GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 12

Perpendicularitatea varietăţilor liniare

Definiţia 1. Fie L_1 şi L_2 două varietăţi liniare în $\mathbb{R}^n$ cu subspaţiile directoare W_1 şi respectiv W_2. L_1 şi L_2 se numesc *perpendiculare* dacă $W_1 \perp W_2$. L_1 şi L_2 se numesc *normale* dacă $W_1^{\perp} = W_2$

De exemplu două linii în spaţiu pot fi perpendiculare, dar nu normale. Complementul ortogonal al unei drepte în $\mathbb{R}^3$ este un plan!

Fie $L_1 = p_1 + < v_1 >$ şi $L_2 = p_2 + < v_2 >$ două drepte în $\mathbb{R}^n$. Prin definiţie $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow < v_1, v_2 >= 0$, unde $<,>$ este produsul scalar canonic în $\mathbb{R}^n$.

Fie $L = p + < v >$ o linie şi $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \alpha\}$ un hiperplan în $\mathbb{R}^n$. Spaţiu director al dreptei este $< v >$ iar spaţiul director al hipelplanului este $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0\}$. Spaţiu ortogonal al lui W, $W^{\perp} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid < z, x >= 0, (\forall)x \in W\}$. L şi H sunt normale $\Leftrightarrow W^{\perp} =< v > \Leftrightarrow v$ este proporţional cu ${}^t(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Definiţia 2. Fie $p, q \in \mathbb{R}^n$. Distanţa între p şi q, $d(p, q) = ||p-q|| = \sqrt{< p - q, p - q >}$.

Distanţa se poate defini în acelaşi mod pe orice spaţiu euclidian. În cazul particular de mai sus, în care lucrăm cu produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$, distanţa este distanţa euclidiană, anume pentru $p, q \in \mathbb{R}^n$, $d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i)^2}$. Este lungimea diagonalei paralelipipedului cu laturile de lungimi $p_i - q_i$.

Distanţa satisface următoarele proprietăţi.

- $d(p, q) \geqslant 0$ şi $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$
- $d(p, q) = d(q, p)$, pentru $(\forall)p, q \in \mathbb{R}^n$
- $d(p, q) \leqslant d(p, r) + d(r, q)$ pentru $(\forall)p, q, r \in \mathbb{R}^n$.

Fie $L = p + < v >$ şi $L' = p' + < v' >$ două drepte în $\mathbb{R}^n$. Cosinusul unghiului θ dintre aceste dreptele L şi L' este $\cos(\theta) = \frac{< v, v' >}{||v|| \cdot ||v'||}$.

Remarcă 3. Să aflăm o formulă pentru distanţa de la un punct $p \in \mathbb{R}^n$ la un hiperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = \alpha\}$. Normala la H, după cum am văzut mai sus, are vectorul director $a = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. $d(p, H) = \min_{q \in H} d(p, q)$. Această distanţă minimă se realizează pe normala de la p la H. Notăm $n(p)$ normala la H ce trece prin p. Fie $\{q_0\} = n(p) \cap H$. Avem $d(p, H) = d(p, q_0)$.

Cu aceste observaţii obţinem formula

$$d(p, H) = \frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n - \alpha|}{||a||}$$

Definiţia 4. Se numeşte *reper* al unui spaţiu vectorial V o bază ordonată a lui V. Într-un spaţiu euclidian un reper se numeşte *ortonormat* dacă baza este ortonormată.

O remarcă importantă este că spre deosebire de spaţiul vectorial V, în avem un punct special, anume 0_V (elementul neutru pentru adunarea vectorilor), în spaţiul V, nespecificând că este un spaţiu vectorial, toate punctele sunt la fel.

În $\mathbb{R}^n$ avem reperul format din baza canonică $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Matricea formată cu vectorii din $\mathcal{B}$ este matricea I_n care are determinantul 1. Matricea $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ de trecere de la reperul canonic $\mathcal{B}$ la un alt reper $\mathcal{B}'$ este inversabilă, şi are determinantul pozitiv sau negativ. Vom spune că reperul este pozitiv dacă $\det(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}) > 0$, altfel negativ. De exemplu reperul $\mathcal{B}' = \{e_2, e_1, e_3, \ldots, e_n\}$ este negativ pentru că am permutat primele două coloane din I_n între ele şi astfel $\det(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}) = -1$.

