Matricea de schimbare a bazei. Transformări liniare.

Exercițiu

Să se verifice dacă formează bază:

(a) $S = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,0), v_3 = (1,1,1)\}$

(b) $S = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\}$

Teoremă

Fie V *un* $\mathbb{k}$*-spațiu vectorial,* $\dim_{\mathbb{k}} V = n < \infty$ *și* $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\} \subset V$ *o mulțime de vectori. Atunci:*

- *Dacă* $s > n$*, atunci* S *este liniar dependentă;*
- *Dacă* $s < n$*, atunci* S *nu generează* V*, adică* $V \neq Span(S)$*;*
- *Dacă* $s = n$*, atunci:*

$$S \text{ este bază} \Leftrightarrow S \text{ este liniar independentă} \Leftrightarrow S \text{ generează } V.$$

Soluție:

Folosim ultimul caz din teoremă.

Soluție:

Folosim ultimul caz din teoremă.
(a) Dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este 3, iar $|S| = 3$. Deci

$$S \text{ este bază} \Leftrightarrow S \text{ este liniar independentă} \Leftrightarrow S \text{ generează } \mathbb{R}^3.$$

Soluție:

Folosim ultimul caz din teoremă.
(a) Dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este 3, iar $|S| = 3$. Deci

$$S \text{ este bază} \Leftrightarrow S \text{ este liniar independentă} \Leftrightarrow S \text{ generează } \mathbb{R}^3.$$

Verificăm liniar independența vectorilor din S.

Soluție:

Folosim ultimul caz din teoremă.
(a) Dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este 3, iar $|S| = 3$. Deci

$$S \text{ este bază} \Leftrightarrow S \text{ este liniar independentă} \Leftrightarrow S \text{ generează } \mathbb{R}^3.$$

Verificăm liniar independența vectorilor din S. Sistemul este liniar independent dacă din $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ obținem ca unică soluție $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Soluție:

Folosim ultimul caz din teoremă.
(a) Dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este 3, iar $|S| = 3$. Deci

$$S \text{ este bază} \Leftrightarrow S \text{ este liniar independentă} \Leftrightarrow S \text{ generează } \mathbb{R}^3.$$

Verificăm liniar independența vectorilor din S. Sistemul este liniar independent dacă din $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ obținem ca unică soluție $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Înlocuim și obținem sistemul de ecuații liniare:

Soluție:

Folosim ultimul caz din teoremă.
(a) Dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$ este 3, iar $|S| = 3$. Deci

$$S \text{ este bază} \Leftrightarrow S \text{ este liniar independentă} \Leftrightarrow S \text{ generează } \mathbb{R}^3.$$

Verificăm liniar independența vectorilor din S. Sistemul este liniar independent dacă din $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ obținem ca unică soluție $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Înlocuim și obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\square$

Sistemul de ecuații liniare este compatibil determinat dacă

Sistemul de ecuații liniare este compatibil determinat dacă determinantul matricei sistemului este nenul.

Sistemul de ecuații liniare este compatibil determinat dacă determinantul matricei sistemului este nenul. Calculăm determinantul:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

Sistemul de ecuații liniare este compatibil determinat dacă determinantul matricei sistemului este nenul. Calculăm determinantul:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

Rezultă că S este liniar independentă, deci S este bază pentru $\mathbb{R}^3$.

Sistemul de ecuații liniare este compatibil determinat dacă determinantul matricei sistemului este nenul. Calculăm determinantul:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

Rezultă că S este liniar independentă, deci S este bază pentru $\mathbb{R}^3$.
(b) Vectorii nu formează bază deoarece

Sistemul de ecuații liniare este compatibil determinat dacă determinantul matricei sistemului este nenul. Calculăm determinantul:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

Rezultă că S este liniar independentă, deci S este bază pentru $\mathbb{R}^3$.
(b) Vectorii nu formează bază deoarece $|S| = 4$ și dimensiunea spațiului este 6 (orice două baze au același cardinal).

Sistemul de ecuații liniare este compatibil determinat dacă determinantul matricei sistemului este nenul. Calculăm determinantul:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

Rezultă că S este liniar independentă, deci S este bază pentru $\mathbb{R}^3$.
(b) Vectorii nu formează bază deoarece $|S| = 4$ și dimensiunea spațiului este 6 (orice două baze au același cardinal). Deoarece $4 < 6$, obținem că S nu generează spațiul vectorial $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Exercițiu

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât mulţimile să formeze bază:

(a) $S = \{\mathbf{v}_1 = (a, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 3), \mathbf{v}_3 = (1, 0, a)\}$

(b) $S = \{\mathfrak{p}_1 = a + X, \mathfrak{p}_2 = 1 - X + X^2, \mathfrak{p}_3 = X + 2X^2\}$.

Soluție:

Folosim ultimul caz din teoremă. Avem $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ și $|S| = 3$, deci

$$S \text{ este bază} \Leftrightarrow S \text{ este liniar independentă} \Leftrightarrow S \text{ generează } \mathbb{R}^3.$$

$\square$

Spații vectoriale finit generate:

Problema revine la a determina $a \in \mathbb{R}$ astfel încât S să fie liniar independentă.

Problema revine la a determina $a \in \mathbb{R}$ astfel încât S să fie liniar independentă.
Știm că S este liniar independentă, deci unica soluție a ecuației $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ este $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Problema revine la a determina $a \in \mathbb{R}$ astfel încât S să fie liniar independentă.
Știm că S este liniar independentă, deci unica soluție a ecuației $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ este $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Avem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} a\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_2 + a\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

despre care știm că este

Problema revine la a determina $a \in \mathbb{R}$ astfel încât S să fie liniar independentă.
Știm că S este liniar independentă, deci unica soluție a ecuației $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ este $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Avem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} a\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_2 + a\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

despre care știm că este compatibil determinat.

Spații vectoriale finit generate:

Problema revine la a determina $a \in \mathbb{R}$ astfel încât S să fie liniar independentă.
Știm că S este liniar independentă, deci unica soluție a ecuației $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ este $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Avem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} a\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_2 + a\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

despre care știm că este compatibil determinat. Acest lucru este echivalent cu $\det(A) \neq 0$, unde $A = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$.

Obținem că

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 3 \neq 0.$$

Obținem că

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 3 \neq 0.$$

deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\}$.

Exercițiu

Fie u, v, w trei vectori liniar independenţi în spaţiul vectorial V.
Să se studieze liniar dependenţa vectorilor
$x = 2u - v + w, y = u + 2w, z = u + 2v - w$.

Soluție:

Exercițiu

Fie u, v, w trei vectori liniar independenţi în spaţiul vectorial V. Să se studieze liniar dependenţa vectorilor $x = 2u - v + w, y = u + 2w, z = u + 2v - w$.

Soluție:

Aplicăm definiția:

Exercițiu

Fie u, v, w trei vectori liniar independenţi în spaţiul vectorial V. Să se studieze liniar dependenţa vectorilor $x = 2u - v + w, y = u + 2w, z = u + 2v - w$.

Soluție:

Aplicăm definiția: x, y, z sunt liniar independenți dacă din $ax + by + cz = \mathbf{0}$ obținem $a = b = c = 0$ unica soluție.

Exercițiu

Fie u, v, w trei vectori liniar independenţi în spaţiul vectorial V. Să se studieze liniar dependenţa vectorilor $x = 2u - v + w, y = u + 2w, z = u + 2v - w$.

