Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

seminar 1

2021-2022

Transformări elementare ale matricilor. Inversa unei matrice

Matrice: definiție, proprietăți:

O matrice este o mulțime de numere dintr-un corp $\mathbb{k}$ (cel mai des vom utiliza $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) așezate pe linii și coloane sub forma unui tablou dreptunghiular.

Matrice: definiție, proprietăți:

O matrice este o mulțime de numere dintr-un corp $\Bbbk$ (cel mai des vom utiliza $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) așezate pe linii și coloane sub forma unui tablou dreptunghiular.
Aceste numere se numesc **elementele matricei**

Matrice: definiție, proprietăți:

O matrice este o mulțime de numere dintr-un corp $\Bbbk$ (cel mai des vom utiliza $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) așezate pe linii și coloane sub forma unui tablou dreptunghiular.
Aceste numere se numesc **elementele matricei**
Date două numere naturale nenule $m, n \in \mathbb{N}$, **o matrice de tip** $m \times n$ este o mulțime de numere așezate sub forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrice: definiție, proprietăți:

Putem scrie matricea și în forma restrânsă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sau, dacă forma matricei se subînțelege, $A = (a_{ij})$.

Matrice: definiție, proprietăți:

Putem scrie matricea și în forma restrânsă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ sau, dacă forma matricei se subînțelege, $A = (a_{ij})$.

Observație

O matrice de tip $m \times n$ poate fi definită și ca o funcție

$$f : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots n\} \to \mathbb{R},$$

unde $f(i, j) = a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Exemplu

Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 10 & -8 & 4 \\ 0 & 25 & -14 & 7 \end{pmatrix}$ este o matrice de tipul 3×4 cu elemente numere reale. Elementul -8 se află pe linia a doua și coloana a treia, deci $a_{23} = -8$.

Exemplu

Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 10 & -8 & 4 \\ 0 & 25 & -14 & 7 \end{pmatrix}$ este o matrice de tipul 3×4 cu elemente numere reale. Elementul -8 se află pe linia a doua și coloana a treia, deci $a_{23} = -8$.

Vom nota cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{k})$ mulțimea matricelor de tip $m \times n$ cu elemente din $\mathbb{k}$. Dacă $m = n$, atunci vom nota simplu $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

Clasificare:

Clasificare după formă:

- Dacă $m = n$ matricea se numește **pătratică**. Forma generală este
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
Elementele a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_{nn} formează **diagonala principală**.

Clasificare:

Clasificare după formă:

- Dacă $m = n$ matricea se numește **pătratică**. Forma generală este

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

  Elementele a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} formează **diagonala principală**.
- Dacă $m \neq n$ matricea se numește **dreptunghiulară**.

Clasificare:

- Dacă $m = 1$ matricea are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

și se numește **matrice linie**.

Clasificare:

- Dacă $m = 1$ matricea are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

și se numește **matrice linie**.

- Dacă $n = 1$ matricea se numește **matrice coloană** și are forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Clasificare:

Observație

Vom nota coloanele matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

prin

Observație

Vom nota coloanele matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

prin

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \ldots, \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ \ldots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

Clasificare:

Observație

Vom nota coloanele matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

prin

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \ldots, \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ \ldots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

iar matricea A se poate scrie sub forma $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$.

Clasificare:

În funcție de proprietățile elementelor:

- **Matricea unitate** de ordin n – este notată cu I_n și este matricea

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Clasificare:

În funcție de proprietățile elementelor:

- **Matricea unitate** de ordin n – este notată cu I_n și este matricea
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Matricea nulă** – este notată cu $\mathbf{O}_{m,n}$ și este matricea de tip $m \times n$ cu toate elementele 0:
$$\mathbf{O}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

:

Clasificare:

- **Matricea diagonală** – este o matrice pătratică care are toate elementele ce nu se află pe diagonala principală 0:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

Notăm cu

$$D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

precizând doar elementele de pe diagonala principală, în ordinea în care acestea apar.

