Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

seminarul 6

2021-2022

Endomorfisme diagonalizabile. Spații euclidiene

Exemplu

Se consideră endomorfismul

$$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ T(x,y,z)=(x-3y+3z,3x-5y+3z,6x-6y+4z).$$

Să se verifice dacă este diagonalizabil.

Soluție:

Scriem matricea transformării T în bazele canonice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$\square$

Calculăm polinomul caracteristic al matricei A:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(4-\lambda)$$

Am obținut
$$P_A(\lambda) = (\lambda + 2)^2(4 - \lambda),$$
deci valorile proprii sunt:
$$\lambda_1 = -2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$$
$$\lambda_2 = 4,\ \mu_a(\lambda_2) = 1.$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_1 = -2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_1 = -2$, $\mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(y - z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$.

Pentru $\lambda_1 = -2$, $\mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(y - z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (1,1,0), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1)\}).$$

Pentru $\lambda_1 = -2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(y - z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (1,1,0), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1)\}).$$

O bază pentru S_{λ_1} este

$$\{\mathbf{u}_1 = (1,1,0), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1)\}.$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_1 = -2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(y - z, y, z)$, $y, z \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (1,1,0), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1)\}).$$

O bază pentru S_{λ_1} este

$$\{\mathbf{u}_1 = (1,1,0), \mathbf{u}_2 = (-1,0,1)\}.$$

$$\mu_g(\lambda_1) = \dim_{\mathbb{R}}(S_{\lambda_1}) = 2 = \mu_a(\lambda_1),$$

deci, până acum, A este diagonalizabilă.

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_2 = 4,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_2 = 4,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(x, x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Pentru $\lambda_2 = 4$, $\mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(x, x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(x, x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)\}).$$

Pentru $\lambda_2 = 4, \ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(x, x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(x, x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)\}).$$

O bază pentru S_{λ_2} este $\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)\}$.

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_2 = 4,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(x, x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(x, x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)\}).$$

O bază pentru S_{λ_2} este $\{\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)\}$.

$$\mu_g(\lambda_2) = \dim_{\mathbb{R}}(S_{\lambda_2}) = 1 = \mu_a(\lambda_2),$$

deci A este diagonalizabilă.

Concluzie: A este diagonalizabilă

Endomorfisme diagonalizabile

Concluzie: A este diagonalizabilă
Există matricea P inversabilă, coloanele sunt formate din vectorii bazelor pentru subspațiile proprii:

$$P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{v}_1] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Endomorfisme diagonalizabile

Concluzie: A este diagonalizabilă
Există matricea P inversabilă, coloanele sunt formate din vectorii bazelor pentru subspațiile proprii:

$$P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{v}_1] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Există matricea diagonală D:

$$D = \mathcal{D}iag(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Verificare:

$$D = P^{-1}AP$$

Exemplu

Să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases},$$

unde $x = x(t), y = y(t)$.

Soluție:

Sistemul poate fi scris sub forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x},$$

unde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluția sistemului este $\mathbf{x} = e^{At}\mathbf{a}$, unde $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ este un vector constant. Reamintim că dacă A este diagonalizabilă, atunci $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$, unde $e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ □

Verificăm dacă A este diagonalizabilă:

Verificăm dacă A este diagonalizabilă:
-calculăm polinomul caracteristic:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda).$$

Endomorfisme diagonalizabile

Verificăm dacă A este diagonalizabilă:
-calculăm polinomul caracteristic:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda).$$

-valorile proprii sunt: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ cu multiplicitățile algebrice $\mu_a(\lambda_1) = \mu_a(\lambda_2) = 1$.

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_1 = 1, \ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_1 = 1, \ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-y, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_1 = 1$, $\mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-y, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(-y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (-1, 1)\}).$$

Pentru $\lambda_1 = 1,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-y, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(-y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (-1, 1)\}).$$

O bază pentru S_{λ_1} este

$$\{\mathbf{u}_1 = (-1, 1)\}.$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_1 = 1,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-y, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(-y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (-1, 1)\}).$$

O bază pentru S_{λ_1} este

$$\{\mathbf{u}_1 = (-1, 1)\}.$$

$$\mu_g(\lambda_1) = \dim_{\mathbb{R}}(S_{\lambda_1}) = 1 = \mu_a(\lambda_1),$$

deci, până acum, A este diagonalizabilă.

Pentru $\lambda_2 = 3,\ \mu_a(\lambda_2) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_2 = 3$, $\mu_a(\lambda_2) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Pentru $\lambda_2 = 3,\ \mu_a(\lambda_2) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (0, 1)\}).$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_2 = 3, \ \mu_a(\lambda_2) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(0, y), \ y \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (0, 1)\}).$$

O bază pentru S_{λ_2} este

$$\{\mathbf{v}_1 = (0, 1)\}.$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_2 = 3,\ \mu_a(\lambda_2) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(0, y),\ y \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (0, 1)\}).$$

O bază pentru S_{λ_2} este

$$\{\mathbf{v}_1 = (0, 1)\}.$$

$$\mu_g(\lambda_2) = \dim_{\mathbb{R}}(S_{\lambda_2}) = 1 = \mu_a(\lambda_2),$$

deci A este diagonalizabilă.

Concluzie: A este diagonalizabilă

Endomorfisme diagonalizabile

Concluzie: A este diagonalizabilă
Există matricea P inversabilă, coloanele sunt formate din vectorii bazelor pentru subspațiile proprii:

$$P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{v}_1] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Concluzie: A este diagonalizabilă
Există matricea P inversabilă, coloanele sunt formate din vectorii bazelor pentru subspațiile proprii:

$$P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{v}_1] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Există matricea diagonală D:

$$D = \mathcal{D}iag(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Verificare:

$$D = P^{-1}AP$$

Endomorfisme diagonalizabile

Atunci

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Calculăm

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ e^{3t} - e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

Soluția generală este

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 e^{t} \\ a_1(e^{3t} - e^{t}) + a_2 e^{3t} \end{pmatrix}, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Endomorfisme diagonalizabile

Exemplu

Să se verifice dacă endomorfismul este diagonalizabil:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z).$$

Soluție:

Scriem matricea transformării T în bazele canonice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\square$

Calculăm polinomul caracteristic al matricei A:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(3-\lambda)$$

Am obținut

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(3 - \lambda),$$

deci valorile proprii sunt:

$$\lambda_1 = 3,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$$

$$\lambda_2 = 2,\ \mu_a(\lambda_2) = 2.$$

Pentru $\lambda_1 = 3,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_1 = 3$, $\mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_1 = 3$, $\mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (-1, -1, 2)\}).$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_1 = 3$, $\mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (-1, -1, 2)\}).$$

O bază pentru S_{λ_1} este

$$\{\mathbf{u}_1 = (-1, -1, 2)\}.$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_1 = 3,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (-1, -1, 2)\}).$$

O bază pentru S_{λ_1} este

$$\{\mathbf{u}_1 = (-1, -1, 2)\}.$$

$$\mu_g(\lambda_1) = \dim_{\mathbb{R}}(S_{\lambda_1}) = 1 = \mu_a(\lambda_1),$$

deci, până acum, A este diagonalizabilă.

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_2 = 2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_2 = 2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pentru $\lambda_2 = 2$, $\mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)\}).$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_2 = 2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)\}).$$

O bază pentru S_{λ_2} este $\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)\}$.

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_2 = 2$, $\mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)\}).$$

O bază pentru S_{λ_2} este $\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)\}$.

$$\mu_g(\lambda_2) = \dim_{\mathbb{R}}(S_{\lambda_2}) = 1 \neq \mu_a(\lambda_2),$$

deci A nu este diagonalizabilă.

