GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 5
Sume directe. Sisteme de ecuaţii liniare

Sume directe externe

Dacă $V_1, V_2, \ldots, V_n$ spaţii vectoriale, atunci suma lor directă este $V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$, cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari pe componente.

Mai precis:

- $(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, \ldots v_n + w_n)$, unde $v_j, w_j \in V_j$, pentru $(\forall) j = \overline{1, n}$.
- $\alpha \cdot (v_1, \ldots, v_n) = (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$

Se mai notează cu $\bigoplus_{i=\overline{1,n}} V_i$.

Pentru fiecare $j = \overline{1, n}$, definim

- $q_j : V_j \longrightarrow \bigoplus_{i=\overline{1,n}} V_i$, $q_j(v) = (0, \ldots, v, \ldots 0)$, cu v pe poziţia j. q_j este morfism injectiv.
- $\pi_j : \bigoplus_{i=\overline{1,n}} V_i \longrightarrow V_j$, $\pi(v_1, \ldots, v_n) = v_i$. π_j este morfism surjectiv.

Propoziţia 1. *Fie V_1, V_2 spaţii vectoriale finit dimensionale. Atunci*

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

Demonstraţie: $\pi_1 : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1$, $\pi_1(v_1, v_2) = v_1$ este morfism surjectiv de spaţii vectoriale. $\mathrm{Ker}(\pi_1) = 0 \oplus V_2 = q_2(V_2) \cong V_2$ (pentru că q_2 este injectiv). Din teorema fundamentala de izomorfism rezultă că $V_1 \oplus V_2 / 0 \oplus V_2 \cong V_1$. Din teorema rang-defect rezultă că $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(\mathrm{Im}(\pi_1)) + \dim(\mathrm{Ker}(\pi_1)) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

$\square$

Corolarul 2. *Dacă avem spaţiile vectoriale $V_1, V_2, \ldots, V_n$ finit dimensionale, atunci*

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n) = \dim(V_1) + \dim(V_2) + \cdots + \dim(V_n)$$

unde $n \in \mathbb{N}^\star, n \geqslant 2$.

Sume directe interne

Fie V spaţiu şi $V_1, V_2, \ldots, V_n$ subspaţii în V. Spunem că V este suma directă internă a familiei $\{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$, dacă

- $V = V_1 + \ldots + V_n$
- pentru orice $i : V_i \cap (\sum_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} V_j) = 0$.

(aceste două condiţii sunt echivalente cu faptul că orice $v \in V$ se exprimă în mod unic ca $v = v_1 + \ldots + v_n$ cu $v_i \in V_i, \forall i$).

În acest caz scriem $V = V_1 \dot{\oplus} V_2 \dot{\oplus} \ldots \dot{\oplus} V_n$, sau $V = \dot{\bigoplus}_{i=1,n} V_i$.

Observaţia 3. Dacă $V = \dot{\bigoplus}_{i=1,n} V_i$, atunci $\dot{\bigoplus}_{i=1,n} V_i \cong \bigoplus_{i=1,n} V_i$, deoarece aplicaţia $f : \bigoplus_{i=1,n} V_i \longrightarrow \dot{\bigoplus}_{i=1,n} V_i$, definită prin $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ este izomorfism de spaţii vectoriale. În particular $\dim(\dot{\bigoplus}_{i=1,n} V_i) = \dim(\bigoplus_{i=1,n} V_i)$. Mai mult, dacă $\mathcal{B}_i$ e bază în V_i pentru fiecare $i = \overline{1,n}$, atunci $\cup_{i=1,n} \mathcal{B}_i$ este bază în V.

Sisteme de ecuaţii liniare

Pentru a începe să discutăm despre rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare, vom introduce în cele ce urmează rangul unei matrice.

Definiţia 4. Se numeşte *rangul* matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R), A \neq 0_{m,n}$, ordinul maxim al unui minor nenul al matricii A . Vom nota rangul cu $\text{rang}(A)$. Prin convenţie $\text{rang}(0_{m,n}) = 0$.

Aşadar $\text{rang}(A) = r \Leftrightarrow A$ are un minor de ordin r nenul şi toţii minorii de ordin mai mare (dacă există) sunt nuli.

Observaţia 5.
(1) $\text{rang}(A) \leqslant \min\{m, n\}$
(2) $\text{rang}({}^tA) = \text{rang}(A)$
(3) $\text{rang}(A) = r \Leftrightarrow A$ are un minor de ordin r nenul şi toţi minorii de ordin $r+1$ nuli.

Demonstraţie: "$\Rightarrow$ "Clar. "$\Leftarrow$" Din formula Laplace, un minor de ordin $s > r+1$, deci e nul. Sau altfel: Folosind dezvoltarea după o linie, rezultă că orice minor de ordin $r+2$ e combinaţie liniară de ordin $r+1$, deci nul, şi aşa mai departe prin inducţie.

