Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

cursul 6

2021-2022

Vectori liberi

Vectori liberi

Considerăm spațiul tridimensional al geometriei elementare, pe care-l notăm cu $\mathbb{E}_3$. În acest spațiu, pentru orice două puncte $A,\ B \in \mathbb{E}_3$, putem să construim segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$. Vom spune că punctul A este **originea** segmentului orientat, iar punctul B este **vârful** sau **extremitatea**. Pentru cazul particular în care originea coincide cu extremitatea segmentului orientat, spunem că avem segmentul orientat **nul**.
Dreapta determinată de cele două puncte A și B se numește **dreaptă suport** pentru segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ și este unic determinată pentru $A \neq B$. În caz contrar, dreapta suport este nedeterminată. Spunem că două segmente orientate sunt **coliniare**, respectiv **paralele** dacă dreptele lor suport coincid, respectiv sunt paralele.

Vectori liberi

Sensul segmentului orientat este dat de la origine la vârf. Două segmente orientate au **aceleași sens** dacă segmentele sunt paralele și extremitățile celor două segmente orientate se află de aceeași parte a semiplanului determinat de dreapta ce unește originile acestora. Dacă extremitățile celor două segmente orientate se află de o parte și de alta a dreptei ce unește originile acestora, atunci spunem că segmentele orientate au sensuri **opuse**. Facem mențiunea că două segmente orientate ce au același sens au și aceeași direcție.

Lungimea (**norma** sau **modulul**) unui segment orientat reprezintă distanța de la originea acestuia până la extremitatea segmentului. Facem mențiunea că segmentul orientat nul are lungime zero, iar două segmente orientate ce au aceeași lungime se numesc **congruente**.

Definiție

Două segmente orientate nenule se numesc **echipolente** dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

Relația de echipolență este o relație de echivalență pe mulțimea segmentelor orientate, iar clasele de echivalență se numesc **vectori liberi**. Notăm vectorii liberi cu $\overline{AB}$ sau $\mathbf{u}$, iar direcția, sensul și lungimea vectorului liber $\overline{AB}$ sunt cele ale segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$. În concluzie,

$$\overline{AB} = \left\{ \overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{AB} \text{ este echipolent cu } \overrightarrow{CD} \right\}.$$

Vectori liberi

Dacă $\mathbf{u}$ este vectorul liber având segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ ca reprezentant, atunci notăm cu $-\mathbf{u}$ vectorul liber ce corespunde segmentului orientat $\overrightarrow{BA}$ și se numește **opusul** vectorului $\mathbf{u}$. În cazul în care punctele A și B coincid, atunci obținem vectorul liber $\mathbf{0}$, ce are ca reprezentant segmentul orientat nul. Un vector liber de lungime 1 se numește **versor**.

Spunem că doi vectori $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ sunt **egali** și notăm cu $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ dacă cei doi vectori au aceeași lungime, același sens și aceeași direcție.

Vectori liberi

Teoremă

Fie $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *doi vectori liberi nenuli. Atunci* $\mathbf{u}$ *este coliniar cu* $\mathbf{v}$ *dacă și numai dacă există un scalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ *astfel încaât* $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$.

Observație

Fie $\mathbf{u}$ un vector liber nenul. Atunci

$$V_1 = \{\mathbf{v} : \ \mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}, \text{ pentru } \alpha \in \mathbb{R}\}$$

este un spațiu vectorial de dimensiune 1.

Vectori liberi

Concluzie:

- doi vectori sunt coliniari dacă și numai dacă sunt liniar dependenți.
- doi vectori sunt necoliniari dacă și numai dacă sunt liniar independenți.

Vectori liberi

Spunem că trei vectori sunt coplanari dacă aceștia admit reprezentanți paraleli cu un plan dat.

Teoremă

Fie $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *trei vectori liberi nenuli. Atunci* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *sunt coplanari dacă și numai dacă sunt liniar dependenți.*

Observație

Fie $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ doi vectori liberi nenuli și necoliniari. Atunci

$$V_2 = \{\mathbf{w} : \ \mathbf{w} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \ \text{pentru } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

este un spațiu vectorial de dimensiune 2.