Forma Jordan

Numim celulă Jordan de ordin k corespunzătoare valorii λ matricea pătratică de ordin k de forma

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$$

Forma Jordan

Un endomorfism T este jordanizabil dacă există o bază față de care matricea endomorfismului este de forma

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{k_n}(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Endomorfisme diagonalizabile

Exemplu

Să se aducă la forma Jordan endomorfismul:

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z).$$

Calculăm polinomul caracteristic al matricei A:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(3-\lambda)$$

Am obținut
$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(3 - \lambda),$$
deci valorile proprii sunt:
$$\lambda_1 = 3,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$$
$$\lambda_2 = 2,\ \mu_a(\lambda_2) = 2.$$

Pentru $\lambda_1 = 3,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_1 = 3,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pentru $\lambda_1 = 3$, $\mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (-1, -1, 2)\}).$$

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_1 = 3$, $\mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (-1, -1, 2)\}).$$

O bază pentru S_{λ_1} este

$$\{\mathbf{u}_1 = (-1, -1, 2)\}.$$

Pentru $\lambda_1 = 3,\ \mu_a(\lambda_1) = 1$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_1 este

$$S_{\lambda_1} = \{(-\alpha/2, -\alpha/2, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{u}_1 = (-1, -1, 2)\}).$$

O bază pentru S_{λ_1} este

$$\{\mathbf{u}_1 = (-1, -1, 2)\}.$$

$$\mu_g(\lambda_1) = \dim_{\mathbb{R}}(S_{\lambda_1}) = 1 = \mu_a(\lambda_1),$$

deci, până acum, A este diagonalizabilă.

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_2 = 2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pentru $\lambda_2 = 2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Endomorfisme diagonalizabile

Pentru $\lambda_2 = 2, \ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)\}).$$

Pentru $\lambda_2 = 2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)\}).$$

O bază pentru S_{λ_2} este $\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)\}$.

Pentru $\lambda_2 = 2,\ \mu_a(\lambda_1) = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent cu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul are soluția $(\alpha, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Subspațiul propriu corespunzător lui λ_2 este

$$S_{\lambda_2} = \{(\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan(\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)\}).$$

O bază pentru S_{λ_2} este $\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)\}$.

$$\mu_g(\lambda_2) = \dim_{\mathbb{R}}(S_{\lambda_2}) = 1 \neq \mu_a(\lambda_2),$$

deci continuăm.

Deoarece diferența dintre $\mu_a(\lambda_2)$ și $\mu_g(\lambda_2)$ este 1, pentru λ_2 determinăm un vector principal. Rezolvăm sistemul $(A-\lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}$. Avem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & -2\alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistemul este compatibil și are soluția : $x=\beta, y=\alpha, z=-\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Forma Jordan

Obținem:

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

unde $\mathbf{v}_1$ este vectorul propriu și $\mathbf{v}_2$ este vectorul principal.

Concluzie:

Concluzie: Există matricea P inversabilă, coloanele sunt formate din vectori proprii și vectori principali:

$$P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Concluzie: Există matricea P inversabilă, coloanele sunt formate din vectori proprii și vectori principali:

$$P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Există matricea D:

$$D = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verificare:

$$D = P^{-1}AP$$

Temă: Să se verifice dacă endomorfismele sunt diagonalizabile:

(a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, t) = (x + y, x + y, x + y, x + y)$.

(b) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, $T(x, y, z, t, u) = (x + y, x + y, z + t, z + t, 3u)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) =$
$(4x - 5y + 2t, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z)$.

Exemplu

Să se verifice dacă următoarele aplicații sunt produse scalare:

(a) $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$;

(b) $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4 x_1 y_1 - x_2 y_1 + 5 x_2 y_2$.

(c) $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4 x_2 y_2 + 2 x_3 y_3$.

Reamintim:

Definiție

Un produs scalar pe spațiul vectorial V peste corpul comutativ $\mathbb{R}$ este o funcție $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărei perechi de vectori $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V$ un scalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru oricare trei vectori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ și orice scalar $\alpha \in \mathbb{R}$ sunt îndeplinite condițiile:

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(ii) $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;

(iii) $\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;

(iv) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Verificăm condițiile:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4x_2 y_2$

Verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție:$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4x_2 y_2$

Verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 x_1 - x_2 x_1 - x_1 x_2 + 4x_2 x_2 =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 x_1 - x_2 x_1 - x_1 x_2 + 4 x_2 x_2 = x_1^2 - 2 x_1 x_2 + 4 x_2^2 =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$

Verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție:$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1x_1 - x_2x_1 - x_1x_2 + 4x_2x_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 =$$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_2^2 =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 x_1 - x_2 x_1 - x_1 x_2 + 4 x_2 x_2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + 4x_2^2 =$$

$$= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + 3x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4x_2 y_2$

Verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție:$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 x_1 - x_2 x_1 - x_1 x_2 + 4x_2 x_2 = x_1^2 - 2x_1 x_2 + 4x_2^2 =$$

$$= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + 3x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 \geq 0$$

deoarece $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ și $x_2^2 \geq 0$. Mai mult, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $(x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 = 0$.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$

Verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1x_1 - x_2x_1 - x_1x_2 + 4x_2x_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 =$$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 \geq 0$$

deoarece $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ și $x_2^2 \geq 0$. Mai mult, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $(x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 = 0$. Echivalent cu $x_1 - x_2 = 0$ și $x_2 = 0$, deci $\mathbf{x} = (0, 0)$.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle =$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4x_2 y_2 =$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2 = y_1 x_1 - y_2 x_1 - y_1 x_2 + 4 y_2 x_2 =$$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2 = y_1 x_1 - y_2 x_1 - y_1 x_2 + 4 y_2 x_2 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2 = y_1 x_1 - y_2 x_1 - y_1 x_2 + 4 y_2 x_2 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

A treia condiție: $\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Avem:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2 = y_1 x_1 - y_2 x_1 - y_1 x_2 + 4 y_2 x_2 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

A treia condiție: $\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Avem:

$$\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2 = y_1 x_1 - y_2 x_1 - y_1 x_2 + 4 y_2 x_2 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.

A treia condiție: $\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Avem:

$$\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\alpha x_1) y_1 - (\alpha x_2) y_1 - (\alpha x_1) y_2 + 4 (\alpha x_2) y_2 =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2 = y_1x_1 - y_2x_1 - y_1x_2 + 4y_2x_2 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$

A treia condiție: $\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Avem:

$$\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\alpha x_1)y_1 - (\alpha x_2)y_1 - (\alpha x_1)y_2 + 4(\alpha x_2)y_2 =$$

$$\alpha(x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2) =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2 = y_1x_1 - y_2x_1 - y_1x_2 + 4y_2x_2 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

A treia condiție: $\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Avem:

$$\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\alpha x_1)y_1 - (\alpha x_2)y_1 - (\alpha x_1)y_2 + 4(\alpha x_2)y_2 =$$

$$\alpha(x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2) = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Verificăm ultima condiție: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$. Avem:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Verificăm ultima condiție: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$. Avem:

$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle =$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Verificăm ultima condiție: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$. Avem:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = (x_1 + y_1) z_1 - (x_2 + y_2) z_1 - (x_1 + y_1) z_2 + 4(x_2 + y_2) z_2 =$$

$$= x_1 z_1 + y_1 z_1 - x_2 z_1 - y_2 z_1 - x_1 z_2 - y_1 z_2 + 4 x_2 z_2 + 4 y_2 z_2 =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$

Verificăm ultima condiție: $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$. Avem:

$\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = (x_1+y_1)z_1 - (x_2+y_2)z_1 - (x_1+y_1)z_2 + 4(x_2+y_2)z_2 =$

$$= x_1 z_1 + y_1 z_1 - x_2 z_1 - y_2 z_1 - x_1 z_2 - y_1 z_2 + 4 x_2 z_2 + 4 y_2 z_2 =$$

$$= (x_1 z_1 - x_2 z_1 - x_1 z_2 + 4 x_2 z_2) + (y_1 z_1 - y_2 z_1 - y_1 z_2 + 4 y_2 z_2) =$$

Verificăm ultima condiție: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$. Avem:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = (x_1 + y_1) z_1 - (x_2 + y_2) z_1 - (x_1 + y_1) z_2 + 4(x_2 + y_2) z_2 =$$

$$= x_1 z_1 + y_1 z_1 - x_2 z_1 - y_2 z_1 - x_1 z_2 - y_1 z_2 + 4 x_2 z_2 + 4 y_2 z_2 =$$

$$= (x_1 z_1 - x_2 z_1 - x_1 z_2 + 4 x_2 z_2) + (y_1 z_1 - y_2 z_1 - y_1 z_2 + 4 y_2 z_2) =$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.$$

Deci aplicația este un produs scalar real.

