Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

seminarul 3

2021-2022

Spații și subspații vectoriale. Spații vectoriale finit generate.

Definiție

Fie $\Bbbk$ un corp comutativ și fie V o mulțime nevidă. Pe V considerăm două operații: $+ : V \times V \to V, (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}$, și $\cdot : \Bbbk \times V \to V, (\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \alpha \cdot \mathbf{w}$. Spunem că $(V, +, \cdot)$ are o structură de **spațiu vectorial peste corpul** $\Bbbk$ dacă $(V, +)$ este grup comutativ și sunt verificate următoarele condiții:

(i) $\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w}$,

(ii) $(\alpha +_{\Bbbk} \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$,

(iii) $(\alpha \cdot_{\Bbbk} \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v})$,

(iv) $1_{\Bbbk} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$,

pentru orice $\mathbf{v},\ \mathbf{w} \in V$ și orice $\alpha,\ \beta \in \Bbbk$.

Spații vectoriale:

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Spații vectoriale:

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.

Spații vectoriale:

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă.

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(*i*) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (x^{\alpha}) \oplus (y^{\alpha}) =$

Spații vectoriale:

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (x^{\alpha}) \oplus (y^{\alpha}) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (x^{\alpha}) \oplus (y^{\alpha}) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(ii) $(\alpha + \beta) \odot x =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^\alpha$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = (x^\alpha) \oplus (y^\alpha) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(ii) $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (x^{\alpha}) \oplus (y^{\alpha}) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(ii) $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha + \beta} = x^{\alpha} x^{\beta} =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(*i*) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (x^{\alpha}) \oplus (y^{\alpha}) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(*ii*) $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} = (x^{\alpha}) \oplus (x^{\beta}) =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^\alpha$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = (x^\alpha) \oplus (y^\alpha) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(ii) $(\alpha+\beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = (x^\alpha) \oplus (x^\beta) = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$.

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (x^{\alpha}) \oplus (y^{\alpha}) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(ii) $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} = (x^{\alpha}) \oplus (x^{\beta}) = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$.

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \odot x =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (x^{\alpha}) \oplus (y^{\alpha}) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(ii) $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} = (x^{\alpha}) \oplus (x^{\beta}) = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$.

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \odot x = x^{\alpha\beta} =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(*i*) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (x^{\alpha}) \oplus (y^{\alpha}) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(*ii*) $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} = (x^{\alpha}) \oplus (x^{\beta}) = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$.

(*iii*) $(\alpha \cdot \beta) \odot x = x^{\alpha\beta} = (x^{\beta})^{\alpha} =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^{\alpha}$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} = (x^{\alpha}) \oplus (y^{\alpha}) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(ii) $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} x^{\beta} = (x^{\alpha}) \oplus (x^{\beta}) = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$.

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \odot x = x^{\alpha\beta} = (x^{\beta})^{\alpha} = \alpha \odot (x^{\beta}) =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^\alpha$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = (x^\alpha) \oplus (y^\alpha) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(ii) $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = (x^\alpha) \oplus (x^\beta) = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$.

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \odot x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \odot (x^\beta) = \alpha \odot (\beta \odot x)$.

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^\alpha$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(*i*) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = (x^\alpha) \oplus (y^\alpha) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(*ii*) $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = (x^\alpha) \oplus (x^\beta) = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$.

(*iii*) $(\alpha \cdot \beta) \odot x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \odot (x^\beta) = \alpha \odot (\beta \odot x)$.

(*iv*) $1_{\mathbb{R}} \odot x =$

Exercițiu

Să se arate că $(V, \oplus, \odot)$ este un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial, unde $V = (0, \infty)$, $x \oplus y = xy$ şi $\alpha \odot x = x^\alpha$, $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.

Soluție:

Verificăm condițiile din definiția spațiului vectorial.
Este clar că $(V, \oplus)$ formează un grup abelian (comutativ), deoarece înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este comutativă. Elementul neutru este $\mathbf{x} = 1$ și simetricul elementului $\mathbf{x} \in V$ este $\mathbf{x}' = x^{-1} \in V$.
Fie $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Verificăm condițiile $(i) - (iv)$.

(i) $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = (x^\alpha) \oplus (y^\alpha) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$.

(ii) $(\alpha + \beta) \odot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = (x^\alpha) \oplus (x^\beta) = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$.

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \odot x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \odot (x^\beta) = \alpha \odot (\beta \odot x)$.

(iv) $1_{\mathbb{R}} \odot x = x^1 = x$.

Exerciţiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + b + c - 2d = 0,\ 2a - c = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+b+c-2d=0,\ 2a-c=0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Soluție.

Metoda 1: Folosim definiția subspațiului:

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + b + c - 2d = 0,\ 2a - c = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Soluție.

Metoda 1: Folosim definiția subspațiului:

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $U \subseteq V$ o submulțime nevidă a lui V. Spunem că U este **subspațiu vectorial** al lui V dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

(i) U este închisă la adunarea vectorilor, adică pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, vectorul $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$;

(ii) U este închisă la înmulțirea cu scalari a vectorilor, adică pentru orice vector $\mathbf{u} \in U$ și orice scalar $\alpha \in \mathbb{k}$, vectorul $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$.

Subspații vectoriale:

Este clar că $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0) \in U$.
Pentru prima condiție: fie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și demonstrăm că $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.
Avem:

Subspații vectoriale:

Este clar că $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0) \in U$.
Pentru prima condiție: fie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și demonstrăm că $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.
Avem:

$$\mathbf{u} \in U$$

Subspații vectoriale:

Este clar că $\mathbf{0} = (0,0,0,0) \in U$.
Pentru prima condiție: fie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și demonstrăm că $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.
Avem:

$$\mathbf{u} \in U \Leftrightarrow \mathbf{u} = (a, b, c, d) \text{ și } a + b + c - 2d = 0, \; 2a - c = 0;$$

Subspații vectoriale:

Este clar că $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0) \in U$.
Pentru prima condiție: fie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și demonstrăm că $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.
Avem:

$$\mathbf{u} \in U \Leftrightarrow \mathbf{u} = (a, b, c, d) \text{ și } a + b + c - 2d = 0,\ 2a - c = 0;$$

$$\mathbf{v} \in U \Leftrightarrow \mathbf{v} = (a', b', c', d') \text{ și } a' + b' + c' - 2d' = 0,\ 2a' - c' = 0.$$

