# Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială
## cursul 9

2021-2022

Conice

# Conice

Studiate încă de pe vremea Greciei antice, conicele apar peste tot în jurul nostru. Traiectoriile descrise de mișcările planetelor, traiectoria pe care o are un corp care este aruncat, precum și diversele secțiuni plane determină conice. Deoarece conicele sunt funcții de gradul al doilea în două variabile, vom avea în vedere proprietățile geometrice ale unor astfel de funcții. Vom considera fixat un reper ortonormat $(O,\ \bar{i},\ \bar{j})$.

### Definiție

**Conica** este locul geometric $\Gamma$ al punctelor $M$ din plan ale căror coordonate $(x, y)$ satisfac ecuația

$$\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

unde $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 \neq 0$ și $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, 3\}$

Ecuațiile

$$2x^2 - 3xy + 5y^2 - 7x + 3y + 1 = 0$$

sau

$$x^2 + 2y^2 - 5 = 0$$

sunt exemple de conice.

## Definiție

**Cercul** este mulțimea punctelor din plan situate la distanță egală (numită raza cercului) față de un punct fix numit centrul cercului.

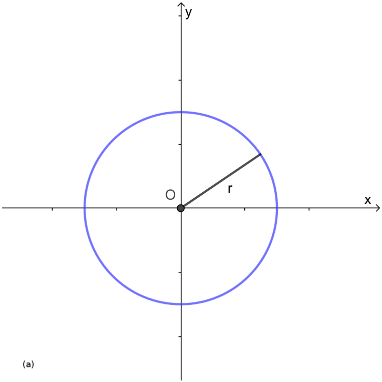
**Ecuația cercului**

Cazul I: Presupunem că centrul cercului este în originea sistemului de coordonate, $O(0,0)$. Fie $r > 0$ raza cercului și $M(x,y)$ un punct de pe cerc. Atunci $d(O,M) = \|OM\| = r$ și, din formula distanței, avem

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r.$$

Ridicând la pătrat, obținem

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



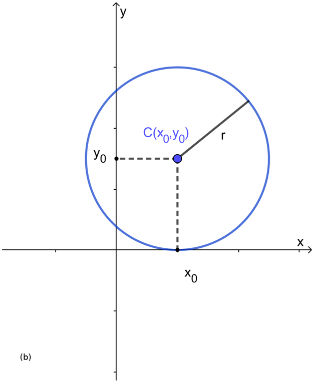




Figure: (a) Cercul cu centrul în $(0, 0)$ și raza $r$; (b) Cercul cu centrul în $(x_0, y_0)$ și raza $r$

# Conice

Cazul al II-lea: Presupunem că centrul cercului este în punctul, $C(x_0, y_0)$. Fie $r > 0$ raza cercului și $M(x, y)$ un punct de pe cerc. Atunci

$$d(C, M) = \|CM\| = r$$

și, din formula distanței, avem

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r.$$

Ridicând la pătrat, obținem

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Ecuația tangentei la cercul cu centrul în $C(x_0, y_0)$ și de rază $r$ dusă prin punctul $M(x_1, y_1)$ de pe cerc este

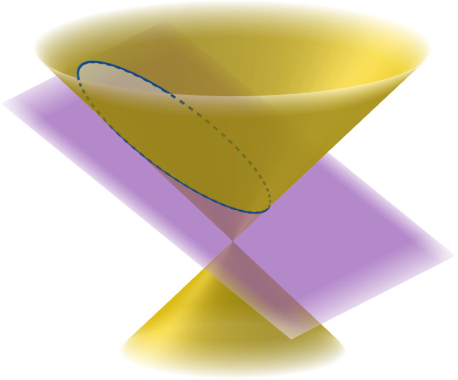
$$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2.$$

Ecuațiile parametrice ale cercului cu centrul în $C(x_0, y_0)$ și de rază $r$ sunt:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

## Definiție

**Elipsa** este locul geometric al punctelor $M(x, y)$ pentru care suma distanțelor la două puncte fixe, numite focare, este constantă și egală cu $2a$, $a > 0$.



