Curs 1 5 apr. 2022

Geometrie euclidiană

Geometrie euclidiană plană. Plane euclidiene.

Geometrie euclidiană tridimensională. Spații euclidiene tridimensionale

I Principiul minimei acțiuni al lui Fermat

$F'(x)=0$

F deriv. dat

$x \in \mathcal{S}$

II Legea evoluției libere

$x' = cx$, c cst. dat $\quad x = x(t)$, x necunoscută

$$\frac{dx}{dt} = cx$$

$$\frac{dx}{x} = c\,dt$$

EXO

$$\ln x = ct + \alpha$$

$$x = e^{(ct+\alpha)}$$

$$\beta \xleftarrow{\text{not.}} e^{\alpha} \cdot e^{ct}$$

$$x(t) = \beta \cdot e^{ct}$$

$$x'(t) = c \underbrace{\beta \cdot e^{ct}}_{} = c \cdot x^{t}$$

Geometrie euclidiană n-dimensională

Teorie mat = L P, predicate, axiome

$n=2$

$n=3$

I Axiomele de incidență

II Axioma de paralelism

III Axiomele de ordonare

IV Axiomele de congruență

V Axiomele de continuitate } Referat! Manual IX-X (79-81) $n=2, n=3$

„Geometrie și trigonometrie" (K. Teleman, Stătescu, Moraru, Rădulescu, Ilrescu)

$n=2$ și $n=3$

Pt. $n=2$

I 1) Prin orice 2 puncte distincte trece o dreaptă și numai una

2) Orice dreaptă conține cel puțin 2 puncte.

3) Există 3 puncte nesituate pe o ac. dr. (necoliniare)

II Date o dr. și un pct. exterior A, ex o unică dr. d' a.î. A se află pe d' și d' este paralelă cu d.

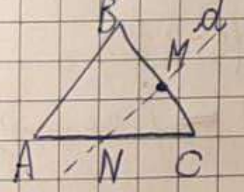
III ~~Def.~~ Axiomele de ordonare:

① $A-B-C \Rightarrow \forall$ 2 dist., col., $C-B-A$

② $A-B-C \Rightarrow \neg(B-A-C), \neg(A-C-B)$

③ $A \neq B \Rightarrow \exists C$ a.î. $A-B-C$

④ Pasch



7 apr. 2022

12 apr. 2022

Curs 2

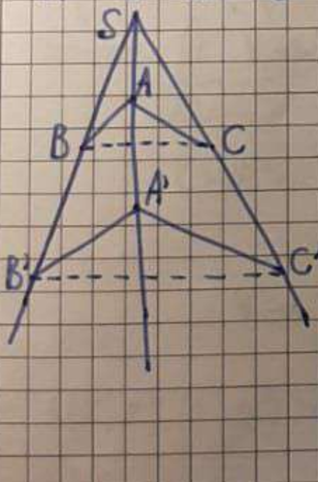
1 pct - rezumate cursuri
1 pct - rezumate seminarii
1 pct - rezolvare probleme curs și seminar
+ referatele obligatorii (câte 1 pct)

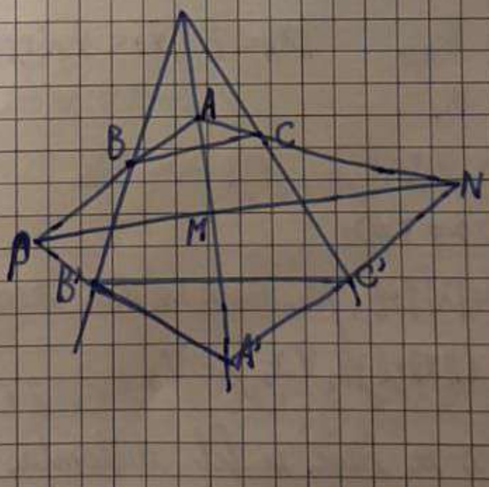
1) Spații vectoriale. Aplicații liniare. Aplicații multiliniare.
2) Subspații vectoriale și subspații afine în spații vectoriale.
Descriere prin ~~definiție~~ diferite tipuri de ecuații și/sau sisteme de ecuații
- parametrice
- implicite
- explicite

3) 1) Geometrie ~~și~~ euclidiană plană (Manualele IX, X, K. Teleman)
2) Geometrie euclidiană tridimensională

Ref. opț.: Teorema lui Desargues

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$





Spații vectoriale euclidiene

Def.: S.n. spațiu vectorial euclidian orice sistem $E = (V, +, \cdot, \langle , \rangle)$, unde $(V, +, \cdot)$ este un spațiu vectorial real și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ este un produs scalar (apl. bilin., simetrică și pozitiv def.)

$\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in V$ și $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0_V$

~~$\langle \lambda^1 x_1 + \lambda^2 y$~~

(1) apl. bilin. (1) $\langle \lambda^1 x_1 + \lambda^2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$

(2) $\langle x, \lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 \rangle = \lambda_1 \langle x, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, y_2 \rangle$

$, \forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$

$\forall \lambda^1, \lambda^2 \in \mathbb{R}$

simetrică: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in V$ (3)

Obs.: $\left.\begin{matrix}(1)\\(3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (2)$

$\left.\begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (1)$

Produsului scalar i se asociază o formă pătratică $\varphi : V \to \mathbb{R}_+$,

$\varphi(x) = \langle x, x \rangle, \forall x \in V$; Obs.: $\varphi(\lambda x) = \lambda^2 \varphi(x)$

Produsului scalar $\langle , \rangle$ i se asociază o fct. normă pe V.

$\| \, \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($\mathbb{R}_+$) $\quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\varphi(x)}, \forall x \in V$

Dem. ex.
$$\begin{cases} \|x\| \geq 0, \forall x \in V \\ \|x\| = 0 \iff x = 0_V \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \text{ pt. orice } \lambda \in \mathbb{R} \text{ și orice } x \in V \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V \end{cases}$$

Prod. sc. i se asoc. o fct. distanță:

$d : V \times V \to \mathbb{R}_+$, def. prin $d(x, y) = \|x - y\|, \forall x, y \in V$

Dem. ex.
$$\begin{cases} \text{Are propr.: } d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in V \text{ și } d(x, y) = 0 \iff x = y \\ d(x, y) = d(y, x) \\ d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z), \forall x, y, z \in V \end{cases}$$

Considerând $\begin{cases} \langle , \rangle \\ \varphi \\ \| \ \| \\ d \end{cases}$

Oricare dintre acestea le def. unic pe celelalte 3.

~~Fie~~ De aceea, fiecare se poate considera ca fiind structură euclidiană.

$\langle , \rangle \to \varphi,\ \| \ \|,\ d$

$\varphi(x) = \langle x, x \rangle$

$\underbrace{\langle x+y, x+y \rangle}_{\varphi(x+y)}$

$\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle =$
$= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle$

$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}[\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)]$

$\| \ \|^2 \to \varphi \to \langle , \rangle$

$d(x, 0_V) = \| x - 0_V \| = \| x \|$

$d \to \| \ \| \to \varphi \to \langle , \rangle$

Exemple: $(\underbrace{\mathbb{R}^n, +, \cdot}_{\text{strud. can. de sp. v. real}}, \langle , \rangle) = E^n$ – spațiul vectorial ~~tiro~~ euclidian n-dim.

