Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

cursul 1

2021-2022

Structura cursului:

- Capitolul 1: Algebră vectorială
- Capitolul 2: Geometrie analitică
- Capitolul 3: Analiză unidimensională
- Capitolul 4: Sisteme de ecuații diferențiale
- Capitolul 5: Geometria diferențială a curbelor și a suprafețelor

Structura cursului:

Capitolul 1:

- Structuri algebrice. Spații și subspații vectoriale.
- Spații vectoriale finit generate.
- Transformări liniare. Vectori și valori proprii.
- Forma diagonală a unui endomorfism. Aplicații. Forme pătratice.

Structura cursului:

Capitolul 2:

- Vectori liberi. Identificarea unui punct cu un vector.
- Produse clasice de vectori.
- Rotații, translații, simetrii, izometrii.
- Drepte, direcții, plane.
- Conice și cuadrice: reprezentare grafică.

Structura cursului:

Capitolul 3:

- Calcul diferențial pentru funcții de o singură variabilă: diferențiala, formula lui Taylor.
- Serii numerice. Serii de puteri.
- Integrala Riemann și Riemann generalizată.
- Ecuații diferențiale de ordinul întâi.

Structura cursului:

Capitolul 4:

- Sisteme de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți și afine.
- Metoda variației constantelor.

Structura cursului:

Capitolul 4:

- Sisteme de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți și afine.
- Metoda variației constantelor.

Capitolul 5:

- Reprezentări ale suprafețelor: plan tangent, normală, curbură.

Evaluare

Evaluare:

- 40p: 2x20p lucrări de verificare
- 10p: activitate seminar
- 50p: examen final

Evaluare

Evaluare:

- 40p: 2x20p lucrări de verificare
- 10p: activitate seminar
- 50p: examen final

Cerințe minimale pentru promovare

- minimum 20p la examenul final
- minimum 50p total

Bibliografie recomandată:

Probleme de matematici superioare, S. Chiriță, EDP 1989

Definiție

Fie M o mulțime nevidă. O funcție

$$\phi : M \times M \to M, \ (x, y) \to \phi(x, y)$$

se numește **lege de compoziție** pe M (sau **operație algebrică binară**).

Definiție

Fie M o mulțime nevidă. O funcție

$$\phi : M \times M \to M,\ (x, y) \to \phi(x, y)$$

se numește **lege de compoziție** pe M (sau **operație algebrică binară**).

Observație

- $\phi(x, y)$ se citește "x **compus cu** y";
- notații: $\phi,\ +,\ \cdot,\ \circ,\ \perp,\ *$

Exemple

- Pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ adunarea, înmulțirea sunt legi de compoziție;

Exemple

- Pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ adunarea, înmulțirea sunt legi de compoziție;
- Pe $M^M = \{f : M \to M | f \text{ funcție}\}$ compunerea funcțiilor este o lege de compoziție:

$$\forall f, g \in M^M, \text{ avem } f \circ g \in M^M$$

$$M \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} M, \; f \circ g : M \to M, (f \circ g)(x) = f(g(x)), \forall x \in M$$

Exemple

- Pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ adunarea, înmulțirea sunt legi de compoziție;
- Pe $M^M = \{f : M \to M | f \text{ funcție}\}$ compunerea funcțiilor este o lege de compoziție:

$$\forall f, g \in M^M, \text{ avem } f \circ g \in M^M$$

$$M \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} M, \; f \circ g : M \to M, (f \circ g)(x) = f(g(x)), \forall x \in M$$

- Pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ adunarea și înmulțirea sunt legi de compoziție.

Definiție

Fie M o mulțime nevidă și "$*$" o lege de compoziție pe M.
Spunem că $(M, *)$ are o structură de **grup** dacă:

Definiție

Fie M o mulțime nevidă și "$*$" o lege de compoziție pe M.
Spunem că $(M, *)$ are o structură de **grup** dacă:

- "$*$" este asociativă:$\forall x, y, z \in M$, avem $(x * y) * z = x * (y * z)$;

Definiție

Fie M o mulțime nevidă și "$*$" o lege de compoziție pe M.
Spunem că $(M, *)$ are o structură de **grup** dacă:

- "$*$" este asociativă: $\forall x, y, z \in M$, avem $(x * y) * z = x * (y * z)$;
- "$*$" admite element neutru:
  $\exists e \in M$ a.î. $e * x = x * e = x, \ \forall x \in M$;

Definiție

Fie M o mulțime nevidă și "$*$" o lege de compoziție pe M.
Spunem că $(M, *)$ are o structură de **grup** dacă:

- "$*$" este asociativă:$\forall x, y, z \in M$, avem $(x * y) * z = x * (y * z)$;
- "$*$" admite element neutru:
  $\exists e \in M$ a.î. $e * x = x * e = x, \ \forall x \in M$;
- toate elementele lui M sunt simetrizabile:
  $\forall x \in M, \ \exists x' \in M$ a.î. $x * x' = x' * x = e$.