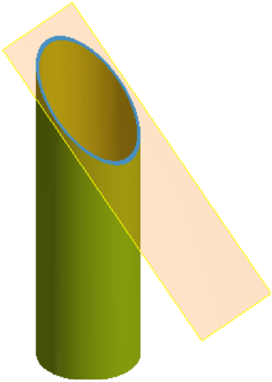
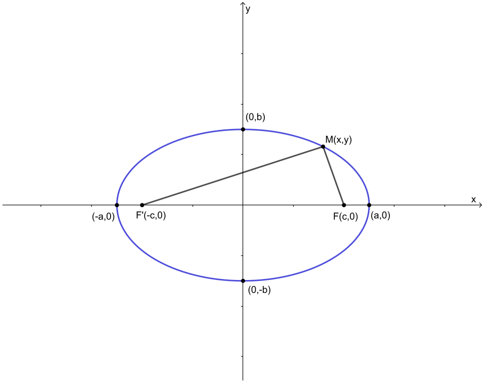


Figure: Elipsa




Fie $F(c, 0)$ și $F'(-c, 0)$ cele două focare și $M(x, y)$ un punct de pe elipsă. Sunt îndeplinite condițiile $\|MF\| + \|MF'\| = 2a$ și $\|FF'\| = 2c$.

# Conice

Ținând cont de definiția distanței dintre două puncte, prima condiție devine

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

care se poate rescrie

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Ridicând la pătrat și efectuând calculele, obținem

$$a^2-xc=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Ridicând încă o dată la pătrat și efectuând calculele se obține

$$a^2b^2=x^2b^2+y^2a^2,$$

unde am notat $b^2=a^2-c^2$. Relația anterioară se poate rescrie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Prin urmare, **ecuația elipsei de semiaxe $a$ și $b$ și cu centrul în** $O(0,0)$ este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Dacă centrul elipsei este în $C(x_0,y_0)$, atunci **ecuația elipsei de semiaxe $a$ și $b$ și cu centrul în** $C(x_0,y_0)$ este

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-1=0.$$

# Conice

Așa cum s-a văzut, între numerele pozitive $a$, $b$ și $c$ există următoarea relație: $c^2 = a^2 - b^2$. Numerele $a$ și $b$ se numesc **semiaxele elipsei**, iar **vârfurile elipsei** sunt $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ și $(0, -b)$. Axele de coordonate $Ox$ și $Oy$ sunt axe de simetrie, iar centrul elipsei este centru de simetrie. Raportul $e = \frac{c}{a}$ se numește **excentricitatea elipsei**. În cazul elipsei, $e < 1$. Excentricitatea măsoară cât de "ovală" este elipsa. Dacă focarele sunt foarte apropiate de centrul elipsei, atunci elipsa este aproape circulară. Dreptele de ecuații $x = \frac{a}{e}$ și $x = -\frac{a}{e}$ se numesc **dreptele directoare**. Se observă că toate punctele elipsei se află între cele două drepte directoare.

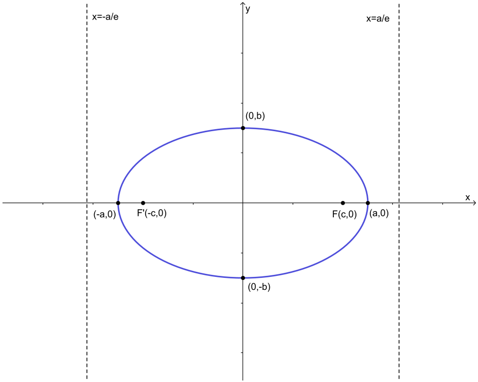



Figure: Dreptele directoare ale elipsei

Elipsa are următoarea proprietate utilă în practică:
**Proprietatea optică a elipsei:** Orice rază de lumină care pornește dintr-un focar este reflectată de elipsă în celălalt focar.
**Ecuația tangentei** la elipsa de semiaxe $a$ și $b$ și centru $C(x_0, y_0)$ în punctul $M(x_1, y_1)$ de pe elipsă este

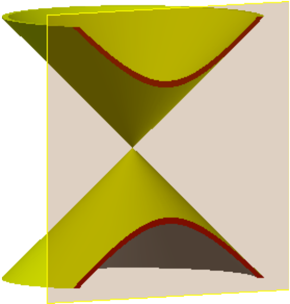
$$\frac{(x-x_0)(x_1-x_0)}{a^2} + \frac{(y-y_0)(y_1-y_0)}{b^2} = 1.$$

**Ecuațiile parametrice** ale elipsei de semiaxe $a$ și $b$ și centru $C(x_0, y_0)$ sunt

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos\varphi \\ y = y_0 + b\sin\varphi, \ \ \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

## Definiție

**Hiperbola** este locul geometric al punctelor $M(x, y)$ pentru care diferența distanțelor (în valoare absolută) la două puncte fixe numite focare este constantă și egală cu $2a$, $a > 0$.



