Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială

cursul 8

2021-2022

Construcții geometrice elementare. Forme biliniare. Forme pătratice

Exemplu

Se consideră dreapta

$$\Delta : \ x + \frac{1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

şi un punct $P\left(-\frac{1}{2}, 2, -1\right)$. Să se scrie **coordonatele proiecţiei ortogonale a punctului P pe dreapta Δ** şi să se calculeze distanţa de la P la Δ. Să se afle **coordonatele simetricului punctului P faţă de dreapta Δ.**

Metoda 1: Fie $P'(t)$ un punct curent pe dreapta Δ:

$$P'(t) : \begin{cases} x = t - \dfrac{1}{2} \\ y = 3t - 1 \\ z = 2t \end{cases}.$$

Vectorul $\overline{PP'(t)} = t\bar{i} + (3t-3)\bar{j} + (2t+1)\bar{k}$ este vector director pentru dreapta $PP'(t)$.

Construcții elementare

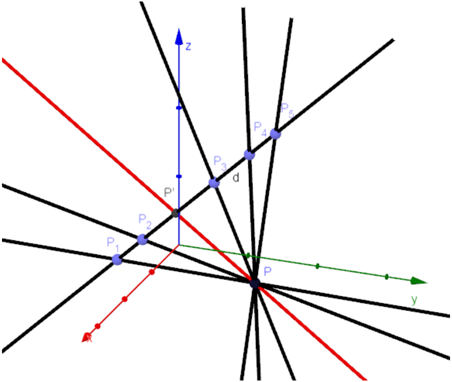

Figure: Proiecția unui punct pe o dreaptă

Deoarece dreapta $PP'(t)$ este perpendiculară pe dreapta Δ, avem că vectorul $\overline{PP'(t)}$ este ortogonal pe vectorul director al dreptei Δ, $\mathbf{v} = \bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$. Obținem astfel $\langle \overline{PP'(t)}, \mathbf{v} \rangle = 0$, de unde rezultă $t = \dfrac{1}{2}$. Atunci coordonatele proiecției ortogonale, P', a punctului $P\left(-\dfrac{1}{2}, 2, -1\right)$ pe dreapta Δ sunt: $P'(1/2) : x = 0 \; y = \dfrac{1}{2} \; z = 1.$

Metoda 2: Fie π planul ce conține punctul P și care este perpendicular pe dreapta Δ. Atunci ecuația planului π se obține ca fiind ecuația planului ce trece prin punctul $P\left(-\frac{1}{2}, 2, -1\right)$ și are normala $\mathbf{n} = \mathbf{v} = \bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$, adică

$$\pi : x + 3y + 2z - \frac{7}{2} = 0.$$

Construcții elementare

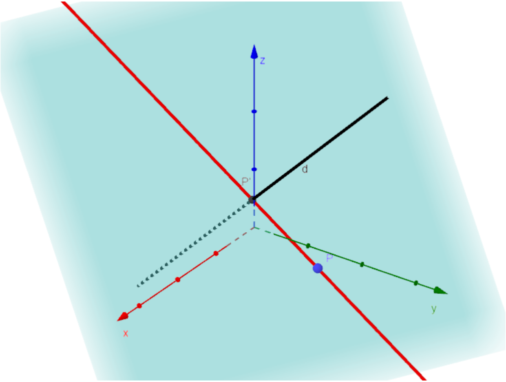

Figure: Proiecția unui punct pe o dreaptă

Proiecția punctului P pe dreapta Δ este punctul de intersecție dintre Δ și planul π. Dacă P' este punctul de intersecție, atunci coordonatele punctului P' verifică atât ecuațiile parametrice ale dreptei, cât și ecuația planului, deci:

$$P' : \begin{cases} x = t - \dfrac{1}{2} \\ y = 3t - 1 \\ z = 2t \\ x + 3y + 2z - \dfrac{7}{2} = 0 \end{cases} .$$

Din sistem obținem $t = \frac{1}{2}$ și $P'\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ sunt coordonatele proiecției.
Distanța de la P la dreapta Δ este $\left\|\overline{PP'}\right\|$. Cum

$$\overline{PP'} = \frac{1}{2}\overline{i} - \frac{3}{2}\overline{j} + 2\overline{k},$$

obținem

$$\left\|\overline{PP'}\right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 4} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

În continuare, construim **simetricul punctului P faţă de dreapta Δ**. Fie P'' simetricul punctului P faţă de dreapta Δ. În particular $\|\overline{PP'}\| = \|\overline{P'P''}\|$.

