Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

seminarul 10

2021-2022

Forme biliniare, forme pătratice. Conice

Exemplu

Să se verifice dacă este o formă biliniară:

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, F(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_3y_3$$

Să se scrie matricea formei biliniare în baza canonică și în baza $B' = \{v_1 = (1,2,1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (2,2,1)\}$. Dacă se poate, să se scrie forma pătratică asociată formei biliniare.

Soluție:

Avem $F(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_3y_3$.
Verificăm condițiile din definiția formei biliniare:

$$F(\alpha x + \beta y, z) = \alpha F(x,z) + \beta F(y,z)$$

Avem:

$$F(\alpha x + \beta y, z) = F((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3), (z_1, z_2, z_3)) =$$

$$= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + 2(\alpha x_2 + \beta y_2)z_1 + 2(\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 -$$

$$-(\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 - (\alpha x_3 + \beta y_3)z_2 - (\alpha x_2 + \beta y_2)z_3 + (\alpha x_3 + \beta y_3)z_3$$

$\square$

Am obținut:

$$F(\alpha x+\beta y, z) = \alpha(x_1z_1+2x_2z_1+2x_1z_2-x_2z_2-x_3z_2-x_2z_3+x_3z_3)+$$

$$+\beta(y_1z_1+2y_2z_1+2y_1z_2-y_2z_2-y_3z_2-y_2z_3+y_3z_3) = \alpha F(x,z)+\beta F(y,z).$$

Pentru a doua condiție:

$$F(x, \alpha y + \beta z) = \alpha F(x, y) + \beta F(x, z).$$

Avem $F(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_3y_3$.

$$F(x, \alpha y + \beta z) = F((x_1, x_2, x_3), (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2, \alpha y_3 + \beta z_3)) =$$

$$= x_1(\alpha y_1 + \beta z_1) + 2x_2(\alpha y_1 + \beta z_1) + 2x_1(\alpha y_2 + \beta z_2) -$$

$$-x_2(\alpha y_2 + \beta z_2) - x_3(\alpha y_2 + \beta z_2) - x_2(\alpha y_3 + \beta z_3) + x_3(\alpha y_3 + \beta z_3) =$$

$$= \alpha(x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_3y_3) +$$

$$+\beta(x_1z_1 + 2x_2z_1 + 2x_1z_2 - x_2z_2 - x_3z_2 - x_2z_3 + x_3z_3) = \alpha F(x,y) + \beta F(x,z).$$

Pentru matricea formei biliniare
$F(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_3y_3$ în baza canonică

$$B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$$

procedăm astfel:

$$f_{11} = F(e_1,e_1) = 1,\ \ f_{12} = F(e_1,e_2) = 2,\ \ f_{13} = F(e_1,e_3) = 0$$

$$f_{21} = F(e_2,e_1) = 2,\ \ f_{22} = F(e_2,e_2) = -1,\ \ f_{23} = F(e_2,e_3) = -1$$

$$f_{31} = F(e_3,e_1) = 0,\ \ f_{32} = F(e_3,e_2) = -1,\ \ f_{33} = F(e_3,e_3) = 1$$

Forme biliniare, forme pătratice

Obținem matricea formei biliniare F în baza canonică:

$$A = [F]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observăm că matricea A este simetrică, deci forma biliniară F este simetrică. Putem să considerăm forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$Q(x) = F(x,x) = x_1x_1 + 2x_2x_1 + 2x_1x_2 - x_2x_2 - x_3x_2 - x_2x_3 + x_3x_3,$$

deci

$$Q(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

Matricea A este matricea formei pătratice în baza canonică.

Forme biliniare, forme pătratice

Pentru matricea formei biliniare
$F(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_3y_3$ în baza

$$B' = \{v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, 2, 1)\}$$

procedăm astfel:

$$f'_{11} = F(v_1, v_1) = 2,\ \ f'_{12} = F(v_1, v_2) = 4,\ \ f'_{13} = F(v_1, v_3) = 7$$

$$f'_{21} = F(v_2, v_1) = 4,\ \ f'_{22} = F(v_2, v_2) = 2,\ \ f'_{23} = F(v_2, v_3) = 5$$

$$f'_{31} = F(v_3, v_1) = 7,\ \ f'_{32} = F(v_3, v_2) = 5,\ \ f'_{33} = F(v_3, v_3) = 13$$

Obținem matricea formei biliniare F în baza B':

$$A = [F]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplu

Să se aducă la forma canonică forma pătratică:

(a) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3$;

(b) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$.