Pentru (b) verificăm cele patru condiții:
$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$

Pentru (b) verificăm cele patru condiții:
$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$
Pentru prima trebuie să verificăm $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$

Pentru (b) verificăm cele patru condiții:
$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$
Pentru prima trebuie să verificăm $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 4x_1x_1 - x_2x_1 + 5x_2x_2 = 4x_1^2 - 2\frac{1}{4}2x_1x_2 + \frac{1}{16}x_2^2 + 5x_2^2 - \frac{1}{16}x_2^2 =$$

Pentru (b) verificăm cele patru condiții:
$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$
Pentru prima trebuie să verificăm $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 4x_1x_1 - x_2x_1 + 5x_2x_2 = 4x_1^2 - 2\frac{1}{4}2x_1x_2 + \frac{1}{16}x_2^2 + 5x_2^2 - \frac{1}{16}x_2^2 =$$

$$= (2x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2 + \frac{79}{16}x_2^2 \geq 0.$$

Pentru (b) verificăm cele patru condiții:
$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$
Pentru prima trebuie să verificăm $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 4x_1x_1 - x_2x_1 + 5x_2x_2 = 4x_1^2 - 2\frac{1}{4}2x_1x_2 + \frac{1}{16}x_2^2 + 5x_2^2 - \frac{1}{16}x_2^2 =$$

$$= (2x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2 + \frac{79}{16}x_2^2 \geq 0.$$

În plus, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $(2x_1 - \frac{1}{4}x_2)^2 + \frac{79}{16}x_2^2 = 0$, echivalent cu $\mathbf{x} = (0, 0)$.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$$

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 4y_1x_1 - y_2x_1 + 5y_2x_2,$$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 + 5x_2y_2$$

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 4y_1x_1 - y_2x_1 + 5y_2x_2,$$

deci $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \neq \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$. Obținem că aplicația nu este un produs scalar.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Pentru (c), $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$, verificăm condițiile:

Pentru (c), $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$, verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție:$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle =$$

Pentru (c), $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$, verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție:$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 x_1 + 4x_2 x_2 + 2x_3 x_3 =$$

Pentru (c), $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3$, verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție:$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1x_1 + 4x_2x_2 + 2x_3x_3 = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 \geq 0$$

Pentru (c), $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3$, verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție:$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1x_1 + 4x_2x_2 + 2x_3x_3 = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 \geq 0$$

Mai mult, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 = 0$.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Pentru (c), $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$, verificăm condițiile: Demonstrăm prima condiție:$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ și $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 x_1 + 4x_2 x_2 + 2x_3 x_3 = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 \geq 0$$

Mai mult, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 = 0$.
Echivalent cu $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, deci $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle =$$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3 =$$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3 = y_1 x_1 + 4y_2 x_2 + 2y_3 x_3 =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3 = y_1 x_1 + 4y_2 x_2 + 2y_3 x_3 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3 = y_1 x_1 + 4y_2 x_2 + 2y_3 x_3 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

A treia condiție: $\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Avem:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 = y_1x_1 + 4y_2x_2 + 2y_3x_3 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

A treia condiție: $\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Avem:

$$\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3 = y_1 x_1 + 4y_2 x_2 + 2y_3 x_3 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

A treia condiție: $\alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Avem:

$$\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\alpha x_1) y_1 + 4(\alpha x_2) y_2 + 2(\alpha x_3) y_3 =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3 = y_1 x_1 + 4y_2 x_2 + 2y_3 x_3 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

A treia condiție: $\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Avem:

$$\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\alpha x_1) y_1 + 4(\alpha x_2) y_2 + 2(\alpha x_3) y_3 =$$

$$\alpha (x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3) =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Pentru a doua condiție: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$, avem:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3 = y_1 x_1 + 4y_2 x_2 + 2y_3 x_3 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

A treia condiție: $\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Avem:

$$\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\alpha x_1) y_1 + 4(\alpha x_2) y_2 + 2(\alpha x_3) y_3 =$$

$$\alpha (x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3) = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Verificăm ultima condiție: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$. Avem:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Verificăm ultima condiție: $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$. Avem:

$$\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Verificăm ultima condiție: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$. Avem:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = (x_1 + y_1) z_1 + 4(x_2 + y_2) z_2 + 2(x_3 + y_3) z_3$$

$$= x_1 z_1 + y_1 z_1 + 4x_2 z_2 + 4y_2 z_2 + 2x_3 z_3 + 2y_3 z_3 =$$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

Verificăm ultima condiție: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$. Avem:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = (x_1 + y_1)z_1 + 4(x_2 + y_2)z_2 + 2(x_3 + y_3)z_3$$

$$= x_1 z_1 + y_1 z_1 + 4x_2 z_2 + 4y_2 z_2 + 2x_3 z_3 + 2y_3 z_3 =$$

$$= (x_1 z_1 + 4x_2 z_2 + 2x_3 z_3) + (y_1 z_1 + 4y_2 z_2 + 2y_3 z_3) =$$

Verificăm ultima condiție: $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$. Avem:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = (x_1 + y_1)z_1 + 4(x_2 + y_2)z_2 + 2(x_3 + y_3)z_3$$

$$= x_1z_1 + y_1z_1 + 4x_2z_2 + 4y_2z_2 + 2x_3z_3 + 2y_3z_3 =$$

$$= (x_1z_1 + 4x_2z_2 + 2x_3z_3) + (y_1z_1 + 4y_2z_2 + 2y_3z_3) =$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.$$

Deci aplicația este un produs scalar real.

Exemplu

Să se verifice dacă funcția $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\|\mathbf{x}\| = |x_1| + |x_2|$ este o normă pe $\mathbb{R}^2$.

Definiție

Fie un spațiu vectorial euclidian V și $\alpha \in \mathbb{R}$. Funcția $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ se numește **normă** pe V dacă:

(i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ și $\|\mathbf{x}\| = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

(ii) $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$.

(iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Verificăm condițiile:

Verificăm condițiile: Demonstrăm $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ și $\|\mathbf{x}\| = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Verificăm condițiile: Demonstrăm $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ și $\|\mathbf{x}\| = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ un vector arbitrar. Avem:

$$\|\mathbf{x}\| = |x_1| + |x_2| \geq 0,$$

deoarece $|x_1|, |x_2| \geq 0$. Mai mult,

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow$$

Verificăm condițiile: Demonstrăm $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ și $\|\mathbf{x}\| = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ un vector arbitrar. Avem:

$$\|\mathbf{x}\| = |x_1| + |x_2| \geq 0,$$

deoarece $|x_1|, |x_2| \geq 0$. Mai mult,

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| = 0$$

Verificăm condițiile: Demonstrăm $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ și $\|\mathbf{x}\| = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ un vector arbitrar. Avem:

$$\|\mathbf{x}\| = |x_1| + |x_2| \geq 0,$$

deoarece $|x_1|, |x_2| \geq 0$. Mai mult,

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0,$$

Verificăm condițiile: Demonstrăm $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ și $\|\mathbf{x}\| = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ un vector arbitrar. Avem:

$$\|\mathbf{x}\| = |x_1| + |x_2| \geq 0,$$

deoarece $|x_1|, |x_2| \geq 0$. Mai mult,

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow |x_1| + |x_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0,$$

echivalent cu $\mathbf{x} = (0, 0) = \mathbf{0}$.

Spații euclidiene

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$.