Structuri algebrice:

Observație

Dacă, în plus, "$*$" este comutativă, adică $x * y = y * x, \forall x, y \in M$, atunci $(M, *)$ este **grup comutativ**.

Observație

Dacă, în plus, "$*$" este comutativă, adică $x * y = y * x, \forall x, y \in M$, atunci $(M, *)$ este **grup comutativ**.

Exemple

Grupuri comutative sunt:

Structuri algebrice:

Observație

Dacă, în plus, "$*$" este comutativă, adică $x * y = y * x, \forall x, y \in M$, atunci $(M, *)$ este **grup comutativ**.

Exemple

Grupuri comutative sunt:

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$;

Observație

Dacă, în plus, "$*$" este comutativă, adică $x * y = y * x, \forall x, y \in M$, atunci $(M, *)$ este **grup comutativ**.

Exemple

Grupuri comutative sunt:

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$;
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot)$;

Observație

Dacă, în plus, "$*$" este comutativă, adică $x * y = y * x, \forall x, y \in M$, atunci $(M, *)$ este **grup comutativ**.

Exemple

Grupuri comutative sunt:

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$;
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot), (\mathbb{R}^*, \cdot)$;
- $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +)$.

Observație

Nu sunt grupuri:

- $(\mathbb{N}, +)$;
- $(\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, \cdot)$.

Definiție

Fie M o mulțime nevidă și "$+, \cdot$" legi de compoziție pe M. Spunem că $(M, +, \cdot)$ are o structură de **corp** dacă:

- $(M, +)$ este grup comutativ;
- $(M^*, \cdot)$ este grup;
- distributivitatea înmulțirii față de adunare:

Definiție

Fie M o mulțime nevidă și "$+, \cdot$" legi de compoziție pe M. Spunem că $(M, +, \cdot)$ are o structură de **corp** dacă:

- $(M, +)$ este grup comutativ;
- $(M^*, \cdot)$ este grup;
- distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Definiție

Fie M o mulțime nevidă și "$+, \cdot$" legi de compoziție pe M. Spunem că $(M, +, \cdot)$ are o structură de **corp** dacă:

- $(M, +)$ este grup comutativ;
- $(M^*, \cdot)$ este grup;
- distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x, \ \forall x, y, z \in M$$

Observație

În plus, dacă $(M^*, \cdot)$ este grup comutativ, atunci $(M, +, \cdot)$ se numește **corp comutativ (sau câmp)**.

Observație

În plus, dacă $(M^*, \cdot)$ este grup comutativ, atunci $(M, +, \cdot)$ se numește **corp comutativ (sau câmp)**.

Exemple

Corpuri comutative sunt:

Structuri algebrice:

Observație

În plus, dacă $(M^*, \cdot)$ este grup comutativ, atunci $(M, +, \cdot)$ se numește **corp comutativ (sau câmp)**.

Exemple

Corpuri comutative sunt:

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$;

Observație

În plus, dacă $(M^*, \cdot)$ este grup comutativ, atunci $(M, +, \cdot)$ se numește **corp comutativ (sau câmp)**.

Exemple

Corpuri comutative sunt:

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$;
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Observație

Pe $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$ definim două operații:

Observație

Pe $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$ definim două operații:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Observație

Pe $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$ definim două operații:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Observație

Pe $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$ definim două operații:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Atunci $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ formează un corp comutativ.

Corpul numerelor complexe

Identificăm numărul complex $(a, 0)$ cu numărul real a.

Identificăm numărul complex $(a, 0)$ cu numărul real a.
Notăm cu $i = (0, 1)$. Avem:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0),$$

deci i^2 se identifică cu -1.

Corpul numerelor complexe

Orice număr complex $z = (a, b)$ se scrie sub forma:

$z = (a, b) =$

Orice număr complex $z = (a, b)$ se scrie sub forma:

$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) =$

Corpul numerelor complexe

Orice număr complex $z = (a, b)$ se scrie sub forma:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) =$$

Corpul numerelor complexe

Orice număr complex $z = (a, b)$ se scrie sub forma:

$$z = (a, b) = (a, 0)+(0, b) = (a, 0)+(0, 1)\cdot(b, 0) = a+b\cdot i,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Corpul numerelor complexe

Orice număr complex $z = (a, b)$ se scrie sub forma:

$$z = (a, b) = (a, 0)+(0, b) = (a, 0)+(0, 1)\cdot(b, 0) = a+b\cdot i, a, b \in \mathbb{R}.$$

Observație

Pentru numărul complex $z = a + b \cdot i$ avem:

- $a = Re(z)$ se numește **partea reală**
- $b = Im(z)$ se numește **partea imaginară**

Orice număr complex $z = (a, b)$ se scrie sub forma:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + b \cdot i,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Observație

Pentru numărul complex $z = a + b \cdot i$ avem:

- $a = Re(z)$ se numește **partea reală**
- $b = Im(z)$ se numește **partea imaginară**
- $\bar{z} = a - b \cdot i$ se numește **conjugatul lui** z

Orice număr complex $z = (a, b)$ se scrie sub forma:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + b \cdot i,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Observație

Pentru numărul complex $z = a + b \cdot i$ avem:

- $a = Re(z)$ se numește **partea reală**
- $b = Im(z)$ se numește **partea imaginară**
- $\bar{z} = a - b \cdot i$ se numește **conjugatul lui** z
- $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ se numește **modulul lui** z.