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ def. prin $\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$,

$\forall (x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$

$n=2$:

$\langle (x^1, x^2), (y^1, y^2) \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2, \ \forall (x^1, x^2), (y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2$

$n=3$:

$\langle (x^1, x^2, x^3)(y^1, y^2, y^3) \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3, \ \forall (x^1, x^2, x^3), (y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3$

$\varphi(x^1, \dots, x^n) = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$

$\|(x^1, \dots, x^n)\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$

$d((x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^n)) = [(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^n - y^n)^2]^{1/2}$

$n=2$: $\varphi(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2$

$\|x\| = \left[(x^1)^2 + (x^2)^2\right]^{1/2}$

$d(x,y) = \sqrt{(x^1-y^1)^2 + (x^2-y^2)^2}$

Def.: Unghiul a doi vectori nenuli, într-un spațiu vectorial euclidian.

u, v

$$\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

$$\mu(\widehat{u,v}) = \arccos \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

Inegalitatea Cauchy-Schwarz-Buniakowski:

$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|,\ \forall u,v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda u + v, \lambda u + v\rangle = \|\lambda u + v\|^2 \geq 0$$

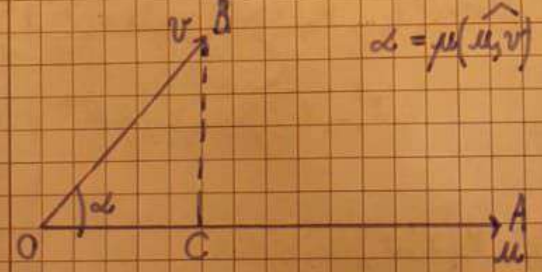
$$= \lambda^2\|u\|^2 + 2\lambda\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

$$\underbrace{\|u\|^2}_{a}\lambda^2 + \underbrace{2\langle u,v\rangle}_{2b_1=b}\lambda + \underbrace{\|v\|^2}_{c} \geq 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad a\lambda^2 + \underset{\substack{\| \\ 2b_1}}{b}\lambda + c$$

$$\frac{\Delta}{4} = \langle u,v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \Rightarrow \langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\cdot\|v\|^2$$

$$\langle u,v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos(\widehat{u,v})$$

$\alpha = \mu(\widehat{u,v})$



$C = pr_{OA} B \qquad \cos(\widehat{u,v})\cdot\|v\| = d(O,C)$

$d(O,C) =$

Exercițiu: $\overrightarrow{OC}$ în fct. de $\vec{u}, \vec{v}$

$\|$

$pr_u v = ?\ \vec{u}$

E^2

$\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$

$\mathcal{D} =$ M. dr. afine din $\mathbb{R}^2$

$[x, y] \equiv [z, w] \iff d(x, y) = d(z, w)$

$\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'} \iff \mu(\widehat{AOB}) = \mu(\widehat{A'O'B'})$

A

$\mu(\widehat{AOB}) = \mu(A - O, B - O)$

O

B

$A \neq B$, dr. AB: $x = A + t(B - A)$

$x_t = A + t(B - A)$

x_t e între A și $B \overset{def}{\iff} t \in [0, 1]$

14 apr. 2022

Seminar 9

1. Vectori și valori proprii
2. Sp. vectoriale euclidiene

Aplicații:

1. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dat prin $f(x, y, z) = (2x - y + 2z, -x + 2y - z, x + y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$

temă: a) f apl. lin. (endm.)

b) M asoc. lui f (în rap. cu b. can. din $\mathbb{R}^3$)

c) Det. val. proprii și subspațiile proprii coresp. v.p.

d) Stabiliți dacă endm. e diag.

e) $(\exists)$? m. diag. C și m. diag. D

f) Verificare

g) A^n, $n \in \mathbb{N}^*$

$1 \quad 1 \quad 1)$

Sp. vect. euclidian:

Fie $V_{/\mathbb{R}}$ sp. vect. real

Def.: O apl. ~~lin~~ $g: V\times V\to\mathbb{R}$ s.n. f. bilin. dacă

1) $g(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y) = \cancel{x_1\ \alpha}\ \alpha_1 g(x_1,y)+\alpha_2 g(x_2,y)$, $\forall x_1,x_2,y\in V$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$

2) $g(x, \beta_1 y_1+\beta_2 y_2)=\beta_1 g(x,y_1)+\beta_2 g(x,y_2)$, $\forall y_1,y_2,x\in V$

Dacă, în plus, $g(x,y)=g(y,x)$ $\forall x,y\in V$, atunci g s.n. f. b. sim.

Obs.: $\left.\begin{array}{l}1)+3)\\ 2)+3)\end{array}\right\}\Rightarrow$ f. b. sim.

Def.: g - f. b. s. pozitiv def., dc:

$Q(x)=g(x,x)>0,\ \forall x\in V^*$

$g(x,x)=0 \Longleftrightarrow x=0$

Def.: S.n. produs scalar pe V o f. b. s. pozitiv def.

Def.: Un sp. vect dotat cu un prod. scalar s.n. sp. vect eucl.

Not.: $(E_{/\mathbb{R}}, \langle\rangle) \to$ sp. vect. euclidian

19 apr. 20

Spații vectoriale euclidiene

Def.: Fie $(V,+,\cdot)$ un sp. vect. K corp com. - $K=\mathbb{R}$

O mulțime $U \subset V$ este subsp. vect., dacă $U \neq \emptyset$

$x, y \in U$

$(\lambda \in K$ și $x \in U) \Rightarrow \lambda x \in U$

În ac. caz $\left(U, +\big|_{U\times U}, \cdot\big|_{K\times U}\right)$ sp. vect. $\dim_K U \leq \dim_K V$

se scrie $(U,+,\cdot)$

Def.: S.n. subspațiu afin în $(V,+,\cdot)$ orice translatat de subsp. v. al lui $(V,+,\cdot)$

i.e. ~~mt~~ mulțime de forma $a+U$, unde $a \in V$, $U \subseteq V$ subsp. v.

$T_a(U)$, $T_a: V \to V$, $T_a(x) = a + x$, $\forall x \in V$, transl. de vector a

Q1: Orice subsp. vect. este și subsp. afin.

$U = T_{0_V}(U) = 0_V + U$

Q2: Un ~~subcorp~~ subsp. afin A este și subsp. v. $\Leftrightarrow 0_V \in A$.

(P1): Fie $A = a + U$ un subsp. afin ($a \in V$ și $U \subset V$ subsp. vect.)

Atunci: 1) $U = \{x - a;\ x \in A\}$

2) $U = \{x - y;\ x, y \in A\}$ și deci nu depinde decât de A.

3) Dacă $b \in A$, at. $A = b + U$.

Obs 1) $U =: U_A$ depinde în mod unic de A cf. 2) și s.n. subsp. v. director al lui A.

2) ~~În locul lui a~~ a nu este unic det. de A, se poate alege orice pct. din A în locul său.

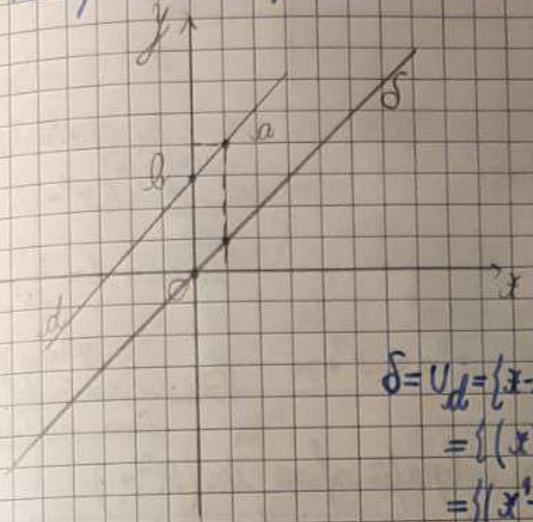
Ex.: $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$ structura canonică

1. Să se arate că mulțimea $d = \{(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2 : x^1 - x^2 + 3 = 0\}$ este subsp. afin în $(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$.

2. Să se afle subsp. vect. director $\delta := U_d$.

4. În ce relație geometrică se află d și δ?