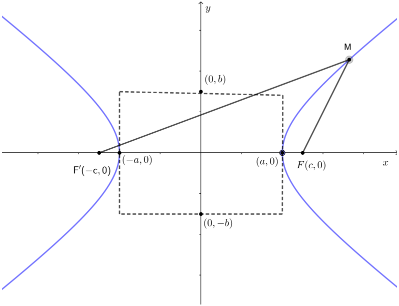



Figure: Hiperbola

Condiția din definiție se poate scrie $|\|MF\| - \|MF'\|| = 2a$ și, ținând cont de formula distanței între două puncte, obținem

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a.$$

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că punctul $M$ se află poziționat ca în figură, deci $\|MF'\| > \|MF\|$. Prin urmare,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a,$$

egalitate ce poate fi rescrisă sub forma

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Ridicând la pătrat și efectuând toate calculele, obținem

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Ridicând încă o dată la pătrat și efectuând toate calculele (și notând $b^2 = c^2 - a^2$) obținem

$$x^2 b^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Împărțind egalitatea prin $a^2 b^2$ se obține **ecuația hiperbolei**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Ecuația hiperbolei cu centrul în $C(x_0, y_0)$ de semiaxe $a$ și $b$ este

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Punctele $F$ și $F'$ se numesc **focarele** hiperbolei, iar distanța $\|FF'\| = 2c$ se numește **distanță focală**. Punctele $(a, 0)$ și $(-a, 0)$ se numesc vârfurile hiperbolei.

Așa cum s-a văzut, legătura dintre numerele pozitive $a$, $b$ și $c$ este $c^2 = a^2 + b^2$. Raportul $e = \frac{c}{a}$ se numește **excentricitatea hiperbolei**. Ținând cont de legătura dintre $c$ și $a$, se observă că în cazul hiperbolei, $e > 1$. Numărul $x + \frac{a}{e}$ reprezintă distanța de la punctul $M(x, y)$ la dreapta de ecuație $x = -\frac{a}{e}$ numită **dreapta directoare a hiperbolei**. Hiperbola are două drepte directoare de ecuații $x = \frac{a}{e}$ și $x = -\frac{a}{e}$, iar punctele hiperbolei se găsesc în exteriorul acestor drepte.

# Conice

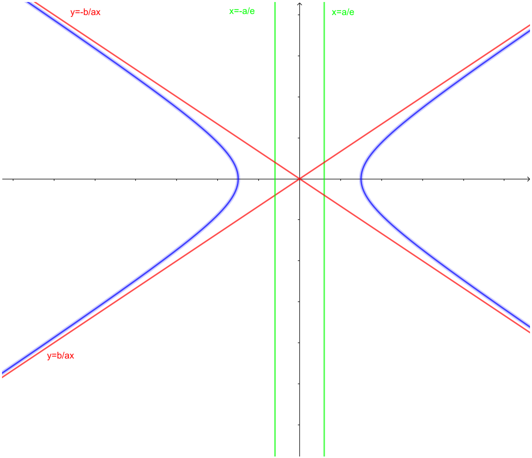



Figure: Hiperbola

Considerăm în continuare intersecția hiperbolei cu axele de coordonate. Observăm că axa $Ox$ intersectează hiperbola în punctele $(-a, 0)$ și $(a, 0)$ numite **vârfurile hiperbolei**, iar axa $Oy$ nu intersectează hiperbola de centru $O(0, 0)$. Se observă de asemenea că axele $Ox$ și $Oy$ sunt axe de simetrie, iar centrul hiperbolei este centru de simetrie.
Hiperbola are două **asimptote** descrise de dreptele de ecuații $y = \frac{b}{a}x$ și $y = -\frac{b}{a}x$.

