Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

cursul 4

2021-2022

Aplicații ale transformărilor liniare: transformări geometrice elementare în $\mathbb{R}^2$.

Vectori și valori proprii. Forma diagonală a unui endomorfism–aplicații

Transformări liniare

Definiție

Fie $T : V \to W$ o transformare liniară. Mulțimea

$$\ker(T) = \{\mathbf{v} \in V : T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\}$$

se numește **nucleul** transformării T.

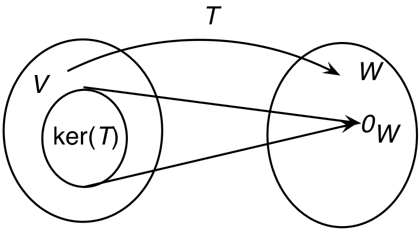


Figure: Nucleul transformării T.

Exemplu

a. Nucleul transformării nule $T : V \to W$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$ este întregul domeniu V, deci $\ker(T) = V$.
b. Nucleul transformării identice $T : V \to V$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ este format doar din vectorul nul $\mathbf{0}_V$, deci $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.

Exemplu

Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o transformare liniară definită prin

$$T(\mathbf{v}) = (v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, v_3).$$

Determinați $\ker(T)$.

Soluție.

Fie $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, astfel încât $T(\mathbf{v}) = (0, 0, 0)$, echivalent cu

$$(v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, v_3) = (0, 0, 0).$$

Prin urmare, obținem sistemul

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluția $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Prin urmare, $\ker(T) = \{(0, 0, 0)\}$. $\square$

Exemplu

Fie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ o transformare liniară definită prin $T(\mathbf{v}) = (v_1 - v_2 - 2v_3, -v_1 + 2v_2 + 3v_3)$, unde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Determinați $\ker(T)$.

Soluție.

Fie $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, astfel încât $T(\mathbf{v}) = (0, 0)$, echivalent cu

$$(v_1 - v_2 - 2v_3, -v_1 + 2v_2 + 3v_3) = (0, 0).$$

Prin urmare, obținem sistemul

$$\begin{cases} v_1 - v_2 - 2v_3 = 0 \\ -v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0 \end{cases}.$$

Matricea extinsă asociată sistemului este $\square$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 + L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

deci obținem sistemul

$$\begin{cases} v_1 - v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{cases} .$$

Notând $v_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, sistemul devine

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = 2\alpha \\ v_2 = -\alpha \end{cases}$$

cu soluția $v_1 = \alpha$, $v_2 = -\alpha$ și $v_3 = \alpha$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Prin urmare

$$\ker(T) = \{(\alpha, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan\{(1, -1, 1)\}.$$

Teoremă

Fie V *și* W *două* $\mathbb{k}$*-spații vectoriale și* $T : V \to W$ *o transformare liniară. Atunci* $\ker(T)$ *este subspațiu vectorial în* V*.*

Teoremă

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale și $T : V \to W$ o transformare liniară. Atunci $\ker(T)$ *este subspațiu vectorial în V.*

Demonstrație.

Din definiția nucleului reiese că $\ker(T) \subseteq V$. Cum $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, deci $\mathbf{0}_V \in \ker(T)$. Prin urmare, $\ker(T)$ este o mulțime nevidă. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ și $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker(T)$, echivalent cu $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_W$ și $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$. Pentru a demonstra că $\ker(T)$ este subspațiu vectorial în V este suficient să verificăm că $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in \ker(T)$, echivalent cu $T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$. Având în vedere că T este transformare liniară și că $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ker(T)$, obținem

$$T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{0}_W + \beta \cdot \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W.$$

□

Fiind subspațiu vectorial, nucleul are o bază. Definim **defectul aplicației** T, și îl notăm cu $\mathit{defect}(T)$, ca fiind dimensiunea nucleului, deci

$$\mathit{defect}(T) = \dim(\ker(T)).$$

Fiind subspațiu vectorial, nucleul are o bază. Definim **defectul aplicației** T, și îl notăm cu *defect*(T), ca fiind dimensiunea nucleului, deci

$$\mathit{defect}(T) = \dim(\ker(T)).$$

Am vorbit despre noţiunea de imagine a unei funcţii $T : V \to W$ ca fiind

$$\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W : \text{ există } \mathbf{v} \in V \text{ astfel încât } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} =$$

$$= \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\}.$$

Teoremă

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale și $T : V \to W$ o transformare liniară. Imaginea transformării T, $\mathrm{Im}(T)$, este subspațiu vectorial în W.

Demonstrație.

Fie $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}(T)$, deci există $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ astfel încât $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ și $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. Pentru a demonstra că $\mathrm{Im}(T)$ este subspațiu vectorial este suficient să demonstrăm că vectorul $\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}(T)$ deci că există $\mathbf{u} \in V$ astfel încât $T(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$. Având în vedere că $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathrm{Im}(T)$ și că T este transformare liniară, avem

$$\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 = \alpha T(\mathbf{v}_1) + \beta T(\mathbf{v}_2) = T(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = T(\mathbf{u}),$$

unde $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 \in V$. $\square$

Vom defini **rangul transformării liniare** T, și-l vom nota $\mathrm{rank(T)}$, ca fiind dimensiunea spațiului vectorial $\mathrm{Im}(T)$, i.e. $\mathrm{rank(T)} = \dim(\mathrm{Im(T)})$.

Vom defini **rangul transformării liniare** T, și-l vom nota $\mathrm{rank(T)}$, ca fiind dimensiunea spațiului vectorial $\mathrm{Im}(T)$, i.e. $\mathrm{rank(T)} = \dim(\mathrm{Im(T)})$.

Exemplu

Fie $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definită prin

$$T(\mathbf{v}) = (2v_1+2v_2-3v_3+v_4+3v_5, v_1+v_2+v_3+v_4-v_5, 3v_1+3v_2+4v_5,$$

$$3v_1 + 3v_2 - v_3 - 2v_4),$$

unde $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_5) \in \mathbb{R}^5$. Determinați $\mathrm{Im}(T)$.

Soluție.

