Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

seminar 2

2021-2022

Determinanți. Rangul unei matrice. Sisteme de ecuații liniare

Determinanți:

Fie A o matrice pătratică de tip $n \times n$. Acestei matrice i se va asocia un număr pe care îl vom nota $\det(A)$ și îl vom numi determinantul său și care va avea un rol deosebit de important în toate celelalte capitole.

Determinanți:

Fie A o matrice pătratică de tip $n \times n$. Acestei matrice i se va asocia un număr pe care îl vom nota $\det(A)$ și îl vom numi determinantul său și care va avea un rol deosebit de important în toate celelalte capitole.

Cazul 2×2: Considerăm pentru început cazul particular în care $n = 2$, deci matricea A este de forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Determinanți:

Fie A o matrice pătratică de tip $n \times n$. Acestei matrice i se va asocia un număr pe care îl vom nota $\det(A)$ și îl vom numi determinantul său și care va avea un rol deosebit de important în toate celelalte capitole.

Cazul 2×2: Considerăm pentru început cazul particular în care $n = 2$, deci matricea A este de forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Numărul

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

se numește **determinantul** matricei A.

Exemplu

Determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ este

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-4) - 2 \cdot 3 = -2.$$

Determinanți:

Cazul 3×3: Considerăm acum cazul în care $n = 3$, deci matricea A este de forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Deoarece nu putem utiliza aceeași formula ca cea pentru cazul $n = 2$, vrem să putem calcula acest determinant reducând matricea la cazul anterior. Pentru aceasta, notăm cu A_{ij} matricea pătratică obținută din matricea A eliminând linia i și coloana j. Observăm că, în cazul nostru, determinanții acestor matrice sunt de ordinul 2, deci îi putem calcula.

Determinantul matricei A poate fi obținut astfel:

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}).$$

Vom spune că am dezvoltat determinantul după prima linie.

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-4)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-2) - 1\cdot 3 + (-4)\cdot(-1) = -3.$$

Determinanți:

În cazul matricei date sub formă generală,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dacă dezvoltăm după prima linie și efectuăm toate calculele, vom obține

Determinanți:

În cazul matricei date sub formă generală,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dacă dezvoltăm după prima linie și efectuăm toate calculele, vom obține

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Determinanți:

$$det(A)=\begin{array}{|ccc|}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{array}\!\!\begin{array}{l}\\ \\ =a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}.\end{array}$$
$$\begin{array}{ccc}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{array}$$

Determinanți:

$$\det(A)=\begin{array}{|ccc|} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}.$$
$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Această dezvoltare poate fi scrisă fără a fi memorată utilizând regula lui Sarrus: rescriem primele două linii ale determinantului și formăm diagonale de câte trei elemente, pornind din colțul dreapta sus, respectiv stânga sus. Înmulțim între ele elementele de pe fiecare astfel de diagonală. Diagonalele care pornesc din stânga se adună, iar cele care pornesc din dreapta se scad:

Determinanți:

Exemplu

Calculăm din nou determinantul din exemplul anterior:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 \cdot 3 -$$

$$-(-4) \cdot (-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -3.$$

Exemplu

Calculăm din nou determinantul din exemplul anterior:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 \cdot 3 -$$

$$-(-4) \cdot (-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -3.$$

Observație

Regula lui Sarrus nu poate fi aplicată pentru calculul determinanților de ordin diferit de 3.

Determinanți:

Cazul $n \times n$: Presupunem acum că A este o matrice pătratică de tip $n \times n$ cu $n \geq 4$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

și vrem să-i calculăm determinantul. Pentru aceasta, pentru fiecare $1 \leq i, j \leq n$ considerăm determinantul matricei obținute eliminând linia i și coloana j. Un astfel de determinant se va numi minor. Pentru elementul a_{ij}, minorul corespunzător îl notăm cu $\det(A_{ij})$. Notăm $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ și îl numim **complemetul algebric** al elementului a_{ij} în determinantul matricei A.

Determinanți:

Atunci determinantul matricei A este numărul

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{ik} = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \cdots + a_{in}\delta_{in}$$

dacă dezvoltăm după linia i sau

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\delta_{kj} = a_{1j}\delta_{1j} + a_{2j}\delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\delta_{nj},$$

dacă dezvoltăm după coloana j.