Subspații vectoriale:

Este clar că $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0) \in U$.
Pentru prima condiție: fie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și demonstrăm că $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.
Avem:

$$\mathbf{u} \in U \Leftrightarrow \mathbf{u} = (a, b, c, d) \text{ și } a + b + c - 2d = 0,\ 2a - c = 0;$$

$$\mathbf{v} \in U \Leftrightarrow \mathbf{v} = (a', b', c', d') \text{ și } a' + b' + c' - 2d' = 0,\ 2a' - c' = 0.$$

Atunci
$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (a, b, c, d)+(a', b', c', d') = (a+a', b+b', c+c', d+d') \in \mathbb{R}^4$
și pentru ca $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ trebuie să verifice condițiile:

Subspații vectoriale:

Este clar că $\mathbf{0} = (0,0,0,0) \in U$.
Pentru prima condiție: fie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și demonstrăm că $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.
Avem:

$$\mathbf{u} \in U \Leftrightarrow \mathbf{u} = (a,b,c,d) \text{ și } a + b + c - 2d = 0,\ 2a - c = 0;$$

$$\mathbf{v} \in U \Leftrightarrow \mathbf{v} = (a',b',c',d') \text{ și } a' + b' + c' - 2d' = 0,\ 2a' - c' = 0.$$

Atunci
$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (a,b,c,d)+(a',b',c',d') = (a+a', b+b', c+c', d+d') \in \mathbb{R}^4$
și pentru ca $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ trebuie să verifice condițiile:

$$(a + a') + (b + b') + (c + c') - 2(d + d') = 0$$

Subspații vectoriale:

Este clar că $\mathbf{0} = (0,0,0,0) \in U$.
Pentru prima condiție: fie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și demonstrăm că $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.
Avem:

$$\mathbf{u} \in U \Leftrightarrow \mathbf{u} = (a,b,c,d) \text{ și } a+b+c-2d = 0,\ 2a-c = 0;$$

$$\mathbf{v} \in U \Leftrightarrow \mathbf{v} = (a',b',c',d') \text{ și } a'+b'+c'-2d' = 0,\ 2a'-c' = 0.$$

Atunci
$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (a,b,c,d)+(a',b',c',d') = (a+a',b+b',c+c',d+d') \in \mathbb{R}^4$
și pentru ca $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in U$ trebuie să verifice condițiile:

$$(a+a') + (b+b') + (c+c') - 2(d+d') = 0$$

$$2(a+a') - (c+c') = 0;$$

Avem:

$$(a + a') + (b + b') + (c + c') - 2(d + d') =$$

Subspații vectoriale:

Avem:

$$(a + a') + (b + b') + (c + c') - 2(d + d') =$$

$$= (a + b + c - 2d) + (a' + b' + c' - 2d') = 0$$

Subspații vectoriale:

Avem:

$$(a + a') + (b + b') + (c + c') - 2(d + d') =$$

$$= (a + b + c - 2d) + (a' + b' + c' - 2d') = 0$$

deoarece $a + b + c - 2d = 0$ și $a' + b' + c' - 2d' = 0$.

Subspații vectoriale:

Avem:

$$(a+a')+(b+b')+(c+c')-2(d+d')=$$

$$=(a+b+c-2d)+(a'+b'+c'-2d')=0$$

deoarece $a+b+c-2d=0$ și $a'+b'+c'-2d'=0$.
Asemănător obținem:

$$2(a+a')-(c+c')=$$

Subspații vectoriale:

Avem:

$$(a + a') + (b + b') + (c + c') - 2(d + d') =$$

$$= (a + b + c - 2d) + (a' + b' + c' - 2d') = 0$$

deoarece $a + b + c - 2d = 0$ și $a' + b' + c' - 2d' = 0$.
Asemănător obținem:

$$2(a + a') - (c + c') = (2a - c) + (2a' - c') = 0$$

deoarece $2a - c = 0$ și $2a' - c' = 0$

Pentru a doua condiție din definiție: fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{u} \in U$.
Demonstrăm că $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$.

Subspații vectoriale:

Pentru a doua condiție din definiție: fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{u} \in U$.
Demonstrăm că $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$.
Avem

$$\mathbf{u} \in U \Leftrightarrow \mathbf{u} = (a, b, c, d) \text{ și } a + b + c - 2d = 0, \; 2a - c = 0.$$

Subspații vectoriale:

Pentru a doua condiție din definiție: fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{u} \in U$.
Demonstrăm că $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$.
Avem

$$\mathbf{u} \in U \Leftrightarrow \mathbf{u} = (a, b, c, d) \text{ și } a + b + c - 2d = 0,\ 2a - c = 0.$$

Obținem că $\alpha \cdot \mathbf{u} = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \in \mathbb{R}^4$ și $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$ dacă și numai dacă

$$\alpha a + \alpha b + \alpha c - 2\alpha d = 0,\ 2\alpha a - \alpha c = 0.$$

Pentru a doua condiție din definiție: fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{u} \in U$.
Demonstrăm că $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$.
Avem

$$\mathbf{u} \in U \Leftrightarrow \mathbf{u} = (a, b, c, d) \text{ și } a + b + c - 2d = 0,\ 2a - c = 0.$$

Obținem că $\alpha \cdot \mathbf{u} = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \in \mathbb{R}^4$ și $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$ dacă și numai dacă

$$\alpha a + \alpha b + \alpha c - 2\alpha d = 0,\ 2\alpha a - \alpha c = 0.$$

Atunci $\alpha a + \alpha b + \alpha c - 2\alpha d = \alpha(a + b + c - 2d) =$

Subspații vectoriale:

Pentru a doua condiție din definiție: fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{u} \in U$. Demonstrăm că $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$.
Avem

$$\mathbf{u} \in U \Leftrightarrow \mathbf{u} = (a, b, c, d) \text{ și } a + b + c - 2d = 0,\ 2a - c = 0.$$

