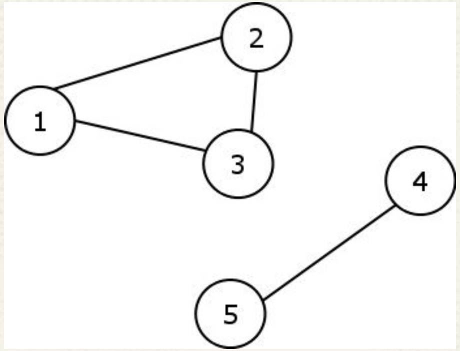
HEAPURI

Heapuri

- Definiții
  - Graf
  - Arbore
  - Arbore Binar
  - Heap
- Heapuri - inserare, ștergere
- Heapify (creare heap în timp liniar)
- Lazy Deletion
- Binomial Heap
- Fibonacci Heap

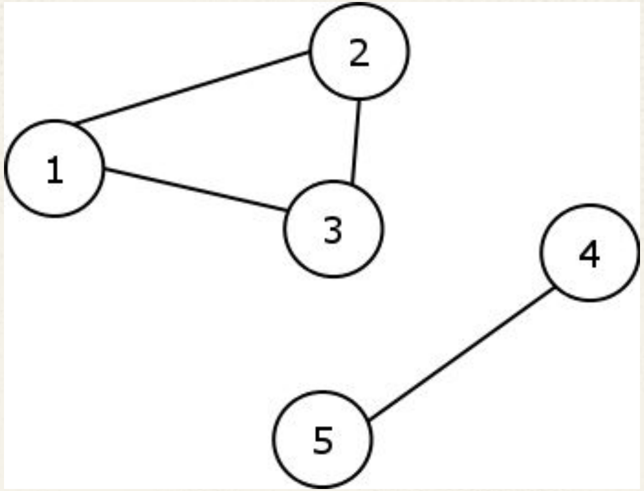
Grafuri

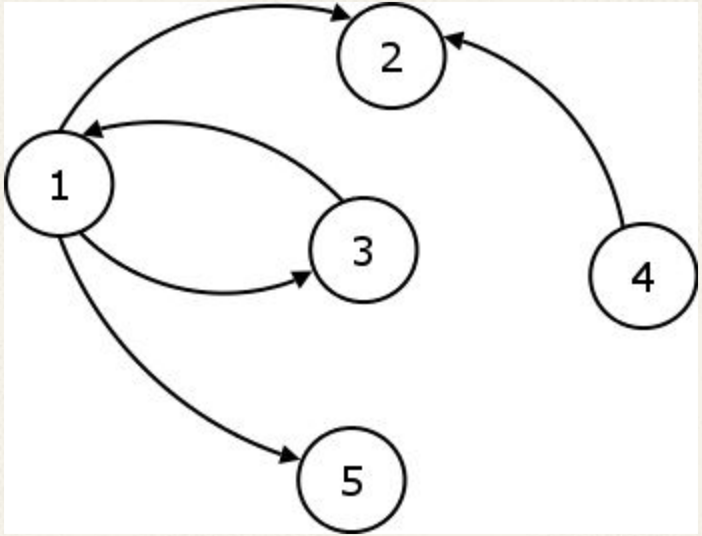
- Ce este un graf?
- Un graf este o pereche de mulțimi **G = (V, E)**, unde:
  - **V** este mulțimea de noduri (vertex / vertices),
  - **E** este mulțimea de muchii



Grafuri

- Graf orientat vs graf neorientat





Arbori

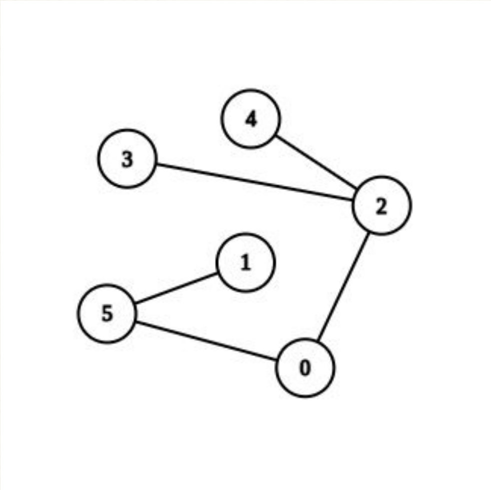
- Definiții:
  - Un arbore este un graf conex aciclic
  - Un arbore este un graf aciclic maximal
  - Un arbore este un graf conex minimal
  - Un arbore este un graf aciclic cu **n-1** muchii
  - Un arbore este un graf conex cu **n-1** muchii
  - ...
  - Într-un arbore există un singur drum simplu între oricare 2 noduri

Arbori

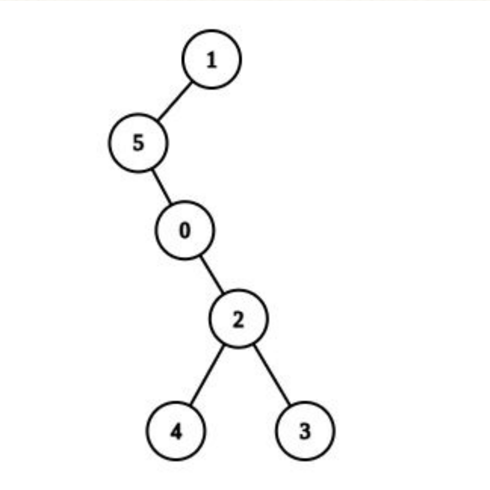
- Proprietăți:
  - Un arbore cu **n ≥ 2** vârfuri conține minim 2 frunze
  - Ce este o frunză?
    - Un nod cu gradul 1 (și rădăcina poate să fie frunză)

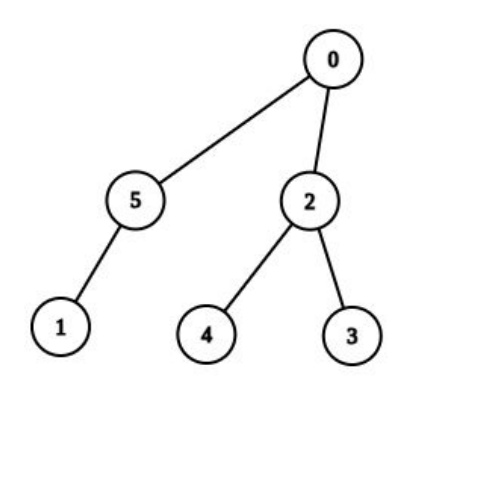
Arbori

- Rădăcina:
  - Ce este rădăcina unui arbore?
    - Putem alege un nod de care să agățăm arborele; acel nod este rădăcina
    - În funcție de ce rădăcina avem, înălțimea arborelui poate fi diferită



→





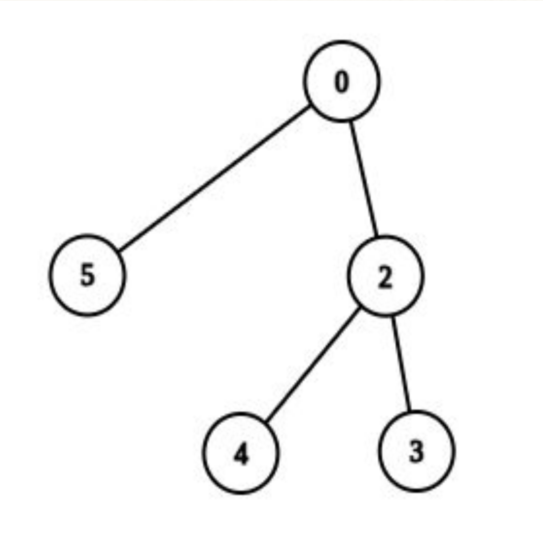
Arbori binari

Un **arbore binar** este un arbore cu rădăcină, în care fiecare nod are cel mult 2 copii.

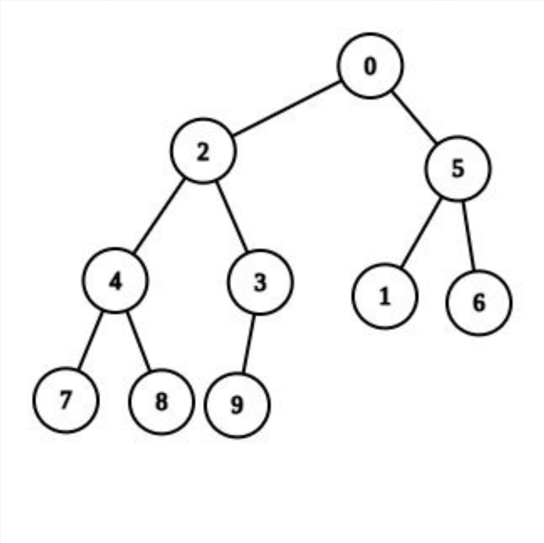
Copiii unui nod sunt numiți copilul stâng (Left, L) și copilul drept (Right, R).

Arbori binari

Un arbore binar este **plin** dacă fiecare nod are 0 sau 2 fii



Un arbore binar este **complet** dacă toate nivelurile sunt complete, exceptând ultimul nivel care e completat de la S→D



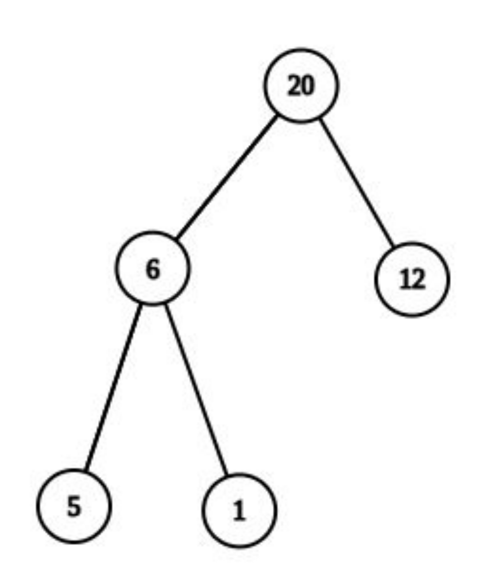
Arbori binari - Proprietăți

- Exercițiu:
  - Numărul de noduri ale unui arbore binar cu înălțimea **h** este între (?) și (?)
    - h (dacă este lanț)
    - $2^{h+1} - 1$
      - 1 pe primul nivel, 2 pe al doilea, ..., 2^h pe al h-lea

- Un arbore binar este **balansat** dacă, pentru orice nod, diferența între fiul stâng și cel drept este maxim 1

Heapuri

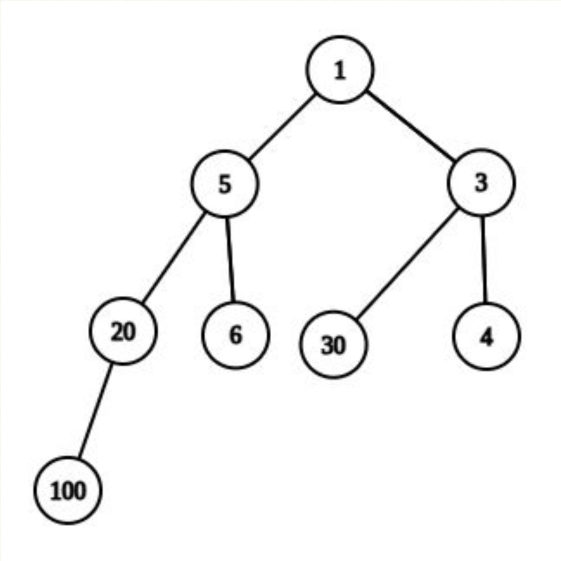
- Un heap de maxim este un **arbore binar complet** cu proprietatea că fiecare nod este mai mare decât fiii săi



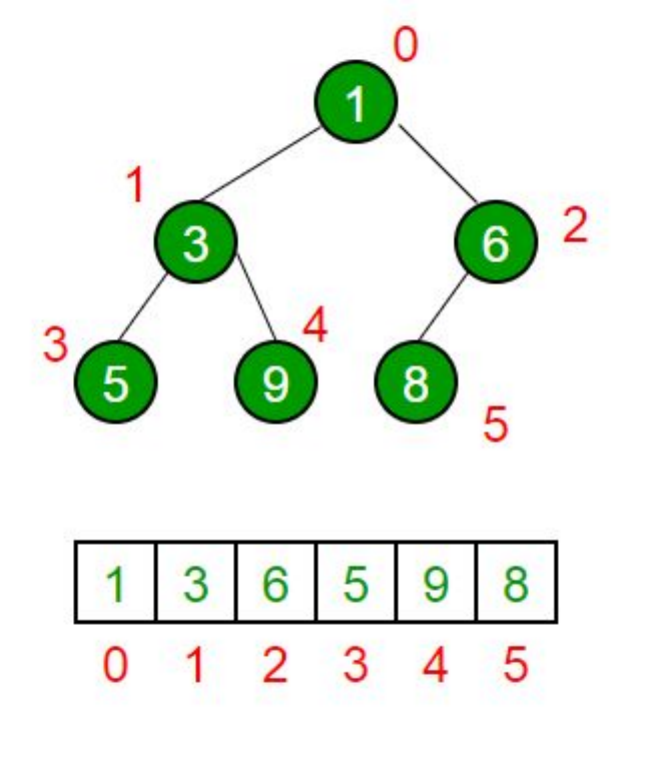
Heapuri

- Un heap de minim este un **arbore binar complet** cu proprietatea că fiecare nod este mai mic decât fiii săi

- Unchiul poate fi mai mare decât nepotul (vezi 5 și 4). Nu există o ordonare pe nivele!! Doar între descendenți!

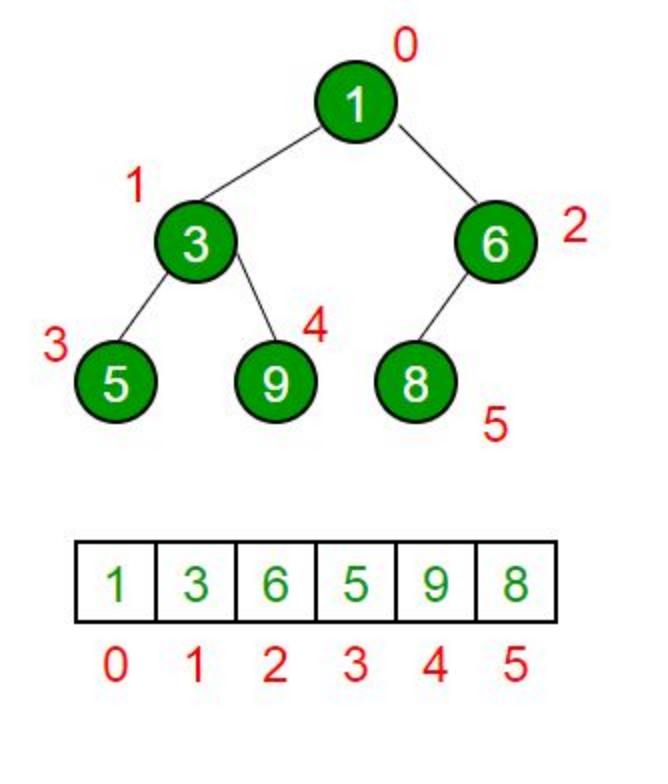


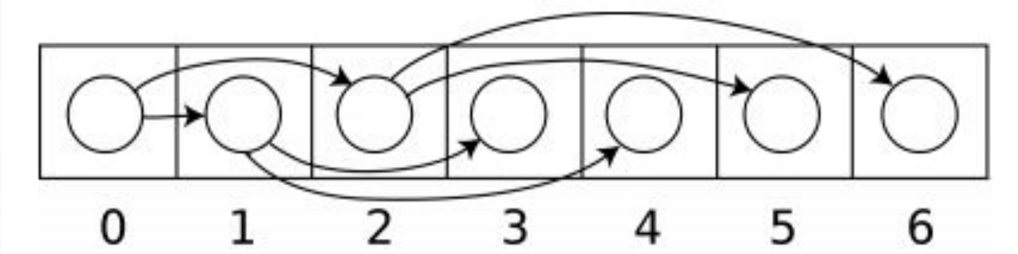
Heapuri - Reprezentare



Un arbore binar complet poate fi reprezentat ca un vector!