Observăm că

$$T(\mathbf{v}) = (2v_1 + 2v_2 - 3v_3 + v_4 + 3v_5, v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - v_5,$$

$$3v_1 + 3v_2 + 4v_5, 3v_1 + 3v_2 - v_3 - 2v_4) =$$

$$= (2v_1, v_1, 3v_1, 3v_1) + (2v_2, v_2, 3v_2, 3v_2) +$$

$$+(-3v_3, v_3, 0, -v_3) + (v_4, v_4, 0, -2v_4) + (3v_5, -v_5, 4v_5, 0) =$$

$$= v_1(2, 1, 3, 3) + v_2(2, 1, 3, 3) +$$

$$+v_3(-3, 1, 0, -1) + v_4(1, 1, 0, -2) + v_5(3, -1, 4, 0),$$

unde $v_1, \ldots, v_5 \in \mathbb{R}$. Notând vectorii $\mathbf{u}_1 = (2, 1, 3, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 3, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (-3, 1, 0, -1)$, $\mathbf{u}_4 = (1, 1, 0, -2)$ și $\mathbf{u}_5 = (3, -1, 4, 0)$ obținem că $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{S}pan(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5)$. $\square$

Teoremă (Teorema dimensiunii)

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale și $T : V \to W$ o transformare liniară. Atunci

$$defect(T) + \mathrm{rank}(\mathrm{T}) = \dim(\mathrm{V}).$$

Teoremă

Fie $T : V \to W$ o transformare liniară. Atunci:

- *T este funcție injectivă dacă și numai dacă* $\ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$;
- *T este funcție surjectivă dacă și numai dacă* $\mathrm{Im}(T) = W$.

Teoremă

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale astfel încât $\dim(V) = \dim(W) = n$ și $T : V \to W$ o transformare liniară. Atunci T este funcție injectivă dacă și numai dacă T este surjectivă.

Teoremă

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale astfel încât $\dim(V) = \dim(W) = n$ și $T : V \to W$ o transformare liniară. Atunci T este funcție injectivă dacă și numai dacă T este surjectivă.

Definiție

Fie Vși W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale. O transformare liniară $T : V \to W$ se numește **izomorfism** dacă T este injectivă și surjectivă (T este bijectivă). Un izomorfism $T : V \to V$ se numește **automorfism**. Spunem că V și W sunt **izomorfe** dacă există un izomorfism $T : V \to W$.

Teoremă

Două $\mathbb{k}$*-spații vectoriale* V *și* W *sunt izomorfe dacă și numai dacă au aceeași dimensiune.*

Teoremă

Două $\mathbb{k}$-spații vectoriale V și W sunt izomorfe dacă și numai dacă au aceeași dimensiune.

Exemplu

Următoarele spații de dimensiune 4 sunt izomorfe:

- $\mathbb{R}^4$
- $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$
- $\mathbb{R}_3[x]$ – mulțimea polinoamelor de grad cel mult 3
- $\mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$
- $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, 0) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

Matricea asociată unei transformări liniare

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ și $T : V \to W$ o transformare liniară. Fie $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ o bază în V și $B' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ o bază în W. Cum $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n) \in W$ și B' este o bază în W, putem considera coordonatele vectorilor în această bază:

Matricea asociată unei transformări liniare

$$[T(\mathbf{v}_1)]_{B'} = \alpha_{11}\mathbf{w}_1 + \alpha_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_{m1}\mathbf{w}_m \cong \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}$$

$$[T(\mathbf{v}_2)]_{B'} = \alpha_{12}\mathbf{w}_1 + \alpha_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_{m2}\mathbf{w}_m \cong \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$[T(\mathbf{v}_n)]_{B'} = \alpha_{1n}\mathbf{w}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_{mn}\mathbf{w}_m \cong \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ definită prin

$$[T]_{B,B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

are proprietatea că

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = [T]_{B,B'} \cdot [\mathbf{v}]_B$$

și se numește **matricea transformării liniare** T în raport cu bazele B și B'.

Dacă $V = W$ și $B = B'$, atunci $T : V \to V$ este un endomorfism, iar matricea transformării în raport cu baza B va fi notată $[T]_B$. Cu aceste notații, pentru orive vector $\mathbf{v} \in V$ avem

$$[T(\mathbf{v})]_B = [T]_B \cdot [\mathbf{v}]_B.$$

Matricea asociată unei transformări liniare

Dacă $V = W$ și $B = B'$, atunci $T : V \to V$ este un endomorfism, iar matricea transformării în raport cu baza B va fi notată $[T]_B$. Cu aceste notații, pentru orive vector $\mathbf{v} \in V$ avem

$$[T(\mathbf{v})]_B = [T]_B \cdot [\mathbf{v}]_B.$$

Observație

Din construcția anterioară se observă că ordinea elementelor în matrice este dată de ordinea vectorilor în cele două baze. Din acest motiv, vom presupune că vectorii din bazele cu care lucrăm sunt ordonați. O bază în care vectorii au fost aranjați într-o anumită ordine se numește **bază ordonată**.

Exemplu

Fie $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$T(\mathbf{v}) = (v_1 + v_3 - 2v_4, v_2 + v_4, 3v_1 - v_3).$$

Fie bazele canonice

$$B = \{\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1,0), \mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)\}$$

și

$$B' = \{\mathbf{f}_1 = (1,0,0), \mathbf{f}_2 = (0,1,0), \mathbf{f}_3 = (0,0,1)\}.$$

Să se afle matricea transformării T în raport cu bazele B șiB'.

Soluție.

Calculăm imaginile vectorilor din B prin transformarea T și coordonatele acestora în baza B':

$$T(\mathbf{e}_1) = T(1,0,0,0) = (1,0,3) = \mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_3 \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_2) = T(0,1,0,0) = (0,1,0) = \mathbf{f}_2 \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\mathbf{e}_3) = T(0,0,1,0) = (1,0,-1) = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_3 \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

□

$$T(\mathbf{e}_4) = T(0,0,0,1) = (-2,1,0) = -2\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \cong \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea transformării T în raport cu cele două baze este

$$[T]_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observație

Putem generaliza exemplul anterior astfel: funcția $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o transformare liniară dacă și numai dacă există o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ astfel încât $T(\mathbf{v}) = A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, unde $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ reprezintă coordonatele în baza canonică din $\mathbb{R}^n$.

Teoremă

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale finit dimensionale cu bazele ordonate B și B'. Fie $S, T : V \to W$ două transformări liniare. Atunci:

(i) $[S+T]_{B,B'} = [S]_{B,B'} + [T]_{B,B'}$;

(ii) $[\alpha T]_{B,B'} = \alpha[T]_{B,B'}$, *pentru orice* $\alpha \in \mathbb{k}$.

Teoremă

Fie V și W două $\mathbb{k}$-spații vectoriale finit dimensionale cu bazele ordonate B și B'. Fie $S, T : V \to W$ două transformări liniare. Atunci:

(i) $[S+T]_{B,B'} = [S]_{B,B'} + [T]_{B,B'}$;

(ii) $[\alpha T]_{B,B'} = \alpha [T]_{B,B'}$, *pentru orice* $\alpha \in \mathbb{k}$.

