

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 6 Sisteme de ecuații

Pentru a începe să discutăm despre rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, vom introduce în cele ce urmează rangul unei matrice.

Definiția 1. Se numește *rangul* matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$, $A \neq 0_{m,n}$, ordinul maxim al unui minor nenul al matricii A . Vom nota rangul cu $\text{rang}(A)$. Prin convenție $\text{rang}(0_{m,n}) = 0$.

Așadar $\text{rang}(A) = r \Leftrightarrow A$ are un minor de ordin r nenul și toți minorii de ordin mai mare (dacă există) sunt nuli.

Observația 2. (1) $\text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$
(2) $\text{rang}({}^t A) = \text{rang}(A)$
(3) $\text{rang}(A) = r \Leftrightarrow A$ are un minor de ordin r nenul și toți minorii de ordin $r + 1$ nuli.

Demonstrație: " \Rightarrow " Clar. " \Leftarrow " Din formula Laplace, un minor de ordin $s > r + 1$, deci e nul. Sau altfel: Folosind dezvoltarea după o linie, rezultă că orice minor de ordin $r + 2$ e combinație liniară de ordin $r + 1$, deci nul, și așa mai departe prin inducție.

□

(4) $\text{rang}(A \cdot B) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$ ptr. orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$.

Demonstrație: Din formula Binet-Cauchy un minor de ordin r a matricei $A \cdot B$ este o combinație liniară de minori de ordin r ai matricii A (respectiv B), deci $\text{rang}(A \cdot B) \leq \text{rang}(A)$ și $\text{rang}(A \cdot B) \leq \text{rang}(B)$.

□

(5) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ inversabilă și $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, atunci $\text{rang}(U \cdot A) = \text{rang}(A) = \text{rang}(A \cdot V)$.

Demonstrație: $\text{rang}(U \cdot A) \leq \min\{\text{rang}(U), \text{rang}(A)\} \leq \text{rang}(A)$ și $\text{rang}(A) = \text{rang}(U^{-1}(U \cdot A)) \leq \text{rang}(U \cdot A)$. Din cele două inegalități ne rezultă prima egalitate. Similar se demonstrează și a doua egalitate.

□

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$. Notăm cu $C_1(A), \dots, C_n(A)$ coloanele matricei A . $C_j(A) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$.

Teorema 3 (Kronecker). $\text{rang}(A) = \dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$

Deci teorema Kronecker ne spune că $\text{rang}(A)$ este egal cu dimensiunea spațiului generat de coloanele matricei A . Acest spațiu este un subspațiu în \mathbb{R}^m .

Demonstrație: Dacă $A = 0$, este clar. Presupunem $A \neq 0$. Fie $r \in \mathbb{N}^*$ a.î. există un minor nenul de ordin r și toți minorii de ordin $r+1$ care-l bordează, (în caz că există) sunt nuli. Arătăm că $\dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle = r$. Cum $\text{rang}(A)$ este un astfel de r , va rezulta că $\dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle = \text{rang}(A)$. În plus, rezultă că orice astfel de r este egal cu $\text{rang}(A)$.

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că minorul Δ aflat la intersecția primelor r linii cu primele r coloane din A este nenul. Atunci $C_1(A), \dots, C_r(A)$ sunt liniar independente. Altfel, am avea o relație de tipul $C_j(A) = \sum_{1 \leq i \leq r; i \neq j} \alpha_i C_i(A)$, pentru niște $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq r; i \neq j}$. Notând cu $\widetilde{C_i(A)}$ coloana de lungime r obținută luând primele r linii din $C_i(A)$, obținem $\widetilde{C_j(A)} = \sum_{1 \leq i \leq r; i \neq j} \alpha_i \widetilde{C_i(A)}$, deci în Δ o coloană este combinație de celelalte coloane, de unde $\Delta = 0$, o contradicție. Deci coloanele $C_1(A), \dots, C_r(A)$ sunt liniar independente de unde $\dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle \geq r$.

Arătăm că $C_j(A) \in \langle C_1(A), \dots, C_r(A) \rangle$ pentru orice $j > r$, de unde va rezulta că $\dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle = r$.

$$\text{Fie } j > r \text{ c si } 1 \leq i \leq m. \text{ Atunci } \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0 \text{ deoarece pentru}$$

$1 \leq i \leq r$ acest determinant are două linii (i și $r+1$) egale, iar pentru $i > r$ e un minor de ordin $r+1$ care bordează Δ .

Dezvoltând după ultima linie rezultă $d_1 \cdot a_{i1} + \dots + d_r \cdot a_{ir} + \Delta \cdot a_{ij} = 0$, iar d_1, \dots, d_r sunt niște complemenți algebrici ce nu depind de i .

Obținem că $a_{ij} = -\Delta^{-1}d_1a_{i1} - \dots - \Delta^{-1}d_ra_{ir}$ pentru orice $1 \leq i \leq m$, de unde $C_j(A) = -\Delta^{-1}d_1C_1(A) - \dots - \Delta^{-1}d_rC_r(A)$, ceea ce doream.

