GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Seminar 1
Calcul Determinanţi

Să se calculeze următorii determinanţi scriindu-se rezultatul sub formă de produs.

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, **2.** $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$, **3.** $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ b & b & a \end{vmatrix}$, **4.** $\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$,

5. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$, **6.** $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$,

7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, **8.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, **9.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,

10. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$,

Indicaţii

5: Determinantul se poate scrie ca sumă de opt determinanţi. Numai doi sunt nenuli. Ambii sunt Vandermonde.

Altfel: adunăm toate coloanele la prima dăm 2 factor comun şi scădem prima coloană din a doua şi respectiv a treia.

6: Adunăm liniile la prima linie şi scoatem factor comun a+b+c.

Temă:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}.$$

Tema NU trebuie să o trimiteţi pe mail. O vom discuta la seminar.

Seminar 2

11. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$,

12. $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$,

13. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$, **14.** $\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, **15.** $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$,

16. $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & 1+x_n \end{vmatrix}$, **17.** $\begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$,

18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \dots & n^2 \end{vmatrix}$,

19. Să se arate că

$$V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i),$$

20. Fie

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

care are 3 pe diagonala principală, 2 pe poziţiile $(i, i+1), 1 \leqslant i \leqslant n-1$, 1 pe poziţiile $(i, i-1), 2 \leqslant i \leqslant n$ şi în rest 0.

a) Să se calculeze D_2, D_3.
b) Să se arate că $D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$.
c) Să se arate că $D_n = 2^{n+1} - 1$.

Seminar 3

21. $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$, **22.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$,

23.

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & a & b & 0 & \dots \\ \dots & 0 & b & a & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & \dots & a & 0 \\ a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \end{vmatrix},$$

24.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix},$$

25. Vandermonde lacunar

$$V_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \dots & a_n^{k-1} \\ a_1^{k+1} & a_2^{k+1} & \dots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Pentru a afla o formulă pentru $V_k(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vom folosi $V(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$.

$$V(a_1,a_2,\dots,a_n,x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_1^k & a_2^k & \dots & a_n^k & x^k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n & x^n \end{vmatrix}.$$

Dacă înlocuim $x=a_{n+1}$ şi dezvoltăm determinantul Vandermonde obţinem

$$V(a_1,a_2,\dots,a_n,a_{n+1})=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_j-a_i)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)=$$

$$=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(x-a_1)\dots(x-a_n)=$$

$$=V(a_1,a_2,\dots,a_n)[x^n-(a_1+a_2+\dots+a_n)x^{n-1}+(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j)x^{n-1}-\dots+(-1)^na_1a_2\dots a_n]=$$

$$=V(a_1,a_2,\dots,a_n)[x^n-s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}+\dots+(-1)^ks_kx^{n-k}+\dots+(-1)^ns_n]$$

unde $s_k=\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n}a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$.

Dezvoltăm după ultima coloană şi obţinem

$$V(a_1,a_2,\dots,a_n,x)=(-1)^{n+2}[V_0(a_1,a_2,\dots,a_n)-V_1(a_1,\dots,a_n)x+V_2(a_1,\dots,a_n)x^2+]$$

$$+\dots+(-1)^kV_k(a_1,\dots,a_n)x^k+\dots+(-1)^nV_n(a_1,\dots,a_n)x^n]$$

Folosim $(-1)^{n+2}=(-1)^n$, identificăm coeficienţii şi obţinem
$V(a_1,a_2,\dots,a_n)(-1)^ks_k=(-1)^n(-1)^{n-k}V_{n-k}(a_1,a_2,\dots,a_n)$, adică

$$V_j(a_1,a_2,\dots,a_n)=V(a_1,a_2,\dots,a_n)s_{n-j}$$

26. Determinant circular . Fie $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{C}$

$$C(a_1,a_2,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ a_2 & a_3 & \dots & a_1\\ a_3 & a_4 & \dots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Pentru aflarea unei formule a determinantului circular vom folosi rădăcinile de ordin n ale unităţii. Acestea sunt soluţiile ecuaţiei binome $z^n-1=0$, şi anume

$\omega_k = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n})$, unde $0 \leqslant k \leqslant n-1$. $\omega_0 = 1$ şi $\omega_k^n = 1$ pentru $(\forall) 0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Considerăm determinantul $V(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_0 & \omega_1 & \ldots & \omega_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_0^k & \omega_1^k & \ldots & \omega_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \ldots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$.