Exemplu

Să se calculeze determinantul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplu

Să se calculeze determinantul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluție.

Dezvoltăm după prima linie: $\square$

Determinanți:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Determinanți:

Propoziție

Fie A o matrice superior sau inferior triunghiulară. Atunci determinantul său este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

Determinanți:

Propoziție

Fie A o matrice superior sau inferior triunghiulară. Atunci determinantul său este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

Corolar

Dacă D este o matrice diagonală, $D = (d_1, \dots, d_n)$ atunci $\det(D) = d_1 d_2 \cdots d_n$.

Propoziție

Fie A o matrice superior sau inferior triunghiulară. Atunci determinantul său este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

Corolar

Dacă D este o matrice diagonală, $D = (d_1, \ldots, d_n)$ atunci $\det(D) = d_1 d_2 \cdots d_n$.

Propoziție

Fie A o matrice pătratică. Atunci $\det(A) = \det(A^T)$.

Determinanți:

Propoziție

Dacă o matrice pătratică are o linie sau o coloană cu toate elementele 0, atunci determinantul său este 0.

Determinanți:

Propoziție

Dacă o matrice pătratică are o linie sau o coloană cu toate elementele 0, atunci determinantul său este 0.

Propoziție

Dacă într-o matrice pătratică A înmulțim cu un număr real λ o linie sau o coloană, determinantul matricei obținute va fi egal cu $\lambda \det(A)$.

Determinanți:

Propoziție

Dacă o matrice pătratică are o linie sau o coloană cu toate elementele 0, atunci determinantul său este 0.

Propoziție

Dacă într-o matrice pătratică A înmulțim cu un număr real λ o linie sau o coloană, determinantul matricei obținute va fi egal cu $\lambda \det(A)$.

Propoziție

Dacă într-o matrice pătratică adunăm la elementele unei linii (respectiv coloane), elementele corespunzătoare unei alte linii (respectiv coloane) înmulțite cu un număr, atunci valoarea determinantului matricei astfel formate este aceeași cu cea a determinantului matricei inițiale.

Propoziție

Fie A o matrice pătratică care are două linii (sau două coloane) egale. Atunci $\det(A) = 0$.

Determinanți:

Propoziție

Fie A o matrice pătratică care are două linii (sau două coloane) egale. Atunci $\det(A) = 0$.

Propoziție

Fie A și B matrice pătratice astfel încât matricea B este obținută din matricea A prin schimbarea între ele a două linii (sau a două coloane). Atunci $\det(B) = -\det(A)$.

Determinanți:

Propoziție

Fie A o matrice pătratică care are două linii (sau două coloane) egale. Atunci $\det(A) = 0$.

Propoziție

Fie A și B matrice pătratice astfel încât matricea B este obținută din matricea A prin schimbarea între ele a două linii (sau a două coloane). Atunci $\det(B) = -\det(A)$.

Propoziție

Fie A și B matrice pătratice de ordin n. Atunci

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Determinanți:

Observație

Dacă A și B sunt matrice pătratice, atunci, în general,

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Determinanți:

Observație

Dacă A și B sunt matrice pătratice, atunci, în general,

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Într-adevăr, dacă presupunem de exemplu că $A = B = I_2$, atunci

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

deci $\det(A+B) = 4 \neq 2 = \det(A) + \det(B)$.

Determinanți:

Observație

Dacă A și B sunt matrice pătratice, atunci, în general,

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Într-adevăr, dacă presupunem de exemplu că $A = B = I_2$, atunci

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

deci $\det(A+B) = 4 \neq 2 = \det(A) + \det(B)$.

Corolar

O matrice pătratică este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$.

Determinanți:

Observație

Dacă A și B sunt matrice pătratice, atunci, în general,

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Într-adevăr, dacă presupunem de exemplu că $A = B = I_2$, atunci

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

deci $\det(A+B) = 4 \neq 2 = \det(A) + \det(B)$.

Corolar

O matrice pătratică este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$.