Soluție:

Scriem matricea formei pătratice în baza canonică:

$$A = [Q]_B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2(7-\lambda) - 16\cdot 8 - 16\cdot 8 - 64(7-\lambda) - 16(1-\lambda) - 16(1-\lambda) =$$

$$= (7-\lambda)(1-\lambda-8)(1-\lambda+8) - 32(9-\lambda) = (9-\lambda)(\lambda^2-81),$$

Am obținut
$$P_A(\lambda) = -(9-\lambda)^2(\lambda+9),$$
deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 9$, cu multiplicitate algebrică $\mu_a(\lambda_1) = 2$ și $\lambda_2 = -9$ cu $\mu_a(\lambda_2) = 1$.
Pentru fiecare valoare proprie determinăm vectorii proprii:
Pentru $\lambda_1 = 9$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)x = 0$, adică
$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Obținem sistemul $4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$, cu soluția $x_1 = \alpha$, $x_2 = -2\alpha - 2\beta$, $x_3 = \beta$. Avem
$$S_{\lambda_1} = \{(\alpha, -2\alpha - 2\beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \mathcal{S}pan\{v_1 = (1, -2, 0), v_2 = (0, -2, 1)\},$$
iar o bază pentru S_{λ_1} este formată din $\{v_1, v_2\}$.

Pentru $\lambda_2 = -9$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)x = 0$, adică

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & -8 \\ -4 & 16 & -4 \\ -8 & -4 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obținem sistemul

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

cu soluția $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha/2$, $x_3 = \alpha$. Avem

$$S_{\lambda_2} = \{(\alpha, \alpha/2, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan\{v_3 = (2, 1, 2)\},$$

iar o bază pentru S_{λ_2} este formată din $\{v_3\}$.

Obținem baza formată din vectori proprii:

$$B = \{v_1 = (1, -2, 0), v_2 = (0, -2, 1), v_3 = (2, 1, 2)\}.$$

Știm că v_3 este ortogonal pe v_1 și pe v_2 deoarece sunt vectori proprii ce corespund valorilor proprii distincte, dar v_1 și v_2 nu sunt ortogonali. Deci formăm baza ortogonală $B' = \{w_1, w_2, v_3\}$, unde

$$w_1 = v_1 = (1, -2, 0)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (0, -2, 1) - \frac{4}{\sqrt{5}}(1, -2, 0) = (-\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{-2\sqrt{5}+8}{\sqrt{5}}, 1$$

Normăm vectorii și obținem baza ortonormată

$$B" = \{u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}\}.$$

În această bază, forma pătratică Q are forma canonică:

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \lambda_2 y_3^2 = 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2.$$

Soluție:

Scriem matricea formei pătratice în baza canonică:

$$A = [Q]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinăm valorile proprii:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda)-(2-\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = -(2-\lambda)^2\lambda,$$

$\square$

Am obținut

$$P_A(\lambda) = -(2-\lambda)^2\lambda,$$

deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 2$, cu multiplicitate algebrică $\mu_a(\lambda_1) = 2$ și $\lambda_2 = 0$ cu $\mu_a(\lambda_2) = 1$.
Pentru fiecare valoare proprie determinăm vectorii proprii:
Pentru $\lambda_1 = 2$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_3)x = 0$, adică

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obținem sistemul $-x_1 + x_3 = 0$, cu soluția $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \alpha$. Avem

$$S_{\lambda_1} = \{(\alpha, \beta, \alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{S}pan\{v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,0)\},$$

iar o bază pentru S_{λ_1} este formată din $\{v_1, v_2\}$.

Pentru $\lambda_2 = 0$ rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_3)x = 0$, adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obținem sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

cu soluția $x_1 = \alpha$, $x_2 = 0$, $x_3 = -\alpha$. Avem

$$S_{\lambda_2} = \{(\alpha, 0, -\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan\{v_3 = (1, 0, -1)\},$$

iar o bază pentru S_{λ_2} este formată din $\{v_3\}$.