Clasificare:

- **Matricea superior triunghiulară** – este o matrice pătratică ce are toate elementele situate sub diagonala principală 0:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Clasificare:

- **Matricea superior triunghiulară** – este o matrice pătratică ce are toate elementele situate sub diagonala principală 0:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- **Matricea inferior triunghiulară** – este o matrice pătratică ce are toate elementele situate deasupra diagonalei principale 0:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Clasificare:

- **Matricea simetrică** – este matricea pătratică $A = (a_{ij})$ cu proprietatea că $a_{ij} = a_{ji}$ pentru orice i și j (elementele situate simetric față de diagonala principală sunt egale):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Clasificare:

- **Matricea antisimetrică** – este matricea pătratică $A = (a_{ij})$ cu proprietatea că $a_{ji} = -a_{ij}$, pentru orice i și j. Observăm că această condiție impune ca toate elementele de pe diagonala principală să fie 0:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Clasificare:

Două matrice $A = (a_{ij})$ și $B = (b_{ij})$ sunt **egale** dacă au aceeași formă (ambele sunt de tip $m \times n$) și $a_{ij} = b_{ij}$ pentru orice $1 \leq i \leq m$ și $1 \leq j \leq n$.

Operații cu matrice:

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ două matrice, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. **Suma matricelor** A **și** B, $A + B$, este tot o matrice de tip $m \times n$ definită prin

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Operații cu matrice:

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ două matrice, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. **Suma matricelor** A **și** B, $A + B$, este tot o matrice de tip $m \times n$ definită prin

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Observație

Nu putem aduna două matrice de forme diferite!

Operații cu matrice:

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ două matrice, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. **Suma matricelor** A **și** B, $A + B$, este tot o matrice de tip $m \times n$ definită prin

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Observație

Nu putem aduna două matrice de forme diferite!

Exemplu

Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Atunci

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \sqrt{2} - 1 & 6 \\ 7 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

Operații cu matrice:

Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ și $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ atunci matricea αB este matricea de același tip cu B obținută prin înmulțirea fiecărui element al matricei B cu α:

$$\alpha B = \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \cdots & \alpha b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha b_{m1} & \cdots & \alpha b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplu

Considerând matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Exemplu

Considerând matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Observăm că

$$3B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 & 9 \\ 9 & -3 & 18 & 9 \end{pmatrix},$$

$$2C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

și

$$A - B = A + (-1)B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & \sqrt{2}+1 & 0 \\ 1 & 1 & -7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Operații cu matrice:

Teoremă

Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *trei matrice și* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *două numere reale. Atunci*

a) $A + B = B + A$ *(adunarea matricelor este comutativă);*

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(adunarea matricelor este asociativă);*

c) $A + \mathbf{O}_{m,n} = A$;

d) $A + (-A) = \mathbf{O}_{m,n}$

e) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

f) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

g) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

h) $\alpha A = \mathbf{O}_{m,n}$ *dacă și numai dacă* $\alpha = 0$ *sau* $A = \mathbf{O}_{m,n}$.

Operații cu matrice:

Fie $m, n, t \in \mathbb{N}$ numere naturale nenule și $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,t}(\mathbb{R})$ două matrice. Matricea $C = A \cdot B \in \mathcal{M}_{m,t}(\mathbb{R})$ cu elementele

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq t$$

se numește **produsul matricelor** A și B.

Exemplu

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Atunci

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Observație

Observăm că două matrice pot fi înmulțite doar dacă numărul de coloane al primei matrice este egal cu numărul de linii al celei de-a doua matrice.

Exemplu

Dacă vom considera matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vom observa că nu putem efectua nici $A \cdot B$ și nici $B \cdot A$.

Observație

O consecință imediată este aceea că înmulțirea matricelor nu este comutativă.

