Curs 12b: Prorietățile de închidere pentru limbajele independente de context

10 mai 2022

Teoremă: Clasa limbajelor independente de context este închisă la reuniune, concatenare, iterația Kleene.

Demonstrație: Fie L_1 și L_2 limbaje independente de context, $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$, $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$, $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici independente de context. Presupunem că $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ (dacă nu, putem redenumi neterminalele)

1 Închidere la reuniune

Construim $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1|S_2\})$ unde $S \notin N_1, S \notin N_2$. $L(G) = L_1 \cup L_2$ și G este independent de context. $w \in L(G) \iff S \Rightarrow_G^* w \iff$
$$\left\{ \begin{array}{c} S \Rightarrow_G S_1 \Rightarrow_{G_1}^* w sau \\ S \Rightarrow_G S_2 \Rightarrow_{G_2}^* w \end{array} \right\} \iff w \in L_1 \cup L_2$$
Deci $L_1 \cup L_2$ este independentă de context. $\square$

2 Închiderea la concatenare

Construim $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$ unde $S \notin N_1, S \notin N_2$. $w \in L(G) \iff S \Rightarrow_G^* w \iff S \Rightarrow_G S_1 S_2 \Rightarrow^* w \iff \exists w_1, w_2, S_1 \Rightarrow_G^* w1 și S_2 \Rightarrow_G^* w2$ unde $w_1 w_2 = w$. Din construcție $\left\{ \begin{array}{c} S1 \Rightarrow_G^* w_1 \iff S_1 \Rightarrow_{G_1}^* w1 \\ S2 \Rightarrow_G^* w_2 \iff S_2 \Rightarrow_{G_2}^* w2 \end{array} \right\} \Rightarrow w \in L_1 L_2$
Cum G este independentă de context $\Rightarrow L_1 L_2$ este independentă de context. $\square$

3 Iterația Kleene

Construim $G = (N_1 \cup \{S\}, T_1, S, P_1 \cup \{S \to \lambda | SS_1\})$, cu $S \notin N_1$. $w \in L(G) \iff S \Rightarrow_G^* w \iff S \Rightarrow_G^* \underbrace{S_1, S_1, \ldots, S_1}_{nori} \Rightarrow_G^* w \iff w = w_1 w_2 ... w_n$ cu $S_1 \Rightarrow_{G1}^* w_i, i = \{1, 2, ..., n\} \iff w \in L_1^*$ și G este independent de context $\Rightarrow L_1^*$ este independent de context. $\square$

Fie V, W alfabete.

Teoremă: $\varphi : v \longrightarrow P(W^*)$ a. î. $\varphi(a)$ este independentă de context pentru $\forall a \in V$. (substituție independentă de context).

Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj independent de context.

Atunci $\varphi(L)$ este limbaj independent de context.

Demonstrație: Fie $G = (N, T, S, P)$ o gramatică independentă de context pentru L.

Deci $L(G) = L$.

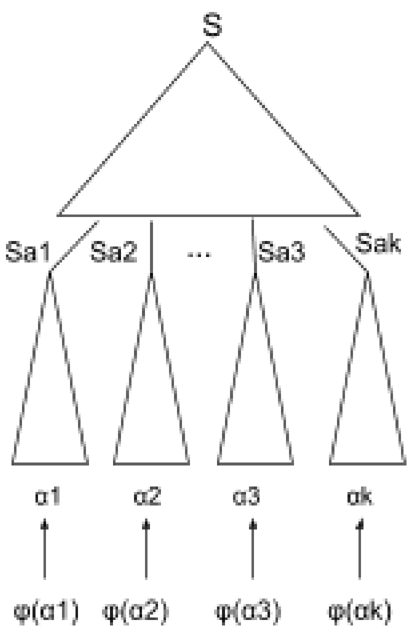
Definim $G_a = (N_a, W, S_a, P_a)$ gramatică independentă de context a. î. $L(G_a) = \varphi(a), \forall a \in V$.

