(C1)

Bibliografie

(1) H. Anton, Calculus with Analytic Geometry. Maple Problem's Manual, Wiley, 1992.

(2) M. Berger, Geometrie, 1-5, Cedric, Fernard, 2001.

(3) M. Craioveanu, I. Albu, Geometrie afină și euclidiană, Ed. Facla, Timișoara, 1982.

(4) J. Erdaman, Ex and problems in Linear Alg, Portland State Univ, 2014

(5) L. Ornea, A. Turtoi, O introducere în geometrie, Ed. Theta, București, 2011.

(6) E. Sernesi, Linear Algebra. A geometric approach, CRC. Press, N.Y, 1993.

(7) N. Soare, Curs de geometrie, Tip U. Buc, 1986

(8) K. Teleman, Logică și geometrie, Fac. Mat. U. B, 1989.

(9) I. Teodorescu, Geometrie analitică și elem. de alg. liniară, Ed. Did. Ped, Buc, 1967

(10) C. Udriște, Pb. de alg, geom și ec. dif, Ed. Did. Ped, 1981.

Geometrie și algebră liniară

Cuprins

* (1) Determinanți. Rang. Sisteme liniare.

(2) Spații vectoriale

(3) Spații vectoriale euclidiene

(4) Geometrie analitică euclidiană

(5) Conice și cuadrice

Examen – lucrare scrisă

• punctaj în timpul semestrului: 1,5p (se adaugă la nota peste 5)
- 0,5 teme curs + seminar (min $5t_c + 5t_s$)
- 0,5 lucrări seminar
- 0,5 activ. sem + curs; prez.

Curs 1 - GAL

Teorema Hamilton-Cayley

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(\mathbb{K},+,\cdot)$ corp com; $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

$$P_A(X) = \det(A - XI_n) = (-1)^n\left[X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n\right]$$

(polinomul caracteristic asociat lui A)

σ_k = suma minorilor diagonali de ord k, $k=\overline{1,n}$

$\sigma_1 = Tr(A)$

$$\sigma_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$$

$$\sigma_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$\vdots$

$\sigma_n = \det A$.

Teorema Hamilton-Cayley

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ își anulează polinomul caracteristic

$$P_A(A) = O_n \iff A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \ldots + (-1)^n I_n \sigma_n = O_n$$

Dem.

Fie $M = A - XI_n$

$$P_A(X) = \det M = (-1)^n\left[X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n\right].$$

$$M \cdot M^* = \det(M) I_n = \underline{(-1)^n\left[X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n\right] I_n}.$$

$$M^* = X^{n-1} B_{n-1} + X^{n-2} B_{n-2} + \ldots + B_0.$$

$$(A - XI_n) M^* = (A - XI_n)(X^{n-1} B_{n-1} + \ldots + X B_1 + B_0) =$$

$$= (-1)^n\left[X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n\right] I_n;$$

Identificăm coeficienții:

$$\left\{\begin{array}{lcl} AB_0 & = & (-1)^{2n}\sigma_n I_n \\ -B_0 + AB_1 & = & (-1)^{2n-1}\sigma_{n-1} I_n \\ -B_1 + AB_2 & = & (-1)^{2n-2}\sigma_{n-2} I_n \\ \vdots & & \\ -B_{n-2} + AB_{n-1} & = & (-1)^{2n-(n-1)}\sigma_{n-(n-1)} I_n = (-1)^{n+1}\sigma_1 I_n \\ -B_{n-1} & = & (-1)^n I_n \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \cdot \\ A \\ A^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ A^n \end{array}\right.$$

$\oplus$

$$O_n = (-1)^n\left[A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n I_n\right]$$

$$P_A(A) = O_n.$$

Aplicații

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

SOL $A^3 - \sigma_1 A^2 + \sigma_2 A - \sigma_3 I_3 = O_3$

$\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1+2+2=5$, $\sigma_3 = 2$.

$A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = O_3 \mid \cdot A^{-1} \Rightarrow A^2 - 4A + 5I_3 - 2A^{-1} = O_3$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 4A + 5I_3\right)$

② $A \in SO(3)$ (i.e. $A \cdot A^T = I_3$, $\det A = 1$)

Dacă $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ este răd. a pol. caract. asoc. lui A

at $a, b, c \in \mathbb{R}$ ai $A^{100} = aA^2 + bA + cI_3$.