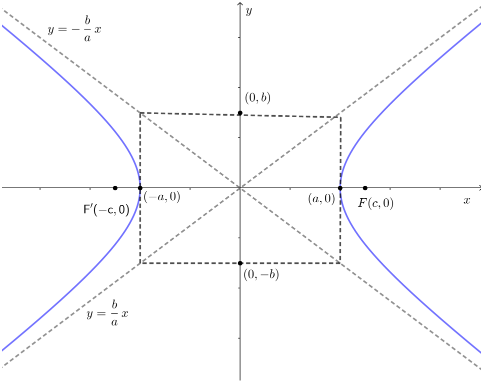



Figure: Asimptotele hiperbolei

**Tangenta** la hiperbola cu centrul în $O(0,0)$, în punctul de coordonate $(x_1, y_1)$ este

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0.$$

Putem considera două cazuri particulare de hiperbole. În cazul în care $a = b$, hiperbola se numește **echilateră** și are ecuația

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Asimptotele sale sunt prima și a doua bisectoare.

# Conice

Ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

reprezintă tot o hiperbolă și se numește **hiperbola conjugată** hiperbolei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Ea are aceleași asimptote și aceleași axe de simetrie. În figura următoare sunt reprezentate hiperbolele de ecuații

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$$

și conjugata sa,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + 1 = 0.$$

# Conice

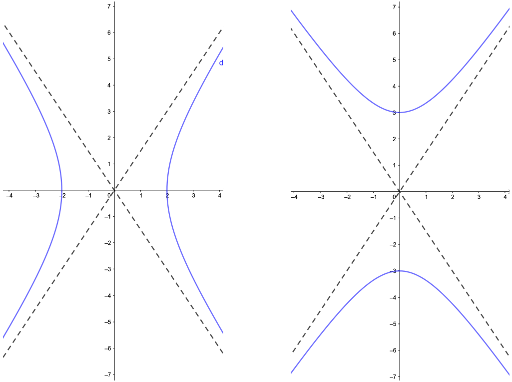


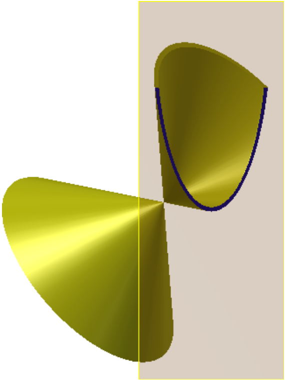

Figure: Hiperbolă și conjugata sa

**Ecuațiile parametrice** ale hiperbolei sunt

$$\begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

### Definiție

**Parabola** este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix numit focar și de o dreaptă fixă, numită dreaptă directoare.



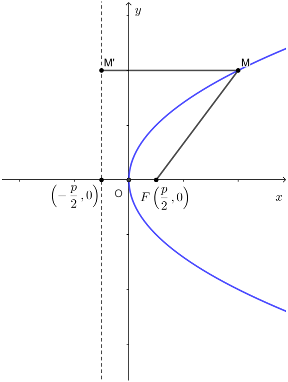



Figure: Parabola

Condiția $\|MF\| = \|MM'\|$ devine

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2,$$

unde am ținut cont că $M'\left(-\frac{p}{2}, y\right)$. Efectuând calculele, obținem ecuația parabolei

$$y^2 = 2px,$$

unde $p > 0$ este parametrul parabolei și reprezintă distanța de la focar la dreapta directoare. Punctul $O(0,0)$ se numește vârful parabolei, iar $Ox$ este axă de simetrie. Excentricitatea parabolei este $e = 1$.

Ecuația tangentei la parabolă în punctul de coordonate $(x_1, y_1)$ este

$$yy_1 = p(x - x_1).$$

Parabola are multe aplicații practice. Proprietatea optică a parabolei este utilizată de exemplu pentru construcția farurilor. **Proprietatea optică a parabolei**: razele care pornesc din focar sunt reflectate de parabolă într-un fascicul paralel cu axa $Ox$ a parabolei.