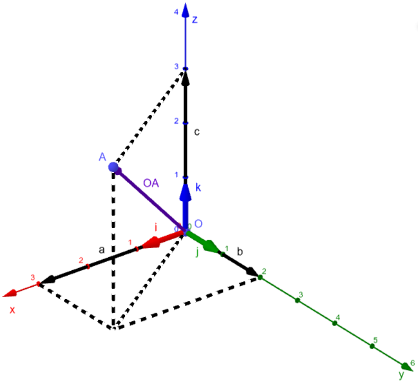
Concluzie:

- trei vectori sunt coplanari dacă și numai dacă sunt liniar dependenți.
- trei vectori sunt necoplanari dacă și numai dacă sunt liniar independenți.

Teoremă

Spațiul vectorial al vectorilor liberi V_3 este un spațiu vectorial de dimensiune 3.

Considerăm reperul ortonormat $Oxyz$ și $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ versorii celor trei axe Ox, Oy, respectiv Oz. Pentru un punct $A(a, b, c)$, vectorul liber $\overline{OA}$ ce are ca reprezentant segmentul orientat $\overrightarrow{OA}$ se numește **vector de poziție** și se scrie unic sub forma $\overline{OA} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$, iar numerele a, b, c se numesc **coordonatele vectorului** $\overline{OA}$.



Vectori liberi

Pe mulțimea vectorilor liberi, notată cu $\mathbb{V}_3$ pot fi definite o serie de operații interne, între vectori liberi, cât și operații externe, între un vector liber și un scalar real.

Definiție

Fie $\mathbf{v}$ un vector liber și $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalar. Vectorul liber notat cu $\lambda\mathbf{v}$ este vectorul ce are:

- direcția vectorului $\mathbf{v}$,
- sensul este dat de scalarul λ (dacă $\lambda > 0$ atunci $\lambda\mathbf{v}$ are același sens cu $\mathbf{v}$, iar dacă $\lambda < 0$ sensul este contrar),
- lungimea este $|\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

Vectorul $\lambda\mathbf{v}$ se numește **înmulțirea vectorului v cu scalarul** λ. Dacă $\lambda = 0$ sau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, atunci vectorul $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Vectori liberi

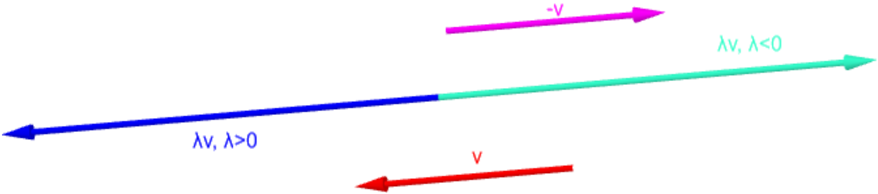


Figure: Înmulțirea vectorilor liberi cu scalari

Din definiție se observă faptul că vectorul $\mathbf{v}$ este coliniar cu vectorul $\lambda\mathbf{v}$.

Observație

Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ și vectorul $\mathbf{v}$ în coordonate, adică $\mathbf{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$, atunci vectorul $\lambda\mathbf{v} = \lambda v_1\bar{i} + \lambda v_2\bar{j} + \lambda v_3\bar{k}$.

Vectori liberi

Observație

Pentru $\lambda = -1$, obținem vectorul $\lambda\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ adică opusul vectorului $\mathbf{v}$. Dacă considerăm vectorul $\mathbf{v}$ în coordonate, adică $\mathbf{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$, atunci vectorul $-\mathbf{v}$ este

$$-\mathbf{v} = -v_1\bar{i} - v_2\bar{j} - v_3\bar{k}.$$

Propoziție

Fie $\mathbf{v}$ un vector liber și $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ doi scalari. Atunci au loc :

1. $(\lambda \cdot \gamma)\mathbf{v} = \lambda(\gamma\mathbf{v}) = \gamma(\lambda\mathbf{v})$;
2. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ și $O\mathbf{v} = \mathbf{0}$;
3. $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$;
4. $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dacă și numai dacă $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sau $\lambda = 0$.