SOL

Fie $P = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 \in \mathbb{R}[X]$, $P(\varepsilon) = 0 \Rightarrow P(\bar{\varepsilon}) = 0$.

$\boxed{\begin{array}{l} A^{100} = A = aA^2 + bA + cI_3 \\ a = c = 0,\ b = 1 \end{array}}$

$\sigma_3 = \det A = 1$.

$x_1 x_2 x_3 = \sigma_3 = 1 \Rightarrow \underbrace{\varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}}_{|\varepsilon|^2}\cdot x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = 1$ $\quad A^3 - I_3 = O_3$

P are răd $x_1 = \varepsilon$, $x_2 = \bar{\varepsilon}$, $x_3 = 1 \Rightarrow P = X^3 - 1 \Rightarrow P(A) = O_3$

Rang. Sisteme liniare
Teorema Kronecker-Capelli. Teorema Rouche

<u>Def</u>. Fie $\underset{O_{m,n}}{\underset{\neq}{A}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Spunem că rang$A = k$ $(1 \le k \le \min\{m,n\}) \Leftrightarrow \exists$ un minor de ordinul k nenul și toți minorii de ordin mai mare sunt nuli

(Convenție : $rg\, O_{m,n} = 0$)

<u>OBS</u> $\exists\, C_m^{k+1} \cdot C_n^{k+1}$ minori de ordin $k+1$.

<u>Teoremă</u>

rang $A = k \Leftrightarrow \exists$ un minor Δ_k de ordin k nenul și toți minorii de ordin $k+1$ (dacă $\exists$), care îl conțin (pe Δ_k) sunt nuli.

<u>OBS</u>

$\exists\, (m-k)(n-k)$ minori de ordin $k+1$, care conțin Δ_k.

<u>OBS</u>

$rg A = k \Leftrightarrow k =$ nr. maxim de linii (resp. coloane) care <u>nu</u> sunt combinații liniare de celelalte linii (resp. coloane).

Scanned with CamScanner

Algoritm

Fie $\Delta_k \neq 0$.

Fie toți minorii Δ_{k+1} de ordin $k+1$, care conțin Δ_k.

a) Dc. toți minorii Δ_{k+1} sunt nuli, at. $rg A = k$

b) Dc $\exists$ un minor $\Delta_{k+1} \neq 0$ și repetă raționam.

și după un nr finit de pași $\Rightarrow rg A$.

Prop

a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \Rightarrow rg(AB) \leq \min\{rg A, rg B\}$.

b) Dacă $A \in GL(n, \mathbb{K})$, at. $rg(AB) = rg B = rg(BA)$, $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

OBS. • Operațiile care păstrează rangul s.n. <u>transformări elementare</u>:

- înm. unei linii (resp coloane) cu o ct.
  ($l_i' = \alpha l_i$; $c_i' = \alpha c_i$)
- schimbarea l_i cu l_j (resp c_i cu c_j)
- $l_i' = l_i + \alpha l_j$

Exemple

Ex1: $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ $rg A = ?$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$rg A = 3$.

EX2 $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ a \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} & -1 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$

$a, b = ?$ aî $rg A = 2$.

SOL

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-a-2$$

$$\Delta_1 = -(a+3) = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b-4$$

$$\Delta_2 = b-4 = 0 \Rightarrow b = 4.$$

EX3 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ $rg A = ?$ Discuție $(a \in \mathbb{R})$

SOL

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)(a-1)^2$$

1). $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \Leftrightarrow rg A = 3$

2) $\Delta = 0$

a) $a = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg A = 2$

b) $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $rg A = 1$.

Ex4 Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care verifică $A^3 - A - I_n = O_n$

a) $rg A = ?$

b) $rg(A + I_n) = ?$

SOL

a) $A^3 - A - I_n = O_n \Rightarrow A(A^2 - I_n) = I_n \mid \det$

$\det A \cdot \det(A^2 - I_n) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow rg A = n$

b) $A^3 = A + I_n \mid \det \Rightarrow (\underbrace{\det A}_{\neq 0})^3 = \det(A + I_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow rg(A + I_n) = n$

Sisteme liniare

(Sisteme de ecuații algebrice de ordinul 1 cu mai multe necunoscute)

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

Fie sistemul liniar ⊛ $AX = B$

$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \forall i = \overline{1,m}$

(m ecuații cu n necunoscute)

<u>Interpretare geometrică</u>: $\cap$ a m hiperplane în $\mathbb{R}^n$.