3. Să se reprezinte d și δ într-un sistem ort. de coord.



~~$a - b + 3 = 0$~~

$x^1 - x^2 + 3 = 0$

$x^1 = x^2 - 3$

$x^2 = 4 \Rightarrow x^1 = 1 \qquad a(1,4)$

$x^2 = 3 \Rightarrow x^1 = 0 \qquad b = (0,3)$

$\delta = U_d = \{x - a;\ x\in d\} = \{x - (1,4);\ x \in d\} =$

$= \{(x^1,x^2) - (1,4);\ x^1 - x^2 + 3 = 0\} =$

$= \{(x^1 - 1, x^2 - 4);\ x^1 - x^2 + 3 = 0\}$

$\begin{cases} y^1 = x^1 - 1 \\ y^2 = x^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = y^1 + 1 \\ x^2 = y^2 + 4 \end{cases}$

$= \{(y^1,y^2)\in\mathbb{R}^2;\ y^1 + 1 - y^2 - 4 + 3 = 0\} = \{(y^1,y^2)\in\mathbb{R}^2;\ y^1 - y^2 = 0\}$

$d = a + \delta$

$\{x - b;\ x\in d\} = \ldots$

1. Fie $\lambda\in\mathbb{R}$ și $x\in d$

$\forall\ \delta \neq \emptyset$

$(0,0)\in\delta$

$(x^1, x^2)\in\delta$

$(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)\in\delta$

$(x^1 + \tilde{x}^1;\ x^2 + \tilde{x}^2)$

$\lambda(x^1, x^2) = (\lambda x^1, \lambda x^2)$

3 tipuri subsp. vect.: 1) De dim. 0 $\{(0,0)\}$; 2) De dim. 1, dreptele vect.

$\{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2;\ c_1 x^1 + c_2 x^2 = \delta\}\ (c_1, c_2) \neq (0,0)\}$

dim.	Subsp. vect.	Subsp. afine
0	$\{(0,0)\}$	$\{(a^1, a^2)\}$, $a = (a^1, a^2) \in \mathbb{R}^2$
1	dr. vect. $\delta =$ dr. vect. $= \{tu;\ t \in \mathbb{R}\}$ $\{a+u \mid a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$	dr. afine $d = \{a + tu;\ t \in \mathbb{R}\}$ $a, u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq (0,0)$
~~2~~	~~$\mathbb{R}^2$~~	~~$\mathbb{R}^2$~~
2	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$

$\begin{cases} x^1 = tu^1 + a^1 \\ x^2 = tu^2 + a^2 \end{cases} \quad \Big| \ u^1 \neq 0$

$t = \frac{1}{u^1} x^1 - \frac{a^1}{u^1}$

$x^2 = \frac{u^2}{u^1} x^1 - \frac{u^2}{u^1} a^1 + a^2$, $x^2 = m x^1 + n$

$u = (u^1, u^2)$ vect. dir. al lui δ $\begin{cases} x^1 = tu^1 \\ x^2 = tu^2 \end{cases}$

$t = \frac{x^1}{u^1}$, $x^2 = \frac{u^2}{u^1} x^1$

$x^2 = m x^1$

Obs.: u unic det. până la înm. cu un scalar nenul

Subspații vectoriale și subspații afine în $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

Caracterizare prin ecuații și/sau sisteme de ecuații

dim	Subsp. vect.	Subsp. afine
0	$\{(0,0)\}$	$\{(a^1, a^2)\}$
1	Sist. ec. param. cu param. t $\begin{cases} x^1 = tu^1 \\ x^2 = tu^2 \end{cases}$ $\Vert$ $x^1 = m x^2$ $\Vert$ $x^2 = m x^1$	$\begin{cases} x^1 = a^1 + tu^1 \\ x^2 = a^2 + tu^2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ $\Vert$ $x^1 = m x^2 + n$ $\Vert$ $x^2 = m x^1 + n$ $\Vert$ $\Vert$ $c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_0 = 0$ $(c_1, c_2) \neq (0,0)$
2	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$

Cazuri part.

$x^1 = 0$ a.î. $0x^2$

sau

$x^2 = 0$ a.î. $0x^1$

Cazuri part.

$x^1 = n$ sau $x^2 = n$

~~nr. de~~

nr. de param. ind = dim

nr. de ec. implicite ind = codim $= 2 - \text{dim}$

~~Pt. dim 3:~~

Def: $\dim_K A \overset{def}{=} \dim_K U$

$U=\{u_1,\dots,u_p\}$ bază

$u\in U$

$u=t^1u_1+\dots+t^pu_p$

$A=a+U$

$x=a+u$

$x=a+t^1u_1+\dots+t^pu_p$

Pt. ~~dim~~ $\mathbb{R}^3$:

Primele două linii din tabel, analog! (+)

2	α = plan vect. $=\{t^1u_1+t^2u_2;\ t^1,t^2\in\mathbb{R}\}$ $\{u_1,u_2\}$ sist. lin. indep. în $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$	plan afin $\{a+t^1u_1+t^2u_2,\ t^1,t^2\in\mathbb{R}\}$ $\{u_1,u_2\}$ sist. lin. indep. în $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, $a\in\mathbb{R}^3$
3	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$

dim	Subsp. vect.	Subst. afine
0	$\{(0,0,0)\}$	$\{(a^1,a^2,a^3)\}$
1	sist. ec. param.:	

$$d:\ \begin{cases} x^1=tu^1\\ x^2=tu^2\\ x^3=tu^3\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$x^2=\frac{u^2}{u^1}x^1 \qquad x^3=\frac{u^2}{u^1}x^1$$

$$x^2=m_1x^1 \qquad x^3=m_2x^1$$

$$\begin{cases} m_1x^1-x^2=0\\ m_2x^1-x^3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1^1x^1+c_2^1x^2+c_3^1x^3=0\\ c_1^2x^1+c_2^2x^2+c_3^2x^3=0\end{cases}$$

plan afin:

$\{a+t^1u_1+t^2u_2,\ t^1,t^2\in\mathbb{R}\}$

$\{u_1,u_2\}$ ~~$\in$~~ sist. lin. indep. în $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

$a\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x^1=a^1+t^1u_1^1+t^2u_2^1\\ x^2=a^2+t^1u_2^1+t^2u_2^2\end{cases}$$

$$x^3=-\frac{c_1}{c_3}x^1-\frac{c_2}{c_3}x^2-\frac{c_0}{c_3}$$

$$c_1x^1+c_2x^2+c_3x^3+c_0=0$$

$c_3\neq 0$

b) Fie $f_3 = (a, b, c)$. Impunem $\begin{cases} f_3 \perp f_1 \\ f_3 \perp f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle f_3, f_1 \rangle = 0 \\ \langle f_3, f_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ -2a-2\dots \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ rang $A = 2$, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

a, b nec. pr., $c = \lambda$ nec. sec.

$\begin{cases} 2a+2b = -\lambda \\ -2a-b = -2\lambda \end{cases} (+) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2}\lambda \\ b = -3\lambda \\ c = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f_3 = \lambda\left(\frac{5}{2}, -3, 1\right) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Obs: f_3 nu este unic (e unic până la înmulțirea cu o const. nenulă)

Aleg $\lambda = 2 \Rightarrow f_3 = (5, -6, 2)$

3 mai 2022

Curs 4

Geometrie euclidiană

$E = (V, +, \cdot; \langle , \rangle)$ sp. vect. eucl. $\dim_{\mathbb{R}} E = n \in \mathbb{N}^*$

$+ : V \times V \to V$

$\cdot : \mathbb{R} \cdot V \to V$

$V \xrightarrow[\text{abuz}]{\text{not.}} E$

$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} \text{bil.} \\ \text{sim.} \\ \text{poz. def. } \langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in V \\ \quad \text{și } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_V \end{cases}$

Def. $\varphi : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\varphi(x) = \langle x, x \rangle$ (forma pătratică)

funcția normă: $\| \ \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\|x\| = \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Proprietăți: $\varphi(x) \geq 0, \forall x \in V$

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

$\varphi(\lambda x) = \lambda^2 \varphi(x), \forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\|x\| \geq 0, \forall x \in V$ și $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

dem. temă!

