Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

seminarul 5

2021-2022

Transformări liniare. Endomorfisme diagonalizabile.

Exemplu

Să se scrie matricea transformării T în bazele canonice:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ T(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix}$$

Exemplu

Să se scrie matricea transformării T în bazele canonice:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ T(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b + c \\ a + b + c & 2a \end{pmatrix}$$

Soluție:

Baza canonică pentru $\mathbb{R}^3$ este
$B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$. Baza canonică pentru $\mathcal{M}_2\mathbb{R}$ este

$$B' = \{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

$\square$

Transformări liniare:

Calculăm $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'}$ și matricea transformării T în bazele canonice este

$$T_{B,B'} = [[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_2)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_3)]_{B'}].$$

Calculăm $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'}$ și matricea transformării T în bazele canonice este

$$T_{B,B'} = [[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} \ \ [T(\mathbf{e}_2)]_{B'} \ \ [T(\mathbf{e}_3)]_{B'}].$$

Avem $T(\mathbf{e}_1) = T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, deci

Transformări liniare:

Calculăm $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'}$ și matricea transformării T în bazele canonice este

$$T_{B,B'} = [[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_2)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_3)]_{B'}].$$

Avem $T(\mathbf{e}_1) = T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, deci

$T(\mathbf{e}_1) = E_{11} + E_{21} + 2E_{22}$. Rezultă că $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} =$

Transformări liniare:

Calculăm $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'}$ și matricea transformării T în bazele canonice este

$$T_{B,B'} = [[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_2)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_3)]_{B'}].$$

Avem $T(\mathbf{e}_1) = T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, deci

$T(\mathbf{e}_1) = E_{11} + E_{21} + 2E_{22}$. Rezultă că $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Avem $T(\mathbf{e}_2) = T(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, deci

Transformări liniare:

Avem $T(\mathbf{e}_2) = T(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, deci $T(\mathbf{e}_2) = E_{12} + E_{21}$.

Rezultă că $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'} =$

Avem $T(\mathbf{e}_2) = T(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, deci $T(\mathbf{e}_2) = E_{12} + E_{21}$.

Rezultă că $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Avem $T(\mathbf{e}_3) = T(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, deci

Avem $T(\mathbf{e}_3) = T(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, deci $T(\mathbf{e}_3) = E_{12} + E_{21}$.

Rezultă că $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'} =$

Avem $T(\mathbf{e}_3) = T(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, deci $T(\mathbf{e}_3) = E_{12} + E_{21}$.

Rezultă că $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Transformări liniare:

Matricea transformării T în bazele canonice este

$$T_{B,B'} = [[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_2)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_3)]_{B'}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplu

Să se scrie matricea transformării T în bazele

$$B = \{\mathbf{e}_1 = (1,1,3), \mathbf{e}_2 = (1,0,1), \mathbf{e}_3 = (1,1,1)\}$$

și baza canonică:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix}$$

Exemplu

Să se scrie matricea transformării T în bazele

$$B = \{\mathbf{e}_1 = (1,1,3), \mathbf{e}_2 = (1,0,1), \mathbf{e}_3 = (1,1,1)\}$$

și baza canonică:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b+c \\ a+b+c & 2a \end{pmatrix}$$

Baza canonică pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este

$$B' = \{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

Transformări liniare:

Calculăm $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'}$ și matricea transformaării T în bazele B, B' este

$$T_{B,B'} = [[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_2)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_3)]_{B'}].$$

Calculăm $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'}$ și matricea transformaării T în bazele B, B' este

$$T_{B,B'} = [[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_2)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_3)]_{B'}].$$

Avem $T(\mathbf{e}_1) = T(1,1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, deci

Calculăm $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'}$ și matricea transformaării T în bazele B, B' este

$$T_{B,B'} = [[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_2)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_3)]_{B'}].$$

Avem $T(\mathbf{e}_1) = T(1,1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, deci

$T(\mathbf{e}_1) = E_{11} + 4E_{12} + 5E_{21} + 2E_{22}$. Rezultă că $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} =$

Transformări liniare:

Calculăm $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'}$, $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'}$ și matricea transformaării T în bazele B, B' este

$$T_{B,B'} = [[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_2)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_3)]_{B'}].$$

Avem $T(\mathbf{e}_1) = T(1,1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, deci

$T(\mathbf{e}_1) = E_{11} + 4E_{12} + 5E_{21} + 2E_{22}$. Rezultă că $[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Transformări liniare:

Avem $T(\mathbf{e}_2) = T(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, deci

Avem $T(\mathbf{e}_2) = T(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, deci

$T(\mathbf{e}_2) = E_{11} + E_{12} + E_{21} + 2E_{22}$. Rezultă că $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'} =$

Avem $T(\mathbf{e}_2) = T(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, deci