Corolar

Fie A o matrice inversabilă. Atunci $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Determinanți:

Având în vedere proprietățile anterioare și ținând cont de operațiile elementare efectuate pentru matrice, putem sintetiza astfel:

$$\det(A_{L_i \leftrightarrow L_j}) = -\det(A),$$

$$\det(A_{kL_i}) = k\det(A),$$

$$\det(A_{L_i + kL_j}) = \det(A).$$

Am folosit aici pentru matrice notații sugestive (de exemplu $A_{L_i \leftrightarrow L_j}$ este matricea obținută din A schimbând între ele liniile i și j).

Utilizând aceste proprietăți și transformările elementare ale matricelor, putem calcula mai ușor determinanți de ordin superior, formând zerouri pe o linie sau pe o coloană.

Exemplu

Să se calculeze determinantul matricei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluție.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\text{-1}} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinanți:

Soluție.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\text{-1}} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{c} L_2 + 2L_1 \\ L_3 + L_1 \\ = \end{array}$$

Determinanți:

Soluție.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\text{-1}} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 + 2L_1 \\ L_3 + L_1 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} \boxed{\text{-1}} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=$$

Soluție.

$$\begin{vmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2 + 2L_1 \\ L_3 + L_1}}{=} \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinanți:

Soluție.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\text{-1}} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3+L_1}}{=} \begin{vmatrix} \boxed{\text{-1}} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \begin{vmatrix} \boxed{\text{-1}} & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2+4L_1 \\ L_3+5L_1}}{=}$$

$\square$

Determinanți:

$$\overset{\substack{L_2+4L_1\\L_3+5L_1}}{=}\begin{vmatrix} \boxed{\text{-1}} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 11 & 8 \\ 0 & 10 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 7 & 11 & 8 \\ 10 & 14 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -116.$$

Rangul unei matrice:

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice și $s \leq \min(m, n)$ un număr natural nenul. Numim **minor de ordin** s un determinant aflat la intersecția a s linii și s coloane.

Rangul unei matrice:

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice și $s \leq \min(m, n)$ un număr natural nenul. Numim **minor de ordin** s un determinant aflat la intersecția a s linii și s coloane.

Exemplu

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice și $s \leq \min(m, n)$ un număr natural nenul. Numim **minor de ordin** s un determinant aflat la intersecția a s linii și s coloane.

Exemplu

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci determinanții $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ și $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ sunt exemple de minori de ordin 2,

Rangul unei matrice:

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice și $s \leq \min(m, n)$ un număr natural nenul. Numim **minor de ordin** s un determinant aflat la intersecția a s linii și s coloane.

Exemplu

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci determinanții $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ și $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ sunt exemple de minori de ordin 2, iar $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ și $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ sunt exemple de minori de ordin 3. Pentru matricea A nu putem construi minori de ordin 4.

Minorul format de primele s linii și primele s coloane se numește **minor caracteristic**.

Rangul unei matrice:

Minorul format de primele s linii și primele s coloane se numește **minor caracteristic**.

Vom spune că o matrice are **rangul** s dacă există un minor de ordin s nenul și toți ceilalți minori de ordin superior sunt nuli.

Rangul unei matrice:

Minorul format de primele s linii și primele s coloane se numește **minor caracteristic**.

Vom spune că o matrice are **rangul** s dacă există un minor de ordin s nenul și toți ceilalți minori de ordin superior sunt nuli.

Rangul unei matrice se determină, de obicei, folosind metoda bordării: se alege un colț al matricei care are element nenul și se adaugă o linie și o coloană. Dacă minorul obținut este nenul, se continuă cu adăugarea unei alte linii și coloane. Dacă este nul, se caută o altă linie și coloană.

Rangul unei matrice:

Exemplu

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rangul unei matrice:

Exemplu

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem că $d_1 = -1 \neq 0$, prin urmare $\mathrm{rang}(A) \geq 1$.

Rangul unei matrice:

Exemplu

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem că $d_1 = -1 \neq 0$, prin urmare $\mathrm{rang}(A) \geq 1$. Continuăm cu minori de ordinul al doilea: $d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, deci $\mathrm{rang}(A) \geq 2$.