Obținem că $\alpha \cdot \mathbf{u} = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \in \mathbb{R}^4$ și $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$ dacă și numai dacă

$$\alpha a + \alpha b + \alpha c - 2\alpha d = 0,\ 2\alpha a - \alpha c = 0.$$

Atunci $\alpha a + \alpha b + \alpha c - 2\alpha d = \alpha(a + b + c - 2d) = 0$, deoarece $a + b + c - 2d = 0$, respectiv

Subspații vectoriale:

Pentru a doua condiție din definiție: fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{u} \in U$.
Demonstrăm că $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$.
Avem

$$\mathbf{u} \in U \Leftrightarrow \mathbf{u} = (a, b, c, d) \text{ și } a + b + c - 2d = 0,\ 2a - c = 0.$$

Obținem că $\alpha \cdot \mathbf{u} = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \in \mathbb{R}^4$ și $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$ dacă și numai dacă

$$\alpha a + \alpha b + \alpha c - 2\alpha d = 0,\ 2\alpha a - \alpha c = 0.$$

Atunci $\alpha a + \alpha b + \alpha c - 2\alpha d = \alpha(a + b + c - 2d) = 0$, deoarece $a + b + c - 2d = 0$, respectiv $2\alpha a - \alpha c = \alpha(2a - c) = 0$, deoarece $2a - c = 0$.

Subspații vectoriale:

Pentru a doua condiție din definiție: fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{u} \in U$.
Demonstrăm că $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$.
Avem

$$\mathbf{u} \in U \Leftrightarrow \mathbf{u} = (a, b, c, d) \text{ și } a + b + c - 2d = 0,\ 2a - c = 0.$$

Obținem că $\alpha \cdot \mathbf{u} = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \in \mathbb{R}^4$ și $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$ dacă și numai dacă

$$\alpha a + \alpha b + \alpha c - 2\alpha d = 0,\ 2\alpha a - \alpha c = 0.$$

Atunci $\alpha a + \alpha b + \alpha c - 2\alpha d = \alpha(a + b + c - 2d) = 0$, deoarece $a + b + c - 2d = 0$, respectiv $2\alpha a - \alpha c = \alpha(2a - c) = 0$, deoarece $2a - c = 0$.
Concluzie: $U \leq \mathbb{R}^4$ (adică U este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^4$).

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspațiu vectorial:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_3[x] : \mathfrak{p} = (a-d)+(2a-c)x+(b+d)x^2+(a+b-2c+d)x^3\}.$$

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspațiu vectorial:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_3[x] : \mathfrak{p} = (a-d)+(2a-c)x+(b+d)x^2+(a+b-2c+d)x^3\}.$$

Soluție.

Metoda 2: Folosim teorema de caracterizare:

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspațiu vectorial:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_3[x] : \mathfrak{p} = (a-d)+(2a-c)x+(b+d)x^2+(a+b-2c+d)x^3\}.$$

Soluție.

Metoda 2: Folosim teorema de caracterizare:

Teoremă

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și U o submulțime nevidă a lui V. Atunci U este subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} \in U$, pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și orice scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

$\square$

Precizăm că $\mathfrak{p} = \mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \in \ U$.
În cazul nostru:

Subspații vectoriale:

Precizăm că $\mathfrak{p} = \mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \in \ U$.
În cazul nostru:
U este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}_3[x]$ dacă și numai dacă
$\alpha \cdot \mathfrak{p} + \beta \cdot \mathfrak{p}' \in U$, pentru orice $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in U$ și orice scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Subspații vectoriale:

Precizăm că $\mathfrak{p} = \mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \in \ U$.
În cazul nostru:
U este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}_3[x]$ dacă și numai dacă
$\alpha \cdot \mathfrak{p} + \beta \cdot \mathfrak{p}' \in U$, pentru orice $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in U$ și orice scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Fie $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in U$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem:

$\mathfrak{p} \in U \iff$

Precizăm că $\mathfrak{p} = \mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \in \ U$.
În cazul nostru:
U este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}_3[x]$ dacă și numai dacă
$\alpha \cdot \mathfrak{p} + \beta \cdot \mathfrak{p}' \in U$, pentru orice $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in U$ și orice scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Fie $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in U$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\mathfrak{p} \in U \iff \mathfrak{p} = (a-d)+(2a-c)x+(b+d)x^2+(a+b-2c+d)x^3$$

Subspații vectoriale:

Precizăm că $\mathfrak{p} = \mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \in \ U$.
În cazul nostru:
U este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}_3[x]$ dacă și numai dacă
$\alpha \cdot \mathfrak{p} + \beta \cdot \mathfrak{p}' \in U$, pentru orice $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in U$ și orice scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Fie $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in U$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\mathfrak{p} \in U \iff \mathfrak{p} = (a-d)+(2a-c)x+(b+d)x^2+(a+b-2c+d)x^3$$

$$\mathfrak{p}' \in U \iff \mathfrak{p}' = (a'-d')+(2a'-c')x+(b'+d')x^2+(a'+b'-2c'+d')x^3.$$

Subspații vectoriale:

Atunci

$$\alpha \cdot \mathfrak{p} + \beta \cdot \mathfrak{p}' =$$

Atunci

$$\alpha \cdot \mathfrak{p} + \beta \cdot \mathfrak{p}' =$$

$$= \alpha[(a - d) + (2a - c)x + (b + d)x^2 + (a + b - 2c + d)x^3] +$$
$$+ \beta[(a' - d') + (2a' - c')x + (b' + d')x^2 + (a' + b' - 2c' + d')x^3] =$$

Atunci

$$\alpha \cdot \mathfrak{p} + \beta \cdot \mathfrak{p}' =$$

$$= \alpha[(a-d) + (2a-c)x + (b+d)x^2 + (a+b-2c+d)x^3] +$$
$$+\beta[(a'-d') + (2a'-c')x + (b'+d')x^2 + (a'+b'-2c'+d')x^3] =$$

$$= (\alpha a - \alpha d + \beta a' - \beta d') + (2\alpha a - \alpha c + 2\beta a' - \beta c')x +$$
$$+(\alpha b + \alpha d + \beta b' + \beta d')x^2 + (\alpha a + \alpha b - 2\alpha c + \alpha d + \beta a' + \beta b' - 2\beta c' + \beta d')x^3$$

Subspații vectoriale:

Notăm $A = \alpha a + \beta a'$, $B = \alpha b + \beta b'$, $C = \alpha c + \beta c'$ și $D = \alpha d + \beta d'$ și obținem

Subspații vectoriale:

Notăm $A = \alpha a + \beta a'$, $B = \alpha b + \beta b'$, $C = \alpha c + \beta c'$ și $D = \alpha d + \beta d'$ și obținem

$$\alpha \cdot \mathfrak{p} + \beta \cdot \mathfrak{p}' =$$

$$= (\alpha a - \alpha d + \beta a' - \beta d') + (2\alpha a - \alpha c + 2\beta a' - \beta c')x +$$

$$+ (\alpha b + \alpha d + \beta b' + \beta d')x^2 + (\alpha a + \alpha b - 2\alpha c + \alpha d + \beta a' + \beta b' - 2\beta c' + \beta d')x^3$$

Notăm $A = \alpha a + \beta a'$, $B = \alpha b + \beta b'$, $C = \alpha c + \beta c'$ și $D = \alpha d + \beta d'$ și obținem

$$\alpha \cdot \mathfrak{p} + \beta \cdot \mathfrak{p}' =$$

$$= (\alpha a - \alpha d + \beta a' - \beta d') + (2\alpha a - \alpha c + 2\beta a' - \beta c')x +$$

$$+(\alpha b + \alpha d + \beta b' + \beta d')x^2 + (\alpha a + \alpha b - 2\alpha c + \alpha d + \beta a' + \beta b' - 2\beta c' + \beta d')x^3$$

$$= (A - D) + (2A - C)x + (B + D)x^2 + (A + B - 2C + D)x^3.$$

Notăm $A = \alpha a + \beta a'$, $B = \alpha b + \beta b'$, $C = \alpha c + \beta c'$ și $D = \alpha d + \beta d'$ și obținem

$$\alpha \cdot \mathfrak{p} + \beta \cdot \mathfrak{p}' =$$

$$= (\alpha a - \alpha d + \beta a' - \beta d') + (2\alpha a - \alpha c + 2\beta a' - \beta c')x +$$

$$+(\alpha b + \alpha d + \beta b' + \beta d')x^2 + (\alpha a + \alpha b - 2\alpha c + \alpha d + \beta a' + \beta b' - 2\beta c' + \beta d')x^3$$

$$= (A - D) + (2A - C)x + (B + D)x^2 + (A + B - 2C + D)x^3.$$

Obținem astfel că $\alpha \cdot \mathfrak{p} + \beta \cdot \mathfrak{p}' \in U$, deci $U \leq \mathbb{R}_3[x]$.

Subspații vectoriale:

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - 2c = 0,\ \ b - c = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - 2c = 0,\ \ b - c = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Soluție.

Metoda 3: Observăm că

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \right\}$$

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - 2c = 0,\ \ b - c = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Soluție.

Metoda 3: Observăm că

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - 2c = 0,\ \ b - c = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Soluție.

Metoda 3: Observăm că

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{N}ul(A) \leq \mathbb{R}^3$$

Subspații vectoriale:

Sau:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \right\}.$$

Subspații vectoriale:

Sau:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \right\}.$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix},$$

Subspații vectoriale:

Sau:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \right\}.$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix},$$

deci $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Subspații vectoriale:

Sau:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \right\}.$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix},$$

deci $\text{rang}(A) = 2$.Necunoscuta secundară este c, iar soluția sistemului este

Subspații vectoriale:

Sau:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \right\}.$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix},$$

deci $\text{rang}(A) = 2$.Necunoscuta secundară este c, iar soluția sistemului este $a = \alpha, b = \alpha, c = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Subspații vectoriale:

Sau:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \right\}.$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix},$$

deci $\text{rang}(A) = 2$.Necunoscuta secundară este c, iar soluția sistemului este $a = \alpha, b = \alpha, c = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Obținem că

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

Subspații vectoriale:

Sau:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \right\}.$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix},$$

deci $\text{rang}(A) = 2$.Necunoscuta secundară este c, iar soluția sistemului este $a = \alpha, b = \alpha, c = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Obținem că

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

Subspații vectoriale:

Sau:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \right\}.$$

Rezolvăm sistemul de ecuații liniare:

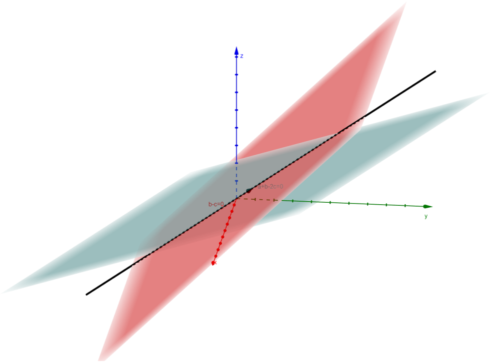
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix},$$

deci rang$(A) = 2$.Necunoscuta secundară este c, iar soluția sistemului este $a = \alpha, b = \alpha, c = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Obținem că

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{S}pan(\mathbf{v}),$$

unde $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$.

Subspații vectoriale:



Exercițiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p}(-2) = 0\}.$$

Soluție:

Avem:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p}(-2) = 0\} =$$

Subspații vectoriale:

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p}(-2) = 0\}.$$

Soluție:

Avem:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p}(-2) = 0\} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : (x+2) \mid \mathfrak{p}\} =$$

Subspații vectoriale:

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p}(-2) = 0\}.$$

Soluție:

Avem:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p}(-2) = 0\} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : (x + 2) \mid \mathfrak{p}\} =$$

$$= \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p} = (x+2)(ax+b)\} =$$

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p}(-2) = 0\}.$$

Soluție:

Avem:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p}(-2) = 0\} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : (x+2) \mid \mathfrak{p}\} =$$

$$= \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p} = (x+2)(ax+b)\} = \{a(x^2+2x)+b(x+2) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Exercițiu

Să se verifice dacă este subspaţiu vectorial:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p}(-2) = 0\}.$$

Soluție:

Avem:

$$U = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p}(-2) = 0\} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : (x+2) \mid \mathfrak{p}\} =$$

$$= \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x] : \mathfrak{p} = (x+2)(ax+b)\} = \{a(x^2+2x)+b(x+2) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Obținem $U = Span(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$, unde $\mathfrak{p}_1 = x^2 + 2x$, $\mathfrak{p}_2 = x + 2$, deci $U \leq \mathbb{R}_2[x]$. $\square$

