Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

seminarul 9

2021-2022

Planul și dreapta în spațiu

Exemplu

Să se scrie ecuaţia planului:

(a) determinat de punctele $A(5, 3, -2)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, -2)$;

(b) ce trece prin $M_1(3, -1, -2)$ şi este perpendicular pe dreapta MM_1, unde $M(4, -1, 2)$;

(c) ce trece prin $M(2, 0, 3)$ şi este paralel cu vectorii $\bar{a} = -\bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$;

Planul

Soluție:

Ecuația planului determinat de punctele
$A(5,3,-2),\ B(1,0,1),\ C(0,1,-2)$ este:

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z+2 \\ 1-5 & 0-3 & 1+2 \\ 0-5 & 1-3 & -2+2 \end{vmatrix} = 0,$$

echivalent cu

$$(ABC): 6(x-5) - 15(y-3) - 7(z+2) = 0.$$

Deci ecuația generală a planului (ABC) este

$$(ABC): 6x - 15y - 7z + 1 = 0.$$

Planul

Ecuația planului ce trece prin $M_1(3, -1, -2)$ și este perpendicular pe dreapta MM_1, unde $M(4, -1, 2)$, este

$$\pi : 1(x-4) + 0(y+1) + 4(z-2) = 0 \Leftrightarrow \pi : x + 4z - 12 = 0$$

deoarece un vector normal la plan este $\overline{MM_1} = \bar{i} + 4\bar{k}$.

Planul

Ecuația planului ce trece prin $M(2,0,3)$ și este paralel cu vectorii $\overline{a} = -\overline{i} + 2\overline{j}$, $\overline{b} = -3\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ este

$$\pi : \begin{vmatrix} x-2 & y & z-3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

echivalent cu

$$\pi : 2(x-2) + y + 4(z-3) = 0.$$

Deci ecuația generală a planului π este

$$\pi : 2x + y + 4z - 16 = 0.$$

Exemplu

Să se scrie ecuaţia planului:

(a) ce trece prin $M(2,1,3)$ şi este paralel cu planul $\pi : 2x + 3z - 5 = 0$;

(b) ce trece prin $O(0,0,0)$ şi e perpendicular pe planele $\pi_1 : 2x - y + 3z - 1 = 0$ şi $\pi_2 : x + 2y + z = 0$;

(c) ce trece prin intersecţia planelor $\pi_1 : x - 2y - 3z + 2 = 0$, $\pi_2 : 4x + y + 5z + 1 = 0$ şi este paralel cu axa Oz;

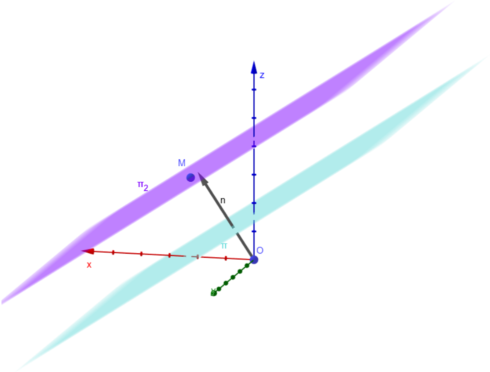
(d) paralel cu $\pi_0 : x + y + 2z = 0$ şi care trece prin punctul de intersecţie al planelor $\pi_1 : 2x + y - z - 2 = 0$, $\pi_2 : x - 3y + z + 1 = 0$, $\pi_3 : x + y + z - 3 = 0$.

Ecuația planului ce trece prin $M(2,1,3)$ și este paralel cu planul $\pi : 2x + 3z - 5 = 0$ este:

$$\pi_1 : 2(x-2) + 0(y-1) + 3(z-3) = 0,$$

echivalent cu $\pi_1 : 2x + 3z - 13 = 0$. Un vector normal la planul π_1 este $\bar{n} = 2\bar{i} + 0\bar{j} + 3\bar{k}$, deoarece planul π este paralel cu planul π_1.