**Ecuațiile parametrice** ale parabolei sunt

$$\begin{cases} y = t \\ x = \dfrac{t^2}{2p}, \;\; p > 0. \end{cases}$$

# Conice

Pentru orice conică, există o bază în spațiul vectorial euclidian $\mathbb{R}^2$ în care să aibă una dintre următoarele forme canonice:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (elipsă)
2. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (hiperbolă)
3. $y^2 = 2px,\ p > 0$ (parabolă)
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ (pereche de drepte concurente)
5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ (mulțimea $\{(0,0)\}$, punct dublu)
6. $x^2 - k^2 = 0$ sau $y^2 - k^2 = 0$, $k \neq 0$ (pereche de drepte paralele)
7. $x^2 = 0$ sau $y^2 = 0$ (pereche de drepte confundate)
8. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ sau $x^2 + k^2 = 0$, sau $y^2 + k^2 = 0$, unde $k \neq 0$ (mulțimea vidă, $\emptyset$)

# Conice-invarianții conicei

Fie $\Gamma$ o conică,

$$\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Numerele

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ I = a_{11} + a_{22}.$$

se numesc **invarianții conicei** (la rotații și translații).
Cunoscându-se invarianții conice, se poate obține natura conicei, fără a fi însă posibilă reprezentarea geometrică a acesteia.

Invariantul $\Delta$ ne permite să decidem dacă o conică este sau nu degenerată:

### Definiție

Fie

$$\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

și $\Delta$ definit ca mai sus. Dacă $\Delta \neq 0$, conica $\Gamma$ este **nedegenerată** (elipsă, hiperbolă sau parabolă), iar dacă $\Delta = 0$, conica $\Gamma$ este **degenerată** (este una dintre conicele de ecuație $(4) - (8)$).

Primul invariant ne permite să identificăm genul conicei:

### Definiție

Fie

$$\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

și $\delta$ definit anterior.

(i) Dacă $\delta > 0$, conica $\Gamma$ este **de gen eliptic** (elipsă sau $\emptyset$)

(ii) Dacă $\delta < 0$, conica $\Gamma$ este **de gen hiperbolic** (este hiperbolă sau pereche de drepte concurente)

(iii) Dacă $\delta = 0$, conica $\Gamma$ este **de gen parabolic** (parabolă, drepte paralele, drepte confundate, $\emptyset$).

# Conice-invarianții conicei

| Condiții pentru invarianți | Conica $\Gamma$ |
|---|---|
| 1. $\Delta = 0$ | |
| $\delta > 0$ | punct dublu |
| $\delta = 0$ | pereche de drepte (paralele sau confundate), $\emptyset$ |
| $\delta < 0$ | pereche de drepte concurente.<br>Dacă $I = 0$, pereche de drepte perpendiculare |
| 2. $\Delta \neq 0$ | |
| $\delta > 0$, $I\Delta < 0$ | elipsă |
| $\delta > 0$, $I\Delta > 0$ | $\emptyset$ |
| $\delta = 0$ | parabolă |
| $\delta < 0$ | hiperbolă.<br>Dacă $I = 0$, hiperbolă echilateră |

### Definiție

Un punct $C$ se numește **centru de simetrie** pentru conica $\Gamma$ dacă, pentru orice $M \in \Gamma$, simetricul lui $M$ față de $C$ se află tot pe $\Gamma$.

### Observație

Nu orice conică are centru de simetrie. De exemplu parabola nu are centru de simetrie.

O conică are centru de simetrie dacă și numai dacă $\delta \neq 0$.

### Propoziție

Fie $\Gamma$ conica $f(x, y) = 0$, unde

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}.$$

Coordonatele centrului de simetrie al unuei conice sunt date de soluția sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Sistemul din propoziția anterioară poate fi scris sub forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

### Exemplu

Fie conica

$$\Gamma : \; 3x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x + 2y + 3 = 0.$$

Avem

$$f(x,y) = 3x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x + 2y + 3$$

și

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

devine

$$\begin{cases} 6x + 2y + 2 = 0 \\ 2x - 8y + 2 = 0. \end{cases} \quad .$$

Sistemul se poate rescrie

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ x - 4y = -1. \end{cases}$$

și are soluția $C\left(-\frac{5}{13}, \frac{2}{13}\right)$.

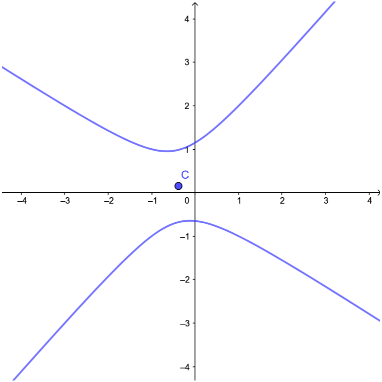



Figure: Conică și centrul de simetrie

Fie conica $\Gamma : f(x, y) = 0$ și $M(x_1, y_1) \in \Gamma$. Presupunem că $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1)$ și $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1)$ nu se anulează simultan. Ecuația

$$(x - x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) + (y - y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) = 0$$

reprezintă **ecuația tangentei** la conică în punctul $M(x_1, y_1)$.