În cele ce urmează vom lucra în $\mathbb{R}^3$. Un triplet de vectori $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ este *pozitiv*, dacă un observator situat pe w vede unghiul de la u spre v în sens trigonometric (invers acelor de ceasornic). În caz contrar reperul este negativ. Considerăm un reper ortonormat pe care îl vom nota $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$, (de exemplu reperul canonic $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$).

Definiţia 5. Fie $u, v \in \mathbb{R}^3$. *Produsul vectorial*, notat cu $u \times v$ este vectorul din $\mathbb{R}^3$ cu proprietăţile

- $u \times v \perp < u, v >$ (planul generat de u şi v)
- reperul $(u, v, u \times v)$ este pozitiv
- $||u \times v||$ este egală cu aria paralelogramului construit cu vectorii u şi v, mai precis $||u \times v|| = ||u|| \cdot ||v|| \sin(u, v)$.

Observaţia 6. *Fie n vectorul unitar perpendicular pe planul generat de vectorii $u, v \in \mathbb{R}^3$, a.î. (u, v, n) este un reper pozitiv. Atunci $u \times v = ||u|| \cdot ||v|| sin(u, v)\ n$.*

Propoziţia 7. *Pentru $u, u', v, v' \in \mathbb{R}^3$ şi pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt adevărate:*

- *$u \times v = 0$ dacă u, v sunt coliniari (paralelogramul este degenerat),*
- *$v \times u = -u \times v$,*
- *$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ este aplicaţie biliniară: $(\alpha u + \beta u') \times v = \alpha u \times v + \beta u' \times v$ şi $u \times (\alpha v + \beta v') = \alpha u \times v + \beta u \times v'$*

Teorema 8. *Fie $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ o bază ortonormată pozitivă în $\mathbb{R}^3$. Pentru $u, v \in \mathbb{R}^3$,*

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Definiţia 9. Fie, $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. *Produsul mixt* al vectorilor u, v, w, se notează (u, v, w) şi este definit prin $(u, v, w) = < u, v \times w > \in \mathbb{R}$.

Observaţia 10. *Din proprietăţile produsului scalar şi a celui vectorial rezultă că produsul mixt* $(\,,\,,\,) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *este liniar în fiecare argument.*

Teorema 11. *Fie* $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ *o bază ortonormată pozitivă în* $\mathbb{R}^3$. *Pentru* $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, *avem*

- $(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$,
- $(u, v, w) = -(v, u, w)$; *semnul nu se schimbă la permutări ciclice* $(u, v, w) = (v, w, u)$,
- *dacă* u, v, w *sunt necoplanari, atunci* $|(u, v, w)|$ *reprezintă volumul paralelipipedului construit cu vectorii* u, v *şi* w,
- $(u, v, w) = 0 \Leftrightarrow u, v, w$ *sunt coplanari.*

Folosind produsul mixt se poate da o formulă pentru distanţa între două drepte necoplanare (vectorii directori sunt liniar independenţi). Fie $L_1 = q_1 + < v_1 >$ şi $L_2 = q_2 + < v_2 >$ cele două drepte, unde $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^3$ şi $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ sunt vectori liniar independenţi. $d(L_1, L_2) = \min_{P_1 \in L_1, P_2 \in L_2}\{d(P_1, P_2)\}$. Bineînţeles, $d(L_1, L_2)$ se atinge pe perpendiculara comună n a dreptelor L_1 şi L_2. Fie $\{A\} = L_1 \cap n$ şi $\{B\} = L_2 \cap n$. $d(L_1, L_2) = d(A, B)$. AB este înălţimea paralelipipedului format cu muchiile q_1q_2, v_1, v_2. Lungimea acestei înălţimi este volumul paralelipipedului împărţit la aria bazei, paralelogramul de laturi v_1, v_2. Menţionând că $q_1q_2 = q_2 - q_1$, avem $d(L_1, L_2) = \frac{(q_1q_2, v_1, v_2)}{||v_1 \times v_2||} = \frac{(q_2 - q_1, v_1, v_2)}{||v_1 \times v_2||}$.