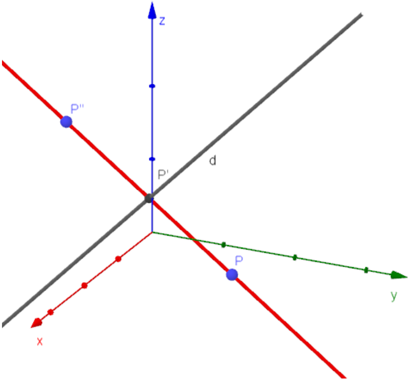

Figure: Simetricul unui punct faţă de o dreaptă

Cum punctul P' este mijlocul segmentului $[PP'']$, coordonatele sale verifică relațiile:

$$\begin{cases} x_{P'} = \dfrac{x_P + x_{P''}}{2}, \\ y_{P'} = \dfrac{y_P + y_{P''}}{2}, \\ z_{P'} = \dfrac{z_P + z_{P''}}{2} \end{cases}.$$

Obținem

$$\begin{cases} x_{P''} = 2x_{P'} - x_P = \dfrac{1}{2}, \\ y_{P''} = 2y_{P'} - y_P = -1, \\ z_{P''} = 2z_{P'} - z_P = 3. \end{cases}$$

Exemplu

Să se scrie ecuaţiile **proiecţiei ortogonale a dreptei**

$$\Delta : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

pe planul $\pi : x + y + 2z - 2 = 0.$

Presupunem că dreapta Δ intersectează planul π în punctul A, coordonatele punctului fiind obținute ca soluție a sistemului

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z - 2 = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases},$$

unde primele două ecuații sunt cele ale dreptei, iar ultima ecuație este a planului. Soluția sistemului este $x = -1,\ y = 1,\ z = 1$, deci punctul de intersecție este $A(-1, 1, 1)$.

Fixăm un punct B pe dreapta Δ astfel: alegem $z = 0$ în ecuațiile dreptei Δ și obținem

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

cu soluția $x = 1,\ y = 0$. Deci punctul B ales pe dreapta Δ are coordonatele $B(1, 0, 0)$.

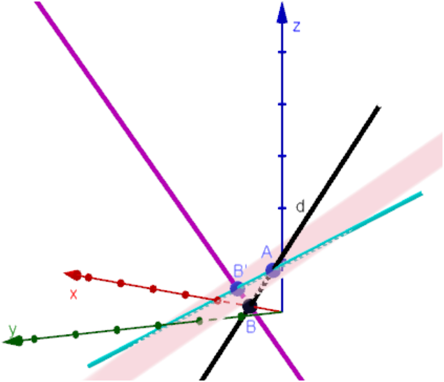

Figure: Proiecția unei drepte pe un plan

Determinăm acum coordonatele proiecției punctului B pe planul π. Fie B' proiecția punctului B pe planul π. Atunci vectorul

$$\mathbf{n} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$$

este vector director pentru dreapta BB'. Ecuațiile dreptei BB' sunt:

$$BB' : \ \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2},$$

fiind ecuațiile dreptei ce trece prin B și are vector director pe $\mathbf{n}$.

Punctul B' este punctul de intersecție dintre dreapta BB' și planul π, deci coordonatele sale se determină din sistemul format dintre ecuațiile parametrice ale dreptei BB' și ecuația planului π:

$$B' : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = 2t \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Obținem $t = \frac{1}{6}$ și coordonatele proiecției sunt $x = \frac{7}{6}$, $y = \frac{1}{6}$, $z = \frac{1}{3}$, deci $B'\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$. Găsim astfel că proiecția dreptei Δ pe planul π este dreapta AB' de ecuații:

$$AB' : \ \frac{x+1}{13} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{-4}.$$

Exemplu

Să se determine **ecuaţiile simetricei dreptei**

$$\Delta : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = z$$

faţă de planul $\pi : x + y - 3z = 0$.

Presupunem că dreapta Δ intersectează planul π într-un punct A. Coordonatele punctului de intersecție dintre dreaptă și plan, se determină rezolvând sistemul format din ecuațiile paramertice ale dreptei Δ și ecuația planului π:

$$A: \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = t + 1 \\ z = t \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} .$$

Obținem $t = 1$ și coordonatele punctului A sunt $x = 1,\ y = 2,\ z = 1$, deci $A(1, 2, 1)$.

Dând o valoare oarecare lui t în ecuațiile parametrice ale dreptei Δ, obținem un punct de pe dreaptă. Alegem $t = 0$ și obținem punctul $B(-2, 1, 0)$ pe dreapta Δ. Construim B' proiecția punctului B pe planul π. Pentru aceasta, vectorul $\mathbf{n} = \bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$, vector normal la planul π, este vector director pentru dreapta BB', deci ecuațiile dreptei BB' sunt:

$$BB' : \ \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3}.$$

Cum B' este punctul de intersecție dintre dreapta BB' și planul π, coordonatele punctului B' reprezintă soluția sistemului format din ecuațiile parametrice ale dreptei BB' și ecuația planului π:

$$B' : \begin{cases} x = s - 2 \\ y = s + 1 \\ z = -3s \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} .$$

Obținem $s = \dfrac{1}{11}$ și punctul $B'\left(-\dfrac{21}{11}, \dfrac{12}{11}, -\dfrac{3}{11}\right)$.