$T(\mathbf{e}_2) = E_{11} + E_{12} + E_{21} + 2E_{22}$. Rezultă că $[T(\mathbf{e}_2)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Transformări liniare:

Avem $T(\mathbf{e}_3) = T(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, deci

Avem $T(\mathbf{e}_3) = T(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, deci

$T(\mathbf{e}_3) = E_{11} + 2E_{12} + 3E_{21} + 2E_{22}$. Rezultă că $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'} =$

Transformări liniare:

Avem $T(\mathbf{e}_3) = T(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, deci

$T(\mathbf{e}_3) = E_{11} + 2E_{12} + 3E_{21} + 2E_{22}$. Rezultă că $[T(\mathbf{e}_3)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Transformări liniare:

Matricea transformării T în bazele B, B' este

$$T_{B,B'} = [[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_2)]_{B'} \;\; [T(\mathbf{e}_3)]_{B'}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemplu

Să se determine matricea transformării $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z, t) = (x - 2y + 3z, 2x - y, x - 3z + 4t)$ în bazele canonice, respectiv în bazele B, B', unde B este baza canonică din $\mathbb{R}^4$ și $B' = \{\mathbf{f}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{f}_2 = (1, 0, 0), \mathbf{f}_3 = (1, 0, 1)\}$.

Transformări liniare

Pentru matricea transformării T în bazele canonice avem:

$$B = \{\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1,0), \mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)\}$$

baza canonică din $\mathbb{R}^4$ și

$$B' = \{\mathbf{f}_1 = (1,0,0), \mathbf{f}_2 = (0,1,0), \mathbf{f}_3 = (0,0,1)\}$$

baza canonică din $\mathbb{R}^3$.
Putem să procedăm astfel: $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ este transformare liniară dacă există matricea $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ astfel încât $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ și A este matricea transformării în bazele canonice. Avem $T(x,y,z,t) = (x-2y+3z, 2x-y, x-3z+4t)$, deci

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

În concluzie:

$$T_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pentru matricea transformării $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,
$T(x, y, z, t) = (x - 2y + 3z, 2x - y, x - 3z + 4t)$ în bazele B, B',
unde B este baza canonică din $\mathbb{R}^4$ și
$B' = \{\mathbf{f}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{f}_2 = (1, 0, 0), \mathbf{f}_3 = (1, 0, 1)\}$ procedăm asemănător:

Avem:

$$T(\mathbf{e}_1) = T(1,0,0,0) = (1,2,1) = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3 =$$

$$= \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,0,1).$$

Avem:

$$T(\mathbf{e}_1) = T(1,0,0,0) = (1,2,1) = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3 =$$

$$= \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,0,1).$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

Atunci:

$$[\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3|\,T(\mathbf{e}_1)] = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \overset{L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

Atunci:

$$[\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3 | T(\mathbf{e}_1)] = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \overset{L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \vdots & -1 \end{pmatrix}$$

Soluția sistemului este $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -1$, deci

$$[T(\mathbf{e}_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Avem:

$$T(\mathbf{e}_2) = T(0,1,0,0) = (-2,-1,0) = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3 =$$

$$= \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,0,1).$$

Avem:

$$T(\mathbf{e}_2) = T(0,1,0,0) = (-2,-1,0) = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3 =$$

$$= \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,0,1).$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -2 \\ \alpha_1 = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Atunci:

$$[\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3 | T(\mathbf{e}_2)] = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \overset{L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Atunci:

$$[\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3 | T(\mathbf{e}_2)] = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \overset{L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & -2 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Soluția sistemului este $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 1$, deci

$$[T(\mathbf{e}_2)]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avem:

$$T(\mathbf{e}_3) = T(0,0,1,0) = (3,0,-3) = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \alpha_3 \mathbf{f}_3 =$$

$$= \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,0,1).$$

Avem:

$$T(\mathbf{e}_3) = T(0,0,1,0) = (3,0,-3) = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3 =$$

$$= \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,0,1).$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = -3 \end{cases}$$

Atunci:

$$[\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3 | T(\mathbf{e}_3)] = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \overset{L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \vdots & -3 \end{pmatrix}$$

Atunci:

$$[\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3 |\, T(\mathbf{e}_3)] = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \overset{L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & 3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \vdots & -3 \end{pmatrix}$$

Soluția sistemului este $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 6, \alpha_3 = -3$, deci

$$[T(\mathbf{e}_3)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Transformări liniare

Avem:

$$T(\mathbf{e}_4) = T(0,0,0,1) = (0,0,4) = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3 =$$

$$= \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,0,1).$$

Avem:

$$T(\mathbf{e}_4) = T(0,0,0,1) = (0,0,4) = \alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2 + \alpha_3\mathbf{f}_3 =$$

$$= \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,0,1).$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 4 \end{cases}$$

Atunci:

$$[\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3 |\, T(\mathbf{e}_4)] = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \overset{L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & \vdots & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

Atunci:

$$[\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3 |\, T(\mathbf{e}_4)] = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right)$$

Soluția sistemului este $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -4, \alpha_3 = 4$, deci

$$[T(\mathbf{e}_4)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Transformări liniare

În concluzie:

$$T_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exemplu

Să se determine transformarea liniară $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$$T(\mathbf{e}_1) = (2,1),\ \ T(\mathbf{e}_2) = (0,1),\ \ T(\mathbf{e}_3) = (1,1),$$

unde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

Soluție:

Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector din $\mathbb{R}^3$. Vrem să determinăm $T(\mathbf{x})$.