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$\|\alpha \mathbf{x}\| =$

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| =$

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| =$$

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| = |\alpha|(|x_1| + |x_2|) =$$

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| = |\alpha|(|x_1| + |x_2|) = |\alpha|\|\mathbf{x}\|.$$

Pentru a treia condiție avem de verificat $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| = |\alpha|(|x_1| + |x_2|) = |\alpha| \|\mathbf{x}\|.$$

Pentru a treia condiție avem de verificat $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. Considerăm $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Avem: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, deci

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| = |\alpha|(|x_1| + |x_2|) = |\alpha|\|\mathbf{x}\|.$$

Pentru a treia condiție avem de verificat $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. Considerăm $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Avem: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, deci

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| =$$

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| = |\alpha|(|x_1| + |x_2|) = |\alpha|\|\mathbf{x}\|.$$

Pentru a treia condiție avem de verificat $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. Considerăm $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Avem: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, deci

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq$$

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| = |\alpha|(|x_1| + |x_2|) = |\alpha|\|\mathbf{x}\|.$$

Pentru a treia condiție avem de verificat $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. Considerăm $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Avem: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, deci

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$$

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| = |\alpha|(|x_1| + |x_2|) = |\alpha|\|\mathbf{x}\|.$$

Pentru a treia condiție avem de verificat $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. Considerăm $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Avem: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, deci

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$$

$$= (|x_1| + |x_2|) + (|y_1| + |y_2|) =$$

Pentru a doua condiție avem de verificat $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$. Fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| = |\alpha|(|x_1| + |x_2|) = |\alpha|\|\mathbf{x}\|.$$

Pentru a treia condiție avem de verificat $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. Considerăm $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Avem: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, deci

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$$

$$= (|x_1| + |x_2|) + (|y_1| + |y_2|) = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Deci aplicația este o normă pe $\mathbb{R}^2$.

Exemplu

Să se verifice dacă funcția
$d(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, d(x, y) = |\ln x - \ln y|$ este o distanță pe $\mathbb{R}_+^*$.

Definiție

Fie V o mulțime nevidă. Funcția $d(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ se numește **distanță sau metrică** pe V dacă:

(i) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ și $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;

(ii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

(iii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

Verificăm condițiile:

Verificăm condițiile:
Prima condiție de verificat este $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ și $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Verificăm condițiile:
Prima condiție de verificat este $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$ și $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Fie $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, două numere reale nenule pozitive. Avem:

$$d(x,y) = |\ln x - \ln y| \geq 0$$

și

Verificăm condițiile:
Prima condiție de verificat este $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ și $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Fie $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, două numere reale nenule pozitive. Avem:

$$d(x, y) = |\ln x - \ln y| \geq 0$$

și

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow$

Verificăm condițiile:
Prima condiție de verificat este $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ și $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Fie $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, două numere reale nenule pozitive. Avem:

$$d(x, y) = |\ln x - \ln y| \geq 0$$

și

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |\ln x - \ln y| = 0 \Leftrightarrow$

Verificăm condițiile:
Prima condiție de verificat este $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ și $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Fie $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, două numere reale nenule pozitive. Avem:

$$d(x, y) = |\ln x - \ln y| \geq 0$$

și

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |\ln x - \ln y| = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

Verificăm condițiile:
Prima condiție de verificat este $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$ și $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Fie $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, două numere reale nenule pozitive. Avem:

$$d(x,y) = |\ln x - \ln y| \geq 0$$

și

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |\ln x - \ln y| = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow$$

Verificăm condițiile:
Prima condiție de verificat este $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0$ și $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Fie $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, două numere reale nenule pozitive. Avem:

$$d(x,y) = |\ln x - \ln y| \geq 0$$

și

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |\ln x - \ln y| = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 1 \Leftrightarrow x = y$$

Pentru a doua condiție verificăm $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Spații euclidiene

Pentru a doua condiție verificăm $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Avem

$d(x, y) = |\ln x - \ln y| =$

Pentru a doua condiție verificăm $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Avem

$d(x, y) = |\ln x - \ln y| = |(-1)(\ln y - \ln x)| =$

Pentru a doua condiție verificăm $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$. Avem

$$d(x,y) = |\ln x - \ln y| = |(-1)(\ln y - \ln x)| = |(-1)| \cdot |\ln y - \ln x| =$$

$$=$$

Pentru a doua condiție verificăm $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Avem

$$d(x, y) = |\ln x - \ln y| = |(-1)(\ln y - \ln x)| = |(-1)| \cdot |\ln y - \ln x| =$$

$$= |\ln y - \ln x|$$

Pentru a doua condiție verificăm $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Avem

$$d(x, y) = |\ln x - \ln y| = |(-1)(\ln y - \ln x)| = |(-1)| \cdot |\ln y - \ln x| =$$

$$= |\ln y - \ln x| = d(y, x).$$

Ultima relație de verificat este $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Pentru a doua condiție verificăm $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$. Avem

$$d(x,y) = |\ln x - \ln y| = |(-1)(\ln y - \ln x)| = |(-1)| \cdot |\ln y - \ln x| =$$

$$= |\ln y - \ln x| = d(y,x).$$

Ultima relație de verificat este $d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z})$. Avem:

$$d(x,z) = |\ln x - \ln z| =$$

Pentru a doua condiție verificăm $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x})$. Avem

$d(x,y) = |\ln x - \ln y| = |(-1)(\ln y - \ln x)| = |(-1)| \cdot |\ln y - \ln x| =$

$$= |\ln y - \ln x| = d(y,x).$$

Ultima relație de verificat este $d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z})$. Avem:

$$d(x,z) = |\ln x - \ln z| = |\ln x - \ln y + \ln y - \ln z|$$

Pentru a doua condiție verificăm $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Avem

$$d(x, y) = |\ln x - \ln y| = |(-1)(\ln y - \ln x)| = |(-1)| \cdot |\ln y - \ln x| =$$

$$= |\ln y - \ln x| = d(y, x).$$

Ultima relație de verificat este $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Avem:

$$d(x, z) = |\ln x - \ln z| = |\ln x - \ln y + \ln y - \ln z|$$

$$\leq |\ln x - \ln y| + |\ln y - \ln z| =$$

Pentru a doua condiție verificăm $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Avem

$$d(x, y) = |\ln x - \ln y| = |(-1)(\ln y - \ln x)| = |(-1)| \cdot |\ln y - \ln x| =$$

$$= |\ln y - \ln x| = d(y, x).$$

Ultima relație de verificat este $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$. Avem:

$$d(x, z) = |\ln x - \ln z| = |\ln x - \ln y + \ln y - \ln z|$$

$$\leq |\ln x - \ln y| + |\ln y - \ln z| = d(x, y) + d(y, z).$$

În concluzie, aplicația este o metrică.

Exemplu

În spațiul vectorial $C[0,4]$ se consideră produsul scalar canonic:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^4 f(x)g(x)dx.$$

Să se calculeze $\langle f,g\rangle$, $\|g\|$, $d(f,g)$, $\|g+h\|$, unde

$$f(x)=x,\ \ g(x)=\begin{cases} x+1, x\in[0,1] \\ 4-2x, x\in(1.4] \end{cases},\ \ h(x)=\begin{cases} x+2, x\in[0,2] \\ 2x, x\in(2.4] \end{cases}$$

Soluție:

Pentru $\langle f, g \rangle$ avem:

$$\langle f, g \rangle =$$

Soluție:

Pentru $\langle f, g\rangle$ avem:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 x(x+1)dx + \int_1^4 x(4-2x)dx =$$

$=$

Soluție:

Pentru $\langle f, g\rangle$ avem:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 x(x+1)dx + \int_1^4 x(4-2x)dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2+x)dx + \int_1^4 (4x-2x^2)dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 30 - \frac{2\cdot 63}{3} = -\frac{67}{6}.$$

$\square$

Spații euclidiene

Pentru $\|g\|$ avem $g(x) = \begin{cases} x+1, x \in [0,1] \\ 4-2x, x \in (1,4] \end{cases}$