Soluție:

Aplicăm definiția: x, y, z sunt liniar independenți dacă din $ax + by + cz = \mathbf{0}$ obținem $a = b = c = 0$ unica soluție.
Înlocuim:

$$ax+by+cz = \mathbf{0} \Leftrightarrow a(2u-v+w)+b(u+2w)+c(u+2v-w) = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$(2a + b + c)u + (-a + 2c)v + (a + 2b - c)w = \mathbf{0}$$

□

Spații vectoriale finit generate:

Cum u, v, w sunt liniar independenți, din

$$(2a + b + c)u + (-a + 2c)v + (a + 2b - c)w = \mathbf{0}$$

obținem că:

Cum u, v, w sunt liniar independenți, din

$$(2a + b + c)u + (-a + 2c)v + (a + 2b - c)w = \mathbf{0}$$

obținem că:

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ -a + 2c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

Spații vectoriale finit generate:

Cum u, v, w sunt liniar independenți, din

$$(2a + b + c)u + (-a + 2c)v + (a + 2b - c)w = \mathbf{0}$$

obținem că:

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ -a + 2c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

Spații vectoriale finit generate:

Cum u, v, w sunt liniar independenți, din

$$(2a+b+c)u+(-a+2c)v+(a+2b-c)w=\mathbf{0}$$

obținem că:

$$\begin{cases} 2a+b+c=0 \\ -a+2c=0 \\ a+b-2c=0 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{1} \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

Cum u, v, w sunt liniar independenți, din

$$(2a + b + c)u + (-a + 2c)v + (a + 2b - c)w = \mathbf{0}$$

obținem că:

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ -a + 2c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{1} \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{1} \\ -5 & \boxed{\text{-2}} & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Cum u, v, w sunt liniar independenți, din

$$(2a + b + c)u + (-a + 2c)v + (a + 2b - c)w = \mathbf{0}$$

obținem că:

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ -a + 2c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{1} \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{1} \\ -5 & \boxed{\text{-2}} & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{1} \\ -1 & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{\text{-5}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cum u, v, w sunt liniar independenți, din

$$(2a+b+c)u+(-a+2c)v+(a+2b-c)w=\mathbf{0}$$

obținem că:

$$\begin{cases} 2a+b+c=0 \\ -a+2c=0 \\ a+b-2c=0 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{1} \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{1} \\ -5 & \boxed{\text{-2}} & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & \boxed{1} \\ -1 & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{\text{-5}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul este compatibil determinat, deci unica soluție este $a=b=c=0$.

Exercițiu

Fie $S = \{p = 1 + X, q = X + X^2, r = 2 + 3X, t = 1 - X^2\}$. Să se arate că S este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[X]$ şi să se extragă o bază din S.

Soluție:

Exercițiu

Fie $S = \{p = 1 + X, q = X + X^2, r = 2 + 3X, t = 1 - X^2\}$. Să se arate că S este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[X]$ şi să se extragă o bază din S.

Soluție:

Fie $f = a + bX + cX^2$ un polinom și trebuie să găsim $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ astfel ca $f = \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r + \alpha_4 t$.

Exercițiu

Fie $S = \{p = 1 + X, q = X + X^2, r = 2 + 3X, t = 1 - X^2\}$. Să se arate că S este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[X]$ şi să se extragă o bază din S.

Soluție:

Fie $f = a + bX + cX^2$ un polinom și trebuie să găsim $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ astfel ca $f = \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r + \alpha_4 t$. Calculăm rangul matricei sistemului

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 3 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{array} \right) \sim$$

Exercițiu

Fie $S = \{p = 1 + X, q = X + X^2, r = 2 + 3X, t = 1 - X^2\}$. Să se arate că S este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[X]$ şi să se extragă o bază din S.

Soluție:

Fie $f = a + bX + cX^2$ un polinom și trebuie să găsim $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ astfel ca $f = \alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r + \alpha_4 t$. Calculăm rangul matricei sistemului

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 3 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b - a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right)$$

$\square$

Spații vectoriale finit generate:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & c-b+a \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & c-b+a \end{array}\right),$$

deci rangul este 3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & c-b+a \end{array}\right),$$

deci rangul este 3.
Sistemul este compatibil, adică S formează un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[x]$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & c-b+a \end{array}\right),$$

deci rangul este 3.
Sistemul este compatibil, adică S formează un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[x]$.
Din sistemul de generatori extragem o bază.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & c-b+a \end{array}\right),$$

deci rangul este 3.
Sistemul este compatibil, adică S formează un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[x]$.
Din sistemul de generatori extragem o bază. Vectorii liniar independenți sunt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & c-b+a \end{array}\right),$$

deci rangul este 3.
Sistemul este compatibil, adică S formează un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[x]$.
Din sistemul de generatori extragem o bază. Vectorii liniar independenți sunt $\{p, q, r\}$ (corespund coloanelor cu pivoți) și formează o bază deoarce $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[x] = 3$ și $|\{p, q, r\}| = 3$.

Exercițiu

Să se determine coordonatele vectorului în baza B:

(a) $B = \{\mathfrak{p}_1 = 1, \mathfrak{p}_2 = 1 + 2X, \mathfrak{p}_3 = (2 + X)^2\},\ \mathfrak{p} = 5 - 2X + X^2$;

(b) $B = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\}, v = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $B = \{\mathbf{v}_1 = (1,1,0), \mathbf{v}_2 = (1,0,0), \mathbf{v}_3 = (1,1,1)\},\ \mathbf{v} = (5,8,3)$.

Teoremă

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial de dimensiune n și $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ o mulțime de vectori. Mulțimea B formează bază dacă și numai dacă orice vector $\mathbf{v} \in V$ se exprimă unic sub forma:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n, \ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}.$$

Scalarii $\alpha_1, \dots, \ \alpha_n$ se numesc **coordonatele vectorului v** *în baza B.*

Spații vectoriale finit generate:

Vrem să determinăm coordonatele vectorului $\mathfrak{p} = 5 - 2x + x^2$ în baza B, unde $B = \{\mathfrak{p}_1 = 1, \mathfrak{p}_2 = 1 + 2x, \mathfrak{p}_3 = (2 + x)^2\}$,

Spații vectoriale finit generate:

Vrem să determinăm coordonatele vectorului $\mathfrak{p} = 5 - 2x + x^2$ în baza B, unde $B = \{\mathfrak{p}_1 = 1, \mathfrak{p}_2 = 1 + 2x, \mathfrak{p}_3 = (2 + x)^2\}$, deci trebuie să aflăm scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathfrak{p} = \alpha_1\mathfrak{p}_1 + \alpha_2\mathfrak{p}_2 + \alpha_3\mathfrak{p}_3$.

Spații vectoriale finit generate:

Vrem să determinăm coordonatele vectorului $\mathfrak{p} = 5 - 2x + x^2$ în baza B, unde $B = \{\mathfrak{p}_1 = 1, \mathfrak{p}_2 = 1 + 2x, \mathfrak{p}_3 = (2 + x)^2\}$, deci trebuie să aflăm scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathfrak{p} = \alpha_1 \mathfrak{p}_1 + \alpha_2 \mathfrak{p}_2 + \alpha_3 \mathfrak{p}_3$.
Înlocuim și avem:

$$5 - 2x + x^2 = \alpha_1 + \alpha_2(1 + 2x) + \alpha_3(2 + x)^2,$$

adică

$$5 - 2x + x^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) + (2\alpha_2 + 4\alpha_3)x + \alpha_3 x^2.$$

Vrem să determinăm coordonatele vectorului $\mathfrak{p} = 5 - 2x + x^2$ în baza B, unde $B = \{\mathfrak{p}_1 = 1, \mathfrak{p}_2 = 1 + 2x, \mathfrak{p}_3 = (2 + x)^2\}$, deci trebuie să aflăm scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathfrak{p} = \alpha_1\mathfrak{p}_1 + \alpha_2\mathfrak{p}_2 + \alpha_3\mathfrak{p}_3$.
Înlocuim și avem:

$$5 - 2x + x^2 = \alpha_1 + \alpha_2(1 + 2x) + \alpha_3(2 + x)^2,$$

adică

$$5 - 2x + x^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3) + (2\alpha_2 + 4\alpha_3)x + \alpha_3 x^2.$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 5 \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = -2 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 5 \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = -2 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 5 \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = -2 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

Din ultima ecuație găsim $\alpha_3 = 1$, înlocuim și obținem $\alpha_2 = -3$ și $\alpha_1 = 4$. Deci coordonatele vectorului $\mathfrak{p}$ în baza B sunt $4, -3, 1$ deoarece $\mathfrak{p} = 4\mathfrak{p}_1 - 3\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3$.