Corpul numerelor complexe

Interpretarea geometrică a unui număr complex:

- $\mathbb{C}$ se identifică cu reperul cartezian xOy;

Corpul numerelor complexe

Interpretarea geometrică a unui număr complex:

- $\mathbb{C}$ se identifică cu reperul cartezian xOy;
- $M(a, b) \to z = a + b \cdot i$, z se numește **afixul lui** M

Corpul numerelor complexe

Interpretarea geometrică a unui număr complex:

- $\mathbb{C}$ se identifică cu reperul cartezian xOy;
- $M(a, b) \rightarrow z = a + b \cdot i$, z se numește **afixul lui** M
- Pentru $z \neq 0$, există si este unic $\theta \in [0, 2\pi)$ definit astfel:

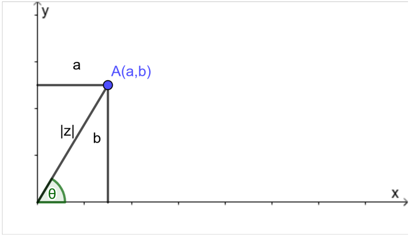
$$\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|}, \ \sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|}.$$

Interpretarea geometrică a unui număr complex:

- $\mathbb{C}$ se identifică cu reperul cartezian xOy;
- $M(a,b) \to z = a + b \cdot i$, z se numește **afixul lui** M
- Pentru $z \neq 0$, există si este unic $\theta \in [0, 2\pi)$ definit astfel:

$$\cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|},\ \sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|}.$$

$\theta = arg(z)$ se numește **argumentul lui** z.



$$a = |z| \cos\theta, \;\; b = |z| \sin\theta$$

Forma trigonometrică a numărului complex

$$z = a + b \cdot i = |z|(\cos\theta + i \sin\theta).$$

Corpul cuaternionilor

Notăm $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

Notăm $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

- identificăm $a \in \mathbb{R}$ cu elementul $(a, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}$.

Notăm $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

- identificăm $a \in \mathbb{R}$ cu elementul $(a, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}$.
- notăm cu $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{H}$ și se numesc **unități imaginare**

Corpul cuaternionilor

Notăm $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

- identificăm $a \in \mathbb{R}$ cu elementul $(a, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}$.
- notăm cu $i = (0, 1, 0, 0),\ j = (0, 0, 1, 0),\ k = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{H}$ și se numesc **unități imaginare**
- Pe $\mathbb{H}$ definim două operații:

Corpul cuaternionilor

Notăm $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

- identificăm $a \in \mathbb{R}$ cu elementul $(a, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}$.
- notăm cu $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 0, 1) \in \mathbb{H}$ și se numesc **unități imaginare**
- Pe $\mathbb{H}$ definim două operații:

$$(a, b, c, d) + (a_1, b_1, c_1, d_1) = (a + a_1, b + b_1, c + c_1, d + d_1)$$

Corpul cuaternionilor

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Corpul cuaternionilor

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \ jk = -kj = i, \ ki = -ik = j$$

Corpul cuaternionilor (corp necomutativ)

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Fie $\mathbb{k}$ un corp comutativ înzestrat cu cele două operații de adunare și de înmulțire, notate cu $+_{\mathbb{k}}$, respectiv $\cdot_{\mathbb{k}}$.

Fie $\mathbb{k}$ un corp comutativ înzestrat cu cele două operații de adunare și de înmulțire, notate cu $+_{\mathbb{k}}$, respectiv $\cdot_{\mathbb{k}}$.

Definiție

Fie V o mulțime nevidă.

Fie $\mathbb{k}$ un corp comutativ înzestrat cu cele două operații de adunare și de înmulțire, notate cu $+_{\mathbb{k}}$, respectiv $\cdot_{\mathbb{k}}$.

Definiție

Fie V o mulțime nevidă.
Pe V considerăm o operație internă de adunare:

$$+ : V \times V \to V, (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

Fie $\mathbb{k}$ un corp comutativ înzestrat cu cele două operații de adunare și de înmulțire, notate cu $+_{\mathbb{k}}$, respectiv $\cdot_{\mathbb{k}}$.

Definiție

Fie V o mulțime nevidă.
Pe V considerăm o operație internă de adunare:

$$+ : V \times V \to V, (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

Considerăm o operație externă

$$\cdot : \mathbb{k} \times V \to V, (\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \alpha \cdot \mathbf{w}.$$

Fie $\mathbb{k}$ un corp comutativ înzestrat cu cele două operații de adunare și de înmulțire, notate cu $+_{\mathbb{k}}$, respectiv $\cdot_{\mathbb{k}}$.