Exemplu

Pentru matricele din exemplul anterior observăm că

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 14 \\ 9 & -6 & -12 \end{pmatrix} \neq A \cdot B.$$

Operații cu matrice:

Teoremă

Fie A, B, C matrice ale căror dimensiuni sunt considerate astfel încât operațiile următoare să poată fi efectuate și fie α un număr real. Atunci:

a) $(AB)C = A(BC)$ *(înmulțirea matricelor este asociativă);*

b) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$*;*

c) $A(B + C) = AB + AC$ *(înmulțirea la stânga a matricelor este distributivă față de adunarea lor);*

d) $(A + B)C = AC + BC$ *(înmulțirea la dreapta a matricelor este distributivă față de adunarea lor);*

e) *Dacă A este de tip $m \times n$, atunci $I_m A = A = A I_n$.*

Observație

În general, nu are loc proprietatea de simplificare la stânga sau la dreapta. Adică, dacă A, B și C sunt trei matrice astfel încât $AC = BC$, atunci nu putem afirma că $A = B$.

Observație

În general, nu are loc proprietatea de simplificare la stânga sau la dreapta. Adică, dacă A, B și C sunt trei matrice astfel încât $AC = BC$, atunci nu putem afirma că $A = B$.

Exemplu

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem:

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

deci $AC = BC$, dar $A \neq B$.

Operații cu matrice:

Definiție

Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice. Matricea notată A^T de tip $n \times m$ cu elementele $(A^T)_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ se numește **transpusa matricei** A (am notat aici prin $(A^T)_{ij}$ elementul aflat pe poziția (i, j) în matricea A^T).

Definiție

Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice. Matricea notată A^T de tip $n \times m$ cu elementele $(A^T)_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ se numește **transpusa matricei** A (am notat aici prin $(A^T)_{ij}$ elementul aflat pe poziția (i, j) în matricea A^T).

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Atunci transpusa matricei A este $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Operații cu matrice:

Teoremă

Fie A și B două matrice de tip $m \times n$ și C o matrice de tip $n \times p$. Fie α un număr real. Atunci:

a) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

b) $(AC)^T = C^T A^T$;

c) $\left(A^T\right)^T = A$;

d) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Operații cu matrice:

Teoremă

Fie A și B două matrice de tip $m \times n$ și C o matrice de tip $n \times p$. Fie α un număr real. Atunci:

a) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
b) $(AC)^T = C^T A^T$;
c) $\left(A^T\right)^T = A$;
d) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Observație

Matricea A este simetrică dacă și numai dacă $A = A^T$.

Teoremă

Fie A și B două matrice de tip $m \times n$ și C o matrice de tip $n \times p$. Fie α un număr real. Atunci:

a) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

b) $(AC)^T = C^T A^T$;

c) $\left(A^T\right)^T = A$;

d) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Observație

Matricea A este simetrică dacă și numai dacă $A = A^T$.
Matricea A este antisimetrică dacă și numai dacă $A = -A^T$.

Operații cu matrice:

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică, $A = (a_{ij})$. Atunci **urma matricei** A se notează cu $\mathrm{Tr}(A)$ și este egală cu suma elemetelor de pe diagonala principală:

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Operații cu matrice:

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică, $A = (a_{ij})$. Atunci **urma matricei** A se notează cu $\mathrm{Tr}(A)$ și este egală cu suma elemetelor de pe diagonala principală:

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Observație

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, atunci $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{k}$.

Operații cu matrice:

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică, $A = (a_{ij})$. Atunci **urma matricei** A se notează cu $\mathrm{Tr}(A)$ și este egală cu suma elemetelor de pe diagonala principală:

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Observație

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, atunci $\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{k}$.

Exemplu

Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Atunci $\mathrm{Tr}(A) = -1 + 2 + 6 = 7$.

Fie A o matrice pătratică, de tip $n \times n$. Matricea A se numește **inversabilă** dacă există o matrice pătratică C de tip $n \times n$ astfel încât

$$AC = CA = I_n.$$

Pentru a fi sugestiv, matricea C va fi notată cu A^{-1}.

Propoziție

Inversa unei matrice, dacă există, este unică.

Operații cu matrice:

Demonstrație.

Într-adevăr, dacă presupunem că A este inversabilă și există două matrice B și C astfel încât $AB = BA = I$ și $AC = CA = I$, atunci

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C,$$

deci cele două matrice B și C sunt egale. $\square$

Demonstrație.