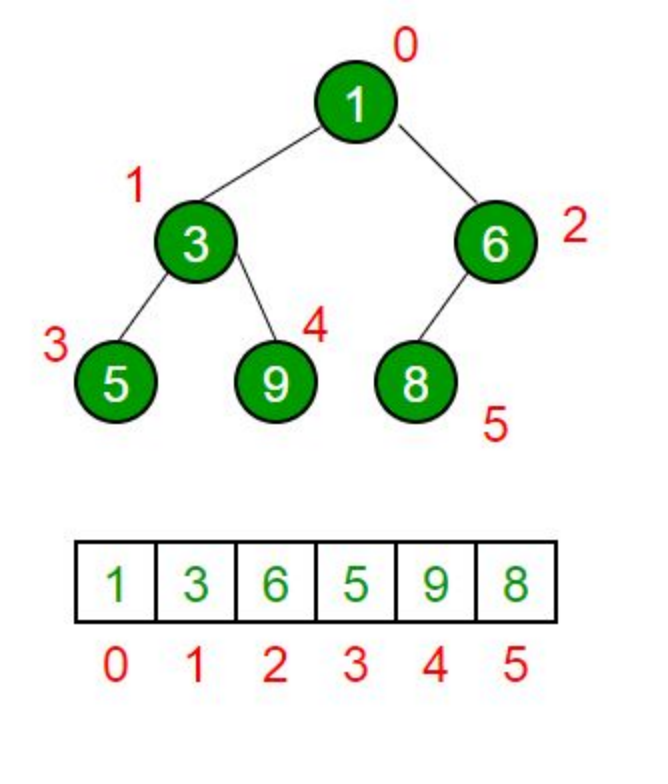
Heapuri - Reprezentare

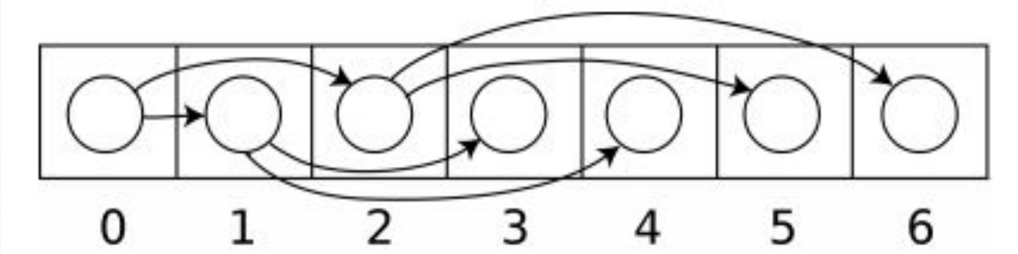




- Parinte(i) = (i - 1) / 2, unde i este indicele nodului curent
- IndexStanga(i) = 2 * i + 1, unde i este indicele nodului curent
- IndexDreapta(i) = 2 * i + 2, unde i este indicele nodului curent

Heapuri - Reprezentare



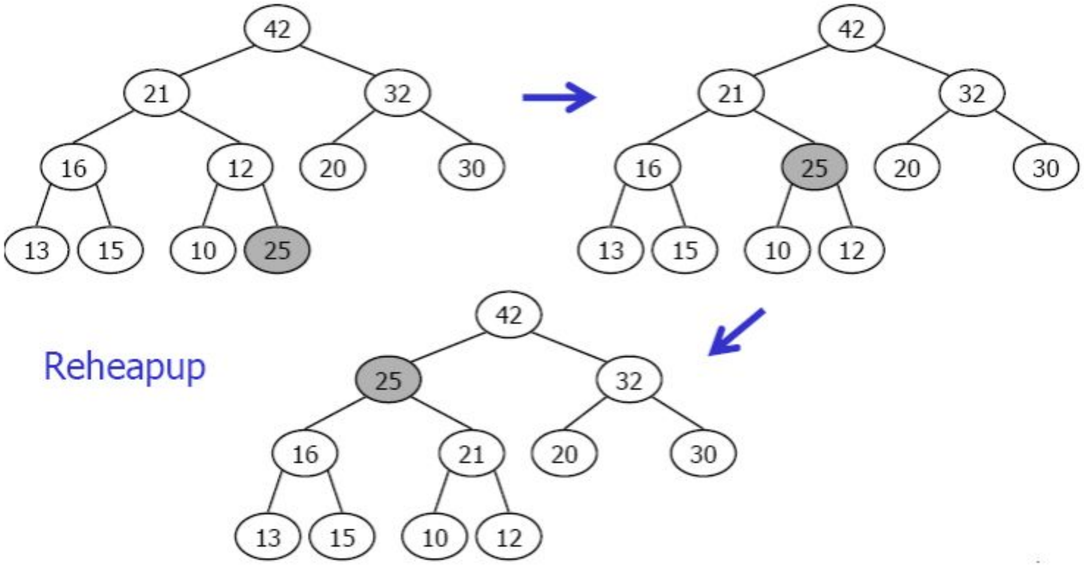


- Parinte(i) = (i - 1) / 2, unde i este indicele nodului curent
- IndexStanga(i) = 2 * i + 1, unde i este indicele nodului curent
- IndexDreapta(i) = 2 * i + 2, unde i este indicele nodului curent

Înălțime: log n !!

Heapuri - Urcă (percolate)

ReheapUp: repairs a "broken" heap by floating the last element up the tree until it is in its correct location.

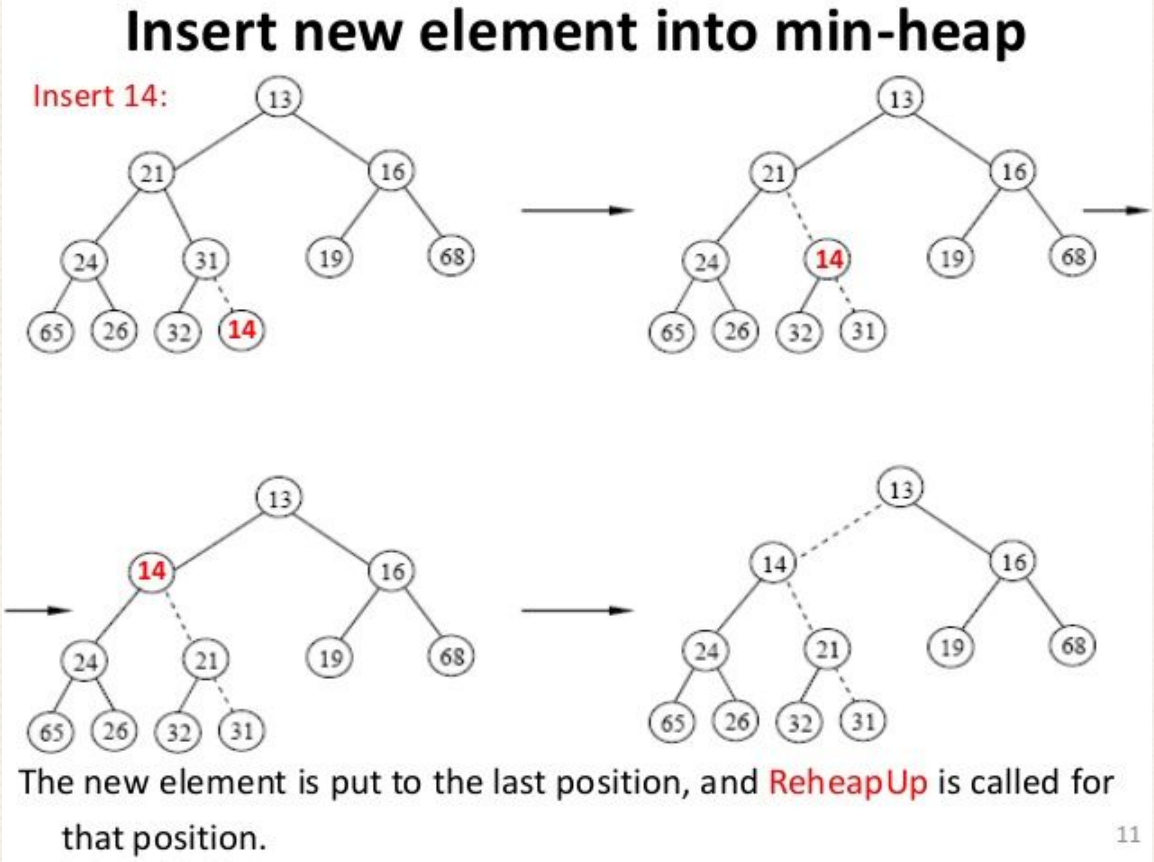


O(log n)

Urca cod

```
void urca(int poz) {
    while (poz) {
        int tata = (poz - 1) / 2;
        if (heap[tata] < heap[poz]) {
            swap(heap[tata], heap[poz]);
            poz = tata;
        } else {
            break;
        }
    }
}
```

Heapuri - Inserare



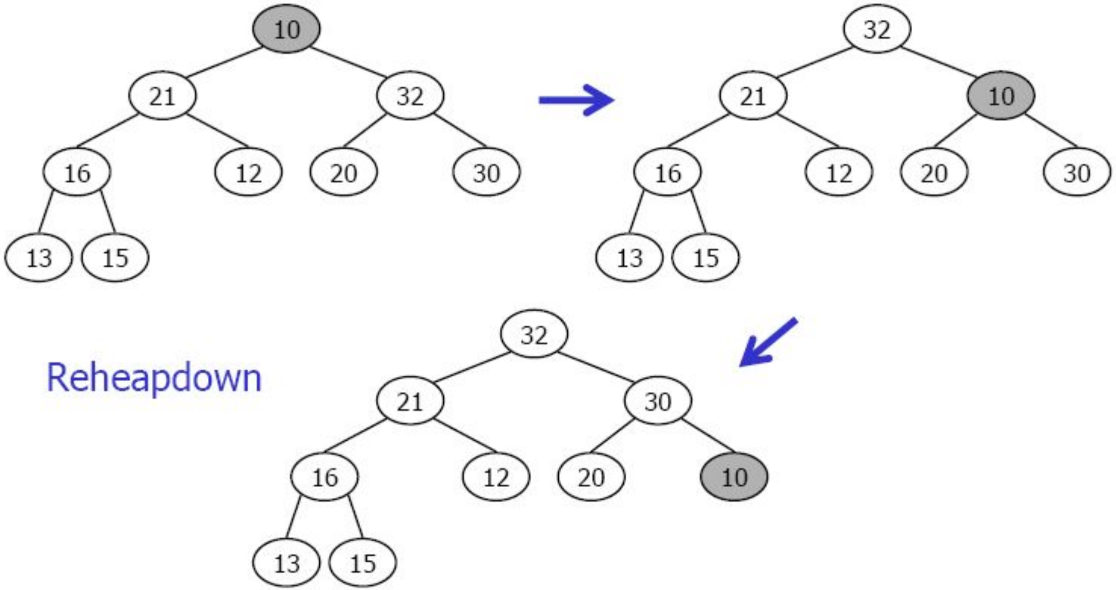
O(log n)

Inserare cod

```
void push(int x) {
    heap.push_back(x);
    urca(heap.size()-1);
}
```

Heapuri - Coboară (sift)

ReheapDown: repairs a "broken" heap by pushing the root of the subtree down until it is in its correct location.



O(log n)

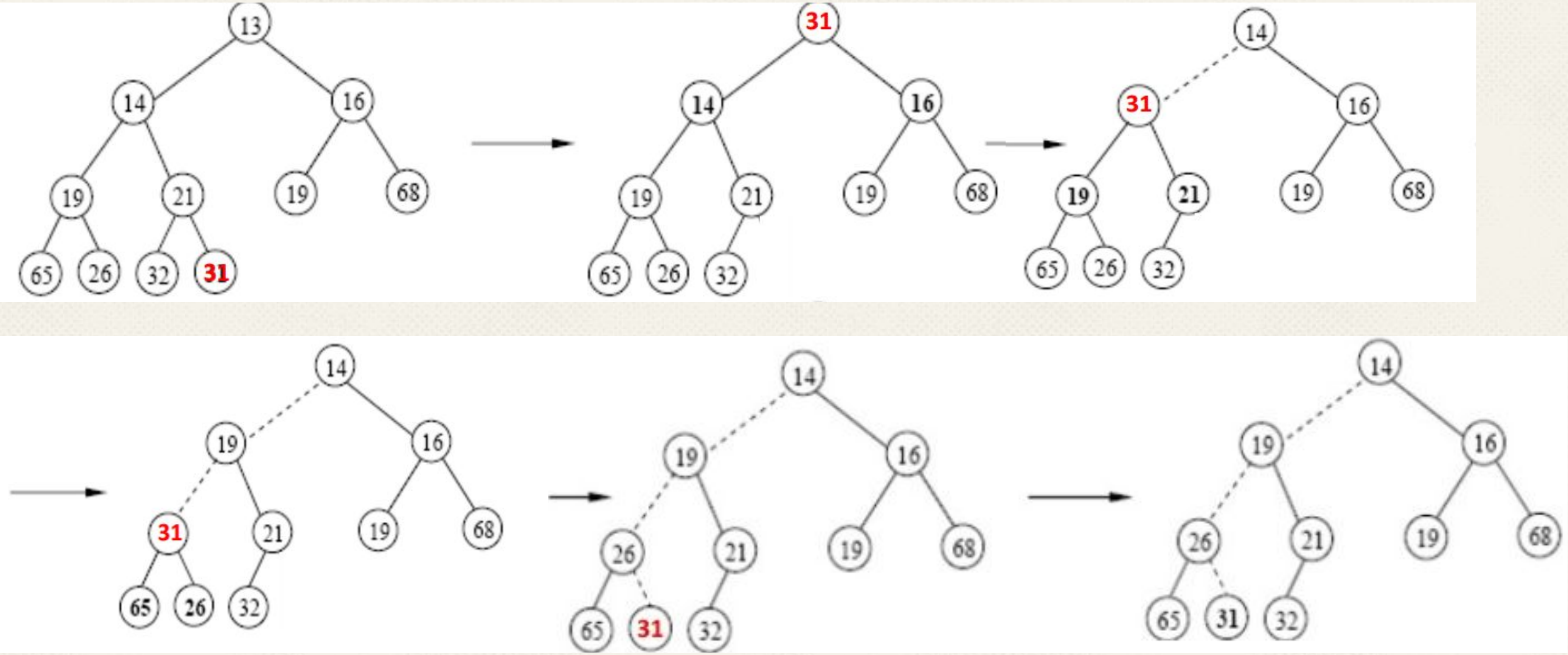
Coboara cod

```
void coboara(int poz) {
    if (poz * 2 + 1 >= heap.size())
        return;
    int fiu_st = heap[poz * 2 + 1];
    if ((poz * 2 + 2 == heap.size()) || fiu_st > heap[poz * 2 + 2]) {
        if (fiu_st > heap[poz]) {
            swap(heap[poz], heap[poz * 2 + 1]);
            coboara(poz * 2 + 1);
            return;
        }
```

Partea 2

```
else {   return;
        }
    } else {
        if (heap[poz * 2 + 2] > heap[poz]) {
            swap(heap[poz], heap[poz * 2 + 2]);
            coboara(poz * 2 + 2);
            return;
        } else {
            return;
        }
    }
```

Heapuri - Elimină



The element in the last position is put to the position of the root, and ReheapDown is called for that position.

14

O(log n)

Pop cod

```
int pop() {
    if (heap.size() == 0)
        return -1;
    int vf = heap[0];
    heap[0] = heap[heap.size()-1];
    heap.pop_back();
    coboara(0);
    return 0;
  }
```

Heapify

Construire heap

- Inserăm **n** elemente - **O(n log n)**

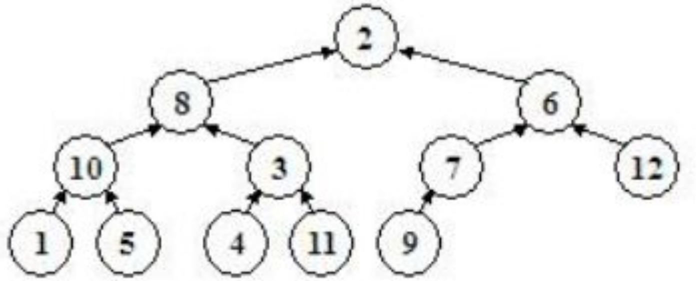
Heapify

Construire heap

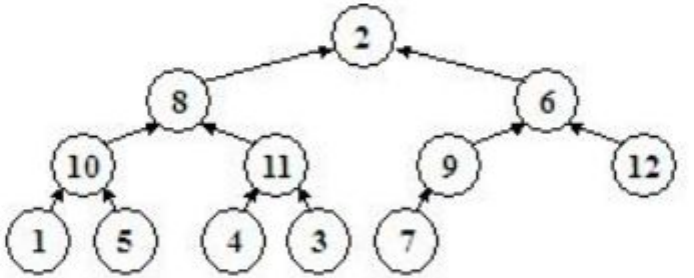
- Inserăm **n** elemente - **O(n log n)**
- Liniar:
  - Coborâm fiecare element începând de jos în sus

```
void build_heap(Heap H) {
    for (int i = H.size() /2; i >= 0; i--) {
        cobora(H, i);
    }
}
```

Heapify

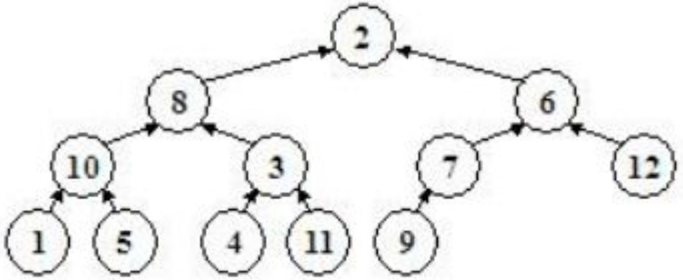


Nivelul frunzelor este organizat

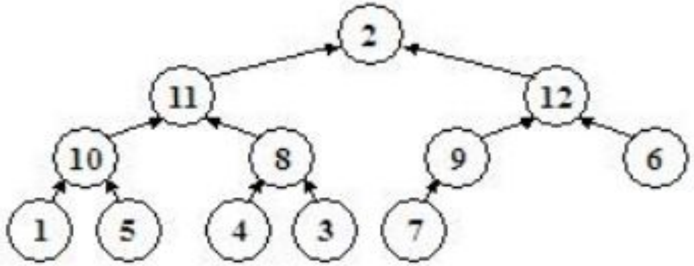


Ultimele doua niveluri sunt organizate

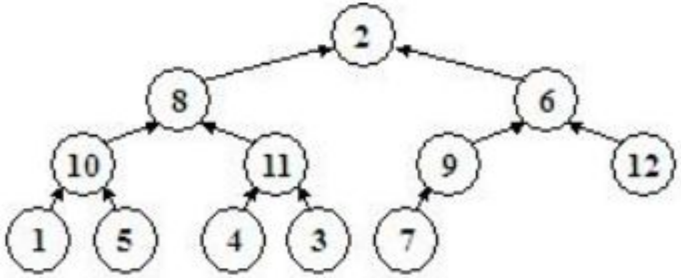
Heapify



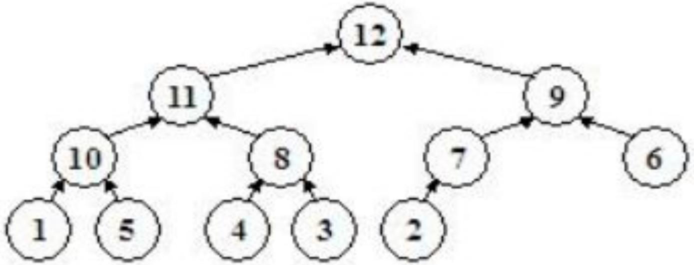
Nivelul frunzelor este organizat



Ultimele trei niveluri sunt organizate



Ultimele doua niveluri sunt organizate



Structura de heap

Heapify

Complexitate

- n noduri: coborâm fiecare nod în **log n**

  → **O(n log n)**

Heapify

Complexitate

- n noduri: coborâm fiecare nod în **log n**

  → **O(n log n)**

- Sau calculăm pentru fiecare nod ce efort depunem
  - Pentru jumătate nu facem nimic (cazul frunzelor)
  - Pentru un sfert, coboară maxim un nivel
  - Ș.a.m.d.