Definiție

Considerăm vectorii liberi **u** și **v**. **Adunarea celor doi vectori** este vectorul $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, vector coplanar cu **u**, **v**, care se obține prin regula paralelogramului sau regula triunghiului:

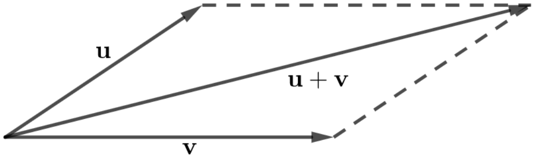
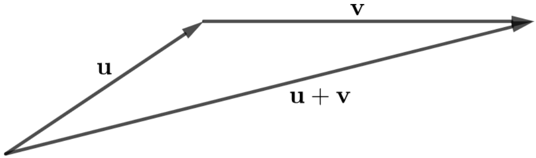


Figure: Adunarea vectorilor liberi cu regula paralelogramului



Vectori liberi

Observație

Regula triunghiului afirmă că dacă $\overrightarrow{OA}$ este un reprezentant al vectorului liber $\mathbf{u}$ și $\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al vectorului liber $\mathbf{v}$, atunci un reprezentant al vectorului liber sumă $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ este segmentul orientat $\overrightarrow{OB}$.

Observație

Dacă considerăm vectorii $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ în coordonate, adică

$$\mathbf{u} = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}, \text{ și } \mathbf{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k},$$

atunci vectorul sumă este

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1)\bar{i} + (u_2+v_2)\bar{j} + (u_3+v_3)\bar{k}.$$

Vectori liberi

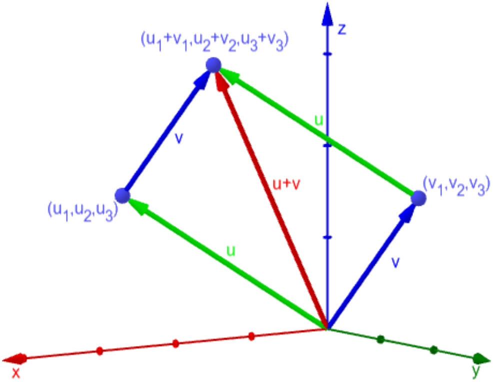


Figure: Adunarea vectorilor liberi

Exemplu

O macara ridică vertical o bară din oțel cu forța $F_1 = 3000N$. Un muncitor împinge bara spre est cu o forța $F_2 = 20N$, iar vântul bate dinspre nord cu forța $F_3 = 150N$. Ne interesează să obținem forța care acționează asupra barei. Pentru aceasta, considerăm în reperul $Oxyz$ vectorii $\mathbf{u} = 3000\bar{k}$, $\mathbf{v} = 20\bar{j}$ și $\mathbf{w} = 150\bar{i}$. Facem precizarea că am identificat axa pozitivă Ox cu punctul cardinal sud, iar axa pozitivă Oy cu direcția est. Forța rezultantă este

$$\bar{R} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 150\bar{i} + 20\bar{j} + 3000\bar{k}.$$

Vectori liberi

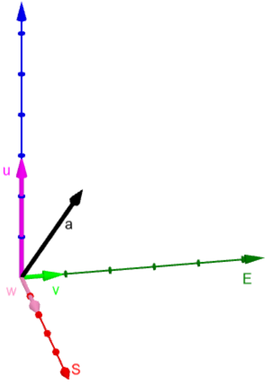


Figure: Forța rezultantă

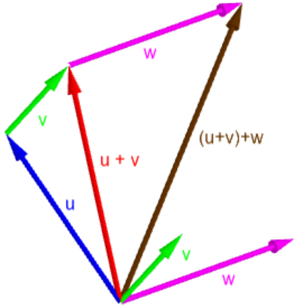
Propoziție

Considerăm **u**, **v** și **w** trei vectori liberi și $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ doi scalari reali. Atunci au loc următoarele relații:

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;
2. $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$;
3. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
5. $(\lambda + \gamma)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \gamma\mathbf{v}$;
6. $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$

Demonstrație.

Se aplică definiția. De exemplu, pentru a demonstra prima egalitate, adunăm vectorii cu regula triunghiului și obținem relația dorită.