Construim gramatica $G' = (N', W, S, P')$ unde $N' = N \cup \{S_a | a \in V\} \cup \bigcup_{a \in V} (N_a \backslash \{S_a\})$ $P' = \bigcup_{a \in V} P_a \cup \{x \to \alpha' | x \to \alpha \in P$ și α' este obținut din α înlocuind operațiile lui a cu S_a, $\forall a \in V\}$.

ex: $\alpha = aaAb$ și $\alpha' = S_a S_a A S_b$.

Avem: $w \in L(G') \iff S \Rightarrow_{G'}^* w \iff S \Rightarrow_{G'}^* S_{a_1} S_{a_2} ... S_{a_k} \Rightarrow^* w \iff w \in \varphi(a_1)\varphi(a_2)...\varphi(a_k) \iff w \in \varphi(a_1 ... a_k)$ unde $S \Rightarrow_{G'}^* a_1 ... a_k$.

Deci $w \in L(G') \iff w \in \varphi(L)$ și G' este independente de context $\Rightarrow$ clasa limbajelor independente de context este închisă la substituții independente de context.



Teoremă: Familia limbajelor independente de context este închisă la morfisme inverse.

$R : V^* \to U^*, R^{-1} : U^* \to 2^{V^*}, R^{-1}(x) = \{y | R(y) = x\}$ $R(xy) = R(x)R(y)$

Observații:R^{-1} nu este substituție $R^{-1}(xy) \neq R^{-1}(x)R^{-1}(y)$

Demonstrație: $R : V^* \to U^*, L \subseteq U^*$ independent de context.

Fie A independente de context $L = L(A), A = (Q, U, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F), R^{-1}(L) = \bigcup_{x \in L} R^{-1}(x)$. Să se demonstreze că $R^{-1}(L)$ independent de context.

Construim $A' = (Q', V, \Gamma, \delta', (q_0, \lambda), x_0, F \times \{\lambda\})$

$Q' = Q \times \{x \in U^* | \exists a \in V a..R(a) = zx, z \in U^*)$

$a \to xyzt$

$b \to xxyy$

i) $\delta'((q, x), \lambda, A) = \{((p, x), \alpha) | (p, \alpha) \in \delta(q, \lambda, A)\}, q \in Q, A \in \Gamma$

ii)$\delta'((q, a, x), \lambda, A) = \{((p, x), \alpha) | (p, \alpha) \in \delta(q, a, A)\}, a \in U$

iii)$\delta'((q, \lambda), a, y) = \{((q, R(a), y)\}, a \in V$.

Afirmație: $L(A') = R^{-1}(L(A))$

" $\supseteq$ " Fie $w = a_1 ... a_n, a_i \in V a..R(w) \in L(A).R(w) = R(a_1)...R(a_n) = w_1 ... w_n \in L(A)$

$(q_0, w_1, ..., w_n, z_0) \vdash_A^* (q_1, w_2, ..., w_n, \alpha_1) \vdash_A^* (q_2, w_3, ... w_n, \alpha_2) \vdash_A^* ... \vdash_A^* (q_n, \lambda, \alpha_n), q_n \in F$

Avem:

$$((q_0, \lambda), a_1, ..., a_n, z_0) \vdash_{A'}^* ((q_0, w_1), a_2, ..., a_n, z_0) \vdash_{A'}^*$$

$$((q_1, \lambda), a_2, ..., a_n, \alpha_1) \vdash_{A'}^* ((q_1, w_2), a_3, ..., a_n, \alpha_1) \vdash_{A'}^*$$

$$((q_2, \lambda), a_3, ..., a_n, \alpha_1) \vdash_{A'}^* ..... \vdash_{A'}^* ((q_n, \lambda), \lambda, \alpha_n), q_n \in F \times \{\lambda\}$$

deci $w \in L(A')$.