Teoremă

Fie U, V și W $\mathbb{k}$-spații vectoriale finit dimensionale cu bazele ordonate B, B' și $B"$. Fie $S : U \to V$ și $T : V \to W$ transformări liniare. Atunci

$$[T \circ S]_{B,B"} = [T]_{B',B"} \cdot [S]_{B,B'}.$$

Aplicând în mod repetat teorema anterioară pentru cazul în care $V = W$, obținem:

Corolar

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial finit dimensional, B o bază ordonată în V și $T : V \to V$ o transformare liniară. Atunci

$$[T^n]_B = ([T]_B)^n .$$

Matricea asociată unei transformări liniare

Aplicând în mod repetat teorema anterioară pentru cazul în care $V = W$, obținem:

Corolar

Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial finit dimensional, B o bază ordonată în V și $T : V \to V$ o transformare liniară. Atunci

$$[T^n]_B = ([T]_B)^n \,.$$

Corolar

Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial de dimensiune n, B o bază ordonată în V și $T : V \to V$ un automorfism. Atunci

$$[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1} \,.$$

Matricea asociată unei transformări liniare

Teoremă

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial finit dimensional, B_1 și B_2 baze ordonate din V și $T : V \to V$ o transformare liniară. Notăm cu $P = T_{B_2 \to B_1}$ matricea de trecere de la B_2 la B_1. Atunci

$$[T]_{B_2} = P^{-1}[T]_{B_1}P$$

Exemplu

Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformarea liniară definită prin

$$T(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2),$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Considerăm
$B_1 = \{\mathbf{u}_1 = (1, -2), \mathbf{u}_2 = (0, 2)\}$ și
$B_2 = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2), \mathbf{v}_2 = (-1, 0)\}$.

Matricea aplicației T în baza B_1 este

$$[T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

iar matricea de trecere de la baza B_2 la B_1 este

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricea asociată unei transformări liniare

cu inversa

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$[T]_{B_2} = P^{-1}[T]_{B_1}P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiție

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice. Matricele A și B se numesc **asemenea** dacă există o matrice inversabilă P astfel încât $B = P^{-1}AP$.

Matricea asociată unei transformări liniare

Definiție

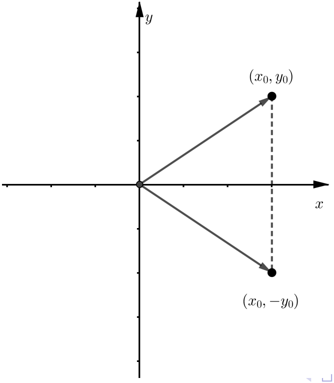
Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice. Matricele A și B se numesc **asemenea** dacă există o matrice inversabilă P astfel încât $B = P^{-1}AP$.

Observație

Dacă $T : V \to V$ este o transformare liniară și considerăm B, B' două baze ordonate în V, atunci matricele transformării T în bazele B și B' sunt asemenea.

Ne propunem să studiem transformările geometrice din plan. Prin urmare, matricele transformărilor vor fi matrice pătratice de ordin 2.

- **Simetria față de axa** Ox are matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. În particular $T(x, y) = (x, -y)$.



- **Simetria față de axa** Oy are matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. În particular $T(x, y) = (-x, y)$.

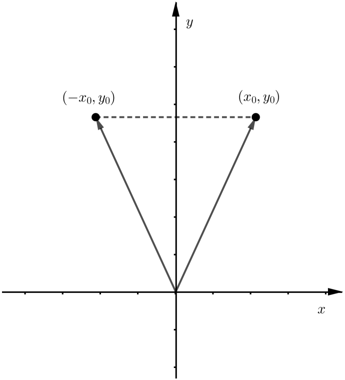


Figure: Simetria față de axa Oy

- **Simetria față de dreapta** $y = x$ are matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  În particular $T(x, y) = (y, x)$.

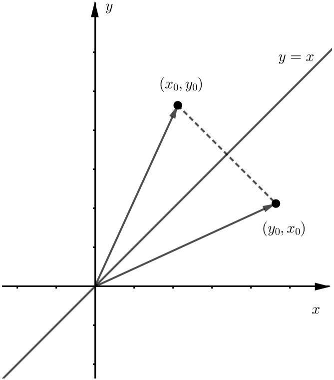


Figure: Simetria față de dreapta $y = x$

Tehnici de editare a imaginilor

- **"Alungirea" imaginii**: se folosesc matrice pătratice de forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $k > 1$.
- **"Lățirea" imaginii**: se folosesc matrice pătratice de forma $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k > 1$.
- **"Turtirea" imaginii** se folosesc matrice pătratice de forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $0 < k < 1$.
- **"Îngustarea" imaginii**: se folosesc matrice pătratice de forma $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $0 < k < 1$.
- **"Scalarea imaginii"**: se folosesc matrice pătratice de forma $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $k > 0$.

Exemplu

Considerăm triunghiul ABC în $\mathbb{R}^2$ în care identificăm vârfurile cu vectorii $A := (4,2)$, $B := (2,4)$, $C := (4,4)$.
Fie $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformări liniare descrise de matricele

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se studieze imaginea triunghiului după transformările liniare $T_1, \ldots, T_5$.

Transformări geometrice elementare în $\mathbb{R}^2$

Pentru T_1 avem:

$$T_1(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$T_1(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \ T_1(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

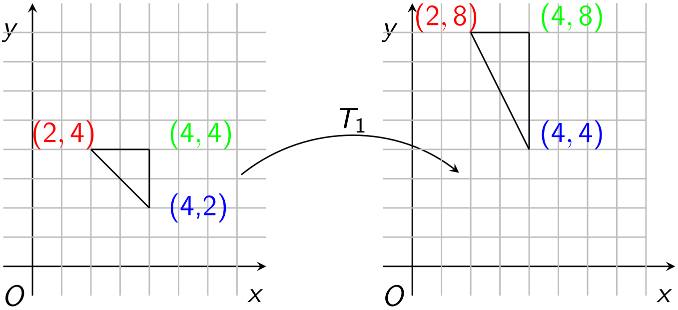


Figure: Triunghiul ABC și imaginea sa prin T_1.