Exercițiu

Să se verifice dacă sunt subspaţii vectoriale:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \; W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b+1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soluție:

Pentru U avem:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} =$$

Exercițiu

Să se verifice dacă sunt subspaţii vectoriale:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \; W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b+1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soluție:

Pentru U avem:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \right.$$

Exerciţiu

Să se verifice dacă sunt subspaţii vectoriale:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \; W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b+1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soluţie:

Pentru U avem:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$=$$

Exercițiu

Să se verifice dacă sunt subspaţii vectoriale:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \; W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b+1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soluție:

Pentru U avem:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + \right.$$

Exercițiu

Să se verifice dacă sunt subspaţii vectoriale:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \; W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b+1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soluție:

Pentru U avem:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} : a, b \in \mathbb{R} \right\} =$$

Exercițiu

Să se verifice dacă sunt subspaţii vectoriale:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \; W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b+1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soluție:

Pentru U avem:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{S}pan(A, B) \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Pentru W avem:

Subspații vectoriale:

Pentru W avem:

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 2b' \\ 0 & a'+b'+1 \end{pmatrix} =$$

Pentru W avem:

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 2b' \\ 0 & a'+b'+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a+a' & 2(b+b') \\ 0 & (a+a')+(b+b')+2 \end{pmatrix} \notin W$$

Subspații vectoriale:

Pentru W avem:

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ 0 & a+b+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 2b' \\ 0 & a'+b'+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a+a' & 2(b+b') \\ 0 & (a+a')+(b+b')+2 \end{pmatrix} \notin W$$

deci $W \not\leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercițiu

În $\mathbb{R}_3[x]$ se consideră polinoamele $\mathfrak{p}_1 = 2 - x + 2x^2$, $\mathfrak{p}_2 = x - 2x^3$, $\mathfrak{p}_3 = 1 + x - x^3$ şi $\mathfrak{p}_4 = 2x - x^2$. Să se verifice dacă $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4)$, unde

(a) $\mathfrak{p} = 2 + x - x^3$ (b) $\mathfrak{p} = 1 - x - 2x^2 + x^3$.

Soluție:

Avem $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4)$ dacă

Exercițiu

În $\mathbb{R}_3[x]$ se consideră polinoamele $\mathfrak{p}_1 = 2 - x + 2x^2$, $\mathfrak{p}_2 = x - 2x^3$, $\mathfrak{p}_3 = 1 + x - x^3$ şi $\mathfrak{p}_4 = 2x - x^2$. Să se verifice dacă $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4)$, unde

(a) $\mathfrak{p} = 2 + x - x^3$ (b) $\mathfrak{p} = 1 - x - 2x^2 + x^3$.

Soluție:

Avem $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4)$ dacă există $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ astfel încât

Exercițiu

În $\mathbb{R}_3[x]$ se consideră polinoamele $\mathfrak{p}_1 = 2 - x + 2x^2$, $\mathfrak{p}_2 = x - 2x^3$, $\mathfrak{p}_3 = 1 + x - x^3$ şi $\mathfrak{p}_4 = 2x - x^2$. Să se verifice dacă $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4)$, unde

(a) $\mathfrak{p} = 2 + x - x^3$ (b) $\mathfrak{p} = 1 - x - 2x^2 + x^3$.

Soluție:

Avem $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4)$ dacă există $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathfrak{p} = \alpha_1\mathfrak{p}_1 + \alpha_2\mathfrak{p}_2 + \alpha_3\mathfrak{p}_3 + \alpha_4\mathfrak{p}_4.$$

$\square$

Pentru (*a*) obținem $\mathfrak{p} = \alpha_1\mathfrak{p}_1 + \alpha_2\mathfrak{p}_2 + \alpha_3\mathfrak{p}_3 + \alpha_4\mathfrak{p}_4$ este echivalent cu

Pentru (*a*) obținem $\mathfrak{p} = \alpha_1\mathfrak{p}_1 + \alpha_2\mathfrak{p}_2 + \alpha_3\mathfrak{p}_3 + \alpha_4\mathfrak{p}_4$ este echivalent cu

$$2+x-x^3 = \alpha_1(2-x+2x^2)+\alpha_2(x-2x^3)+\alpha_3(1+x-x^3)+\alpha_4(2x-x^2),$$

Pentru (a) obținem $\mathfrak{p} = \alpha_1\mathfrak{p}_1 + \alpha_2\mathfrak{p}_2 + \alpha_3\mathfrak{p}_3 + \alpha_4\mathfrak{p}_4$ este echivalent cu

$$2+x-x^3 = \alpha_1(2-x+2x^2)+\alpha_2(x-2x^3)+\alpha_3(1+x-x^3)+\alpha_4(2x-x^2),$$

deci

$$2 + x - x^3 = (2\alpha_1 + \alpha_3) + (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4)x+$$

$$+(2\alpha_1 - \alpha_4)x^2 + (-2\alpha_2 - \alpha_3)x^3$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_2 - \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Spații vectoriale finit generate:

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_2 - \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Condiția de existență a scalarilor $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ este echivalentă cu

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_2 - \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Condiția de existență a scalarilor $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ este echivalentă cu sistemul să fie compatibil. Avem

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_2 - \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Condiția de existență a scalarilor $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ este echivalentă cu sistemul să fie compatibil. Avem

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

Spații vectoriale finit generate:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

Spații vectoriale finit generate:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-}1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-}1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -1 \end{array}\right)$$

Am obținut $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A}$, deci

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -1 \end{array}\right)$$

Am obținut $\text{rang}A = \text{rang}\bar{A}$, deci sistemul este compatibil (determinat). Obținem astfel că $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_4)$.