Pentru $\|g\|$ avem $g(x) = \begin{cases} x+1, x \in [0,1] \\ 4-2x, x \in (1,4] \end{cases}$

$$\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} =$$

Pentru $\|g\|$ avem $g(x) = \begin{cases} x+1, x \in [0,1] \\ 4-2x, x \in (1,4] \end{cases}$

$$\|g\| = \sqrt{\langle g, g\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x+1)^2 dx + \int_1^4 (4-2x)^2 dx} =$$

Pentru $\|g\|$ avem $g(x) = \begin{cases} x+1, x \in [0,1] \\ 4-2x, x \in (1,4] \end{cases}$

$$\|g\| = \sqrt{\langle g, g\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x+1)^2 dx + \int_1^4 (4-2x)^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (x^2+2x+1) dx + \int_1^4 (16-16x+4x^2) dx} =$$

Spații euclidiene

Pentru $\|g\|$ avem $g(x) = \begin{cases} x+1, x \in [0,1] \\ 4-2x, x \in (1,4] \end{cases}$

$$\|g\| = \sqrt{\langle g, g\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (x+1)^2 dx + \int_1^4 (4-2x)^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\int_0^1 (x^2+2x+1) dx + \int_1^4 (16-16x+4x^2) dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3} + 1 + 1 + 16 \cdot 3 - 8 \cdot 15 + \frac{4 \cdot 63}{3}} = \sqrt{\frac{43}{3}}.$$

Pentru $d(f, g)$ avem:

$d(f, g) =$

Pentru $d(f,g)$ avem:

$$d(f,g) = \|f-g\| = \sqrt{\langle f-g, f-g \rangle} =$$

Pentru $d(f,g)$ avem:

$$d(f,g) = \|f-g\| = \sqrt{\langle f-g, f-g\rangle} = \sqrt{\langle f,f\rangle - 2\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle}$$

Pentru $d(f,g)$ avem:

$$d(f,g) = \|f-g\| = \sqrt{\langle f-g, f-g\rangle} = \sqrt{\langle f,f\rangle - 2\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle}$$

Avem $\langle g,g\rangle = \frac{43}{3}$, $\langle f,g\rangle = -\frac{67}{3}$ și

$$\langle f,f\rangle = \int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3}.$$

În concluzie,

Pentru $d(f,g)$ avem:

$$d(f,g) = \|f - g\| = \sqrt{\langle f-g, f-g\rangle} = \sqrt{\langle f,f\rangle - 2\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle}$$

Avem $\langle g,g\rangle = \frac{43}{3}$, $\langle f,g\rangle = -\frac{67}{3}$ și

$$\langle f,f\rangle = \int_0^4 x^2 dx = \frac{64}{3}.$$

În concluzie,

$$d(f,g) = \sqrt{\langle f,f\rangle - 2\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle} = \sqrt{58}.$$

Facem observația că dacă

$$f(x) = x,\ \ g(x) = \begin{cases} x+1, x \in [0,1] \\ 4-2x, x \in (1,4] \end{cases},$$

atunci

$$(f-g)(x) =$$

Facem observația că dacă

$$f(x) = x,\;\; g(x) = \begin{cases} x+1, x \in [0,1] \\ 4-2x, x \in (1,4] \end{cases},$$

atunci

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} -1, x \in [0,1] \\ 3x-4, x \in (1,4] \end{cases}$$

Facem observația că dacă

$$f(x) = x,\ \ g(x) = \begin{cases} x + 1, x \in [0, 1] \\ 4 - 2x, x \in (1, 4] \end{cases},$$

atunci

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} -1, x \in [0, 1] \\ 3x - 4, x \in (1, 4] \end{cases}$$

Atunci

$$\langle f - g, f - g \rangle =$$

Facem observația că dacă

$$f(x) = x, \;\; g(x) = \begin{cases} x+1, x \in [0,1] \\ 4-2x, x \in (1,4] \end{cases},$$

atunci

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} -1, x \in [0,1] \\ 3x-4, x \in (1,4] \end{cases}$$

Atunci

$$\langle f-g, f-g \rangle = \int_0^1 dx + \int_1^4 (3x-4)^2 dx = 58$$

deci

$$d(f,g) = \|f-g\| = \sqrt{58}.$$

Pentru $\|g+h\|$, unde

$$g(x)=\begin{cases} x+1, x\in[0,1] \\ 4-2x, x\in(1,4] \end{cases},\quad h(x)=\begin{cases} x+2, x\in[0,2] \\ 2x, x\in(2,4] \end{cases}$$

avem:

$$(g+h)(x)=g(x)+h(x)=\begin{cases} 2x+3, x\in[0,1] \\ 6-x, x\in(1,2] \\ 4, x\in(2,4] \end{cases}$$

deci

$$\|g+h\|=\sqrt{\langle g+h, g+h\rangle}=$$

$$=\sqrt{\int_0^1 (2x+3)^2 dx+\int_1^2 (6-x)^2 dx+\int_2^4 4^2 dx}=$$

$$=\sqrt{\frac{206}{3}}.$$

Exemplu

În spațiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2)$ și $\mathbf{v}_2 = (1, 3, 1)$. Să se arate că vectorii sunt ortogonali și să se completeze vectorii până la o bază ortogonală în $\mathbb{R}^3$.

Soluție:

Vectorii $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ sunt ortogonali dacă și numai dacă $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$.

Soluție:

Vectorii $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ sunt ortogonali dacă și numai dacă $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$.
Folosim produsul scalar canonic:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle (1, -1, 2), (1, 3, 1) \rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 0,$$

deci vectorii sunt ortogonali.

Soluție:

Vectorii $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ sunt ortogonali dacă și numai dacă $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$. Folosim produsul scalar canonic:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle (1, -1, 2), (1, 3, 1) \rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 0,$$

deci vectorii sunt ortogonali.
Pentru a ajunge la o bază ortogonală, mai avem nevoie de un singur vector, $\mathbf{v} = (a, b, c)$, ortogonal pe $\mathbf{v}_1$ și pe $\mathbf{v}_2$. $\square$

Fie $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector ortogonal pe $\mathbf{v}_1$ și pe $\mathbf{v}_2$. Deci avem:

Fie $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector ortogonal pe $\mathbf{v}_1$ și pe $\mathbf{v}_2$. Deci avem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \text{ și } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0.$$

Fie $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector ortogonal pe $\mathbf{v}_1$ și pe $\mathbf{v}_2$. Deci avem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \text{ și } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0.$$

Avem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, -1, 2) \rangle = 0 \Leftrightarrow a - b + 2c = 0$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, 3, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow a + 3b + c = 0$$

Fie $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector ortogonal pe $\mathbf{v}_1$ și pe $\mathbf{v}_2$. Deci avem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \text{ și } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0.$$

Avem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, -1, 2) \rangle = 0 \Leftrightarrow a - b + 2c = 0$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, 3, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow a + 3b + c = 0$$

Soluția sistemului este $a = -7\alpha,\ b = \alpha,\ c = 4\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Fie $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector ortogonal pe $\mathbf{v}_1$ și pe $\mathbf{v}_2$. Deci avem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \text{ și } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0.$$

Avem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, -1, 2) \rangle = 0 \Leftrightarrow a - b + 2c = 0$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, 3, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow a + 3b + c = 0$$

Soluția sistemului este $a = -7\alpha,\ b = \alpha,\ c = 4\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alegem, de exemplu, $\alpha = 1$, deci un vector $\mathbf{v}$ ortogonal pe $\mathbf{v}_1$ și pe $\mathbf{v}_2$ este $\mathbf{v} = (-7, 1, 4)$.

Fie $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector ortogonal pe $\mathbf{v}_1$ și pe $\mathbf{v}_2$. Deci avem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \text{ și } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0.$$

Avem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, -1, 2) \rangle = 0 \Leftrightarrow a - b + 2c = 0$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, 3, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow a + 3b + c = 0$$

Soluția sistemului este $a = -7\alpha,\ b = \alpha,\ c = 4\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alegem, de exemplu, $\alpha = 1$, deci un vector $\mathbf{v}$ ortogonal pe $\mathbf{v}_1$ și pe $\mathbf{v}_2$ este $\mathbf{v} = (-7, 1, 4)$. Obținem mulțimea ortogonală $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}\}$ în $\mathbb{R}^3$.