Exemplu

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem că $d_1 = -1 \neq 0$, prin urmare $\mathrm{rang}(A) \geq 1$. Continuăm cu minori de ordinul al doilea: $d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, deci $\mathrm{rang}(A) \geq 2$. Pentru minorii de ordin 3, avem

$$d_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$$

deci $\mathrm{rang}(A) \geq 3$.

Rangul unei matrice:

Exemplu

Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem că $d_1 = -1 \neq 0$, prin urmare $\mathrm{rang}(A) \geq 1$. Continuăm cu minori de ordinul al doilea: $d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, deci $\mathrm{rang}(A) \geq 2$. Pentru minorii de ordin 3, avem

$$d_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$$

deci $\mathrm{rang}(A) \geq 3$. Deoarece nu putem construi minori de ordin 4, matricea are rangul 3.

Rangul unei matrice:

Metoda bordării poate fi aplicată ușor pentru matrice de dimensiuni relativ mici, însă nu este eficientă pentru matrice de dimensiuni mari. Folosind transformările elementare ale unei matrice, rangul poate fi calculat mult mai ușor.

Rangul unei matrice:

Metoda bordării poate fi aplicată ușor pentru matrice de dimensiuni relativ mici, însă nu este eficientă pentru matrice de dimensiuni mari. Folosind transformările elementare ale unei matrice, rangul poate fi calculat mult mai ușor.

Observație

Dacă $A \sim B$, atunci $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.

Rangul unei matrice:

Metoda bordării poate fi aplicată ușor pentru matrice de dimensiuni relativ mici, însă nu este eficientă pentru matrice de dimensiuni mari. Folosind transformările elementare ale unei matrice, rangul poate fi calculat mult mai ușor.

Observație

Dacă $A \sim B$, atunci $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.

Exemplu

Să se calculeze rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluție.

Folosim transformări elementare:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluție.

Folosim transformări elementare:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{3L_2 - 4L_1 \\ 3L_3 - 2L_1 \\ L_4 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 4 & -17 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 \end{pmatrix}$$

Rangul unei matrice:

Soluție.

Folosim transformări elementare:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{3L_2 - 4L_1 \\ 3L_3 - 2L_1 \\ L_4 - L_1}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-5}} & 4 & -17 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 4 & -11 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -17 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Rangul unei matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 4 & -11 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -17 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} L_3 - 7L_2 \\ L_4 - 5L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-23}} & 76 & 10 \\ 0 & 0 & -16 & 38 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 4 & -11 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -17 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} L_3 - 7L_2 \\ L_4 - 5L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-23}} & 76 & 10 \\ 0 & 0 & -16 & 38 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C_3 \leftrightarrow C_4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -11 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{76} & -23 & 10 \\ 0 & 0 & 38 & -16 & 5 \end{pmatrix}$$

Rangul unei matrice:

$$\underset{\sim}{2L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -11 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 76 & -23 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{pmatrix},$$

prin urmare, $\mathrm{rang}(A) = 4$.

Rangul unei matrice:

Exemplu

Să se calculeze rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluție.

Folosim transformări elementare:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_3 - L_1 \\ L_5 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluție.

Folosim transformări elementare:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} L_3 - L_1 \\ L_5 - L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\begin{matrix} L_3 - L_2 \\ L_4 - 2L_2 \\ L_5 - 2L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Rangul unei matrice:

$$\overset{L_5 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_4 \leftrightarrow L_5}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

prin urmare, $\mathrm{rang}(A) = 4$.

Definiție

O ecuație liniară în necunoscutele (sau variabilele) $x_1, \dots, x_n$ este o ecuație de forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n$ și b sunt constante reale. Constantele $a_1, \dots, a_n$ se numesc **coeficienții ecuației**, iar b se numește **termenul liber**.

Observație

Într-o ecuație liniară, necunoscutele nu pot să aibă exponenți mai mari sau egali cu 2 și nici nu pot exista produse de variabile.