Construcții elementare

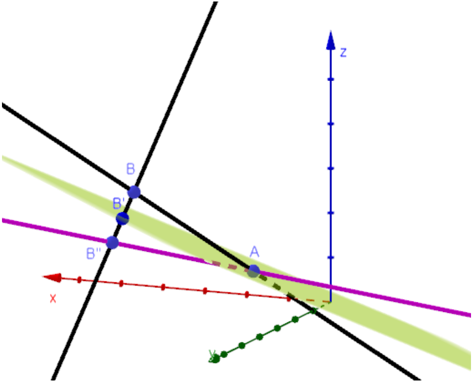

Figure: Simetrica unei drepte față de un plan

Mai departe, considerăm $B"$ simetricul punctului B față de planul π. Cum punctul B' este mijlocul segmentului $[BB"]$, avem relațiile:

$$x_{B'} = \frac{x_B + x_{B"}}{2}, \ y_{B'} = \frac{y_B + y_{B"}}{2}, \ z_{B'} = \frac{z_B + z_{B"}}{2}.$$

Obținem astfel:

$$x_{B"} = -\frac{20}{11}, \ y_{B"} = \frac{13}{11}, \ z_{B"} = -\frac{6}{11}.$$

În concluzie, simetrica dreptei Δ față de planul π este dreapta $AB"$ de ecuații:

$$AB" : \ \frac{x-1}{31} = \frac{y-2}{9} = \frac{z-1}{17}.$$

Construcții elementare

În practică, este necesar uneori să se determine distanța dintre două drepte necoplanare. Un astfel de exemplu apare în cazul instalațiilor industriale care conțin conducte și este necesară determinarea distanței dintre două conducte necoplanare:

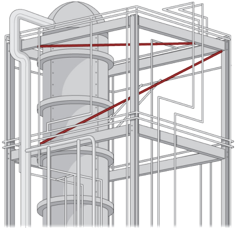

Figure: Instalație industrială [1]

[1] https://math.libretexts.org/@api/deki/files/7813/imageedit_6_5255379438.png?rev

Exemplu

Să se scrie **ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor**:

$$\Delta_1: \ \frac{x-1}{2} = y+3 = \frac{z}{2}$$

şi

$$\Delta_2: \ x = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}.$$

Fie $A(t)$ un punct arbitrar pe dreapta Δ_1 și $B(s)$ un punct arbitrar pe dreapta Δ_2. Atunci coordonatele celor două puncte sunt de forma

$$A(t):\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t-3 \\ z = 2t \end{cases} \qquad B(s):\begin{cases} x = s \\ y = -s-1 \\ z = 3s+1 \end{cases}.$$

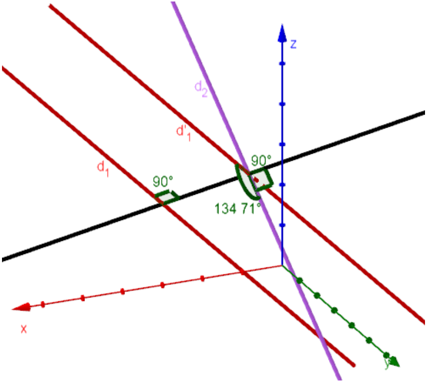

Figure: Perpendiculara comună a două drepte

Dreapta $A(t)B(s)$ este perpendiculară pe dreptele Δ_1 și Δ_2, deci

$$\overline{A(t)B(s)} = (s - 2t - 1)\bar{i} + (-s - t + 2)\bar{j} + (3s - 2t + 1)\bar{k}$$

este ortogonal pe $\mathbf{v}_1 = 2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ și pe $\mathbf{v}_2 = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$. Cele două condiții $\langle \overline{A(t)B(s)}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0$ și $\langle \overline{A(t)B(s)}, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ ne conduc la:

$$\begin{cases} 7s - 9t + 2 = 0 \\ 11s - 7t = 0 \end{cases}$$

cu soluția $s = \dfrac{7}{25}$ și $t = \dfrac{11}{25}$. Înlocuind cele două soluții în sistemele $A(t)$ și $B(s)$, obținem $A\left(\dfrac{47}{25}, \dfrac{-64}{25}, \dfrac{22}{25}\right)$ și $B\left(\dfrac{7}{25}, \dfrac{-32}{25}, \dfrac{46}{25}\right)$, iar ecuația perpendicularei comune este ecuația dreptei AB, adică:

$$AB : \frac{x - \dfrac{47}{25}}{-5} = \frac{y + \dfrac{64}{25}}{4} = \frac{z - \dfrac{22}{25}}{3}.$$

Forme biliniare

Pentru un spațiu vectorial dat, s-a definit noțiunea de produs scalar. Produsele scalare apar acum sub forma unor cazuri particulare de forme biliniare. Formele biliniare apar natural în teoria codării în cazul spațiilor vectoriale peste corpuri comutative finite.