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{n}{2^h} O(h) = O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{h}{2^h}\right)$$
$$= O\left(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h}\right)$$
$$= O(n)$$

Problemă

- Se dau multe operații de genul:
  - Inserare număr - O(log n)
  - Afișare minim - O(1)
  - Elimină indice

Cum putem folosi un heap?

- **Problemă:** ?

Problemă

- Se dau multe operații de genul:
    - Inserare număr - O(log n)
    - Afișare minim - O(1)
    - Elimină indice

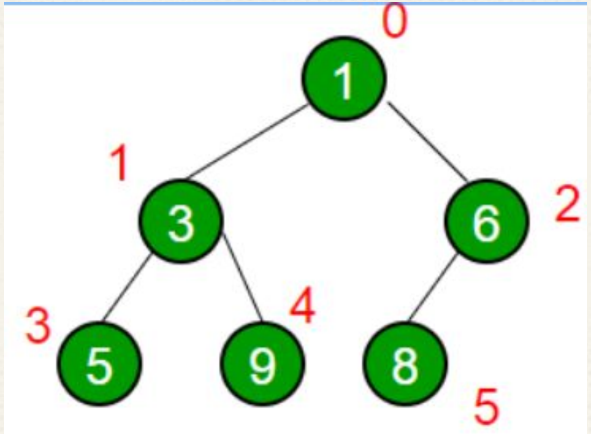
Cum putem folosi un heap?

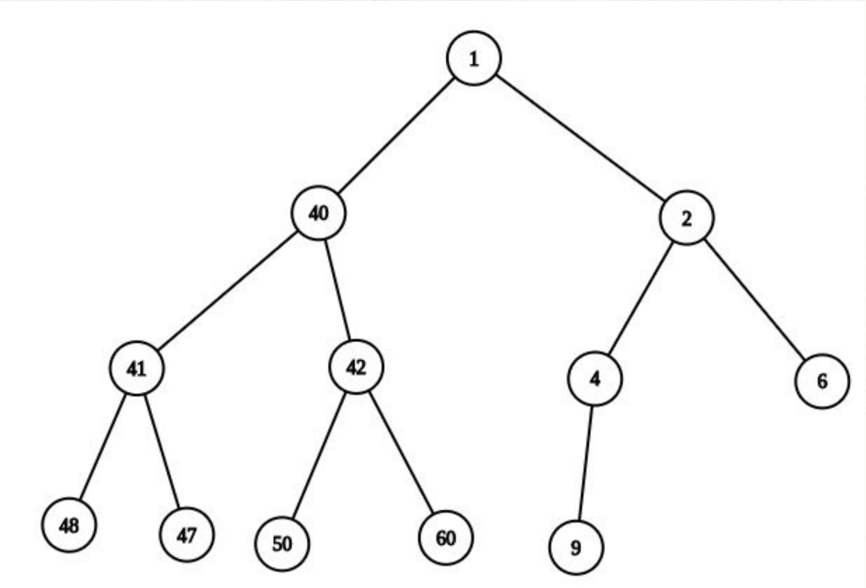
- **Problemă:** Eliminare număr (Nu știm indexul din heap și fără să știm indexul nu putem elimina în **log n**)

Eliminare element cunoscând poziția

```
elimina(i) {
    heap[i] = heap[n--];
    coboara(i);
    urca(i);
}
```

Eliminăm 3, respectiv 41





Problemă

- Se dau multe operații de genul:
  - Inserare număr
  - Afișare minim
  - Elimină indice

Cum putem folosi un heap?

- **Problemă:** Eliminare indice
  - Totuși, nu avem poziția în heap. Putem să o reținem (niște pointeri dubli… un pic dureros).

Lazy deletion

- Marcăm un nod spre ștergere, dar nu-l ștergem decât când ajunge în vârf
  - Mai simplu
  - Trebuie să folosim mai multă memorie ca să ținem minte elementele marcate
  - Căutarea in heap e O(n)

- Operație ce va fi folosită în general la arbori, nu doar pentru heapuri

Heapuri - Complexitate

Operație	Timp Mediu	Cel mai rău caz
Spațiu	O(n)	O(n)
Căutare	O(n)	O(n)
Inserare	O(1) n/2 * 0 + n/4 * 1 + n/8 * 2 …~= 1	O(log n)
Ștergere	O(log n)	O(log n)
Căutare minim	O(1)	O(1)
Construcție n elemente	O(n)	O(n)
Uniune (2 heapuri de n elemente)	O(n)	O(n)

Heapuri Binomiale și Heapuri Fibonacci

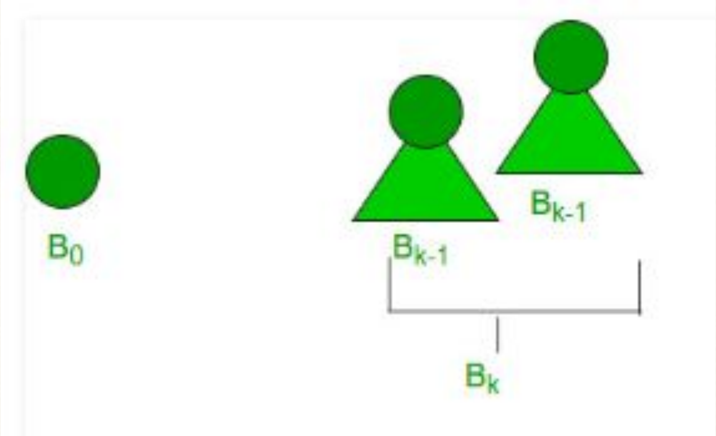
- Motivație:
  - Reuniunea este înceată și alte operații pot fi îmbunătățite

	Căutare Min	Ștergere Min	Inserare	Update	Reuniune
Heap Binar	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$\Theta(n)$
Heap Binomial	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$ (amortizat)	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)$
Heap Fibonacci	$\Theta(1)$	$O(\log n)$ (amortizat)	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$ (amortizat)	$\Theta(1)$

Arbori binomiali

- Un arbore binomial de ordin 0 are un nod (rădăcina)

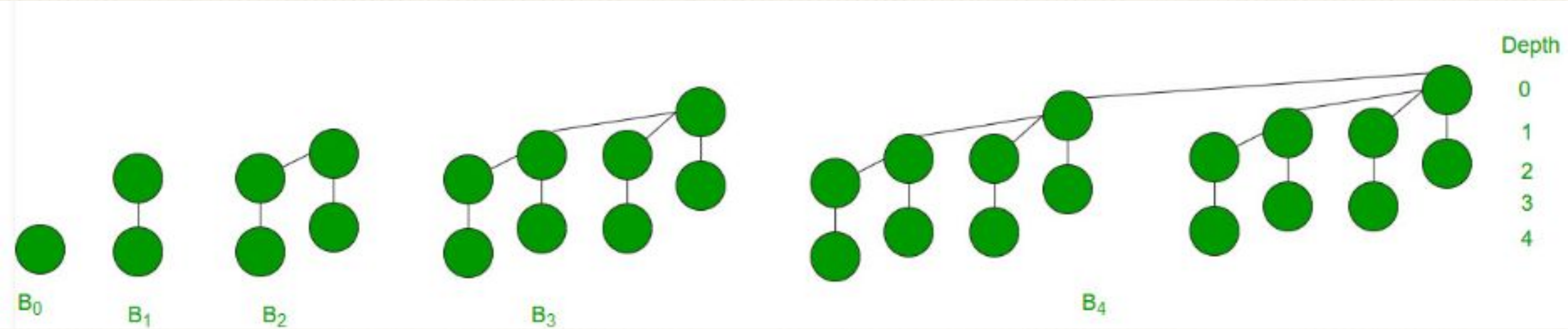
- Un arbore binomial de ordin **K** poate fi format prin reuniunea a doi arbori binomiali de mărime **K-1**, făcând pe unul dintre ei fiul stâng al celuilalt



Arbori binomiali

Proprietăți ale unui arbore binomial de ordin k:

- Are exact 2^k noduri
- Are înălțimea k
- Sunt exact C_i^k (combinări de i luate câte k) noduri de înălțime i pentru i = 0,1,..., k
- Rădăcina are gradul k și copiii săi sunt arbori binomiali de tip k-1, k-2, ..., 0

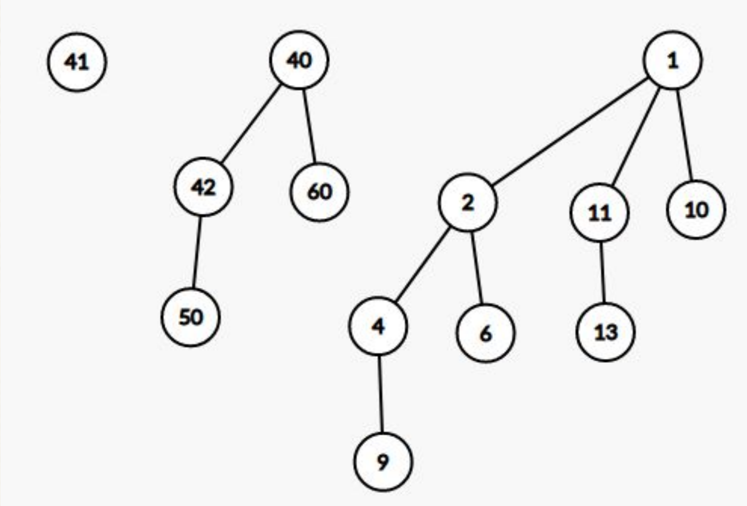


Heapuri Binomiale

- Un Heap Binomial este o colecție de Arbori Binomiali, fiecare dintre ei având proprietatea de heap minim.
- *Observație*: Există o singură structură de heap binomial pentru orice mărime.
- *Exemplu*:
  - Cum arată un heap binomial cu 13 noduri?
  - Câți arbori binomiali are?
  - Ce tipuri?

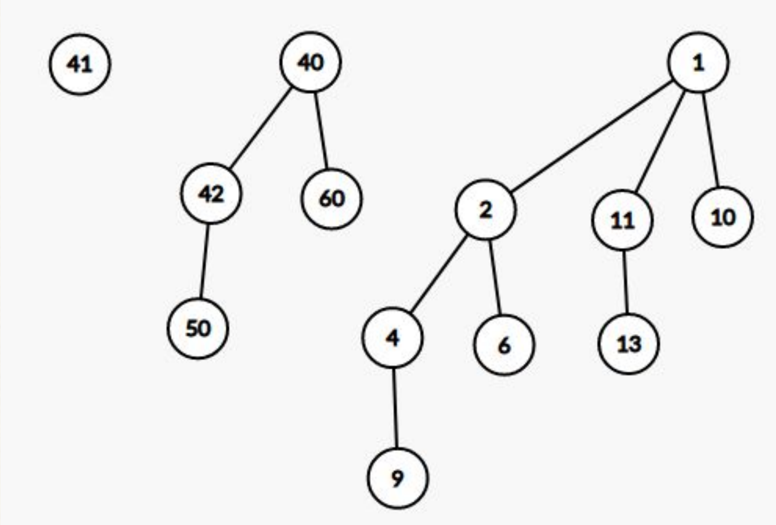
Heapuri Binomiale

- Un Heap Binomial este o colecție de Arbori Binomiali, fiecare dintre ei având proprietatea de heap minim.
- *Observație*: Există o singură structură de heap binomial pentru orice mărime.
- *Exemplu*:
  - Cum arată un heap binomial cu 13 noduri?
  - Câți arbori binomiali are?
  - Ce tipuri?



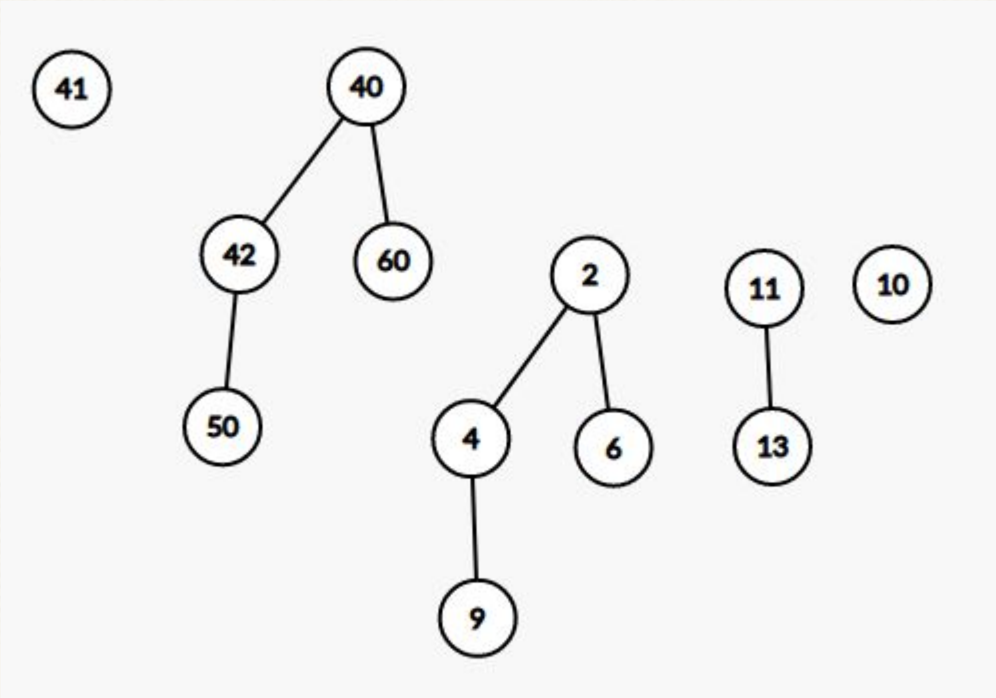
Heapuri Binomiale - Căutare minim

1) Minimul se află în rădăcina unui arbore binomial. Putem parcurge toți arborii binomiali, să ne uităm la rădăcina lor și să reținem minimul → **O(log n)**
2) Totuși, putem ține minte valoarea când facem orice fel de operație și să răspundem în **O(1)**