Exemplu

Ecuațiile
$$2x + 3y - 4z = 5$$
și
$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7$$
sunt ecuații liniare în necunoscutele x, y, z, respectiv $x_1, \ldots, x_4$, iar ecuația
$$x^2 - y = 1$$
nu este o ecuație liniară în necunoscutele x și y deoarece conține termenul x^2.

Definiție

Se numește **soluție a ecuației liniare** în n variabile

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

un n-uplu $(s_1, \ldots, s_n)$ de numere reale care verifică ecuația, mai exact

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b.$$

Observație

O ecuație liniară în cel puțin două variabile nu are soluție unică.

Exemplu

Tripletele $(1, -1, 2)$ și $(0, 0, 7)$ sunt soluții ale ecuației liniare

$$2x - 3y + z = 7.$$

Mai mult, orice triplet de forma $(s, t, 7 - 2s + 3t)$ unde $s, t \in \mathbb{R}$ este soluție a ecuației date. Într-adevăr, se poate observa ușor că

$$2s - 3t + (7 - 2s + 3t) = 7.$$

Mulțimea soluțiilor ecuațiilor liniare în două și trei variabile cu coeficienți constanți poate fi interpretată geometric. Astfel, mulțimea soluțiilor unei ecuații în două variabile cu coeficienți reali este o dreaptă, iar mulțimea soluțiilor unei ecuații în trei variabile cu coeficienți reali este un plan.

Exemplu

Reprezentarea grafică a ecuației liniare $2x + y = 4$ este dreapta determinată de punctele $(2, 0)$ și $(0, 4)$.

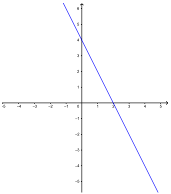


Figure: Mulțimea soluțiilor ecuației liniare

Exemplu

Reprezentarea grafică a ecuației liniare $2x - 3y + z = 7$ este planul determinat de punctele necoliniare $\left(\frac{7}{2}, 0, 0\right)$, $\left(0, -\frac{7}{3}, 0\right)$ și $(0, 0, 7)$.

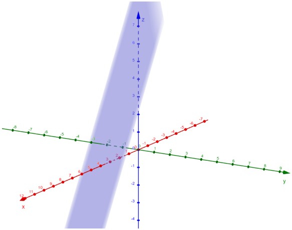


Figure: Mulțimea soluțiilor ecuației liniare

Sisteme de ecuații liniare:

Un sistem de m ecuații liniare în n necunoscute se scrie sub forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

unde $a_{11}, \dots, a_{mn}$ sunt constante și se numesc coeficienți, iar $b_1, \dots, b_m$ se numesc termeni liberi.

Sisteme de ecuații liniare:

Acestui sistem i se pot asocia următoarele matrice

- **matricea coeficienților**: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$;
- **matricea necunoscutelor**: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;
- **matricea (coloana) termenilor liberi**: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,

  $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$;

- **matricea extinsă**: $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$,

  $\bar{A} \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$.

Utilizând aceste notații, este ușor de observat că un sistem de ecuații liniare poate fi scris sub forma unei ecuații matriceale

$$A \cdot X = B.$$

Exemplu

Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - t = 7 \\ 2x - t = 10 \\ 3y - 2z = 1 \end{cases}.$$

Atunci:

- matricea coeficienților este
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R});$$
- matricea necunoscutelor este $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R});$

Sisteme de ecuații liniare:

- coloana termenilor liberi $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- matricea extinsă este
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & \vdots & 7 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R});$$

Sisteme de ecuații liniare:

Se numește soluție a unui sistem cu m ecuații și n necunoscute $x_1, \ldots, x_n$ un șir de n numere reale $s_1, \ldots, s_n$ care are proprietatea că este soluție a fiecărei ecuații, adică, înlocuind în sistem $x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$ obținem relații adevărate.
Din punctul de vedere al existenței și unicității soluției, sistemele pot fi:

- **sisteme incompatibile** – sunt sistemele care nu au soluție;
- **sisteme compatibile determinate** – sunt sistemele care au o unică soluție;
- **sisteme compatibile nedeterminate** – sunt sistemele care au o infinitate de soluții.