$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ~~in~~, $\forall x, y \in V$ ineg. tr.

Ineg. C-B-S: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in V$

Dem. C-B-S (ind.): Date x, y, $\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\varphi(x+\lambda y)$

Funcția dist. $d: V\times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $d(x,y) = \|x-y\|, \forall x,y \in V$.
Proprietăți: 1) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in V$
2) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$, $\forall x,y,z \in V$

$u, v \in V \setminus \{0_V\}$ $\cos(\widehat{u,v}) \overset{def.}{=} \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$

$\mu(\widehat{u,v}) \overset{def.}{=} \arccos \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$

Obs.: $\mu(\widehat{u,v}) \in [0, \pi]$

Def.: Dacă $a, b, c \in V$ și $b \neq a$, $c \neq a$, $\cos(\widehat{bac}) = \cos(\widehat{cab}) = \frac{\langle b-a, c-a\rangle}{\|b-a\|\|c-a\|}$

Def.: $u, v \in V$. Spunem că $u \perp v$, dacă $\langle u,v\rangle = 0$
Obs.: În cazul $u, v \in V\setminus\{0_V\}$, $u \perp v \Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0 \Leftrightarrow \cos(\widehat{u,v}) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mu(\widehat{u,v}) = \frac{\pi}{2}$

Pt. $u \in V$, def. $u^\perp = \{x \in V \mid \langle u, x\rangle = 0\}$
temă: 1) Să se arate că $u^\perp$ este subsp. vect. în V.
2) Să se calculeze $\dim u^\perp$, știind că $\dim V = n$. Discuție.
Pt. $U \subset V$ ssv., se def. $U^\perp = \{x \in V \mid u \in U \Rightarrow \langle u, x\rangle = 0\} = \bigcap_{u\in U} u^\perp$

temă: Ce puteți spune despre $U^\perp$?
Ce puteți spune despre $(U^\perp)^\perp$, pt. U ssv. în V?
(sumă directă? dim=?)

Teoremă: 1) În orice sp. vect. euclidian există baze ortogonale.
ortonormate.
2) —"—

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ bază ortogonală, dacă $i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$ $\Rightarrow \langle u_i, u_j\rangle = 0$

O bază ortogonală s.n. ortonormată, dacă este ortogonală și, în plus,
$\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall i,j = \overline{1,n}$

dem. temă — Lemă: Dacă $\{f_1, \dots, f_n\}$ bază ortogonală în E at.
$\left\{\frac{1}{\|f_1\|} f_1, \dots, \frac{1}{\|f_n\|} f_n\right\} = \left\{\frac{1}{\|f_i\|} f_i \,\middle|\, i = \overline{1,n}\right\}$ este b. ortonormată
și la fel orientată că $\{f_1, \dots, f_n\}$.

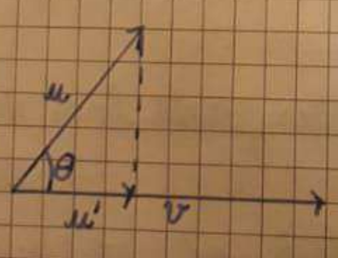
Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt:
Fie E sp. vect. $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ și $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ o bază în E.
Atunci $\exists$ o bază $\widetilde{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ 1) ortonormată și a.î.:
2) subsp. vect. $\{u_1, \dots, u_p\}$ = subsp. vect. $\{e_1, \dots, e_p\}$, $\forall p = \overline{1,n}$
3) Bazele B și $\widetilde{B}$ sunt la fel orientate

Exemple:
$E^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle , \rangle)$
struct. can. $\searrow$ modelul standard al geometriei euclidiene n-dim.
$\langle (x^1, \dots, x^n), (y^1, \dots, y^n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$

Dem.: I Construim o bază $\{f_1, \dots, f_n\}$ ortogonală cu pr. 2) și 3) (la fel orient.)
și apoi II $\widetilde{B} = \left\{\frac{1}{\|f_1\|} f_1, \dots, \frac{1}{\|f_n\|} f_n\right\}$ va satisface condițiile din th.

$f_1 = u_1$

$$\begin{cases} f_2 = u_2 + \lambda_{21} f_1 \\ \langle f_2, f_1 \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{21} = -\dfrac{\langle f_1, u_2 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \\ f_2 = u_2 - \dfrac{\langle f_1, u_2 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 = u_2 - pr_{f_1} u_2 \end{cases}$$



$u, v \neq 0_V$

$$u' = pr_v u = \|u\| \cos\theta \cdot \frac{1}{\|v\|} v = \cancel{\|u\|} \cdot \frac{\langle u, v \rangle}{\cancel{\|u\|} \cdot \|v\|} \cdot \frac{1}{\|v\|} v = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, v \rangle}$$

Verif.: $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$

$f_3 = u_3 + \lambda_{31} f_1 + \lambda_{32} f_2$

$\langle f_3, f_1 \rangle = 0$

$\langle f_3, f_2 \rangle = 0$

$$\begin{cases} \lambda_{31} = -\dfrac{\langle f_1, u_3 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \\[2ex] \lambda_{32} = -\dfrac{\langle f_2, u_3 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} \\[2ex] f_3 = u_3 - \dfrac{\langle f_1, u_3 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1 - \dfrac{\langle f_2, u_3 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} f_2 = \end{cases}$$

$$= u_3 - pr_{f_1} u_3 - pr_{f_2} u_3$$

Continuăm inductiv și obținem:

$f_1 = u_1$

Pt. $p = \overline{2,n}$, $f_p = u_p - \sum_{i=1}^{p-1} pr_{f_i} u_p = u_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\langle f_i, u_p \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i \Longleftrightarrow u_p = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\langle f_i, u_p \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i + f_p$

În final, $f_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} pr_{f_i} u_n$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\langle f_1, u_2 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} & \frac{\langle f_1, u_3 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} & \dots & \frac{\langle f_1, u_n \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} \\ 0 & 1 & \frac{\langle f_2, u_3 \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} & \dots & \frac{\langle f_2, u_n \rangle}{\langle f_2, f_2 \rangle} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \frac{\langle f_{n-1}, u_n \rangle}{\langle f_{n-1}, f_{n-1} \rangle} \end{vmatrix}$$

$\{f_{n-1}, f_n\} \underset{M^{-1}}{\overset{M}{\rightleftarrows}} B$

$\{f_1, \dots, f_n\} \to \tilde{B}$

$B \to \tilde{B}$, $\begin{vmatrix} \frac{1}{\|f_1\|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|f_2\|} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\|f_n\|} \end{vmatrix}$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

$E^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle , \rangle)$ $\quad Aut(E^n)$

$f \in End(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f^{-1} \in End(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in Aut(\mathbb{R}^n)$

$E_0^n = (\mathbb{R}^n, d_n)$

$\downarrow$ $\quad d_n = d_{\langle , \rangle n}$

sp. metric
euclidian

$Aut(E_0^n)$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f bij., $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

și $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

10 mai 2022

Geometrie euclidiană

Spațiul vectorial euclidian standard, n-dimensional, $n \in \mathbb{N}^*$

$E^n = (\underbrace{\underbrace{\mathbb{R}^n, +, \cdot}_{\text{str. can.}}}_{\text{sp. vect. real}}, \underbrace{\langle , \rangle}_{\text{pr. sc. standard}})$