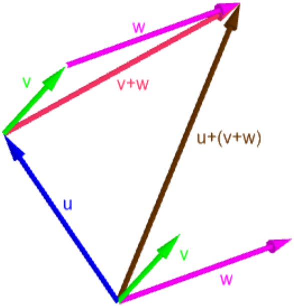


Figure: Asociativitatea adunării vectorilor liberi

Observație

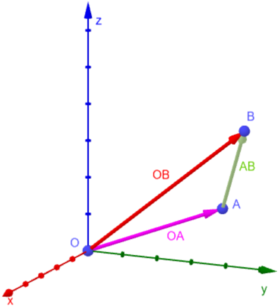
Comutativitatea adunării vectorilor liberi justifică folosirea regulii paralelogramului în locul regulii triunghiului.

Mai mult, din proprietățile prezentate până acum, se observă că mulțimea vectorilor liberi $\mathbb{V}_3$, împreună cu operațiile de adunare și de înmulțire cu scalari, formează un spațiu vectorial real.

Observație

Din regula triunghiului avem că $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$, de unde obținem $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Dacă considerăm coordonatele celor două puncte $A(a_1, a_2, a_3)$ și $B(b_1, b_2, b_3)$, atunci vectorul $\overline{AB}$ se scrie sub forma:

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1)\overline{i} + (b_2 - a_2)\overline{j} + (b_3 - a_3)\overline{k}.$$



Se consideră vectorii liberi **u** și **v** și notăm cu α unghiul dintre cei doi vectori, $\alpha \in [0, \pi]$.

Teoremă

Aplicația $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \to \mathbb{R}$, *definită prin*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \begin{cases} \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos\alpha, & \textit{dacă } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \textit{ și } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ 0, & \textit{dacă } \mathbf{u} = \mathbf{0} \textit{ sau } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases}$$

este un produs scalar.

Vectori liberi

Propoziție

Considerăm vectorii liberi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ și $\mathbf{x}$. Atunci au loc:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$;
2. $\langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\langle \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}, \gamma\mathbf{w}+\delta\mathbf{x} \rangle = \alpha\gamma\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle+\beta\gamma\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle+\alpha\delta\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle+\beta\delta\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle$, unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$;
4. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$;
5. dacă considerăm vectorii în coordonate $\mathbf{u} = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}$ și $\mathbf{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$, atunci expresia analitică a produsului scalar este $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ și $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ este formula pentru norma vectorului;
6. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sau $\alpha = 90^\circ$;
7. **Inegalitatea Cauchy–Schwartz:** $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

Exemplu

Produsul scalar al vectorilor liberi $\mathbf{u} = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ și $\mathbf{v} = \bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$ este egal cu

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) = 0.$$

În plus, avem

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

și

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

Mai mult, vectorii $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ sunt ortogonali deoarece $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Vectori liberi

Dacă considerăm vectorul $\mathbf{w} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, atunci unghiul dintre **v** și **w**, notat cu α, se poate calcula astfel:

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Fie vectorii liberi $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ și notăm cu α unghiul dintre cei doi vectori, $\alpha \in [0, \pi]$.

Definiție

Produsul vectorial al vectorilor $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$ este un vector, notat cu $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, care are:

- direcția perpendiculară pe planul vectorilor $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$;
- sensul este dat de regula mâinii drepte;
- lungimea egală cu $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha$.

Vectori liberi

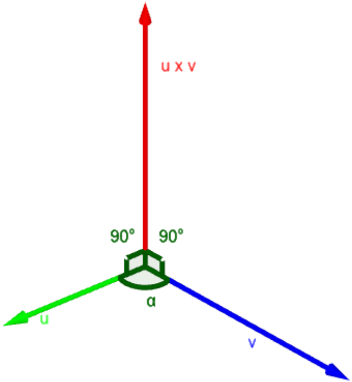


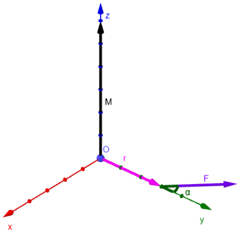
Figure: Produsul vectorial

Observație

Se observă din definiție că, pentru orice vector $\mathbf{v}$, avem $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Exemplu

Momentul unei forțe F în raport cu punctul O este mărimea fizică vectorială definită de $\bar{M} = \mathbf{r} \times \bar{F}$, unde $\mathbf{r}$ este vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței F.