□

(4) $\text{rang}(A \cdot B) \leqslant \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$ ptr. orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$ şi $B \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$.

Demonstraţie: Din formula Binet-Cauchy un minor de ordin r a matricei $A \cdot B$ este o combinaţie liniară de minori de ordin r ai matricei A (respectiv B), deci $\text{rang}(A \cdot B) \leqslant \text{rang}(A)$ şi $\text{rang}(A \cdot B) \leqslant \text{rang}(B)$.

□

(5) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ inversabilă şi $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, atunci $\text{rang}(U \cdot A) = \text{rang}(A) = \text{rang}(A \cdot V)$.

Demonstraţie: $\mathrm{rang}(U\cdot A) \leqslant \min\{\mathrm{rang}(U), \mathrm{rang}(A)\} \leqslant \mathrm{rang}(A)$ şi $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(U^{-1}(U\cdot A)) \leqslant \mathrm{rang}(U\cdot A)$. Din cele două inegalităţi ne rezultă prima egalitate. Similar se demonstrează şi a două egalitate.

□

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$. Notăm cu $C_1(A), \ldots, C_n(A)$ coloanele matricei A. $C_j(A) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$.

Teorema 6 (Kronecker)**.** $\mathrm{rang}(A) = \dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$

Deci teorema Kronecker ne spune că $\mathrm{rang}(A)$ este egal cu dimensiunea spaţiului generat de coloanele matricei A. Acest spaţiu este un subspaţiu în $\mathbb{R}^m$.

Demonstraţie: Dacă $A = 0$, este clar. Presupunem $A \neq 0$. Fie $r \in \mathbb{N}^\star$ a.î. există un minor nenul de ordin r şi toţi minorii de ordin $r+1$ care-l bordează, (în caz că există) sunt nuli. Arătăm că $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >= r$. Cum $\mathrm{rang}(A)$ este un astfel de r, va rezulta că $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >= \mathrm{rang}(A)$. În plus, rezultă că orice astfel de r este egal cu $\mathrm{rang}(A)$.

Fără a restrânge generaliatea putem presupune că minorul Δ aflat la intersecţia primelor r linii cu primele r coloane din A este nenul. Atunci $C_1(A), \ldots, C_r(A)$ sunt liniar independente. Altfel, am avea o relaţie de tipul $C_j(A) = \sum_{1\leqslant i\leqslant r; i\neq j} \alpha_i C_i(A)$, pentru nişte $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant r; i\neq j}$. Notând cu $\widetilde{C_i(A)}$ coloana de lungime r obţinută luând primele r linii din $C_i(A)$, obţinem $\widetilde{C_j(A)} = \sum_{1\leqslant i\leqslant r; i\neq j} \alpha_i \widetilde{C_i(A)}$, deci în Δ o coloană este combinaţie de celelalte coloane, deunde $\Delta = 0$, o contradicţie. Deci coloanele $C_1(A), \ldots, C_r(A)$ sunt liniar independente de unde $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) > \geqslant r$.

Arătăm că $C_j(A) \in < C_1(A), \ldots, C_r(A) >$ pentru orice $j > r$, de unde va rezulta că $\dim < C_1(A), \ldots, C_n(A) >= r$.

Fie $j > r$ c si $1 \leqslant i \leqslant m$. Atunci $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$ deoarece pentru $1 \leqslant i \leqslant r$ acest determinant are două linii (i şi $r+1$) egale, iar pentru $i > r$ e un minor de ordin $r+1$ care bordează Δ.

Dezvoltând după ultima linie rezultă $d_1 \cdot a_{i1} + \ldots + d_r \cdot a_{ir} + \Delta \cdot a_{ij} = 0$, iar $d_1, \ldots d_r$ sunt nişte complemenţi algebrici ce nu depind de i.

Obţinem că $a_{ij} = -\Delta^{-1} d_1 a_{i1} - \ldots - \Delta^{-1} d_r a_{ir}$ pentru orice $1 \leqslant i \leqslant m$, de unde $C_j(A) = -\Delta^{-1} d_1 C_1(A) - \ldots - \Delta^{-1} d_r C_r(A)$, ceea ce doream.

□

Teorema 7 (versiunea pe linii a teoremei Kronecker)**.** $\mathrm{rang}(A) = \dim < L_1(A), \ldots, L_m(A) >$, *unde* $L_i(A)$ *sunt liniile matricei* A*,* $L_i(A) \in \mathbb{R}^n$*.*

Demonstraţie: Rezultă din faptul că $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}({}^tA)$.