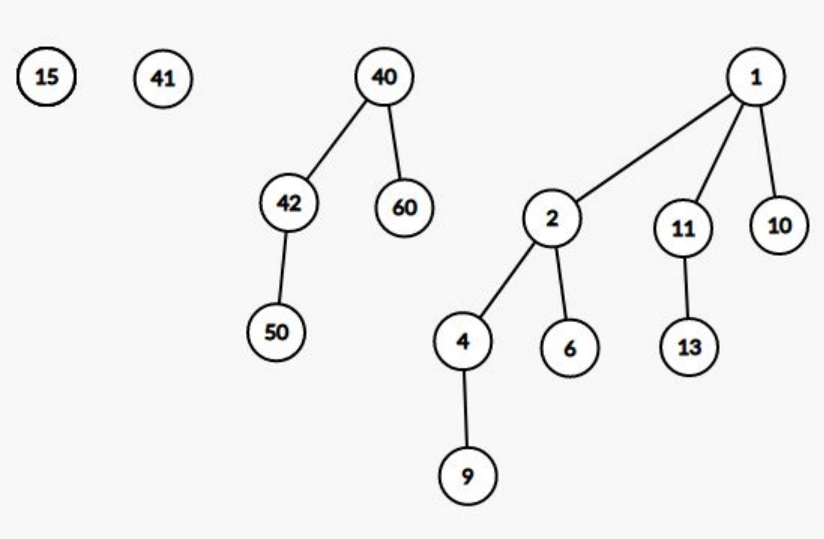
Heapuri Binomiale - Extragerea minimului

- Eliminăm minimul
- Apoi facem reuniune

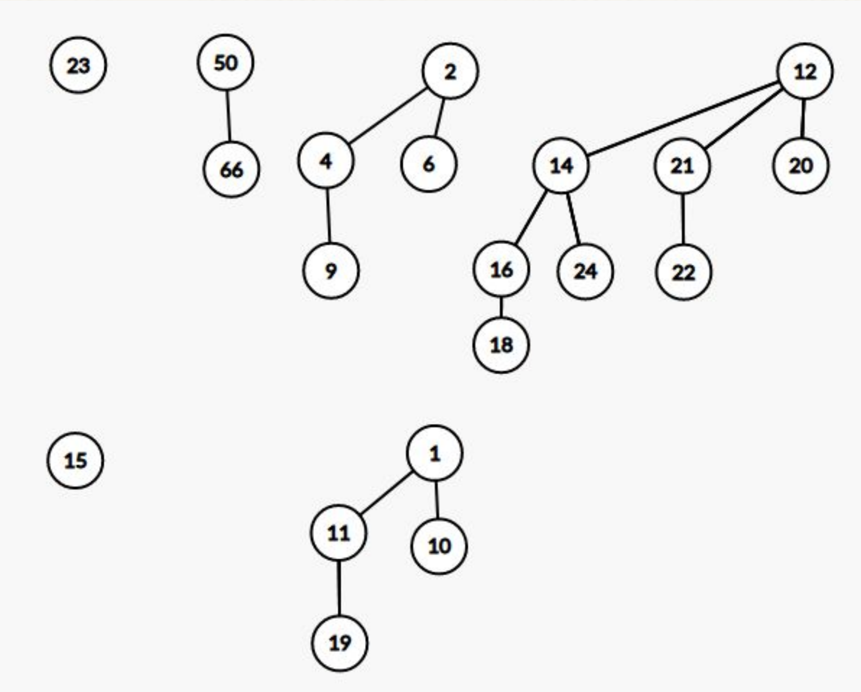


Heapuri Binomiale - Inserare

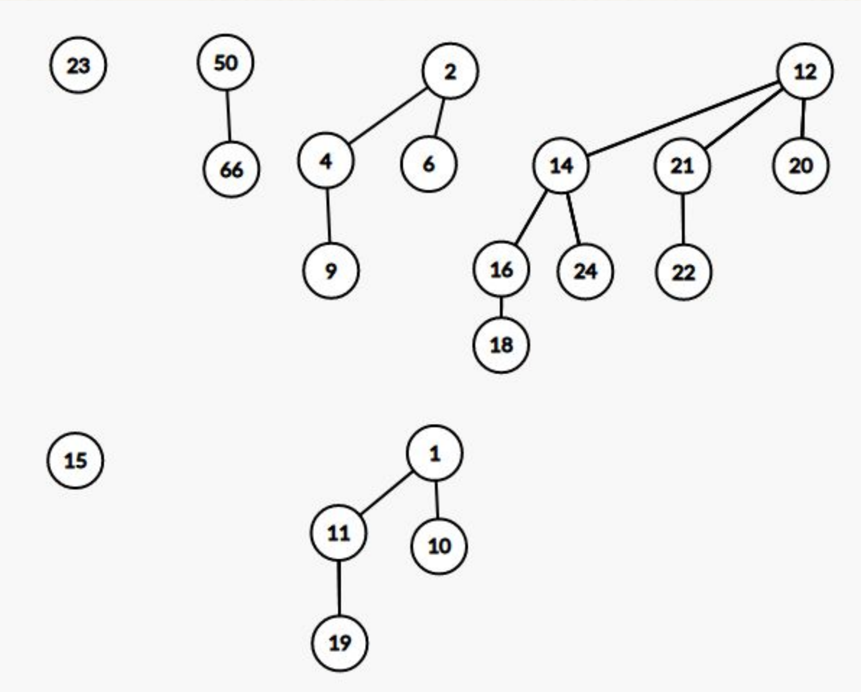
Adăugăm un arbore binomial de mărime 1, apoi apelăm reuniunea.

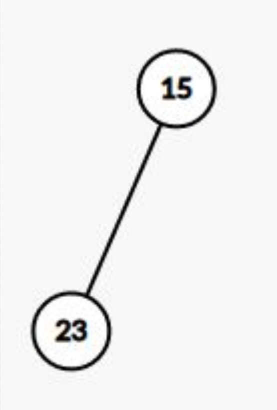


Reuniune!

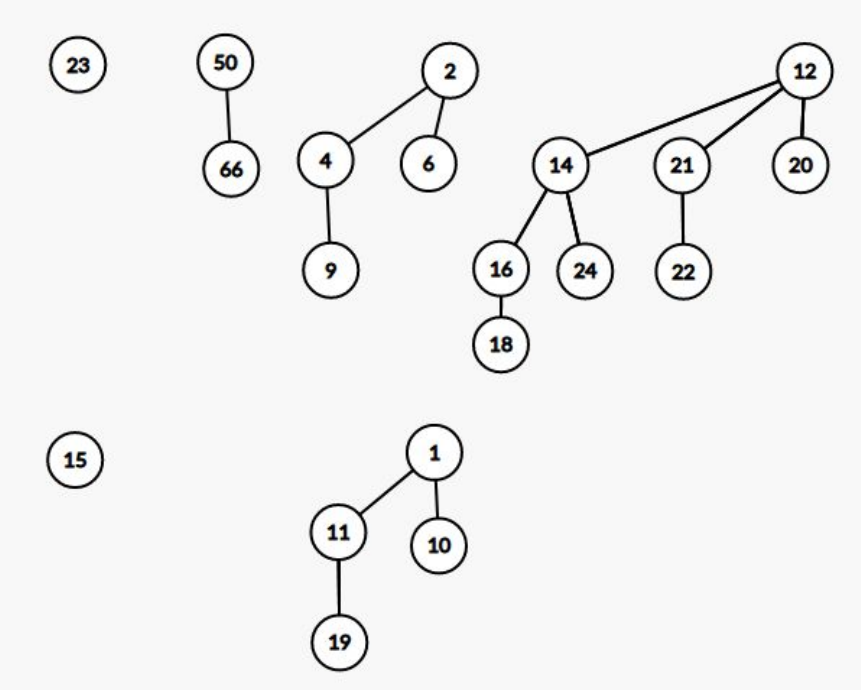


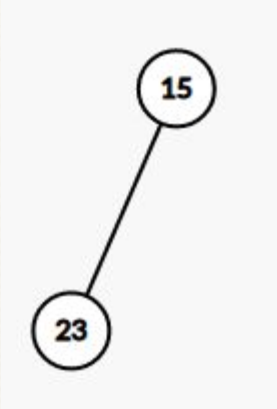
Reuniune!

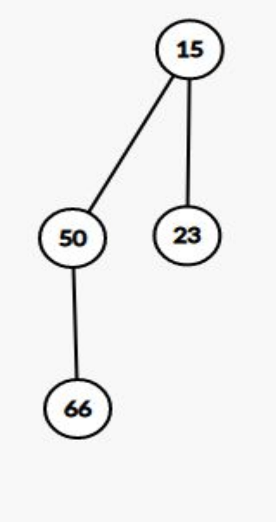




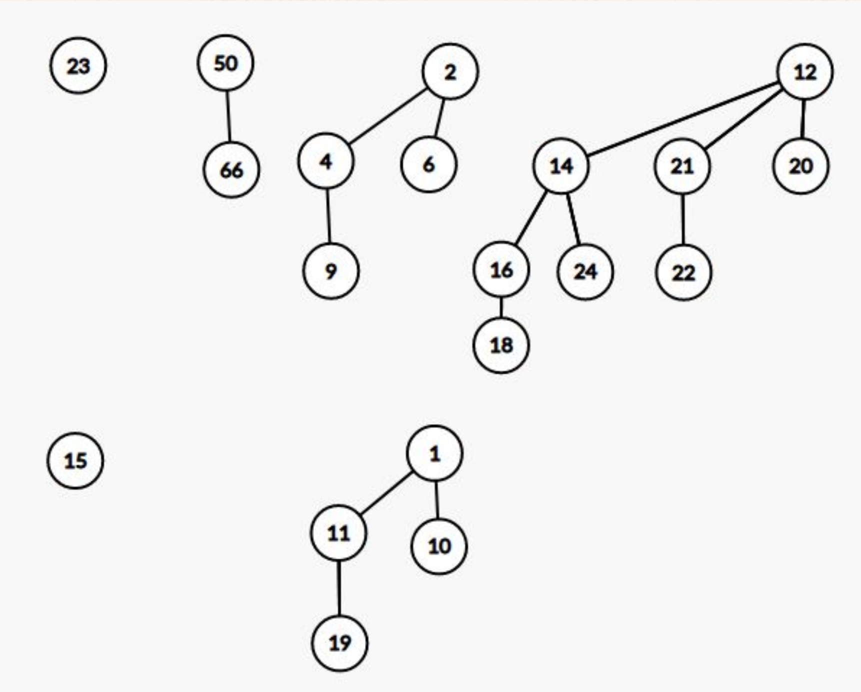
Reuniune!

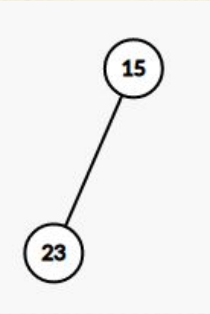


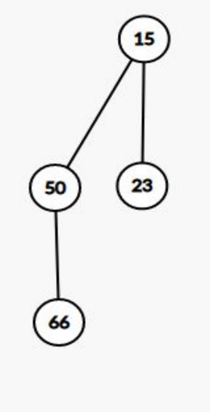


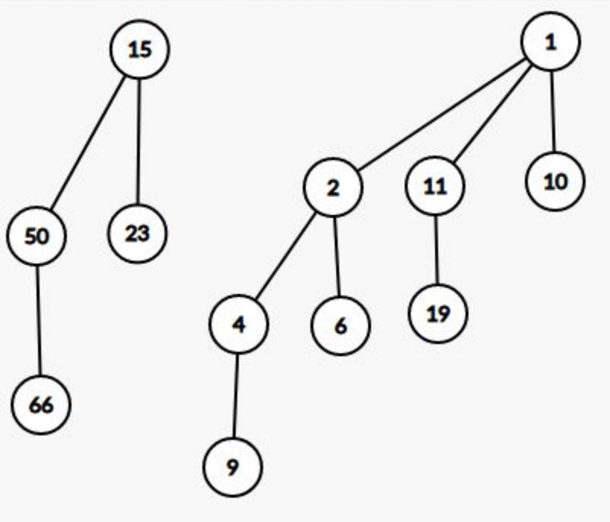


Reuniune!

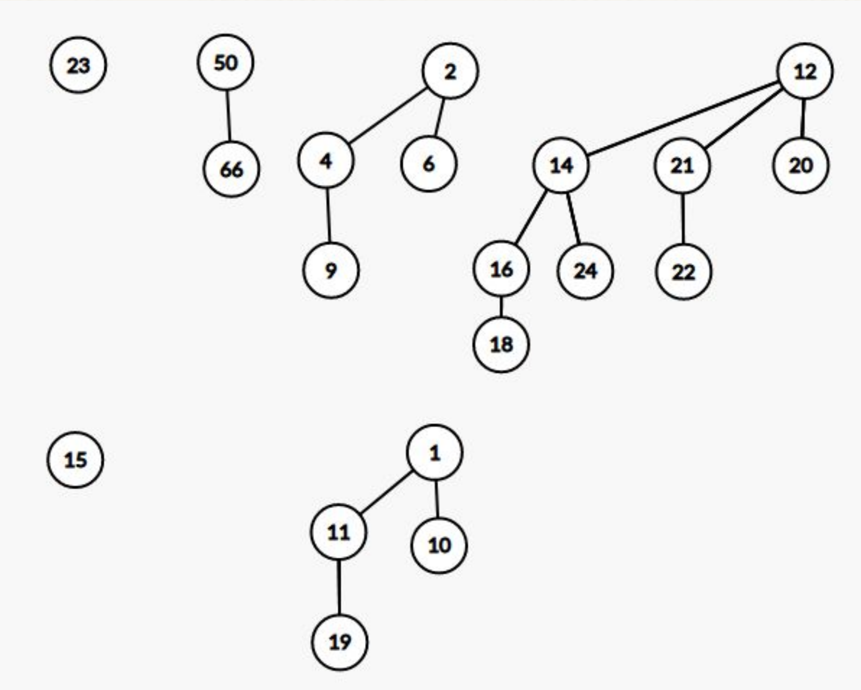

23
50
66
2
4
6
9
12
14
21
20
16
24
22
18
15
1
11
10
19


15
23

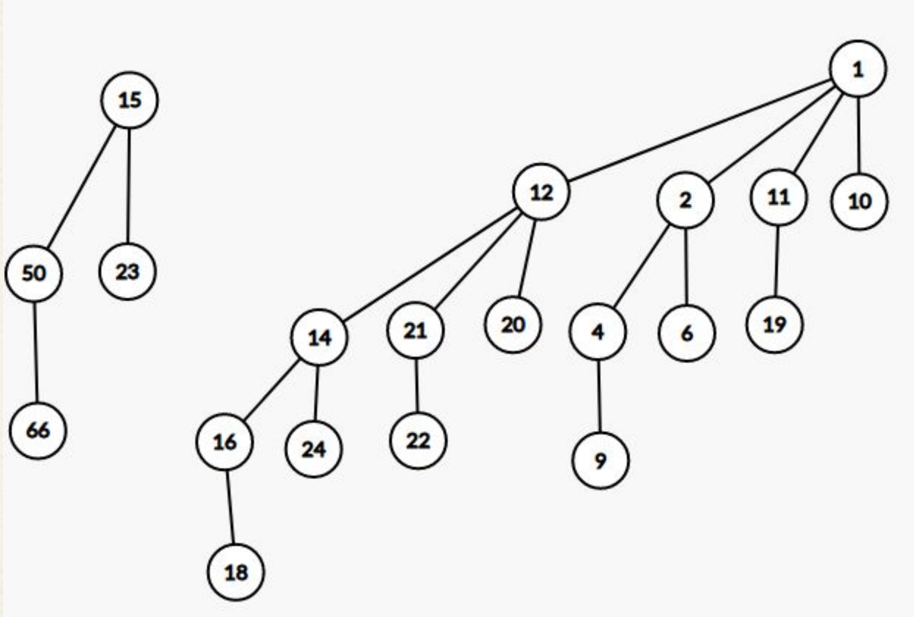

15
50
23
66


15
50
23
66
1
2
11
10
4
6
19
9

Reuniune!



23
50
66
2
4
6
9
12
14
21
20
16
24
22
18
15
1
11
10
19



1
15
12
2
11
10
50
23
14
21
20
4
6
19
66
16
24
22
9
18

Reuniune!

Complexitate: **O(log n)**

Pentru fiecare mărime a arborilor binomiali de la **0** la **log n** trebuie “eventual” să fac o reuniune a doi arbori.

Reuniunea a doi arbori se face în **O(1)**.

Heap-uri binomiale și Fibonacci

- Motivație:
  - Reuniunea este înceată și alte operații pot fi îmbunătățite.

