

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 2

Dezvoltări ale determinanților

Un caz particular al formulei Laplace, deja întâlnit de dumneavoastră în clasa a XI-a, este cel al dezvoltării după o linie sau după o coloană. Pentru că formula Laplace am dat-o pentru o mulțime de indici de linii, voi da în continuare formula de dezvoltare a determinantului pe linie.

Considerăm $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și aplicăm formula Laplace pentru $|I| = |J| = 1$. Pentru $I = \{i\}, J = \{j\}$ minorul de ordin 1 asociat acestor mulțimi este $M = \det(A_{i,j}) = \det(a_{i,j}) = a_{i,j}$, iar complementul său algebric este $M'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{\bar{i},\bar{j}}) = (-1)^{i+j} \det(A_{[n]\setminus\{i\},[n]\setminus\{j\}})$.

Aplicând formula Laplace pentru $I = \{i\}$ avem

$$(1) \quad \det(A) = a_{i1}M'_{i1} + a_{i2}M'_{i2} + \dots + a_{in}M'_{in},$$

adică expresia dezvoltării determinantului după linia i .

Putem face și formula de dezvoltare a determinantului pe coloană. Considerăm coloana j a unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, și aplicând formula Laplace pentru dezvoltarea pe coloana $J = \{j\}$ obținem $\det(A) = a_{1j}M'_{1j} + a_{2j}M'_{2j} + \dots + a_{nj}M'_{nj}$, unde $M'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{\bar{i},\bar{j}})$ este ca și mai sus complementul algebric al matricei (a_{ij}) .

Pentru $p \neq i$ considerăm matricea $B_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obținută din A înlocuind $L_p(A)$, cu $L_i(A)$. Deci $L_p(B_p) = L_i(A) = L_i(B_p)$.

$$B_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_p(B_p) = L_i(A) \\ \leftarrow L_i(B_p) = L_i(A) \end{matrix}$$

Din proprietățile determinanților avem $\det(B_p) = 0$. Dezvoltând $\det(B_p)$ după linia p avem pentru orice $p \neq i$.

$$(2) \quad 0 = \det(B_p) = a_{i1}M'_{p1} + a_{i2}M'_{p2} + \dots + a_{in}M'_{pn}$$

Complementii algebrici rămân aceeași cei ce apar în dezvoltarea $\det(A)$ folosind linia p , aceasta pentru că matricea B_p este aceeași cu matricea A în afara liniei p , după care dezvoltăm.

Numim *adjuncta* matricei A și notăm cu A^* matricea care are pe poziția (i, j) complementul algebric $M'_{j,i}$.

$$A^* = \begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{21} & \dots & M'_{n1} \\ M'_{12} & M'_{22} & \dots & M'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M'_{1n} & M'_{2n} & \dots & M'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observația 1. Din ecuațiile (1) și (2) rezultă că $A \cdot A^* = \det(A) \cdot I_n$,

$$\text{unde } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Similar, dezvoltând pe coloană obținem:

$$(3) \quad \det(A) = a_{1j}M'_{1j} + a_{2j}M'_{2j} + \dots + a_{nj}M'_{nj}$$

și

$$(4) \quad 0 = \det(H_p) = a_{1j}M'_{1p} + a_{2j}M'_{2p} + \dots + a_{nj}M'_{np}$$

unde H_p este obținută din matricea A înlocuind $C_p(A)$ cu $C_j(A)$. pentru orice $p \neq j$.

Observația 2. Folosind ecuațiile (3) și (4) rezultă $A^* \cdot A = \det(A) \cdot I_n$.

O consecință a **observațiilor 1 și 2** este

Teorema 3. Pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(R)$ avem $A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det(A) \cdot I_n$.

Definiția 4. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește inversabilă, dacă și numai dacă $(\exists) B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a.î. $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. În acest caz B se numește inversa matricei A și se notează cu A^{-1} .

Corolarul 5. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci A este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. În acest caz $A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot A^*$.

Demonstrație: Din teorema 3 avem $A \cdot (\frac{1}{\det(A)} A^*) = (\frac{1}{\det(A)} A^*) \cdot A = I_n$. De aici A este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$ și $A^{-1} = (\frac{1}{\det(A)} A^*)$.

