GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 4
Spaţii vectoriale. Bază

Voi începe cu o noţiune pe care am întâlnit-o în cursul trecut. Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

Definiţia 1. Considerăm $S \subset V$. Numim *combinaţie liniară* de elemente din S orice sumă de tipul $\sum_{i\in I} \alpha_i v_i$, cu $\alpha_i \in \mathbb{R}$ şi $v_i \in S$. Dacă $|I| = n < \infty$, atunci combinaţia liniară finită se scrie $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

Sistem de generatori este $S \subset V$ pentru care $< S >= V$. Acest lucru înseamnă că orice $v \in V$ se scrie ca o combinaţie liniară de vectori din S.

Observaţia 2. Fie V un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ şi $S \subset V$ un sistem de generatori pentru V.

(1) Dacă $S \subset S' \Longrightarrow S'$ este sistem de generatori.
(2) Dacă $S \subset < S' > \Longrightarrow S'$ este sistem de generatori.

Exemplul 3. (1) $\mathbb{R}[X]_n = \{a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \mid a_j \in \mathbb{R}\}$, spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi reali. Orice polinom de grad cel mult n este o combinaţie liniară cu coeficienţi reali de elemente din $\mathcal{B} = \{X^n, X^{n-1}, \ldots, X, 1\}$, deci $\mathcal{B}$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}[X]_n$.
(2) În particular pentru $n = 3$, $\mathbb{R}[X]_3 = \{a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \mid a_j \in \mathbb{R}\}$, $S = \{X^3, X^2, X, 1\}$. De exemplu $X + 1 = 0X^3 + 0X^2 + 1X + 1$.

Definiţia 4. $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$ se numesc vectori *liniar independenţi* dacă şi numai dacă orice combinaţie liniară nulă de aceşti vectori este trivială.

Definiţia de mai sus se scrie: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ liniar independenţi dacă şi numai dacă $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots a_kv_k = 0_V \Longrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0 \in \mathbb{R}$

Observaţia 5. (1) $(\forall) v \in V \backslash \{0_V\}$ este liniar independent. $a \cdot v = 0_V \Rightarrow a = 0$.
(2) 0_V NU este liniar independent . Pentru $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^\star, a \cdot 0_V = 0_V$. Mai mult 0_V nu face parte dintr-un sistem de vectori liniar independenţi. Fie $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, 0_V\}$ un sistem de vectori ce conţine vectorul 0_V. Pentru $(\forall) a \in \mathbb{R}^\star$ avem combinaţia liniară nulă $0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_k + a0_V = 0_V$, în care avem un coeficient nenul.
(3) Dacă $F \subset V$ este o mulţime de vectori liniar independenţi în V şi $F' \subset F \Rightarrow F'$ este mulţime de vectori liniar independenţi

Definiţia 6. Numim *bază* a spaţiului vectorial V un sistem de vectori $\{v_1, \ldots, v_p\}$ care este atât liniar independent cât şi sistem de generatori pentru V.

Exemplul 7. (1) $S = \{X^3, X^2, X, 1\}$ este bază pentru $\mathbb{R}[X]_3$. Am văzut în **exemplul 3** (2) că S este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}[X]_3$. Verificăm faptul că este sistem de vectori liniar independenţi.

Considerăm $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 1 = 0 \in \mathbb{R}[X]_3$. În membrul drept avem polinomul nul iar egalitatea înseamnă că cele două polinoame sunt identice, rezultă faptul că au aceeaşi coeficienţi. Deci $a_j = 0, 0 \leqslant j \leqslant 3$.

(2) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ Considerăm $\mathcal{B} = \{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Arătăm că este bază pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Considerăm un element arbitrar din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$. Deci $\mathcal{B}$ este sistem de generatori.

Dacă $aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = d = 0$.

Aşadar $\mathcal{B}$ este şi sistem liniar independent, şi deci bază.

(3) Considerăm acum $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \mathcal{B} = \{E_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$, unde $E_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pe poziţia (i, j)} \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$ Se demonstrează ca şi în exemplul anterior că $\mathcal{B}$ este bază pentru $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Observaţia 8. Dată o bază $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a unui $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial V şi $v \in V$, $(\exists)$ **unici** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Dacă mai există $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ a.î. $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$, atunci $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0_V \Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$ ($v_1, \ldots, v_n$ liniar independenţi) $\Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i, i = 1 \ldots = n$.