□

Teorema 4 (versiunea pe linii a teoremei Kronecker). $\text{rang}(A) = \dim \langle L_1(A), \dots, L_m(A) \rangle$, unde $L_i(A)$ sunt liniile matricei A , $L_i(A) \in \mathbb{R}^n$.

Demonstrație: Rezultă din faptul că $\text{rang}(A) = \text{rang}({}^tA)$.

□

Corolarul 5 (al demonstrației teoremei Kronecker). *Dacă pentru matricea A există un minor de ordin r nenul și toți minorii de ordin $r + 1$ care-l bordează sunt nuli, atunci $\text{rang}(A) = r$.*

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Considerăm sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistemul scris mai sus este un sistem de m ecuații cu n necunoscute. Matricea asociată sistemului este $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ iar coloana termenilor liberi este $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Sistemul (??) se poate scrie sub formă matriceală $AX = B$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e matricea necunoscutelor.

Considerăm și matricea extinsă,

$$A^e = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R}).$$

care se obține din matricea A adăugând coloana $n + 1$ formată din membrii dreپți ai sistemului. Fiecare coloană este un vector în \mathbb{R}^m .

Definiția 6. Se numește *soluție* a sistemului de mai sus un vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

care verifică toate ecuațiile sistemului.

Un sistem care admite cel puțin o soluție se numește *compatibil*. Altfel acesta se numește *incompatibil*.

Teorema 7 (Kronecker-Capelli). *Sistemul (??) este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e)$.*

Demonstrație: Observăm că $AX = x_1C_1(A) + \dots + x_nC_n(A)$, deci sistemul (??) este echivalent cu $x_1C_1(A) + \dots + x_nC_n(A) = B$.

" \Rightarrow " Dacă sistemul (??) este compatibil, fie x_1, x_2, \dots, x_n o soluție. Atunci $B = x_1C_1(A) + \dots + x_nC_n(A) \in \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$ și deci $\langle C_1(A), \dots, C_n(A), B \rangle = \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$. Avem $\dim(\langle C_1(A), \dots, C_n(A), B \rangle) = \dim(\langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle)$, și din teorema Kronecker rezultă $\text{rang}(A^e) = \text{rang}(A)$.

" \Leftarrow " Avem $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e) \Rightarrow \dim(\langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle) = \dim(\langle C_1(A), \dots, C_n(A), B \rangle)$. Dar $\langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle \subset \langle C_1(A), \dots, C_n(A), B \rangle$, și pentru că avem egalitate de dimensiuni atunci avem egalitatea spațiilor. Rezultă că $B \in \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$, adică există x_1, \dots, x_n a.î. $B = x_1C_1(A) + \dots + x_nC_n(A) \Rightarrow x_1, \dots, x_n$ este soluție a sistemului (??) .

□

Cum se rezolvă sistemul (??) atunci când $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e)$?

Voi prezenta în continuare metoda eliminării Gauss-Jordan.

Observăm că un sistem liniar peste corpul \mathbb{R} este echivalent (adică are aceleași soluții) cu un sistem obținut prin aplicarea de un număr finit de ori a unor operații de tipul:

- permutarea a două ecuații
- înmulțirea unei ecuații cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}^*$
- adunarea la o ecuație a unei alte ecuații înmulțite cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Pentru sistemul (??) scris sub forma matriceală $AX = B$, aceste operații înseamnă:

- permutarea a două linii
- înmulțirea unei linii cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$
- adunarea la o linie a unei alte linii înmulțite cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$

operații aplicate matricelor A și B , deci matricei extinse $A^e = (A|B)$.

Definiția 8. Se numește matrice eșalon o matrice cu proprietățile:

- liniile nule (dacă) există se află sub liniile nenule
- primul element nenul (de la stânga la dreapta) de pe fiecare linie nenulă este 1; acesta numindu-se pivotul liniei

- pivotul de pe linia $i + 1$ este la dreapta pivotului de pe linia i , pentru orice i
- orice pivot este singurul element nenul de pe coloana sa

Propoziția 9. *Orice matrice poate fi transformată după un număr finit de operații cu linii într-o matrice eșalon.*

Putem da acum algoritmul după Gauss-Jordan de rezolvare a sistemelor de ecuații.

Scriem matricea A^e a sistemului și o aducem la forma eșalon. Dacă există un pivot pe ultima coloană atunci sistemul este incompatibil (în sistemul echivalent avem o ecuație $0 = 1$).

Altfel, necunoscutele corespunzătoare coloanelor cu pivoți sunt coloanele principale, celelate secundare. Trecem necunoscutele secundare în membrul drept și le dăm valori arbitrare în \mathbb{R} și apoi calculăm necunoscutele principale în funcție de cele secundare. Sistemul e compatibil determinat (adică are soluție unică) dacă avem un pivot pe fiecare coloană în afară de ultima.

Observăm că numărul pivoților = $\text{rang}(A^e)$ iar $\text{rang}(A)$ numărul pivoților din primele n coloane și totodată numărul variabilelor principale.