Not $S(A) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\} \subset \mathbb{R}^n$

mulțimea soluțiilor sistemului ⊛

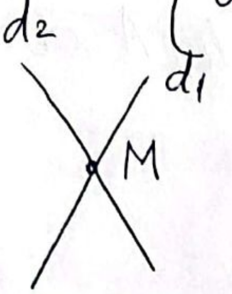
1) Dacă $S(A) \neq \emptyset$ → a) SCD ($\exists!$ soluție)

↘ b) SCN ($\exists$ o inf. sol) / $\exists$ mai multe soluții

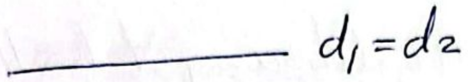
2) Dacă $S(A) = \emptyset$ SI ($\nexists$ sol)

Cazuri particulare

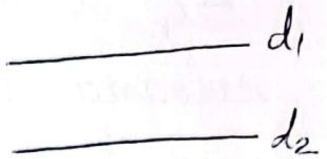
1) $n=2$ $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$ $\cap$ a 2 drepte în plan.



SCD

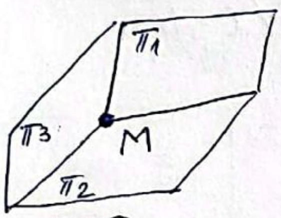


SCN

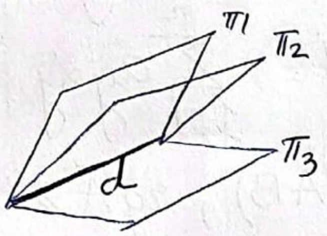


SI $d_1 \parallel d_2$

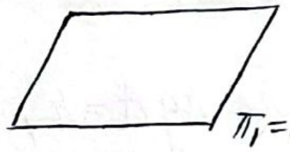
2) $n=3$ $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$ $\cap$ a 3 plane în spațiu (în $\mathbb{R}^3$)



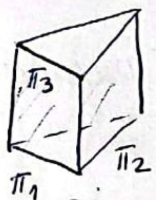
SCD.



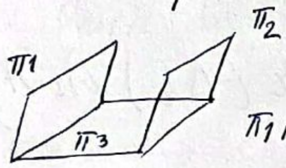
SC simplu N


$\pi_1=\pi_2=\pi_3$

SC dublu N.

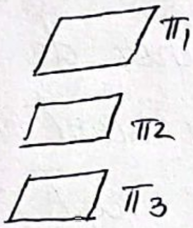


SI (fețele laterale)

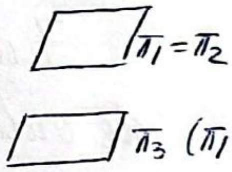


$\pi_1 \parallel \pi_2$

SI



$\pi_1 \parallel \pi_2 \parallel \pi_3$ SI



$(\pi_1 \parallel \pi_3)$

SI

Cazul general

(*) $AX=B$, $\bar{A}=(A \,\vdots\, B)$ matrice extinsă

Dacă $n=m$ și $\Delta=\det A\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}$$

$AX=B \mid A^{-1} \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow X=\frac{1}{\det A}A^*B$

$\Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta x_n}{\Delta} \right)$ soluție unică

(sistem de tip Cramer)

Δ_{x_k} se obțin înlocuind coloana c_k din A cu coloana termenilor liberi, $\forall k = \overline{1,n}$

Teorema Kronecker-Capelli

Sistemul (*) $AX=B$ este compatibil $\Leftrightarrow rg A = rg \bar{A}$

Dem

„$\Rightarrow$" Ip: Sist. este compat. Dem $rg A = rg \bar{A}$

$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S(A)$ i.e. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i, \forall i = \overline{1,m}$

Fie $rg A = r$, $\bar{A} = (AB)$, $rg \bar{A} \geq rg A$

1) Dc $m = r \Rightarrow rg A = rg \bar{A} = r$

2) Dc. $m > r$.