Se pun două întrebări fireşti :

1. Dacă există bază a unui spaţiu vectorial V.

2. Ce legătură este între două baze ale aceluiaşi spaţiu vectorial ?

Vis-a-vis de prima întrebare avem următoarea

Teorema 9. *Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$, F un sistem de vectori liniar independenţi şi S un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial V, cu $F \subset S$. Atunci există o bază $\mathcal{B}$ a lui V a.î. $F \subset \mathcal{B} \subset S$.*

Pentru orice spaţiu vectorial există sisteme de vectori liniar independenţi, de exemplu, $(\forall) v \neq 0_V$ (**observaţia 5** (1)).

Corolarul 10. (1) *F liniar independent în $V \Rightarrow (\exists)$ bază $\mathcal{B}$ cu $F \subset \mathcal{B}$.*
(2) *S sistem de generatori în $V \Rightarrow (\exists)$ bază $\mathcal{B}$ cu $\mathcal{B} \subset S$.*
(3) *Orice spaţiu vectorial are o bază.*

La a doua întrebare răspunsul este dat de

Teorema 11. *Fie V un spaţiu vectorial şi $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$ baze pentru V. Atunci $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$ (există deci o bijecţie $f : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$).*

Exemplul 12. $\mathbb{R}[X]_2 = \{a_2X^2 + a_1X + a_0 \mid a_j \in \mathbb{R}\}$. Avem baza $\mathcal{B}_1 = \{X^2, X, 1\}$. prezentată anterior. Să verificăm că $\mathcal{B}_2 = \{(X-1)^2, (X-1), 1\}$ este bază .

Sistem de generatori: exprimăm elementele din $\mathcal{B}_1$ ca nişte combinaţii liniare de vectorii din $\mathcal{B}_2$ şi aplicăm **observaţia 2** (2), pentru $S = \mathcal{B}_1$ şi $S' = \mathcal{B}_2$.

Considerăm $X \in \mathcal{B}_1$, $X = 1 \cdot (X-1) + 1 \cdot 1) \in <\mathcal{B}_2>$.

Similar $X^2 \in \mathcal{B}_2, X^2 = 1 \cdot (X-1)^2 + 2 \cdot (X-1) + 1 \cdot 1$, de unde $X^2 \in <\mathcal{B}_2>$. Din observaţia mai sus menţionată rezultă $\mathcal{B}_2$ este sistem de generatori.

Sistem liniar independent: considerăm $a_1(X-1)^2 + a_2(X-1) + a_3 \cdot 1 = 0$, unde 0 este polinomul nul.

Identificând coeficienţii termenilor $X^2, X, 1$ rezultă: $\begin{cases} a_1 & = 0 \\ -2a_1 + a_2 & = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$..

Vedem în acest exemplu că $|B_1| = |\mathcal{B}_2| = 3$.

Pentru că oricare două baze într-un spaţiu vectorial V au acelaşi cardinal putem da

Definiţia 13. Fie V un spaţiu vectorial. Numim *dimensiunea spaţiului vectorial V* şi notăm cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim(V) = |\mathcal{B}|$, cardinalul unei baze $\mathcal{B}$ a lui V.

Observaţia 14. (1) $\dim_{\mathbb{R}} 0 = 0$. Baza spaţiului vectorial 0 este $\varnothing$ (mulţimea vidă).
(2) $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, o bază fiind descrisă în **exemplul 7** (2). Pentru $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avem $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$, o bază fiind specificată în **exemplul 7** (3).
(3) $\dim(\mathbb{R}[X]_2) = 3$, o bază fiind $\mathcal{B}_1 = \{X^2, X, 1\}$ sau $\mathcal{B}_2 = \{(X-1)^2, (X-1), 1\}$.