Planul



Planul

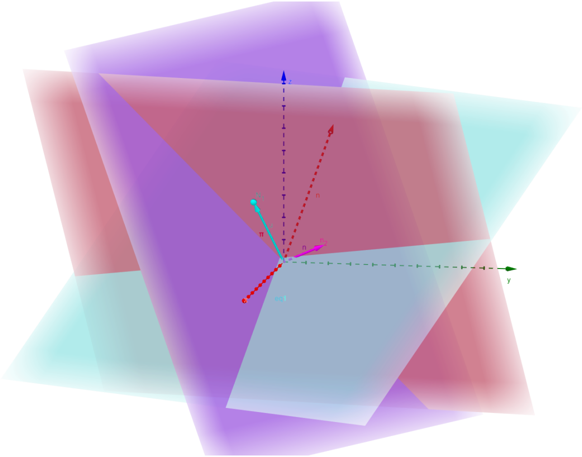
Ecuația planului ce trece prin $O(0,0,0)$ și e perpendicular pe planele $\pi_1 : 2x - y + 3z - 1 = 0$ și $\pi_2 : x + 2y + z = 0$ este:

$$\pi : -7x + y + 5z = 0.$$

Un vector normal la planul π este $\bar{n} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = -7\bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k}$, deoarece planul π este e perpendicular pe planele $\pi_1 : 2x - y + 3z - 1 = 0$ și $\pi_2 : x + 2y + z = 0$ și

$$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7\bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k}$$

Planul



Planul

Ecuația planului ce trece prin intersecția planelor $\pi_1 : x - 2y - 3z + 2 = 0$, $\pi_2 : 4x + y + 5z + 1 = 0$ și este paralel cu axa Oz se obține din ecuația fasciculului de plane de axă Δ, unde Δ este dreapta de intersecție dintre π_1 și π_2.
Ecuația fasciculului de plane de axă Δ este:

$$\pi_{\lambda,\mu} : \lambda(x - 2y - 3z + 2) + \mu(4x + y + 5z + 1) = 0,$$

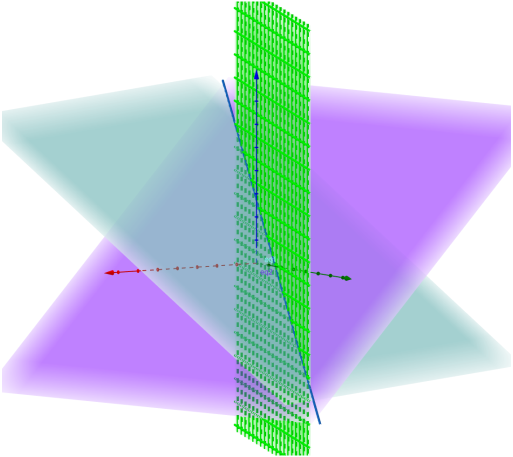
echivalent cu

$$\pi_{\lambda,\mu} : (\lambda + 4\mu)x + (-2\lambda + \mu)y + (-3\lambda + 5\mu)z + (2\lambda + \mu) = 0.$$

Cum planul este paralel cu Oz, obținem că $\langle \bar{n}, \bar{k} \rangle = 0$, unde $\bar{n} = (\lambda + 4\mu)\bar{i} + (-2\lambda + \mu)\bar{j} + (-3\lambda + 5\mu)\bar{k}$, deci $-3\lambda + 4\mu = 0$.
Rezultă că $\mu = 3/5\lambda$.
Alegem $\lambda = 5$, deci $\mu = 3$ și obținem planul:

$$\pi : 17x - 7y + 13 = 0.$$

Planul



Planul

Pentru a scrie ecuația planului paralel cu $\pi_0 : x + y + 2z = 0$ și care trece prin punctul de intersecție al planelor $\pi_1 : 2x + y - z - 2 = 0$, $\pi_2 : x - 3y + z + 1 = 0$, $\pi_3 : x + y + z - 3 = 0$ procedăm astfel:

Planul

Pentru a scrie ecuația planului paralel cu $\pi_0 : x + y + 2z = 0$ și care trece prin punctul de intersecție al planelor $\pi_1 : 2x + y - z - 2 = 0$, $\pi_2 : x - 3y + z + 1 = 0$, $\pi_3 : x + y + z - 3 = 0$ procedăm astfel:

- Un vector normal la plan este $\bar{n} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deoarece planul este paralel cu planul π_0.