Definiție

Fie V o mulțime nevidă.
Pe V considerăm o operație internă de adunare:

$$+ : V \times V \to V, (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

Considerăm o operație externă

$$\cdot : \mathbb{k} \times V \to V, (\alpha, \mathbf{w}) \mapsto \alpha \cdot \mathbf{w}.$$

Spunem că $(V, +, \cdot)$ are o structură de **spațiu vectorial peste corpul** $\mathbb{k}$ dacă $(V, +)$ este grup comutativ și sunt verificate următoarele condiții:

(i) $\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w}$,

(ii) $(\alpha +_{\Bbbk} \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$,

(iii) $(\alpha \cdot_{\Bbbk} \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v})$,

(iv) $1_{\Bbbk} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$,

pentru orice $\mathbf{v},\ \mathbf{w} \in V$ și orice $\alpha,\ \beta \in \Bbbk$.

(i) $\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w}$,

(ii) $(\alpha +_{\mathbb{k}} \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$,

(iii) $(\alpha \cdot_{\mathbb{k}} \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v})$,

(iv) $1_{\mathbb{k}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$,

pentru orice $\mathbf{v},\ \mathbf{w} \in V$ și orice $\alpha,\ \beta \in \mathbb{k}$.

Observație

Dacă V este un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial, elementele din V se numesc **vectori**, iar elementele din $\mathbb{k}$ se numesc **scalari**.

Exemplu

Considerăm $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ și mulțimea

$$V = \mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, \ \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Definim cele două operații astfel: pentru orice doi vectori

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

și orice scalar $\alpha \in \mathbb{R}$ avem

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

și

$$\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Atunci $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ are o structură de spațiu vectorial real.

Soluție:

Prin calcul elementar se verifică structura de grup a lui $(V, +)$. Elementul neutru la adunare este vectorul nul $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ și opusul vectorului $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ este $-\mathbf{x} = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Soluție:

Prin calcul elementar se verifică structura de grup a lui $(V, +)$. Elementul neutru la adunare este vectorul nul $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ și opusul vectorului $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ este $-\mathbf{x} = (-x_1, \ldots, -x_n)$. Mai departe trebuie să verificăm cele patru condiții din definiție. Pentru prima condiție avem:

$$\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot ((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) = \alpha \cdot (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) =$$

$$= (\alpha(x_1 + y_1), \ldots, \alpha(x_n + y_n)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n) =$$

$$= (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \ldots, \alpha y_n) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}.$$

Asemănător se verifică și celelalte condiții. $\square$

Observație

Geometric

$$\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} = (x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

este planul xOy, unde prima componentă a vectorului $\mathbf{x}$ este abscisa, iar a doua este ordonata.

Observație

Geometric
$$\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} = (x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$
este planul xOy, unde prima componentă a vectorului $\mathbf{x}$ este abscisa, iar a doua este ordonata.
Un vector în $\mathbb{R}^2$ este reprezentat grafic printr-un punct din plan.

Observație

Geometric

$$\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} = (x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

este planul xOy, unde prima componentă a vectorului $\mathbf{x}$ este abscisa, iar a doua este ordonata.
Un vector în $\mathbb{R}^2$ este reprezentat grafic printr-un punct din plan.
Prin analogie, $\mathbb{R}^3$ este $Oxyz$.

Observație

Structura de spațiu vectorial este determinată de modul în care sunt definite cele două operații din definiție.

Observație

Structura de spațiu vectorial este determinată de modul în care sunt definite cele două operații din definiție.

Exemplu

Fie $V = \mathbb{R}^3$ împreună cu operațiile

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_1, 0, 0),$$

pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ și orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observație

Structura de spațiu vectorial este determinată de modul în care sunt definite cele două operații din definiție.

Exemplu

Fie $V = \mathbb{R}^3$ împreună cu operațiile

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_1, 0, 0),$$

pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ și orice $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ nu este spațiu vectorial real,

Observație

Structura de spațiu vectorial este determinată de modul în care sunt definite cele două operații din definiție.

Exemplu

Fie $V = \mathbb{R}^3$ împreună cu operațiile

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_1, 0, 0),$$

pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ și orice $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ nu este spațiu vectorial real, deoarece ultima condiție din definiție nu se verifică.

