GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 9
Spaţii euclidiene. Baze ortonormate

Am definit în cursul trecut ce înseamnă un morfism diagonalizabil. Similar o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte *diagonalizabilă* dacă există o bază în $\mathbb{R}^n$ de vectori proprii ai matricei A. Punând aceşti vectori proprii $v_1, \ldots, v_n$ într-o matrice $Q = (v_1 \ldots v_n)$, ca şi coloanele acestei matrice, obţinem relaţia $AQ = QD \Leftrightarrow A = QDQ^{-1}$, unde D este o matrice diagonală formată din valori proprii carora le sunt asociate vectorii proprii $v_1, \ldots, v_n$.

De fapt relaţia $AQ = QD$ reprezintă toate egalităţile $Av_j = \lambda_j v_j, 1 \leqslant j \leqslant n$. Să vedem acest lucru. Vom identifica coloanele celor doi membri. Fie $1 \leqslant j \leqslant n$ arbitrar.

În membrul stâng avem $C_j(AQ) = AC_j(Q) = Av_j$ iar în membrul drept $C_j(QD) = QC_j(D) = 0C_1(Q) + 0C_2(Q) + \ldots + \lambda_j C_j(Q) + \ldots + 0C_n(Q) = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + \lambda_j v_j + \ldots + 0v_n = \lambda_j v_j$.

Exemplul 1. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1)$. Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Vectorii proprii asociaţi acestor valori proprii fiind liniar independenţi şi fiind în număr de trei, în $\mathbb{R}^3$, formează bază. Deci matricea este diagonalizabilă. Vectori proprii sunt:

$A \cdot v_1 = 0 \cdot v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z = 0$. Deci $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(A - 1I_3) \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = z$, de unde $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(A + 1I_3) \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = -z$, şi rezultă $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Deci $A = QDQ^{-1}$, unde $Q = (v_1\ v_2\ v_3)$, este matricea ce are coloanele vectorii proprii asociaţi valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Adică $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ cu inversa $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Avem $D = Q^{-1}AQ$. Ce reprezintă această relaţie ?

Matricea $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, este matricea unei transformări liniare (endomorfism) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, într-o anumită bază $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$. $D = M_{\mathcal{B}'}(f)$, matricea aceleeaşi transformări liniare f, dar în baza $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$, formată din vectorii proprii (vedeţi definiţia morfismului diagonalizabil).

Relaţia $D = Q^{-1}AQ$ este exact relaţia $M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})$, unde $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})$ este matricea de trecere din baza $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{B}'$.

Diagonalizarea unei matrice înseamnă, după cum am spus la începutul cursului, găsirea unei baze de vectori proprii. Nu toate matricele cu coeficienţi reali sunt diagonalizabile. După cum am menţionat, cele simetrice sunt.

Spaţii euclidiene

În anumite cazuri este de dorit ca vetorii proprii folosiţi la diagonalizarea unei matrice să aibă şi alte proprietăţi, anume sa fie ortonormali. Astfel, trebuie să introducem o altă noţiune, anume cea de produs scalar.

Considerăm ca şi mai sus un spaţiu vectorial V peste corpul $\mathbb{R}$ cu $\dim_R(V) = n$.

Definiţia 2. O aplicaţie $T : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte *biliniară* dacă este liniară în fiecare argument. Mai precis, $T(\alpha v + \beta w, x) = \alpha T(v, x) + \beta T(w, x)$ şi $T(v, \alpha x + \beta y) = \alpha T(v, x) + \beta T(v, y)$ pentru $(\forall) v, w, x, y \in V$ şi $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

O aplicaţie biliniară T se numeşte *simetrică* dacă $T(x, y) = T(y, x)$ pentru $(\forall) v, w, x, y \in V$

O aplicaţie biliniară T spunem că este *semipozitiv definită* dacă $T(x, x) \geqslant 0$ pentru $(\forall) x \in V$ şi *pozitiv definită* dacă în plus $T(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$.