De exemplu, considerăm că utilizăm o cheie pentru a scoate un șurub dintr-o piesă. Identificăm punctul O cu șurubul, lungimea vectorului $\mathbf{r}$ este reprezentată de cheia utilizată și forța F este forța aplicată pentru a scoate șurubul. Efectul de deșurubare reprezintă, din punct de vedere fizic, momentul forței F în raport cu punctul O. Dacă forța este aplicată în sens invers, atunci șurubul este strâns.

Propoziție

Fie vectorii liberi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ și $\mathbf{x}$. Atunci au loc:

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$;
2. $(\alpha \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (\alpha \mathbf{v})$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})\times(\gamma\mathbf{w}+\delta\mathbf{x}) = \alpha\gamma\mathbf{u}\times\mathbf{w}+\beta\gamma\mathbf{v}\times\mathbf{w}+\alpha\delta\mathbf{u}\times\mathbf{x}+\beta\delta\mathbf{v}\times\mathbf{x}$, unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$;
4. dacă considerăm vectorii în coordonate $\mathbf{u} = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}$ și $\mathbf{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$, atunci

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

este expresia analitică a produsului vectorial;

Vectori liberi

5. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ dacă și numai dacă $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sau $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sau $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$;
6. dacă $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ și $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, atunci lungimea produsului vectorial al vectorilor liberi $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v}$, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$, este egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori;
7. **Identitatea Lagrange:** $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2$.

Observație

Pentru a reține mai ușor produsele vectoriale ale versorilor axelor, aranjăm alfabetic versorii astfel:

$$\bar{i} \qquad \bar{j} \qquad \bar{k} \qquad \bar{i} \qquad \bar{j} \qquad \bar{k}.$$

Când citim de la stânga la dreapta, sensul va fi pozitiv, adică

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}.$$

Dacă citim de la dreapta la stânga, atunci sensul va fi negativ:

$$\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i},\ \bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k},\ \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}.$$

Exemplu

Se consideră vectorii $\mathbf{u} = 2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$ și $\mathbf{v} = \bar{j} + \bar{k}$. Atunci

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\bar{j} + 2\bar{k}$$

și $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Exemplu

Fie punctele $A(1,3,-1)$, $B(-1,2,3)$, $C(1,0,1)$ și ne propunem să calculăm aria triunghiului ABC. Pentru aceasta remarcăm faptul că aria triunghiului ABC este egală cu jumătate din aria paralelogramului construit pe vectorii $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$.
Obținem astfel că aria triunghiului este

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\|\overline{AB} \times \overline{AC}\|$$

Vectori liberi

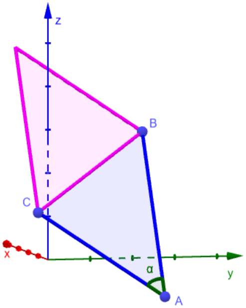


Figure: Triunghiul ABC

Avem $\overline{AB} = -2\overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$, $\overline{AC} = -3\overline{j} + 2\overline{k}$ și

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 10\overline{i} + 4\overline{j} + 6\overline{k},$$

de unde găsim că aria triunghiului ABC este

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{10^2 + 4^2 + 6^2}}{2} = \frac{\sqrt{152}}{2} = \sqrt{38}.$$

Vectori liberi

Definiție

Considerăm vectorii liberi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Numărul real notat cu $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle$ se numește **produsul mixt** al celor trei vectori.

Observație

Produsul mixt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle$ al vectorilor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ poate fi notat, pentru simplitate, cu $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Propoziție

Fie vectorii liberi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ și scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci:

1. Expresia analitică a produsului mixt $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ este

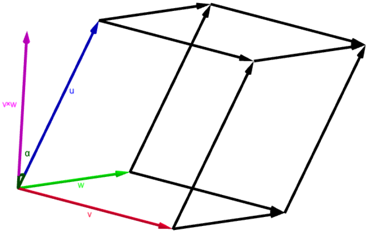
$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

   unde am considerat $\mathbf{u} = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}$, $\mathbf{v} = v_1\bar{i} + v_2\bar{j} + v_3\bar{k}$ și $\mathbf{w} = w_1\bar{i} + w_2\bar{j} + w_3\bar{k}$
2. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ dacă și numai dacă $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sunt coplanari sau unul din vectori este vectorul nul sau doi dintre vectori sunt coliniari;
3. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ și $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$;

4. Dacă $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\neq 0$, valoarea absolută a produsului mixt, $|(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})|$, reprezintă volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori ca laturi.