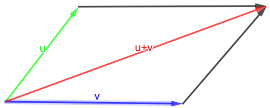
Exemplu

În spațiul geometric $\mathbb{R}^3$, considerăm V ca fiind mulțimea vectorilor liberi, adică a segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat dat. Reamintim că două segmente orientate sunt echipolente dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

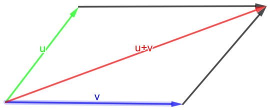
Exemplu

În spațiul geometric $\mathbb{R}^3$, considerăm V ca fiind mulțimea vectorilor liberi, adică a segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat dat. Reamintim că două segmente orientate sunt echipolente dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime. Pe mulțimea V definim adunarea vectorilor liberi (prin regula paralelogramului)

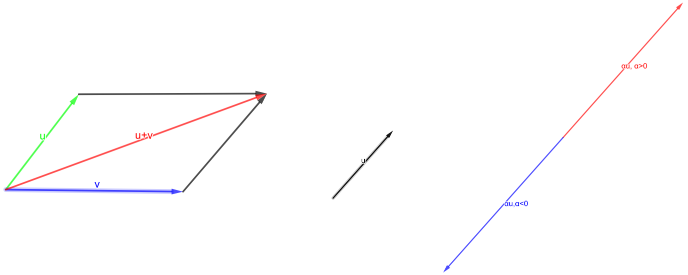
Spații vectoriale



Spații vectoriale

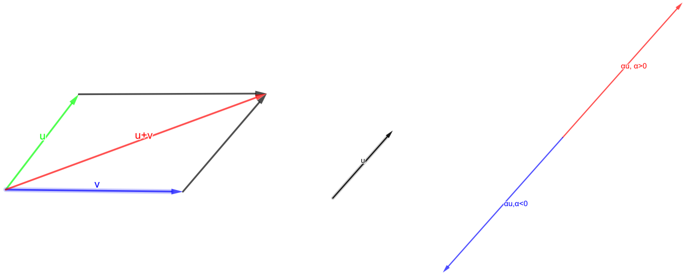


și înmulțim un vector liber cu un scalar prin multiplicarea lungimii acestuia cu respectivul scalar.

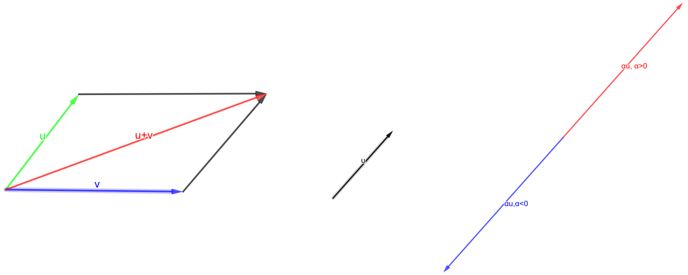


și înmulțim un vector liber cu un scalar prin multiplicarea lungimii acestuia cu respectivul scalar.

Spații vectoriale



și înmulțim un vector liber cu un scalar prin multiplicarea lungimii acestuia cu respectivul scalar.
Dacă scalarul este pozitiv, atunci sensul vectorului nu se modifică, iar dacă scalarul este negativ, atunci obținem un vector de sens opus cu vectorul inițial.



și înmulțim un vector liber cu un scalar prin multiplicarea lungimii acestuia cu respectivul scalar.
Dacă scalarul este pozitiv, atunci sensul vectorului nu se modifică, iar dacă scalarul este negativ, atunci obținem un vector de sens opus cu vectorul inițial.
Mulțimea vectorilor liberi împreună cu aceste operații este spațiu vectorial real.

Exemplu

Orice corp $\mathbb{k}$ este $\mathbb{k}$-spațiu vectorial, operațiile fiind cele ale lui $\mathbb{k}$.

Exemplu

Orice corp $\mathbb{k}$ este $\mathbb{k}$-spațiu vectorial, operațiile fiind cele ale lui $\mathbb{k}$. În particular, putem să ne gândim la corpul $\mathbb{C}$ ca fiind atât spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$, cât și peste $\mathbb{R}$.

Exemplu

Orice corp $\mathbb{k}$ este $\mathbb{k}$-spațiu vectorial, operațiile fiind cele ale lui $\mathbb{k}$.
În particular, putem să ne gândim la corpul $\mathbb{C}$ ca fiind atât spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$, cât și peste $\mathbb{R}$.
$\mathbb{C}$ este spațiu vectorial real dacă considerăm următoarele operații: adunarea este adunarea numerelor complexe, deci adunarea din $\mathbb{C}$, iar operația de înmulțire cu scalari este înmulțirea dintre un număr real (scalar) cu un număr complex.

Exemplu

Mulțimea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, împreună cu operațiile de adunare a matricelor și de înmulțire a unei matrice cu un scalar real formează un spațiu vectorial real.

Exemplu

Mulțimea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, împreună cu operațiile de adunare a matricelor și de înmulțire a unei matrice cu un scalar real formează un spațiu vectorial real.
Facem menționea că, în funcție de situație, vom identifica elementele lui $\mathbb{R}^n$ cu matrice din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemplu

Mulțimea polinoamelor în variabila x cu coeficienți în corpul $\mathbb{k}$, notată cu $\mathbb{k}[x]$, este un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{k}$, iar operațiile sunt cele de adunare a polinoamelor și de înmulțire a unui polinom cu un scalar.