Transformări liniare

Soluție:

Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector din $\mathbb{R}^3$. Vrem să determinăm $T(\mathbf{x})$. În baza canonică B din $\mathbb{R}^3$, vectorul $\mathbf{x}$ are coordonatele x_1, x_2, x_3 deoarece

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

Soluție:

Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector din $\mathbb{R}^3$. Vrem să determinăm $T(\mathbf{x})$. În baza canonică B din $\mathbb{R}^3$, vectorul $\mathbf{x}$ are coordonatele x_1, x_2, x_3 deoarece

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

Atunci:

$$T(\mathbf{x}) =$$

Soluție:

Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector din $\mathbb{R}^3$. Vrem să determinăm $T(\mathbf{x})$.
În baza canonică B din $\mathbb{R}^3$, vectorul $\mathbf{x}$ are coordonatele x_1, x_2, x_3 deoarece

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

Atunci:

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) =$$

Soluție:

Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector din $\mathbb{R}^3$. Vrem să determinăm $T(\mathbf{x})$. În baza canonică B din $\mathbb{R}^3$, vectorul $\mathbf{x}$ are coordonatele x_1, x_2, x_3 deoarece

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

Atunci:

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + x_3 T(\mathbf{e}_3) =$$

Soluție:

Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector din $\mathbb{R}^3$. Vrem să determinăm $T(\mathbf{x})$. În baza canonică B din $\mathbb{R}^3$, vectorul $\mathbf{x}$ are coordonatele x_1, x_2, x_3 deoarece

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

Atunci:

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + x_3 T(\mathbf{e}_3) =$$

$$= x_1(2, 1) + x_2(0, 1) + x_3(1, 1)$$

Soluție:

Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector din $\mathbb{R}^3$. Vrem să determinăm $T(\mathbf{x})$. În baza canonică B din $\mathbb{R}^3$, vectorul $\mathbf{x}$ are coordonatele x_1, x_2, x_3 deoarece

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

Atunci:

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) + x_3 T(\mathbf{e}_3) =$$

$$= x_1(2, 1) + x_2(0, 1) + x_3(1, 1)$$

Obținem astfel

$$T(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3).$$

Metoda 2: Știm

$$T(\mathbf{e}_1) = (2,1),\ \ T(\mathbf{e}_2) = (0,1),\ \ T(\mathbf{e}_3) = (1,1),$$

unde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$.

Metoda 2: Știm

$$T(\mathbf{e}_1) = (2,1),\ \ T(\mathbf{e}_2) = (0,1),\ \ T(\mathbf{e}_3) = (1,1),$$

unde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Scriem matricea $T_{B,B'}$, unde B este baza canonică din $\mathbb{R}^3$ și B' este baza canonică din $\mathbb{R}^2$,

$$B' = \{\mathbf{f}_1 = (1,0), \mathbf{f}_2 = (0,1)\}.$$

Avem

$$T(\mathbf{e}_1) = (2,1) =$$

Metoda 2: Știm

$$T(\mathbf{e}_1) = (2,1), \;\; T(\mathbf{e}_2) = (0,1), \;\; T(\mathbf{e}_3) = (1,1),$$

unde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Scriem matricea $T_{B,B'}$, unde B este baza canonică din $\mathbb{R}^3$ și B' este baza canonică din $\mathbb{R}^2$,

$$B' = \{\mathbf{f}_1 = (1,0), \mathbf{f}_2 = (0,1)\}.$$

Avem

$$T(\mathbf{e}_1) = (2,1) = 2\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2,$$

Metoda 2: Știm

$$T(\mathbf{e}_1) = (2,1),\ \ T(\mathbf{e}_2) = (0,1),\ \ T(\mathbf{e}_3) = (1,1),$$

unde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Scriem matricea $T_{B,B'}$, unde B este baza canonică din $\mathbb{R}^3$ și B' este baza canonică din $\mathbb{R}^2$,

$$B' = \{\mathbf{f}_1 = (1,0), \mathbf{f}_2 = (0,1)\}.$$

Avem

$T(\mathbf{e}_1) = (2,1) = 2\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, $T(\mathbf{e}_2) = (0,1) = \mathbf{f}_2$,