Pentru T_2 obținem $T_2(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$T_2(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \; T_2(C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

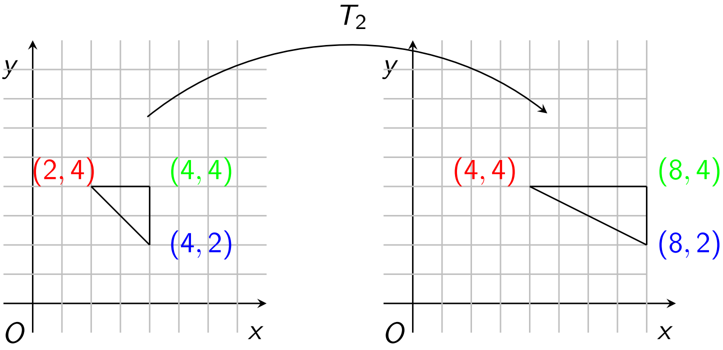
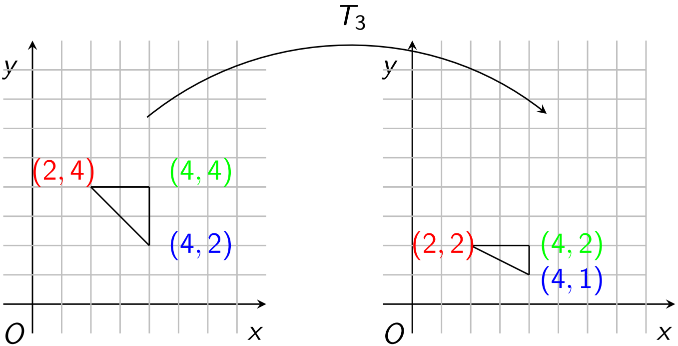


Figure: Triunghiul ABC și imaginea sa prin T_2.

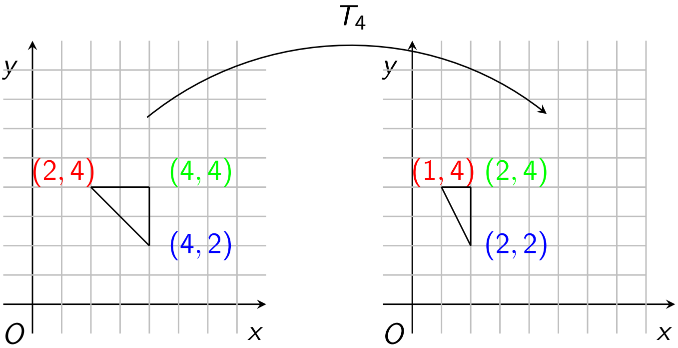
Pentru T_3 avem $T_3(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$T_3(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T_3(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



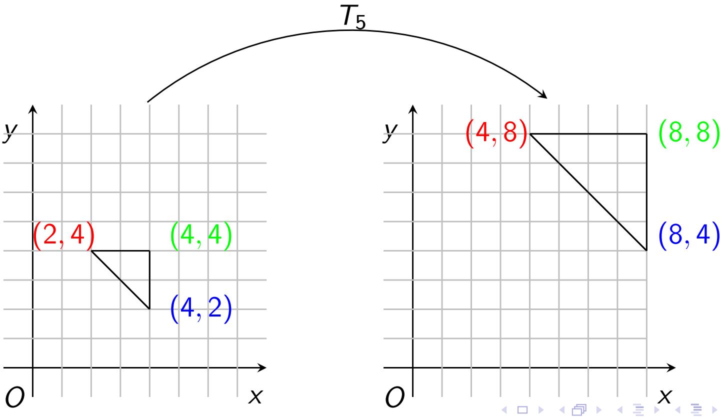
Pentru T_4 obținem $T_4(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$T_4(B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; T_4(C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



Pentru T_5 avem $T_5(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$$T_5(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix},\ T_5(C) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$



Transformări geometrice elementare în $\mathbb{R}^2$

Alte tipuri de transformări ale imaginilor sunt:

- **"Alungirea pe diagonală spre dreapta"**: se folosește o matrice de forma $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $k > 0$. În acest caz, transformarea liniară este $T(x, y) = (x + ky, y)$.
- **"Alungirea pe diagonală spre stânga"**: se folosește o matrice de forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$. În acest caz, transformarea liniară este $T(x, y) = (x, kx + y)$.

Exemplu

Considerăm triunghiul ABC în $\mathbb{R}^2$ în care identificăm vârfurile cu vectorii $A := (4,2), B := (2,4), C := (4,4)$. Fie transformările liniare T_1, $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ descrise de matricele

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se studieze imaginea triunghiului după transformările liniare T_1 și T_2.

Transformări geometrice elementare în $\mathbb{R}^2$

Determinăm imaginile celor trei vectori prin transformarea T_1:

$$T_1(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$T_1(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T_1(C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

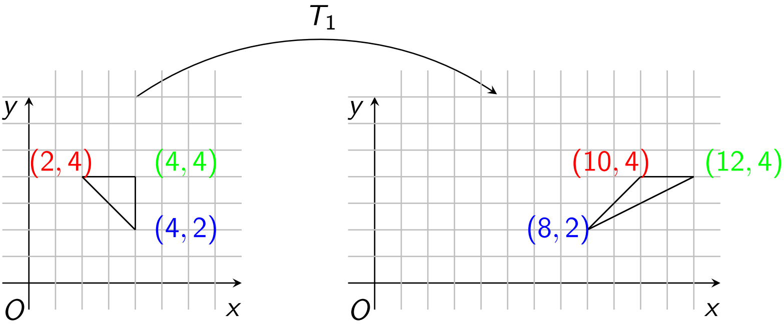
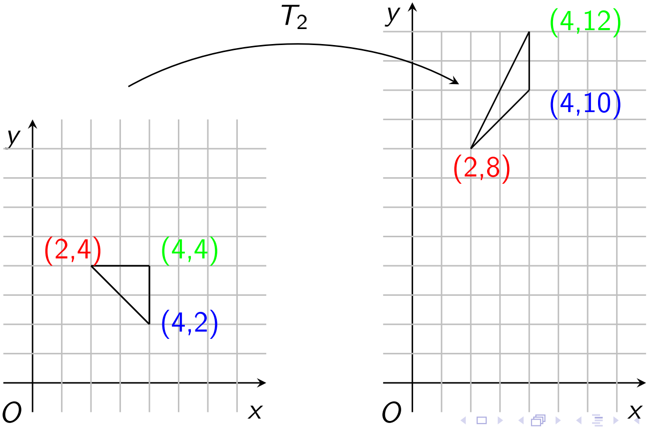


Figure: Triunghiul ABC și imaginea sa prin T_1

Pentru transformarea T_2 avem $T_2(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$,

$T_2(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $T_2(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.