$\exists$ un minor de ord r (Δ_r) în A și toți minorii de ordin $r+1$ sunt nuli.

Dem că $rg \bar{A} = r$

Fie $\bar{\Delta}_{r+1}$ minor de ordin $r+1$ din $\bar{A}$, care conține Δ_r.

- Dc. $\bar{\Delta}_{r+1}$ nu conține col. term. liberi, at $\bar{\Delta}_{r+1} = 0$
- $\bar{\Delta}_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_r} & b_{i_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \dots & a_{i_r j_r} & b_{i_r} \\ a_{i_{r+1} j_1} & \dots & a_{i_{r+1} j_r} & b_{i_{r+1}} \end{vmatrix}$ (minor caracteristic)

$b_{i_1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j}\alpha_j$

$b_{i_r} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_r j}\alpha_j$

$b_{i_{r+1}} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_{r+1} j}\alpha_j$

$=$ sumă de n minori de ordinul $(r+1)$ din A
$= 0$

Toți minorii caract. sunt nuli $\Rightarrow rg\bar{A} = r$.

"$\Leftarrow$" Ip: $rg A = rg\bar{A} = r$. Dem că $\circledast$ este SC.

1) m (nr de ec) $> r$

$\exists \Delta_r =$ minor de ord r din A și toți minorii de ordin $(r+1)$ din $\bar{A}$ sunt nuli?

Fără a restrânge generalitatea, considerăm

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} \dots & a_{1r} \\ a_{r1} \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\exists (m-r) \text{ minori caract})$$

$$\bar{\Delta}_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{r+1\,1} \dots & a_{r+1\,r} & b_{r+1} \end{vmatrix} \rightarrow l_{r+1} \text{ (sau } l_{r+2} \dots l_m)$$

$\bar{\Delta}_{r+1}$ (toți) sunt nuli $\rightarrow$ col. term. liberi este o comb. liniară a primelor r coloane.

$$b_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \alpha_j, \quad \forall i = \overline{1,r}$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-r) \text{ ori}}) \in S(A)$$

2) $m = r$

a) $n = r$ Sistem Cramer $\alpha_i = \frac{\Delta_{\alpha_i}}{\Delta}$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in S(A)$

b) $n > r$ $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0) \in S(A)$.

Teorema Rouche

(*) este SC $\Leftrightarrow$ toți minorii caracteristici (dc $\exists$) sînt nuli.

Algoritm

$rg A = r$

- Dc $\exists$ cel puțin un $\Delta_{car} \neq 0$, at $rg \bar{A} = r+1$ și
- Dc. $rg \bar{A} = r$.

$\exists \Delta_{principal} \neq 0$ (de ord r) (format din $l_1, .., l_r$; $c_1, .., c_r$)

$\Rightarrow ec(r+1), .., ec(m)$ = comb. liniare are $ec_1, .., ec_r$.

Consideram primele r ec (**)

$\forall$ sol a sist (**) e sol a sist (*) și reciproc.

$x_1, .., x_r$ = var. principale.

$x_{r+1} = \lambda_1, .., x_n = \lambda_p$; ($p = n - r$) var. secundare.

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}\lambda_1 - \ldots - a_{1n}\lambda_p + b_1 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}\lambda_1 - \ldots - a_{rn}\lambda_p + b_r \end{cases}$$

$(\underbrace{x_1, .., x_r}, \lambda_1, .., \lambda_p) \in S(A)$

se exprimă în funcție de $\lambda_1, .., \lambda_p$.

Sisteme liniare și omogene (SLO)

$AX = O_{m,1}$.