Metoda 2: Știm

$$T(\mathbf{e}_1) = (2,1), \;\; T(\mathbf{e}_2) = (0,1), \;\; T(\mathbf{e}_3) = (1,1),$$

unde $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Scriem matricea $T_{B,B'}$, unde B este baza canonică din $\mathbb{R}^3$ și B' este baza canonică din $\mathbb{R}^2$,

$$B' = \{\mathbf{f}_1 = (1,0), \mathbf{f}_2 = (0,1)\}.$$

Avem

$$T(\mathbf{e}_1) = (2,1) = 2\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \; T(\mathbf{e}_2) = (0,1) = \mathbf{f}_2, \;\; T(\mathbf{e}_3) = (1,1) = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$$

Transformări liniare

Obținem că

$$T_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obținem că

$$T_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Deoarece

$$T(\mathbf{x}) = T_{B,B'}[\mathbf{x}]_B,$$

rezultă că

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T_{B,B'}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Obținem că

$$T_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Deoarece

$$T(\mathbf{x}) = T_{B,B'}[\mathbf{x}]_B,$$

rezultă că

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T_{B,B'}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Înlocuim și avem:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Exemplu

Să se determine transformarea liniară $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definită prin

$$T(1+x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ T(x+x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ T(1+x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluție:

Demonstrăm, mai întâi, că $S = \{\mathfrak{p}_1 = 1 + x, \mathfrak{p}_2 = x + x^2, \mathfrak{p}_3 = 1 + x^2\}$ formează o bază în $\mathbb{R}_2[x]$.

Soluție:

Demonstrăm, mai întâi, că $S = \{\mathfrak{p}_1 = 1 + x, \mathfrak{p}_2 = x + x^2, \mathfrak{p}_3 = 1 + x^2\}$ formează o bază în $\mathbb{R}_2[x]$.

Pentru aceasta, cum $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ și $|S| = 3$, atunci S este bază dacă și numai dacă S este sistem liniar independent.

Soluție:

Demonstrăm, mai întâi, că $S = \{\mathfrak{p}_1 = 1 + x, \mathfrak{p}_2 = x + x^2, \mathfrak{p}_3 = 1 + x^2\}$ formează o bază în $\mathbb{R}_2[x]$.

Pentru aceasta, cum $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ și $|S| = 3$, atunci S este bază dacă și numai dacă S este sistem liniar independent.

Verificăm dacă S este sistem liniar independent, deci verificăm dacă unica soluție a ecuației

$$\alpha_1\mathfrak{p}_1 + \alpha_2\mathfrak{p}_2 + \alpha_3\mathfrak{p}_3 = \mathbf{0}$$

este $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. $\square$

Din

$$\alpha_1\mathfrak{p}_1 + \alpha_2\mathfrak{p}_2 + \alpha_3\mathfrak{p}_3 = \mathbf{0}$$

obținem

$$\alpha_1(1+x) + \alpha_2(x+x^2) + \alpha_3(1+x^2) = 0 + 0x + 0x^2,$$

Din

$$\alpha_1\mathfrak{p}_1 + \alpha_2\mathfrak{p}_2 + \alpha_3\mathfrak{p}_3 = \mathbf{0}$$

obținem

$$\alpha_1(1+x) + \alpha_2(x+x^2) + \alpha_3(1+x^2) = 0 + 0x + 0x^2,$$

echivalent cu sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Obținem soluția unică $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$, deci S este sistem liniar independent, echivalent cu S este bază pentru $\mathbb{R}_2[x]$.

Vrem să determinăm $T(\mathfrak{p})$, unde $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x]$. Fie polinomul $\mathfrak{p} = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}^2[x]$ ales arbitrar.

Transformări liniare

Vrem să determinăm $T(\mathfrak{p})$, unde $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x]$. Fie polinomul $\mathfrak{p} = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}^2[x]$ ales arbitrar. Determinăm coordonatele vectorului $\mathfrak{p}$ în baza S:

Transformări liniare

Vrem să determinăm $T(\mathfrak{p})$, unde $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x]$. Fie polinomul $\mathfrak{p} = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}^2[x]$ ales arbitrar. Determinăm coordonatele vectorului $\mathfrak{p}$ în baza S: trebuie să găsim $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathfrak{p} = \beta_1\mathfrak{p}_1 + \beta_2\mathfrak{p}_2 + \beta_3\mathfrak{p}_3,$$

deci

$$a + bx + cx^2 = \beta_1(1 + x) + \beta_2(x + x^2) + \beta_3(1 + x^2)$$

Vrem să determinăm $T(\mathfrak{p})$, unde $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x]$. Fie polinomul $\mathfrak{p} = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}^2[x]$ ales arbitrar. Determinăm coordonatele vectorului $\mathfrak{p}$ în baza S: trebuie să găsim $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathfrak{p} = \beta_1\mathfrak{p}_1 + \beta_2\mathfrak{p}_2 + \beta_3\mathfrak{p}_3,$$

deci

$$a + bx + cx^2 = \beta_1(1 + x) + \beta_2(x + x^2) + \beta_3(1 + x^2)$$

Avem sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = a \\ \beta_1 + \beta_2 = b \\ \beta_2 + \beta_3 = c \end{cases}$$