Izometrii

Definiţia 12. Se numeţe *izometrie* $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ cu proprietatea că pentru $(\forall)p, q \in \mathbb{R}^n$, $d(\phi(p), \phi(q)) = d(p, q)$.

Este uşor de arătat că:
• Orice izometrie este o aplicaţie injectivă.
• Orice izometrie $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ transformă varietăţi liniare în varietăţi liniare de aceeaşi dimensiune.
• Izometriile $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ formează grup cu operaţia de compunere a aplicaţiilor.

Teorema 13. $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *este izometrie dacă şi numai dacă există un reper ortonormat* $\mathcal{B}$ *în* $\mathbb{R}^n$, $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \phi(x) = A \cdot x + b$, *unde* $A \in O_n(\mathbb{R})$ *şi* $b \in \mathbb{R}^n$.

Translaţia cu $b \in \mathbb{R}^n$, $\phi_b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \phi(x) = x + b$, corespunzătoare matricei I_n în reperul canonic, este izometrie.

Considerăm $A \in O_n(\mathbb{R})$, atunci $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definită prin $\phi(x) = Ax$ este o izometrie. Pentru $A \in SO_n(\mathbb{R})$, avem rotaţii.

Să mai menţionăm simetria faţă de o varietate liniară, $L \subset \mathbb{R}^n$. Notăm $s_L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. $s_L(p) = p'$, unde p' se obţine astfel: considerăm varietatea normală la L ce trece prin p, $L^{\perp}(p)$ şi $\{q\} = L \cap L^{\perp}(p)$. p' simetricul lui p faţă de q pe dreapta pq, sau q este mijlocul segmentului $[p, p']$. Deci $q = \frac{p+p'}{2} \Leftrightarrow p' = 2q - p$. Punctul $q = \mathrm{pr}_L(p)$, proiecţia lui p pe L. Deci $s_L(p) = 2\,\mathrm{pr}_L(p) - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(p), (\forall)p \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow s_L = 2\,\mathrm{pr}_L - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Pentru $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = \alpha\}$, un hiperplan , atunci pentru $p \in \mathbb{R}_n$, $s_L(p) = p + 2\frac{\alpha - <a,p>}{||a||^2}a$. Dacă hiperplanul trece prin origine ($\alpha = 0$), atunci $s_L(p) = p - 2\frac{<a,p>}{||a||^2}a$. Se demonstrează în acest caz că matricea $A = M_{\mathcal{B}}(s_L)$ într-un reper ortonormat pozitiv $\mathcal{B}$ are $\det(A) = -1$.

Luăm reperul $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ matricea $A = M_{\mathcal{B}}(s_L)$ are $C_j(A) = e_j - 2\frac{a_j}{||a||^2}a$. Se dezvoltă $\det(A)$ în 2^n termeni. $\det(A) = \det(I_n) + \sum_{j=1}^{n} \det(A_j) + \sum_{i,j=1}^{n} \det(A_{i,j}) + \ldots$. A_j este matricea I_n cu excepţia coloanei j care este $\frac{-2a_j}{||a||^2}a$. Dezvoltăm după linia j, şi obţinem $\det(A_j) = \frac{-2a_j^2}{||a||^2}$. Matricele $A_{i,j}$ şi toate celelalte au două sau mai multe coloane proporţinale (de exemplu în fiecare $A_{i,j}$ coloanele i şi respectiv j sunt multipli de a), deci $\det(A_{i,j}) = 0$. Obţinem $\det(A) = 1 - \frac{2}{||a||^2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1 - 2\frac{||a||^2}{||a||^2} = 1 - 2 = -1$.

Conice

Voi începe prin a enumera conicele şi în primul rând cele ce pot fi descrise ca locuri geometrice.