Exemplu

În $\mathbb{R}^3$ se consideră

$$U = \{(x, y, z) : 2x - 3y + z = 0\}$$

şi

$$V = \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2),$$
$$\mathbf{v}_3 = (2, 4, 0), \mathbf{v}_4 = (5, -2, -3)\}.$$

Să se arate că U şi V sunt subspaţii şi să se determine baze şi dimensiuni pentru U, $V, U \cap V, U + V$.

Bază și dimensiune pentru U: Avem

$$U = \{(x, y, z) : 2x - 3y + z = 0\} =$$

Bază și dimensiune pentru U**:** Avem

$$U = \{(x, y, z) : 2x - 3y + z = 0\} = \{(x, y, -2x + 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Bază și dimensiune pentru U: Avem

$$U = \{(x, y, z) : 2x - 3y + z = 0\} = \{(x, y, -2x + 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, 0, -2x) + (0, y, 3y) : x, y \in \mathbb{R}\} =$$

Bază și dimensiune pentru U: Avem

$$U = \{(x, y, z) : 2x - 3y + z = 0\} = \{(x, y, -2x + 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, 0, -2x) + (0, y, 3y) : x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{x(1, 0, -2) + y(0, 1, 3) : x, y \in \mathbb{R}\} =$$

Bază și dimensiune pentru U: Avem

$$U = \{(x, y, z) : 2x - 3y + z = 0\} = \{(x, y, -2x + 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, 0, -2x) + (0, y, 3y) : x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{x(1, 0, -2) + y(0, 1, 3) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan\{(1, 0, -2), (0, 1, 3)\}$$

Bază și dimensiune pentru U: Avem

$$U = \{(x, y, z) : 2x - 3y + z = 0\} = \{(x, y, -2x + 3y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, 0, -2x) + (0, y, 3y) : x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{x(1, 0, -2) + y(0, 1, 3) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan\{(1, 0, -2), (0, 1, 3)\}$$

deci $U \leq \mathbb{R}^3$.
Mai mult, $\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)\}$ este un sistem de generatori pentru U.

Operații cu subspații vectoriale

Din sistemul de generatori extragem o bază: verificăm dacă $\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)\}$ sunt liniar independenți.

Din sistemul de generatori extragem o bază: verificăm dacă $\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)\}$ sunt liniar independenți.
Avem $\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)\}$ sunt liniar independenți dacă unica soluție a ecuației

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

este $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Din sistemul de generatori extragem o bază: verificăm dacă $\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)\}$ sunt liniar independenți.
Avem $\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)\}$ sunt liniar independenți dacă unica soluție a ecuației

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

este $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Înlocuim și avem:

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1(1, 0, -2) + \alpha_2(0, 1, 3) = (0, 0, 0).$$

Operații cu subspații vectoriale

Din sistemul de generatori extragem o bază: verificăm dacă $\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)\}$ sunt liniar independenți.
Avem $\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)\}$ sunt liniar independenți dacă unica soluție a ecuației

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

este $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Înlocuim și avem:

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1(1, 0, -2) + \alpha_2(0, 1, 3) = (0, 0, 0).$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Este clar că $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ este unica soluție, deci vectorii $\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)\}$ sunt liniar independenți.

Este clar că $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ este unica soluție, deci vectorii $\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)\}$ sunt liniar independenți.
Am obținut că

$$B_U = \{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3)\}$$

formează o bază pentru U deoarece este sistem de generatori și sistem liniar independent. În plus, avem $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2 = |B_U|$.

Bază și dimensiune pentru V: Avem

$$V = \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1 = (-1,2,1), \mathbf{v}_2 = (4,0,-2), \mathbf{v}_3 = (2,4,0), \mathbf{v}_4 = (5,-2,-3$$

deci $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ formează un sistem de generatori pentru V.

Bază și dimensiune pentru V: Avem

$$V = \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2), \mathbf{v}_3 = (2, 4, 0), \mathbf{v}_4 = (5, -2, -3$$

deci $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ formează un sistem de generatori pentru V.
Din sistemul de generatori extragem o bază: verificăm dacă $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ sunt liniar independenți.

Operații cu subspații vectoriale

Bază și dimensiune pentru V: Avem

$$V = \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2), \mathbf{v}_3 = (2, 4, 0), \mathbf{v}_4 = (5, -2, -3$$

deci $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ formează un sistem de generatori pentru V.
Din sistemul de generatori extragem o bază: verificăm dacă $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ sunt liniar independenți.
Avem
$\{\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2), \mathbf{v}_3 = (2, 4, 0), \mathbf{v}_4 = (5, -2, -3)\}$
sunt liniar independenți dacă unica soluție a ecuației

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_4 \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

este $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Înlocuim în $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ și obținem

$$\alpha_1(-1,2,1) + \alpha_2(4,0,-2) + \alpha_3(2,4,0) + \alpha_4(5,-2,-3) = (0,0,0),$$

echivalent cu sistemul de ecuații liniare

Înlocuim în $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ și obținem

$\alpha_1(-1,2,1) + \alpha_2(4,0,-2) + \alpha_3(2,4,0) + \alpha_4(5,-2,-3) = (0,0,0)$,

echivalent cu sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_3 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Atunci:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{-1}} & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

Atunci:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 4 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{8} & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Atunci:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{-1}} & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\text{-1}} & 4 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{8} & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\text{-1}} & 4 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{8} & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Atunci:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 4 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{8} & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 4 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{8} & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deci vectorii
$\{\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2), \mathbf{v}_3 = (2, 4, 0), \mathbf{v}_4 = (5, -2, -3)\}$
nu sunt liniar independenți.

Atunci:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{-1}} & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\text{-1}} & 4 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{8} & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\text{-1}} & 4 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{8} & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deci vectorii
$\{\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2), \mathbf{v}_3 = (2, 4, 0), \mathbf{v}_4 = (5, -2, -3)\}$
nu sunt liniar independenți.
În schimb, obținem $\{\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2)\}$ sunt liniar independenți (corespund pivoților).

Am obținut că

$$B_V = \{\mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2)\}$$

formează o bază pentru V deoarece este sistem de generatori și sistem liniar independent. În plus, avem $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 = |B_V|$.

Baza și dimensiune pentru $U \cap V$. Aplicăm definiția:

$$U \cap V = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{w} \in U \text{ și } \mathbf{w} \in V\}$$

Baza și dimensiune pentru $U \cap V$. Aplicăm definiția:

$$U \cap V = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{w} \in U \text{ și } \mathbf{w} \in V\}$$

Fie $\mathbf{w} = (x, y, z) \in U \cap V$, adică $\mathbf{w} \in U$ și $\mathbf{w} \in V$. Atunci:

$$2x - 3y + z = 0,$$

pentru că $\mathbf{w} \in U$ și

$$(x, y, z) = a(-1, 2, 1) + b(4, 0, -2),$$

pentru că $\mathbf{w} \in V$. Avem sistemul

Baza și dimensiune pentru $U \cap V$. Aplicăm definiția:

$$U \cap V = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{w} \in U \text{ și } \mathbf{w} \in V\}$$

Fie $\mathbf{w} = (x, y, z) \in U \cap V$, adică $\mathbf{w} \in U$ și $\mathbf{w} \in V$. Atunci:

$$2x - 3y + z = 0,$$

pentru că $\mathbf{w} \in U$ și

$$(x, y, z) = a(-1, 2, 1) + b(4, 0, -2),$$

pentru că $\mathbf{w} \in V$. Avem sistemul

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ -a + 4b = x \\ 2a = y \\ a - 2b = z \end{cases}$$

Înlocuim x, y, z în prima ecuație și obținem

$$2(-a + 4b) - 6a + (a - 2b) = 0,$$

de unde găsim $a = 6/7b$.