Mai mult, avem:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 4 \\ -\alpha_3 - \alpha_4 = -2 \\ 2\alpha_4 = -1 \end{cases}$$

iar soluția sistemului este

Mai mult, avem:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 4 \\ -\alpha_3 - \alpha_4 = -2 \\ 2\alpha_4 = -1 \end{cases}$$

iar soluția sistemului este $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{3}{4}$, $\alpha_3 = \frac{3}{2}$, $\alpha_4 = -\frac{1}{2}$.
Obținem

Mai mult, avem:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 4 \\ -\alpha_3 - \alpha_4 = -2 \\ 2\alpha_4 = -1 \end{cases}$$

iar soluția sistemului este $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\alpha_2 = \frac{3}{4}$, $\alpha_3 = \frac{3}{2}$, $\alpha_4 = -\frac{1}{2}$.
Obținem $\mathfrak{p} = 1/4\mathfrak{p}_1 + 3/4\mathfrak{p}_2 + 3/2\mathfrak{p}_3 - 1/2\mathfrak{p}_4$.

Exercițiu

Să se verifice dacă formează sisteme de generatori:

- $S = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 2), \mathbf{v}_2 = (2, 0, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (-1, 1, -1, 1), \mathbf{v}_4 = (2, 0, 1, 0), \mathbf{v}_5 = (0, 2, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$
- $S = \{\mathfrak{p}_1 = 2x - 2x^2, \mathfrak{p}_2 = 2, \mathfrak{p}_3 = 3 + x - x^2, \mathfrak{p}_4 = 2 + x - x^2, \mathfrak{p}_5 = 1 + x - x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$.

Exercițiu

Să se verifice dacă formează sisteme de generatori:

- $S = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 2), \mathbf{v}_2 = (2, 0, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (-1, 1, -1, 1), \mathbf{v}_4 = (2, 0, 1, 0), \mathbf{v}_5 = (0, 2, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$
- $S = \{\mathfrak{p}_1 = 2x - 2x^2, \mathfrak{p}_2 = 2, \mathfrak{p}_3 = 3 + x - x^2, \mathfrak{p}_4 = 2 + x - x^2, \mathfrak{p}_5 = 1 + x - x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$.

Reamintim:

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ o mulțime de vectori. Spunem că $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ formează un **sistem de generatori** pentru V dacă $V = \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, adică pentru orice vector $\mathbf{v} \in V$ există scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{k}$ astfel încât $\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n$.

Pentru prima mulțime verificăm dacă $\mathbb{R}^4 = \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5)$, echivalent cu

Spații vectoriale finit generate:

Pentru prima mulțime verificăm dacă $\mathbb{R}^4 = \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5)$, echivalent cu pentru orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ există scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5 \cdot \mathbf{v}_5$.

Spații vectoriale finit generate:

Pentru prima mulțime verificăm dacă $\mathbb{R}^4 = \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5)$, echivalent cu pentru orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ există scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5 \cdot \mathbf{v}_5$.
Considerăm $\mathbf{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Pentru prima mulțime verificăm dacă $\mathbb{R}^4 = \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5)$, echivalent cu pentru orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ există scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_5 \cdot \mathbf{v}_5$.
Considerăm $\mathbf{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Vrem să găsim $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_5 \cdot \mathbf{v}_5.$$

Înlocuim:

Pentru prima mulțime verificăm dacă $\mathbb{R}^4 = \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5)$, echivalent cu pentru orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ există scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5 \cdot \mathbf{v}_5$.
Considerăm $\mathbf{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Vrem să găsim $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5 \cdot \mathbf{v}_5.$$

Înlocuim:

$$(x, y, z, t) = \alpha_1(1, 2, 1, 2) + \alpha_2(2, 0, 1, -1) + \alpha_3(-1, 1, -1, 1) +$$

$$+\alpha_4(2, 0, 1, 0) + \alpha_5(0, 2, 0, 1) \Leftrightarrow$$

$$(x, y, z, t) =$$

Pentru prima mulțime verificăm dacă $\mathbb{R}^4 = \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5)$, echivalent cu pentru orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ există scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5 \cdot \mathbf{v}_5$.
Considerăm $\mathbf{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Vrem să găsim $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5 \cdot \mathbf{v}_5.$$

Înlocuim:

$$(x, y, z, t) = \alpha_1(1, 2, 1, 2) + \alpha_2(2, 0, 1, -1) + \alpha_3(-1, 1, -1, 1) +$$

$$+\alpha_4(2, 0, 1, 0) + \alpha_5(0, 2, 0, 1) \Leftrightarrow$$

$$(x, y, z, t) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4, 2\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_5,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4, 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5)$$

Spații vectoriale finit generate:

Obținem sistemul de ecuații liniare:

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = x \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_5 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = z \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = t \end{cases}$$

Spații vectoriale finit generate:

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = x \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_5 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = z \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = t \end{cases}$$

Condiția de existență a scalarilor $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ este echivalentă cu sistemul să fie compatibil.

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = x \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_5 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = z \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = t \end{cases}$$

Condiția de existență a scalarilor $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ este echivalentă cu sistemul să fie compatibil. Calculăm rangul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & \vdots & x \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & \vdots & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & z \\ 2 & -1 & 1 & 0 & \boxed{1} & \vdots & t \end{pmatrix} \sim$$

Obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = x \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_5 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = z \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = t \end{cases}$$

Condiția de existență a scalarilor $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ este echivalentă cu sistemul să fie compatibil. Calculăm rangul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & \vdots & x \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & \vdots & y \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & z \\ 2 & -1 & 1 & 0 & \boxed{1} & \vdots & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & \vdots & x \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & \vdots & y-2t \\ 1 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & \vdots & z \\ 2 & -1 & 1 & 0 & \boxed{1} & \vdots & t \end{pmatrix}$$

Spații vectoriale finit generate:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & \vdots & x \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & \vdots & y-2t \\ 1 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & \vdots & z \\ 2 & -1 & 1 & 0 & \boxed{1} & \vdots & t \end{pmatrix} \sim$$

Spații vectoriale finit generate:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & x \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & y-2t \\ 1 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & z \\ 2 & -1 & 1 & 0 & \boxed{1} & t \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & x-2z \\ -2 & 2 & \boxed{1} & 0 & 0 & y-2t \\ 1 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & z \\ 2 & -1 & 1 & 0 & \boxed{1} & t \end{array}\right)$$