Elipsa se defineşte ca fiind locul geometric al punctelor din plan ce au suma distanţelor la două puncte fixate (numite focare, notate în figura de mai jos cu F_1 şi F_2) constantă. Notăm constanta cu $2a$. Ecuaţia elipsei ce rezultă din această definiţie este $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Trecem radicalul ce conţine $(x-c)^2$ în membrul drept, ridicăm la pătrat, reducem termenii asemenea şi obţinem $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$. Ridicăm din nou la pătrat, reducem termenii asemenea şi ajungem la ecuaţia $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Avem $a > c > 0$ şi facem notaţia $b^2 = a^2 - c^2 > 0$. Cu această notaţie ecuaţia devine $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Împărţind cu a^2b^2 obţinem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia redusă* a elipsei. În figura de mai jos avem o elipsă orizontală cu $a > b$. Semiaxa majoră, mai lungă, de lungime a, este pe Ox. Semiaxa minoră, mai scurtă, este de lungime b şi este pe axa Oy. În afară de elipsă, punctat, am figurat şi dreptunghiul de laturi $2a$ şi $2b$, centrat în $O(0,0)$, dreptunghi în care înscriem elipsa. Cantitatea $0 < e = \frac{c}{a} < 1$ se numeşte *excentricitatea elipsei*. Elipsa este o conică cu centru.

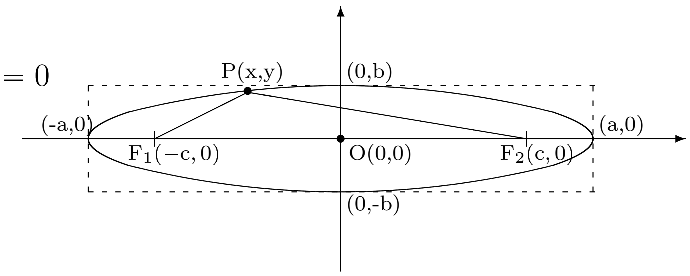
Elipsa

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

centru: O(0,0)

lungime semiaxe: a, b

$b^2 = a^2 - c^2, a > c > 0$



Cercul este elipsa pentru care focarele F_1 şi F_2 coincid. În acest caz, cele două focare se confundă cu centrul cercului. Deci pentru $c = 0$ semiaxele sunt egale şi ecuaţia cercului de centru $O(0, 0)$ este $x^2 + y^2 = r^2$, unde r este raza cercului. Cercul este deci locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fixat, numit centrul cercului.

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan pentru care diferenţa distanţelor la două puncte fixate este constantă. Notăm constanta cu $2a$. Folosind definiţia scriem ecuaţia $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Făcând calcule similare ca şi în cazul elipsei ajungem la relaţia $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$. $c > a > 0$ şi notăm $b^2 = c^2 - a^2$. Împărţind la a^2b^2 obţinem *ecuaţia redusă* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hiperbola are două asimptote, anume dreptele de ecuaţii $y = \pm\frac{b}{a}x$. În figură, în afară de hiperbolă am reprezentat punctat dreptunghiul centrat în $O(0, 0)$ de laturi $2a$ şi $2b$, dreptunghi ale cărui diagonale sunt cele două asimptote. Hiperbola este conică cu centru. *Excentricitatea hiperbolei* este $e = \frac{c}{a} > 1$.

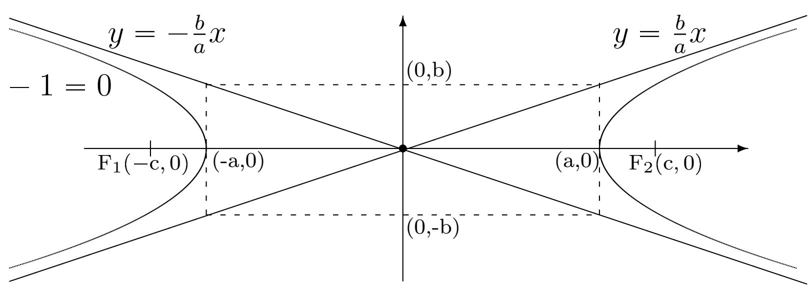
Hiperbola

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

centru: O(0,0)