	Căutare Min	Ștergere Min	Inserare	Update	Reuniune
Heap Binar	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$\Theta(n)$
Heap Binomial	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$ (amortizat)	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)$
Heap Fibonacci	$\Theta(1)$	$O(\log n)$(amortizat)	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$ (amortizat)	$\Theta(1)$

Heapuri Fibonacci

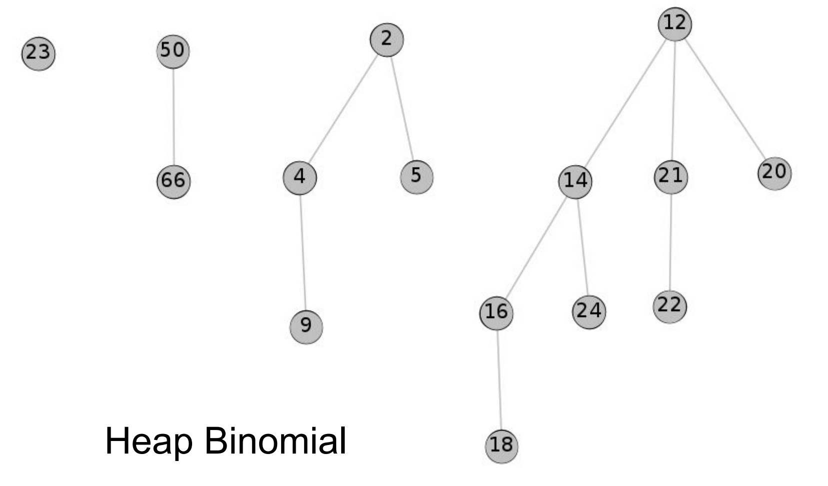
- **Heapurile Fibonacci** sunt o colecție de arbori care au proprietatea de ordonare de heap (arborii nu trebuie să fie binomiali).

- Arborii dintr-un heap Fibonacci nu sunt ordonați.
- Arborii din componență au mărimi puteri ale lui 2. Fiii vor fi arbori de mărime 1,..., k-1, dar nu neapărat sortați de la stânga la dreapta.

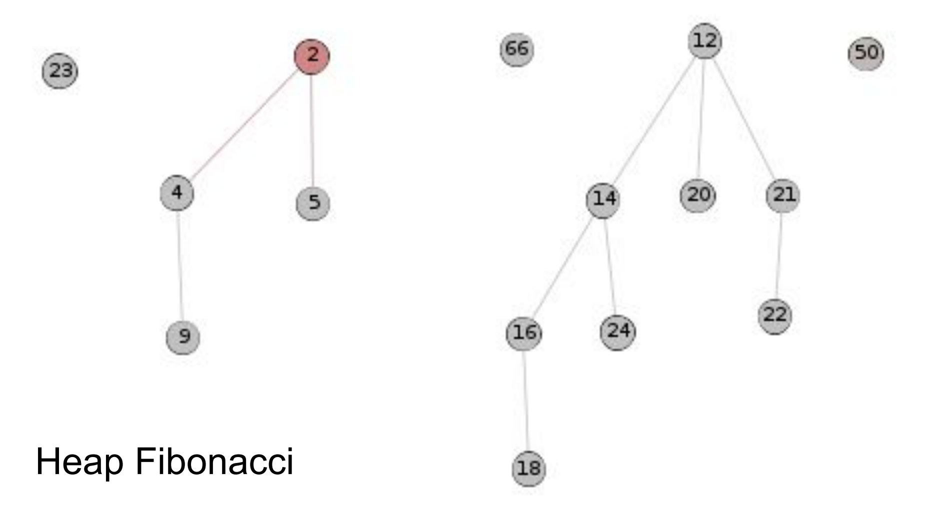
Heapuri Fibonacci

- **Heapurile Fibonacci** sunt o colecție de arbori care au proprietatea de ordonare de heap (arborii nu trebuie să fie binomiali).

- Arborii dintr-un heap Fibonacci nu sunt ordonați.
- Arborii din componență au mărimi puteri ale lui 2. Fiii vor fi arbori de mărime 1,..., k-1, dar nu neapărat sortați de la stânga la dreapta.



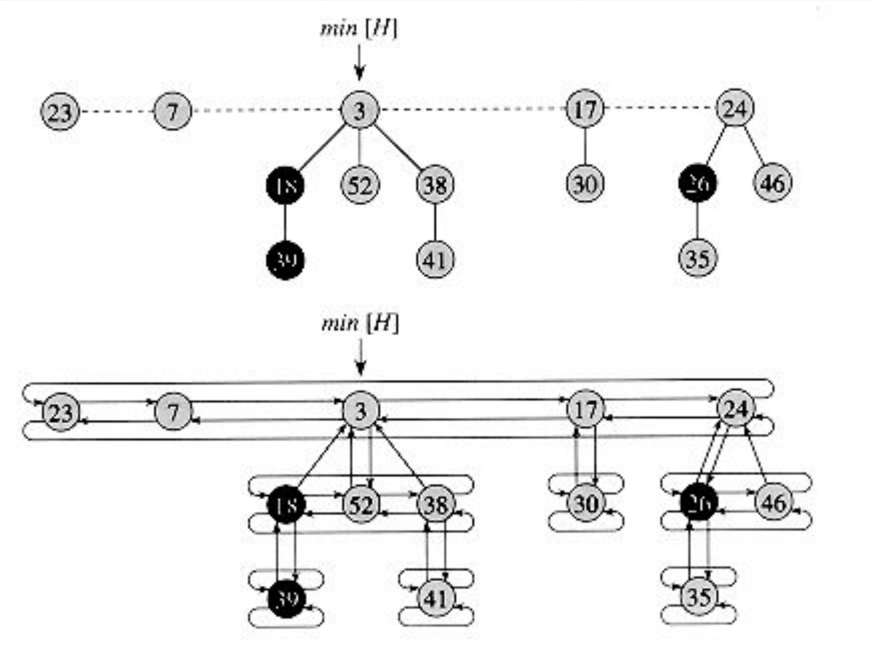
Heap Binomial



Heap Fibonacci

Implementare

- Listă dublu înlănțuită între rădăcini
- Link către un fiu
- Listă dublu înlănțuită între frați
- Link către tată

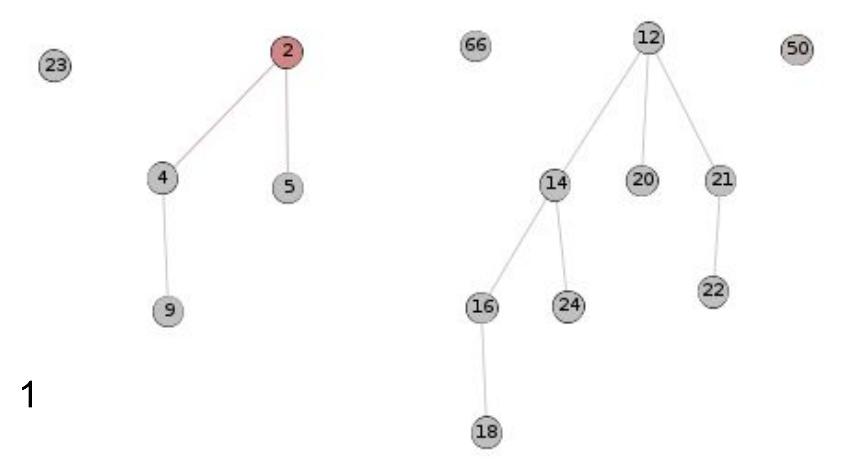


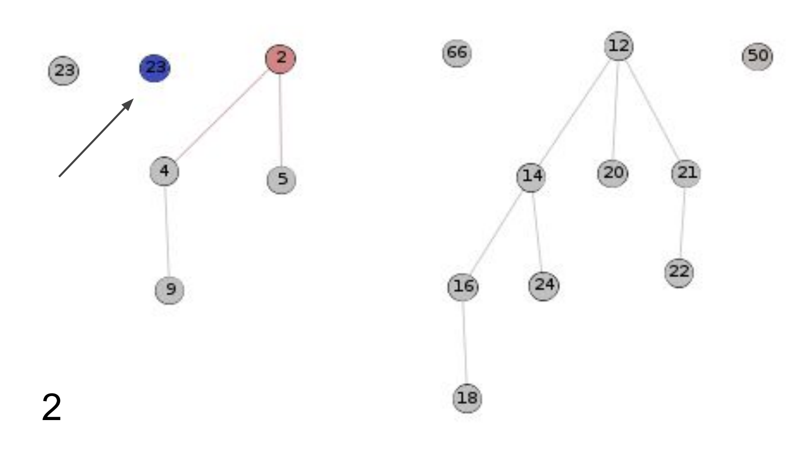
Inserare nod

- Creăm un arbore cu un singur element
- Îl plasăm în stânga rădăcinii.
- **Nu facem reuniune!**

Inserare nod

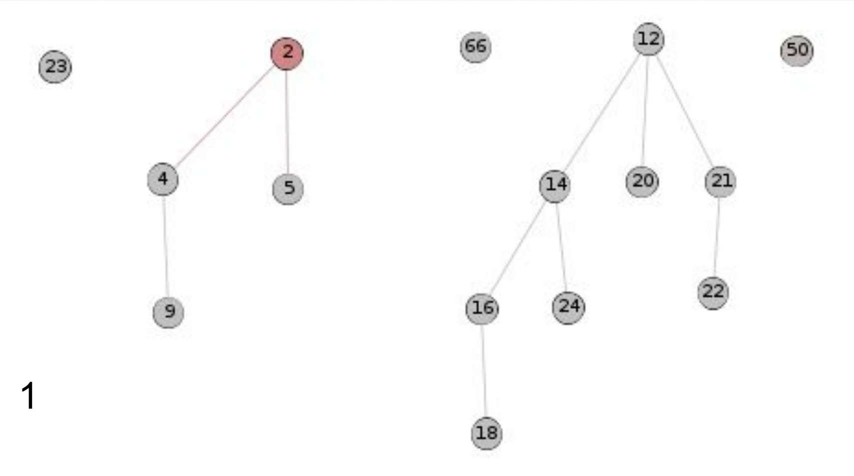
- Creăm un arbore cu un singur element
- Îl plasăm în stânga rădăcinii.
- **Nu facem reuniune!**

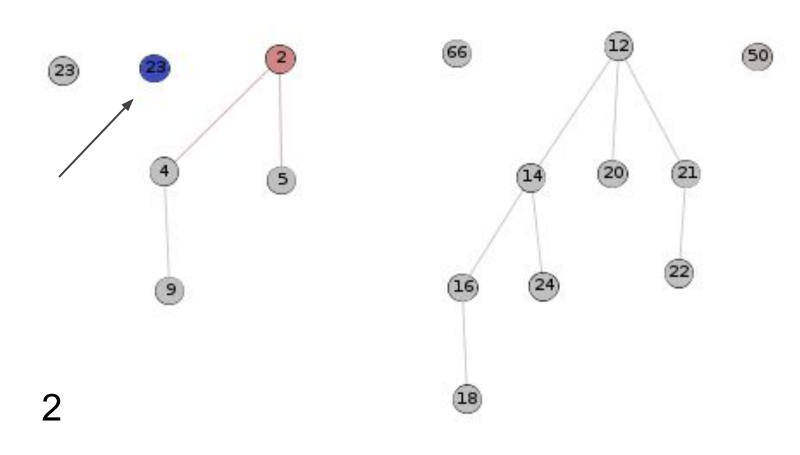


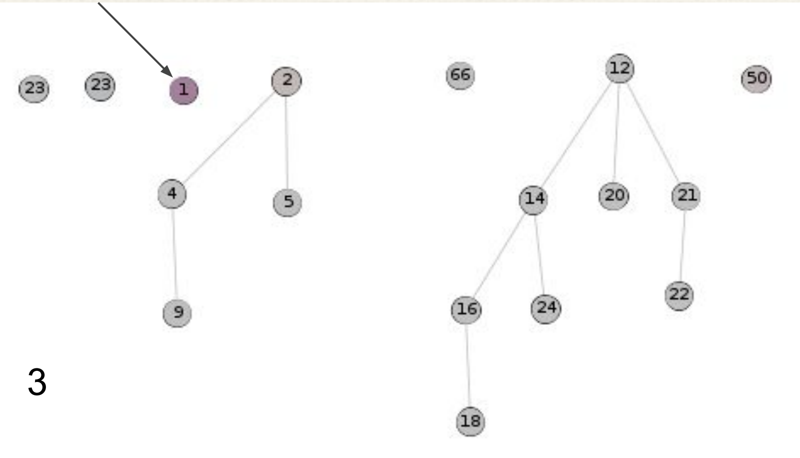


Inserare nod

- Creăm un arbore cu un singur element
- Îl plasăm în stânga rădăcinii.
- **Nu facem reuniune! → O(1)**







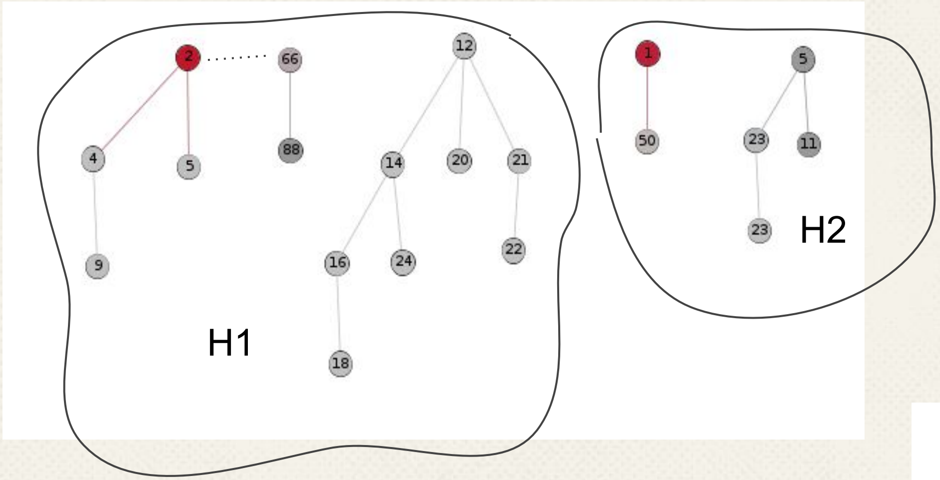
Caută Minimul

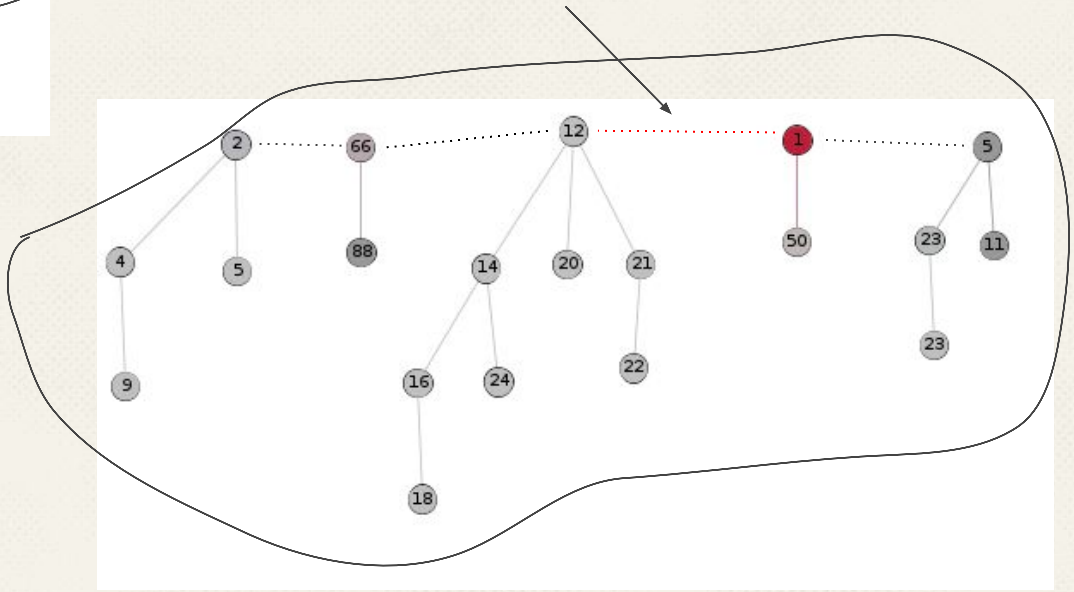
- La fiecare pas ținem pointer spre minim.
- **Complexitate O(1)!**

Reuniune

- Concatenăm rădăcinile lui H_2 la cele ale lui H_1.
- Avem grijă să păstrăm lista dublu înlănțuită.
- Avem grijă să păstrăm minimul (poate fi unul din cei 2 minimi)
- Nu facem consolidare (putem să avem mai mulți arbori de aceeași mărime).
- **Complexitate O(1)!!**