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste corpul comutativ $\mathbb{k}$. O funcție $f : V \to \mathbb{k}$ se numește **formă liniară** dacă este o funcție liniară, adică $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$ pentru orice scalari $\alpha,\ \beta \in \mathbb{k}$ și orice vectori $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in V$.

Dacă în definiția transformărilor liniare vom considera $W = \mathbb{k}$ și îl privim ca un spațiu vectorial peste $\mathbb{k}$, atunci observăm că orice formă liniară este transformare liniară.

Exemplu

Fie $V = C[a,b]$ și $F : V \to \mathbb{R}$, $F(f) = \int_a^b f(x)dx$. Folosind proprietățile integralei definite, se verifică ușor că F este formă liniară.

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste corpul comutativ $\mathbb{k}$. O funcție $f : V \times V \to \mathbb{k}$ se numește **formă biliniară** dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

(i) $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ și orice $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$;

(ii) $f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ și orice $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.

Exemplu

Funcția $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x, y) = xy$ este formă biliniară. Într-adevăr, dacă considerăm $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$, atunci

$$f(\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x + \beta y)z = \alpha(xz) + \beta(yz) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$$

și

$$f(x, \alpha y + \beta z) = x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z).$$

Exemplu

Orice produs scalar este formă biliniară.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + x_2y_1$, unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ și $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Funcția f este formă biliniară. Într-adevăr, fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$. Atunci

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$$

și

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + 3(\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_1 =$$

$$= \alpha(x_1z_1 + 3x_1z_2 + x_2z_1) + \beta(y_1z_1 + 3y_1z_2 + y_2z_1) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta f(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Analog se demonstrează și

$$f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Forme biliniare

Definiție

O formă biliniară $f : V \times V \to \Bbbk$ se numește **simetrică** dacă $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Exemplu

Forma biliniară $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_1$ este simetrică. Într-adevăr, se observă că

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = y_1 x_2 + y_2 x_1 = x_1 y_2 + x_2 y_1 = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Definiție

O formă biliniară $f : V \times V \to \Bbbk$ se numește **antisimetrică** dacă $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Exemplu

Forma biliniară $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ este antisimetrică. Într-adevăr, se observă că

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = y_1 x_2 - y_2 x_1 = -(x_1 y_2 - x_2 y_1) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Există forme biliniare care nu sunt nici simetrice, nici antisimetrice.

Exemplu

Forma biliniară $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin
$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 + 2x_2 y_1$ nu este nici simetrică, nici antisimetrică.
Într-adevăr, se observă că $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = y_1 x_2 + 2y_2 x_1$ și că
$f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ și $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \neq -f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Forme biliniare

Pentru orice matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ putem construi forma biliniară $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prin $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y}$. Se verifică ușor că această funcție este formă biliniară. Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, atunci

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})^T A\mathbf{z} = (\alpha\mathbf{x}^T + \beta\mathbf{y}^T)A\mathbf{z} =$$

$$= \alpha(\mathbf{x}^T A\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}^T A\mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta f(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Analog se demonstrează și că $f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

Exemplu

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Considerăm funcția $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 & 2x_1 + x_2 + x_3 & 2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 y_1 + 3x_3 y_1 + 2x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_3 y_2 + 2x_2 y_3.$$

Matricea asociată unei forme biliniare

Oricărei forme biliniare i se poate asocia o matrice. Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ o bază în V. Fie $f : V \times V \to \mathbb{k}$ o formă biliniară. Atunci

$$[f]_B = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix},$$

unde $f_{ij} = f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$ pentru orice $1 \leq i, j \leq n$ se numește **matricea formei biliniare** f în baza B.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$. Fie bazele $B = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ și $B_1 = \{\mathbf{v}_1 = (3, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 1)\}$. Determinăm matricele formei biliniare f în bazele B și B_1.

