Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

cursul 2

2021-2022

Subspații vectoriale. Spații vectoriale finit generate

Reamintim

Definiție

Fie $\Bbbk$ un corp comutativ și fie V o mulțime nevidă. Pe V considerăm două operații: $+ : V \times V \to V, (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}$, și $\cdot : \Bbbk \times V \to V, (\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \alpha \cdot \mathbf{w}$. Spunem că $(V, +, \cdot)$ are o structură de **spațiu vectorial peste corpul** $\Bbbk$ dacă $(V, +)$ este grup comutativ și sunt verificate următoarele condiții:

(i) $\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w}$,

(ii) $(\alpha +_{\Bbbk} \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$,

(iii) $(\alpha \cdot_{\Bbbk} \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v})$,

(iv) $1_{\Bbbk} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$,

pentru orice $\mathbf{v},\ \mathbf{w} \in V$ și orice $\alpha,\ \beta \in \Bbbk$.

Reamintim

Definiție

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $U \subseteq V$ o submulțime nevidă a lui V. Spunem că U este **subspațiu vectorial** al lui V dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

(i) U este închisă la adunarea vectorilor, adică pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, vectorul $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$;

(ii) U este închisă la înmulțirea cu scalari a vectorilor, adică pentru orice vector $\mathbf{u} \in U$ și orice scalar $\alpha \in \mathbb{k}$, vectorul $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$.

Subspații vectoriale

Teoremă

Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial și U o submulțime nevidă a lui V. Atunci U este subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} \in U$, pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și orice scalari $\alpha, \beta \in \Bbbk$.

Teoremă

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și U o submulțime nevidă a lui V. Atunci U este subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} \in U$, pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și orice scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

Demonstrație:

Pentru "$\Rightarrow$", presupunem că U este subspațiu vectorial. Relația de demonstrat rezultă imediat dacă aplicăm definiția subspațiului.

Subspaţii vectoriale

Teoremă

Fie V un $\Bbbk$-spaţiu vectorial şi U o submulţime nevidă a lui V. Atunci U este subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} \in U$, pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ şi orice scalari $\alpha, \beta \in \Bbbk$.

Demonstraţie:

Pentru "$\Rightarrow$", presupunem că U este subspaţiu vectorial. Relaţia de demonstrat rezultă imediat dacă aplicăm definiţia subspaţiului.
Pentru "$\Leftarrow$", verificăm cele două condiţii din definiţia subspaţiului:

Teoremă

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și U o submulțime nevidă a lui V. Atunci U este subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} \in U$, pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și orice scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

Demonstrație:

Pentru "$\Rightarrow$", presupunem că U este subspațiu vectorial. Relația de demonstrat rezultă imediat dacă aplicăm definiția subspațiului. Pentru "$\Leftarrow$", verificăm cele două condiții din definiția subspațiului:

- Pentru (i) alegem $\alpha = \beta = 1$ și obținem $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.

Teoremă

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și U o submulțime nevidă a lui V. Atunci U este subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} \in U$, pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ și orice scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

Demonstrație:

Pentru "$\Rightarrow$", presupunem că U este subspațiu vectorial. Relația de demonstrat rezultă imediat dacă aplicăm definiția subspațiului.
Pentru "$\Leftarrow$", verificăm cele două condiții din definiția subspațiului:

- Pentru (*i*) alegem $\alpha = \beta = 1$ și obținem $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.
- Pentru (*ii*) alegem $\beta = 0$ și găsim $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{u} \in U$.

$\square$

Exemplu

Mulțimea soluțiilor unui sistem omogen format din m ecuații liniare cu n necunoscute este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$. Numim acest subspațiu **subspațiul soluțiilor** și notăm cu

$$\mathcal{N}ul(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este matricea coeficienților sistemului.

Exemplu

Mulțimea soluțiilor unui sistem omogen format din m ecuații liniare cu n necunoscute este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$. Numim acest subspațiu **subspațiul soluțiilor** și notăm cu

$$\mathcal{N}ul(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este matricea coeficienților sistemului.

Soluție.

Este clar că $\mathbf{0} \in \mathcal{N}ul(A)$, deoarece orice sistem omogen este compatibil. $\square$

Folosim teorema de caracterizare a subspațiilor pentru a demonstra că $\mathcal{N}ul(A)$ este subspațiu vectorial.