Demonstrație.

Proprietatea (3) reprezintă interpretarea geometrică a produsului mixt, de aceea o demonstrăm. Presupunem că vectorii **u**, **v**, **w** sunt necoplanari.



Vectori liberi

Din definiția produsului scalar avem:

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| = \big|\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \cdot \cos\alpha\big|,$$

unde α este unghiul dintre vectorii $\mathbf{u}$ și $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Dar $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ este aria paralelogramului construit pe cei doi vectori, deci este aria bazei paralelipipedului, iar $\|\mathbf{u}\| \cos\alpha$ reprezintă înălțimea paralelipipedului construit pe cei trei vectori. Obținem astfel că $|(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|$ este egal cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori.

Exemplu

Volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\mathbf{u} = -2\bar{i} - \bar{k}$, $\mathbf{v} = \bar{j} + \bar{k}$ și $\mathbf{w} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ este egal cu:

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| = \left| \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |-3| = 3.$$

Se observă că vectorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sunt necoplanari deoarece $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -3 \neq 0$.

Exemplu

Volumul tetraedrului construit pe $A(1,2,3)$, $B(2,1,2)$, $C(-1,-2,0)$ și $D(1,-2,1)$ poate fi calculat folosind proprietățile produsului mixt, astfel:

$$\mathcal{V}ol_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-4| = \frac{2}{3}.$$

Definiție

Se consideră vectorii liberi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Vectorul $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ definit prin

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \end{vmatrix} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w}$$

se numește **dublul produs vectorial** al vectorilor $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

Observație

Dublul produs vectorial $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ este un vector coplanar cu $\mathbf{v}$ și $\mathbf{w}$ (deoarece este perpendicular pe $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$) și este ortogonal pe $\mathbf{u}$.

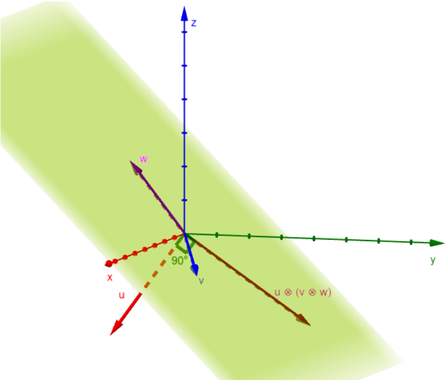


Figure: Dublul produs vectorial $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

Observație

Deoarece produsul vectorial dintre doi vectori liberi nu este asociativ, obținem că

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}.$$

Într-adevăr, avem următoarele:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = -\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = -\begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{u}.$$

Exemplu

Se consideră vectorii $\mathbf{u} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\mathbf{v} = -2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ și $\mathbf{w} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$. Atunci avem:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \end{vmatrix} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{w} = 2\mathbf{v} + 4\mathbf{w},$$

deci $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 4\bar{i} + 10\bar{j} + 2\bar{k}$. În schimb, obținem

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = - \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{u} = 2\mathbf{v} + 2\mathbf{u},$$

adică $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = 2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 4\bar{k}$.

Vectori liberi

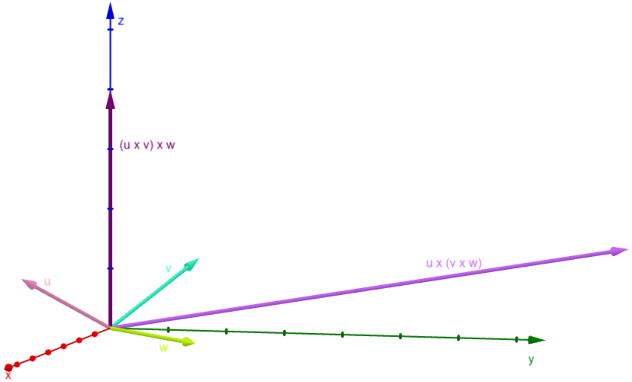


Figure: Dublul produs vectorial

Considerăm vectorii liberi **u** și **v**, α este unghiul dintre cei doi vectori și notăm cu $\mathbf{v}_0 = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$.