Matricea lui f în baza B este $[f]_B = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$, unde $f_{11} = f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1$, $f_{12} = f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 2$, $f_{21} = f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 3$ și $f_{22} = f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 4$. Prin urmare $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Matricea lui f în baza B_1 este $[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} f'_{11} & f'_{12} \\ f'_{21} & f'_{22} \end{pmatrix}$, unde $f'_{11} = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = 28$, $f'_{12} = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 16$, $f'_{21} = f(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = 18$ și $f'_{22} = f(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) = 10$. Prin urmare $[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 28 & 16 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$, $f(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Fie baza canonică $B = \{1, x, x^2\}$. Determinăm matricea formei biliniare f în baza B,

Matricea lui f în baza B este $[f]_B = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$, unde

$$f_{11} = f(1,1) = \int_0^1 1 \cdot 1 dx = 1,$$

$$f_{12} = f(1,x) = \int_0^1 1 \cdot x dx = \frac{1}{2} = f(x,1) = f_{21},$$

$$f_{13} = f(1,x^2) = \int_0^1 1 \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} = f(x^2,1) = f_{31},$$

Matricea asociată unei forme biliniare

$$f_{22} = f(x,x) = \int_0^1 x \cdot x dx = \frac{1}{3},$$

$$f_{23} = f(x,x^2) = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \frac{1}{4} = f(x^2,x) = f_{32},$$

$$f_{33} = f(x^2,x^2) = \int_0^1 x^2 \cdot x^2 dx = \frac{1}{5}.$$

Prin urmare $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$

Teoremă

Fie V un $\Bbbk$-spațiu vectorial și $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ o bază în V. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ există o unică formă biliniară $f : V \times V \to \Bbbk$ astfel încât $f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = a_{ij}$ pentru orice $1 \leq i, j \leq n$.

Definiție

Spunem că o formă biliniară $f : V \times V \to \Bbbk$ este **pozitiv definită** dacă $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ pentru orice $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Spunem că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este **pozitiv definită** dacă $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ pentru orice $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Exemplu

Orice produs scalar este formă biliniară pozitiv definită.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$.
Forma biliniară f este pozitiv definită. Într-adevăr,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1 x_2 + 5x_2^2 = x_1^2 - 4x_1 x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.$$

Presupunem că $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, deci $(x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 = 0$ ceea ce implică $x_1 = x_2 = 0$, deci $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Nu orice formă biliniară este pozitiv definită.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_1$. Dacă alegem $\mathbf{x} = (1, -1)$ obținem $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -2 < 0$, ceea ce înseamnă că f nu este pozitiv definită.

Forme biliniare simetrice

Vom avea acum în vedere cazul matricelor simetrice. Reamintim că o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{i,j}$ este **simetrică** dacă $a_{ij} = a_{ji}$ pentru orice $i \neq j$. Echivalent, o matrice este simetrică dacă $A = A^T$.

Propoziție

O formă biliniară este simetrică dacă și numai dacă matricea formei biliniare relativ la o bază este simetrică.

Demonstrație.

Fie $f : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară. Fie B o bază în V și $A = [f]_B$ matricea formei biliniare f în baza B. Deoarece f este simetrică, avem $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Atunci $\mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$. Dar $\mathbf{y}^T A\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, deci $\mathbf{y}^T A\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T A\mathbf{x})^T$. Asta înseamnă că $\mathbf{x}^T A\mathbf{y} = (\mathbf{y}^T A\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{y}$ și $A = A^T$.

Reciproc, presupunem că există o bază B în V relativ la care matricea este simetrică. Atunci

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = (\mathbf{x}^T A\mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

deoarece $\mathbf{x}^T A\mathbf{y} \in \mathbb{R}$. $\square$

Teoremă

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *o matrice simetrică. Atunci*

a) A *este diagonalizabilă.*
b) *Toate valorile proprii ale matricei* A *sunt reale.*
c) *Dacă* λ *este o valoare proprie cu multiplicitatea algebrică* $\mu_a(\lambda) = k$, *atunci există* k *vectori proprii liniar independenți. Prin urmare,* $\dim(S_\lambda) = k$.

Forme biliniare simetrice

În cazul matricelor simetrice, vectorii proprii au proprietăți utile:

Teoremă

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică, atunci vectorii proprii corespunzători valorilor proprii distincte sunt ortogonali.

Demonstrație.