Numim *produs scalar* pe V aplicaţia $<,>: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ care biliniară, simetrică, pozitiv definită se numeşte. $(V, <,>)$ spaţiul vectorial V pe care avem definit un produs scalar se numeşte *spaţiu euclidian*.

Exemplul 3.

- Produsul scalar standard pe $\mathbb{R}^n$ este $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, unde $x, y \in \mathbb{R}^n$. Este clar biliniar, simetric şi pozitiv semidefinit. Dacă $< x, x >= 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0, x_i \in \mathbb{R}$. De aici rezultă că $x_i = 0, (\forall) 1 \leqslant i \leqslant n$, adică $x = 0$. Deci aplicaţia definită mai sus este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.
- Fie $\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} |\ f \text{continuă}\ \}$. Pe acest spaţiu considerăm $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$. Se verifică faptul că acesta este un produs scalar pe $\mathcal{C}([a, b])$.

Propoziţia 4 (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)**.** *Fie $(V, <, >)$ un spaţiu euclidian şi $x, y \in V$. Atunci are loc $| < x, y > | \leqslant \sqrt{< x, x >< y, y >}$.*

Definiţia 5. Doi vectori x, y din spaţiul euclidian $(V, <, >)$ se numesc *ortogonali* dacă $< x, y >= 0$.

Exemplul 6. Considerăm $\mathbb{R}^2$ cu produsul scalar canonic şi vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Avem $< v_1, v_2 >= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$, adică aceştia sunt ortogonali. Acest fapt îl ştim deja. v_1 stă în plan pe prima bisectoare a axelor (având coordonatele egale), iar v_2 stă pe a doua bisectoare a axelor. Ştim că cele două bisectoare sunt ortogonale.

Mai uşor de văzut este că $< e_1, e_2 >= 0$, unde $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sunt vectorii din baza canonică a planului $\mathbb{R}^2$.

Propoziţia 7. *Fie $(V, <, >)$ un spaţiu euclidian real de dimensiune n. Orice sistem de vectori nenuli ce sunt ortogonali doi câte doi este sistem de vectori liniar independenţi.*

Definiţia 8. Fie $L_1, L_2 \subset V$, submulţimi ale spaţiului euclidian $(V, <, >)$. Spunem că L_1 este *ortogonală* pe L_2 dacă $< v, w >= 0$ pentru $(\forall)\ v \in L_1$ şi $(\forall)\ w \in L_2$. Scriem $L_1 \perp L_2$. În particular dacă $L_1 = \{x\} \neq \{0_V\}$, atunci $x \perp L_2 \Leftrightarrow < x, w >= 0, (\forall)\ w \in L_2$.

Pentru a testa ortogonalitatea unui vector pe un subspaţiu al spaţiului V este suficient să testatăm aceasta pe o bază. Mai precis.

Propoziţia 9. *Fie $(V, <, >)$ un spaţiu euclidian real de dimensiune n, şi L un subspaţiu vectorial al lui V. Considerăm $\mathcal{B} \subset L$, o bază a subspaţiului L. Atunci $x \perp L \Leftrightarrow x \perp \mathcal{B}$.*

Demonstraţie: "$\Rightarrow$" Clar pentru că $\mathcal{B} \subset L$.

"$\Leftarrow$" Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ bază în L. Considerăm $w \in L$ arbitrar, $w = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ cu $a_i \in \mathbb{R}$. $< x, w > = < x, \sum_{i=1}^{k} a_i v_i > = \sum_{i=1}^{k} a_i < x, v_i > = 0$ pentru că $< x, v_i > = 0$ pentru $(\forall) i$.

$\square$

Definiţia 10. Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real şi $L \neq \emptyset$, o submulţime a lui V. Mulţimea notată $L^{\perp} = \{x \in V \mid x \perp L\}$ se numeşte *complementul ortogonal* al lui L în V.