Obținem baza formată din vectori proprii:

$$B = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 0, -1)\}.$$

Știm că v_3 este ortogonal pe v_1 și pe v_2 deoarece sunt vectori proprii ce corespund valorilor proprii distincte. Mai mult, observăm că v_1 și v_2 sunt ortogonali deoarece $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Normăm vectorii și obținem baza ortonormată

$$B' = \{u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}\}.$$

În această bază, forma pătratică Q are forma canonică:

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_1 y_2^2 + \lambda_2 y_3^2 = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 0y_3^2.$$

Exemplu

Să se aducă la forma canonică conica

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Soluție:

Fie $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Determinăm valorile proprii ale matricei A:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 =$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 4$ și $\lambda_2 = 9$. $\square$

Pentru $\lambda_1 = 4$ determinăm vectorii proprii, deci rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_2)\mathbf{x} = 0$, adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obținem sistemul $x + 2y = 0$, cu soluția $x = -2\alpha,\ y = \alpha$. Deci

$$S_{\lambda_1} = \{(-2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan\{v_1 = (-2, 1)\},$$

iar vectorul $v_1 = (-2, 1)$ este o bază pentru subspațiul S_{λ_1}.

Pentru $\lambda_2 = 9$ determinăm vectorii proprii, deci rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_2)\mathbf{x} = 0$, adică

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obținem sistemul $2x - y = 0$, cu soluția $x = \alpha,\ y = 2\alpha.$ Deci

$$S_{\lambda_2} = \{(\alpha, 2\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan\{v_2 = (1, 2)\},$$

iar vectorul $v_2 = (1, 2)$ este o bază pentru subspațiul S_{λ_2}.

Deoarece v_1 și v_2 sunt vectori proprii ce corespund valorilor proprii distincte, ei sunt ortogonali, deci baza $B = \{v_1, v_2\}$ este o bază ortogonală. Normăm vectorii din baza B:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

și obținem baza ortonormată $B' = \{u_1, u_2\}$.

Obținem matricea

$$R = [u_1 \ \ u_2] = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

cu $\det(R) = -1$. Inversăm ordinea valorilor proprii și a vectorilor din baza ortonormată:

$$\lambda_1^* = \lambda_2 = 9, \ \lambda_2^* = \lambda_1 = 4,$$

$$u_1^* = u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \ u_2^* = u_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

și matricea

$$R = [u_1^* \ \ u_2^*] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

cu $\det R = 1$

Conice

Facem schimbarea de coordonate:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

echivalentă cu

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1) \end{cases}.$$

De la reperul xOy, printr-o rotație caracterizată de matricea R, am obținut reperul x_1Oy_1, unde u_1^* este versor pentru axa Ox_1 și u_2^* este versor pentru axa Oy_1.

Observație

Deoarece matricea unei rotații de unghi θ este

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

obținem că unghiul de rotație este $\mathrm{tg}\theta = 2$.

Conice

Înlocuim

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1) \end{cases}.$$

în ecuația conicei și obținem:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

$$\lambda_1^* x_1^2 + \lambda_2^* y_1^2 - 32\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1) - 56\frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1) + 80 = 0$$

$$9x_1^2 + 4y_1^2 - 32\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1) - 56\frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1) + 80 = 0$$

Facem pătrate perfecte:

$$9x_1^2 - 144\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + 4y_1^2 + 8\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + 80 = 0$$

$$9\left(x_1^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}x_1\right) + 4\left(y_1^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right) + 80 = 0$$

$$9\left(x_1^2 - 2\frac{8}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{64}{5} - \frac{64}{5}\right) + 4\left(y_1^2 + 2\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + 80 = 0$$

$$9\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9 \cdot 64}{5} + 4\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5} + 80 = 0$$

$$9\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 36 = 0$$

Facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}} \\ y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

ce corespunde unei translații: obținem reperul $x_2O'y_2$, unde $O'\left(\frac{8}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ În reperul $x_2O'y_2$ conica devine:

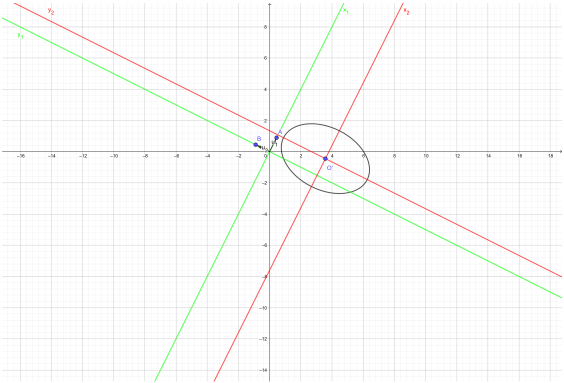
$$9x_2^2 + 4y_2^2 - 36 = 0,$$

adică

$$\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1,$$

reprezentând o elipsă de semiaxe $2, 3$.