Într-adevăr, dacă presupunem că A este inversabilă și există două matrice B și C astfel încât $AB = BA = I$ și $AC = CA = I$, atunci

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C,$$

deci cele două matrice B și C sunt egale. $\square$

Exemplu

Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci matricea $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ are proprietatea că $CA = AC = I_2$, deci $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teoremă

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este o matrice inversabilă, atunci, pentru orice matrice coloană* $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *ecuația* $AX = B$ *are soluția unică* $X = A^{-1}B$.

Teoremă

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *este o matrice inversabilă, atunci, pentru orice matrice coloană* $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *ecuația* $AX = B$ *are soluția unică* $X = A^{-1}B$.

Propoziție

Fie C o matrice inversabilă de tip $n \times n$ și A, B matrice de tip $m \times n$. Dacă $AC = BC$, atunci $A = B$.

Operații cu matrice:

Teoremă

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *matrice inversabile.Atunci:*

a) *matricea* A^{-1} *este inversabilă și* $(A^{-1})^{-1} = A$;

b) *matricea* AB *este inversabilă și* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

c) *matricea* A^T *este inversabilă și* $(A^t)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

d) *pentru orice* $k \in \mathbb{N}$, *matricea* A^k *este inversabilă și*

$$\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k.$$

Transformări(operații) elementare ale matricilor.

Fie A o matrice de tip $m \times n$ o matrice cu numere reale. Operațiile de tipul

- schimbarea între ele a două linii ale matricei,
- înmulțirea unei linii cu un scalar,
- adunarea la o linie a multiplului unei alte linii,

se numesc **operații elementare** între liniile unei matrice.
Matricele obținute prin aplicarea transformărilor elementare matricei unitate se numesc **matrice elementare**.

Transformări(operații) elementare ale matricilor.

Fie A o matrice de tip $m \times n$ o matrice cu numere reale. Operațiile de tipul

- schimbarea între ele a două linii ale matricei,
- înmulțirea unei linii cu un scalar,
- adunarea la o linie a multiplului unei alte linii,

se numesc **operații elementare** între liniile unei matrice.
Matricele obținute prin aplicarea transformărilor elementare matricei unitate se numesc **matrice elementare**.
Două matrice obținute una din cealaltă prin transformări elementare se numesc **matrice echivalente**. Vom nota faptul că A și B sunt matrice echivalente prin $A \sim B$.

Exemplu

Fie $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Transformări elementare ale matricilor.

Exemplu

Fie $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Transformări elementare ale matricilor.

Exemplu

Fie $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Atunci

Transformări elementare ale matricilor.

Exemplu

Fie $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Atunci

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

Transformări elementare ale matricilor.

Exemplu

Fie $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Atunci

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -6 & 9 & 12 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Transformări elementare ale matricilor.

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Transformări elementare ale matricilor.

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$E_3 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 10 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Teoremă

O matrice pătratică de ordin n este inversabilă dacă și numai dacă este echivalentă pe linii cu matricea I_n. Mai mult, dacă A este inversabilă, atunci șirul de matrice elementare care transformă A în I_n transformă și I_n în A^{-1}.

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Algoritm pentru determinarea inversei unei matrice:

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Algoritm pentru determinarea inversei unei matrice:
Pas 1: Fie A o matrice pătratică de tip $n \times n$. Considerăm matricea dreptunghiulară de tip $n \times 2n$ $[A|I_n]$ obținută prin alăturarea matricei I_n la matricea A. Toate operațiile se vor face între liniile matricei $[A|I_n]$.

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Pas 2: Presupunem că elementul $a_{11} \neq 0$ (în caz contrar, aducem în locul lui un alt element nenul de pe prima coloană prin inversarea liniilor; dacă nu există un astfel de element, matricea nu este inversabilă). Acest element se va numi pivot (vom denumi pivot elementul de pe diagonala principală corespunzător coloanei pe care lucrăm). Înmulțim prima linie cu $\dfrac{1}{a_{11}}$ pentru a face pivotul 1.