Transformări geometrice elementare în $\mathbb{R}^2$

O altă transformare liniară cu aplicații în grafică este rotația de unghi θ. Din punct de vedere trigonometric, coordonatele unui punct (x, y) din $\mathbb{R}^2$ se modifică în urma unei rotații θ astfel:

$$x' = x \cos\theta - y \sin\theta$$

$$y' = x \sin\theta + y \cos\theta.$$

Dacă $\theta > 0$, vom efectua o rotație în sens trigonometric (sens invers acelor de ceas), iar dacă $\theta < 0$ rotația va fi în sensul acelor de ceas (în sens invers trigonometric). Prin urmare, transformarea liniară $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ descrisă de

$$T_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

reprezintă o **rotație de unghi** θ.

Exemplu

Considerăm triunghiul ABC în $\mathbb{R}^2$ în care identificăm vârfurile cu vectorii $A := (2,4), B := (4,4), C := (4,2)$. Rotația de unghi $\dfrac{\pi}{4}$ este $T_{\pi/4} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ și este descrisă de matricea

$$\begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Să se studieze imaginea triunghiului după transformarea liniară $T_{\pi/4}$.

Determinăm imaginile celor trei vectori prin transformarea $T_{\pi/4}$:

$$T_{\pi/4}(A) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$T_{\pi/4}(B) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$T_{\pi/4}(C) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Reprezentarea geometrică este:

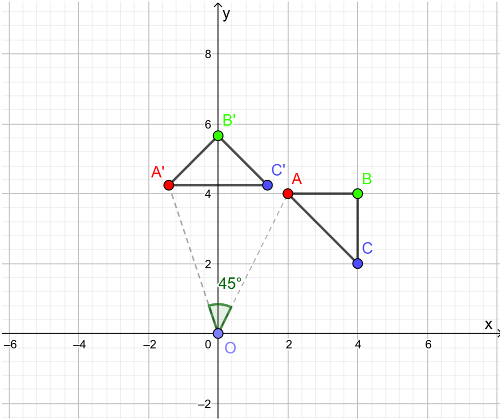


Figure: Rotație de unghi 45°

Transformări geometrice elementare în $\mathbb{R}^2$

Fie $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector. Un operator $S_\mathbf{a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definit prin $S_\mathbf{a}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{a}$ se numește **translație de vector a**. Translația de vector $\mathbf{a}$ este o transformare liniară dacă și numai dacă $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Exemplu

Considerăm triunghiul ABC în $\mathbb{R}^2$ în care identificăm vârfurile cu vectorii $A := (2,4), B := (4,4), C := (4,2)$. Fie $\mathbf{a} = (-5,4) \in \mathbb{R}^2$. Să se studieze imaginea triunghiului după translația $S_\mathbf{a}$.

Determinăm imaginile vectorilor A, B și C prin transformarea $S_\mathbf{a}$:

$$S_\mathbf{a}(A) = (2,4) + (-5,4) = (-3,8) =: A',$$

$$S_\mathbf{a}(B) = (4,4) + (-5,4) = (-1,8) =: B',$$

$$S_\mathbf{a}(C) = (4,2) + (-5,4) = (-1,6) =: C'.$$

Reprezentarea geometrică este:

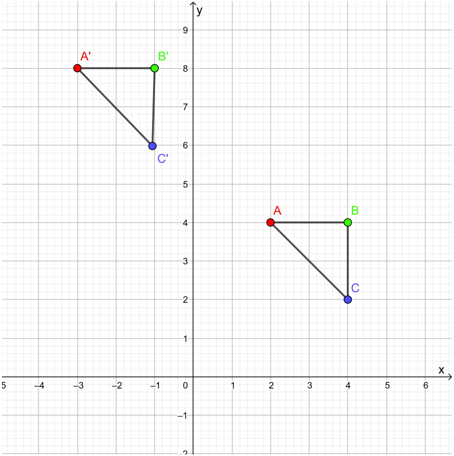


Figure: Translație de vector $(-5, 4)$

Vectori și valori proprii

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Matricea A poate fi văzută ca fiind matricea unei transformări liniare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definită prin $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Matricea A poate fi văzută ca fiind matricea unei transformări liniare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definită prin $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$.

Definiție

Un scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se numește **valoare proprie** pentru matricea A dacă există un vector nenul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vectorul nenul $\mathbf{x}$ cu această proprietate se va numi **vector propriu** corespunzător valorii proprii λ.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Matricea A poate fi văzută ca fiind matricea unei transformări liniare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definită prin $T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$.

Definiție

Un scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se numește **valoare proprie** pentru matricea A dacă există un vector nenul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vectorul nenul $\mathbf{x}$ cu această proprietate se va numi **vector propriu** corespunzător valorii proprii λ.

Observație

Dacă interpretăm definiția în termeni de transformări liniare, atunci un vector propriu pentru o transformare liniară este un vector nenul $\mathbf{x}$ care, prin transformarea T, este dus într-un multiplu al său, i.e. $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$.

Observație

Conform definiției, $\mathbf{0}$ nu poate fi vector propriu deoarece am obține în acest caz $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$, egalitate care este adevărată pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$. Putem avea însă ca valoare proprie $\lambda = 0$.

Definiție

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Polinomul $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ se numește **polinomul caracteristic al matricei** A.

Analizând definițiile, observăm că rădăcinile polinomului caracteristic sunt valorile proprii ale matricei A.

Exemplu

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Să se determine polinomul caracteristic, valorile și vectorii proprii pentru matricea A.

Exemplu

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Să se determine polinomul caracteristic, valorile și vectorii proprii pentru matricea A.

Soluție.

Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) = 4 - 5\lambda + \lambda^2.$$

Valorile proprii sunt rădăcinile polinomului caracteristic. Prin urmare

$$P_A(\lambda) = 0 \text{ implică } (1-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

cu soluțiile $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 4$. Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 4$. $\square$

Vectori și valori proprii

Pentru fiecare valoare proprie, determinăm un vector propriu.
Pentru $\lambda_1 = 1$, fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ astfel încât $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ sau, echivalent

$$(A - I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Prin urmare, trebuie să rezolvăm ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cu soluția $x_1 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_2 = 0$. Un vector propriu particular pentru valoarea proprie $\lambda_1 = 1$ se obține dând o valoare parametrului α și ținând cont că $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. De exemplu, pentru $\alpha = 1$ obținem $\mathbf{x} = (1, 0)$.