Definiţia 15. Fie $\{V\}_{i\in I}$ subspaţii ale spaţiului vectorial V. Notăm $< \bigcup_{i\in I} V_i >$, subspaţiul generat de reuniunea subspaţiilor V_i, cu $\sum_{i\in I} V_i$ şi numim acest subspaţiu, suma subspaţiilor V_i. Dacă $|I| < \infty$, atunci $\sum_{i\in I} V_i = \sum_{i=1}^n V_i = V_1 + V_2 + \ldots V_n$.

$$\text{Deci} \quad \sum_{i\in I} V_i = \{\underbrace{v_{i_1} + v_{i_2} + \ldots + v_{i_k}}_{\text{finită}} \mid v_{i_j} \in V_{i_j}\}.$$

Teorema 16 (teorema Grassmann)**.** *Fie V un spaţiu vectorial şi U_1, U_2 subspaţii ale sale. Atunci* $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$.

Observaţia 17. Acest rezultat este o manifestare a principiului includerii-excluderii. Acesta este: dacă A, B sunt mulţimi finite, atunci $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. În demonstraţia teoremei A şi B sunt baze pentru U_1 şi respectiv U_2.

Morfisme de spaţii vectoriale

Definiţia 18. Se numeşte morfism de spaţii vectoriale $f : V \longrightarrow W$ o funcţie aditivă şi omogenă.

- aditivă: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, pentru $(\forall)v_1, v_2 \in V$.
- omogenă: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ pentru $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)v \in V$.

Propoziţia 19. *$f : V \longrightarrow W$ este morfism de spaţii vectoriale dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)v_1, v_2 \in V$ avem $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.*

Observaţia 20. *$f : V \longrightarrow W$ morfism, atunci $f(0_V) = 0_W$.*

Exemplul 21. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$. Să demonstrăm că este morfism. Fie $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = f(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) = \alpha \cdot f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \cdot f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.

Fie $f : V \longrightarrow W$ un morfism de spaţii vectoriale reale şi $U \subset V$ un subspaţiu vectorial. Atunci $f(U)$ este subspaţiu în W.

În particular $\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(v) | v \in V\}$, *imaginea morfismului f* este subspaţiu în W.

Demonstraţie: Fie $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow (\exists)\ v_1, v_2 \in V$ a.î. $f(v_1) = w_1$ şi $f(v_2) = w_2$. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2)$. Ultima egalitate are loc pentru că f este morfism. $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$ şi astfel am arătat că $\alpha w_1 + \beta w_2 \in \mathrm{Im}(f)$, adică $\mathrm{Im}(f)$ este subspaţiu în W.

□

Dacă $Y \subset W$ este un subspaţiu în W, atunci $f^{-1}(Y) = \{v \in V \mid f(v) \in Y\}$ este subspaţiu vectorial în V.

În particular $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0_W) = \{v \in V | f(v) = 0_W\}$, *nucleul morfismului f*, este subspaţiu în V. Demonstrăm acest lucru.

Demonstraţie: Fie $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = \alpha 0_W + \beta 0_W = 0_W \Leftrightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in \mathrm{Ker}(f)$.

□

Din afirmaţiile anterioare există o corespondenţă bijectivă între $\{U \subset V |\ U$ subspaţiu şi $\mathrm{Ker}(f) \subset U\}$ şi $\{Y \subset W |\ Y$ subspaţiu în $W\}$, dată de $U \mapsto f(U)$ şi $Y \mapsto f^{-1}(Y)$.

Teorema 22 (rang-defect)**.** *Fie* $f : V \longrightarrow W$ *morfism de spaţii vectoriale finit dimensionale. Atunci* $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

$\dim(\mathrm{Im}(f))$ se numeşte *rangul* aplicaţiei f, şi $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ *defectul* lui f.

Demonstraţie: $\mathrm{Ker}(f) \subset V$. $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) < \infty$. Fie $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ bază pentru $\mathrm{Ker}(f)$. Completăm la o bază pentru V. Fie $\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ această bază. Demonstrăm că $\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \ldots, f(u_n)\}$ este bază pentru $\mathrm{Im}(f)$.

Considerăm $w \in \mathrm{Im}(f)$ arbitrar. $(\exists) v \in V$ a.î. $f(v) = w$.

Dar $\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ este bază pentru V, deci $(\exists)\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \alpha_n u_n$.