Subspații vectoriale

Folosim teorema de caracterizare a subspațiilor pentru a demonstra că $\mathcal{N}ul(A)$ este subspațiu vectorial.
Fie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{N}ul(A)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem de arătat că

$$\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in \mathcal{N}ul(A),$$

Folosim teorema de caracterizare a subspațiilor pentru a demonstra că $\mathcal{N}ul(A)$ este subspațiu vectorial.
Fie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{N}ul(A)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem de arătat că

$$\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in \mathcal{N}ul(A),$$

adică

$$A(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Subspații vectoriale

Folosim teorema de caracterizare a subspațiilor pentru a demonstra că $\mathcal{N}ul(A)$ este subspațiu vectorial.
Fie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{N}ul(A)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem de arătat că

$$\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} \in \mathcal{N}ul(A),$$

adică

$$A(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Cum $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ și $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, avem că $\alpha A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ și $\beta A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, deci și suma lor este nulă.

Subspații vectoriale

Definiție

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ o mulțime de vectori. Mulțimea

$$\mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \{\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{k}\}$$

se numește **spațiul liniar generat** de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Subspații vectoriale

Definiție

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ o mulțime de vectori. Mulțimea

$$\mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \{\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{k}\}$$

se numește **spațiul liniar generat** de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Exemplu

Considerăm vectorii $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1) \in \mathbb{R}^2$.

Definiție

Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial și $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ o mulțime de vectori. Mulțimea

$$\mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \{\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Bbbk\}$$

se numește **spațiul liniar generat** de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

Exemplu

Considerăm vectorii $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1) \in \mathbb{R}^2$.
Vectorul $\mathbf{v} = (2, 5) \in \mathcal{S}pan\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ deoarece $\mathbf{v} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

Teoremă

În $\mathbb{k}$*-spațiul vectorial* V*, dacă* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$*, atunci mulțimea* $\mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *este subspațiu vectorial al lui* V*.*

Teoremă

În $\mathbb{k}$*-spațiul vectorial* V*, dacă* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$*, atunci mulțimea* $\mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *este subspațiu vectorial al lui* V*.*

Demonstrație:

Folosim teorema de caracterizare a subspațiilor. Fie $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.

Teoremă

În $\mathbb{k}$*-spațiul vectorial* V*, dacă* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$*, atunci mulțimea* $\mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *este subspațiu vectorial al lui* V*.*

Demonstrație:

Folosim teorema de caracterizare a subspațiilor. Fie $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.
Demonstrăm că $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{w} \in \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Teoremă

În $\mathbb{k}$*-spațiul vectorial* V*, dacă* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$*, atunci mulțimea* $\mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *este subspațiu vectorial al lui* V*.*

Demonstrație:

Folosim teorema de caracterizare a subspațiilor. Fie $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.
Demonstrăm că $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{w} \in \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.
Avem $\mathbf{u} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n$ și $\mathbf{w} = \beta_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_n \cdot \mathbf{v}_n$, unde $\alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{k}$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

Teoremă

În $\mathbb{k}$-spațiul vectorial V, dacă $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$, atunci mulțimea $\mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ este subspațiu vectorial al lui V.

Demonstrație:

Folosim teorema de caracterizare a subspațiilor. Fie $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.
Demonstrăm că $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{w} \in \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.
Avem $\mathbf{u} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n$ și $\mathbf{w} = \beta_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_n \cdot \mathbf{v}_n$, unde $\alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{k}$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.
Atunci:

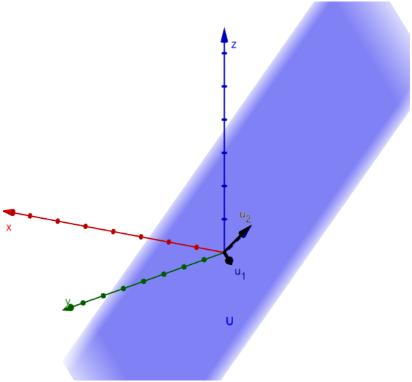
$$\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{w} = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) \cdot \mathbf{v}_n,$$

ceea ce încheie demonstrația. $\square$

Subspații vectoriale

Exemplu

Considerăm $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$



Avem

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\} =$$

Subspații vectoriale

Avem

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\} = \{(-a - b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} =$$