Planul

Pentru a scrie ecuația planului paralel cu $\pi_0 : x + y + 2z = 0$ și care trece prin punctul de intersecție al planelor $\pi_1 : 2x + y - z - 2 = 0$, $\pi_2 : x - 3y + z + 1 = 0$, $\pi_3 : x + y + z - 3 = 0$ procedăm astfel:

- Un vector normal la plan este $\bar{n} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deoarece planul este paralel cu planul π_0.
- Aflăm punctul de intersecție dintre cele trei plane:

$$P : \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x - 3y + z + 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Soluția sistemului este $x = 1, y = 1, z = 1$, deci $P(1, 1, 1)$.

Planul

Pentru a scrie ecuația planului paralel cu $\pi_0 : x + y + 2z = 0$ și care trece prin punctul de intersecție al planelor $\pi_1 : 2x + y - z - 2 = 0$, $\pi_2 : x - 3y + z + 1 = 0$, $\pi_3 : x + y + z - 3 = 0$ procedăm astfel:

- Un vector normal la plan este $\bar{n} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, deoarece planul este paralel cu planul π_0.
- Aflăm punctul de intersecție dintre cele trei plane:

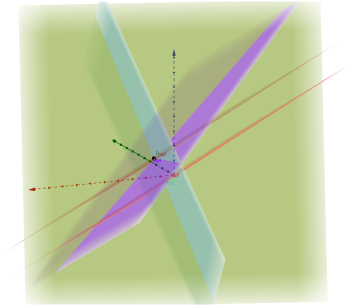
  $$P : \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x - 3y + z + 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

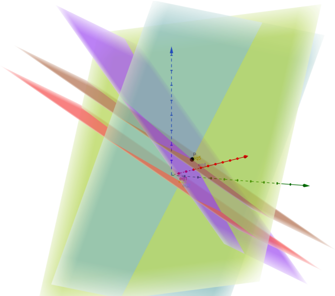
  Soluția sistemului este $x = 1, y = 1, z = 1$, deci $P(1, 1, 1)$.
- Atunci ecuația planului ce trece prin $P(1, 1, 1)$ și are normala $\bar{n} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ este:

  $$\pi : 1(x - 1) + 1(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

  echivalent cu $\pi : x + y + 2z - 4 = 0$.

Planul





Exemplu

Să se stabilească poziţia relativă a planelor:

(a) $\pi_1 : 2x - 3y + 6z - 2 = 0$, $\pi_2 : x + 3y + 4z - 2 = 0$;

(b) $\pi_1 : 2x + 3y - 6z - 1 = 0$, $\pi_2 : 4x + 6y - 12z - 1 = 0$;

(c) $\pi_1 : 3x - 6y + 9z - 12 = 0$, $\pi_2 : 5x - 10y + 15z - 20 = 0$.

Soluție:

La (a), un vector normal la planul π_1 este $\bar{n}_1 = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}$, iar un vector normal la planul π_2 este $\bar{n}_2 = \bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$. Notăm cu α unghiul dintre plane, deci

$$\cos\alpha = \frac{\langle \bar{n}_1, \bar{n}_2 \rangle}{\|\bar{n}_1\| \cdot \|\bar{n}_2\|} = \frac{2 - 9 + 24}{\sqrt{4 + 9 + 36} \cdot \sqrt{1 + 9 + 16}} = \frac{17}{7\sqrt{26}}.$$

$\square$

La (b) planele $\pi_1 : 2x + 3y - 6z - 1 = 0$ și $\pi_2 : 4x + 6y - 12z - 1 = 0$ sunt paralele deoarece

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-6}{-12},$$

dar ele nu coincid deoarece

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-6}{-12} \neq \frac{-1}{-1}.$$

La (c) planele $\pi_1 : 3x - 6y + 9z - 12 = 0$ și $\pi_2 : 5x - 10y + 15z - 20 = 0$ coincid deoarece

$$\frac{3}{5} = \frac{-6}{-10} = \frac{9}{15} = \frac{-12}{-20}.$$

Exemplu

Să se scrie ecuaţia dreptei care:

(a) trece prin $A(2,3,-1)$ şi $B(1,0,2)$;

(b) trece prin $M(1,2,3)$ şi e paralelă cu dreapta $d_1 : \frac{x-5}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{4}$;

(c) trece prin $A(1,0,3)$ şi este paralelă cu planele $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$ şi $\pi_2 = xOy$;

(d) trece prin $A(1,0,3)$ şi e perpendiculară pe planul $\pi : 2y + z - 1 = 0$.