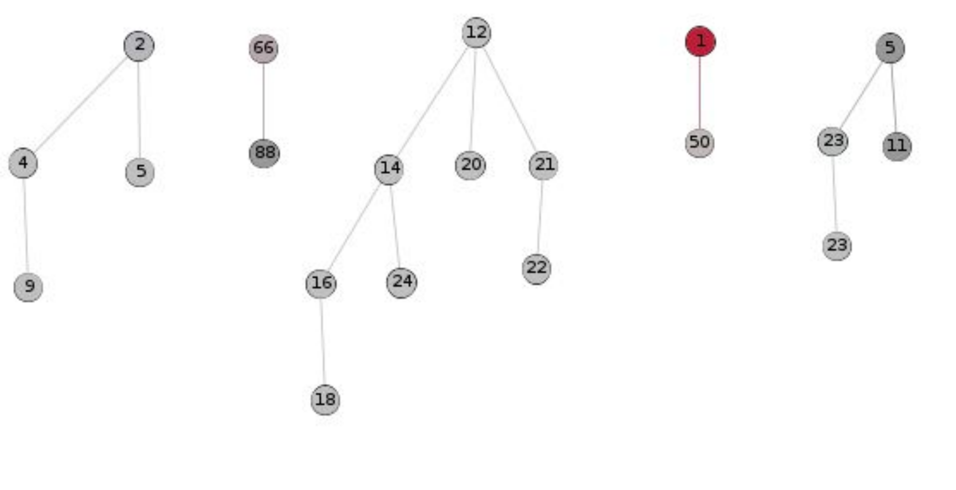
Reuniune





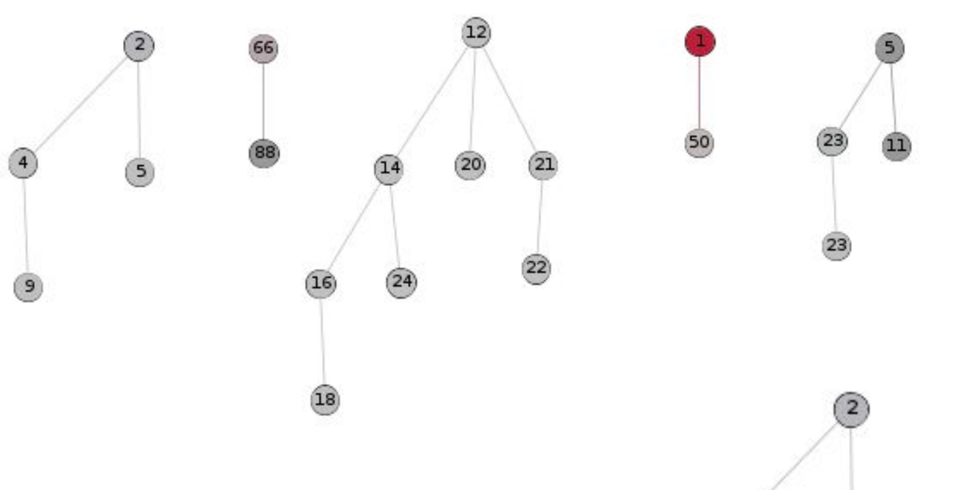
O(1)

Extragere minim



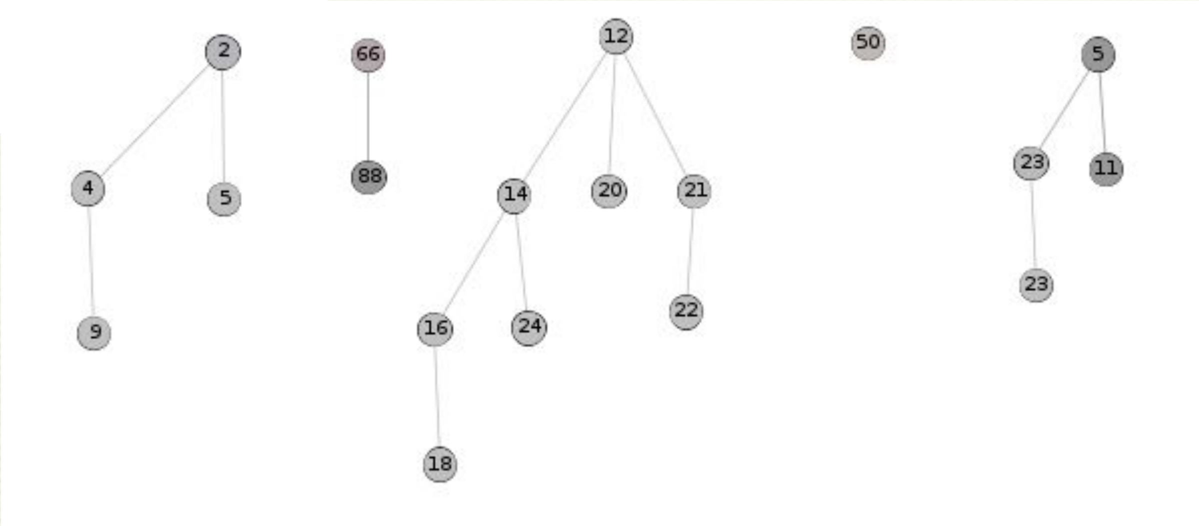
Extragem minim. Fiii săi devin arbori liberi.

Extragere minim

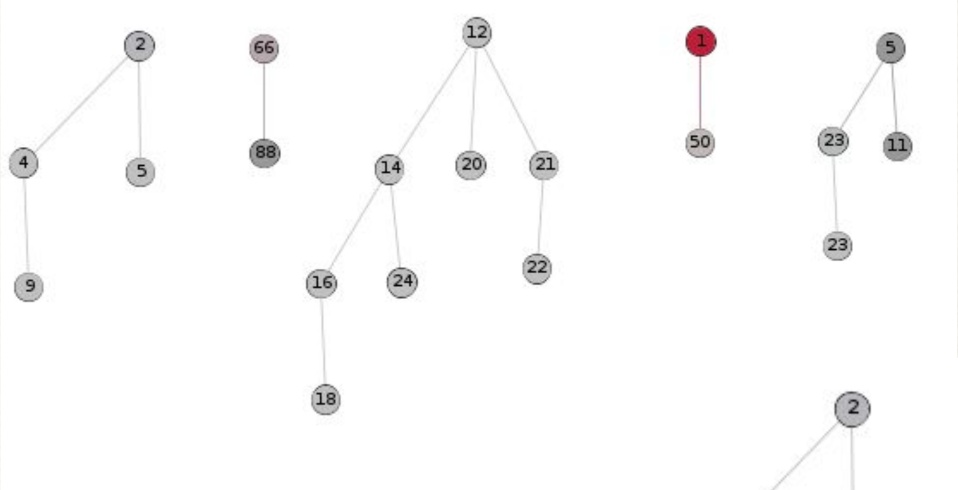


Extragem minim. Fiii săi devin arbori liberi.

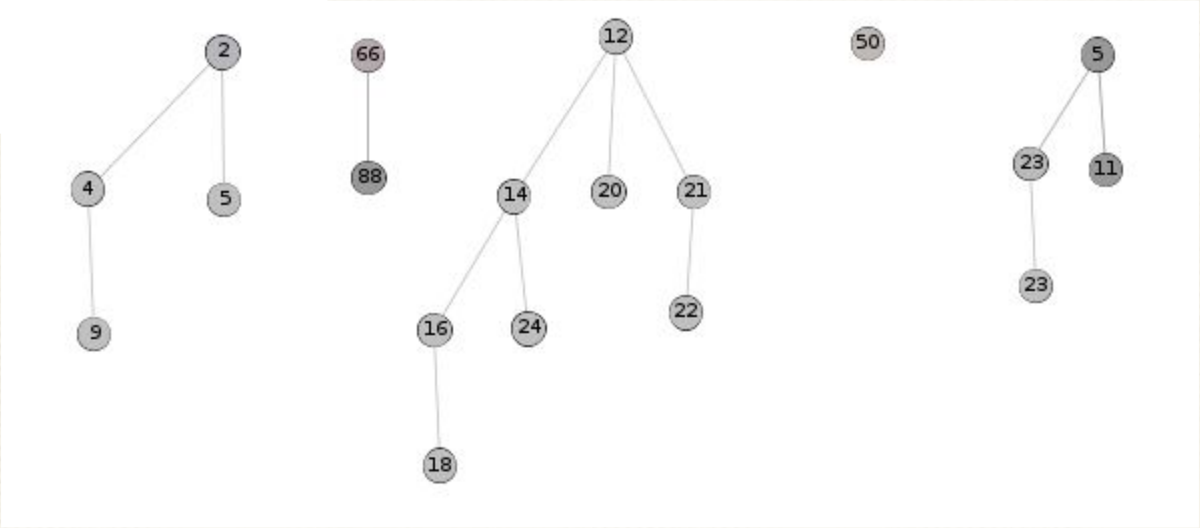
Unde e problema?



Extragere minim



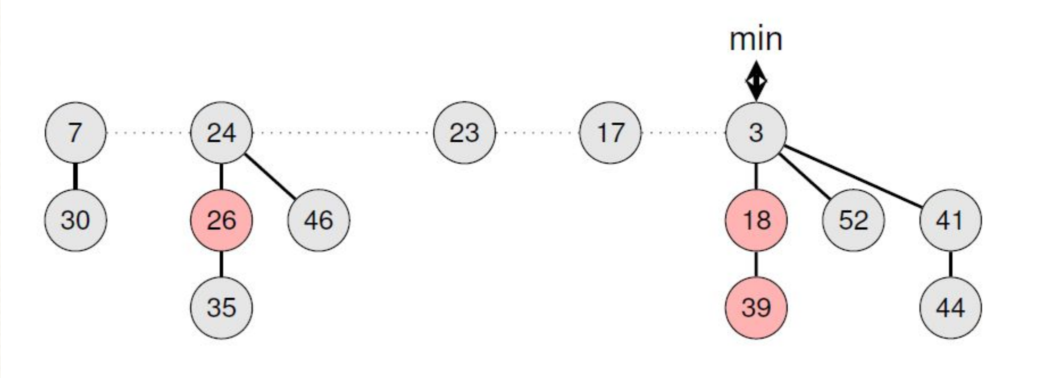
Extragem minim. Fiii săi devin arbori liberi.



Unde e problema?
Nu știm care e minimul.
Am putea avea **n** arbori cu 1 element.
Dacă ștergem **n** elemente consecutive ne poate costa n^2??

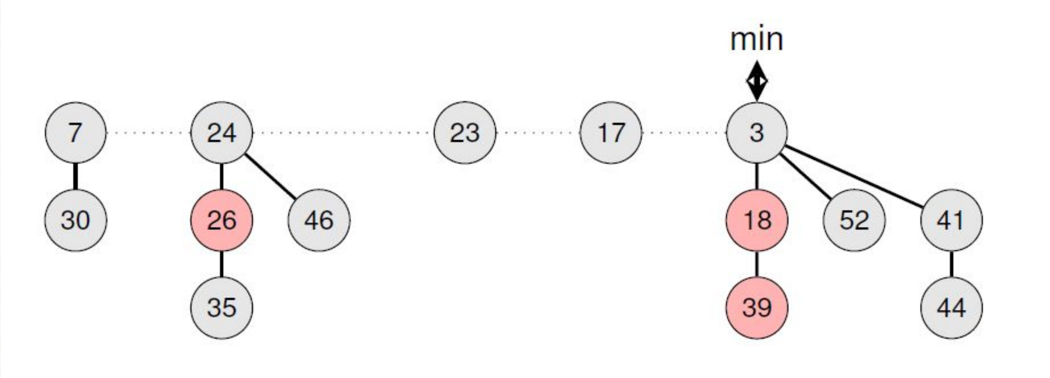
Extragere minim

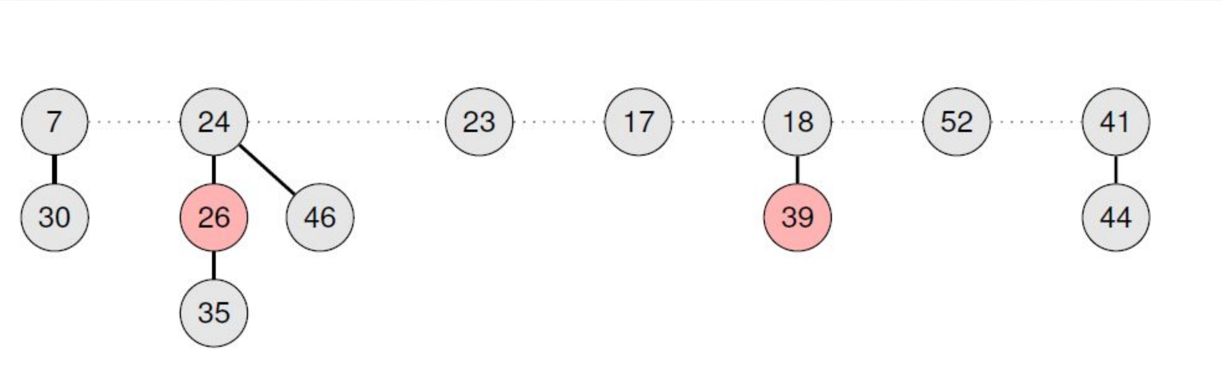
- Ca să evităm să avem de mai multe ori cost mare pentru extragerea minimului, vom consolida heapul (“reuniunea” de la heapul binomial).



Eliminăm minimul, se creeaza multe “rădăcini”