Avem

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\} = \{(-a - b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{a\,(-1, 1, 0) + b\,(-1, 0, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

adică

Avem

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\} = \{(-a - b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{a\,(-1, 1, 0) + b\,(-1, 0, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

adică

$$U = \mathcal{S}pan\,(\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0)\,,\ \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1))\,.$$

Avem

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\} = \{(-a - b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{a\,(-1, 1, 0) + b\,(-1, 0, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

adică

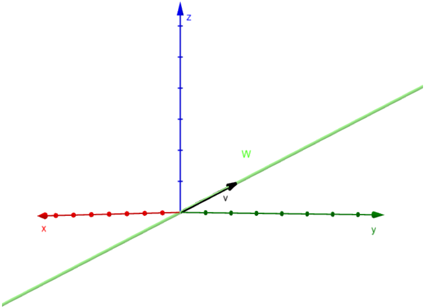
$$U = \mathcal{S}pan\,(\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0)\,,\ \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1))\,.$$

Avem $U = \mathcal{N}ul(A)$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplu

Considerăm
$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0, \ y - z = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$



Subspații vectoriale

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0, \ y - z = 0\} =$$

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = 0, \; y - z = 0\right\} =$$

$$= \{(-2a, a, a) : a \in \mathbb{R}\} =$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = 0, \; y - z = 0\} =$$

$$= \{(-2a, a, a) : a \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{a\,(-2, 1, 1) : a \in \mathbb{R}\}$$

Subspații vectoriale

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = 0, \; y - z = 0\right\} =$$

$$= \{(-2a, a, a) : a \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{a\,(-2, 1, 1) : a \in \mathbb{R}\}$$

deci $W = \mathcal{S}pan\,(\mathbf{w}_1 = (-2, 1, 1))\,.$

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y + z = 0, \; y - z = 0\right\} =$$

$$= \{(-2a, a, a) : a \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{a\,(-2, 1, 1) : a \in \mathbb{R}\}$$

deci $W = \mathcal{S}pan\,(\mathbf{w}_1 = (-2, 1, 1))\,.$
Avem $U = \mathcal{N}ul(A)$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Observație

Subspațiile vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$ sunt: orice plan care trece prin origine, orice dreaptă care trece prin origine, subspațiul nul $\{\mathbf{0}\}$ și întreg spațiul.

Observație

Subspațiile vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$ sunt: orice plan care trece prin origine, orice dreaptă care trece prin origine, subspațiul nul $\{\mathbf{0}\}$ și întreg spațiul.
Subspațiile vectoriale ale lui $\mathbb{R}^2$ sunt: orice dreaptă care trece prin origine, subspațiul nul $\{\mathbf{0}\}$ și $\mathbb{R}^2$.

Definiție

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectori din V și $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{k}$ scalari. Vectorul $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \in V$ se numește **combinație liniară a vectorilor $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ cu scalarii** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{k}$.

Definiție

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vectori din V și $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}$ scalari. Vectorul $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n \in V$ se numește **combinație liniară a vectorilor $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ cu scalarii** $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}$.

Exemplu

Fie vectorii $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$ și $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$ în $\mathbb{R}^3$. Vectorul $\mathbf{w}_1 = (2, 2, 1)$ este o combinație liniară a vectorilor $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ deoarece $\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Definiție

Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectori din V și $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Bbbk$ scalari. Vectorul $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \in V$ se numește **combinație liniară a vectorilor $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ cu scalarii** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Bbbk$.

Exemplu

Fie vectorii $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$ și $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$ în $\mathbb{R}^3$. Vectorul $\mathbf{w}_1 = (2, 2, 1)$ este o combinație liniară a vectorilor $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ deoarece $\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.
Vectorul $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 0)$ nu este combinație liniară a vectorilor $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$. Într-adevăr, presupunem prin absurd că există $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{w}_2 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$, adică $(0, 1, 0) = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)$ ceea ce conduce la $\alpha_1 = 0$ și $\alpha_1 = 1$, contradicție.