Dreapta în spațiu

Ecuația dreptei ce trece prin $A(2,3,-1)$ și $B(1,0,2)$ este:

$$(AB):\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-3}{0-3}=\frac{z-(-1)}{2-(-1)}$$

echivalent cu

$$(AB):\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{3}.$$

Ecuațiile parametrice ale dreptei AB se obțin astfel:

$$(AB):\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-(-1)}{3}=t,\ \ t\in\mathbb{R},$$

deci

$$AB:\begin{cases} x=2-t \\ y=3-3t \\ z=-1+3t \end{cases},\ \ t\in\mathbb{R}$$

Putem să scriem dreapta AB ca fiind intersecția a două plane astfel:

$$(AB): \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{3} \Leftrightarrow AB: \begin{cases} \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-3} \\ \\ \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{3} \end{cases}$$

Obținem astfel:

$$AB: \begin{cases} -3x + y + 3 = 0 \\ 3y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

Ecuația dreptei ce trece prin $M(1,2,3)$ și e paralelă cu dreapta $d_1 : \frac{x-5}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{4}$ este:

$$d : \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4}$$

Un vector director pentru dreapta d este $\bar{v}_{d_1} = 0\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$, deoarece dreptele d și d_1 sunt paralele.

Dreapta în spațiu

Pentru a scrie ecuația dreptei ce trece prin $A(1,0,3)$ și este paralelă cu planele $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$ și $\pi_2 = xOy$ avem nevoie de un vector director, $\bar{v}$.
Cum dreapta este paralelă cu planele $\pi_1 : 2x + y + z - 5 = 0$ și $\pi_2 = yOz$, avem: $\bar{v} \perp \bar{n}_1$ și $\bar{v} \perp \bar{n}_2$, unde $\bar{n}_1 = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ (un vector normal la π_1) și unde $\bar{n}_2 = \bar{k}$ (un vector normal la π_2), deci

$$\bar{v} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} - 2\bar{j}.$$

Deci ecuația dreptei ce trece prin $A(1,0,3)$ și are vector director $\bar{v} = \bar{i} - 2\bar{j}$ este:

$$d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{-2} = \frac{z-3}{0}.$$

Ecuația dreptei ce trece prin $A(1, 0, 3)$ și e perpendiculară pe planul $\pi : 2y + z - 1 = 0$ este:

$$d : \frac{x-1}{0} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-3}{1},$$

deoarece un vector director este $\bar{v} = \bar{n} = 0\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$.

Exemplu

Să se calculeze distanţa de la punctul $M(3,-2,1)$ la dreapta
$$d:\left\{\begin{array}{ll} 2x-y+z+4 & =0 \\ x+4y+3z-1 & =0 \end{array}\right. .$$

Distanța de la M la dreapta d este:

$$d(M,d) = \frac{\|\overline{AM} \times \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|},$$

unde $A \in d$ este un punct arbitrar și $\bar{v}$ este un vector director.
Scriem ecuațiile parametrice ale dreptei d, deci rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y + z + 4 & = 0 \\ x + 4y + 3z - 1 & = 0 \end{cases}$$

Soluția sistemului este $x = t$, $y = \frac{13+5t}{7}$, $z = \frac{-15-9}{7}$, deci ecuațiile parametrice ale dreptei d sunt: $d : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{13}{7} + \frac{5}{7}t \\ z = \frac{-15}{7} + \frac{-9}{7}t \end{cases}$. Observăm că un vector director pentru dreapta d este $\bar{v} = 7\bar{i} + 5\bar{j} - 9\bar{k}$, deci

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{7^2 + 5^2 + (-9)^2} = \sqrt{155}.$$

Alegem un punct de pe dreapta d: pentru $t = 0$ obținem punctul $A(0, \frac{13}{7}, \frac{-15}{7})$.