## Exemplu

Fie conica

$$\Gamma : f(x,y) = 2x^2 + 3xy - 4y^2 + 2x + 3y - 4 = 0$$

și $M(1,0)$ un punct de pe conică. Ecuația tangentei la conică în punctul $M(1,0)$ este

$$(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0.$$

Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 3y + 2$, avem $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 6$. De asemenea, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 8y + 3$, implică $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 6$. Ecuația tangentei este

$$6(x-1) + 6y = 0$$

# Conice

Reprezentarea grafică a conicei și a tangentei în punctul $M$:

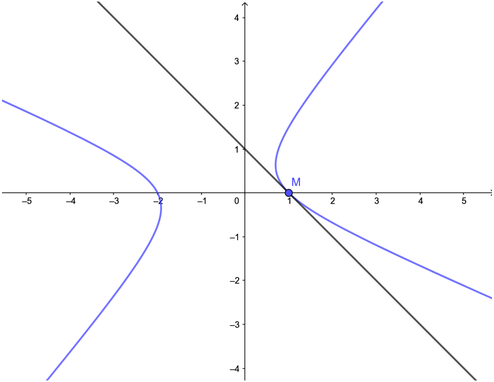



Figure: Conică și tangenta într-un punct $M$

Ecuațiile **axelor de simetrie ale conicei** $\Gamma$ sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

unde $M$ verifică relația

$$a_{12}M^2 + (a_{11} - a_{22})M - a_{12} = 0.$$

## Exemplu

Pentru conica anterioară

$$\Gamma : f(x, y) = 2x^2 + 3xy - 4y^2 + 2x + 3y - 4 = 0$$

avem

$$\frac{3}{2}M^2 + (2 + 4)M - \frac{3}{2} = 0,$$

ecuație echivalentă cu

$$3M^2 + 12M - 3 = 0.$$

Această ecuație are soluțiile $M_1 = -2 + \sqrt{5}$ și $M_2 = -2 - \sqrt{5}$.
Pentru $M_1 = -2 + \sqrt{5}$, axa de simetrie este

$$4x + 3y + 2 + (-2 + \sqrt{5})(3x - 8y + 3) = 0,$$

echivalentă cu

$$(-2 + 3\sqrt{5})x + (19 - 8\sqrt{5})y - 4 + 3\sqrt{5} = 0.$$

Pentru $M_2 = -2 - \sqrt{5}$, axa de simetrie este

$$4x + 3y + 2 + (-2 - \sqrt{5})(3x - 8y + 3) = 0,$$

echivalentă cu

$$(-2 - 3\sqrt{5})x + (19 + 8\sqrt{5})y - 4 - 3\sqrt{5} = 0.$$

Cele două axe de simetrie sunt reprezentate în figura următoare:

# Conice

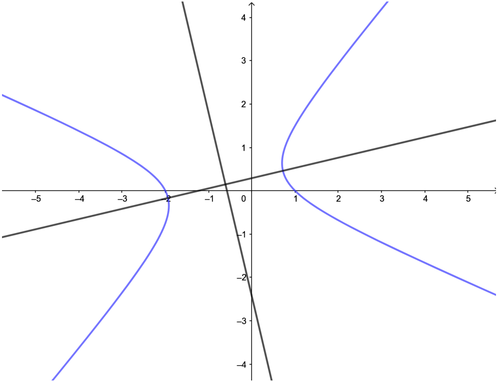



Figure: Conică și axele de simetrie

**Cazul în care** $a_{12} = 0$ În acest caz, pentru a reprezenta grafic conica vom face o translație a sistemului de coordonate. Pentru a aduce la forma canonică, grupăm termenii asemenea și completăm pentru a forma pătrate:

### Exemplu

Să se aducă la forma canonică și să se reprezinte grafic conica

$$\Gamma : 9x^2 - 25y^2 - 18x + 50y - 241 = 0.$$

Soluție.