Înlocuim x, y, z în prima ecuație și obținem

$$2(-a + 4b) - 6a + (a - 2b) = 0,$$

de unde găsim $a = 6/7b$.
Rezultă că $x = 22/7b$, $y = 12/7b$ și $z = -8/7b$. Deci vectorul $\mathbf{w}$ are forma

$$\mathbf{w} = (22/7b, 12/7b, -8/7b).$$

Înlocuim x, y, z în prima ecuație și obținem

$$2(-a + 4b) - 6a + (a - 2b) = 0,$$

de unde găsim $a = 6/7b$.
Rezultă că $x = 22/7b$, $y = 12/7b$ și $z = -8/7b$. Deci vectorul $\mathbf{w}$ are forma

$$\mathbf{w} = (22/7b, 12/7b, -8/7b).$$

$$U \cap V = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{w} \in U \text{ și } \mathbf{w} \in V\} =$$

$$= \{\mathbf{w} = (22/7b, 12/7b, -8/7b) : b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{(22, 12, -8)\}).$$

Am obținut că

$$U \cap V = \mathcal{S}pan(\{(22, 12, -8)\}),$$

deci $\{(22, 12, -8)\}$ este un sistem de generatori pentru $U \cap V$.
Cum orice mulțime formată dintr-un singur vector nenul este liniar independentă, obținem că $\{(22, 12, -8)\}$ este bază pentru $U \cap V$.
Mai mult, $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1$.

Determinăm bază și dimensiune pentru $U + V$.
Din teorema dimensiunii, avem

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V),$$

Determinăm bază și dimensiune pentru $U + V$.
Din teorema dimensiunii, avem

$$\dim_{\mathbb{R}}(U+V) = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V),$$

deci

$$\dim_{\mathbb{R}}(U+V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Operații cu subspații vectoriale

Determinăm bază și dimensiune pentru $U + V$.
Din teorema dimensiunii, avem

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V),$$

deci

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Metoda 1: Am obținut că $\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 3$ și știm că $U + V \leq \mathbb{R}^3$, iar $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$. Obținem imediat că $U + V = \mathbb{R}^3$, iar o bază pentru $U + V$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

Metoda 2: Știm că $U + V = \mathcal{S}pan(U \cup V)$, deci un sistem de generatori pentru $U + V$ se obține dacă reunim baza lui U cu baza lui V.

Metoda 2: Știm că $U + V = \mathcal{S}pan(U \cup V)$, deci un sistem de generatori pentru $U + V$ se obține dacă reunim baza lui U cu baza lui V.

Un sistem de generatori pentru $U + V$ este $B_U \cup B_V$, adică

$$\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3), \mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2)\}.$$

Metoda 2: Știm că $U + V = \mathcal{S}pan(U \cup V)$, deci un sistem de generatori pentru $U + V$ se obține dacă reunim baza lui U cu baza lui V.
Un sistem de generatori pentru $U + V$ este $B_U \cup B_V$, adică

$$\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3), \mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2)\}.$$

Verificăm dacă sunt liniar independenți, adică unica soluție a ecuației

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_1 + \alpha_4 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

este $\alpha_1 = \cdots = \alpha_4 = 0$. Înlocuim și obținem:

$$\alpha_1(1, 0, -2) + \alpha_2(0, 1, 3) + \alpha_3(-1, 2, 1) + \alpha_4(4, 0, -2) = (0, 0, 0),$$

deci ajungem la sistemul de ecuații liniare:

Metoda 2: Știm că $U+V=\mathcal{S}pan(U\cup V)$, deci un sistem de generatori pentru $U+V$ se obține dacă reunim baza lui U cu baza lui V.
Un sistem de generatori pentru $U+V$ este $B_U\cup B_V$, adică

$$\{\mathbf{u}_1=(1,0,-2),\mathbf{u}_2=(0,1,3),\mathbf{v}_1=(-1,2,1),\mathbf{v}_2=(4,0,-2)\}.$$

Verificăm dacă sunt liniar independenți, adică unica soluție a ecuației

$$\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\alpha_3\mathbf{v}_1+\alpha_4\mathbf{v}_2=\mathbf{0}$$

este $\alpha_1=\cdots=\alpha_4=0$. Înlocuim și obținem:

$$\alpha_1(1,0,-2)+\alpha_2(0,1,3)+\alpha_3(-1,2,1)+\alpha_4(4,0,-2)=(0,0,0),$$

deci ajungem la sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases}\alpha_1-\alpha_3+4\alpha_4=0\\ \alpha_2+2\alpha_3=0\\ -2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4=0\end{cases}$$

Operații cu subspații vectoriale

Verificăm dacă sistemul este compatibil determinat:

$$[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

Operații cu subspații vectoriale

Verificăm dacă sistemul este compatibil determinat:

$$[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

Verificăm dacă sistemul este compatibil determinat:

$$[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-7}} & 6 \end{pmatrix}$$

Rezultă că sistemul de ecuații liniare este compatibil nedeterminat, deci
$\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3), \mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2)\}$
este liniar dependentă.

Verificăm dacă sistemul este compatibil determinat:

$$[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-7}} & 6 \end{pmatrix}$$

Rezultă că sistemul de ecuații liniare este compatibil nedeterminat, deci
$\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 3), \mathbf{v}_1 = (-1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (4, 0, -2)\}$
este liniar dependentă.
Vectorii liniar independenți sunt $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1\}$. Obținem astfel că o bază pentru $U + V$ este $\{(1, 0, -2), (0, 1, 3), (-1, 2, 1)\}$, deci $\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 3$ (adică $U + V = \mathbb{R}^3$).

Exemplu

Să se determine bază şi dimensiune pentru $U, V, U+V, U\cap V$, unde $U=\{(x,y,z): x-2y+z=0\}$ şi $V=\{(a,0,a): a\in\mathbb{R}\}$. Dacă $U\oplus V=\mathbb{R}^3$, descompuneţi vectorul $w=(10,5,7)$ sub forma $w=u+v$, $u\in U$, $v\in V$.

Bază și dimensiune pentru U: Avem
$U = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0\} = \{(x, y, -x + 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$.

Bază și dimensiune pentru U: Avem
$U = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0\} = \{(x, y, -x + 2y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$.
Obținem că mulțimea $\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$ este un sistem de generatori pentru U. Din sistemul de generatori extragem o bază, deci verificăm dacă $\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$ este sistem liniar independent.

$\{(1,0,-1),(0,1,2)\}$ este sistem liniar independent dacă unica soluție a ecuației

$$\alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(0,1,2)=\mathbf{0}$$

este $\alpha_1=\alpha_2=0$.

$\{(1,0,-1),(0,1,2)\}$ este sistem liniar independent dacă unica soluție a ecuației

$$\alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(0,1,2)=\mathbf{0}$$

este $\alpha_1=\alpha_2=0$.
Într-adevăr, din $\alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(0,1,2)=(0,0,0)$ găsim soluția unică $\alpha_1=\alpha_2=0$.

$\{(1,0,-1),(0,1,2)\}$ este sistem liniar independent dacă unica soluție a ecuației

$$\alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(0,1,2)=\mathbf{0}$$

este $\alpha_1=\alpha_2=0$.
Într-adevăr, din $\alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(0,1,2)=(0,0,0)$ găsim soluția unică $\alpha_1=\alpha_2=0$.
Am demonstrat că $\{(1,0,-1),(0,1,2)\}$ este o bază pentru U, deci obținem $\dim_{\mathbb{R}}(U)=2$.