Conice



Exemplu

Să se aducă la forma canonică conica

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$$

Soluție:

Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinăm valorile proprii ale matricei A:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 =$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda - 4)$$

deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 4$. $\square$

Pentru $\lambda_1 = -1$ determinăm vectorii proprii, deci rezolvăm sistemul $(A - \lambda_1 I_2)\mathbf{x} = 0$, adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obținem sistemul $x + 2y = 0$, cu soluția $x = -2\alpha,\ y = \alpha$. Deci

$$S_{\lambda_1} = \{(-2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan\{v_1 = (-2, 1)\},$$

iar vectorul $v_1 = (-2, 1)$ este o bază pentru subspațiul S_{λ_1}.

Pentru $\lambda_2 = 4$ determinăm vectorii proprii, deci rezolvăm sistemul $(A - \lambda_2 I_2)\mathbf{x} = 0$, adică

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obținem sistemul $2x - y = 0$, cu soluția $x = \alpha,\ y = 2\alpha$. Deci

$$S_{\lambda_2} = \{(\alpha, 2\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}pan\{v_2 = (1, 2)\},$$

iar vectorul $v_2 = (1, 2)$ este o bază pentru subspațiul S_{λ_2}.

Deoarece v_1 și v_2 sunt vectori proprii ce corespund valorilor proprii distincte, ei sunt ortogonali, deci baza $B = \{v_1, v_2\}$ este o bază ortogonală. Normăm vectorii din baza B:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

și obținem baza ortonormată $B' = \{u_1, u_2\}$.

Obținem matricea

$$R = [u_1 \;\; u_2] = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

cu $\det(R) = -1$. Inversăm ordinea valorilor proprii și a vectorilor din baza ortonormată:

$$\lambda_1^* = \lambda_2 = 4, \;\; \lambda_2^* = \lambda_1 = -1,$$

$$u_1^* = u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \;\; u_2^* = u_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

și matricea

$$R = [u_1^* \;\; u_2^*] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

cu $\det R = 1$

Facem schimbarea de coordonate:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

echivalentă cu

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1) \end{cases} .$$

De la reperul xOy, printr-o rotație caracterizată de matricea R, am obținut reperul x_1Oy_1, unde u_1^* este versor pentru axa Ox_1 și u_2^* este versor pentru axa Oy_1.

Observație

Deoarece matricea unei rotații de unghi θ este

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

obținem că unghiul de rotație este $\mathrm{tg}\theta = 2$.

Înlocuim

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1) \end{cases} .$$

în ecuația conicei și obținem:

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0.$$

$$\lambda_1^* x_1^2 + \lambda_2^* y_1^2 + 16\frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1) + 12\frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1) - 36 = 0$$

$$4x_1^2 - y_1^2 + \frac{40}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{20}{\sqrt{5}}y_1 - 36 = 0$$

Facem pătrate perfecte:

$$4x_1^2 - y_1^2 + \frac{40}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{20}{\sqrt{5}}y_1 - 36 = 0$$

$$4\left(x_1^2 + \frac{10}{\sqrt{5}}x_1\right) - \left(y_1^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}y_1\right) - 36 = 0$$

$$4\left(x_1^2 - 2\frac{5}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{25}{5} - \frac{25}{5}\right) - \left(y_1^2 + 2\frac{10}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{100}{5} - \frac{100}{5}\right) - 36 = 0$$

$$4(x_1 - \sqrt{5})^2 - 20 - (y_1 + 2\sqrt{5})^2 + 20 - 36 = 0$$

$$4(x_1 - \sqrt{5})^2 - (y_1 + 2\sqrt{5})^2 - 36 = 0$$

Facem schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \sqrt{5} \\ y_2 = y_1 + 2\sqrt{5} \end{cases}$$

ce corespunde unei translații: obținem reperul $x_2 O' y_2$, unde $O'(\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ În reperul $x_2 O' y_2$ conica devine:

$$4x_2^2 - y_2^2 - 36 = 0,$$

adică

$$\frac{x_2^2}{9} - \frac{y_2^2}{36} = 1,$$

reprezentând o hiperbolă de semiaxe $3, 6$.

Conice