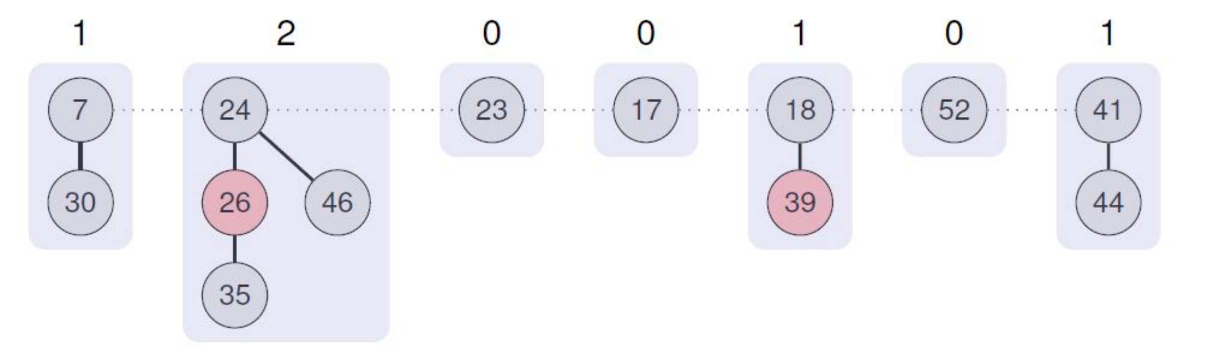
Extragere minim

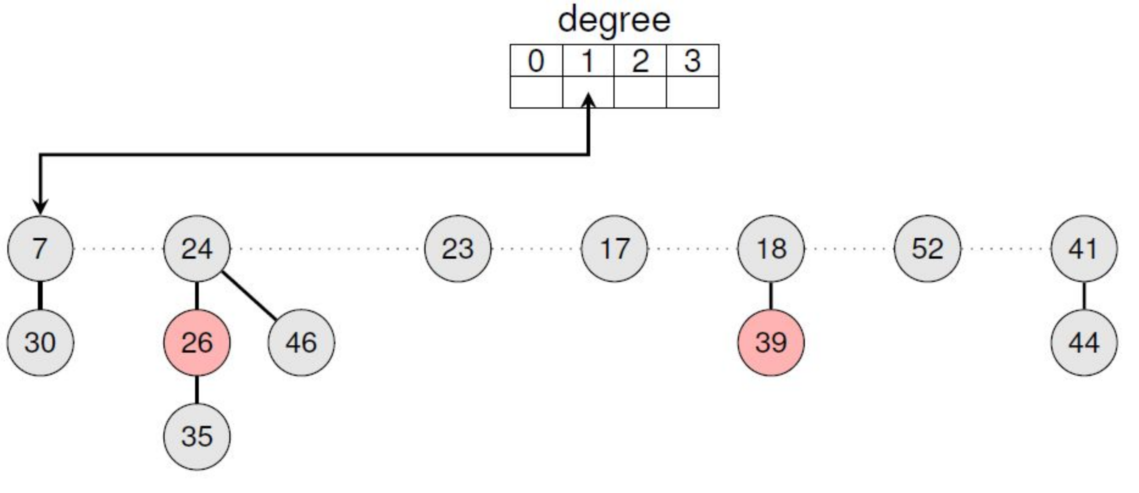




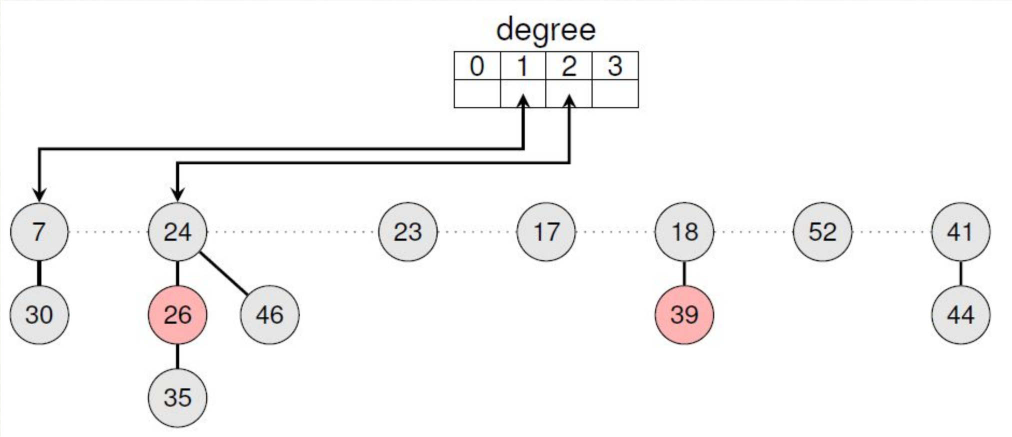
Extragere minim

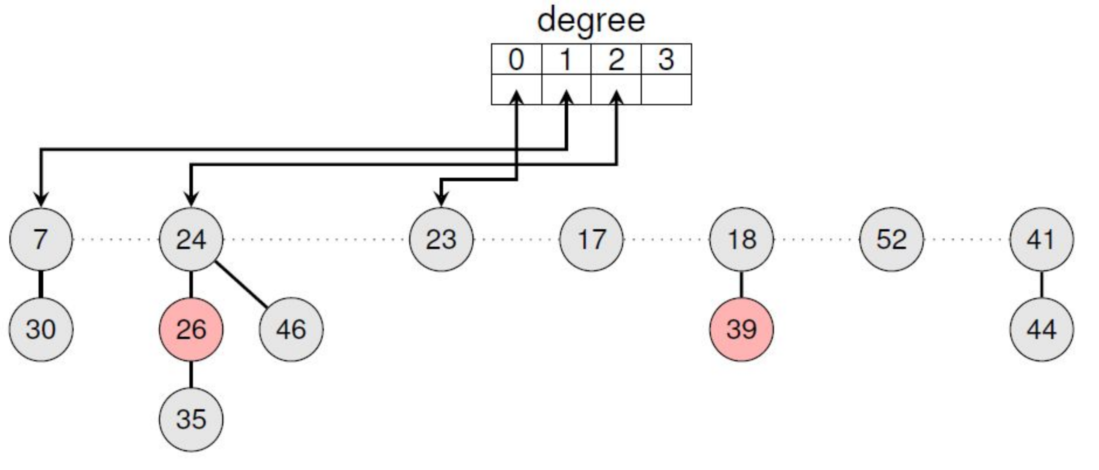
grad =



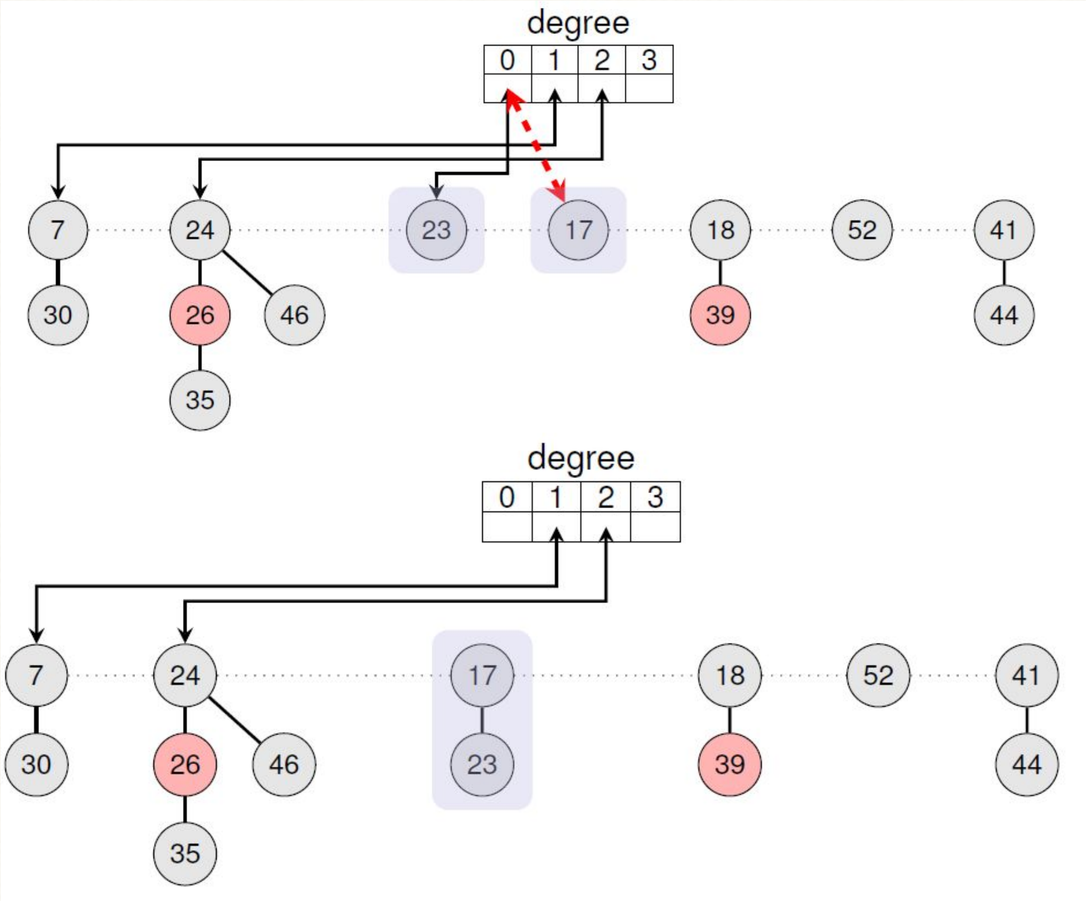


Extragere minim

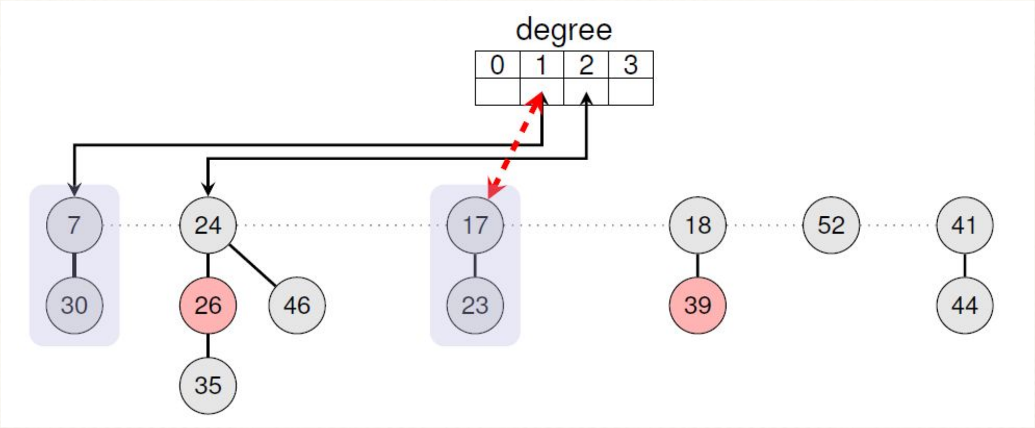


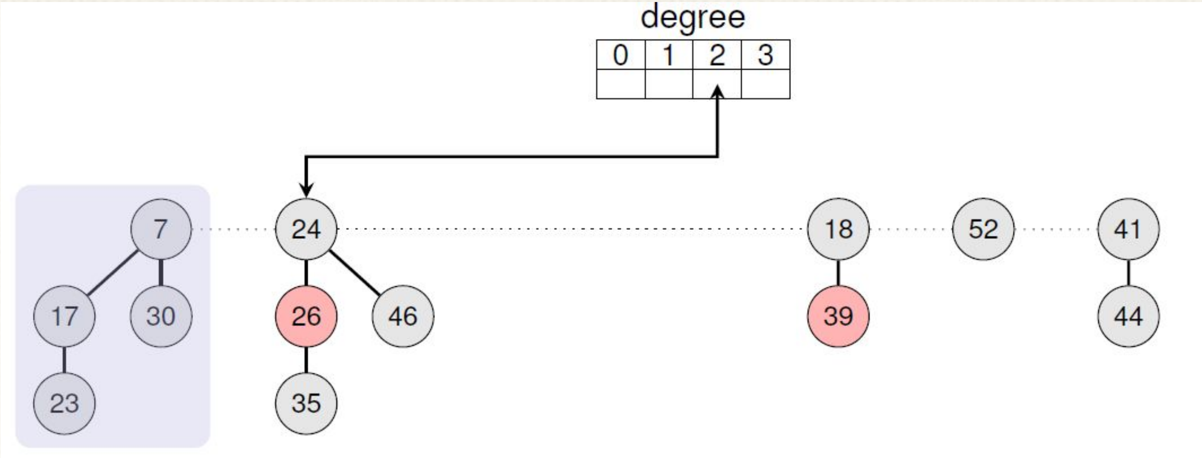


Extragere minim

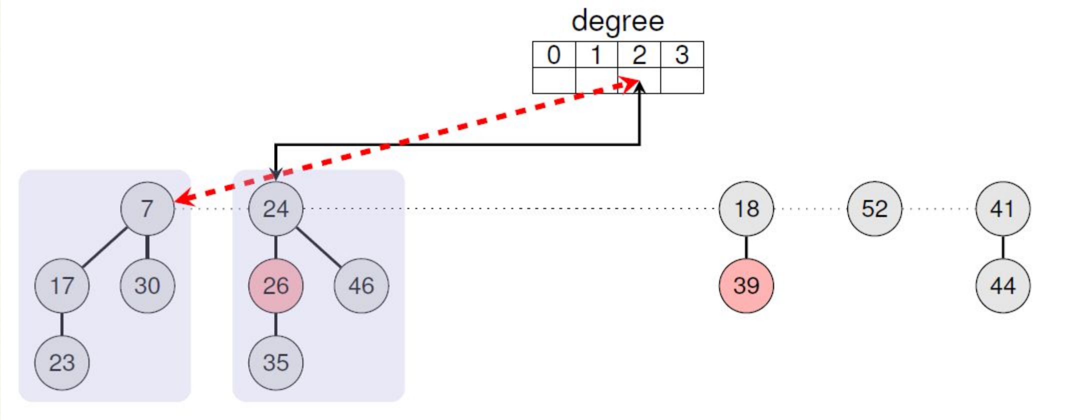


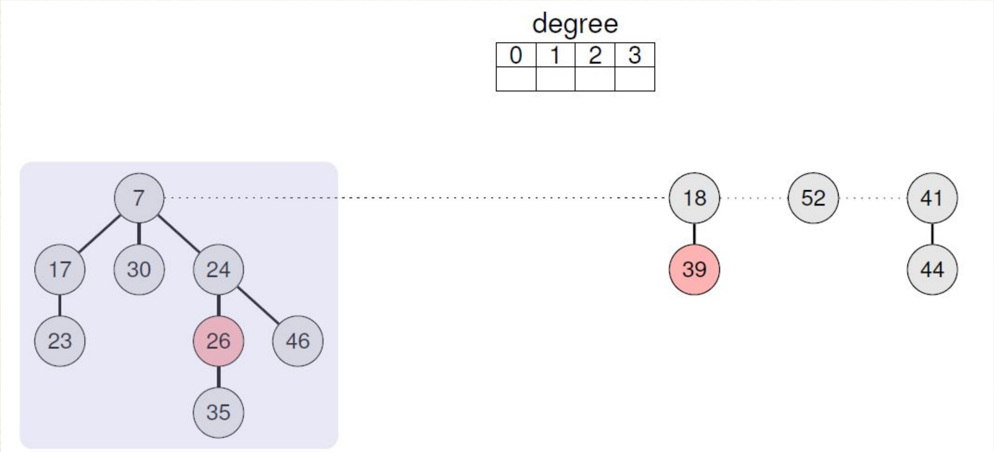
Extragere minim



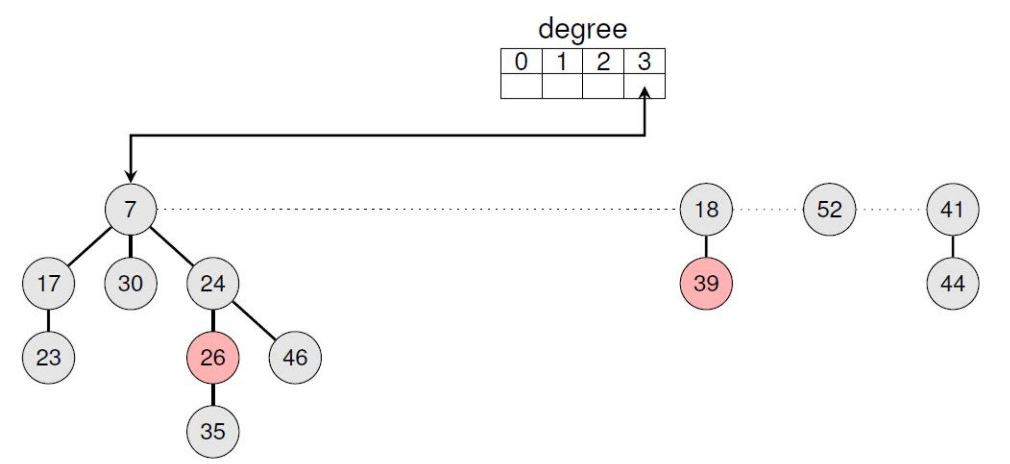


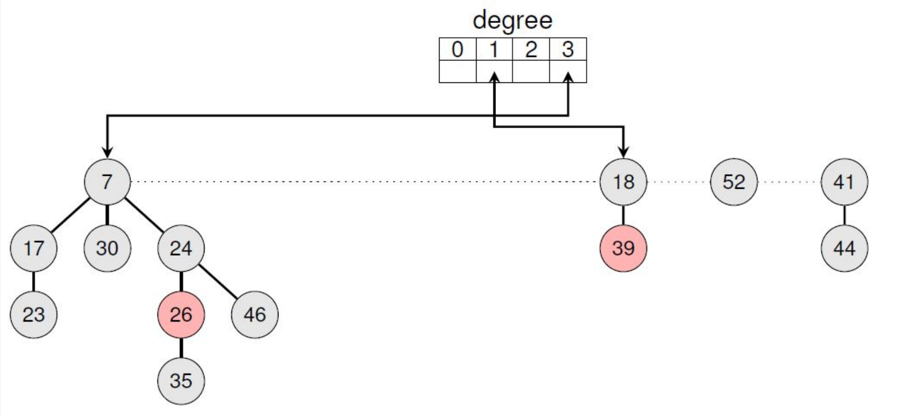
Extragere minim



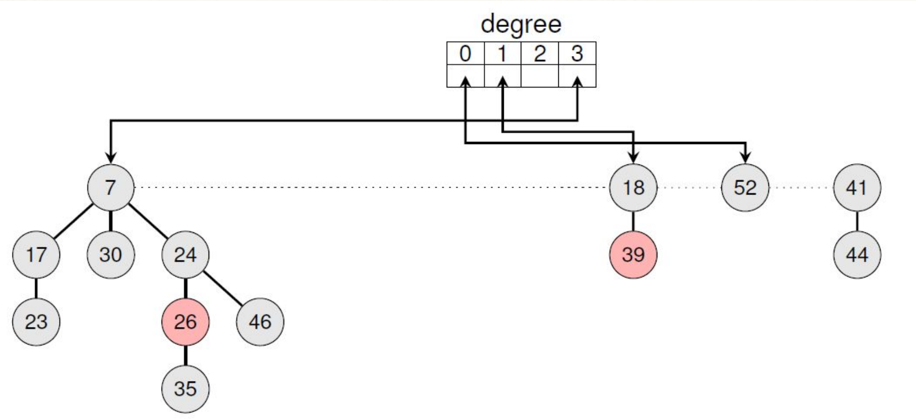


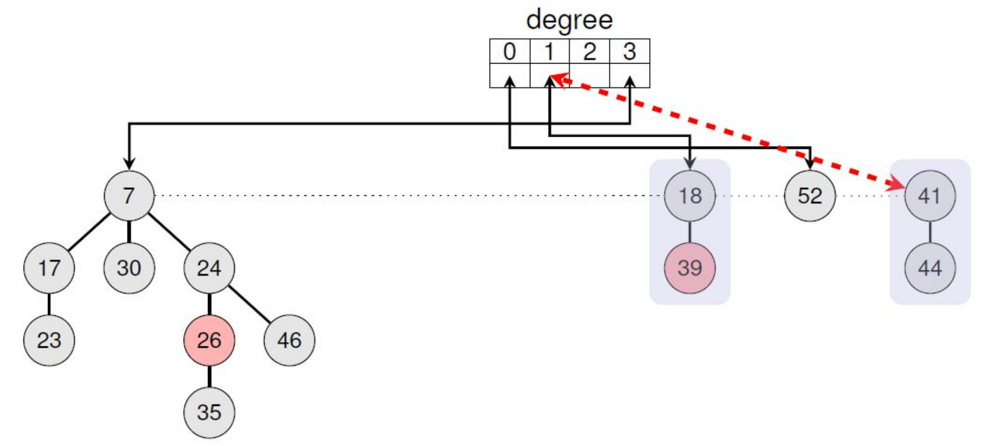
Extragere minim



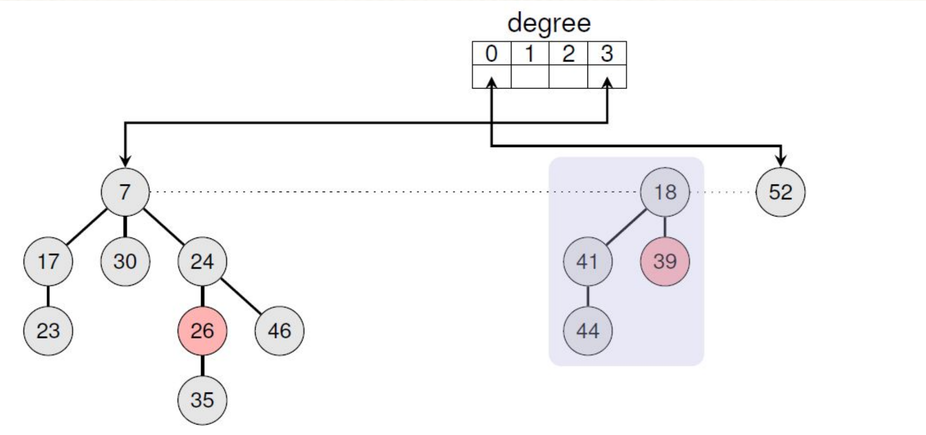


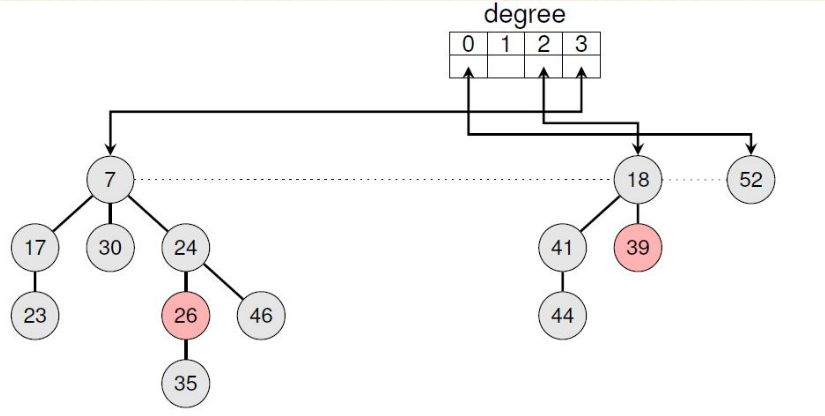
Extragere minim



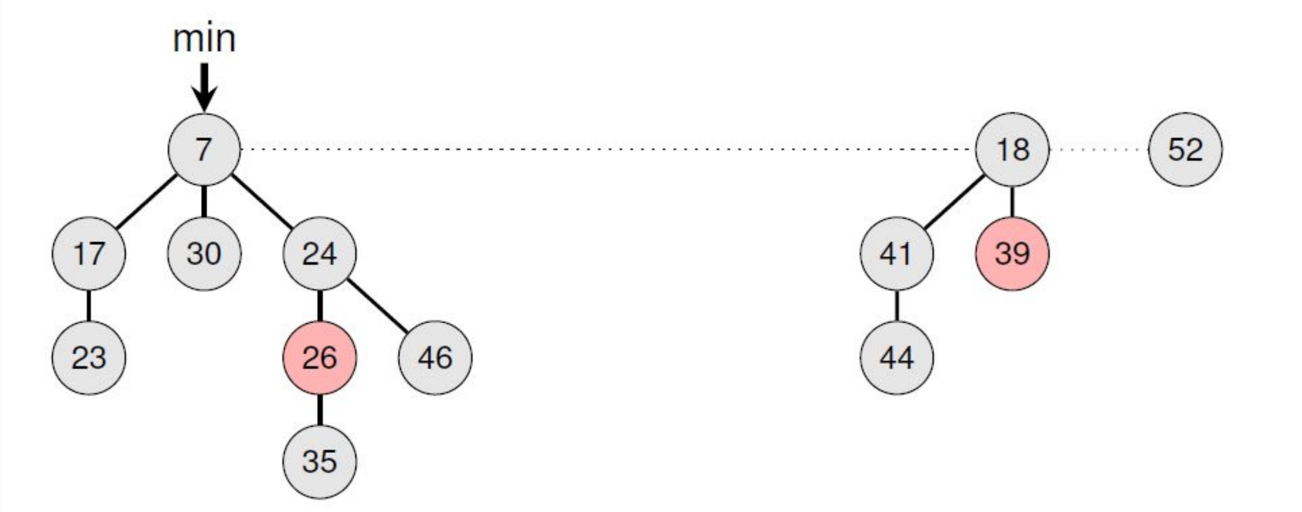


Extragere minim

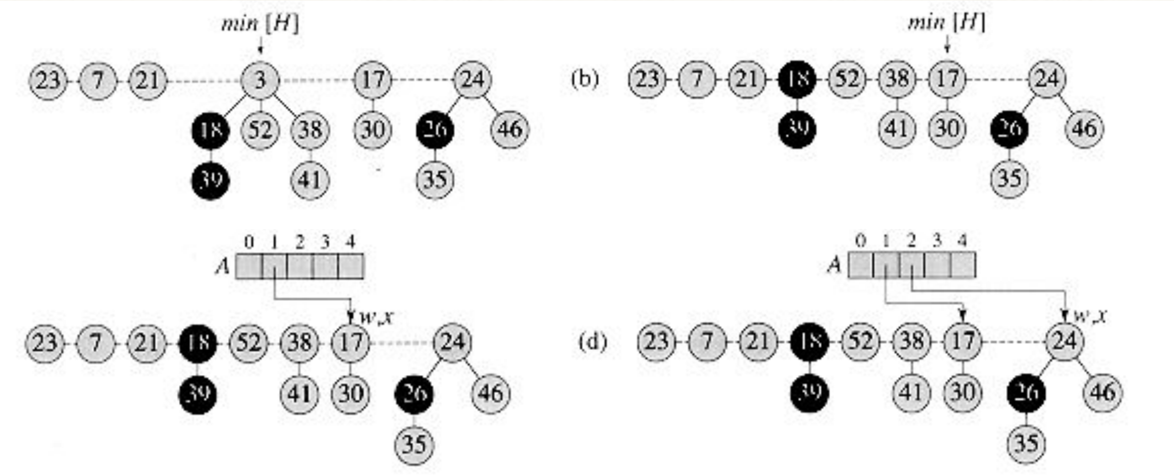




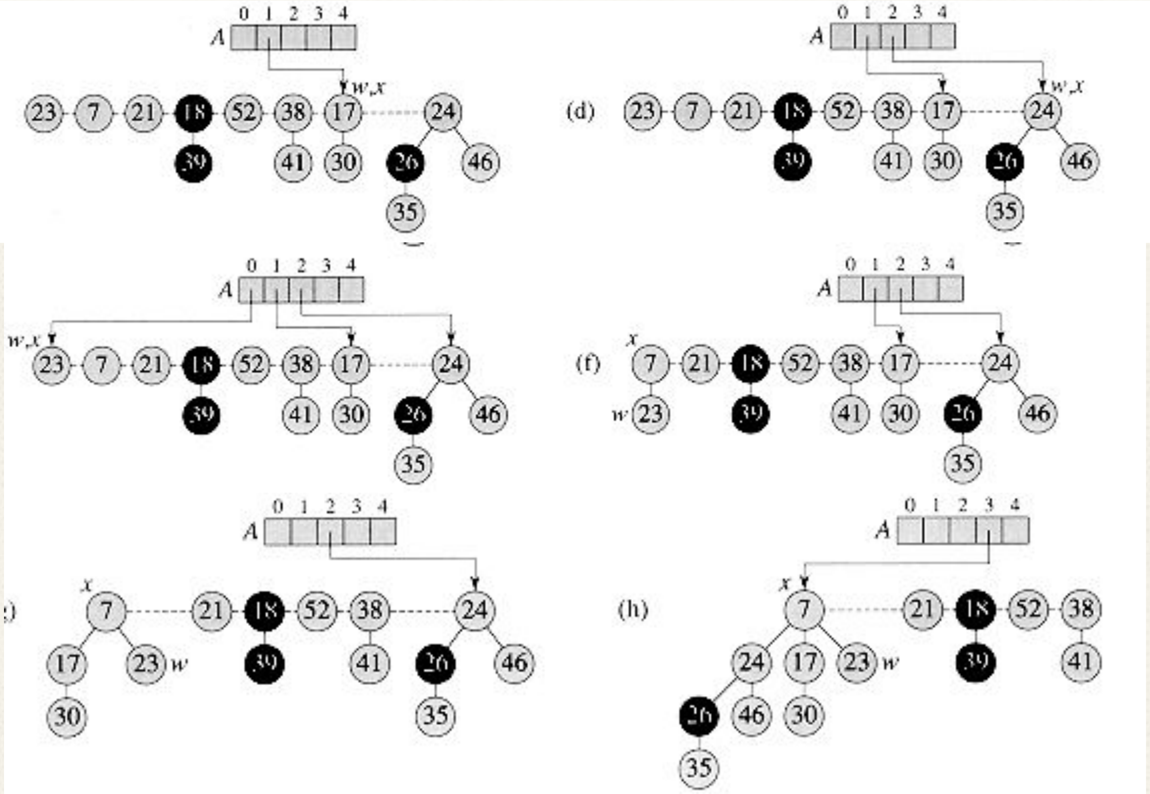
Extragere minim



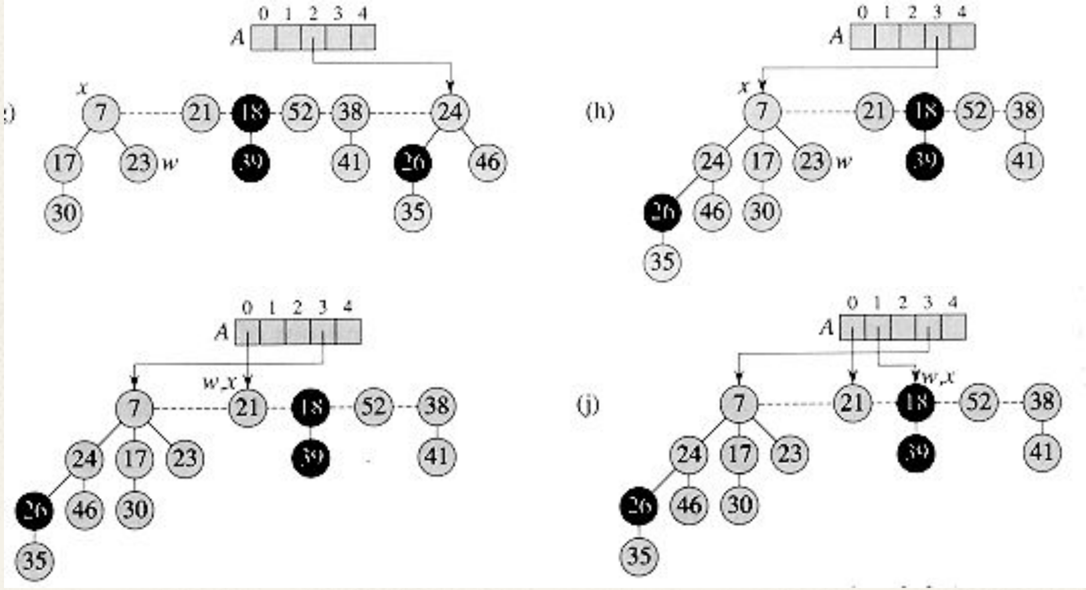
Extragere minim



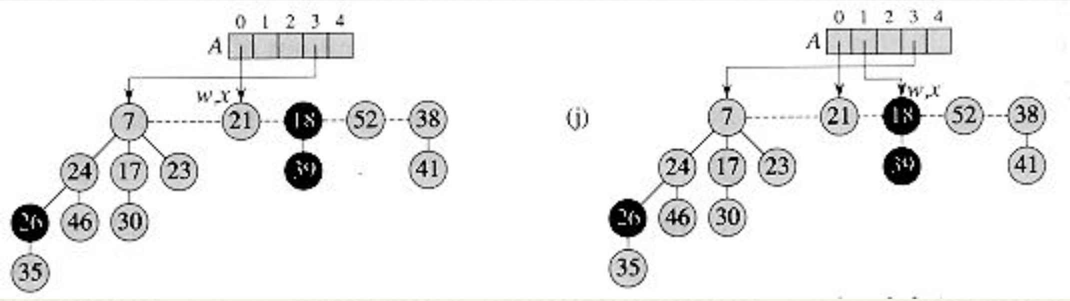
Extragere minim

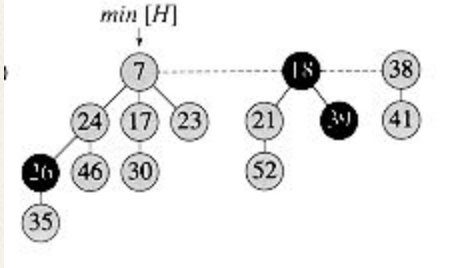


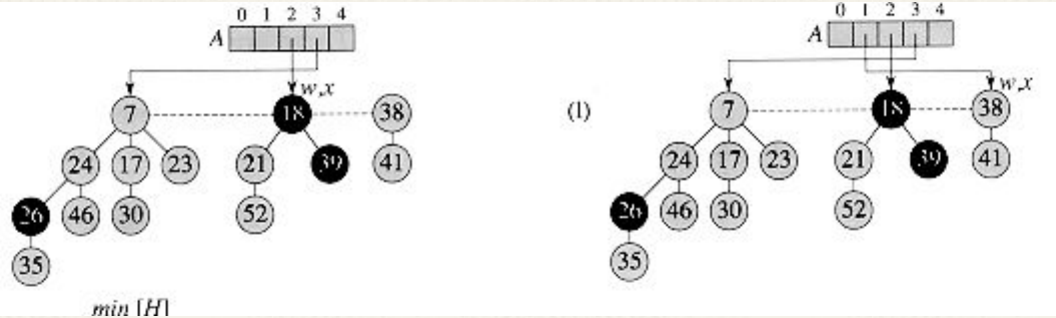
Extragere minim



Extragere minim







Extragere minim

- Complexitate?

Extragere minim

- Complexitate:
  - O(n) pentru prima
  - O(?) pentru următoarele, dacă nu facem alte operații

Extragere minim

- Complexitate:
  - O(n) pentru prima
  - O(log n) pentru următoarele, dacă nu facem alte operații
  - O(log n) amortizat
  - Pentru mai multe detalii despre complexitate urmăriți textul

Utilitate

Dijkstra (nu ați facut oficial, nu? e timp :)):

- Cu matrice de adiacență: $O(n^2)$
- Cu heapuri binare $O(m \log n)$
- Cu heapuri fibonacci $O(m + n \log n)$

Problema

<u>Interclasarea optimală a mai multor șiruri.</u>

Ex: 3 șiruri de lungimi 10, 40 și 90

Interclasarea lui 10 cu 90 → mă costă 100.	100 + 40 → 140	Total: 240