Bază și dimensiune pentru V:

$$V = \{(a, 0, a) : a \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0, 1) : a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{(1, 0, 1)\}).$$

Bază și dimensiune pentru V:

$$V = \{(a, 0, a) : a \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0, 1) : a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{(1, 0, 1)\}).$$

Rezultă că $\{(1, 0, 1)\}$ este un sistem de generatori pentru V. Mai mult, $\{(1, 0, 1)\}$ formează o bază pentru V, deci $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 1$.

Bază și dimensiune pentru $U \cap V$: Avem

$$U \cap V = \{v \in \mathbb{R}^3 : v \in U, v \in V\} =$$

$$= \{v = (x, y, z) : x - 2y + z = 0, x = z, y = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$$

Rezultă că $U \cap V = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, deci $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 0$.

Bază și dimensiune pentru $U + V$: Din teorema dimensiunii rezultă

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V),$$

adică $\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 3$, deci $U + V = \mathbb{R}^3$.

Bază și dimensiune pentru $U + V$: Din teorema dimensiunii rezultă

$$\dim_{\mathbb{R}}(U+V) = \dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V),$$

adică $\dim_{\mathbb{R}}(U+V) = 3$, deci $U + V = \mathbb{R}^3$.
O bază pentru $U + V$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Mai mult, deoarece $U + V = \mathbb{R}^3$ și $U \cap V = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, avem $U \oplus V = \mathbb{R}^3$.

Descompunem vectorul $w = (10, 5, 7)$ sub forma $w = u + v$, $u \in U$, $v \in V$.

Descompunem vectorul $w = (10, 5, 7)$ sub forma $w = u + v$, $u \in U$, $v \in V$.
Căutăm $u = (x, y, -x + 2y) \in U$ și $v = (a, 0, a) \in V$ astfel ca $w = u + v$. Deci trebuie să determinăm $x, y, a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(10, 5, 7) = (x, y, -x + 2y) + (a, 0, a)$.

Descompunem vectorul $w = (10, 5, 7)$ sub forma $w = u + v$, $u \in U$, $v \in V$.
Căutăm $u = (x, y, -x + 2y) \in U$ și $v = (a, 0, a) \in V$ astfel ca $w = u + v$. Deci trebuie să determinăm $x, y, a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(10, 5, 7) = (x, y, -x + 2y) + (a, 0, a)$.
Determinăm soluția sistemului

$$\begin{cases} x + a = 10 \\ y = 5 \\ -x + 2y + a = 7 \end{cases}$$

și obținem $x = 13/2, y = 5, a = 7/2$. Deci $(10, 5, 7) = (13/2, 5, 7/2) + (7/2, 0, 7/2)$.

Exemplu

În spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ considerăm bazele

(a) $B = \{e_1 = (1,1,3), e_2 = (1,0,1), e_3 = (1,1,1)\}$,
$B' = \{f_1 = (1,-1,2), f_2 = (1,1,0), f_3 = (2,0,1)\}$ şi vectorul
$v = (1,-1,4)$

(b) $B = \{e_1 = 1+3x-x^2, e_2 = 2x+5x^2, e_3 = 2+x+3x^2\}$,
$B' = \{f_1 = x+x^2, f_2 = 3-x, f_3 = 3+2x+x^2\}$ şi vectorul
$v = 1+2x^2$.

Să se determine matricea de trecere de la baza B la baza B' şi să se verifice formula schimbării de coordonate pentru vectorul v la schimbarea bazei.

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorilor din B' în funcție de baza B:

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorilor din B' în funcție de baza B:
Pentru f_1 determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorilor din B' în funcție de baza B:
Pentru f_1 determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 1 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & = -1 \\ 3\alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 2 \end{cases}$$

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorilor din B' în funcție de baza B:
Pentru f_1 determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 1 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & = -1 \\ 3\alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 2 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1 \ e_2 \ e_3 | f_1] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorilor din B' în funcție de baza B:
Pentru f_1 determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 1 \\ \alpha_1 & & +\alpha_3 & = -1 \\ 3\alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = 2 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1 \; e_2 \; e_3 | f_1] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

Obținem soluția $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -\frac{3}{2}$, deci avem prima coloană din matricea $T_{B \to B'}$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_2 determinăm $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_2 determinăm $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 & = 1 \\ \beta_1 & & +\beta_3 & = 1 \\ 3\beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 & = 0 \end{cases}$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_2 determinăm $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 & = 1 \\ \beta_1 & & +\beta_3 & = 1 \\ 3\beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 & = 0 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1 \ e_2 \ e_3 | f_2] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_2 determinăm $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 & = 1 \\ \beta_1 & & +\beta_3 & = 1 \\ 3\beta_1 & +\beta_2 & +\beta_3 & = 0 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1\ e_2\ e_3 | f_2] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -3 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -3 \end{array}\right) \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & \vdots & -3 \end{array}\right)$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & -3 \end{array}\right)$$

Obținem soluția $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = \frac{3}{2}$, deci avem a doua coloană din $T_{B \to B'}$.

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_3 determinăm $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_3 = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3,$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_3 determinăm $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_3 = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \delta_1 & +\delta_2 & +\delta_3 & = 2 \\ \delta_1 & & +\delta_3 & = 0 \\ 3\delta_1 & +\delta_2 & +\delta_3 & = 1 \end{cases}$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_3 determinăm $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_3 = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \delta_1 & +\delta_2 & +\delta_3 & = 2 \\ \delta_1 & & +\delta_3 & = 0 \\ 3\delta_1 & +\delta_2 & +\delta_3 & = 1 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1 \ e_2 \ e_3 | f_3] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_3 determinăm $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_3 = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \delta_1 & +\delta_2 & +\delta_3 & = 2 \\ \delta_1 & & +\delta_3 & = 0 \\ 3\delta_1 & +\delta_2 & +\delta_3 & = 1 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1\ e_2\ e_3 | f_3] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -5 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & -2 & \vdots & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

Obținem soluția $\delta_1 = -\frac{1}{2}$, $\delta_2 = 2$, $\delta_3 = \frac{1}{2}$, deci găsim ultima coloană din matrice.

Matricea de schimbare a bazei:

Matricea de trecere de la baza B la baza B' este

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorului $v = (1, -1, 4)$ în baza B',

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorului $v = (1, -1, 4)$ în baza B', deci trebuie să determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$v = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3.$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 4 \end{cases}$$

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorului $v = (1, -1, 4)$ în baza B', deci trebuie să determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$v = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3.$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 4 \end{cases}$$

Avem:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 2 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -3 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -3 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -3 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -3 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

Obținem soluția $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -2$.

Matricea de schimbare a bazei:

Aplicăm formula schimbării coordonatelor la schimbarea bazei și găsim coordonatele lui v în baza B:

$$[v]_B = T_{B\to B'}[v]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Obținem:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorilor din B' în funcție de baza B:

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorilor din B' în funcție de baza B:
Pentru f_1 determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorilor din B' în funcție de baza B:
Pentru f_1 determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \alpha_1 & & +2\alpha_3 & = 0 \\ 3\alpha_1 & +2\alpha_2 & +\alpha_3 & = 1 \\ -\alpha_1 & +5\alpha_2 & +3\alpha_3 & = 1 \end{cases}$$

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorilor din B' în funcție de baza B:
Pentru f_1 determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \alpha_1 & & +2\alpha_3 & = 0 \\ 3\alpha_1 & +2\alpha_2 & +\alpha_3 & = 1 \\ -\alpha_1 & +5\alpha_2 & +3\alpha_3 & = 1 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1 \ e_2 \ e_3 | f_1] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ -1 & 5 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorilor din B' în funcție de baza B:
Pentru f_1 determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \alpha_1 & & +2\alpha_3 & = 0 \\ 3\alpha_1 & +2\alpha_2 & +\alpha_3 & = 1 \\ -\alpha_1 & +5\alpha_2 & +3\alpha_3 & = 1 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1\ e_2\ e_3 | f_1] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ -1 & 5 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & 1 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & 1 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{35} & \vdots & -3 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & 1 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{35} & \vdots & -3 \end{array}\right)$$