Calculăm $\overline{AM}$, știind că $A(0, \frac{13}{7}, \frac{-15}{7})$ și $M(3, -2, 1)$:

$$\overline{AM} = 3\bar{i} - \frac{27}{7}\bar{j} + \frac{22}{7}\bar{k}.$$

Atunci

$$\overline{AM} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -\frac{27}{7} & \frac{22}{7} \\ 7 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 19\bar{i} + 49\bar{j} + 42\bar{k}.$$

Obținem distanța de la M la dreapta d este:

$$d(M, d) = \frac{\|\overline{AM} \times \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|} =$$

$$= \frac{\sqrt{19^2 + 49^2 + 42^2}}{\sqrt{155}} = \frac{\sqrt{4526}}{\sqrt{155}} = \frac{\sqrt{146}}{\sqrt{5}}.$$

Exemplu

Să se determine punctul de intersecţie al dreptei $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ cu planul $\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$.

Soluție:

Fie $\{A\} = d \cap \pi$, deci $A \in d$ și $A \in \pi$. Coordonatele lui A verifică ecuațiile parametrice ale dreptei d, deoarece $A \in d$, și coordonatele lui A verifică ecuația planului π, deoarece $A \in \pi$. Pentru a determina coordonatele punctului A rezolvăm sistemul format din ecuațiile parametrice ale dreptei d și ecauția planului π: $\square$

Ecuațiile parametrice se obțin astfel:

$$d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} = t,$$

deci

$$d : \begin{cases} \frac{x-1}{1} = t \\ \frac{y+1}{-2} = t \\ \frac{z}{6} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t-1 \\ z = 6t \end{cases}$$

Avem:

$$A : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t-1 \\ z = 6t \\ 2x+3y+z-1 = 0 \end{cases}$$

Înlocuim x, y, z în ultima ecuație și obținem

$$2(t+1) + 3(-2t-1) + 6t - 1 = 0,$$

deci $t = 1$. Rezultă că $x = 2$, $y = -3$ și $z = 6$, deci coordonatele punctului de intersecție dintre dreapta d și planul π sunt $A(2, -3, 6)$.

Exemplu

Să se determine unghiul dintre $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ şi planul $\pi : 2x + 3y + z - 1 = 0$.

Soluție:

Notăm cu θ unghiul dintre dreapta d și planul π. Avem

$$\sin\theta = \cos(\bar{v}, \bar{n}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{n} \rangle}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{n}\|}$$

Avem vector director pentru dreapta d este $\bar{v} = \bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}$ și vector normal la plan este $\bar{n} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$. Obținem:

$$\sin\theta = \frac{\langle \bar{v}, \bar{n} \rangle}{\|\bar{v}\| \cdot \|\bar{n}\|} = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 6 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{14}}$$

Exemplu

Să se determine distanţele de la punctele $A(1,2,3)$, $B(-1,1,0)$ la planul $\pi : 2x+3y+z-1=0$.

Soluție:

Distanța de la punctul A la planul π este:

$$d(A,\pi) = \frac{|2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{14}}$$

și distanța de la punctul B la planul π este:

$$d(B,\pi) = \frac{|2\cdot(-1) + 3\cdot 1 + 1\cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = 0,$$

deci $B\in\pi$.

Exemplu

(a) Să se scrie coordonatele proiecţiei ortogonale, P', a punctului $P(1,1,1)$ pe dreapta $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$.
(b) Să se determine distanţa de la P la dreapta d.
(c) Să se afle coordonatele simetricului punctului P faţă de dreapta d.

Soluție:

(a) *Metoda 1:* Fie $P'(t)$ un punct curent pe dreapta d:

$$P'(t): \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = -t-2 \\ z = 2t \end{cases}$$

Dreapta $PP'(t)$ are vectorul director

$$\overline{PP'(t)} = (2t+1)\overline{i} + (-t-3)\overline{j} + (2t-1)\overline{k}.$$