Definiție

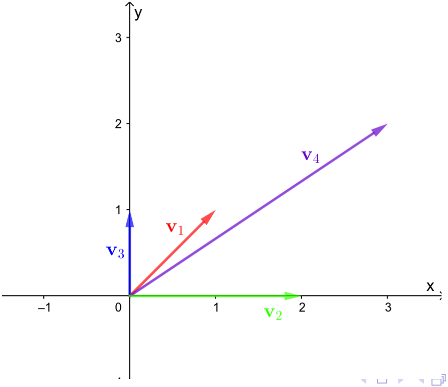
Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ o mulțime de vectori. Spunem că $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ formează un **sistem de generatori** pentru V dacă $V = \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, adică pentru orice vector $\mathbf{v} \in V$ există scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{k}$ astfel încât

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n.$$

Exemplu

În $\mathbb{R}^2$ se consideră mulțimea de vectori

$$\{\mathbf{v}_1 = (1,1), \mathbf{v}_2 = (2,0), \mathbf{v}_3 = (0,1), \mathbf{v}_4 = (3,2)\}.$$



Spații vectoriale finit generate

Pentru a verifica dacă $\mathbb{R}^2 = \mathcal{S}pan(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4)$, considerăm un vector $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ pentru care trebuie să găsim scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_4 \cdot \mathbf{v}_4$. Avem:

$$(x, y) = \alpha_1 \cdot (1, 1) + \alpha_2 \cdot (2, 0) + \alpha_3 \cdot (0, 1) + \alpha_4 \cdot (3, 2)\,,$$

echivalent cu

$$(x, y) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4).$$

Obținem:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_4 = x \\ \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = y \end{cases}$$

sistem ce poate fi scris sub formă matriceală:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Condiția de existență a scalarilor $\alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ înseamnă, de fapt, ca sistemul de ecuații liniare scris în formă matriceală să fie compatibil.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Cum $\mathrm{rang} A = 2$, sistemul este compatibil. Rezultă că $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^2$.

Observație

Atenție: $A = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4\ ]$

Observație

Pentru spațiile vectoriale uzuale sunt cunoscute următoarele sisteme de generatori:

- Mulțimea $S = \{\mathfrak{p}_0 = 1, \mathfrak{p}_1 = x, \mathfrak{p}_2 = x^2, \ldots, \mathfrak{p}_n = x^n\} \subseteq \Bbbk_n[x]$ este un sistem de generatori pentru $\Bbbk_n[x]$ deoarece orice polinom de grad cel mult n,

$$\mathfrak{p} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \;\; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \Bbbk,$$

  este o combinație liniară de elementele din S cu scalarii din $\Bbbk$:

$$\mathfrak{p} = a_0 \cdot \mathfrak{p}_0 + a_1 \cdot \mathfrak{p}_1 + \ldots a_n \cdot \mathfrak{p}_n, \;\; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \Bbbk.$$

- Un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^n$ este mulțimea

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{v}_n = (0, \ldots, 0, 1)\}.$$

- Pentru spațiul vectorial real $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ un sistem de generatori este dat de mulțimea matricelor de poziție:

$$\{E_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Matricea $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este matricea care are 1 pe poziția (i,j), iar toate celelalte elemente sunt nule.
În particular, un sistem de generatori pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este:

$$\left\{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\right.$$

$$\left. E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Nu orice mulțime de vectori generează un spațiu vectorial:

Exemplu

Fie $\{\mathfrak{p}_1 = 1 + x + x^2, \mathfrak{p}_2 = x + x^2, \mathfrak{p}_3 = 2\}$ o mulțime de polinoame din $\mathbb{R}_2[x]$. De remarcat faptul că $\mathbb{R}_2[x] \neq \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$ deoarece, dacă considerăm un polinom arbitrar $\mathfrak{p} = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, atunci sistemul în formă matriceală

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

nu este întotdeauna compatibil. Se observă de exemplu că polinomul $\mathfrak{p} = 1 + x + 2x^2 \notin \mathcal{S}pan(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$.

Definiție

Fie $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq V$ o mulțime de vectori din $\mathbb{k}$-spațiul vectorial V. Spunem că S formează un **sistem liniar independent** dacă singura soluție a ecuației

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{k}$, este $\alpha_i = 0$, pentru orice $1 \leq i \leq n$. În caz contrar, vectorii din S formează un **sistem liniar dependent**.