Obținem soluția $\alpha_1 = \frac{6}{35}$, $\alpha_2 = \frac{10}{35}$, $\alpha_3 = -\frac{3}{35}$, deci avem prima coloană din matricea $T_{B\to B'}$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_2 determinăm $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_2 determinăm $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \beta_1 & & +2\beta_3 & = 3 \\ 3\beta_1 & +2\beta_2 & +\beta_3 & = -1 \\ -\beta_1 & +5\beta_2 & +3\beta_3 & = 0 \end{cases}$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_2 determinăm $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \beta_1 & & +2\beta_3 & = 3 \\ 3\beta_1 & +2\beta_2 & +\beta_3 & = -1 \\ -\beta_1 & +5\beta_2 & +3\beta_3 & = 0 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1 \ e_2 \ e_3 | f_2] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & -1 \\ -1 & 5 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_2 determinăm $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \beta_1 & & +2\beta_3 & = 3 \\ 3\beta_1 & +2\beta_2 & +\beta_3 & = -1 \\ -\beta_1 & +5\beta_2 & +3\beta_3 & = 0 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 | f_2] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & -1 \\ -1 & 5 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_2 determinăm $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \beta_1 & & +2\beta_3 & = 3 \\ 3\beta_1 & +2\beta_2 & +\beta_3 & = -1 \\ -\beta_1 & +5\beta_2 & +3\beta_3 & = 0 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1\ e_2\ e_3 | f_2] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & -1 \\ -1 & 5 & 3 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & -10 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & -10 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & -10 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{35} & \vdots & 56 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & -10 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{35} & \vdots & 56 \end{array}\right)$$

Obținem soluția $\beta_1 = -\frac{1}{5}$, $\beta_2 = -1$, $\beta_3 = \frac{8}{5}$, deci avem a doua coloană din $T_{B\to B'}$.

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_3 determinăm $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_3 = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3,$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_3 determinăm $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_3 = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \delta_1 & & +2\delta_3 & = 3 \\ 3\delta_1 & +2\delta_2 & +\delta_3 & = 2 \\ -\delta_1 & +5\delta_2 & +3\delta_3 & = 1 \end{cases}$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_3 determinăm $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_3 = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \delta_1 & & +2\delta_3 & = 3 \\ 3\delta_1 & +2\delta_2 & +\delta_3 & = 2 \\ -\delta_1 & +5\delta_2 & +3\delta_3 & = 1 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1 \ e_2 \ e_3 | f_3] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ -1 & 5 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_3 determinăm $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_3 = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \delta_1 & & +2\delta_3 & = 3 \\ 3\delta_1 & +2\delta_2 & +\delta_3 & = 2 \\ -\delta_1 & +5\delta_2 & +3\delta_3 & = 1 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 | f_3] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ -1 & 5 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

Pentru f_3 determinăm $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f_3 = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3,$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} \delta_1 & & +2\delta_3 & = 3 \\ 3\delta_1 & +2\delta_2 & +\delta_3 & = 2 \\ -\delta_1 & +5\delta_2 & +3\delta_3 & = 1 \end{cases}$$

Avem:

$$[e_1\ e_2\ e_3 | f_3] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 2 \\ -1 & 5 & 3 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \sim$$

Matricea de schimbare a bazei:

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & \boxed{2} & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{35} & \vdots & 43 \end{pmatrix}$$

Obținem soluția $\delta_1 = \frac{19}{35}$, $\delta_2 = -\frac{3}{7}$, $\delta_3 = \frac{43}{35}$, deci găsim ultima coloană din matrice.

Matricea de schimbare a bazei:

Matricea de trecere de la baza B la baza B' este

$$T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 6/35 & -1/5 & 19/35 \\ 10/35 & -1 & -3/7 \\ -3/35 & 8/5 & 43/35 \end{pmatrix}.$$

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorului $v = 1 + 2x^2$ în baza B',

Matricea de schimbare a bazei:

Determinăm coordonatele vectorului $v = 1 + 2x^2$ în baza B', deci trebuie să determinăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$v = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3.$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

Matricea de schimbare a bazei:

Facem diferența dintre ecuațiile (2) și (3) și obținem $-\alpha_2 + \alpha_3 = -2$. Adunăm ecuația (1) cu ecuația (3) înmulțită cu 3 și obținem $\alpha_3 = -5/6$. Înlocuim și găsim $\alpha_2 = 7/6$ și $\alpha_1 = 17/6$ Obținem soluția $\alpha_1 = 17/6$, $\alpha_2 = 7/6$, $\alpha_3 = -5/6$.

Matricea de schimbare a bazei:

Aplicăm formula schimbării coordonatelor la schimbarea bazei și găsim coordonatele lui v în baza B:

$$[v]_B = T_{B \to B'}[v]_{B'} = \begin{pmatrix} 6/35 & -1/5 & 19/35 \\ 10/35 & -1 & -3/7 \\ -3/35 & 8/5 & 43/35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17/6 \\ 7/6 \\ -5/6 \end{pmatrix}$$

Obținem:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

Transformări liniare:

Exemplu

Să se verifice dacă este transformare liniară

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[x],\ T(a, b, c, d) = (a+c)+2dx+(a+c-2d)x^2+bx^3.$$

Transformări liniare:

Exemplu

Să se verifice dacă este transformare liniară

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[x],\ T(a, b, c, d) = (a+c)+2dx+(a+c-2d)x^2+bx^3.$$

Soluție:

Metoda 1: Aplicăm definiția:

Exemplu

Să se verifice dacă este transformare liniară

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[x],\ T(a, b, c, d) = (a+c)+2dx+(a+c-2d)x^2+bx^3.$$

Soluție:

Metoda 1: Aplicăm definiția:

Definiție

Fie V şi W două $\mathbb{k}$-spaţii vectoriale şi $T : V \to W$ o funcţie.
Funcţia T se numeşte **transformare liniară** dacă:

1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
2. $T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v})$, pentru orice vector $\mathbf{v} \in V$ şi orice scalar $\alpha \in \mathbb{k}$.

Transformări liniare:

Verificăm (1):

Verificăm (1):considerăm vectorii
$\mathbf{u} = (a, b, c, d), \mathbf{v} = (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$. Avem

Transformări liniare:

Verificăm (1):considerăm vectorii
$\mathbf{u} = (a, b, c, d), \mathbf{v} = (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$. Avem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a + a', b + b', c + c', d + d') \stackrel{\text{not.}}{=} (A, B, C, D)$$

și obținem, din definiția lui T:

Verificăm (1):considerăm vectorii
$\mathbf{u} = (a, b, c, d), \mathbf{v} = (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$. Avem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a + a', b + b', c + c', d + d') \stackrel{\text{not.}}{=} (A, B, C, D)$$

și obținem, din definiția lui T:

$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(A, B, C, D) =$

Verificăm (1):considerăm vectorii
$\mathbf{u} = (a, b, c, d), \mathbf{v} = (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$. Avem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a + a', b + b', c + c', d + d') \overset{\text{not.}}{=} (A, B, C, D)$$

și obținem, din definiția lui T:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(A, B, C, D) = (A+C)+2Dx+(A+C-2D)x^2+Bx^3 =$$

Verificăm (1):considerăm vectorii $\mathbf{u} = (a, b, c, d), \mathbf{v} = (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$. Avem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a + a', b + b', c + c', d + d') \overset{\text{not.}}{=} (A, B, C, D)$$

și obținem, din definiția lui T:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(A, B, C, D) = (A+C)+2Dx+(A+C-2D)x^2+Bx^3 =$$

$$= [(a + a') + (c + c')] + 2(d + d')x+$$
$$+[(a + a') + (c + c') - 2(d + d')]x^2 + (b + b')x^3$$