Soluția este

Vrem să determinăm $T(\mathfrak{p})$, unde $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x]$. Fie polinomul $\mathfrak{p} = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}^2[x]$ ales arbitrar. Determinăm coordonatele vectorului $\mathfrak{p}$ în baza S: trebuie să găsim $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathfrak{p} = \beta_1\mathfrak{p}_1 + \beta_2\mathfrak{p}_2 + \beta_3\mathfrak{p}_3,$$

deci

$$a + bx + cx^2 = \beta_1(1 + x) + \beta_2(x + x^2) + \beta_3(1 + x^2)$$

Avem sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 = a \\ \beta_1 + \beta_2 = b \\ \beta_2 + \beta_3 = c \end{cases}$$

Soluția este

$$\beta_1 = \frac{a + b - c}{2}, \beta_2 = \frac{b - a + c}{2}, \beta_3 = \frac{c + a - b}{2}.$$

Deci

$$\mathfrak{p} = \beta_1\mathfrak{p}_1 + \beta_2\mathfrak{p}_2 + \beta_3\mathfrak{p}_3 =$$

$$= \frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{b-a+c}{2}(x+x^2) + \frac{c+a-b}{2}(1+x^2).$$

Atunci

$$T(\mathfrak{p}) =$$

Deci

$$\mathfrak{p} = \beta_1\mathfrak{p}_1 + \beta_2\mathfrak{p}_2 + \beta_3\mathfrak{p}_3 =$$

$$= \frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{b-a+c}{2}(x+x^2) + \frac{c+a-b}{2}(1+x^2).$$

Atunci

$$T(\mathfrak{p}) = T(a+bx+cx^2) =$$

$$=$$

Transformări liniare

Deci

$$\mathfrak{p} = \beta_1\mathfrak{p}_1 + \beta_2\mathfrak{p}_2 + \beta_3\mathfrak{p}_3 =$$

$$= \frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{b-a+c}{2}(x+x^2) + \frac{c+a-b}{2}(1+x^2).$$

Atunci

$$T(\mathfrak{p}) = T(a+bx+cx^2) =$$

$$= T(\frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{b-a+c}{2}(x+x^2) + \frac{c+a-b}{2}(1+x^2)) =$$

Deci

$$\mathfrak{p} = \beta_1\mathfrak{p}_1 + \beta_2\mathfrak{p}_2 + \beta_3\mathfrak{p}_3 =$$

$$= \frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{b-a+c}{2}(x+x^2) + \frac{c+a-b}{2}(1+x^2).$$

Atunci

$$T(\mathfrak{p}) = T(a+bx+cx^2) =$$

$$= T\left(\frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{b-a+c}{2}(x+x^2) + \frac{c+a-b}{2}(1+x^2)\right) =$$

$$= \frac{a+b-c}{2}T(1+x) + \frac{b-a+c}{2}T(x+x^2) + \frac{c+a-b}{2}T(1+x^2) =$$

Deci

$$\mathfrak{p} = \beta_1 \mathfrak{p}_1 + \beta_2 \mathfrak{p}_2 + \beta_3 \mathfrak{p}_3 =$$

$$= \frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{b-a+c}{2}(x+x^2) + \frac{c+a-b}{2}(1+x^2).$$

Atunci

$$T(\mathfrak{p}) = T(a+bx+cx^2) =$$

$$= T(\frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{b-a+c}{2}(x+x^2) + \frac{c+a-b}{2}(1+x^2)) =$$

$$= \frac{a+b-c}{2} T(1+x) + \frac{b-a+c}{2} T(x+x^2) + \frac{c+a-b}{2} T(1+x^2) =$$

$$= \frac{a+b-c}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{b-a+c}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{c+a-b}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Deci

$$T(a+bx+cx^2) = \frac{a+b-c}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} +$$

$$+\frac{b-a+c}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} + \frac{c+a-b}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}a & b\\ c+a & -c\end{pmatrix}$$

Exemplu

Să se verifice dacă transformarea

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - z, y - 3z)$$

este inversabilă și să se determine T^{-1}, dacă există.

Soluție:

Metoda 1: Avem

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 2x + y - z \\ y - 3z \end{pmatrix} =$$

Soluție:

Metoda 1: Avem

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 2x + y - z \\ y - 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

este matricea transformării în bazele canonice. $\square$

Atunci matricea transformării T^{-1} în bazele canonice, dacă există, este A^{-1}.