Observație

Pentru spațiile vectoriale frecvent folosite în aplicații avem:

- În $\mathbb{R}^n$ un sistem liniar independent este dat de
$$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)\}.$$
Într-adevăr, din
$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0},$$
obținem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$, deci unica soluție este $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
- Mulțimea $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \subset \mathbb{k}_n[x]$ formează un sistem liniar independent în $\mathbb{k}_n[x]$.

- Pentru $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ un sistem liniar independent este dat de mulțimea matricelor de poziție:

$$S = \{E_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Observație

O mulțime formată dintr-un singur vector nenul formează întotdeauna un sistem liniar independent.
În schimb, orice mulțime de vectori care conține vectorul nul este liniar dependentă.

Exemplu

În $\mathbb{R}^2$ considerăm mulțimea de vectori

$$S = \{\mathbf{v}_1 = (1,1), \mathbf{v}_2 = (2,0), \mathbf{v}_3 = (0,1), \mathbf{v}_4 = (3,2)\}.$$

Pentru a verifica dacă S este un sistem liniar independent trebuie ca din ecuația

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_4 \cdot \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

să obținem unica soluție $\alpha_1 = \cdots = \alpha_4 = 0$. Avem:

$$\alpha_1 \cdot (1,1) + \alpha_2 \cdot (2,0) + \alpha_3 \cdot (0,1) + \alpha_4 \cdot (3,2) = (0,0),$$

echivalent cu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este important de remarcat faptul că $A = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4\ ]$. Pentru a obține soluția unică banală trebuie ca $\text{rang}A = 4$, iar în cazul nostru $\text{rang}A = 2$. Deci vectorii din S formează un sistem liniar dependent.

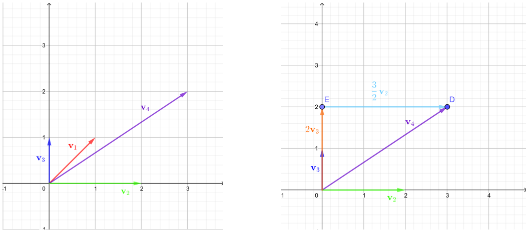


Figure: Mulțimea de vectori S

Mai mult, se observă că $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ și $\mathbf{v}_4 = \frac{3}{2}\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$, deci avem două relații de dependență.
În schimb, putem afirma că mulțimea $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ formează un sistem liniar independent deoarece din $\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, obținem unica soluție $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Observație

Este important de observat faptul că pentru a verifica dacă un sistem de vectori $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ este liniar independent trebuie să calculăm rangul matricei $A = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n\ ]$. Vectorii liniar independenți sunt cei care corespund coloanelor ce formează un minor (determinant) principal.

Exemplu

Considerăm mulțimea de vectori

$$S = \{\mathbf{v}_1 = (1,1), \mathbf{v}_2 = (2,0), \mathbf{v}_3 = (0,1), \mathbf{v}_4 = (3,2)\} \subset \mathbb{R}^2$$

și matricea

$$A = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{v}_4\ ] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cum $\operatorname{rang} A = 2$, avem că un determinant principal este

$$\det[\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2\ ] = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

deci $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ formează un sistem liniar independent. De asemenea, putem să considerăm și $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sistem liniar independent, folosind același argument.

Despre sistemele liniar dependente putem să afirmăm că:

Propoziție

Sistemul de vectori $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ din $\mathbb{k}$-spațiul vectorial V este liniar dependent dacă și numai dacă există un vector $\mathbf{v}_i \in S$ care poate fi scris ca o combinație liniară de ceilalți vectori din S.

Exemplu

Sistemul de vectori $S = \{\mathbf{v}_1 = (1,1), \mathbf{v}_2 = (2,0), \mathbf{v}_3 = (0,1), \mathbf{v}_4 = (3,2)\} \subset \mathbb{R}^2$ este liniar dependent deoarece avem scrierile $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ și $\mathbf{v}_4 = \frac{3}{2}\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$.