asimptote: $y = \pm\frac{b}{a}x$

$b^2 = c^2 - a^2, c > a > 0$



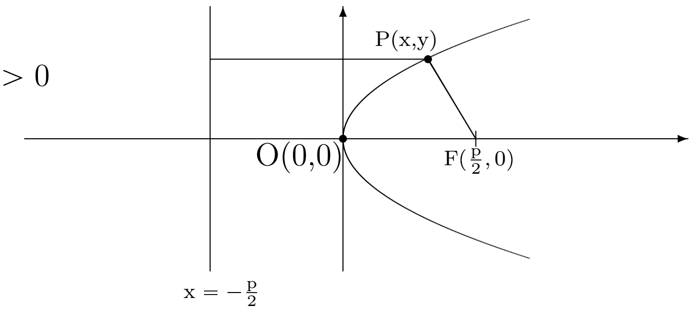
Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fixat numit *focar* şi de o dreaptă fixată, numită *directoare*. Scriind ecuaţia ce reiese din definiţie şi făcând calculele algebrice ca şi în cazurile anterioare obţinem *ecuaţia redusă* $2px = y^2$, sau $2py = x^2$. În primul caz dreapta directoare este verticală, iar în al doilea caz este orizontală. Parabola nu are centru. *Excentricitatea parabolei = 1.*

Parabola

ecuaţie redusă: $2px = y^2, p > 0$

fără centru

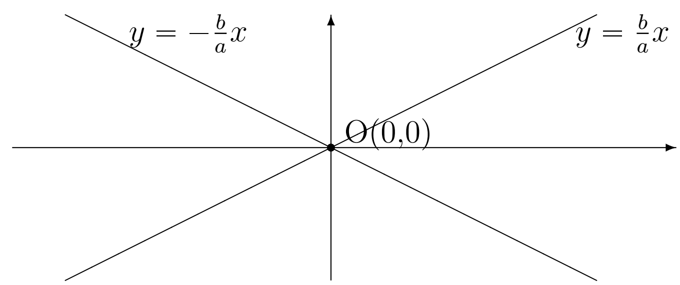
axă de simetrie: $y = 0$



Reuniune de drepte concurente

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

centru: O(0,0)

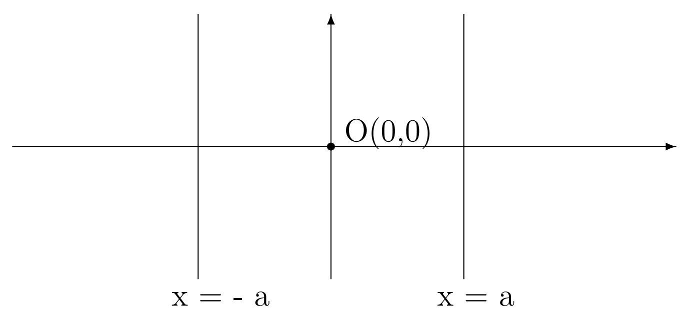


Cele două drepte concurente au ca centru punctul lor de intersecţie, în acest caz, punctul $O(0,0)$.

Reuniune de drepte paralele

ecuaţie redusă: $x^2 - a^2 = 0$

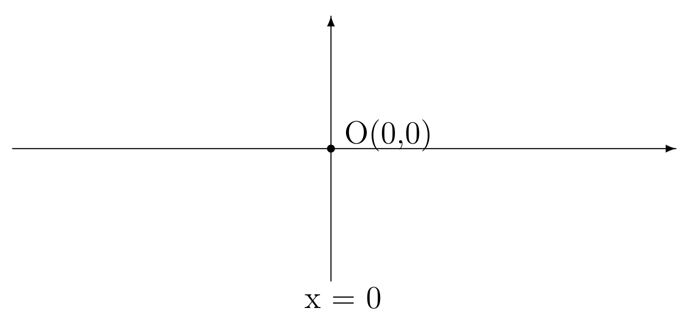
infinitate de centre



Două drepte confundate

ecuaţie redusă: $x^2 = 0$

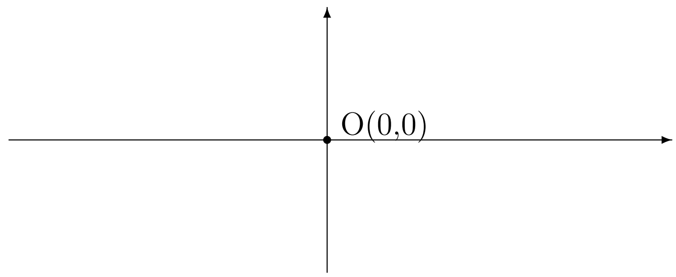
infinitate de centre



Un punct

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

centru: O(0,0)



Mulţimea vidă

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$