Transformări liniare:

$$= [(a+c) + 2dx + (a+c-2d)x^2 + bx^3] +$$
$$+[(a'+c') + 2d'x + (a'+c'-2d')x^2 + b'x^3] =$$

Transformări liniare:

$$= [(a + c) + 2dx + (a + c - 2d)x^2 + bx^3] +$$
$$+ [(a' + c') + 2d'x + (a' + c' - 2d')x^2 + b'x^3] =$$

$$T(a, b, c, d) + T(a', b', c', d') = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}).$$

Verificăm (2):

Verificăm (2):considerăm vectorul $\mathbf{u} = (a, b, c, d)$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(a, b, c, d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d)$$

Verificăm (2):considerăm vectorul $\mathbf{u} = (a, b, c, d)$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(a, b, c, d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d)$$

Atunci

$$T(\alpha\mathbf{u}) = T(\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) =$$

Verificăm (2):considerăm vectorul $\mathbf{u} = (a, b, c, d)$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(a, b, c, d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d)$$

Atunci

$$T(\alpha\mathbf{u}) = T(\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) =$$

$$= (\alpha a + \alpha c) + 2\alpha dx + (\alpha a + \alpha c - 2\alpha d)x^2 + \alpha bx^3 =$$

Verificăm (2):considerăm vectorul $\mathbf{u} = (a, b, c, d)$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem

$$\alpha \mathbf{u} = \alpha(a, b, c, d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d)$$

Atunci

$$T(\alpha \mathbf{u}) = T(\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) =$$

$$= (\alpha a + \alpha c) + 2\alpha dx + (\alpha a + \alpha c - 2\alpha d)x^2 + \alpha bx^3 =$$

$$\alpha[(a + c) + 2dx + (a + c - 2d)x^2 + bx^3] = \alpha T(a, b, c, d) = \alpha T(\mathbf{u}).$$

Transformări liniare:

Verificăm (2):considerăm vectorul $\mathbf{u} = (a, b, c, d)$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(a, b, c, d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d)$$

Atunci

$$T(\alpha\mathbf{u}) = T(\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) =$$

$$= (\alpha a + \alpha c) + 2\alpha dx + (\alpha a + \alpha c - 2\alpha d)x^2 + \alpha bx^3 =$$

$$\alpha[(a + c) + 2dx + (a + c - 2d)x^2 + bx^3] = \alpha T(a, b, c, d) = \alpha T(\mathbf{u}).$$

Am obținut că T este transformare liniară.

Exemplu

Să se arate că este transformare liniară:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix}$$

Transformări liniare:

Exemplu

Să se arate că este transformare liniară:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix}$$

Soluție:

Metoda 2: Aplicăm definiția echivalentă:

Transformări liniare:

Exemplu

Să se arate că este transformare liniară:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix}$$

Soluție:

Metoda 2: Aplicăm definiția echivalentă:

Definiție (Definiție echivalentă)

Fie V şi W două $\Bbbk$-spaţii vectoriale şi $T : V \to W$ o funcţie. Funcţia T se numeşte **transformare liniară** dacă şi numai dacă

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}),$$

pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ şi orice doi scalari $\alpha, \beta \in \Bbbk$.

Transformări liniare:

Fie $\mathbf{u} = (a, b, c), \mathbf{v} = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} =$$

Transformări liniare:

Fie $\mathbf{u} = (a, b, c), \mathbf{v} = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = (\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c') \stackrel{not.}{=} (A, B, C).$$

Transformări liniare:

Fie $\mathbf{u} = (a, b, c), \mathbf{v} = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = (\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c') \overset{not.}{=} (A, B, C).$$

Din definiția lui T obținem:

Fie $\mathbf{u} = (a, b, c), \mathbf{v} = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = (\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c') \overset{not.}{=} (A, B, C).$$

Din definiția lui T obținem:

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = T(A, B, C) = \begin{pmatrix} A & B + C \\ A + B + C & 2A \end{pmatrix} =$$

Transformări liniare:

Fie $\mathbf{u} = (a, b, c), \mathbf{v} = (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = (\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c') \overset{not.}{=} (A, B, C).$$

Din definiția lui T obținem:

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = T(A, B, C) = \begin{pmatrix} A & B + C \\ A + B + C & 2A \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & (\alpha b + \beta b') + (\alpha c + \beta c') \\ (\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b') + (\alpha c + \beta c') & 2(\alpha a + \beta a') \end{pmatrix} =$$

Transformări liniare:

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b + \alpha c \\ \alpha a + \alpha b + \alpha c & 2\alpha a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a' & \beta b' + \beta c' \\ \beta a' + \beta b' + \beta c' & 2\beta a' \end{pmatrix} =$$

Transformări liniare:

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b + \alpha c \\ \alpha a + \alpha b + \alpha c & 2\alpha a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a' & \beta b' + \beta c' \\ \beta a' + \beta b' + \beta c' & 2\beta a' \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a & b + c \\ a + b + c & 2a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' + c' \\ a' + b' + c' & 2a' \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}).$$

Transformări liniare:

Exemplu

Să se determine baze și dimensiuni pentru $\ker T, \operatorname{Im} T$, unde

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[x],\ T(a, b, c, d) = (a+c)+2dx+(a+c-2d)x^2+bx^3.$$

Exemplu

Să se determine baze și dimensiuni pentru ker $T, \mathrm{Im}\, T$, unde

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[x], \, T(a,b,c,d) = (a+c)+2dx+(a+c-2d)x^2+bx^3.$$

Soluție:

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale și $T : V \to W$ o transformare liniară.

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}$$

se numește **nucleul** transformării T.

$$\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W : \text{ există } \mathbf{v} \in V \text{ astfel încât } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} =$$

$$= \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}$$

se numește **imaginea** transformării T

Bază și dimensiune pentru nucleu:

Bază și dimensiune pentru nucleu: Avem:

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}_3[x]}\} =$$

Bază și dimensiune pentru nucleu: Avem:

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}_3[x]}\} =$$

$$= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : T(a, b, c, d) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3\} =$$

Bază și dimensiune pentru nucleu: Avem:

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}_3[x]}\} =$$

$$= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : T(a, b, c, d) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3\} =$$

$$= \{(a, b, c, d) : (a+c)+2dx+(a+c-2d)x^2+bx^3 = 0+0x+0x^2+0x^3\} =$$

Bază și dimensiune pentru nucleu: Avem:

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}_3[x]}\} =$$

$$= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : T(a, b, c, d) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3\} =$$

$$= \{(a, b, c, d) : (a+c)+2dx+(a+c-2d)x^2+bx^3 = 0+0x+0x^2+0x^3\} =$$

$$= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + c = 0, 2d = 0, a + c - 2d = 0, b = 0\} =$$

Transformări liniare:

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Transformări liniare:

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformări liniare:

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci c este necunoscută secundară, iar soluția sistemului este $a = -c$, $b = 0$, $d = 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Transformări liniare:

$$\ker(T) = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+c = 0, 2d = 0, a+c-2d = 0, b = 0\} =$$

$$=$$

Transformări liniare:

$$\ker(T) = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+c = 0, 2d = 0, a+c-2d = 0, b = 0\} =$$

$$= \{(-c, 0, c, 0) : c \in \mathbb{R}\} =$$

Transformări liniare:

$$\ker(T) = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+c = 0, 2d = 0, a+c-2d = 0, b = 0\} =$$

$$= \{(-c,0,c,0) : c \in \mathbb{R}\} = \{c(-1,0,1,0) : c \in \mathbb{R}\}.$$

$$\ker(T) = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a{+}c = 0, 2d = 0, a{+}c{-}2d = 0, b = 0\} =$$

$$= \{(-c,0,c,0) : c \in \mathbb{R}\} = \{c(-1,0,1,0) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Obținem ker $T = \mathcal{S}pan\{(-1,0,1,0)\}$, deci $\{(-1,0,1,0)\}$ este un sistem de generatori pentru ker T.