Observație

Interpretare geometrică pentru vectori liniar independenți/dependenți:

- În $\mathbb{R}^2$ vectorii $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ sunt liniar dependenți dacă și numai dacă $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sunt coliniari.
- În $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ și $\mathbf{w}$ sunt liniar independenți dacă și numai dacă $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ NU sunt coplanari.

Observație

Considerăm
$V = \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ derivabilă de n ori și $f^{(n)}$continuă$\}$.
Atunci $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset V$ este liniar independentă $\Leftrightarrow$

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
$W(f_1, \ldots, f_n)(x)$ se numește **Wronskian-ul** funcțiilor $f_1, \ldots, f_n$.

Exemplu

Pe $V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ derivabilă și f' continuă$\}$ considerăm mulțimea $\{f_1 = \cos, f_2 = \sin\}$. Avem $\{f_1, f_2\}$ sunt liniar independente dacă și numai dacă

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Avem

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcțiile sunt liniar independente.

Spații vectoriale finit generate

Definiție

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ o mulțime de vectori. Spunem că mulțimea S este **bază** în V dacă S este atât sistem de generatori pentru V, cât și sistem liniar independent.

Definiție

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ o bază a lui V. Numărul notat cu $\dim_{\mathbb{k}}(V)$, definit prin $\dim_{\mathbb{k}} V = |S|$, se numește **dimensiunea spațiului vectorial V.**

Observație

Facem următoarea convenție: dacă $V = \{\mathbf{0}\}$, atunci $\dim_{\mathbb{k}} V = 0$.

Definiție

Spunem că un spațiu vectorial V peste corpul $\mathbb{k}$ este **finit generat** dacă V admite o bază cu un număr finit de vectori, adică $\dim_{\mathbb{k}} V < \infty$.

Exemplu

(**Baze canonice**)

- Mulțimea de vectori din $\mathbb{R}^n$

  $$\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$$

  formează o bază pentru spațiul vectorial real $\mathbb{R}^n$, deci dimensiunea spațiului vectorial real $\mathbb{R}^n$ este $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.
- Mulțimea $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \subset \mathbb{k}_n[x]$ formează o bază pentru $\mathbb{k}$-spațiul vectorial $\mathbb{k}_n[x]$. Obținem astfel că dimensiunea $\mathbb{k}$-spațiului vectorial $\mathbb{k}_n[x]$ este $\dim_{\mathbb{k}} \mathbb{k}_n[x] = n + 1$.
- Mulțimea $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ formează o bază în $\mathbb{k}$-spațiul vectorial $\mathbb{k}[x]$, deci $\dim_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[x] = \infty$.

- Pentru spațiul vectorial real $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o bază este reprezentată de mulțimea matricelor de poziție:

$$\{E_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\},$$

de unde obținem că $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$.

- Bază pentru $\mathbb{C}$, considerat ca fiind $\mathbb{C}$-spațiu vectorial este $\{1\}$. În schimb, dacă considerăm $\mathbb{C}$ ca fiind un spațiu vectorial real, atunci o bază este $\{1, i\}$, deoarece orice număr complex se scrie unic sub forma $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. În concluzie, avem:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \text{ și } \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$$

Teoremă

Într-un spațiu vectorial de dimensiune finită au loc următoarele:

(a) *orice două baze au același cardinal;*

(b) *din orice sistem de generatori se poate extrage o bază.*

Exemplu

În $\mathbb{R}^2$ considerăm mulțimea de vectori

$$S = \{\mathbf{v}_1 = (1,1), \mathbf{v}_2 = (2,0), \mathbf{v}_3 = (0,1), \mathbf{v}_4 = (3,2)\}.$$

Am văzut că S este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^2$, dar nu este sistem liniar independent. Într-adevăr, se poate observa ușor că avem relațiile de dependență $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ și $\mathbf{v}_4 = \frac{3}{2}\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$, deci $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ este un sistem liniar independent.

Spații vectoriale finit generate

Din sistemul de generatori S ne propunem să extragem o bază. Cum orice două baze au același cardinal și baza canonică pentru $\mathbb{R}^2$ are doar două elemente, obținem imediat că $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ formează bază pentru $\mathbb{R}^2$.