Pentru $\lambda_2 = 4$, fie $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ astfel încât $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ sau, echivalent,

$$(A - 4I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Prin urmare, trebuie să rezolvăm ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

echivalent cu $-3x_1 + 2x_2 = 0$ cu soluția $x_1 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_2 = \dfrac{3}{2}\alpha$. Un vector propriu particular pentru valoarea proprie $\lambda_2 = 4$ se obține dând o valoare parametrului α și ținând cont că $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. De exemplu, pentru $\alpha = 2$ obținem $\mathbf{x} = (2, 3)$.

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine polinomul caracteristic, valorile și vectorii proprii pentru matricea A.

Soluție.

Polinomul caracteristic asociat matricei A este

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda$$

□

Pentru a determina valorile proprii trebuie să rezolvăm ecuația

$$-\lambda^3 - \lambda = 0$$

echivalent cu $\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt $\lambda_1 = 0$ și $\lambda_{2,3} = \pm i$. Cum valorile proprii sunt numere reale, avem o singură valoare proprie $\lambda = 0$. Pentru această valoare proprie determinăm vectorii proprii corespunzători. Rezolvăm ecuația matriceală $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

are soluția $x_1 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_2 = x_3 = 0$. Deci vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda = 0$ sunt de forma $\mathbf{x} = (\alpha, 0, 0)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Un vector propriu particular se obține dând valori parametrului α. De exemplu, pentru $\alpha = 1$ obținem $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$.

Observație

Deoarece valorile proprii sunt rădăcini ale polinomului caracteristic, sistemele care conduc la obținerea vectorilor proprii sunt întotdeauna compatibil nedeterminate.

Observație

Deoarece valorile proprii sunt rădăcini ale polinomului caracteristic, sistemele care conduc la obținerea vectorilor proprii sunt întotdeauna compatibil nedeterminate.

Definiție

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ o valoare proprie pentru A și $\mathbf{x}$ un vector propriu corespunzător valorii proprii λ. Atunci

$$\mathcal{S}_\lambda = \{\mathbf{0}\} \cup \{\text{vectorii proprii corespunzători valorii proprii } \lambda\}$$

se numește **subspațiul propriu** corespunzător valorii proprii λ. Dimensiunea subspațiului propriu $\mathcal{S}_\lambda$ se numește **multiplicitatea geometrică** a valorii proprii λ și se notează cu $\mu_g(\lambda)$. Prin urmare $\mu_g(\lambda) = \dim(\mathcal{S}_\lambda)$.

Observație

Fie λ o valoare proprie a matricei A. Deoarece $\mathcal{S}_\lambda \neq \emptyset$ și vectorii proprii sunt nenuli, avem întotdeauna $\mu_g(\lambda) \geq 1$.

Observație

Fie λ o valoare proprie a matricei A. Deoarece $\mathcal{S}_\lambda \neq \emptyset$ și vectorii proprii sunt nenuli, avem întotdeauna $\mu_g(\lambda) \geq 1$.

Definiție

Ordinul de multiplicitate al unei valori proprii λ se numește **multiplicitatea algebrică** a valorii proprii λ și se notează cu $\mu_a(\lambda)$.

Exemplu

În primul exemplu aveam valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 4$, deci multiplicitățile algebrice sunt $\mu_a(1) = \mu_a(4) = 1$. Pentru determinarea multiplicităților geometrice, trebuie să obținem, pentru fiecare subspațiu propriu, câte o bază.
Pentru $S_1 = \{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ se observă ușor că o bază pentru $\mathcal{S}_1$ este $\{(1,0)\}$ și o bază pentru $\mathcal{S}_4$ este $\{(2, 3)\}$. Prin urmare, $\mu_g(1) = \dim(\mathcal{S}_1) = 1$ și $\mu_g(4) = \dim(\mathcal{S}_4) = 1$.

Definiție

O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este **diagonalizabilă** dacă este asemenea cu o matrice diagonală i.e. există matricele $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că P este inversabilă și D este diagonală astfel încât

$$D = P^{-1}AP.$$

Definiție

O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este **diagonalizabilă** dacă este asemenea cu o matrice diagonală i.e. există matricele $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că P este inversabilă și D este diagonală astfel încât

$$D = P^{-1}AP.$$

Propoziție

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice asemenea. Atunci A și B au aceleași valori proprii.

Demonstrație.

Deoarece A și B sunt asemenea, există o matrice inversabilă $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $B = P^{-1}AP$. Vom demonstra că matricele A și B au aceleași polinom caracteristic.

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda P) =$$

$$= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1})\det(A - \lambda I_n)\det(P) =$$

$$= \det(P^{-1})\det(P)\det(A - \lambda I_n) = \det(P^{-1}P)\det(A - \lambda I_n) =$$

$$= \det(I_n)\det(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) = P_A(\lambda).$$

□

Teoremă

O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă dacă și numai dacă are n vectori proprii liniar independenți.

Teorema afirmă că A este diagonalizabilă dacă și numai dacă vectorii proprii formează o bază în $\mathbb{R}^n$.

Vom construi matricele P și D astfel încât $A = PDP^{-1}$. Cum A este diagonalizabilă, există o matrice inversabilă $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și o matrice diagonală $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A = PDP^{-1}$. Cum A și D sunt asemenea, ele au aceleași valori proprii, deci $D = \mathcal{D}iag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, unde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei A. Fiecare valoare proprie va fi scrisă de câte ori arată multiplicitatea algebrică. Matricea P este matricea care are coloanele formate din reprezentanții vectorilor proprii corespunzători valorilor proprii, scriși în ordinea în care sunt scrise valorile proprii în matricea D. Deoarece vectorii proprii formează o bază în $\mathbb{R}^n$, matricea P este inversabilă.

ALGORITM PENTRU A VERIFICA DACĂ O MATRICE ESTE DIAGONALIZABILĂ

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică.

Pasul I: Calculăm polinomul caracteristic $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

Pasul II: Rezolvăm ecuația $P_A(\lambda) = 0$. Soluțiile acestei ecuații vor fi valorile proprii. Dacă obținem valori proprii complexe, matricea nu este diagonalizabilă.

Pasul III: Pentru fiecare valoare proprie determinăm multiplicitatea algebrică.

Pasul IV: Pentru fiecare valoare proprie determinăm vectorii proprii, subspațiul propriu și multiplicitatea geometrică.

Pasul V: Pentru fiecare valoare proprie verificăm egalitatea dintre multiplicitatea algebrică și cea geometrică. Dacă, pentru fiecare valoare proprie λ, $\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$, matricea este diagonalizabilă și scriem matricele D și P. Altfel, A nu este diagonalizabilă.