Atunci matricea transformării T^{-1} în bazele canonice, dacă există, este A^{-1}. Verificăm dacă A este inversabilă și determinăm inversa, dacă există:

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Atunci matricea transformării T^{-1} în bazele canonice, dacă există, este A^{-1}. Verificăm dacă A este inversabilă și determinăm inversa, dacă există:

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 - 2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Transformări liniare

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{5L_1+2L_2 \\ 5L_3-L_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{5} & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-12}} & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Transformări liniare

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{5L_1+2L_2 \\ 5L_3-L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{5} & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-12} & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{12L_1-L_3 \\ 4L_2-L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{60} & 0 & 0 & 10 & 25 & -5 \\ 0 & \boxed{20} & 0 & -10 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{-12} & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{60} & 0 & 0 & 10 & 25 & -5 \\ 0 & \boxed{20} & 0 & -10 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{-12} & 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 2/12 & 5/12 & -1/12 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2/12 & 1/12 & -5/12 \end{array}\right)$$

Deci

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/12 & 5/12 & -1/12 \\ -1/2 & 1/4 & -1/4 \\ -2/12 & 1/12 & -5/12 \end{pmatrix}$$

Obținem că $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} =$$

Obținem că $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2/12 & 5/12 & -1/12 \\ -1/2 & 1/4 & -1/4 \\ -2/12 & 1/12 & -5/12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},.$$

Deci $T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{2x+5y-z}{12}, \frac{-2x+y-z}{4}, \frac{-2x+y-5z}{12}\right)$.

Metoda 2:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - z, y - 3z)$$

Verificăm dacă T este transformare liniară injectivă, adică verificăm dacă $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Metoda 2:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - z, y - 3z)$$

Verificăm dacă T este transformare liniară injectivă, adică verificăm dacă $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Avem

$$\ker T = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$=$$

Metoda 2:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - z, y - 3z)$$

Verificăm dacă T este transformare liniară injectivă, adică verificăm dacă $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Avem

$$\ker T = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) : (x - 2y + z, 2x + y - z, y - 3z) = (0, 0, 0)\}.$$

Metoda 2:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - z, y - 3z)$$

Verificăm dacă T este transformare liniară injectivă, adică verificăm dacă $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Avem

$$\ker T = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$= \{(x, y, z) : (x - 2y + z, 2x + y - z, y - 3z) = (0, 0, 0)\}.$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

Avem:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Transformări liniare

Avem:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Avem:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{5L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-12} \end{pmatrix}$$

Sistemul este compatibil determinat, deci admite soluția unică $x = y = z = 0$.

Avem:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{5L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-12} \end{pmatrix}$$

Sistemul este compatibil determinat, deci admite soluția unică $x = y = z = 0$. Prin urmare, $\ker T = \{(0,0,0)\} = \{\mathbf{0}\}$, deci T este injectivă.

Avem:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{5L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-12}} \end{pmatrix}$$

Sistemul este compatibil determinat, deci admite soluția unică $x = y = z = 0$. Prin urmare, $\ker T = \{(0,0,0)\} = \{\mathbf{0}\}$, deci T este injectivă. Cum T este endomorfism injectiv, atunci este și surjectiv, deci este bijectiv.

Am obținut că există $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Din $T(x, y, z) = (x', y', z')$, trebuie să determinăm $T^{-1}(x', y', z')$.

Transformări liniare

Am obținut că există $T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Din $T(x,y,z) = (x', y', z')$, trebuie să determinăm $T^{-1}(x', y', z')$.
Avem $T(x,y,z) = (x', y', z')$, echivalent cu

$$(x - 2y + z, 2x + y - z, y - 3z) = (x', y', z').$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x - 2y + z = x' \\ 2x + y - z = y' \\ y - 3z = z' \end{cases}$$

Transformări liniare

$$\left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & -2 & 1 & \vdots & x' \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & y' \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & z' \end{array}\right)$$

Transformări liniare

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & \vdots & x' \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & y' \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & z' \end{pmatrix} \overset{L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & \vdots & x' \\ 0 & \boxed{5} & -3 & \vdots & y' - 2x' \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & z' \end{pmatrix}$$

Transformări liniare

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & \vdots & x' \\ 2 & 1 & -1 & \vdots & y' \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & z' \end{pmatrix} \underset{\sim}{L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & \vdots & x' \\ 0 & \boxed{5} & -3 & \vdots & y' - 2x' \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & z' \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{5L_3 - L_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & \vdots & x' \\ 0 & \boxed{5} & -3 & \vdots & y' - 2x' \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-12}} & \vdots & 5z' - y' + 2x' \end{pmatrix}$$

Sistemul echivalent este:

$$\begin{cases} x - 2y + z = x' \\ 5y - 3z = y' - 2x' \\ -12z = 5z' - y' + 2x' \end{cases}$$