$$\ker(T) = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+c = 0, 2d = 0, a+c-2d = 0, b = 0\} =$$

$$= \{(-c,0,c,0) : c \in \mathbb{R}\} = \{c(-1,0,1,0) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Obținem $\ker T = \mathcal{S}pan\{(-1,0,1,0)\}$, deci $\{(-1,0,1,0)\}$ este un sistem de generatori pentru $\ker T$. Mai mult, $\{(-1,0,1,0)\}$ este sistem liniar independent, deci formează o bază pentru $\ker T$. Rezultă că

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker T) = 1 = defect(T)$$

Bază și dimensiune pentru imagine:

Bază și dimensiune pentru imagine: Din teorema dimensiunii avem:

Teoremă (Teorema dimensiunii)

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale și $T : V \to W$ o transformare liniară. Atunci

$$defect(T) + rank(T) = \dim(V).$$

Bază și dimensiune pentru imagine: Din teorema dimensiunii avem:

Teoremă (Teorema dimensiunii)

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale și $T : V \to W$ o transformare liniară. Atunci

$$defect(T) + rank(T) = \dim(V).$$

În cazul nostru:

$$1 + rank(T) = 4,$$

deci $rank(T) = 3$. Înseamnă că o bază este formată din 3 vectori.

Transformări liniare:

Avem:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} = \{T(a, b, c, d) : (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\} =$$

Transformări liniare:

Avem:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} = \{T(a,b,c,d) : (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\} =$$

$$= \{(a+c) + 2dx + (a+c-2d)x^2 + bx^3 : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

Transformări liniare:

Avem:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} = \{T(a,b,c,d) : (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\} =$$

$$= \{(a+c) + 2dx + (a+c-2d)x^2 + bx^3 : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

$$\{a(1+x^2) + bx^3 + c(1+x^2) + d(2x-2x^2) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\} =$$

Transformări liniare:

Avem:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} = \{T(a,b,c,d) : (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\} =$$

$$= \{(a+c) + 2dx + (a+c-2d)x^2 + bx^3 : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$$

$$\{a(1+x^2) + bx^3 + c(1+x^2) + d(2x-2x^2) : a,b,c,d \in \mathbb{R}\} =$$

$$\mathcal{S}pan\{\mathfrak{p}_1 = 1+x^2, \mathfrak{p}_2 = x^3, \mathfrak{p}_3 = 1+x^2, \mathfrak{p}_4 = 2x-2x^2\}$$

Obținem că $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathrm{Im}\, T$. Din sistemul de generatori extragem o bază. Identificăm vectorii liniar independenți:

$$[\mathfrak{p}_1 \ \mathfrak{p}_2 \ \mathfrak{p}_3 \ \mathfrak{p}_4] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Obținem că $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathrm{Im}\, T$. Din sistemul de generatori extragem o bază. Identificăm vectorii liniar independenți:

$$[\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2\ \mathfrak{p}_3\ \mathfrak{p}_4] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim$$

Transformări liniare:

Obținem că $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathrm{Im}\, T$. Din sistemul de generatori extragem o bază. Identificăm vectorii liniar independenți:

$$[\mathfrak{p}_1\ \mathfrak{p}_2\ \mathfrak{p}_3\ \mathfrak{p}_4] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformări liniare:

Obținem că $\{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4\}$ este un sistem de generatori pentru $\operatorname{Im} T$. Din sistemul de generatori extragem o bază. Identificăm vectorii liniar independenți:

$$[\mathfrak{p}_1 \ \mathfrak{p}_2 \ \mathfrak{p}_3 \ \mathfrak{p}_4] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vectorii liniar independenți sunt $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4$, deci ei formează o bază pentru $\operatorname{Im} T$.

Transformări liniare:

Exemplu

Să se determine baze și dimensiuni pentru $\ker T, \mathrm{Im}\, T$, unde

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix}$$

Bază și dimensiune pentru nucleu:

Bază și dimensiune pentru nucleu: Avem:

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\} =$$

Bază și dimensiune pentru nucleu: Avem:

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\} =$$

$$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : T(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} =$$

Bază și dimensiune pentru nucleu: Avem:

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\} =$$

$$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : T(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} =$$

$$= \{(a,b,c) : \begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} =$$

Bază și dimensiune pentru nucleu: Avem:

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\} =$$

$$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : T(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} =$$

$$= \{(a,b,c) : \begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} =$$

$$= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, b+c = 0, a+b+c = 0, 2a = 0\} =$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Transformări liniare:

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci c este necunoscută secundară, iar soluția sistemului este $a = 0$, $b = -c$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\ker(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, b+c = 0, a+b+c = 0, 2a = 0\} =$$

$$=$$

Transformări liniare:

$$\ker(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, b+c = 0, a+b+c = 0, 2a = 0\} =$$

$$= \{(0,-c,c) : c \in \mathbb{R}\} =$$

Transformări liniare:

$$\ker(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, b+c = 0, a+b+c = 0, 2a = 0\} =$$

$$= \{(0,-c,c) : c \in \mathbb{R}\} = \{c(0,-1,1) : c \in \mathbb{R}\}.$$

$$\ker(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, b+c = 0, a+b+c = 0, 2a = 0\} =$$

$$= \{(0,-c,c) : c \in \mathbb{R}\} = \{c(0,-1,1) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Obținem $\ker T = \mathcal{S}pan\{(0,-1,1)\}$, deci $\{(0,-1,1)\}$ este un sistem de generatori pentru $\ker T$.

$$\ker(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, b+c = 0, a+b+c = 0, 2a = 0\} =$$

$$= \{(0,-c,c) : c \in \mathbb{R}\} = \{c(0,-1,1) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Obținem $\ker T = \mathcal{S}pan\{(0,-1,1)\}$, deci $\{(0,-1,1)\}$ este un sistem de generatori pentru $\ker T$. Mai mult, $\{(0,-1,1)\}$ este sistem liniar independent, deci formează o bază pentru $\ker T$. Rezultă că

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker T) = 1 = defect(T)$$

Bază și dimensiune pentru imagine:

Bază și dimensiune pentru imagine: Din teorema dimensiunii avem:

$$\mathit{defect}(T) + \mathit{rank}(T) = \dim(V).$$

Bază și dimensiune pentru imagine: Din teorema dimensiunii avem:

$$defect(T) + rank(T) = \dim(V).$$

În cazul nostru:

$$1 + rank(T) = 3,$$

deci $rank(T) = 2$. Înseamnă că o bază este formată din 2 vectori.

Transformări liniare:

Avem:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} = \{T(a, b, c) : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} =$$

Transformări liniare:

Avem:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} = \{T(a,b,c) : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \{\begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

Transformări liniare:

Avem:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} = \{T(a,b,c) : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \{\begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\} =$$

Transformări liniare:

Avem:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} = \{T(a,b,c) : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \{\begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\} =$$

Transformări liniare:

Avem:

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} = \{T(a,b,c) : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} =$$

$$= \{\begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{S}pan\{A, B, C\},$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obținem că $\{A, B, C\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathrm{Im}\, T$.
Din sistemul de generatori extragem o bază:

$$[A\ B\ C] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Obținem că $\{A, B, C\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathrm{Im}\, T$.
Din sistemul de generatori extragem o bază:

$$[A\ B\ C] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Obținem că $\{A, B, C\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathrm{Im}\, T$.
Din sistemul de generatori extragem o bază:

$$[A\ B\ C] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obținem că $\{A, B, C\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathrm{Im}\, T$. Din sistemul de generatori extragem o bază:

$$[A\ B\ C] = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deci vectorii liniar independenți sunt A, B. Rezultă că $\{A, B\}$ este o bază pentru $\mathrm{Im}\, T$.