Avem și următoarea teoremă

Teorema 6. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$. Atunci $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

În cele ce urmează voi prezenta câteva exemple de calcul de determinanți.

Exemplul 7. Calculați

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & g & h & i & j & 0 \\ 0 & 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & n & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & s & 0 \\ t & u & x & y & z & w \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ dezvoltăm după prima coloană: } \Delta &= a \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j & 0 \\ 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & m & n & 0 & 0 \\ p & q & r & s & 0 \\ u & x & y & z & w \end{vmatrix} - t \cdot \begin{vmatrix} b & c & d & e & f \\ g & h & i & j & 0 \\ 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & m & n & 0 & 0 \\ p & q & r & s & 0 \end{vmatrix} = \\ &= aw \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} - tf \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} = (aw - tf) \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} = \\ &= (aw - tf) \left(g \begin{vmatrix} k & l & 0 \\ m & n & 0 \\ q & r & s \end{vmatrix} - p \begin{vmatrix} h & i & j \\ k & l & 0 \\ m & n & 0 \end{vmatrix} \right) = (aw - tf) \cdot \left(gs \cdot \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} - pj \cdot \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} \right) = \\ &= (aw - tf) \cdot (gs - jp) \cdot (kn - lm). \end{aligned}$$

- Folosind formula Laplace pentru mulțimea indicilor liniilor după care dezvoltăm $I = \{3, 4\}$. Mulțimea indicilor coloanelor este $J \subset [6], |J| = 2$. Numărul acestor submulțimi este $\binom{6}{2} = C_6^2 = 15$. Astfel mulțimile J de indici de coloane sunt $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$.

$$\det(A) = \sum_J \det(A_{I,J}) (-1)^{3+4+j_1+j_2} \det(A_{\bar{I},\bar{J}}) =$$

$$= \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+3+4} \begin{vmatrix} a & b & e & f \\ 0 & g & j & 0 \\ 0 & p & s & 0 \\ t & u & z & w \end{vmatrix}. \text{ Toți ceilalți determinanți } 2 \times 2$$

ce apar în formula Laplace sunt 0, având cel puțin o coloană nulă. Pentru determinantul 4×4 dezvoltăm după liniile $I = \{2, 3\}$, și 2 coloane din cele 4.

$$\text{Obținem } \Delta = (kn - ml) \cdot \begin{vmatrix} g & j \\ p & s \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+2+3} \begin{vmatrix} a & f \\ t & w \end{vmatrix} = (kn - lm) \cdot (gs - jp) \cdot (aw - tf).$$

Exemplul 8. Să se arate că $\det(A) = (-1)^{np} \det(N) \det(P)$, unde $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & 0 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ și $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Folosim formula Laplace pentru mulțimea indicilor liniilor după care dezvoltăm $I = \{n+1, \dots, n+p\}$ și mulțimea de indici ai coloanelor este $J = \{j_1, \dots, j_p\} \subset [n+p]$, $|J| = p$.

$$\det(A) = \sum_{J \subset [n+p], |J|=p} \det(A_{I,J}) (-1)^{n+1+\dots+n+p+j_1+\dots+j_p} \det(A_{\bar{I},\bar{J}})$$

Singurul determinant nenul $\det(A_{I,J})$ este pentru $J = [p] = \{1, 2, \dots, p\}$.

Obținem pentru $I = \{n+1, \dots, n+p\}$, $\bar{I} = [n+p] \setminus \{n+1, \dots, n+p\} = \{1, \dots, n\}$ și pentru $J = \{1, 2, \dots, p\}$, $\bar{J} = [n+p] \setminus \{1, 2, \dots, p\} = \{p+1, \dots, p+n\}$.

Avem deci

$$\det(A) = \det(A_{\{n+1, \dots, n+p\}, \{1, 2, \dots, p\}}) (-1)^{n+1+\dots+n+p+1+\dots+p} \det(A_{\{1, \dots, n\}, \{p+1, \dots, p+n\}}) = \det(P) (-1)^{np} \cdot \det(N).$$

Exemplul 9. Determinantul Vandermonde. Să se arate că

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Am demonstrat în cursul trecut că formula este adevărată pentru $n = 3$. Demonstrăm prin inducție. Presupunem formula adevărată pentru $n - 1$ și demonstrăm pentru n .