Atunci $w = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_k f(v_k) + \alpha_{k+1} f(u_{k+1}) + \ldots + \alpha_n f(u_n) = \alpha_{k+1} f(u_{k+1}) + \ldots + \alpha_n f(u_n)$, pentru că $v_1, \ldots, v_k \in \mathrm{Ker}(f)$. Deci $\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \ldots, f(u_n)\}$ este sistem de generatori.

Considerăm acum $\beta_{k+1} f(u_{k+1}) + \ldots + \beta_n f(u_n) = 0_W \Leftrightarrow f(\beta_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \beta_n u_n) = 0_W \Leftrightarrow \beta_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \beta_n u_n \in \mathrm{Ker}(f)$. $\{v_1, \ldots v_k\}$ bază în $\mathrm{Ker}(f)$. Deci $(\exists)\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{R}$ a.î. $\beta_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \beta_n u_n = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_k v_k \Leftrightarrow \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_k v_k - \beta_{k+1} u_{k+1} - \ldots - \beta_n u_n = 0_V \Rightarrow \gamma_1 = \ldots = \gamma_k = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_n = 0$. Ultima implicaţie are loc datorită faptului că $\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ este bază în V. Deci $\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \ldots, f(u_n)\}$ este sistem liniar independent. $\square$

Spaţii vectoriale factor

Fie V un spaţiu vectorial şi X un subspaţiu al său. Pentru că V este grup abelian atunci X este subgrup normal şi deci putem forma grupul factor $V/X = \{\hat{v} | v \in V\}$, unde $\hat{v_1} = \hat{v_2} \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in X$.

Operaţia de adunare pe V/X este: $\hat{v_1} + \hat{v_2} = \widehat{v_1 + v_2}$, iar $\pi : V \longrightarrow V/X$, $\pi(v) = \hat{v}$ (proiecţia canonică) este morfism surjectiv de grupuri abeliene.

V/X are structura de $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial, unde înmulţirea cu scalari este $\alpha \cdot \hat{v} = \widehat{\alpha \cdot v}, (\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ şi $v \in V$.

Operaţia externă este corect definită: $\hat{v_1} = \hat{v_2} \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in X \Rightarrow \alpha(v_1 - v_2) \in X \Rightarrow \alpha v_1 - \alpha v_2 \in X \Rightarrow \widehat{\alpha v_1} = \widehat{\alpha v_2}$.

V/X este $\mathbb{R}$ spaţiu vectorialcu aceste operaţii (de verificat axiomele).

În plus, $\pi : V \longrightarrow V/X$, $\pi(v) = \hat{v}$ este morfism de spaţii vectoriale.

Avem $\pi(v_1 + v_2) = \widehat{v_1 + v_2} = \hat{v_1} + \hat{v_2} = \pi(v_1) + \pi(v_2)$ şi $\pi(\alpha v) = \widehat{\alpha v} = \alpha \hat{v} = \alpha \pi(v)$.

V/X se numeşte *spaţiul vectorial factor al lui* V *în raport cu* X.

Teorema 23 (teorema fundamentală de izomorfism)**.** *Fie* $f : V \longrightarrow W$ *un morfism de spaţii vectoriale. Atunci există un izomorfism de spaţii vectoriale* $V/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$*.*

Demonstraţie: Din demonstraţia teoremei fundamentale de izomorfism pentru grupuri ştim că aplicaţia $\overline{f} : V/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$, $\overline{f}(\widehat{v}) = f(v), v \in V$ este corect definită şi este izomorfism de grupuri.

În plus $\overline{f}(\alpha\widehat{v}) = \overline{f}(\widehat{\alpha v}) = f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha\overline{f}(\widehat{v})$. Deci $\overline{f}$ este chiar izomorfism de spaţii vectoriale.

□

Dacă V/X este un spaţiu vectorial factor, atunci morfismul $\pi : V \longrightarrow V/X$ induce o bijecţie între subspaţiile vectoriale $U \subset V$ a.î. $X \subset U$ şi subspaţiile lui V/X, dat de $U \longmapsto \pi(U) = U/X = \{\widehat{x} | x \in U\}$

Propoziţia 24. *Fie* V *un spaţiu vectorial real finit dimensional şi* X *un subspaţiu al său. Atunci* $\dim(V/X) = \dim(V) - \dim(X)$*.*

Demonstraţie: Considerăm $\pi : V \to V/X$, $\pi(x) = \widehat{x}$. $\mathrm{Ker}(\pi) = X$. Aplicăm teorema rang-defect morfismului π, care este surjectiv. Avem $\dim(V) = \dim(V/X) + \dim(X)$, de unde concluzia.