Exemplu

Dat $I \subset \mathbb{R}$ un interval real, mulțimea

$$\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} |\ f \text{ funcție}\}$$

este un spațiu vectorial real cu operațiile:

Exemplu

Dat $I \subset \mathbb{R}$ un interval real, mulțimea

$$\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} |\ f \text{ funcție}\}$$

este un spațiu vectorial real cu operațiile:
Adunarea: pentru $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ avem $f + g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, unde

$$f + g : I \to \mathbb{R},\ (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I.$$

Exemplu

Dat $I \subset \mathbb{R}$ un interval real, mulțimea

$$\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} | \ f \text{ funcție}\}$$

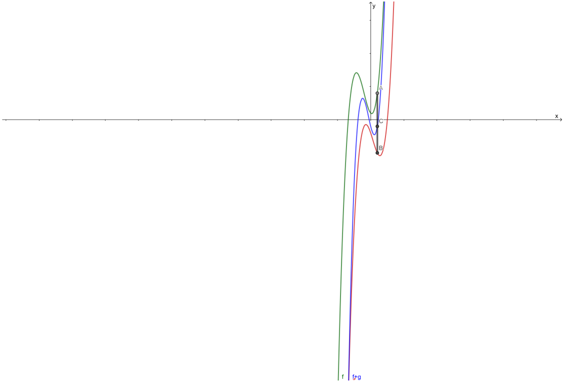
este un spațiu vectorial real cu operațiile:
Adunarea: pentru $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ avem $f + g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, unde

$$f + g : I \to \mathbb{R}, \ (f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I.$$

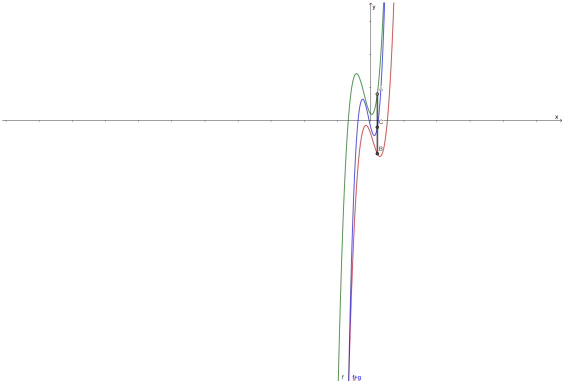
Înmulțim vectorul $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ cu scalarul $\alpha \in \mathbb{R}$ și obținem vectorul $\alpha \cdot f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, dat de

$$\alpha \cdot f : I \to \mathbb{R}, \ (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in I.$$

$$f+g : I \to \mathbb{R},\ (f+g)(x) = f(x)+g(x), \forall x \in I.$$



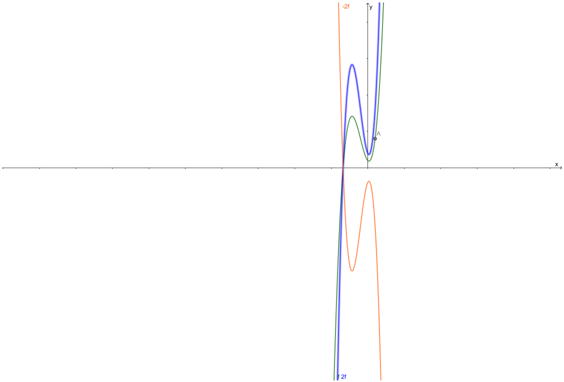
$$f+g: I \to \mathbb{R},\ (f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I.$$



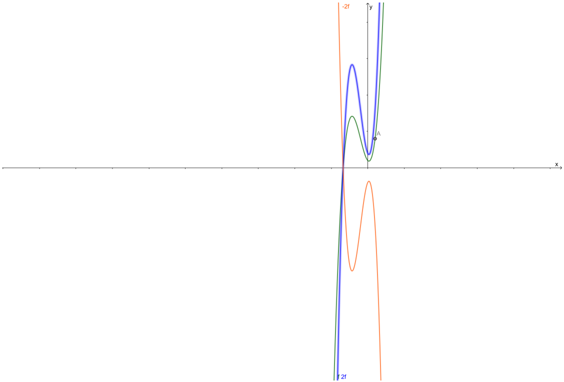
Observație

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x^2 - 3x - 2$.

$$\alpha \cdot f : I \to \mathbb{R},\ (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in I.$$



$$\alpha \cdot f : I \to \mathbb{R}, \ (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in I.$$



Observație

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1.$

Observație

În particular, pentru $I = \mathbb{N}$, obținem

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} | a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

Observație

În particular, pentru $I = \mathbb{N}$, obținem

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} | a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

adică mulțimea șirurilor de numere reale. Avem cele două operații:

$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n \text{ și } \alpha \cdot (a_n)_n = (\alpha a_n)_n.$$

Propoziție (Reguli de calcul:)

Dacă V este un $\Bbbk$-spațiu vectorial, atunci pentru orice vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ și pentru orice scalari $\alpha, \beta \in \Bbbk$ au loc:

(i) $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ și $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$;

(ii) $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ dacă și numai dacă $\alpha = 0$ sau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;

(iii) $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ și $(-\alpha) \cdot \mathbf{v} = -(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot (-\mathbf{v})$;

(iv) dacă $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$, atunci $\mathbf{u} = \mathbf{w}$;

(v) dacă $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ și $\alpha \cdot \mathbf{v} = \beta \cdot \mathbf{v}$, atunci $\alpha = \beta$;

(vi) $(\alpha - \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} - \beta \cdot \mathbf{v}$;

(vii) $\alpha \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} - \alpha \cdot \mathbf{w}$.