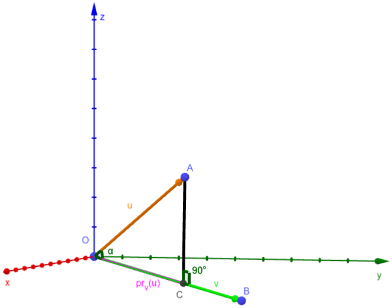


Figure: Proiecția scalară a lui **u** pe **v**

Definiție

Proiecția scalară a vectorului u pe v este numărul real notat cu $\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})$, definit prin $\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\| \cos\alpha$.

Observație

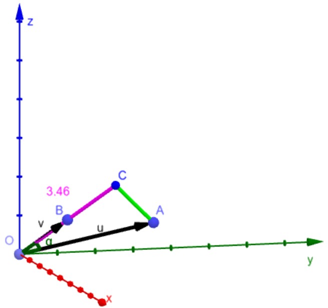
Proiecția scalară a vectorului **u** pe vectorul **v** este "umbra" pe care o lasă **u** pe **v**. Dacă $\alpha > 90°$, atunci "umbra" are sens opus lui **v**.

Prin prelucrarea relației anterioare, obținem că proiecția scalară a vectorului **u** pe **v** este egală cu $\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}$.

Exemplu

Proiecția scalară a vectorului $\mathbf{u} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$ pe vectorul $\mathbf{v} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ este numărul

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{3} \approx 3.46.$$



În schimb, dacă considerăm vectorul $\mathbf{w} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$, atunci proiecția scalară a lui $\mathbf{w} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$ pe $\mathbf{v} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ este

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 0,$$

ceea ce înseamnă că vectorii $\mathbf{w}$ și $\mathbf{v}$ sunt perpendiculari.

Observație

Dacă considerăm vectorul $\mathbf{u} = u_1\bar{i} + u_2\bar{j} + u_3\bar{k}$, atunci coordonatele $u_1,\ u_2,\ u_3$ reprezintă proiecțiile scalare ale vectorului $\mathbf{u}$ pe versorii axelor de coordonate. Într-adevăr, avem:

$$\mathrm{pr}_{\bar{i}}(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \bar{i}\rangle}{\|\bar{i}\|} = u_1,\ \mathrm{pr}_{\bar{j}}(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \bar{j}\rangle}{\|\bar{j}\|} = u_2,\ \mathrm{pr}_{\bar{k}}(\mathbf{u}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \bar{k}\rangle}{\|\bar{k}\|} = u_3.$$

Definiție

Proiecția vectorială a vectorului liber u pe v este vectorul liber definit prin $\overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})} = \mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})\mathbf{v}_0$, unde $\mathbf{v}_0$ este versorul vectorului $\mathbf{v}$.

Exemplu

Proiecția vectorială a lui $\mathbf{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$ pe vectorul $\mathbf{v} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ este vectorul

$$\overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})} = \mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})\mathbf{v}_0 = 2\sqrt{3} \cdot \mathbf{v}_0,$$

unde $\mathbf{v}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$. Obținem astfel că proiecția vectorială a lui $\mathbf{u}$ pe $\mathbf{v}$ este vectorul

$$\overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})} = 2(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) = 2\mathbf{v}.$$

Propoziție

Fie vectorii liberi **u**, **v** și **w** și scalarul $\alpha \in \mathbb{R}$. Au loc proprietățile:

1. $\overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}+\mathbf{v})} = \overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u})} + \overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})}$;
2. $\overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\alpha\mathbf{u})} = \alpha \cdot \overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u})}$.

Exemplu

Considerăm vectorii liberi $\mathbf{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$, $\mathbf{v} = 4\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$ și $\mathbf{w} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$. Atunci avem :

$$\overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u})} = \mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u})\mathbf{w}_0 = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{3}}\mathbf{w}_0 = 2\mathbf{w},$$

$$\overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})} = \mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})\mathbf{w}_0 = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{\sqrt{3}}\mathbf{w}_0 = 3\mathbf{w}.$$

Am ținut cont de faptul că $\mathbf{w}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{w}$. În plus, avem

$$\overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}+\mathbf{v})} = \mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{w}_0 = \frac{6 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{\sqrt{3}}\mathbf{w}_0 = 5\mathbf{w},$$

deci $\overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}+\mathbf{v})} = \overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u})} + \overline{\mathrm{pr}_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})}$.