Fie λ_1 și λ_2 valori proprii distincte ale matricei A și $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ vectorii proprii corespunzători. Atunci $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1$ și $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2$. Pentru a demonstra că $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ sunt ortogonali vom arăta că $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$. Pentru acest lucru, vom utiliza următoarea scriere matriceală a produsului scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =: \mathbf{u}^T \mathbf{v}.$$

În cazul nostru, folosind proprietățile produsului scalar și faptul că A este simetrică (deci $A = A^T$), avem

$$\lambda_1\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle = \langle \lambda_1\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle = \langle A\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle = (A\mathbf{x}_1)^T \mathbf{x}_2 =$$

$$= \left(\mathbf{x}_1^T A^T\right)\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T \left(A^T\mathbf{x}_2\right) = \mathbf{x}_1^T (A\mathbf{x}_2) =$$

$$= \mathbf{x}_1^T (\lambda_2\mathbf{x}_2) = \langle \mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2\rangle = \lambda_2\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle.$$

Prin urmare,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle = 0.$$

Deoarece $\lambda_1 \neq \lambda_2$, trebuie să avem $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle = 0$, deci vectorii $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ sunt ortogonali.

Forme biliniare simetrice

Definiție

O matrice A se numește **ortogonală** dacă $A^T A = I_n$.

Exemplu

Considerăm matricea rotației de unghi θ, în plan:
$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Deoarece

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matricea A este ortogonală.

Observație

Dacă A este o matrice ortogonală, atunci A este inversabilă și $A^{-1} = A^T$.

Propoziție

Produsul a două matrice ortogonale este o matrice ortogonală.

Demonstrație.

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice ortogonale. Trebuie să demonstrăm că $(AB)^T(AB) = I_n$. Dar $(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = I_n$ deoarece $A^T A = I_n$ și $B^T B = I_n$, A și B fiind ortogonale. $\square$

Propoziție

O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este ortogonală dacă și numai dacă vectorii determinați de coloanele sale sunt ortognormați.

Demonstrație.

Fie $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$. Matricea A este ortogonală dacă și numai dacă $A^T A = I_n$, echivalent cu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^T \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = I_n$$

$\square$

Deci

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n \rangle \end{pmatrix} = I_n.$$

Egalitatea este echivalentă cu $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 0$ pentru orice $i \neq j$ și $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle = 1$, deci $\|\mathbf{a}_i\| = 1$, pentru orice i. Obținem că $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ este o mulțime ortonormată de vectori.

Teoremă

Dacă A este o matrice reală simetrică, atunci există o matrice ortogonală P și o matrice diagonală D astfel încât $A = PDP^T$.

Exemplu

Fie matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4.$$

Rădăcinile acestui polinom sunt $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 4$. Avem $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$, deci multiplicitățile algebrice ale valorilor proprii sunt $\mu_a(1) = 2$ și $\mu_a(4) = 1$.

Forme biliniare simetrice

Pentru $\lambda_1 = 1$ determinăm vectorii proprii rezolvând ecuația

$$(A - \lambda_1 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare obținem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și, notând $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, avem $x_1 = -\alpha - \beta$. Atunci subspațiul propriu corespunzător este

$$S_1 = \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(-1,1,0) + \beta(-1,0,1) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Prin urmare $\{\mathbf{v}_1 = (-1,1,0), \mathbf{v}_2 = (-1,0,1)\}$ formează bază în S_1 și $\mu_g(1) = \dim(S_1) = 2$.

Pentru $\lambda_2 = 4$ determinăm vectorii proprii rezolvând ecuația

$$(A - \lambda_2 I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

echivalentă cu

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, obținem sistemul

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Rezolvăm acest sistem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{2L_2+L_1 \\ 2L_3+L_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3+L_2}{\sim}$$

$$\overset{L_3+L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Forme biliniare simetrice

Prin urmare, renotând necunoscuta secundară $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, sistemul devine

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -\alpha \\ -3x_2 = -3\alpha \end{cases}$$

cu soluția $x_1 = x_2 = \alpha$. Deci vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 4$ sunt de forma $\mathbf{x} = (\alpha, \alpha, \alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci subspațiul propriu corespunzător este

$$S_4 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 1, 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Prin urmare $\{\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)\}$ formează bază în S_4 și $\mu_g(4) = \dim(S_4) = 1$.

Forme biliniare simetrice

Obținem că matricea A este diagonalizabilă și $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Observăm că $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_3$ și $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_3$, dar $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ nu sunt ortogonali deoarece $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 1$. Pentru a ortogonaliza $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ aplicăm procedeul Gram-Schmidt.

Fie $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)$. Construim

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)$$

deoarece $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 2$ și $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = 1$. Alegem $\mathbf{w}_2' = 2\mathbf{w}_2 = (-1, -1, 2)$.

Ortonormăm baza $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2', \mathbf{v}_3\}$. Obținem

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2'}{\|\mathbf{w}_2'\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Prin urmare, matricea căutată este

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Concluzie: Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică, atunci

- A este diagonalizabilă.
- toate valorile proprii ale matricei A sunt reale.
- dacă λ este o valoare proprie cu multiplicitatea algebrică $\mu_a(\lambda) = k$, atunci există k vectori proprii liniar independenți. Prin urmare, $\dim(S_\lambda) = k$.
- vectorii proprii corespunzători valorilor proprii distincte sunt ortogonali.
- există o matrice ortogonală P și o matrice diagonală D astfel încât $A = PDP^T$.