$x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$

$y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$E_0^n = (\mathbb{R}^n, d = d_{\langle , \rangle} = d_n)$

$n = 2, n = 3$

$\langle x, x \rangle = \varphi(x)$ $\qquad d(x, y) = \|x - y\|$

$\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\varphi(x)} = \|x\|$

$x + y = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$

$\lambda \cdot x = (\lambda x^1, \dots, \lambda x^n)$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Fie $E = (V, +, \cdot, \langle , \rangle)$ un sp. vect. euclidian de dim $n \in \mathbb{N}^*$ și

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ o bază ortonormată $\left(\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}\right)$

temă: $B_0 = \{\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ baza can. în E^n ortonormată

$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i, \; y = \sum_{i=1}^{n} y^i e_i = \sum_{j=1}^{n} y^j e_j = \sum_{k=1}^{n} y^k e_k$

$x + y = \sum_{i=1}^{n} (x^i + y^i) e_i, \; \lambda x = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x^i) e_i$

$\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x^i e_i, \sum_{j=1}^{n} y^j e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} y^j e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^i y^j \langle e_i, e_j \rangle$

$= \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Fixând o bază ortonormată în E^n, obținem o identificare a lui E cu E^n, $B_{can.}$ (izomorfism de sp. vect. eucl.)

Def.: Dacă (M,d) este un sp. metric

$\left(d: M\times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \begin{cases} d(x,y)\geq 0 \text{ și } d(x,y)=0 \iff x=y \\ d(x,y)=d(y,x) \\ d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z) \end{cases}, \forall x,y,z\in M\right.$

și $f: M\times M$ s.n. izometrie, dacă:

1) f inj.

2) $x,y\in M \Rightarrow d(f(x),f(y)) = d(x,y)$ (*)

3) $x,y\in M \Rightarrow d(f^{-1}(x),f^{-1}(y)) = d(x,y)$ (**)

Mulțimea iz. lui (M,d) : $Aut(M,d)$

Lema 1: În contextul de mai sus, dacă f verif. (*), at. f e inj.

$\left(f(x)=f(y) \Rightarrow d(f(x),f(y))=0 \overset{(*)}{\Rightarrow} d(x,y)=0 \Rightarrow x=y\right)$

Lema 2: —"—, dacă f verif. (*) și f surj., at. e și bij. și f^{-1} verif. (**)

$\left(d(f^{-1}(x),f^{-1}(y)) \overset{*}{=} d(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) = d(x,y)\right)$

Teoremă: Considerăm $E_0^n=(\mathbb{R}^n, d)$

Dacă $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ verif. (*), at. f ~~inj~~ e și surj. și $f\in Aut(E_0^n)$.

Dem. ex. { Propoziție: Dacă $f:(M,d)\to(M,d)$ verif. (*), atunci f transformă orice figură (submulțime) din M într-o figură congruentă cu aceasta.

Teorema fundamentală a geometriei euclidiene:

Fie $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ o funcție.

$Aut(E_0^n) = Izo(E_0^n)$

Atunci $f\in Aut(E_0^n) \iff \exists F\in O(n)$ și

$O(n)=\{F\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid F\cdot F^T = I_n\}$

$\exists a\in\mathbb{R}^n$, a. î. $F=(f^i_j)_{i,j=\overline{1,n}}$, pt. orice $x=(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n$,

dacă $y=(y^1,\dots,y^n)\in\mathbb{R}^n = f(x)$, at. $\left\{y^i = \sum_{j=1}^{n} f^i_j x^j + a^i, i=\overline{1,n}\right\}$ (1)

$\Updownarrow$

$Y = FX + A$

Notând
$$X=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}=x^t \text{ și } Y=y^t=\begin{pmatrix}y^1\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}a^1\\ \vdots\\ a^n\end{pmatrix}=a^t$$

~~Interpretând $F=M(f_0)$~~

Reformulare:

$f\in Aut(E_0^n) \iff \exists f_0\in Aut(E_n)$ și $\exists a\in\mathbb{R}^n$ a.î. $f=T_a\circ f_0$.

$X\overset{f_0}{\mapsto} FX \overset{T_a}{\mapsto} FX+A$ $\qquad T_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n, T_a(x)=x+a.$

$f_0\in End(V,+,\cdot)$

$f_0\in Aut(E^n_0)$

Dem.: $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ baza can.

$\{e_1,\dots,e_n\}$ $\quad$ „$\Leftarrow$" relativ simplă (calcul direct)

„$\Rightarrow$" Fie $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ izometrie.

$\varepsilon_i=f^{-1}(e_i)$

$\omega=f^{-1}(0,0,\dots,0)$

$0_n=(0,0,\dots,0)$

$f(x)=y$

$x=f^{-1}(y)$

$d(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=d(e_i,e_j)$

I $i=j$

II $i\neq j$

$d^2(\varepsilon_i,\omega)=d^2(e_i,0_n)$

$d^2(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=d^2(e_i,e_j)$

$d^2(\varepsilon_i,x)=d^2(e_i,y)$

$d^2(\omega,x)=d^2(0_n,y)$

1) Spațiu euclidian n-dim : model al geometriei euclidiene n-dim
2) Spațiu vectorial euclidian E, E^n
3) Spațiu metric euclidian asociat unui sp. vect. eucl. E_0, E_0^n

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{D}, \mathcal{P}, \mathrm{Ord}, \mathcal{E}_0)$

Descrierea dreptelor în E^2

în E_0^2

d dreaptă

I) $d: \alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma = 0$ ec. implicită

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ coef. $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$

$((\alpha,\beta) \neq (0,0))$

II) Obs. că, dacă $x_0 = (x_0^1, x_0^2) \in d$ și $x = (x^1, x^2) \in d$, $x \neq x_0$,

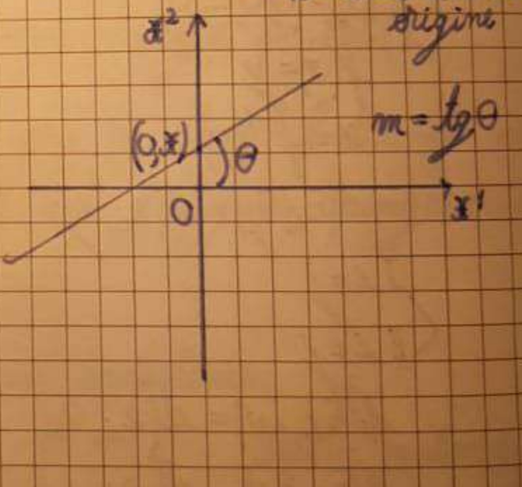
at. $\alpha(x^1 - x_0^1) + \beta(x^2 - x_0^2) = 0 \Leftrightarrow \langle N, x - x_0 \rangle = 0$

$N = (\alpha, \beta)$ $\quad N \perp d$

Știind o direcție normală (ortogonală / perpendiculară) $N = (\alpha, \beta)$ la d și un punct $x_0 \in d$, ec. $\alpha(x^1 - x_0^1) + \beta(x^2 - x_0^2) = 0$

III $\beta \neq 0$, $x^2 = -\frac{\alpha}{\beta} x^1 - \frac{\gamma}{\beta}$ de forma $x^2 = m x^1 + n$ < m = panta, n - ordonata la origine

ec. explicită



$\beta = 0$, $x^1 = -\frac{\gamma}{\alpha}$ < $\gamma = 0$, $d = Ox^2$; $\gamma \neq 0$, $d \parallel Ox^2$

IV $x^1 = t$

$x^2 = mt + n$, $t \in \mathbb{R}$ ec. param.

IV $\begin{cases} x^1 = x_0^1 + t u^1 \\ x^2 = x_0^2 + t u^2, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ ec. param.