Facem următoarele operații: $L'_2 = L_2 - a_1 \cdot L_1$, $L'_3 = L_3 - a_1 \cdot L_2$, $L'_n = L_n - a_1 \cdot L_{n-1}$. Obținem

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

dezvoltând după prima coloană obținem

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

dând factori comuni pe fiecare dintre cele $(n-1)$ coloane respectiv pe $(a_j - a_1)$, $2 \leq j \leq n$, obținem

$$= (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) V(a_2, \dots, a_n).$$

Folosim ipoteza de inducție și înlocuim $V(a_2, \dots, a_n) = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$. Obținem

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Exemplul 10. Determinanți tridiagonali. Pentru $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ să se calculeze

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta\gamma. \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 2\alpha\beta\gamma.$$

$$\text{Dezvoltăm } \Delta_n \text{ după prima linie și obținem } \Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta \begin{vmatrix} \gamma & \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \dots & \gamma & \alpha \end{vmatrix},$$

ultimul determinant având $n-1$ linii și coloane. Dezvoltând acest determinant după prima coloană obținem

$$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta\gamma\Delta_{n-2} \text{ de unde } \Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} + \beta\gamma\Delta_{n-2} = 0.$$

Ecuația caracteristică asociată este $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta\gamma = 0$. Presupunem că are rădăcini distincte $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Avem $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha$ și $\lambda_1\lambda_2 = \beta\gamma$.

$$\Delta_2 = \alpha^2 - \beta\gamma = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \frac{\lambda_1^3 - \lambda_2^3}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Demonstrăm prin inducție că $\Delta_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Verificarea a fost făcută pentru $n = 2$, presupunem deci formula adevărată pentru $2 \leq k < n$ și demonstrăm pentru n .

$$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta\gamma\Delta_{n-2} = (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Exemplul 11. Un graf $\Gamma = (V, E)$ este o pereche de mulțimi V , mulțimea vârfurilor și E mulțimea muchiilor ce unesc vârfurile. K_n este graful complet cu n vârfuri și câte o muchie între fiecare două vârfuri. Numim arbore un graf aciclic (fără cicli) și conex (orice două vârfuri pot fi unite printr-un drum în graf). Un subarbore al unui graf se numește arbore generator dacă conține toate vârfurile grafului Γ . Notăm cu $\tau(\Gamma)$ numărul arborilor generatori ai grafului Γ . Numim valența unui vârf, sau gradul acestuia, și notăm $d(v)$ numărul muchiilor incidente cu $v \in V$.

Pentru orice graf Γ , considerăm matricea $Q \in \mathcal{M}_{|V|}(\mathbb{Z})$, $Q = (q_{i,j})$, unde

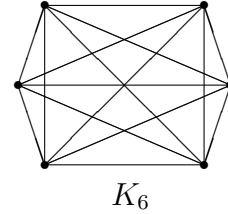
$$q_{i,j} = \begin{cases} d(v_i) & i = j \\ -\text{nr. de muchii ce unește } v_i \text{ cu } v_j & i \neq j \end{cases}.$$

Teorema 12 (matrice-arbore). *Considerăm $\Gamma = (V, E)$ un graf fără bucle și matricea Q asociată acestui graf. Atunci $\tau(\Gamma) = (-1)^{r+s} \det(Q_{r,s})$, unde matricea $Q_{r,s}$ este obținută din Q tăind linia r și coloana s .*

Datorită faptului că suma coloanelor este vectorul nul complementării algebrice sunt constanți pe fiecare linie, deci vom dezvolta după linia și coloana 1.

Formula Cayley $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

$$Q(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} &\text{Tăiem linia și coloana 1 a matricei } Q \text{ și obținem } \tau(K_n) = (-1)^{1+1} \det(Q_{1,1}) = \\ &= \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}, \text{ determinant cu } n-1 \text{ linii și coloane.} \end{aligned}$$

$$\text{Sumând toate coloanele la prima obținem } \tau(K_n) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

Scăzând prima linie din cealalte linii obținem

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$