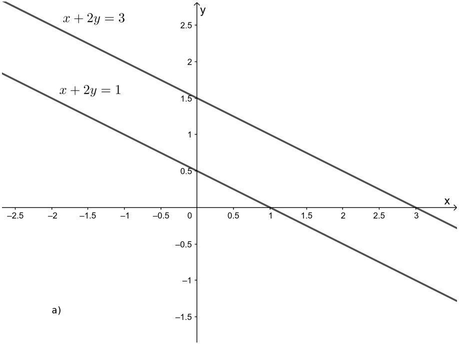
Sisteme de ecuații liniare:

Exemplu

Sistemul $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ nu are soluție deoarece egalitatea membrilor din partea stângă implică faptul că $3 = 1$ ceea ce, evident, este fals. Prin urmare, sistemul este incompatibil.

Exemplu

Sistemul $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=1 \end{cases}$ nu are soluție deoarece egalitatea membrilor din partea stângă implică faptul că $3=1$ ceea ce, evident, este fals. Prin urmare, sistemul este incompatibil.



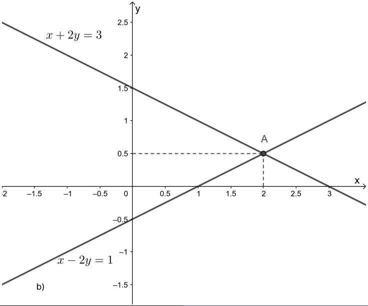
Sisteme de ecuații liniare:

Exemplu

Sistemul $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ are soluția unică $x = 2$, $y = \dfrac{1}{2}$. Pentru a obține această soluție, adunăm cele două ecuații ale sistemului și obținem ecuația $2x = 4$, care are soluția $x = 2$. Înlocuind această soluție în prima ecuație, obținem $y = \dfrac{1}{2}$. Prin urmare, sistemul este compatibil determinat.

Exemplu

Sistemul $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ are soluția unică $x = 2$, $y = \dfrac{1}{2}$. Pentru a obține această soluție, adunăm cele două ecuații ale sistemului și obținem ecuația $2x = 4$, care are soluția $x = 2$. Înlocuind această soluție în prima ecuație, obținem $y = \dfrac{1}{2}$. Prin urmare, sistemul este compatibil determinat.

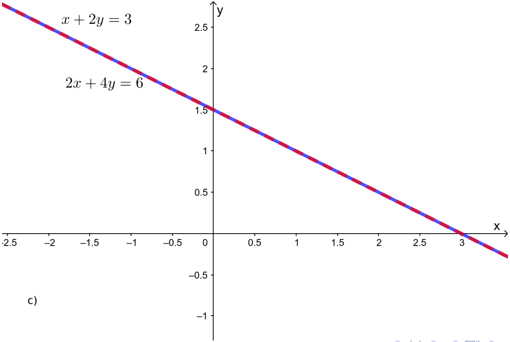


Exemplu

Sistemul $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ are o infinitate de soluții deoarece a doua ecuație este obținută prin înmulțirea cu 2 a primei ecuații. Deci sistemul se poate reduce la prima ecuație: $x + 2y = 3$. Prin urmare, sistemul este compatibil nedeterminat.

Exemplu

Sistemul $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$ are o infinitate de soluții deoarece a doua ecuație este obținută prin înmulțirea cu 2 a primei ecuații. Deci sistemul se poate reduce la prima ecuație: $x+2y=3$. Prin urmare, sistemul este compatibil nedeterminat.



Sisteme de ecuații liniare:

Un sistem de ecuații se numește **omogen** dacă toți termenii liberi ai sistemului sunt nuli. Prin urmare, un sistem omogen este de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Observație

Un sistem omogen este întotdeauna compatibil. Într-adevăr, se poate observa că $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ este soluție a acestui sistem. Această soluție o vom numi **soluția banală**.

Metoda de eliminare Gauss are la bază metoda eliminărilor succesive. Aplicând operațiile elementare între liniile sistemului, vom face ca matricea extinsă să fie echivalentă cu o matrice care se poate rezolva prin metoda substituțiilor succesive.

Metoda de lucru: Fie sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

și

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matricea extinsă corespunzătoare.