Grupăm termenii asemenea:

$$9x^2 - 18x - 25y^2 + 50y - 241 = 0$$

și rescriem sub forma

$$9(x^2 - 2x) - 25(y^2 - 2y) - 241 = 0.$$

Completăm pentru a forma pătrate:

$$9(x^2 - 2x + 1 - 1) - 25(y^2 - 2y + 1 - 1) - 241 = 0$$

care devine

$$9(x - 1)^2 - 25(y - 1)^2 - 225 = 0.$$

$\square$

Notăm

$$\begin{cases} x_1 = x - 1 \\ y_1 = y - 1 \end{cases}$$

ceea ce, din punct de vedere geometric, înseamnă translatarea originii în $O'(1,1)$. Obținem

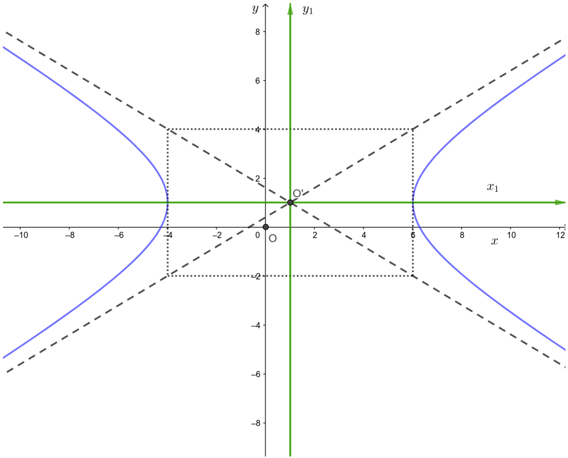
$$9x_1^2 - 25y_1^2 - 225 = 0.$$

Împărțind prin 225 obținem

$$\frac{x_1^2}{25} - \frac{y_1^2}{9} - 1 = 0$$

care este ecuația unei hiperbole. Reprezentarea grafică este:

# Reprezentarea grafică a conicelor



**Cazul în care** $a_{12} \neq 0$ În acest caz vom face o rotație urmată de o translație.
Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Calculăm polinomul caracteristic al matricei $A$ și aflăm valorile proprii. Fie $\lambda_1$ și $\lambda_2$ valorile proprii.
Pentru fiecare valoare proprie determinăm vectorii proprii corespunzători. Fie $\mathbf{v}_1$ și $\mathbf{v}_2$ acești vectori. Normăm cei doi vectori obținuți: $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$ și $\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}$.

Considerăm matricea de rotație $R = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2]$, astfel încât $\det(R) = 1$ (în cazul în care am obținut $\det(R) = -1$, inversăm ordinea coloanelor).
Facem schimbarea de variabilă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

și înlocuim în expresia inițială. Se va obține o expresie în care $a'_{12} = 0$. Acum putem aplica metoda de la cazul anterior.

### Exemplu

Să se aducă la forma canonică și să se reprezinte grafic conica:

$$\Gamma : 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Fie $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Polinomul caracteristic este $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 9$, iar valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 9$. Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$ sunt de forma $(-\alpha, \alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}^*$, deci putem alege $\mathbf{v}_1 = (-1, 1)$.Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = 9$ sunt de forma $(\alpha, \alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$, deci putem alege $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$.

Normând cei doi vectori obținem $\mathbf{u}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ și $\mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Deoarece matricea

$$R = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

are $\det(R) = -1$, alegem matricea de rotație

$$R = [\mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_1] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

pentru care $\det(R) = 1$.

Facem schimbarea de variabilă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

echivalentă cu

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) \end{cases}.$$

Înlocuind în ecuația inițială obținem

$$9x_1^2 + y_1^2 - \frac{36}{\sqrt{2}}x_1 + 9 = 0.$$

Procedând ca în cazul anterior obținem

$$(x_1 - \sqrt{2})^2 + \frac{y_1^2}{9} - 1 = 0.$$

Notând

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \sqrt{2} \\ y_2 = y_1 \end{cases},$$

originea noului sistem de coordonate va fi în punctul $O"(\sqrt{2}, 0)$, iar ecuația devine

$$x_2^2 + \frac{y_2^2}{9} - 1 = 0$$

care este o elipsă de semiaxe 1 și 3. Reprezentarea grafică este următoarea:

# Reprezentarea grafică a conicelor