Spații vectoriale finit generate:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & \vdots & x-2z \\ -2 & 2 & \boxed{\text{-1}} & 0 & 0 & \vdots & y-2t \\ 1 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & \vdots & z \\ 2 & -1 & 1 & 0 & \boxed{1} & \vdots & t \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & \vdots & x-2z \\ -2 & 2 & \boxed{\text{-1}} & 0 & 0 & \vdots & y-2t \\ 1 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & \vdots & z \\ 2 & -1 & 1 & 0 & \boxed{1} & \vdots & t \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 5 & \boxed{\text{-6}} & 0 & 0 & 0 & \vdots & x-2z-3y+6t \\ -2 & 2 & \boxed{\text{-1}} & 0 & 0 & \vdots & y-2t \\ 1 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & \vdots & z \\ 2 & -1 & 1 & 0 & \boxed{1} & \vdots & t \end{pmatrix}$$

Concluzie:

Spații vectoriale finit generate:

Concluzie: sistemul este compatibil (rang$(A) =$ rang$(\bar{A})$), Concluzie: sistemul este compatibil (rang$(A) =$ rang$(\bar{A})$), deci S este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^4$.

Concluzie: sistemul este compatibil (rang$(A) =$ rang$(\bar{A})$), deci S este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^4$. Remarcăm forma matricei coeficienților: $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4\ \mathbf{v}_5]$.

Concluzie: sistemul este compatibil (rang(A) = rang$(\bar{A})$), deci S este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^4$. Remarcăm forma matricei coeficienților: $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4\ \mathbf{v}_5]$.
Pentru a doua mulțime

$$\{\mathfrak{p}_1 = 2x - 2x^2, \mathfrak{p}_2 = 2, \mathfrak{p}_3 = 3 + x - x^2, \mathfrak{p}_4 = 2 + x - x^2, \mathfrak{p}_5 = 1 + x - x^2\},$$

procedăm asemănător. Verificăm dacă $\mathbb{R}_2[x] = \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_5)$, echivalent cu pentru orice $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x]$ există scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathfrak{p} = \alpha_1 \cdot \mathfrak{p}_1 + \cdots + \alpha_5 \cdot \mathfrak{p}_5$.

Concluzie: sistemul este compatibil ($\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$), deci S este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^4$. Remarcăm forma matricei coeficienților: $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4\ \mathbf{v}_5]$.
Pentru a doua mulțime

$$\{\mathfrak{p}_1 = 2x - 2x^2, \mathfrak{p}_2 = 2, \mathfrak{p}_3 = 3 + x - x^2, \mathfrak{p}_4 = 2 + x - x^2, \mathfrak{p}_5 = 1 + x - x^2\},$$

procedăm asemănător. Verificăm dacă $\mathbb{R}_2[x] = \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_5)$, echivalent cu pentru orice $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x]$ există scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathfrak{p} = \alpha_1 \cdot \mathfrak{p}_1 + \cdots + \alpha_5 \cdot \mathfrak{p}_5$.
Fie $\mathfrak{p} = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ și vrem

Concluzie: sistemul este compatibil (rang(A) = rang$(\bar{A})$), deci S este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^4$. Remarcăm forma matricei coeficienților: $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4\ \mathbf{v}_5]$.
Pentru a doua mulțime

$$\{\mathfrak{p}_1 = 2x - 2x^2, \mathfrak{p}_2 = 2, \mathfrak{p}_3 = 3 + x - x^2, \mathfrak{p}_4 = 2 + x - x^2, \mathfrak{p}_5 = 1 + x - x^2\},$$

procedăm asemănător. Verificăm dacă $\mathbb{R}_2[x] = \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_5)$, echivalent cu pentru orice $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x]$ există scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathfrak{p} = \alpha_1 \cdot \mathfrak{p}_1 + \cdots + \alpha_5 \cdot \mathfrak{p}_5$.
Fie $\mathfrak{p} = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ și vrem să găsim scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\mathfrak{p} = \alpha_1 \mathfrak{p}_1 + \cdots + \alpha_5 \mathfrak{p}_5.$$

Spații vectoriale finit generate:

Înlocuim și obținem:

$$a + bx + cx^2 = \alpha_1(2x - 2x^2) + 2\alpha_2 + \alpha_3(3 + x - x^2) +$$

$$+\alpha_4(2 + x - x^2) + \alpha_5(1 + x - x^2)$$

echivalent cu sistemul de ecuații liniare:

Înlocuim și obținem:

$$a + bx + cx^2 = \alpha_1(2x - 2x^2) + 2\alpha_2 + \alpha_3(3 + x - x^2) +$$

$$+\alpha_4(2 + x - x^2) + \alpha_5(1 + x - x^2)$$

echivalent cu sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 = a \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = b \\ -2\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 = c \end{cases}$$

Înlocuim și obținem:

$$a + bx + cx^2 = \alpha_1(2x - 2x^2) + 2\alpha_2 + \alpha_3(3 + x - x^2) +$$

$$+ \alpha_4(2 + x - x^2) + \alpha_5(1 + x - x^2)$$

echivalent cu sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 = a \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = b \\ -2\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 = c \end{cases}$$

Vrem ca sistemul să fie compatibil:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & | & a \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & b \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & | & c \end{pmatrix}$$

Spații vectoriale finit generate:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 1 & a \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & b \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & c \end{array}\right) \sim$$

Spații vectoriale finit generate:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 1 & | & a \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & | & b \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & | & c \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 1 & | & a \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & b+c \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 1 & a \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & b \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 1 & a \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b + c \end{array}\right)$$

Observăm că sistemul este compatibil

Spații vectoriale finit generate:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 1 & a \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & b \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 1 & a \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b+c \end{array}\right)$$

Observăm că sistemul este compatibil dacă și numai dacă $b + c = 0$.

Spații vectoriale finit generate:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 1 & | & a \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & | & b \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & | & c \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 1 & | & a \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & b+c \end{pmatrix}$$

Observăm că sistemul este compatibil dacă și numai dacă $b + c = 0$.Rezultă că S nu este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[x]$.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 1 & | & a \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & | & b \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & | & c \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & 2 & 1 & | & a \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & b+c \end{pmatrix}$$

Observăm că sistemul este compatibil dacă și numai dacă $b + c = 0$.Rezultă că S nu este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_2[x]$. De exemplu, polinomul $\mathfrak{p} = 2 + x + 3x^2$, (am ales $a = 2, b = 1, c = 3$ pentru ca $b + c \neq 0$) are proprietățile: $\mathfrak{p} \notin Span(S)$, dar $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}_2[x]$.