Presupunem că $a_{11} \neq 0$ (în caz contrar, schimbăm liniile matricei astfel încât această condiție să fie îndeplinită). Elementul $a_{11} \neq 0$ se numește **pivot**. Folosind transformări elementare, facem 0 toate elementele de pe coloana pivotului, situate sub pivot. Trecem apoi la a doua coloană și presupunem că elementul a_{22}, care va deveni acum pivot, este diferit de 0 (în caz contrar, căutăm, pe coloana pivotului, sub pivot, un element nenul și inversăm cele două linii). Folosind transformări elementare, facem 0 toate elementele de pe coloana pivotului, situate sub pivot. În acest fel, se obține o matrice în care, elementele situate sub "diagonala principală", sunt toate nule. Noul sistem se poate rescrie sub forma $A' \cdot X = B'$ unde A' este matricea formată din primele n coloane, iar B' este ultima coloană a matricei. Acest sistem poate fi rezolvat foarte ușor prin substituție inversă.

Exemplu

Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - t = 7 \\ 2x - t = 10 \\ 3y - 2z = 1 \end{cases}.$$

Matricea extinsă este $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Sisteme de ecuații liniare:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 - L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\overset{L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -3 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Sisteme de ecuații liniare:

Prin urmare

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } B' = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Se observă că rangul matricei A' este 3 deoarece minorul încadrat

$$A' = \left(\begin{array}{|ccc|c} \hline 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}\right)$$

are determinantul -6. Prin urmare sistemul este compatibil nedeterminat și avem trei necunoscute principale, x, y, z și o necunoscută secundară, t.

Renotând $t = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sistemul devine

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - \alpha = 7 \\ 3y - z = 3 \\ -z = -2 \end{cases} .$$

Obținem: $z = 2$,

$$3y = 3 + z, \text{ deci } y = \frac{5}{3}$$

și $2x = 7 - \alpha + 3y - z$, deci $x = 5 + \dfrac{\alpha}{2}$. Soluția acestui sistem este: $x = 5 + \dfrac{\alpha}{2}$, $y = \dfrac{5}{3}$, $z = 2$, $t = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplu

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

Sisteme de ecuații liniare:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \end{array}\right) \overset{\substack{2L_2-3L_1 \\ 2L_3+L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & -1 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & -10 \end{array}\right) \overset{7L_3-5L_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & -1 & 10 \\ 0 & 0 & \boxed{40} & -120 \end{array}\right).$$

Sisteme de ecuații liniare:

Rangul matricei A' este 3, deci sistemul este compatibil determinat. Sistemul inițial este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = 0 \\ & 7x_2 & -x_3 & = 10 \\ & & 40x_3 & = -120 \end{cases}$$

Avem $x_3 = -3$, $7x_2 = 10 + x_3$, deci $x_2 = 1$, și $2x_1 = x_2 - x_3$, deci $x_1 = 1$. Soluția sistemului este $x_1 = 1, \; x_2 = 1, \; x_3 = -3$.

Exemplu

Să se rezolve:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ -2x_1 + 10x_2 + 2x_3 = -24 \end{cases}$$

Obținem

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -2 & 10 & 2 & -24 \end{array} \right) \overset{\substack{L_2-3L_1 \\ L_3+2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{8} & 4 & -13 \\ 0 & 8 & 4 & -14 \end{array} \right) \sim$$

$$\overset{L_3-L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{8} & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Sisteme de ecuații liniare:

Obținem

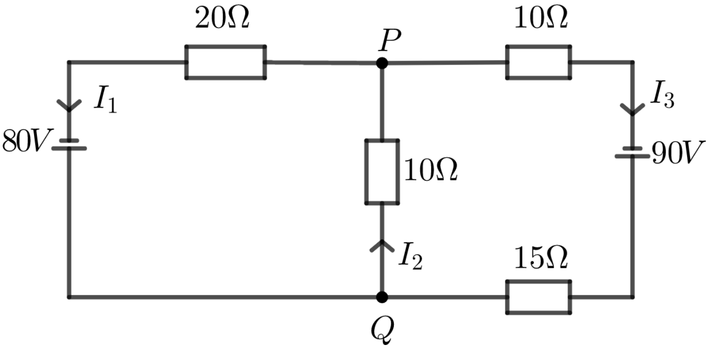
$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -2 & 10 & 2 & -24 \end{array} \right) \overset{\substack{L_2-3L_1 \\ L_3+2L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{8} & 4 & -13 \\ 0 & 8 & 4 & -14 \end{array} \right) \sim$$

$$\overset{L_3-L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{8} & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Sistemul este incompatibil.