Dreapta $PP'(t)$ este perpendiculară pe dreapta d dacă $\overline{PP'(t)}$ este ortogonal pe vectorul director al dreptei d, $\overline{v} = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$. Obținem astfel $\langle \overline{PP'(t)}, \overline{v} \rangle = 0$, de unde rezultă

$$2(2t+1) - (-t-3) + 2(2t-1) = 0,$$

deci $t = -\frac{1}{3}$. Atunci coordonatele proiecției ortogonale, P', a punctului $P(1,1,1)$ pe dreapta d sunt:

$$P'(-1/3) : \begin{cases} x = 4/3 \\ y = -5/3 \\ z = -2/3 \end{cases}$$

Metoda 2: Fie π planul ce conține punctul P și este perpendicular pe dreapta d. Atunci ecuația planului π este ecuația planului ce trece prin punctul $P(1,1,1)$ și are normala $\overline{N} = \overline{v} = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, adică
$\pi : 2(x-1) - 1(y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow \ \pi : 2x - y + 2z - 3 = 0$.
Proiecția punctului P pe dreapta d este punctul de intersecție dintre d și planul π. Dacă P' este punctul de intersecție, atunci coordonatele punctului P' verifică ecuațiile parametrice ale dreptei și ecuația planului:

$$P' : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -t - 2 \\ z = 2t \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

Rezultă $t = -1/3$. Atunci $P'(4/3, -5/3, -2/3)$ sunt coordonatele proiecției.

(b) Distanța de la P la dreapta d este $\left\|\overline{PP'}\right\|$. Cum

$$\overline{PP'} = (\frac{4}{3} - 1)\bar{i} + (-\frac{5}{3} - 1)\bar{j} + (-\frac{2}{3} - 1)\bar{k} = \frac{1}{3}\bar{i} - \frac{8}{3}\bar{j} - \frac{5}{3}\bar{k},$$

obținem $\left\|\overline{PP'}\right\| = \sqrt{10}$.

(c) Fie P" simetricul punctului $P(1,1,1)$ față de dreapta d, adică $PP' = P'P$". Deci punctul $P'(4/3, -5/3, -2/3)$ este mijlocul segmentului PP", adică $x_{P'} = \frac{x_P + x_{P"}}{2}$, $y_{P'} = \frac{y_P + y_{P"}}{2}$, $z_{P'} = \frac{z_P + z_{P"}}{2}$. Obținem

$$x_{P"} = 2x_{P'} - x_P = 5/3, \;\; y_{P"} = 2y_{P'} - y_P = -13/3,$$

$$z_{P"} = 2z_{P'} - z_P = -7/3.$$

Exemplu

Să se scrie ecuaţiile proiecţiei ortogonale a dreptei

$$d : \begin{cases} x - 4y + 2z - 5 = 0 \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

pe planul $\pi : 2x + 3y + z - 5 = 0$.

Pas 1: Aflăm punctul de intersecție dintre dreaptă și plan, dacă există, P.
Pas 2: Alegem un punct M pe dreapta d și construim MM' perpendiculară pe π, $M' \in \pi$. Aflăm coordonatele punctului M'.
Pas 3: Proiecția ortogonală a dreptei pe plan este dreapta PM'.

Pas 1: Dreapta d intersectează planul π în punctul P, coordonatele punctului fiind soluția sistemului

$$\begin{cases} x - 4y + 2z - 5 = 0 \\ 3x + y - z + 2 = 0 \\ 2x + 3y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Rezultă punctul P este de coordonate $P(5/19, 8/19, 61/19)$.

Pas 2: Alegem un punct arbitrar M pe dreapta d astfel: pentru $x = 0$, înlocuim în ecuațiile dreptei d și obținem:

$$\begin{cases} -4y + 2z = 5 \\ y - z = -2 \end{cases},$$

adică $M(0, -1/2, 3/2)$.
Aflăm ecuația carteziană a dreptei MM', unde M' este proiecția lui M pe planul π. Rezultă că un vector director pentru dreapta MM' este un vector normal la plan, adică $\overline{n} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$. Ecuația dreptei MM' este ecuația dreptei ce trece prin M și are vector director $\overline{n}$:

$$MM' : \frac{x - 0}{2} = \frac{y + 1/2}{3} = \frac{z - 3/2}{1}.$$

Coordonatele punctului M' (punct de intersecție dintre dreapta MM' și planul π) se află din sistemul format din ecuațiile parametrice ale dreptei MM' și ecuația planului π:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 1/2 \\ z = t + 3/2 \\ 2x + 3y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Deci $t = 5/14$ și $M'(5/7, 8/14, 26/14)$. **Pas 3:** Atunci proiecția dreptei d pe planul π este dreapta PM'

$$PM' : \frac{x - 5/19}{5/7 - 5/19} = \frac{y - 8/19}{8/14 - 8/19} = \frac{z - 61/19}{26/14 - 61/19}.$$

Exemplu

Să se determine ecuațiile simetricei dreptei $d : \frac{x+5}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{2}$ în raport cu planul $\pi : x + 2y - z - 3 = 0$.