Definiţia 11. Într-un spaţiu euclidian $(V, <,>)$, numim *normă* a vectorului $x \in V$ şi notăm $||x|| = \sqrt{< x, x >}$.

Din definiţie $||x|| \geqslant 0$. Din proprietăţile produsului scalar rezultă următoarele proprietăţi ale normei.

(1) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$, pentru $(\forall) x \in V$ şi $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$
(2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$,
(3) $| < x, y > | \leqslant ||x|| \cdot ||y||$, $(\forall) x, y \in V$, (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)
(4) $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$, $(\forall) x, y \in V$, (inegalitatea Minkowski sau a triunghiului),
(5) $|\, ||x|| - ||y||\, | \leqslant ||x - y||$, $(\forall) x, y \in V$.

Definiţia 12. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, o bază a spaţiului euclidian V. Aceasta se numeţe *ortogonală* dacă $v_i \perp v_j$, $(\forall) i, j$. Dacă în plus $||v_i|| = 1$, $(\forall) i$ atunci baza se numeşte *ortonormată*.

Dacă $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ este bază ortogonală în V, atunci $\mathcal{B}' = \{\frac{v_1}{||v_1||}, \ldots, \frac{v_n}{||v_n||}\}$ este o bază ortonormată.

În **exemplul 6** $\{v_1, v_2\}$ este bază ortogonală. Din aceasta, obţinem $\{\frac{1}{\sqrt{2}} v_1, \frac{1}{\sqrt{2}} v_2\}$ bază ortonormată. Baza canonică $\{e_1, e_2\}$ este bază ortonormată.

Definiţia 13. Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real, L un subspaţiu a lui V şi $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset L$, o bază a lui L. Fie $x \in V$. Vectorul $\sum_{i=1}^{k} < x, v_i > v_i$ se numeşte *proiecţia* vectorului x pe L şi se notează $\mathrm{pr}_L\, x$.

Există un algoritm de a obţine din orice bază a unui spaţu euclidian o bază ortonormată.

Teorema 14 (Gram-Schmidt)**.** *Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ o bază a spaţiului euclidian real $(V, <,>)$ cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Atunci există o bază ortonormată $\{e_1, \ldots, e_n\}$, astfel încât sistemele de vectori $\{v_1, \ldots, v_k\}$ şi $\{e_1, \ldots, e_k\}$ generează acelaşi subspaţiu a lui V, pentru $(\forall) k = \overline{1, n}$.*

Demonstraţie: Obţinem mai întâi o bază ortogonală $\{x_1, \ldots, x_n\}$, pe care o normăm.

Definim $x_1 = v_1, x_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{< v_j, x_i >}{< x_i, x_i >} x_i$, pentru $(\forall) j = \overline{2, n}$. Vectorii $x_1, \ldots, x_n$ sunt ortogonali doi câte doi, deci conform **propoziţiei 7**, liniar independenţi.

Definim $e_i = \frac{x_i}{||x_i||}$. Din definiţia vectorilor x_i, şi deci ai vectorilor e_i rezultă că subspaţiul generat de $\{v_1, \ldots, v_k\}$ este egal cu subspaţiul generat de $\{e_1, \ldots, e_k\}$, pentru orice k.

$\square$

Exemplul 15. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subset \mathbb{R}^3$, bază. Dorim să obţinem o bază ortonormată folosind algoritmul Gram-Schmidt.

$x_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = v_2 - \frac{<v_2,x_1>}{<x_1,x_1>} x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$x_3 = v_3 - \frac{<v_3,x_1>}{<x_1,x_1>} x_1 - \frac{<v_3,x_2>}{<x_2,x_2>} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$||x_1|| = \sqrt{2}, ||x_2|| = 1, ||x_3|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Deci $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1, e_2 = x_2, e_3 = \sqrt{2} x_3$ este baza ortonormată.