Exemplu

Considerăm circuitul electric din următoarea figură.



Determinaţi intensităţile I_1, I_2 şi I_3.

Pentru a determina cele trei intensități, aplicăm legile lui Kirchoff:
Prima lege a lui Kirchoff: În orice nod, suma curenților care intră în nod este egală cu suma curenților care ies din nod.
În cazul nostru avem:

nodul P: $-I_1 + I_2 - I_3 = 0$

nodul Q: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$

A doua lege a lui Kirchoff: În orice buclă închisă, suma tuturor produselor dintre rezistentă și intensitatea corespunzătoare este egală cu tensiunea electromotoare U.
Pentru circuitul nostru, obținem:

- pentru bucla din stânga: $20I_1 + 10I_2 = 80$
- pentru bucla din dreapta: $10I_2 + 10I_3 + 15I_3 = 90$.

Sisteme de ecuații liniare:

Pentru a determina intensitățile, trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 20I_1 + 10I_2 = 80 \\ 10I_2 + 25I_3 = 90. \end{cases}$$

Aplicăm metoda Gauss, pornind de la matricea extinsă a sistemului:

Sisteme de ecuații liniare:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\text{-1}} & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \end{array}\right) \overset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3+20L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -\boxed{\text{-1}} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\sim}$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\text{-1}} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{10} & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3-3L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\text{-1}} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{10} & 25 & 90 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-95}} & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 10I_2 + 25I_3 = 90 \\ -95I_3 = -190 \end{cases}$$

cu soluția $I_3 = 2A$, $I_2 = 4A$ și $I_1 = 2A$.

Exemplu

Să se echilibreze (balanseze) ecuaţia reacţiei chimice:

$$Ba_3N_2 + H_2O \to Ba(OH)_2 + NH_3.$$

Soluție.

Pentru a echilibra ecuația reacției chimice, trebuie să determinăm x, y, z, t astfel încât

$$xBa_3N_2 + yH_2O \to zBa(OH)_2 + tNH_3.$$

Observăm că în partea stângă a ecuației avem trei atomi de bariu (Ba), iar în partea dreaptă avem un singur atom de bariu, prin urmare o primă ecuație este

$$3x = z.$$

$$\begin{cases} (Ba): \ 3x = z \\ (N): 2x = t \\ (H): 2y = 2z + 3t \\ (O): y = 2z \end{cases},$$

pe care îl putem rescrie

$$\begin{cases} 3x - z = 0 \\ 2x - t = 0 \\ 2y - 2z - 3t = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Fiind un sistem omogen, acesta va fi întotdeauna compatibil.
Aplicăm metoda Gauss pornind de la matricea extinsă a sistemului:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{3L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_2 \leftrightarrow L_4}$$

$$\underset{\sim}{L_2 \leftrightarrow L_4} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{L_4 - L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sistemul devine

$$\begin{cases} 3x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 2z - 3t = 0 \end{cases}$$

cu soluția $x = \dfrac{t}{2}$, $y = 3t$, $z = \dfrac{3t}{2}$ și $t = \alpha$ unde $\alpha \in \mathbb{R}$. De exemplu, pentru $\alpha = 2$ reacția chimică devine

$$Ba_3N_2 + 6H_2O \to 3Ba(OH)_2 + 2NH_3.$$

Temă:

Exercițiu

Să se calculeze rangul pentru:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Temă:

Exercițiu

Să se rezolve sistemele:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \alpha y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

Exercițiu

Să se echilibreze (balanseze) ecuaţia reacţiei chimice:

$$C_3H_8 + O_2 \to CO_2 + H_2O.$$

Temă:

Exercițiu

Să se calculeze determinanții următoarelor matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$