Descrierea planelor în E^3

în E_0^3

π plan

I $\alpha x^1+\beta x^2+\gamma x^3+\mu=0$ ec. implicită

$\alpha,\beta,\gamma,\mu\in\mathbb{R}$ coef. $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$

II $N=(\alpha,\beta,\gamma)\in$, $x_0\in\pi$

$x\in\pi\setminus\{x_0\}$

$\langle N, x-x_0\rangle=0$

III $\gamma\neq0$, $x^3=-\frac{\alpha}{\gamma}x^1-\frac{\beta}{\gamma}x^2-\frac{\mu}{\gamma}$, $x^3=mx^1+m'x^2+n$

$\gamma=0,\ \beta\neq0$, $x^2=-\frac{\alpha}{\beta}x^1-\frac{\mu}{\beta}$ plan paralel cu Ox^3; $\gamma=\beta=0$, $x^1=-\frac{\mu}{\alpha}$ plan paralel sau egal cu Ox^2x^3

IV $x^1=s$

$x^2=t$

$x^3=ms+m't+n$, $s,t\in\mathbb{R}$

$x=x_0+su+tv$, $s,t\in\mathbb{R}$

$x_0,u,v\in\mathbb{R}^3$ fixați $\{u,v\}$ sistem liber

$$\begin{cases} x^1=x_0^1+su^1+tv^1\\ x^2=x_0^2+su^2+tv^2\\ x^3=x_0^3+su^3+tv^3\end{cases}$$

$s,t\in\mathbb{R}$

Descrierea dreptelor în E^3

în E_0^3

d dreaptă

I $(d):\begin{cases}\alpha x^1+\beta x^2+\gamma x^3+\mu=0\\ \alpha' x^1+\beta' x^2+\gamma' x^3+\mu'=0\end{cases}$

$(\alpha,\beta,\gamma),(\alpha',\beta',\gamma')\neq(0,0,0)$

$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\ \alpha'&\beta'&\gamma'\end{pmatrix}=2$

II $N=(\alpha,\beta,\gamma)$

$N'=(\alpha',\beta',\gamma')$

$\begin{cases}\langle N, x-x_0\rangle=0\\ \langle N', x-x_0\rangle=0\end{cases}$

III explicitare + rezolv. sist.

IV $x=x_0+tu$, $t\in\mathbb{R}$, $x_0, u\in\mathbb{R}^3$ fixată $u\neq(0,0,0)$

u – vector director

$$\begin{cases} x^1=x_0^1+tu^1\\ x^2=x_0^2+tu^2\\ x^3=x_0^3+tu^3\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

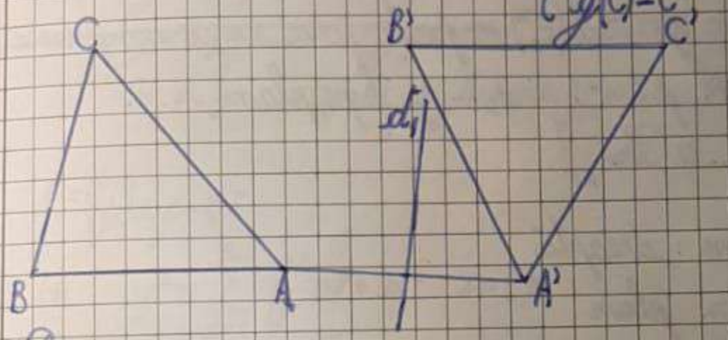
Curs 13

$E^n = (\mathbb{R}^n, +, \cdot; \langle , \rangle)$ sp. vect. eucl.

$E_0^n = (\mathbb{R}^n, d = d_{(n)})$ sp. metric eucl. asociat

Problemă: $n = 2$

Să se arate că, date 2 triunghiuri congruente $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ există (și este unică) o izometrie g, a. î. $\begin{cases} g(A) = A' \\ g(B) = B' \\ g(C) = C' \end{cases}$

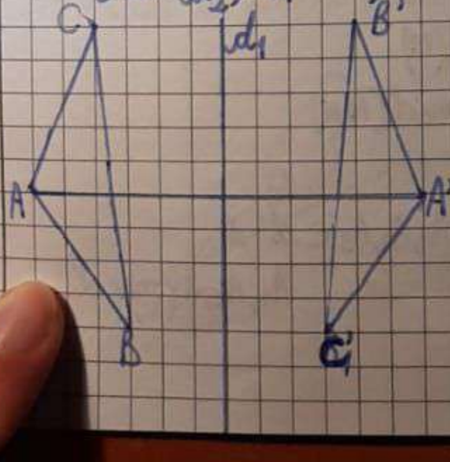


Dem.:

$$f_1 = \begin{cases} Id_{\mathbb{R}^2}, & A = A' \\ Sim_{d_1}, & A \neq A', \text{ cu } d_1 = med[AA'] \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(A) = A_1 = A' \\ f_1(B) = B_1 \\ f_1(C) = C_1 \end{cases} \qquad \underbrace{\Delta ABC \xrightarrow{f_1} \Delta A'B_1C_1}_{\equiv}$$

$$f_2 = \begin{cases} Id_{\mathbb{R}^2}, & B_1 = B' \\ Sim_{d_2}, & B_1 \neq B', \text{ unde } d_2 = med[B_1B'] \end{cases}$$



$$\Delta ABC \underset{\equiv}{\xrightarrow{f_1}} \Delta A'B_1C_1 \underset{\equiv}{\xrightarrow{f_2}} \Delta A'B'C_2 \xrightarrow{f_3} \Delta A'B'C'_2$$

$$f_3 = \begin{cases} Id_{\mathbb{R}^2}, & C_2 = C' \\ Sim_{d_3}, & C_2 \neq C', \text{ unde } d_3 = med[C_2C'] \end{cases}$$

$$g = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

(T) Teoremă: Dacă $A_1,\dots,A_{n+1}$ și $B_1,\dots,B_{n+1}$ sunt două sisteme de puncte afin indep. și congruente: $d(A_i,A_j)=d(B_i,B_j), \forall i,j=\overline{1,n+1}$ atunci $\exists\, g\in Aut(E_0^n)$, a.î. $g(A_i)=B_i, \forall i=\overline{1,n+1}$

Indicație: g se scrie ca o compunere de simetrii față de hiperplane în E^n (subsp. afine de dim. $n-1$)

(T) Teoremă: Dacă $A_1,\dots,A_{n+1}$ sunt afin indep. în E^n și $g_1, g_2 \in Aut(E_0^n)$ sunt a.î. $g_1(A_i)=g_2(A_i), \forall i=\overline{1,n+1}$, atunci $g_1=g_2$.

Se deduce Teorema:

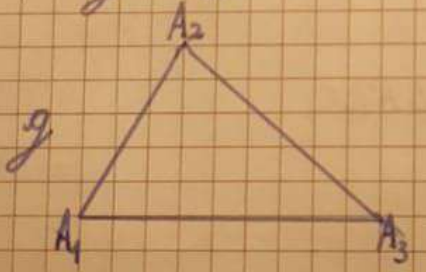
(T) Orice izometrie $g\in Aut(E_0^n)$ ~~se poate scrie ca o compunere de p simetrii~~ $\exists\, p\in\mathbb{N}$, $p\leq n+1$ și $H_1,\dots,H_p$ hiperplane, a.î.

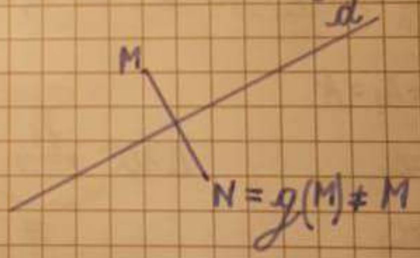
$g = Sim_{H_p} \circ \dots \circ Sim_{H_1}$

$n=2$: hiperplan: dreaptă

$n=3$: hiperplan: plan

(T) Dacă $g\in Aut(E_0^n)$ și $A_1,\dots,A_{n+1}$ afin indep. și $g(A_i)=A_i, \forall i=\overline{1,n+1}$, at. $g=Id_{\mathbb{R}^n}$.