Puterile unei matrice

Una dintre aplicațiile matricelor diagonalizabile este aceea că permite calcularea ușoară a puterilor sale. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice diagonalizabilă, atunci există matricele $D, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu D matrice diagonală și P matrice inversabilă astfel încât $A = PDP^{-1}$. Atunci

$$A^m = (PDP^{-1})^m = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^mP^{-1}.$$

Teoremă (Cayley-Hamilton)

Orice matrice pătratică verifică propriul polinom caracteristic i.e. $P_A(A) = O_n$, unde O_n este matricea nulă.

Exemplu

Radu și Vasile sunt singurii furnizori de servicii de transport în comun dintr-o regiune. În prezent, fiecare deține 50% din piață. Totuși, recent Radu și-a modernizat serviciile, iar un studiu arată că, de la o lună la alta, 90% dintre clienții lui Radu rămân fideli, iar 10% aleg serviciile oferite de Vasile. Pe de altă parte, 70% dintre clienții lui Vasile rămân fideli și 30% aleg serviciile oferite de Radu. Dacă lucrurile continuă astfel timp de 6 luni, cum va fi împărțită piața după acest timp? Dacă lucrurile păstrează aceeași direcție, cum va arăta împărțirea pieței?

Fie R_m și V_m procentele din piață pe care le dețin Radu și Vasile după m luni. Deoarece ei sunt singurii actori pe piață, avem că $R_m + V_m = 1$. După o lună, 90% dintre clienții lui Radu rămân fideli, iar 30% dintre clienții lui Vasile aleg serviciile oferite de Radu ceea ce înseamnă că

$$R_{m+1} = 0.9R_m + 0.3V_m.$$

De asemenea, 70% dintre clienții lui Vasile rămân fideli și 10% dintre clienții lui Radu aleg serviciile oferite de Vasile, deci

$$V_{m+1} = 0.1R_m + 0.7V_m.$$

Prin urmare

$$\begin{pmatrix} R_{m+1} \\ V_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_m \\ V_m \end{pmatrix}.$$

Obținem că matricea de trecere de la o etapă la alta este $T = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$.

Puterile unei matrice

Pentru a obține un răspuns la cele două întrebări, ar trebui să calculăm $T^6 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ și $T^m \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ pentru m foarte mare, deoarece inițial $R_0 = V_0 = 0.5$. Se poate calcula ușor T^6, dar nu putem obține un răspuns pentru a doua întrebare în acest mod. Pentru a da un răspuns, vom diagonaliza matricea T. Pentru aceasta, calculăm valorile proprii ale lui T. Polinomul caracteristic este

$$P_T(\lambda) = \det(T - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 0.9 - \lambda & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.6.$$

Rădăcinile acestui polinom sunt $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 0.6$.

Puterile unei matrice

Pentru $\lambda_1 = 1$, determinăm un vector propriu rezolvând ecuația matriceală $(T - I_2) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} -0.1 & 0.3 \\ 0.1 & -0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} -0.1v_1 + 0.3v_2 = 0 \\ 0.1v_1 - 0.3v_2 = 0 \end{cases}$$

care are soluția dată de vectorii de forma $(3\alpha, \alpha)$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Deci un vector propriu este $\mathbf{u}_1 = (3, 1)$.

Pentru $\lambda_2 = 0.6$, determinăm un vector propriu rezolvând ecuația matriceală $(T - 0.6 I_2) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 0.3 v_1 + 0.3 v_2 = 0 \\ 0.1 v_1 + 0.1 v_2 = 0 \end{cases}$$

care are soluția dată de vectorii de forma $(\alpha, -\alpha)$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Deci un vector propriu este $\mathbf{u}_2 = (1, -1)$.

Am obținut matricea diagonală

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

și matricea inversabilă

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

care are inversa

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, $T = PDP^{-1}$, deci

$$T^m = PD^mP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^m & 0 \\ 0 & (0.6)^m \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + (0.6)^m & 3 - 3 \cdot (0.6)^m \\ 1 - (0.6)^m & 1 + 3 \cdot (0.6)^m \end{pmatrix}.$$

Puterile unei matrice

În continuare, calculele pot fi făcute direct:

$$T^m \cdot \begin{pmatrix} R_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + (0.6)^m & 3 - 3 \cdot (0.6)^m \\ 1 - (0.6)^m & 1 + 3 \cdot (0.6)^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_0 \\ V_0 \end{pmatrix}.$$

Pentru $m = 6$ și $R_0 = V_0 = 0.5$ obținem

$$\begin{pmatrix} R_6 \\ V_6 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + 0.0117 & 3 - 3 \cdot 0.0117 \\ 1 - 0.0117 & 1 + 3 \cdot 0.117 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.747 \\ 0.253 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, Radu va deține după șase luni aproximativ 75% din piață, iar Vasile 25%.

Puterile unei matrice

Pe termen lung, deoarece $\lim\limits_{m \to \infty} (0.6)^m = 0$, observăm că

$$\begin{pmatrix} R_\infty \\ V_\infty \end{pmatrix} \approx \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, Radu nu va deține niciodată mai mult de 75% din piață.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice diagonalizabilă. Prin urmare, există $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, astfel încât $A = PDP^{-1}$. Putem presupune $P = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n]$ și $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Este ușor de observat faptul că $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$, pentru orice $k \geq 1$.

Exponențiala unei matrice e^A

Prin urmare, dacă $f(x)$ este o funcție care poate fi scrisă ca o serie de puteri, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, atunci

$$f(D) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_n^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Exponențiala unei matrice e^A

În particular, dacă $f(x) = e^x$, atunci

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Dacă A nu este matrice diagonală, dar este diagonalizabilă, atunci $A^m = (PDP^{-1})^m = PD^mP^{-1}$. Prin urmare, dacă $f(x)$ este o funcție care poate fi scrisă ca o serie de puteri, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, atunci

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k PD^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k\right)P^{-1} = Pf(D)P^{-1}.$$

În particular,

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

De multe ori, în practică trebuie să rezolvăm sisteme de ecuații diferențiale de forma $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$. Ele pot fi rezolvate ușor în cazul în care $A = \mathbf{O}_n$, deci ecuația este $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}$ ceea ce înseamnă că fiecare componentă a vectorului $\mathbf{x}$ este independentă de timp, deci $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, unde $\mathbf{a}$ este un vector constant. Orice ecuație de forma $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ poate fi adusă la o ecuație de tipul $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}$. Pentru acest lucru folosim funcția e^x și dezvoltarea sa în serie Taylor (MacLaurin), deci $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots$. Obținem astfel că

$$e^{-At} = I + (-At) + \frac{1}{2!}(-At)^2 + \frac{1}{3!}(-At)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(-At)^n + \cdots .$$

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

Derivând termen cu termen obținem

$$\frac{de^{-At}}{dt} = (-A) + (-At)(-A) + \frac{1}{2!}(-At)^2(-A) + \cdots =$$

$$= [I + (-At) + \frac{1}{2!}(-At)^2 + \frac{1}{3!}(-At)^3 + \cdots](-A) = -e^{-At}A = -Ae^{-At}.$$

Considerând ecuația $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t)$ sub forma echivalentă
$\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}(t) - A\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ și înmulțind-o cu e^{-At} obținem
$e^{-At}\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}(t) - A\mathbf{x}(t)e^{-At} = \mathbf{0}$.