Teoremă

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial, $\dim_{\mathbb{k}} V = n < \infty$ și $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\} \subset V$ o mulțime de vectori. Atunci:

- *Dacă $s > n$, atunci S este liniar dependentă;*
- *Dacă $s < n$, atunci S nu generează V, adică $V \neq \mathcal{S}pan(S)$;*
- *Dacă $s = n$, atunci:*

$$S \text{ este bază} \Leftrightarrow S \text{ este liniar independentă} \Leftrightarrow S \text{ generează } V.$$

Exemplu

În spațiul vectorial $\mathbb{R}^2$, cu $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, considerăm mulțimile de vectori

$$S_1 = \{\mathbf{v}_1 = (1,2), \mathbf{v}_2 = (0,1), \mathbf{v}_3 = (1,1)\} \text{ și } S_2 = \{\mathbf{w} = (1,2)\}.$$

Pentru prima mulțime avem $|S_1| = 3 > 2$, deci mulțimea S_1 este liniar dependentă conform primului caz al teoremei. Într-adevăr, S_1 este liniar dependentă deoarece există vectorul $\mathbf{v}_3 \in S_1$ astfel încât $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

Exemplu

În spațiul vectorial $\mathbb{R}^2$, cu $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, considerăm mulțimile de vectori

$$S_1 = \{\mathbf{v}_1 = (1,2), \mathbf{v}_2 = (0,1), \mathbf{v}_3 = (1,1)\} \text{ și } S_2 = \{\mathbf{w} = (1,2)\}.$$

Pentru prima mulțime avem $|S_1| = 3 > 2$, deci mulțimea S_1 este liniar dependentă conform primului caz al teoremei. Într-adevăr, S_1 este liniar dependentă deoarece există vectorul $\mathbf{v}_3 \in S_1$ astfel încât $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.
Pentru S_2, cum $|S_2| = 1 < 2$, obținem că $\mathbb{R}^2 \neq \mathcal{S}pan(S_2)$.
Într-adevăr, avem $\mathcal{S}pan(S_2) = \{\alpha \cdot \mathbf{w} : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$, deci, geometric, $\mathcal{S}pan(S_2)$ conține toți vectorii coliniari cu $\mathbf{w}$. Deoarece nu toți vectorii din $\mathbb{R}^2$ sunt coliniari cu $\mathbf{w}$, de exemplu $\mathbf{w}_1 = (2,1) \notin \mathcal{S}pan(S_2)$, rezultă că $\mathcal{S}pan(S_2) \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Teoremă (Steinitz)

Fie V *un spațiu vectorial peste corpul* $\mathbb{k}$, $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *o bază a lui* V *și* $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s\}$ *o mulțime liniar independentă, cu* $s \leq n$. *Atunci mulțimea*

$$B' = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s, \mathbf{v}_{s+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

formează o bază în V.

Cu alte cuvinte, orice mulțime de vectori liniar independenți se poate completa până la o bază.

Exemplu

Mulțimea de vectori $S = \{\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (2, 1, 0)\}$ din $\mathbb{R}^3$ este liniar independentă deoarece rangul matricei $A = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2\ ]$ este 2. Pentru a completa mulțimea până la o bază, trebuie să mai adăugăm un singur vector, deoarece $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$. Atunci, dacă folosim un vector din baza canonică, obținem că mulțimea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1\}$ este o bază pentru $\mathbb{R}^3$, unde $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$.

Teoremă

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial de dimensiune n și $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ o mulțime de vectori. Mulțimea B formează bază dacă și numai dacă orice vector $\mathbf{v} \in V$ se exprimă unic sub forma:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{k}.$$

Scalarii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se numesc **coordonatele vectorului v** *în baza B.*

Exemplu

În baza $B = \{\mathbf{v}_1 = (1,2,3), \mathbf{v}_2 = (2,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ coordonatele vectorului $\mathbf{v} = (0,3,7)$ sunt $2, -1, 1$ deoarece $\mathbf{v} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{e}_3$. În baza canonică, coordonatele vectorului $\mathbf{v}$ sunt $0, 3, 7$ deoarece $\mathbf{v} = 0\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3$.

Propoziție

Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial și U un subspațiu al lui V. Atunci are loc relația $\dim_{\Bbbk} U \leq \dim_{\Bbbk} V$. În plus, dacă $\dim_{\Bbbk} U = \dim_{\Bbbk} V$, atunci $U = V$.