Exercițiu

Să se studieze dependenţa liniară pentru următoarele sisteme de vectori şi să se stabilească relaţii de dependenţă, unde este cazul:

- $S = \{\mathbf{v}_1 = (2, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_4 = (0, 1, -1), \mathbf{v}_5 = (3, 2, 1)\}$
- $S = \{\mathfrak{p}_1 = 1 + X, \mathfrak{p}_2 = X + X^2, \mathfrak{p}_3 = 2 + 3X, \mathfrak{p}_4 = 1 - X^2\}$

Exercițiu

Să se studieze dependenţa liniară pentru următoarele sisteme de vectori şi să se stabilească relaţii de dependenţă, unde este cazul:

- $S = \{\mathbf{v}_1 = (2,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,0,1), \mathbf{v}_3 = (1,1,0), \mathbf{v}_4 = (0,1,-1), \mathbf{v}_5 = (3,2,1)\}$
- $S = \{\mathfrak{p}_1 = 1 + X, \mathfrak{p}_2 = X + X^2, \mathfrak{p}_3 = 2 + 3X, \mathfrak{p}_4 = 1 - X^2\}$

Reamintim:

Fie $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subseteq V$ o mulțime de vectori din $\mathbb{k}$-spațiul vectorial V. Spunem că S formează un **sistem liniar independent** dacă singura soluție a ecuației

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

unde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}$, este $\alpha_i = 0$, pentru orice $1 \leq i \leq n$. În caz contrar, vectorii din S formează un **sistem liniar dependent**.

Soluție:

Pentru primul caz, S este sistem liniar independent dacă din $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5 \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, obținem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_5 = 0$ unica soluție.

Spații vectoriale finit generate:

Soluție:

Pentru primul caz, S este sistem liniar independent dacă din $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, obținem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_5 = 0$ unica soluție.
Avem $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 + \alpha_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$.

Soluție:

Pentru primul caz, S este sistem liniar independent dacă din $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, obținem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_5 = 0$ unica soluție. Avem $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 + \alpha_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$. Înlocuim și obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

Soluție:

Pentru primul caz, S este sistem liniar independent dacă din $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5 \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, obținem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_5 = 0$ unica soluție. Avem $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_4 \mathbf{v}_4 + \alpha_5 \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$. Înlocuim și obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

Sistemul este compatibil (este sistem omogen), iar pentru ca S să fie liniar independentă trebuie să avem

Soluție:

Pentru primul caz, S este sistem liniar independent dacă din $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, obținem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_5 = 0$ unica soluție. Avem $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 + \alpha_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$. Înlocuim și obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

Sistemul este compatibil (este sistem omogen), iar pentru ca S să fie liniar independentă trebuie să avem un sistem compatibil determinat.

Soluție:

Pentru primul caz, S este sistem liniar independent dacă din $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, obținem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_5 = 0$ unica soluție. Avem $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 + \alpha_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$. Înlocuim și obținem sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

Sistemul este compatibil (este sistem omogen), iar pentru ca S să fie liniar independentă trebuie să avem un sistem compatibil determinat. Calculăm rangul matricei coeficienților $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4\ \mathbf{v}_5]$: $\square$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Spații vectoriale finit generate:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci rangul este 2.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci rangul este 2. Deducem că sistemul este compatibil nedeterminat, deci S este mulțime liniar dependentă.

Spații vectoriale finit generate:

Pentru a determina relații de dependență, procedăm astfel:

Spații vectoriale finit generate:

Pentru a determina relații de dependență, procedăm astfel: scriem soluția sistemului de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + a + 3c = 0 \\ -\alpha_2 + a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Spații vectoriale finit generate:

Pentru a determina relații de dependență, procedăm astfel: scriem soluția sistemului de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + a + 3c = 0 \\ -\alpha_2 + a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Soluția este $\alpha_1 = -a - b - 2c$, $\alpha_2 = a + 2b + c$, $\alpha_3 = a$, $\alpha_4 = b$, $\alpha_5 = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Spații vectoriale finit generate:

Pentru a determina relații de dependență, procedăm astfel: scriem soluția sistemului de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + a + 3c = 0 \\ -\alpha_2 + a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Soluția este $\alpha_1 = -a - b - 2c$, $\alpha_2 = a + 2b + c$, $\alpha_3 = a$, $\alpha_4 = b$, $\alpha_5 = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Înlocuim în relația $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_4 \mathbf{v}_4 + \alpha_5 \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$ și obținem:

Pentru a determina relații de dependență, procedăm astfel: scriem soluția sistemului de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + a + 3c = 0 \\ -\alpha_2 + a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Soluția este $\alpha_1 = -a - b - 2c$, $\alpha_2 = a + 2b + c$, $\alpha_3 = a$, $\alpha_4 = b$, $\alpha_5 = c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Înlocuim în relația $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \alpha_4 \mathbf{v}_4 + \alpha_5 \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$ și obținem:

$$(-a - b - 2c)\mathbf{v}_1 + (a + 2b + c)\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3 + b\mathbf{v}_4 + c\mathbf{v}_5 = \mathbf{0},$$

deci

$$a(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + b(-\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4) + c(-2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5) = \mathbf{0}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că $-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, $-\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$, $-2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, de unde relațiile de dependență sunt:

Spații vectoriale finit generate:

Rezultă că $-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, $-\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$, $-2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, de unde relațiile de dependență sunt:$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_5 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

Rezultă că $-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, $-\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$, $-2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, de unde relațiile de dependență sunt:$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_5 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.
Observăm că vectorii liniar independenți sunt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ (corespund coloanelor cu pivoți)

Rezultă că $-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, $-\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$, $-2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, de unde relațiile de dependență sunt:$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_5 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.
Observăm că vectorii liniar independenți sunt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ (corespund coloanelor cu pivoți)
Asemănător se procedează pentru
$S = \{\mathfrak{p}_1 = 1 + X, \mathfrak{p}_2 = X + X^2, \mathfrak{p}_3 = 2 + 3X, \mathfrak{p}_4 = 1 - X^2\}$.