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Pas 3: Facem 0 toate elementele de pe coloana pivotului cu excepția pivotului. Pentru aceasta, pentru fiecare linie diferită de linia pivotului, efectuăm operația $L_i - a_{i1}L_1$.

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Pas 3: Facem 0 toate elementele de pe coloana pivotului cu excepția pivotului. Pentru aceasta, pentru fiecare linie diferită de linia pivotului, efectuăm operația $L_i - a_{i1} L_1$.
Pas 4: Presupunem că elementul $a_{22} \neq 0$ (în caz contrar, aducem în locul lui un alt element nenul de pe a doua coloană situat sub pivot prin inversarea liniilor). Înmulțim linia pivotului cu $\dfrac{1}{a_{22}}$ pentru a face pivotul 1.

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Pas 3: Facem 0 toate elementele de pe coloana pivotului cu excepția pivotului. Pentru aceasta, pentru fiecare linie diferită de linia pivotului, efectuăm operația $L_i - a_{i1}L_1$.
Pas 4: Presupunem că elementul $a_{22} \neq 0$ (în caz contrar, aducem în locul lui un alt element nenul de pe a doua coloană situat sub pivot prin inversarea liniilor). Înmulțim linia pivotului cu $\dfrac{1}{a_{22}}$ pentru a face pivotul 1.
Pas 5: Facem 0 toate elementele de pe coloana pivotului cu excepția pivotului. Pentru aceasta, pentru fiecare linie, efectuăm operația $L_i - a_{i2}L_2$, $i \neq 2$.

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Continuăm în acest mod până transformăm coloana n într-una în care pivotul (situat pe poziția (n, n)) este 1 și celelalte elemente sunt 0. Matricea obținută astfel este de forma $[I_n|A^{-1}]$. Dacă matricea A nu este echivalentă cu I_n, atunci nici $[A|I_n]$ nu este echivalentă cu $[I_n|A^{-1}]$ și, prin urmare, matricea A nu este inversabilă.

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1} (dacă există).

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1} (dacă există).

Soluție.

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{0} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right.$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1} (dacă există).

Soluție.

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{0} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right.$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1} (dacă există).

Soluție.

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{0} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right.$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1} (dacă există).

Soluție.

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{0} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\square$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\overset{\frac{1}{3}L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 - 2L_1}{\sim}$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\overset{\frac{1}{3}L_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3-2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right.$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\underset{\sim}{\frac{1}{3}L_1}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & \big| & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \big| & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & \big| & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \big| & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \big| & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \big| & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\overset{\frac{1}{3}L_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3-2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \overset{(-1)L_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\overset{\frac{1}{3}L_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3-2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \overset{(-1)L_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \overset{L_3-L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & \end{array}\right.$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\underset{\sim}{\frac{1}{3}L_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_3 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{(-1)L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\frac{1}{4}L_3}$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 + 2L_3 \\ \sim \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ & \\ & \end{array}\right.$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4}
\end{array}\right)
\begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 + 2L_3 \\ \sim \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\
 & & & & & \\
 & & & & &
\end{array}\right.
$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 + 2L_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ & & & & & \end{array}\right.$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 + 2L_3 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{array}\right) = [I_3|A^{-1}].$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Prin urmare

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Se poate verifica faptul că $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1} (dacă există).

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1} (dacă există).

Soluție.

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1} (dacă există).

Soluție.

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 + L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Exemplu

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1} (dacă există).

Soluție.

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 + L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 - L_2}{\sim}$$

$$\overset{L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Nu mai putem alege pivot nenul, ceea ce înseamnă că matricele A și I_3 nu sunt echivalente, deci nu există A^{-1} (matricea nu este inversabilă).

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Exemplu

Fie $a \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1}, dacă există.

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Exemplu

Fie $a \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1}, dacă există.

Soluție.

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Exemplu

Fie $a \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1}, dacă există.

Soluție.