Pp. ↯ că $\exists\, M\in\mathbb{R}^2$, a.î. $g(M)\neq M$

Fie $N=g(M)$

și $d = med[MN]$

$$\left.\begin{aligned} d(A_1,M) &= d(\overset{g(A_1)}{\overset{\|}{A_1}}, \overset{g(M)}{\overset{\|}{N}}) \\ d(A_2,M) &= d(A_2,N) \\ d(A_3,M) &= d(\underset{g(A_3)}{\underset{\|}{A_3}}, \underset{g(N)}{\underset{\|}{N}}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1,A_2,A_3 \in d \text{ ↯ } A_1,A_2,A_3 \text{ necol.}$$

II. 5. E.: $g \in Aut(E^n_0)$

$g: Y = FX + A,\ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$ $\quad (y^1, \dots, y^n) = g(x^1, \dots, x^n)$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$O(n) \ni F = M_{B_{can}}(f) \quad A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}$

$g = T_a \circ f,\ f \in Aut(E^n)$

$F \cdot F^t = Id$

$g = S_{H_p} \circ \dots \circ S_{H_1}$

$p = n+1,\ p \in \mathbb{N}$

$n = 2,\ g = S_{d_p} \circ \dots \circ S_{d_1},\ p \leq 3$

$n = 3,\ g = S_{\pi_p} \circ \dots \circ S_{\pi_1},\ p \leq 4$

$\pi_1, \dots, \pi_p$ plane

$F = (f^i_j)_{i,j = \overline{1,n}}$

(1) $\quad y^i = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} f^i_j x^j}_{f} + a^i,\ i = \overline{1,n}$

$n = 2$

$F \in O(2) \Leftrightarrow \exists\ \theta$ a. î. $F = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ sau $F = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$\theta \in [0, 2\pi)$

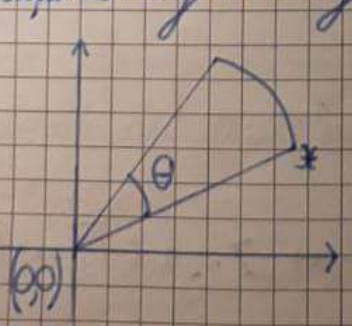
$S_{O(2)}$ (det. = 1) $\quad \| \ R_0$ $\qquad \| \ S_{\frac{\theta}{2}}$ (det. este -1)

$\alpha = \frac{\theta}{2}$

$f_{\|}: \begin{cases} y^1 = x^1 \cos\theta - x^2 \sin\theta \\ y^2 = x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta \end{cases}$

r_0 rotație de unghi θ în jurul lui $(0,0)$

$y = r_0(x) = f(x)$



$f: \begin{cases} y^1 = x^1 \cos\theta + x^2 \sin\theta \\ y^2 = x^1 \sin\theta - x^2 \cos\theta \end{cases},\ \theta = 2\alpha$

$\| \ S_d$ simetrie față de dr. vect. (ce conține $(0,0)$ care face unghiul $\alpha = \frac{\theta}{2}$ cu Ox)

Produs vectorial în spațiul vectorial orientat $(E^3, \mathcal{B}_{can})$

Fixarea unei baze în E^3 dă o orientare a acestuia: mulțimea bazelor la fel orientate cu aceasta

$\mathcal{B}_{can} \xrightarrow{M} \mathcal{B}$ det $M > 0$
la fel orientate

$\mathcal{B}_{can} = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = (0,0,0)$

$e_1 \times e_2 = e_3 = -e_2 \times e_1$

$e_2 \times e_3 = e_1 = -e_3 \times e_2$

$e_3 \times e_1 = e_2 = -e_3 \times e_1$

și prin biliniaritate:

$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = (x^1, x^2, x^3)$

$y = y^1 e_1 + y^2 e_2 + y^3 e_3 = (y^1, y^2, y^3)$

$x \times y = x^1 y^1 e_1 \times e_1 + x^1 y^2 e_1 \times e_2 + x^1 y^3 e_1 \times e_3 + x^2 y^1 e_2 \times e_1 + x^2 y^2 e_2 \times e_2 +$
$+ x^2 y^3 e_2 \times e_3 + x^3 y^1 e_3 \times e_1 +$

19 mai 2022

Geometrie analitică euclidiană

$P = (0, 1, -1)$

$Q = (1, 2, -2)$ $\quad \mathbb{R}^3$

$R = (3, 1, 2)$

---

necoliniare

Scrieți ec. param. impl. pt. planul (PQR)

Rez: a) $\overrightarrow{PQ} = \cancel{Q-P} = (1, 1, -1)$

$\overrightarrow{PR} = (3, 0, 3)$

Obs. că $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{0} \neq -\frac{1}{3}$

α, β a. î. $\in \mathbb{R}$

24 mai 2022

Clasificarea metric-euclidiană a hipercuadricelor din E_0^n

O hipercuadrică în E_0^n (E^n) este dată de un polinom de gradul al II-lea

$$g(x^1, x^2, \dots, x^n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i0} x^i + a_{00},$$

$a_{ij} = a_{ji}$, $(\forall)\, i,j = \overline{1,n}$ nu toți nuli, $a_{ij}, a_{i0}, a_{00} \in \mathbb{R}$ $i,j = \overline{1,n}$

$$H_g = \{ x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n ;\ g(x) = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Vom studia cazurile $n=2$ și $n=3$.

Referat: Conice și cuadrice (lista)

=

(*) Recapitulare: Valori și vectori proprii pt. un endomorfism

Teorema de clasificare metric-euclidiană a hipercuadricelor:

A Dată hipercuadrica (1), $\exists$ o transformare $\gamma \in Aut(E_3^n)$, a.î.:

$Q(x) \overset{def}{=} (g \circ \gamma)(z), (x = \gamma(z))$ are una din formele (canonice):

$$\text{I} \quad Q(z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (z^i)^2 + \rho \quad \text{(cu centru)}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n, \rho, p \in \mathbb{R}$

sau

$$\text{II} \quad Q(z) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (z^i)^2 + 2p z^n, \quad p \neq 0 \quad \text{(fără centru)}$$

λ_i, ρ, p - invarianți relativi

$x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$
$\sum_{i=1}^{n} x^i e_i$

$z = (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{R}^n$
$\sum_{i=1}^{n} z^i e_i$

(*) $(V, +, \cdot)$ k - sp. vect.

$f \in End_k(V, +, \cdot)$ $\quad \lambda \in k$ s.n. val. pr. pt. f, dacă $\exists x \in V \setminus \{0_V\}$ a.î.

$f(x) = \lambda x$

Dacă $\lambda \in k$ val. pr. pt. f și $v \in V$ este a.î. $f(v) = \lambda v$

v s.n. vector propriu coresp. val. pr. λ

$V_\lambda = \{ v \in V, f(v) = \lambda v \}$ - se arată că este sp. vect.

Dat $E = (V, +, \cdot, \langle, \rangle)$ sp. vect. eucl. $k \in \mathbb{R}$

Dacă $f \in End_{\mathbb{R}}(V)$ are și propr. că

$\forall x, y \in V$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ f s.n. endomorfism simetric

(P) Dacă $\mathcal{B} = \{ e_1, \dots, e_n \}$ este o bază ortonormată în E și $f \in End_{\mathbb{R}}(V, +, \cdot)$ și $F \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$, at. f este simetric $\iff$ $F = F^t$ (i.e. matricea F este simetrică)

Teoremă: Dat un endomorfism simetric $f \in End_{\mathbb{R}}(V, +, \cdot)$ există o bază ortonormată în $E = (V, +, \cdot, \langle , \rangle)$ formată din vectori proprii ai lui f.