Demonstrație:

Pentru (i), avem

$$0 \cdot \mathbf{v} =$$

Demonstrație:

Pentru (i), avem

$$0 \cdot \mathbf{v} = (0 + 0) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v},$$

de unde rezultă că $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Demonstrație:

Pentru (i), avem

$$0 \cdot \mathbf{v} = (0 + 0) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v},$$

de unde rezultă că $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Similar, dacă $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, atunci

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0},$$

de unde obținem $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Demonstrație:

Pentru (i), avem

$$0 \cdot \mathbf{v} = (0 + 0) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v},$$

de unde rezultă că $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Similar, dacă $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, atunci

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0},$$

de unde obținem $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Aici am ținut cont de structura de grup a lui V cu operația de adunare a vectorilor.

$\square$

Pentru (*ii*): $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ dacă și numai dacă $\alpha = 0$ sau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

- "$\Leftarrow$" rezultă din (*i*).

Pentru (*ii*): $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ dacă și numai dacă $\alpha = 0$ sau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

- "$\Leftarrow$" rezultă din (*i*).
- Pentru "$\Rightarrow$", dacă presupunem că $\alpha \neq 0$, atunci există inversul său, $\alpha^{-1} \in \mathbb{k}$, și cum $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, avem că:

$$\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v}) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0}.$$

Atunci obținem $(\alpha^{-1}\alpha) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, deci $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Pentru (*ii*): $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ dacă și numai dacă $\alpha = 0$ sau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

- "$\Leftarrow$" rezultă din (*i*).
- Pentru "$\Rightarrow$", dacă presupunem că $\alpha \neq 0$, atunci există inversul său, $\alpha^{-1} \in \mathbb{k}$, și cum $\alpha \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, avem că:

$$\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{v}) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0}.$$

Atunci obținem $(\alpha^{-1}\alpha) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, deci $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Într-un mod similar se demonstrează celelalte proprietăți.

Definiție

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $U \subseteq V$ o submulțime nevidă a lui V. Spunem că U este **subspațiu vectorial** al lui V dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

(i) U este închisă la adunarea vectorilor, adică pentru orice doi vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, vectorul $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$;

(ii) U este închisă la înmulțirea cu scalari a vectorilor, adică pentru orice vector $\mathbf{u} \in U$ și orice scalar $\alpha \in \mathbb{k}$, vectorul $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$.

Observație

Prin U mulțime nevidă înțelegem că U conține vectorul nul din V.

Observație

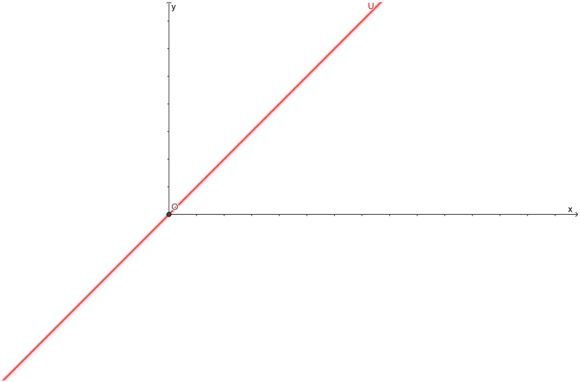
Prin U mulțime nevidă înțelegem că U conține vectorul nul din V. Deci o condiție necesară pentru ca o mulțime să fie subspațiu este ca aceasta să conțină vectorul nul.

Exemplu

În $\mathbb{R}^2$ considerăm $U = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

Exemplu

În $\mathbb{R}^2$ considerăm $U = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.
Geometric, elementele lui U sunt reprezentate de prima bisectoare.



- Dacă adunăm doi vectori din U, obținem un vector din U.

- Dacă adunăm doi vectori din U, obținem un vector din U.
- Dacă înmulțim un vector din U cu un scalar real, atunci rezultatul este tot un vector din U.

Subspații vectoriale

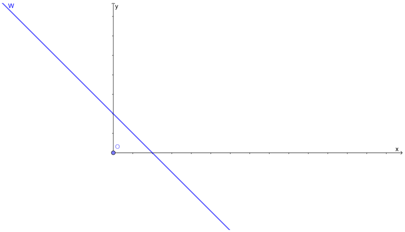
- Dacă adunăm doi vectori din U, obținem un vector din U.
- Dacă înmulțim un vector din U cu un scalar real, atunci rezultatul este tot un vector din U.
- Mai mult, U conține vectorul nul din $\mathbb{R}^2$, deci U este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$.