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\square$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 - L_1 \\ L_3 - aL_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1 & 0 & -a \end{array}\right)$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Dacă $a-1 \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1 & 0 & -a \end{array}\right)$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Dacă $a-1\neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1 & 0 & -a \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c}(a-1)L_1-L_2\\ L_3+L_2\end{array}}$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Dacă $a-1 \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1 & 0 & -a \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{(a-1)L_1 - L_2}{L_3 + L_2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\text{a-1}} & 0 & a^2-1 & 0 & -1 & a \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right)$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\text{a-1}} & 0 & (a-1)(a+1) & 0 & -1 & a \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & (2+a)(1-a) & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right)$$

Dacă $a \neq 1$ și $a \neq -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\text{a-1}} & 0 & (a-1)(a+1) & 0 & -1 & a \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{(2+a)(1-a)}} & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right)$$

Dacă $a \neq 1$ și $a \neq -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\text{a-1}} & 0 & (a-1)(a+1) & 0 & -1 & a \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{(2+a)(1-a)}} & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (2+a)L_1 + (a+1)L_3 \\ (2+a)L_2 - L_3 \\ \sim \end{array}$$

Dacă $a \neq 1$ și $a \neq -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\text{a-1}} & 0 & (a-1)(a+1) & 0 & -1 & a \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{(2+a)(1-a)}} & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{(2+a)L_1 + (a+1)L_3 \\ (2+a)L_2 - L_3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\text{(2+a)(a-1)}} & 0 & 0 & a+1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{\text{(2+a)(a-1)}} & 0 & -1 & 1+a & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{(2+a)(1-a)}} & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{(2+a)(a-1)} & 0 & 0 & a+1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{(2+a)(a-1)} & 0 & -1 & 1+a & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{(2+a)(1-a)} & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\text{(2+a)(a-1)}} & 0 & 0 & a+1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{\text{(2+a)(a-1)}} & 0 & -1 & 1+a & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{\text{(2+a)(1-a)}} & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\begin{array}{l} \frac{1}{(2+a)(a-1)} L_1 \\ \frac{1}{(2+a)(a-1)} L_2 \\ \frac{1}{(2+a)(1-a)} L_1 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{(2+a)(a-1)} & 0 & 0 & a+1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{(2+a)(a-1)} & 0 & -1 & 1+a & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{(2+a)(1-a)} & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{(2+a)(a-1)} L_1 \\ \frac{1}{(2+a)(a-1)} L_2 \\ \frac{1}{(2+a)(1-a)} L_1 \end{array}$$
$$\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a+1}{(2+a)(a-1)} & -\frac{1}{(2+a)(a-1)} & -\frac{1}{(2+a)(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{(2+a)(a-1)} & \frac{1+a}{(2+a)(a-1)} & -\frac{1}{(2+a)(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(2+a)(1-a)} & \frac{1}{(2+a)(1-a)} & \frac{-a-1}{(2+a)(1-a)} \end{array}\right)$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Am obținut că dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, atunci A este inversabilă și inversa ei este

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{(2+a)(a-1)} & -\frac{1}{(2+a)(a-1)} & -\frac{1}{(2+a)(a-1)} \\ -\frac{1}{(2+a)(a-1)} & \frac{1+a}{(2+a)(a-1)} & -\frac{1}{(2+a)(a-1)} \\ \frac{1}{(2+a)(1-a)} & \frac{1}{(2+a)(1-a)} & \frac{-a-1}{(2+a)(1-a)} \end{pmatrix}$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Dacă $a = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\text{a-1}} & 0 & (a-1)(a+1) & 0 & -1 & a \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & (2+a)(1-a) & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right) =$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Dacă $a = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\text{a-1}} & 0 & (a-1)(a+1) & 0 & -1 & a \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & (2+a)(1-a) & 1 & 1 & -a-1 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

deci A nu este inversabilă.

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Dacă $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1 & 0 & -a \end{array}\right) =$$

Transformări elementare ale matricilor: inversa unei matrice

Dacă $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{\text{a-1}} & 1-a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1 & 0 & -a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

deci A nu este inversabilă.

Temă:

Exercițiu

Să se calculeze, dacă e posibil, inversa pentru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$