□

Corolarul 8 (al demonstraţiei teoremei Kronecker)**.** *Dacă pentru matricea* A *există un minor de ordin* r *nenul şi toţi minorii de ordin* $r+1$ *care-l bordează sunt nuli, atunci* $\mathrm{rang}(A) = r$*.*

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Considerăm sistemul de ecuaţii liniare cu coeficienţi reali:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

Sistemul scris mai sus este un sistem de m ecuaţii cu n necunoscute. Matricea asociată sistemului este $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ iar coloana termenilor liberi este $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Sistemul (1) se poate scrie sub formă matriceală $AX = B$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e matricea necunoscutelor.

Considerăm şi matricea extinsă,

$$A^e = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R}).$$

care se obţine din matricea A adăugând coloana $n+1$ formată din membrii drepţi ai sistemului. Fiecare coloană este un vector în $\mathbb{R}^m$.

Definiţia 9. Se numeşte *soluţie* a sistemului de mai sus un vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ care verifică toate ecuaţiile sistemului.

Un sistem care admite cel puţin o soluţie se numeţe *compatibil.* Altfel acesta se numeşte *incompatibil.*

Teorema 10 (Kronecker-Capelli)**.** *Sistemul* (1) *este compatibil dacă şi numai dacă* $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e)$.

Demonstraţie: Observăm că $AX = x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A)$, deci sistemul (1) este echivalent cu $x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A) = B$.

"$\Rightarrow$" Dacă sistemul (1) este compatibil, fie $x_1, x_2, \ldots x_n$ o soluţie. Atunci $B = x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A) \in < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$ şi deci $< C_1(A), \ldots, C_n(A), B >= < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$. Avem $\dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A), B >) = \dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A) >)$, şi din teorema Kronecker rezultă $\text{rang}(A^e) = \text{rang}(A)$.

"$\Leftarrow$" Avem $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e) \Rightarrow \dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A) >) = \dim(< C_1(A), \ldots, C_n(A), B >)$. Dar $< C_1(A), \ldots, C_n(A) > \subset < C_1(A), \ldots, C_n(A), B >$, şi pentru că avem egalitate de dimensiuni atunci avem egalitatea spaţiilor. Rezultă că $B \in < C_1(A), \ldots, C_n(A)$, adică există $x_1, \ldots, x_n$ a.î. $B = x_1C_1(A) + \ldots + x_nC_n(A) \Rightarrow x_1, \ldots, x_n$ este soluţie a sistemului (1) .

□

Cum se rezolvă sistemul (1) atunci când $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e)$?

Voi prezenta în continuare metoda eliminării Gauss-Jordan.

Observăm că un sistem liniar peste corpul $\mathbb{R}$ este echivalent (adică are aceleaşi soluţii) cu un sistem obţinut prin aplicarea de un număr finit de ori a unor operaţii de tipul:

- permutarea a două ecuaţii
- înmulţirea unei ecuaţii cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}^\star$
- adunarea la o ecuaţie a unei alte ecuaţii înmulţite cu $\alpha \in \mathbb{R}^\star$.

Pentru sistemul (1) scris sub forma matriceală $AX = B$, aceste operaţii înseamnă:

- permutarea a două linii
- înmulţirea unei linii cu $\alpha \in \mathbb{R}^\star$
- adunarea la o linie a unei alte linii înmulţite cu $\alpha \in \mathbb{R}^\star$

operaţii aplicate matricelor A şi B, deci matricei extinse $A^e = (A|B)$.

Definiţia 11. Se numeşte matrice eşalon o matrice cu proprietăţile:

- liniile nule (dacă) există se află sub liniile nenule
- primul element nenul (de la stânga la dreapta) de pe fiecare linie nenulă este 1; acesta numindu-se pivotul liniei

- pivotul de pe linia $i+1$ este la dreapta pivotului de pe linia i, pentru orice i
- orice pivot este singurul element nenul de pe coloana sa

Propoziţia 12. *Orice matrice poate fi transformată după un număr finit de operaţii cu linii într-o matrice eşalon.*

Putem da acum algoritmul după Gauss-Jordan de rezolvare a sistemelor de ecuaţii.

Scriem matricea A^e a sistemului şi o aducem la forma eşalon. Dacă există un pivot pe ultima coloană atunci sistemul este incompatibil (în sistemul echivalent avem o ecuaţie $0 = 1$).

Altfel, necunoscutele corespunzătoare coloanelor cu pivoţi sunt coloanele principale, celelate secundare. Trecem necunoscutele secundare în membrul drept şi le dăm valori arbitrare în $\mathbb{R}$ şi apoi calculăm necunoscutele principale în funcţie de cele secundare. Sistemul e compatibil determinat (adică are soluţie unică) dacă avem un pivot pe fiecare coloană în afară de ultima.

Observăm că numărul pivoţilor $=$ rang(A^e) iar rang(A) numărul pivoţilor din primele n coloane şi totodată numărul variabilelor principale.