Fie $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vector ortogonal pe $\mathbf{v}_1$ și pe $\mathbf{v}_2$. Deci avem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \text{ și } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0.$$

Avem:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, -1, 2) \rangle = 0 \Leftrightarrow a - b + 2c = 0$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, 3, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow a + 3b + c = 0$$

Soluția sistemului este $a = -7\alpha,\ b = \alpha,\ c = 4\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alegem, de exemplu, $\alpha = 1$, deci un vector $\mathbf{v}$ ortogonal pe $\mathbf{v}_1$ și pe $\mathbf{v}_2$ este $\mathbf{v} = (-7, 1, 4)$. Obținem mulțimea ortogonală $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}\}$ în $\mathbb{R}^3$. Rezultă că S este o bază ortogonală, deoarece orice mulțime ortogonală (deci liniar independentă) cu 3 vectori în $\mathbb{R}^3$ ($\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$=3) este o bază.

Exemplu

Să se determine un versor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ortogonal vectorilor $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2)$.

Soluție:

Căutăm să determinăm vectorul $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ cu proprietățile:

Soluție:

Căutăm să determinăm vectorul $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ cu proprietățile:

- $\mathbf{v}$ este versor,

Soluție:

Căutăm să determinăm vectorul $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ cu proprietățile:

- $\mathbf{v}$ este versor, echivalent cu $\|\mathbf{v}\| = 1$;

Soluție:

Căutăm să determinăm vectorul $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ cu proprietățile:

- $\mathbf{v}$ este versor, echivalent cu $\|\mathbf{v}\| = 1$;
- $\mathbf{v}$ este ortogonal pe $\mathbf{v}_1$,

Soluție:

Căutăm să determinăm vectorul $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ cu proprietățile:

- $\mathbf{v}$ este versor, echivalent cu $\|\mathbf{v}\| = 1$;
- $\mathbf{v}$ este ortogonal pe $\mathbf{v}_1$, echivalent cu $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$;

Soluție:

Căutăm să determinăm vectorul $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ cu proprietățile:

- $\mathbf{v}$ este versor, echivalent cu $\|\mathbf{v}\| = 1$;
- $\mathbf{v}$ este ortogonal pe $\mathbf{v}_1$, echivalent cu $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$;
- $\mathbf{v}$ este ortogonal pe $\mathbf{v}_2$,

Soluție:

Căutăm să determinăm vectorul $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ cu proprietățile:

- $\mathbf{v}$ este versor, echivalent cu $\|\mathbf{v}\| = 1$;
- $\mathbf{v}$ este ortogonal pe $\mathbf{v}_1$, echivalent cu $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$;
- $\mathbf{v}$ este ortogonal pe $\mathbf{v}_2$, echivalent cu $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$.

$\square$

Avem:

$$\|\mathbf{v}\| = 1 \Leftrightarrow \|\mathbf{v}\|^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1;$$

Avem:

$$\|\mathbf{v}\| = 1 \Leftrightarrow \|\mathbf{v}\|^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1;$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, 2, -1) \rangle = 0 \Leftrightarrow a + 2b - c = 0$$

Avem:

$$\|\mathbf{v}\| = 1 \Leftrightarrow \|\mathbf{v}\|^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1;$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (1, 2, -1) \rangle = 0 \Leftrightarrow a + 2b - c = 0$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (a, b, c), (0, 1, 2) \rangle = 0 \Leftrightarrow b + 2c = 0.$$

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + 2b - c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$$

Din ultima ecuație obținem $b = -2c$, înlocuim în a doua ecuație și rezultă $a = 5c$, iar din prima relație găsim

$$25c^2 + 4c^2 + c^2 = 1,$$

echivalent cu $c = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}$.

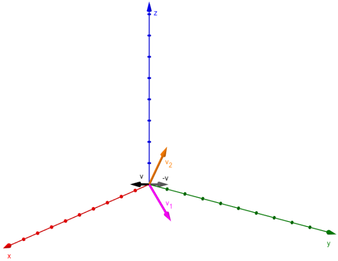
Din ultima ecuație obținem $b = -2c$, înlocuim în a doua ecuație și rezultă $a = 5c$, iar din prima relație găsim

$$25c^2 + 4c^2 + c^2 = 1,$$

echivalent cu $c = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}$. Obținem vectorii:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right) \text{ și } \mathbf{v}' = \left(-\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}\right) = -\mathbf{v}.$$

Spații euclidiene



Exemplu

Să se precizeze o familie ortonormată de soluții pentru sistemul:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases}$$

Soluție:

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare și determinăm o bază pentru subspațiul soluțiilor.

Soluție:

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare și determinăm o bază pentru subspațiul soluțiilor.

Avem:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\text{-2}} & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\text{-2}} & 3 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Deci $z = \alpha$, $t = \beta$, $x = \beta - \alpha$ și $y = \alpha + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Soluție:

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare și determinăm o bază pentru subspațiul soluțiilor.

Avem:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-2} & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-2} & 3 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Deci $z = \alpha$, $t = \beta$, $x = \beta - \alpha$ și $y = \alpha + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Subspațiul soluțiilor sistemului este:

$$U = \{(-\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$\square$

Obținem că:

$$U = \{(-\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}.$$

Obținem că:

$$U = \{(-\alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1 = (-1,1,1,0), \mathbf{v}_2 = (1,1,0,1)\}.$$

Deci mulțimea $B = \{\mathbf{v}_1 = (-1,1,1,0), \mathbf{v}_2 = (1,1,0,1)\}$ este un sistem de generatori pentru U.

Obținem că:

$$U = \{(-\alpha + \beta, \alpha + \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}.$$

Deci mulțimea $B = \{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}$ este un sistem de generatori pentru U. Mai mult, B este liniar independentă deoarece rang$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = 2$.

Obținem că:

$$U = \{(-\alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}.$$

Deci mulțimea $B = \{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}$ este un sistem de generatori pentru U. Mai mult, B este liniar independentă deoarece rang$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = 2$.
O bază pentru U este $B = \{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}$.

Obținem că:

$$U = \{(-\alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}.$$

Deci mulțimea $B = \{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}$ este un sistem de generatori pentru U. Mai mult, B este liniar independentă deoarece rang$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = 2$.
O bază pentru U este $B = \{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}$.
Verificăm dacă $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sunt ortogonali:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle (-1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1) \rangle = -1 + 1 + 0 + 0 = 0.$$

Am obținut $B = \{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}$ este o bază ortogonală.

Am obținut $B = \{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}$ este o bază ortogonală. Formăm baza ortonormată astfel:

$$B' = \{\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}\}.$$

Am obținut $B = \{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}$ este o bază ortogonală. Formăm baza ortonormată astfel:

$$B' = \{\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}\}.$$

Calculăm:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3},$$

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} = \sqrt{(1)^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

deci

Am obținut $B = \{\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)\}$ este o bază ortogonală. Formăm baza ortonormată astfel:

$$B' = \{\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}\}.$$

Calculăm:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3},$$

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} = \sqrt{(1)^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

deci

$$B' = \{\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\}.$$

este bază ortonormată.

Exemplu

Să se construiască o bază ortonormată pentru $\mathbb{R}^3$ plecând de la baza

$$B = \{\mathbf{v}_1 = (2, 3, 1), \mathbf{v}_2 = (3, 4, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 2, 2)\}.$$

Aplicăm procedeul de ortonormare Gram-Schmidt:
Pas 1: Avem baza
$B = \{\mathbf{v}_1 = (2, 3, 1), \mathbf{v}_2 = (3, 4, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 2, 2)\}$.