□

Spaţiul morfismelor între două spaţii vectoriale

Fie ca şi mai sus V, W două spaţii vectoriale peste corpul numerelor reale. Notăm cu $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \mathrm{Hom}(V, W) = \{f : V \longrightarrow W | f\ morfism\}$, mulţimea morfismelor între spaţiilor vectoriale V şi W.

Propoziţia 25. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ *este un spaţiu vectorial real.*

Demonstraţie: Fie $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demonstrăm că $\alpha f + \beta g$ este morfism de spaţii vectoriale. Fie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ şi $v_1, v_2 \in V$. $(\alpha f + \beta g)(a_1v_1 + a_2v_2) = \alpha f(a_1v_1 + a_2v_2) + \beta g(a_1v_1 + a_2v_2) = \alpha a_1 f(v_1) + \alpha a_2 f(v_2) + \beta a_1 g(v_1) + \beta a_2 g(v_2) = a_1(\alpha f(v_1) + \beta g(v_1)) + a_2(\alpha f(v_2) + \beta g(v_2)) = a_1(\alpha f + \beta g)(v_1) + a_2(\alpha f + \beta g)(v_2)$.

Deci $(\alpha f + \beta g) \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

□

Spaţii duale

Un caz particular al spaţiului morfismelor între două spaţii vectoriale este pentru $W = \mathbb{R}$.

Fie V un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial. Notăm cu $V^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$. Morfismele de la V la $\mathbb{R}$ se numesc şi funcţionale liniare. Pe mulţimea acestor funţionale liniare avem operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire cu scalari.

- $(f+g)(v) = f(v) + g(v), (\forall)v \in V, f, g \in V^\star$
- $(\alpha f)(v) = \alpha f(v), (\forall)v \in V, f \in V^\star, \alpha \in \mathbb{R}$.

Dacă $f : V \longrightarrow W$ este morfism de spaţii vectoriale, atunci $f^\star : W^\star \longrightarrow V^\star$ prin $f^\star(w^\star) = w^\star \circ f$ pentru orice $w^\star \in W^\star$.

Avem următoarele proprietăţi:

(1) fie $f : V \longrightarrow W$ şi $g : W \longrightarrow U$ morisme de spaţii vectoriale, atunci $(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star$.
(2) dacă $1_V : V \longrightarrow V$ este morfismul identic, atunci $(1_V)^\star = 1_{V^\star}$.
(3) dacă $f : V \longrightarrow W$ este izomorfism, atunci şi $f^\star$ este izomorfism.

Propoziţia 26. *Fie V un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial de dimensiune finită n. Atunci* $\dim(V^\star) = n$.

Demonstraţie: Fie $(e_i)_{i=1,n}$ bază a spaţiului vectorial V. Pentru fiecare $i = \overline{1,n}$ considerăm $e_i^\star \in V^\star$, definite prin $e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}, (\forall)j = \overline{1,n}$, unde $\delta_{i,j}$ este simbolul lui Kronecker. $\left(\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}\right)$.

Arătăm că $(e_i^\star)_{i=1,n}$ este bază a spaţiului vectorial $V^\star$.

- liniar independenţa: fie $a_j \in \mathbb{R}$ şi considerăm $a_1 e_1^\star + \ldots + a_n e_n^\star = 0$, funcţionala liniară nulă. Atunci pentru $(\forall)i = \overline{1,n}$, $(a_1 e_1^\star + \ldots + a_n e_n^\star)(e_i) = 0 \Leftrightarrow a_i \cdot 1 = 0$.

- sistem de generatori: fie $f \in V^\star$, cu $f(e_i) = b_i \in \mathbb{R}$, $(\forall)i = \overline{1,n}$. Atunci $f = b_1 e_1^\star + \cdots + b_n e_n^\star$. Se verifică egalitatea pentru orice vector e_i din baza lui V.

$\square$

Observaţia 27. *Baza din* **propoziţia 26** *se numeşte baza duală bazei* $(e_i)_{i=1,n}$.