Soluția sistemului este

Sistemul echivalent este:

$$\begin{cases} x - 2y + z = x' \\ 5y - 3z = y' - 2x' \\ -12z = 5z' - y' + 2x' \end{cases}$$

Soluția sistemului este

$$x = \frac{2x' + 5y' - z'}{12}, \; y = \frac{-2x' + y' - z'}{4}, \; z = \frac{-2x' + y' - 5z'}{12}.$$

Transformări liniare

Sistemul echivalent este:

$$\begin{cases} x - 2y + z = x' \\ 5y - 3z = y' - 2x' \\ -12z = 5z' - y' + 2x' \end{cases}$$

Soluția sistemului este

$$x = \frac{2x' + 5y' - z'}{12}, \; y = \frac{-2x' + y' - z'}{4}, \; z = \frac{-2x' + y' - 5z'}{12}.$$

Obținem

$$T^{-1}(x', y', z') = \left(\frac{2x' + 5y' - z'}{12}, \frac{-2x' + y' - z'}{4}, \frac{-2x' + y' - 5z'}{12} \right).$$

Exemplu

Să se determine vectorii și valorile proprii ale endomorfismului

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y,z) = (x-3y+3z, 3x-5y+3z, 6x-6y+4z).$$

Soluție:

Scriem matricea transformării T în bazele canonice:

Soluție:

Scriem matricea transformării T în bazele canonice:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3y+3z\\3x-5y+3z\\6x-6y+4z\end{pmatrix}=$$

Soluție:

Scriem matricea transformării T în bazele canonice:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y + 3z \\ 3x - 5y + 3z \\ 6x - 6y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

este matricea transformării în bazele canonice. $\square$

Calculăm polinomul caracteristic al matricei A:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

Vectori și valori proprii

Avem:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

Vectori și valori proprii

Avem:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda)-54-54+18(5+\lambda)+18(1-\lambda)+9(4-\lambda) =$$

Avem:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 54 - 54 + 18(5+\lambda) + 18(1-\lambda) + 9(4-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 108 + 90 + 18\lambda + 18 - 18\lambda + 9(4-\lambda) =$$

Avem:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda)-54-54+18(5+\lambda)+18(1-\lambda)+9(4-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda)-108+90+18\lambda+18-18\lambda+9(4-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda)+9(4-\lambda) =$$

Avem:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda)-54-54+18(5+\lambda)+18(1-\lambda)+9(4-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 108 + 90 + 18\lambda + 18 - 18\lambda + 9(4-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) + 9(4-\lambda) =$$

$$= [(1-\lambda)(-5-\lambda) + 9](4-\lambda) =$$

Avem:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda)-54-54+18(5+\lambda)+18(1-\lambda)+9(4-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda)-108+90+18\lambda+18-18\lambda+9(4-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda)+9(4-\lambda) =$$

$$= [(1-\lambda)(-5-\lambda)+9](4-\lambda) = (\lambda^2+4\lambda+4)(4-\lambda) =$$

Avem:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 54 - 54 + 18(5+\lambda) + 18(1-\lambda) + 9(4-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 108 + 90 + 18\lambda + 18 - 18\lambda + 9(4-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) + 9(4-\lambda) =$$

$$= [(1-\lambda)(-5-\lambda) + 9](4-\lambda) = (\lambda^2 + 4\lambda + 4)(4-\lambda) =$$

$$= (\lambda+2)^2(4-\lambda)$$

Am obținut

$$P_A(\lambda) = (\lambda + 2)^2(4 - \lambda),$$

deci valorile proprii sunt:

$$\lambda_1 = -2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$$

$$\lambda_2 = 4,\ \mu_a(\lambda_2) = 1.$$

Vectori și valori proprii

Reamintim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Reamintim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_1 = -2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reamintim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_1 = -2$, $\mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul este $x - y + z = 0$, iar soluția este

Reamintim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_1 = -2$, $\mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul este $x - y + z = 0$, iar soluția este $(y - z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$.

Reamintim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_1 = -2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul este $x - y + z = 0$, iar soluția este $(y - z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (1,1,0), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1)\}).$$

Vectori proprii corespunzători lui λ_1 sunt

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,0), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1).$$

Vectori și valori proprii

Reamintim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Vectori și valori proprii

Reamintim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_2 = 4,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vectori și valori proprii

Reamintim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_2 = 4$, $\mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(x, x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Reamintim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_2 = 4, \ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(x, x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(x, x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)\}).$$

Reamintim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_2 = 4,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(x, x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(x, x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)\}).$$

Un vector propriu corespunzător lui λ_2 este

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2).$$

Exemplu

Se consideră endomorfismul

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ T(x,y,z)=(x-3y+3z,3x-5y+3z,6x-6y+4z).$$

Să se determine transformările liniare T^{-1} și T^5.