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

Având în vedere că am demonstrat că $\dfrac{de^{-At}}{dt} = -Ae^{-At}$, relația anterioară devine

$$e^{-At}\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) + \mathbf{x}(t)\frac{de^{-At}}{dt} = \mathbf{0}$$

care este echivalentă cu $\dfrac{de^{-At}\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{0}$. Această ecuație are soluția generală

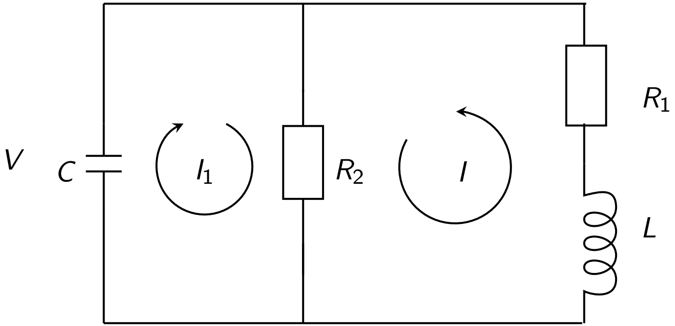
$$e^{-At}\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}$$

care se mai poate scrie

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{a}.$$

Soluția generală a ecuației $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

Fie circuitul din figură:



Ne propunem să determinăm tensiunea V și intensitățile I_1 și I.

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

Următoarele noțiuni vor fi folosite pentru a determina legătura dintre tensiune și intensitățile curenților prin rezistori, bobină și condensatori.

- Tensiunea printr-un rezistor de rezistență R este IR, unde I este intensitatea curentului care trece prin rezistor.
- Tensiunea printr-un condensator de capacitate C este $\dfrac{Q}{C}$, unde Q este cantitatea de sarcină separată.
- Fluxul de curent electric (intensitatea) printr-un condensator este $\dfrac{dQ}{dt}$.
- Tensiunea printr-o bobină de inductanță L este $L\dfrac{dI}{dt}$, unde I este intensitatea curentului care trece prin bobină.

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

Pentru circuitul din figură, considerăm

- $Q =$ sarcina electrică încărcată;
- $V = \dfrac{Q}{C}$
- $I =$ intensitatea curentului electric care trece prin bobină.
- $I_1 = \dfrac{dQ}{dt} =$ intensitatea curentului electric care trece prin condensator.

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

Folosind legile lui Kirchhoff pentru cele două bucle de circuit și ținând cont că $V = \dfrac{Q}{C}$ obținem:

$$\frac{Q}{C} + R_2(I + I_1) = 0$$

și

$$L\frac{dI}{dt} + R_1 I + R_2(I + I_1) = 0.$$

Putem considera $Q = CV$ și atunci $I_1 = \dfrac{dQ}{dt} = C\dfrac{dV}{dt}$. Înlocuind în cele două relații obținem

$$\begin{cases} V + R_2\left(C\dfrac{dV}{dt} + I\right) = 0 \\ L\dfrac{dI}{dt} + R_1 I + R_2\left(C\dfrac{dV}{dt} + I\right) = 0. \end{cases}$$

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

Din prima ecuație avem

$$R_2\left(C\frac{dV}{dt} + I\right) = -V$$

și înlocuind în a doua obținem

$$L\frac{dI}{dt} + R_1 I - V = 0.$$

Sistemul poate fi rescris astfel:

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = -\dfrac{R_1}{L} I + \dfrac{1}{L} V \\ \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{1}{C} I - \dfrac{1}{R_2 C} V. \end{cases}$$

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

Presupunem că $C = \dfrac{2}{3}F$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = \dfrac{3}{5}\Omega$ și $L = 2H$. Înlocuind în sistem obținem

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = -\dfrac{1}{2}I + \dfrac{1}{2}V \\ \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{3}{2}I - \dfrac{5}{2}V. \end{cases}$$

sistem ce poate fi scris sub forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$$

sau $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ unde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

Această ecuație are soluția generală $\mathbf{x} = \mathbf{a}e^{At}$.
Pentru a calcula e^{At} trebuie să determinăm forma diagonală a matricei A. Polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

prin urmare valorile proprii sunt $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = -2$.

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

Pentru $\lambda_1 = -1$ obținem ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

iar soluția este formată din vectorii de forma $(-\alpha, \alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Un vector propriu este $u_1 = (-1, 1)$.

Pentru $\lambda_2 = -2$ obținem ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

iar soluția este formată din vectorii de forma $\left(-\dfrac{1}{3}\alpha, \alpha\right)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Un vector propriu este $u_2 = \left(-\dfrac{1}{3}, 1\right)$.

Prin urmare, matricea P este

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -\dfrac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

iar inversa sa va fi

$$P^{-1} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{3} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Soluția generală a ecuației $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$

Soluția este de forma

$$\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Deci

$$\begin{cases} I(t) = a_1\left(\dfrac{3}{2}e^{-t} + \dfrac{1}{3}e^{-2t}\right) + a_2\left(\dfrac{1}{2}e^{-t} - \dfrac{1}{2}e^{-2t}\right) \\ V(t) = a_1\left(-\dfrac{3}{2}e^{-t} + \dfrac{3}{2}e^{-2t}\right) + a_2\left(-\dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{3}{2}e^{-2t}\right) \end{cases},$$

unde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Dacă se cunosc condițiile inițiale $I(0) = 0$ și $V(0) = 2$, atunci putem afla a_1 și a_2.

Astfel

$$\begin{cases} 0 = a_1\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) + a_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ 2 = a_1\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) + a_2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) \end{cases},$$

deci $a_1 = 0$ și $a_2 = 2$. Soluția este

$$\begin{cases} I(t) = e^{-t} - e^{-2t} \\ V(t) = -e^{-t} + 3e^{-2t} \end{cases}.$$