Exemplu

Considerăm mulțimea $W = \{(2-x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

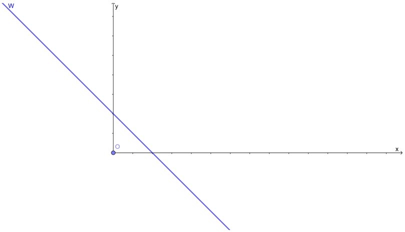
Exemplu

Considerăm mulțimea $W = \{(2-x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.



Exemplu

Considerăm mulțimea $W = \{(2-x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.



W nu este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$ deoarece nu conține vectorul nul.

ATENȚIE: Condiția ca vectorul nul să fie conținut de mulțimea U nu este suficientă!

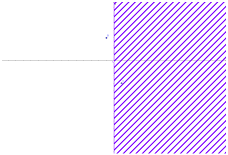
Exemplu

Fie $U = \{(x, y) : x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

ATENȚIE: Condiția ca vectorul nul să fie conținut de mulțimea U nu este suficientă!

Exemplu

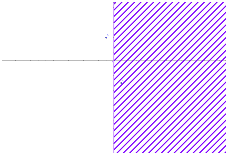
Fie $U = \{(x, y) : x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.



ATENȚIE: Condiția ca vectorul nul să fie conținut de mulțimea U nu este suficientă!

Exemplu

Fie $U = \{(x, y) : x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

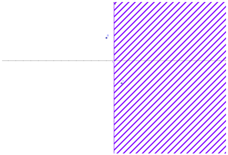


Este clar că $\mathbf{0} = (0, 0) \in U$.

ATENȚIE: Condiția ca vectorul nul să fie conținut de mulțimea U nu este suficientă!

Exemplu

Fie $U = \{(x, y) : x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.



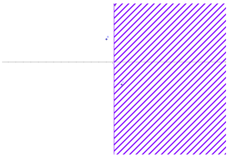
Este clar că $\mathbf{0} = (0, 0) \in U$.
U nu este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$,

Subspații vectoriale

ATENȚIE: Condiția ca vectorul nul să fie conținut de mulțimea U nu este suficientă!

Exemplu

Fie $U = \{(x, y) : x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.



Este clar că $\mathbf{0} = (0, 0) \in U$.
U nu este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^2$, deoarece $(-1) \cdot (x, y) = (-x, -y) \notin U$, pentru orice vector nenul $(x, y) \in U$.

Observație

Dacă V este un spațiu vectorial, atunci subspațiul nul $\{\mathbf{0}\}$ și V sunt subspații vectoriale ale lui V, numite **subspații improprii**.

Exemplu

În spațiul vectorial real al matricelor pătratice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ putem considera subspațiile vectoriale date de mulțimile:

- matricelor superior triunghiulare
- matricelor inferior triunghiulare
- matricelor diagonale.

Exemplu

În spațiul vectorial al polinoamelor $\Bbbk[x]$, notăm cu $\Bbbk_n[x]$ mulțimea polinoamelor de grad cel mult n ($n \in \mathbb{N}^*$ dat), adică

$$\Bbbk_n[x] = \{\mathfrak{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n : a_i \in \Bbbk, \forall\ 0 \leq i \leq n\}.$$

Exemplu

În spațiul vectorial al polinoamelor $\mathbb{k}[x]$, notăm cu $\mathbb{k}_n[x]$ mulțimea polinoamelor de grad cel mult n ($n \in \mathbb{N}^*$ dat), adică

$$\mathbb{k}_n[x] = \{\mathfrak{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{k}, \forall\ 0 \leq i \leq n\}.$$

$\mathbb{k}_n[x]$ este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{k}[x]$.

Exemplu

În spațiul vectorial $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, unde $I = [a, b]$, putem considera următoarele subspații vectoriale:

- mulțimea funcțiilor continue pe I cu valori reale,
- mulțimea funcțiilor derivabile pe I cu valori reale.
- Dacă $I = (-a, a)$, atunci mulțimea funcțiilor pare și mulțimea funcțiilor impare definite pe I cu valori reale sunt subspații vectoriale ale lui $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Observație

De remarcat faptul că $\mathbb{R}^2$ nu este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. Mai mult, $\mathbb{R}^2$ nu este o submulțime a lui $\mathbb{R}^3$.

Subspații vectoriale

Observație

De remarcat faptul că $\mathbb{R}^2$ nu este subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. Mai mult, $\mathbb{R}^2$ nu este o submulțime a lui $\mathbb{R}^3$.

Observație

Orice subspațiu vectorial U al lui V, împreună cu operațiile spațiului vectorial V, capătă o structură de spațiu vectorial.