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $f(u_i) = \lambda_i u_i$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Teoremă: Dat un endomorfism simetric f ca mai sus, toate val. pr. sunt reale, cu suma multiplicităților $= n = \dim V$.

P $(V, +, \cdot, \langle , \rangle)$

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ bază

$f \in End(V, +, \cdot)$

$F = M_B(f)$

At. λ val. pr. pt. $f \Leftrightarrow \det(F - \lambda I_n) = 0$

$Spec(f) = \{\lambda \in k;\ \lambda \text{ val. pr. pt. } f\}$

$k = \mathbb{R}$

$$F - \lambda I_n = \begin{pmatrix} f_{11} - \lambda & \dots & & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - \lambda & \dots & f_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}[\lambda] = P_F(\lambda) = \det(F - \lambda I_n)$ pol. de gr. n

$\cap$

$\mathbb{C}[\lambda]$

$V=\mathbb{R}^n$ $\quad a=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \to f=f_a$ endom. sim. a.î. $\mathcal{M}_{B_{can}}(f)=a$

$K=\mathbb{R}$

$$a \xrightarrow{\text{formă pătr.}} M^t a M$$

$$a \xrightarrow{\text{endom.}} M^{-1} a M$$

Se consideră o bază ortonormată în E formată din v. pr. ai lui

$f=f_a$

$B=\{u_1, \dots, u_n\}$ ortonormată

$\mathcal{M}$ $B_{can}=\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormată

$\cap$

$O(n)$

$\Rightarrow M^t = M^{-1}$

$Q(x)=\tilde{Q}(\tilde{x})$ $\qquad \gamma \in Aut(E_0^n)$ izometrie

$\quad\ \ \parallel$

$(Q\circ\gamma)(\tilde{x})$

$x=\gamma(\tilde{x})$

$$\tilde{Q}(\tilde{x})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\tilde{x}^i)^2+2\sum_{i=1}^{n} b_{i0}\tilde{x}^i+b_{00}$$

Mai departe, se arată că $\exists\, \gamma' \in Aut(E_0^n)$ izometrie a.î. $Q(z)=(\tilde{Q}\circ\gamma')(z)$ are ($\tilde{x}=\gamma'^{-1}(z)$)

una și numai una din formele:

I $Q(z)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(z^i)^2+\rho$

II $Q(z)=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i(z^i)^2+2pz^n,\ p\neq 0$

Invarianți metrici relativi: $\det a=\det(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} := \delta$

nu depind de aplicarea unei izometrii

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{10} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n0} \\ \vdots & & & \\ a_{01} & \dots & a_{0n} & a_{00}\end{vmatrix} =: \Delta$$

Q și $Q\circ\gamma$ au ac. inv. metric

$a_{ij}=a_{ji},\ i,j=\overline{1,n}$

$H_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q}(x^1 \dots x^n) = 0 \Leftrightarrow \mu \mathcal{Q}(x) = 0$

$\cancel{H_{\mathcal{Q}\circ\gamma}} = 0 \quad H_{\mathcal{Q}\circ\gamma} : \mathcal{Q}\circ\gamma = 0$

$\gamma \in Aut(E_0^n) \quad \mathcal{Q} \sim \mu \mathcal{Q} \quad \mu \in \mathbb{R}^*$

$H_{\mathcal{Q}} \sim H_{\mathcal{Q}\circ\gamma}, \ \mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}\circ\gamma$

$\mu \mathcal{Q} \quad \mu a_{ij} \quad \mu a_{i0}$

$\mathcal{Q}' \qquad \mu a_{00}$

$\mathcal{Q} \to \mu \mathcal{Q}$

$\delta \to \mu^n \delta$

$\Delta \to \mu^{n+1} \Delta$

$\lambda_i \to \mu \lambda_i$

$I \to \mu I$

Invarianți metrici absoluți

$\frac{\lambda_i}{\lambda_j}, \frac{\lambda_i}{I}$

$\frac{\lambda_i^n}{\delta}, \frac{\lambda_i}{\Delta}$

acolo unde numitorii sunt dif. de 0

Se arată că un pct. $C = \{C^1, \dots, C^n\}$ este centru de simetrie pt. $H_{\mathcal{Q}}$

$(x \in H_{\mathcal{Q}} \Rightarrow Sim_C\, x \in H_{\mathcal{Q}})$

dacă verif. sist. de ec.: $\to$ ec. centrului hipercuadricei

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c^j + a_{i0} = 0, \quad i = \overline{1,n}$$

Obs. hipercuadrica are centru unic $\Leftrightarrow \delta \neq 0$

Cazul conicelor în E_0^2 $(n=2)$;

Def. Hipercuadrica s.n. nedegenerată dacă $\delta \neq 0$.

I $\lambda_1 (x^1)^2 + \lambda_2 (x^2)^2 + \rho = 0$

λ_1, λ_2 – inv. ; $\delta = \lambda_1 \lambda_2$

$$a = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$

$\Delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 \rho$

$I = \lambda_1 + \lambda_2 = Tr(a)$

I.1 Nedeg. $\lambda_1 \lambda_2 \rho \neq 0$

$$\rho \neq 0 : \ -\underbrace{\frac{\lambda_1}{\rho}}_{\frac{1}{(a_1)^2}} (x^1)^2 - \underbrace{\frac{\lambda_2}{\rho}}_{\frac{1}{(a_2)^2}} (x^2)^2 = 1$$

I.1.1. $-\frac{\lambda_1}{\rho}, -\frac{\lambda_2}{\rho} > 0 \qquad \frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} + \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} = 1$ elipsă

I.1.2 $-\frac{\lambda_1}{\rho} > 0, -\frac{\lambda_2}{\rho} < 0$ $\quad \frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} - \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} = 1$ hiperbolă

$$-\frac{\lambda_1}{\rho} = \frac{1}{(a_1)^2} \qquad -\frac{\lambda_2}{\rho} = -\frac{1}{(a_1)^2}$$

I.1.3. $<0, >0$ analog

I.1.4 $-\frac{\lambda_1}{\rho} < 0, -\frac{\lambda_2}{\rho} < 0$ $\quad -\frac{(x^1)^2}{(a_1)^2} - \frac{(x^2)^2}{(a_2)^2} = 1$ elipsă imaginară

I.2 Degenerată:

$\cancel{\lambda_1, \lambda_2, \rho}$ $\lambda_1 \lambda_2 \rho = 0$

λ_1, λ_2 nu sunt ambele nule

Pp. $\lambda_1 \neq 0$

$\lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \rho = 0$

$\lambda_1 (x^1)^2 + \lambda_2 (x^2)^2 = 0$ $\quad \underline{\underline{(0,0)}}$

$\lambda_1 \lambda_2 > 0$

Dacă $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, $(\alpha x^1 + \beta x^2)(\alpha x^1 - \beta x^2) = 0$

reuniune de drepte concurente în $(0,0)$

$\lambda_1 (x^1)^2 = 0$

2 dr. confundate

$x^1 = 0 \Rightarrow$ axa $0x^2$

$\lambda_2 = 0, \rho \neq 0$

$\lambda_1 (x^1)^2 = -\rho$

$(x^1)^2 = \underbrace{-\frac{\rho}{\lambda_1}}_{<0}$ imaginară

$-\frac{\rho}{\lambda_1} > 0$

$x^1 = \pm \sqrt{\frac{-\rho}{\lambda_1}}$

2 drepte paralele

II $\lambda_1 (x^1)^2 + 2p x^2 = 0$

parabole