Forme pătratice

Fie V un $\mathbb{k}$-spațiu vectorial și $f : V \times V \to \mathbb{k}$ o formă biliniară simetrică.

Definiție

Funcția $Q : V \to \mathbb{k}$ definită prin $Q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x} \in V$ se numește **formă pătratică** (asociată formei biliniare f).

Exemplu

Forma pătratică corespunzătoare produsului scalar real (care este formă biliniară simetrică) este pătratul normei

$$Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2.$$

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ o formă biliniară simetrică, unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ și $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Atunci forma pătratică corespunzătoare este

$$Q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 3x_2x_2 = 4x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Forme pătratice

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică, atunci forma pătratică corespunzătoare este $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$.

Exemplu

Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Forma pătratică asociată este

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 & 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_3^2 =$$

$$= 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$$

Forme pătratice

Dacă $Q : V \to \mathbb{k}$ este o formă pătratică, atunci putem determina forma biliniară simetrică $f : V \times V \to \mathbb{k}$ care are proprietatea că $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})$. Într-adevăr, avem

$$Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) =$$

$$= Q(\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + Q(\mathbf{y}).$$

Prin urmare

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}[Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})].$$

Forma biliniară astfel obținută se numește **forma polară** sau **forma dedublată** a formei pătratice Q.

În cazul în care forma pătratică este definită pe $\mathbb{R}^n$, forma biliniară simetrică poate fi obținută prin dedublare, deci făcând următoarele înlocuiri în forma pătratică:

$$x_i^2 \rightsquigarrow x_i y_i, \ 1 \leq i \leq n$$

și

$$x_i x_j \rightsquigarrow \frac{x_i y_j + x_j y_i}{2}, \ 1 \leq i < j \leq n.$$

Exemplu

Fie forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_3$, unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Atunci

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - 4 \cdot \frac{x_1 y_3 + x_3 y_1}{2} =$$

$$= x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_1 y_3 - 2x_3 y_1.$$

Matricea asociată unei forme pătratice

Având în vedere că orice formă pătratică provine dintr-o formă biliniară simetrică, putem considera matricea asociată unei forme pătratice într-o bază. Aceasta coincide cu matricea corespunzătoare formei polare în acea bază. Dacă vom considera $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și baza canonică, se poate evita trecerea prin forma polară, ținându-se cont de definiția formei pătratice. Matricea în baza canonică se poate scrie direct astfel: elementele a_{ii} sunt coeficienții lui x_i^2 în forma pătratică, iar a_{ij}, cu $i \neq j$ sunt jumătate din coeficienții lui $x_i x_j$.

Matricea asociată unei forme pătratice

Exemplu

1. Fie $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma pătratică $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2$. Matricea corespunzătoare formei pătratice în baza canonică este

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Fie $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3$. Matricea corespunzătoare formei pătratice în baza canonică este

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemplu

Fie $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ forma pătratică

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_4 - 4x_2x_3 + 8x_3x_4.$$

Matricea corespunzătoare formei pătratice în baza canonică este

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricea asociată unei forme pătratice

Având în vedere că, pentru forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2 + 3x_3^2$, matricea asociată în baza canonică este

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

deci este diagonală, are sens să vorbim despre **forma (expresia) canonică** a unei forme pătratice ca fiind forma pătratică pentru care există o bază astfel încât matricea corespunzătoare în acea bază să fie diagonală. Matricea asociată unei forme biliniare este simetrică, prin urmare este diagonalizabilă. Ne putem întreba dacă, diagonalizând matricea asociată formei pătratice în baza canonică obținem expresia canonică a formei pătratice considerate.

Aducerea la forma canonică a formei pătratice

Teoremă

Fie $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *o formă pătratică. Atunci există o bază ortonormată* B *a lui* $\mathbb{R}^n$ *astfel încât, atunci când* Q *este exprimată în coordonatele din baza* B*, are forma canonică.*

Exemplu

Să se aducă la forma canonică forma pătratică:

$$Q(\mathbf{x}) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2.$$

și să se reprezinte grafic $Q(\mathbf{x}) = 14$.

Fie A matricea corespunzătoare formei pătratice în baza canonică:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizăm matricea A. Pentru a determina valorile proprii, calculăm polinomul caracteristic

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 7),$$

deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$.