Un SLO este totdeauna compatibil

a) Dacă $m = n$

- $\Delta \neq 0 \Rightarrow SCD \Rightarrow \exists! (0, .., 0)$

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}, \quad \Delta x_i = 0, \forall i = \overline{1,n}$$

- $\Delta = 0 \Rightarrow SCN$

($\exists$ și sol nenule ; toți Δ_{car} sunt nuli)

b) Dacă $m > n$

- $rg A = r = n$ SCD
- $rg A = r \neq n$ SCN

c) Dacă $m < n$ SCN

Exemple

Ex1 ΔABC, a, b, c lg laturilor

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

a) $\forall \Delta ABC \rightarrow SCD$

b) sol (x_0, y_0, z_0) verifică $x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$

c) Pt $a = 3, b = 4, c = 5$ să se rez

SOL

a) $$A = \left(\begin{array}{ccc|c} b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{array}\right)$$

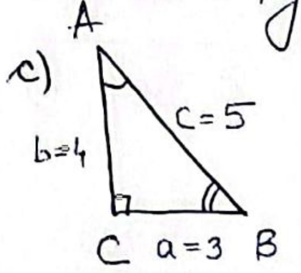
$\det A = b(-ac) - a(+bc) = -2bac \neq 0 \Rightarrow SCD$

b) $$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix} = c(-ac) - a(b^2 - a^2)$$
$$= -a(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \underset{A \in (0, \pi)}{\cos A} \in (-1, 1)$$

Sol este $(x, y, z) = (\cos A, \cos B, \cos C)$

c)



$\cos A = \frac{4}{5}$; $\cos B = \frac{3}{5}$; $\cos C = 0$

Sol este $(x, y, z) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$

Ex.
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right)$$

Să se rezolve. Discuție

SOL

$\det A = (a+2)(a-1)^2$

I. $\Delta \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ SCD $(rg A = rg \bar{A} = 3)$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 0$; $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = \Delta$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 0$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 0$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 1$

$(x, y, z) = (0, 0, 1)$

II $\Delta = 0$

a) $a = -2 \Rightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg A = 2.$

$\Delta_c = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \Delta = 0 \Rightarrow rg \bar{A} = 2$

$x, y =$ var. principale, $z = \alpha$ var secundară SC simplu N

$$\begin{cases} -2x + y = 1 - \alpha \quad \cdot 2 \\ x - 2y = 1 - \alpha \end{cases}$$
$$-3x \quad / = 3 - 3\alpha$$

$x = \alpha - 1$

$y = 1 - \alpha + 2\alpha - 2 = \alpha - 1$

$(x, y, z) \in \{(\alpha - 1, \alpha - 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

b) $a=1$ $\quad A=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$

$\Delta_{c_1}=\Delta_{c_2}=\begin{vmatrix}\boxed{1} & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow rg A = rg \bar{A} = 1$

$x=$ var principală, $y=\alpha$, $z=\beta$ var sec.

SC dublu N.

$x=1-\alpha-\beta$

$(x,y,z)\in\{(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta),\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

<u>Ex3</u> $\begin{cases} ax+y+z=0\\ x+ay+z=0\\ x+y+az=0\end{cases}$ a) Să se rez.

b) Pt $a=-2$ să se afle sol (x,y,z) care verif $x^2+y^2+z^2=12$

<u>SOL</u>

$\Delta=\det A=(a+2)(a-1)^2$ $\quad A=\left(\begin{array}{ccc|c}a & 1 & 1 & 0\\ 1 & a & 1 & 0\\ 1 & 1 & a & 0\end{array}\right)$

I $\Delta\neq 0 \Rightarrow \exists!(x,y,z)=(0,0,0)$ SCD.

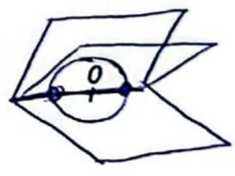
II $\Delta=0$.

a) $a=1$ $\quad A=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$

$rg A=1$, $\Delta_{c_1}=\Delta_{c_2}=0 \Rightarrow rg\bar{A}=1$

$x=-\alpha-\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ SC d N $\downarrow$ dublu

$(-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$



b) $a=-2$ $\quad A=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)$

$rg A = rg\bar{A}=2$. SC s N

$\begin{cases}-2x+y=-\alpha\\ x-2y=-\alpha\end{cases}\Big|\,2$

$-3x \quad = -3\alpha$

$x=\alpha$

$y=\alpha$

$z=\alpha$.

$x^2+y^2+z^2=12$

$3\alpha^2=12$

$\alpha=\pm\sqrt{\frac{12}{3}}=\pm 2$

Soluțiile sunt: $2(1,1,1)$; $-2(1,1,1)$.

Scanned with CamScanner