Aplicăm procedeul de ortonormare Gram-Schmidt:
Pas 1: Avem baza
$B = \{\mathbf{v}_1 = (2,3,1), \mathbf{v}_2 = (3,4,1), \mathbf{v}_3 = (1,2,2)\}$.
Pas 2: Construim baza ortogonală $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, unde:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2$$

Calculăm:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (2, 3, 1)$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (2, 3, 1)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

unde

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (3, 4, 1), (2, 3, 1) \rangle = 6 + 12 + 1 = 19$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (2, 3, 1), (2, 3, 1) \rangle = 4 + 9 + 1 = 14,$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (2, 3, 1)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

unde

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (3, 4, 1), (2, 3, 1) \rangle = 6 + 12 + 1 = 19$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (2, 3, 1), (2, 3, 1) \rangle = 4 + 9 + 1 = 14,$$

deci

$$\mathbf{w}_2 = (3, 4, 1) - \frac{19}{14}(2, 3, 1) = \left(\frac{4}{14}, -\frac{1}{14}, -\frac{5}{14} \right)$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2$$

unde

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (1,2,2),(2,3,1) \rangle = 2+6+2 = 10$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle (1,2,2), \left(\frac{4}{14}, -\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}\right) \rangle = \frac{4}{14} - \frac{2}{14} - \frac{10}{14} = -\frac{8}{14}$$

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \left(\frac{4}{14}, -\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}\right), \left(\frac{4}{14}, -\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}\right) \rangle =$$

$$= \frac{16}{196} + \frac{1}{196} + \frac{25}{196} = \frac{42}{196}$$

Deci

$$\mathbf{w}_3 = (1,2,2) - \frac{10}{14}(2,3,1) - \frac{8 \cdot 14^2}{14 \cdot 42}\left(\frac{4}{14}, -\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}\right)$$

Deci

$$\mathbf{w}_3 = (1,2,2) - \frac{10}{14}(2,3,1) - \frac{8\cdot 14^2}{14\cdot 42}\left(\frac{4}{14}, -\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}\right)$$

$$\mathbf{w}_3 = \left(-\frac{50}{42}, \frac{2}{42}, \frac{94}{42}\right)$$

Deci

$$\mathbf{w}_3 = (1,2,2) - \frac{10}{14}(2,3,1) - \frac{8 \cdot 14^2}{14 \cdot 42}\left(\frac{4}{14}, -\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}\right)$$

$$\mathbf{w}_3 = \left(-\frac{50}{42}, \frac{2}{42}, \frac{94}{42}\right)$$

Baza ortogonală este:

$$B' = \{\mathbf{w}_1 = (2,3,1), \mathbf{w}_2 = \left(\frac{4}{14}, -\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}\right), \mathbf{w}_3 = \left(-\frac{50}{42}, \frac{2}{42}, \frac{94}{42}\right)\}.$$

Pas 3: Fie versorii $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}$, $\mathbf{u}_3 = \dfrac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|}$. Atunci mulțimea $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$.

Pas 3: Fie versorii $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}$, $\mathbf{u}_3 = \dfrac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|}$. Atunci mulțimea $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$. Avem:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} = \sqrt{14}$$

$$\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} = \sqrt{\frac{16+1+25}{196}} = \frac{\sqrt{42}}{14}$$

$$\|\mathbf{w}_3\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle} = \sqrt{\frac{2500+4+8836}{1764}} = \frac{3\sqrt{35}}{7}$$

Deci baza ortonormată este $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ unde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}\right)$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \left(-\frac{25}{9\sqrt{35}}, \frac{1}{9\sqrt{35}}, \frac{47}{9\sqrt{35}}\right).$$

Exemplu

Să se construiască o bază ortonormată pentru $\mathbb{R}^2$ plecând de la baza

$$B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (-1, 1)\},$$

folosind produsul scalar canonic, respectiv produsul scalar $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$.

Folosim produsul scalar canonic din $\mathbb{R}^2$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2, \ \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$$

Aplicăm procedeul de ortonormare Gram-Schmidt:

Pas 1: Avem baza $B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (-1, 1)\}$.

Folosim produsul scalar canonic din $\mathbb{R}^2$:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2,\ \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$$

Aplicăm procedeul de ortonormare Gram-Schmidt:
Pas 1: Avem baza $B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (-1, 1)\}$.
Pas 2: Construim baza ortogonală $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, unde:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

Calculăm:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 2)$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 2)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

unde

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (-1, 1), (1, 2) \rangle = -1 + 2 = 1$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (1, 2), (1, 2) \rangle = 1 + 4 = 5,$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 2)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

unde

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (-1, 1), (1, 2) \rangle = -1 + 2 = 1$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (1, 2), (1, 2) \rangle = 1 + 4 = 5,$$

deci

$$\mathbf{w}_2 = (-1, 1) - \frac{1}{5}(1, 2) = \left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

Pas 3: Fie versorii $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}$. Atunci mulțimea $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$.

Pas 3: Fie versorii $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}$. Atunci mulțimea $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$. Avem:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} = \sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} = \sqrt{\frac{36+9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{5} = \frac{3}{5}$$

Pas 3: Fie versorii $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}$. Atunci mulțimea $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$. Avem:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} = \sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} = \sqrt{\frac{36+9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{5} = \frac{3}{5}$$

Deci baza ortonormată este $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ unde

Pas 3: Fie versorii $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}$. Atunci mulțimea $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$. Avem:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} = \sqrt{5}$$

$$\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} = \sqrt{\frac{36+9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{5} = \frac{3}{5}$$

Deci baza ortonormată este $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ unde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = (-2, 1)$$

Folosim produsul scalar
$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$; Aplicăm procedeul de ortonormare Gram-Schmidt:
Pas 1: Avem baza $B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (-1, 1)\}$.

Folosim produsul scalar
$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$; Aplicăm procedeul de ortonormare Gram-Schmidt:
Pas 1: Avem baza $B = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (-1, 1)\}$.
Pas 2: Construim baza ortogonală $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, unde:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

Calculăm:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 2)$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 2)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

unde

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (-1, 1), (1, 2) \rangle = -1 - 1 + 2 + 8 = 8$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (1, 2), (1, 2) \rangle = 1 - 2 - 2 + 16 = 13,$$

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 2)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

unde

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (-1, 1), (1, 2) \rangle = -1 - 1 + 2 + 8 = 8$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle (1, 2), (1, 2) \rangle = 1 - 2 - 2 + 16 = 13,$$

deci

$$\mathbf{w}_2 = (-1, 1) - \frac{8}{13}(1, 2) = \left(-\frac{21}{13}, -\frac{3}{13} \right)$$

Pas 3: Fie versorii $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}$. Atunci mulțimea $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$.

Pas 3: Fie versorii $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}$. Atunci mulțimea $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$. Avem:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} = \sqrt{13}$$

$$\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} = \sqrt{\frac{(-21)^2 - 6 \cdot 21 + 4 \cdot 9}{13^2}} = \sqrt{\frac{27}{13}}$$

Pas 3: Fie versorii $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$, $\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}$. Atunci mulțimea $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$. Avem:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} = \sqrt{13}$$

$$\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} = \sqrt{\frac{(-21)^2 - 6 \cdot 21 + 4 \cdot 9}{13^2}} = \sqrt{\frac{27}{13}}$$

Deci baza ortonormată este $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ unde

Pas 3: Fie versorii $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$, $\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}$. Atunci mulțimea $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$. Avem:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} = \sqrt{13}$$

$$\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} = \sqrt{\frac{(-21)^2 - 6 \cdot 21 + 4 \cdot 9}{13^2}} = \sqrt{\frac{27}{13}}$$

Deci baza ortonormată este $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ unde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \left(-\frac{21}{\sqrt{351}}, -\frac{3}{\sqrt{351}} \right)$$

Exemplu

Să se construiască o bază ortonormată pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ plecând de la baza

$$B = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\},$$

folosind produsul scalar canonic

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB^T).$$

Aplicăm procedeul de ortonormare Gram-Schmidt:

Pas 1: Avem baza

$$B = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Aplicăm procedeul de ortonormare Gram-Schmidt:

Pas 1: Avem baza

$$B = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Pas 2: Construim baza ortogonală $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$, unde:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle} \mathbf{w}_3.$$

Calculăm:

Avem

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avem

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

și

Avem

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

și

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right) = -1 + 0 = -1$$

Avem

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

și

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right) = -1 + 0 = -1$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right) = 5 + 1 = 6,$$

Avem

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$$

și

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right) = -1 + 0 = -1$$

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right) = 5 + 1 = 6,$$

Deci

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2$$

unde

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2$$

unde

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right) = 1 + 0 = 1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2$$

unde

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right) = 1 + 0 = 1$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T \right) = -\frac{5}{6}$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2$$

unde

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right) = 1 + 0 = 1$$

$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T \right) = -\frac{5}{6}$$

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T \right) = \frac{11}{6},$$

Obținem

$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{11}\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Pentru ultimul vector avem:

$$\mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle}\mathbf{w}_3.$$

Deci

Pentru ultimul vector avem:

$$\mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle}\mathbf{w}_3.$$

Deci

$$\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right) = 2 + 2 = 4$$

Pentru ultimul vector avem:

$$\mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle}\mathbf{w}_3.$$

Deci

$$\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T\right) = 2 + 2 = 4$$

$$\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T\right) = \frac{10}{6}$$

Pentru ultimul vector avem:

$$\mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle}\mathbf{w}_3.$$

Deci

$$\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \right) = 2 + 2 = 4$$

$$\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T \right) = \frac{10}{6}$$

$$\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}^T \right) = \frac{1}{11}$$

Spații euclidiene

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T \right) = \frac{5}{11},$$

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T \right) = \frac{5}{11},$$

Obținem

$$\mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{11} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Am găsit baza ortogonală

$$\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

Normăm vectorii:

Am găsit baza ortogonală

$$\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

Normăm vectorii:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} = \sqrt{6}, \ \|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} = \sqrt{\frac{11}{6}}$$

$$\|\mathbf{w}_3\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle} = \sqrt{\frac{5}{11}}, \ \|\mathbf{w}_4\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_4 \rangle} = \sqrt{\frac{9}{5}}$$

Am găsit baza ortogonală

$$\left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

Normăm vectorii:

$$\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} = \sqrt{6},\ \ \|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} = \sqrt{\frac{11}{6}}$$

$$\|\mathbf{w}_3\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle} = \sqrt{\frac{5}{11}},\ \ \|\mathbf{w}_4\| = \sqrt{\langle \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_4 \rangle} = \sqrt{\frac{9}{5}}$$

și obținem baza ortonormată $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, unde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \sqrt{\frac{6}{11}} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_3 = \sqrt{\frac{11}{5}} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ 1 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \sqrt{\frac{5}{9}} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Definiție

Fie V un spațiu euclidian și S un subspațiu vectorial. Mulțimea

$$S^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \perp \mathbf{w},\ \forall \mathbf{w} \in S\}$$

se numește **complementul ortogonal** al lui S și $S^{\perp}$ este un subspațiu vectorial al lui V.

Definiție

Fie V un spațiu euclidian și S un subspațiu vectorial. Mulțimea

$$S^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \perp \mathbf{w},\ \forall \mathbf{w} \in S\}$$

se numește **complementul ortogonal** al lui S și $S^{\perp}$ este un subspațiu vectorial al lui V.

Teoremă

Fie V un spațiu euclidian și S un subspațiu vectorial. Atunci $V = S \oplus S^{\perp}$.

Exemplu

Să se determine complementul ortogonal al subspațiului vectorial:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}.$$

Exemplu

Să se determine complementul ortogonal al subspațiului vectorial:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}.$$

Soluție:

Aplicăm definiția:

$$S^\perp = \{\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1,\ \forall \mathbf{v}_1 \in S\} =$$

Exemplu

Să se determine complementul ortogonal al subspațiului vectorial:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}.$$

Soluție:

Aplicăm definiția:

$$S^{\perp} = \{\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1, \ \forall \mathbf{v_1} \in S\} =$$

$$= \{\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0, \ \forall \mathbf{v_1} = (x, y, 2y - x)\} =$$

$\square$

$$= \{\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + c(2y - x) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + c(2y - x) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\mathbf{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : x(a - c) + y(b + 2c) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + c(2y - x) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : x(a - c) + y(b + 2c) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - c = 0,\ \ b + 2c = 0\} =$$

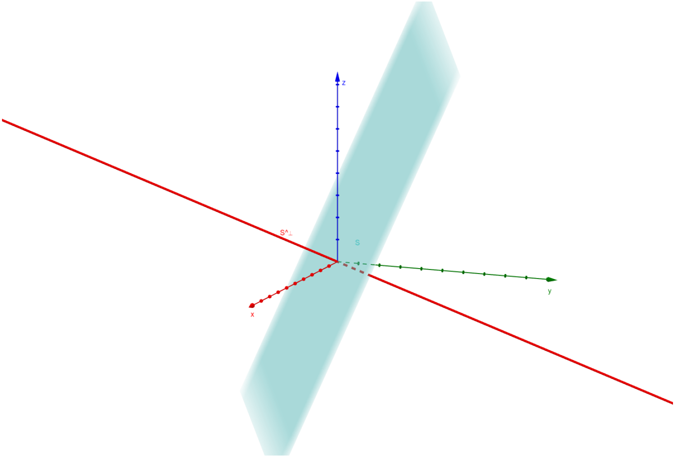
$$= \{\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + c(2y - x) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : x(a - c) + y(b + 2c) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - c = 0,\ \ b + 2c = 0\} =$$

$$= \{\mathbf{v} = (c, -2c, c) : c \in \mathbb{R}\}.$$

Spații euclidiene



Exemplu

Să se determine subspațiul $S_3 \leq \mathbb{R}^3$ astfel încât este ortogonal subspațiilor:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0, y = 0\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y = 0, x + z = 0\}$$

și $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 = \mathbb{R}^3$.

Exemplu

Să se determine subspațiul $S_3 \leq \mathbb{R}^3$ astfel încât este ortogonal subspațiilor:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0, y = 0\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y = 0, x + z = 0\}$$

și $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 = \mathbb{R}^3$.

Soluție:

Avem:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0, y = 0\} = \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)\}$$

Exemplu

Să se determine subspațiul $S_3 \leq \mathbb{R}^3$ astfel încât este ortogonal subspațiilor:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0, y = 0\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y = 0, x + z = 0\}$$

și $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 = \mathbb{R}^3$.

Soluție:

Avem:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0, y = 0\} = \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y = 0, x + z = 0\} = \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_2 = (1, 3, -1)\}.$$

Considerăm vectorul $\mathbf{v} = (a, b, c) \in S_3$. Din S_3 ortogonal pe S_1 și pe S_2 găsim $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_2$.

Considerăm vectorul $\mathbf{v} = (a, b, c) \in S_3$. Din S_3 ortogonal pe S_1 și pe S_2 găsim $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_2$.
Cum $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1$, avem $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$, adică: $a + c = 0$.

Considerăm vectorul $\mathbf{v} = (a, b, c) \in S_3$. Din S_3 ortogonal pe S_1 și pe S_2 găsim $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_2$.
Cum $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1$, avem $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$, adică: $a + c = 0$.
Din $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_2$, avem $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$, adică: $a + 3b - c = 0$.

Considerăm vectorul $\mathbf{v} = (a, b, c) \in S_3$. Din S_3 ortogonal pe S_1 și pe S_2 găsim $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_2$.
Cum $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1$, avem $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$, adică: $a + c = 0$.
Din $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_2$, avem $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$, adică: $a + 3b - c = 0$.
Obținem că $\mathbf{v} = (a, b, c) = (-c, \frac{2}{3}c, c)$, deci

$$S_3 = \mathcal{S}pan\{\mathbf{v} = (-3, 2, 3)\}.$$

Mai mult, $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 = \mathbb{R}^3$.

Spații euclidiene