Soluție:

Transformările T^{-1} și T^5 sunt descrise de matricele A^{-1}, respectiv A^5, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

este matricea transformării T în bazele canonice.

Soluție:

Transformările T^{-1} și T^5 sunt descrise de matricele A^{-1}, respectiv A^5, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

este matricea transformării T în bazele canonice. Aplicăm teorema Cayley-Hamilton: $P_A(A) = \mathbf{0}$.

Soluție:

Transformările T^{-1} și T^5 sunt descrise de matricele A^{-1}, respectiv A^5, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

este matricea transformării T în bazele canonice. Aplicăm teorema Cayley-Hamilton: $P_A(A) = \mathbf{0}$.
În cazul nostru, $P_A(\lambda) = (\lambda+2)^2(4-\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16$, deci

$$P_A(A) = \mathbf{0} \Leftrightarrow -A^3 + 12A + 16I_3 = 0_3$$

.

Soluție:

Transformările T^{-1} și T^5 sunt descrise de matricele A^{-1}, respectiv A^5, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

este matricea transformării T în bazele canonice. Aplicăm teorema Cayley-Hamilton: $P_A(A) = \mathbf{0}$.
În cazul nostru, $P_A(\lambda) = (\lambda + 2)^2(4 - \lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16$, deci

$$P_A(A) = \mathbf{0} \Leftrightarrow -A^3 + 12A + 16I_3 = 0_3$$

. Pentru a determina A^{-1} procedăm astfel:

$$-A^3 + 12A + 16I_3 = 0_3 | A^{-1} \Leftrightarrow -A^2 + 12I_3 + 16A^{-1} = 0_3,$$

deci $A^{-1} = \frac{1}{16}(A^2 - 12I_3)$.

Cum $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix}$
obținem că

$$A^{-1} = \frac{1}{16}(A^2 - 12I_3) = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 6 & -14 & 6 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vectori și valori proprii

Cum $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix}$ obținem că

$$A^{-1} = \frac{1}{16}(A^2 - 12I_3) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 6 & -14 & 6 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deci transformarea $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 6 & -14 & 6 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

Cum $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix}$
obținem că

$$A^{-1} = \frac{1}{16}(A^2 - 12I_3) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 6 & -14 & 6 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deci transformarea $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 6 & -14 & 6 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{16}(-2x - 6y + 6z, 6x - 14y + 6z, 12x - 12y + 4z).$$

Pentru transformarea T^5 procedăm astfel:

$$P_A(A) = \mathbf{0} \Leftrightarrow -A^3 + 12A + 16I_3 = 0_3,$$

deci

$$A^3 = 12A + 16I_3.$$

Pentru transformarea T^5 procedăm astfel:

$$P_A(A) = \mathbf{0} \Leftrightarrow -A^3 + 12A + 16I_3 = 0_3,$$

deci

$$A^3 = 12A + 16I_3.$$

Înmulțim cu A^2 și obținem

$$A^5 = 12A^3 + 16A^2.$$

Pentru transformarea T^5 procedăm astfel:

$$P_A(A) = \mathbf{0} \Leftrightarrow -A^3 + 12A + 16I_3 = 0_3,$$

deci

$$A^3 = 12A + 16I_3.$$

Înmulțim cu A^2 și obținem

$$A^5 = 12A^3 + 16A^2.$$

Înlocuim $A^3 = 12A + 16I_3$, deci

$$A^5 = 12(12A + 16I_3) + 16A^2 = 16A^2 + 144A + 192I_3.$$

Cum

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix},$$

atunci

$$A^5 = 16A^2 + 144A + 192I_3 =$$

$$= 16[\begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]$$

deci

$$A^5 = 16\begin{pmatrix} 31 & -33 & 33 \\ 33 & -35 & 33 \\ 66 & -66 & 64 \end{pmatrix}$$

Am obținut

$$A^5 = 16 \begin{pmatrix} 31 & -33 & 33 \\ 33 & -35 & 33 \\ 66 & -66 & 64 \end{pmatrix}$$

Am obținut

$$A^5 = 16 \begin{pmatrix} 31 & -33 & 33 \\ 33 & -35 & 33 \\ 66 & -66 & 64 \end{pmatrix}$$

Deci transformarea $T^5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T^5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 31 & -33 & 33 \\ 33 & -35 & 33 \\ 66 & -66 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

Vectori și valori proprii

Am obținut

$$A^5 = 16 \begin{pmatrix} 31 & -33 & 33 \\ 33 & -35 & 33 \\ 66 & -66 & 64 \end{pmatrix}$$

Deci transformarea $T^5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T^5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 31 & -33 & 33 \\ 33 & -35 & 33 \\ 66 & -66 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$T^5(x, y, z) = 16(31x - 33y + 33z, 33x - 35y + 33z, 66x - 66y + 64z).$$