Aducerea la forma canonică a formei pătratice

Pentru fiecare valoare proprie, determinăm vectorii proprii.
Fie $\lambda_1 = 2$. Rezolvăm ecuația $(A - 2I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvăm acest sistem:

$$2x + y = 0$$

Notăm necunoscuta secundară $x = \alpha$ și obținem soluția $x = \alpha, y = -2\alpha$. Prin urmare, vectorii proprii sunt de forma $(\alpha, -2\alpha)$. Alegem $v_1 = (1, -2)$.

Fie $\lambda_1 = 7$. Rezolvăm ecuația $(A - 7I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, echivalent

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvăm acest sistem:

$$-x + 2y = 0$$

Notăm necunoscuta secundară $y = \alpha$ și obținem soluția $x = 2\alpha, y = \alpha$. Prin urmare, vectorii proprii sunt de forma $(2\alpha, \alpha)$. Alegem $v_1 = (2, 1)$.

Deoarece vectorii v_1, v_2 sunt vectori proprii care corespund unor valori proprii distincte, ei sunt ortogonali (se poate verifica și direct). Deci $\{v_1, v_2\}$ este bază ortogonală în $\mathbb{R}^2$. Mai este necesar să normăm vectorii. Avem

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Prin urmare, $\{u_1, u_2\}$ este bază ortonormată în $\mathbb{R}^2$. Avem

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ și } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Deci

$$Q(\mathbf{y}) = 2y_1^2 + 7y_2^2$$

în baza $B = \{u_1, u_2\}$.

Aducerea la forma canonică a formei pătratice

Interpretare geometrică pentru $Q(\mathbf{x}) = 14$, echivalent cu $2x_1^2 + 7x_2^2 = 14$.
Considerăm Oy_1 axa ce are versor pe u_1, Oy_2 axa ce are versor pe u_2. Atunci

$$2y_1^2 + 7y_2^2 = 14 \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{7} + \frac{y_2^2}{2} = 1,$$

deci este o elipsă de semiaxe $\sqrt{7}$ și $\sqrt{2}$.

Clasificarea formelor pătratice

Formele pătratice pot fi clasificate în funcție de valorile pe care le pot lua.

Definiție

O formă pătratică $Q : V \to \mathbb{k}$ se numește

(a) **pozitiv definită** dacă $Q(\mathbf{x}) > 0$ pentru orice $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

(b) **negativ definită** dacă $Q(\mathbf{x}) < 0$ pentru orice $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

(c) **nedefinită** dacă există $\mathbf{x} \in V$ astfel încât $Q(\mathbf{x}) > 0$ și există $\mathbf{x} \in V$ astfel încât $Q(\mathbf{x}) < 0$.

(d) **pozitiv semi-definită** dacă $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ pentru orice $\mathbf{x} \in V$.

(e) **negativ semi-definită** dacă $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ pentru orice $\mathbf{x} \in V$.

Exemplu

Forma pătratică $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 5x_2^2$ este pozitiv definită deoarece $2x_1^2 + 5x_2^2 > 0$ pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Exemplu

Forma pătratică $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(\mathbf{x}) = x_1 x_2$ este nedefinită deoarece pentru $\mathbf{x} = (1, 1)$ avem $Q(x) = 1$ și pentru $\mathbf{x} = (-1, 1)$ obținem $Q(\mathbf{x}) = -1$.

Clasificarea formelor pătratice

Exemplu

Forma pătratică $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(\mathbf{x}) = 5x_2^2$ este pozitiv semi-definită deoarece $5x_2^2 > 0$ și pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2$, $Q(\mathbf{x}) = 0$.

Teoremă

Fie $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ o formă pătratică, unde A este o matrice simetrică. Atunci:

(a) *$Q(\mathbf{x})$ este pozitiv definită dacă și numai dacă toate valorile proprii ale matricei A sunt pozitive.*

(b) *$Q(\mathbf{x})$ este negativ definită dacă și numai dacă toate valorile proprii ale matricei A sunt negative.*

(c) *$Q(\mathbf{x})$ este nedefinită dacă și numai dacă matricea A are valori proprii și pozitive și negative.*

Exemplu

Forma pătratică $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2^2 + 6x_2x_3 - 3x_3^2$ are, în baza canonică, matricea $[Q] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Polinomul caracteristic al matricei $[Q]$ este

$$P_{[Q]}(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 24\lambda - 36 = -(\lambda - 2)(\lambda + 6)(\lambda - 3),$$

deci valorile proprii sunt $2, -6$ și 3. Conform teoremei anterioare, matricea este nedefinită.

Clasificarea formelor pătratice

Exemplu

Forma pătratică $Q(\mathbf{x}) = 4x_1^2 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$ are, în baza canonică, matricea $[Q] = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic al matricei $[Q]$ este

$$P_{[Q]}(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 8),$$

deci valorile proprii sunt 2 și 8. Conform teoremei anterioare, matricea este pozitiv definită.