Pas 1: Aflăm punctul de intersecție dintre dreaptă și plan, dacă există, M.
Pas 2: Alegem un punct A pe dreapta d și construim AA' perpendiculară pe π, $A' \in \pi$. Aflăm coordonatele punctului A'.
Pas 3: Construim A" simetricul lui A față de planul π.
Pas 4: Simetrica dreptei d față de planul π este dreapta MA'.

Aflăm coordonatele punctului de intersecție dintre dreapta d și planul π:

$$M : \begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = -2t + 3 \\ z = 2t - 5 \\ x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Obținem

$$3t - 5 + 2(-2t + 3) - (2t - 5) - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1,$$

deci coordonatele punctului $M(t = 1)$ sunt $M(-2, 1, -3)$.

Alegem un punct pe dreapta d, $A(-5,3,-5)$ (valori obținute pentru $t=0$ în ecuațiile parametrice ale dreptei). Construim A' proiecția punctului A pe planul π. Deci un vector director pentru dreapta AA' este vector normal la plan, adică $\overline{n}=\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$. Ecuația dreptei AA' este ecuația dreptei ce trece prin A și are vector director $\overline{n}$:

$$AA' : \frac{x+5}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+5}{-1}.$$

Coordonatele punctului A' se află din intersecția dintre ecuațiile parametrice ale dreptei AA' și ecuația planului π:

$$\begin{cases} x = t - 5 \\ y = 2t + 3 \\ z = -t - 5 \\ x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Deci $t = -1/2$ și $A'(-11/2, 2, -9/2)$.

Fie $A"$ simetricul punctului $A(-5, 3, -5)$ față de planul π, adică $AA' = A'A"$. Deci punctul $A'(-11/2, 2, -9/2)$ este mijlocul segmentului $AA"$, adică $x_{A'} = \frac{x_A + x_{A"}}{2}$, $y_{A'} = \frac{y_A + y_{A"}}{2}$, $z_{A'} = \frac{z_A + z_{A"}}{2}$. Obținem

$$x_{A"} = 2x_{A'} - x_A = -6, \; y_{A"} = 2y_{A'} - y_A = 1, \; z_{A"} = 2z_{A'} - z_A = -4.$$

Simetrica dreptei d față de planul π este dreapta

$$MA" : \frac{x-2}{-8} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{-1}$$

Exemplu

Să se scrie ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor:

$$d_1 : \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \text{ şi } d_2 : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Fie $A(t)$ un punct arbitrar pe dreapta d_1 și $B(s)$ un punct arbitrar pe dreapta d_2. Atunci

$$A(t) : \begin{cases} x = t + 7 \\ y = 2t + 3 \\ z = -t + 9 \end{cases} \qquad B(s) : \begin{cases} x = -7s + 3 \\ y = 2s + 1 \\ z = 3s + 1 \end{cases}$$

Dreapta $A(t)B(s)$ este perpendiculară pe dreptele d_1 și d_2, deci $\overline{A(t)B(s)} = (-7s+3-t-7)\bar{i}+(2s+1-2t-3)\bar{j}+(3s+1+t-9)\bar{k}$ este ortogonal pe $\overline{v_1} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ și pe $\overline{v_2} = -7\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$.
Obținem $\langle \overline{A(t)B(s)}, \overline{v_1} \rangle = 0$ și $\langle \overline{A(t)B(s)}, \overline{v_2} \rangle = 0$, adică sistemul:

$$\begin{cases} -7s - t - 4 + 2(2s - 2t - 2) - (3s + t - 8) = 0 \\ -7(-7s - t - 4) + 2(2s - 2t - 2) + 3(3s + t - 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} s + t = 0 \\ -62s + 6t = 0 \end{cases}$$

cu soluția $s = t = 0$. Deci $A(7, 3, 9)$ și $B(3, 1, 1)$, iar ecuația dreptei AB este

$$AB : \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{8}.$$