Interclasarea lui 10 cu 40 → mă costă 50.	50 + 90 → 140	Total: 180
Interclasarea lui 40 cu 90 → mă costă 130.	130 + 10 → 140	Total: 270

Discuție Problema

- Cum rezolvăm ?
- La fiecare pas, trebuie să alegem cele mai mici 2 elemente
- 10 20 30 40 40 60 80
- Optim (10 cu 20) cu 30, 40 cu 40, 60 (primele 3) cu 80 ultimele 2 etc.
- Demonstrație mai târziu

Discuție Problema

Complexitate?

Discuție Temă

Complexitate?

- $O(n^2)$ dacă la fiecare pas găsim cele mai mici 2 elemente iterând prin toate elementele rămase.

Discuție Problema

Complexitate?

- $O(n^2)$ dacă la fiecare pas găsim cele mai mici 2 elemente iterând prin toate elementele rămase.
- O(n log n) dacă folosim heapuri să reținem toate valorile (inclusiv cele obținute prin uniune).
- Dacă elementele sunt deja sortate sau putem folosi Counting Sort → O(n).
  - Folosim 2 cozi: una cu valorile inițiale sortate, a doua cu valorile sumelor în ordinea care vin (vor fi și ele sortate)

Discuție Problema

Complexitate?

- Dacă elementele sunt deja sortate sau putem folosi Counting Sort → O(n).
  - Folosim 2 cozi una cu valorile inițiale sortate, a doua cu valorile sumelor în ordinea care vin (vor fi și ele sortate)
  - 10 20 30 40 40 70 | nimic
  - 30 40 40 70 | 30 (după ce am unit 10 cu 20)
  - 40 40 70 | 60 (după ce am unit 30 cu 30)
  - 70 | 60 80 (după ce am unit 40 cu 40)
  - nimic | 80 130 (după ce am unit 60 cu 80)
  - Nimic | 210

Bibliografie

https://ocw.cs.pub.ro/courses/sd-ca/laboratoare/laborator-11

https://www.slideshare.net/HoangNguyen446/heaps-61679009

https://www.infoarena.ro/heapuri

https://www.cs.cmu.edu/~ckingsf/bioinfo-lectures/heaps.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_heap

https://en.wikipedia.org/wiki/Heap_(data_structure)

https://www.geeksforgeeks.org/binomial-heap-2/

Cursuri Structuri de Date și Algoritmi Rodica Ceterchi