Produsul determinanţilor este egal cu determinantul produsului matricelor, adică

$$C \cdot V(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) = \det(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_0 & \omega_1 & \ldots & \omega_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \ldots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}) =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2\omega_0 + \ldots + a_n\omega_0^{n-1} & a_1 + a_2\omega_1 + \ldots + a_n\omega_1^{n-1} & \ldots & a_1 + a_2\omega_{n-1} + \ldots + a_n\omega_{n-1}^{n-1} \\ a_2 + a_3\omega_0 + \ldots + a_1\omega_0^{n-1} & a_2 + a_3\omega_1 + \ldots + a_1\omega_1^{n-1} & \ldots & a_2 + a_3\omega_{n-1} + \ldots + a_1\omega_{n-1}^{n-1} \\ a_3 + a_4\omega_0 + \ldots + a_2\omega_0^{n-1} & a_3 + a_4\omega_1 + \ldots + a_2\omega_1^{n-1} & \ldots & a_3 + a_4\omega_{n-1} + \ldots + a_2\omega_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + a_1\omega_0 + \ldots + a_{n-1}\omega_0^{n-1} & a_n + a_1\omega_1 + \ldots + a_{n-1}\omega_1^{n-1} & \ldots & a_n + a_1\omega_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Notăm $f(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots + a_n z^{n-1}$ şi obţinem

$$C \cdot V(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) = \begin{vmatrix} f(\omega_0) & f(\omega_1) & \ldots & f(\omega_{n-1}) \\ \omega_0^{n-1} f(\omega_0) & \omega_1^{n-1} f(\omega_1) & \ldots & \omega_{n-1}^{n-1} f(\omega_{n-1}) \\ \omega_0^{n-2} f(\omega_0) & \omega_1^{n-2} f(\omega_1) & \ldots & \omega_{n-1}^{n-2} f(\omega_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_0 f(\omega_0) & \omega_1 f(\omega_1) & \ldots & \omega_{n-1} f(\omega_{n-1}) \end{vmatrix} =$$

$$= f(\omega_0) f(\omega_1) \ldots f(\omega_{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \omega_0^{n-1} & \omega_1^{n-1} & \ldots & \omega_{n-1}^{n-1} \\ \omega_0^{n-2} & \omega_1^{n-2} & \ldots & \omega_{n-1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_0 & \omega_1 & \ldots & \omega_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Permutăm liniile a.î. să obţinem un dederminant Vandermonde. Facem $n-2$ permutări pentru a aduce linia n pe linia a doua, $n-3$ pentru a aduce noua linie n pe linia a treia, ... Fiecare permutare de linii schimbă semnul determinantului. Schimbarea de semn este $(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Obţinem $C \cdot V(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) = f(\omega_0)f(\omega_1)\ldots f(\omega_{n-1}) \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$, de unde

$$C = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot f(\omega_0)f(\omega_1)\ldots f(\omega_{n-1}).$$

Mai sus $f(z) = a_1 + a_2z + a_3z^2 + \ldots + a_nz^{n-1}$ şi ω_k este rădăcină de ordin n a unităţii.

Seminar 4

Considerăm $\mathbb{R}[X]$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali. Care din următoarele submulţimi sunt subspaţii vectoriale ale spaţiului $\mathbb{R}[X]$?

27. $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(a) = f(-a), (\forall) a \in \mathbb{R}\}$,

28. $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid f \text{ monic}\}$,

29. $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad}(f) = 2k+1\}$,

30. $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad}(f) \leqslant 10\}$,

31. $\{f \in \mathbb{R}[X] \mid f(0) = f(1)\}$.

32. Considerăm $V \subset \mathbb{R}^2, V = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid ax + by = 0\}$. Este V subspaţiu al spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2$?

33. Considerăm $U \subset \mathbb{R}^2, U = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid ax + by + cz = 0\}$. Este U subspaţiu al spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$?

34. Fie $S = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = a_{ji}\}$. Este S subspaţiu în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

35. Fie $AS = \{B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid b_{ij} = -b_{ji}\}$. Este AS subspaţiu în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

36. Fie $D = \{B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid b_{ij} = 0, i \neq j\}$. Este D subspaţiu în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

37. Fie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(X) = 0\}$. Este $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ subspaţiu în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

38. Fie $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. Vectorii v_1 şi v_2 sunt liniar independenţi sau liniar dependenţi? Dar vectorii v_3, v_4, unde $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$?

Seminar 5

39. Considerăm planele

$H_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ şi $H_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$. Să se determine baze pentru $H_1 + H_2$, H_1, H_2, $H_1 \cap H_2$ şi să se verifice că teorema Grassmann.

40. Considerăm planele

$$H_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \text{ şi } H_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}.$$

Să se determine baze pentru H_1+H_2, H_1, H_2, $H_1 \cap H_2$ şi să se verifice că teorema Grassmann.

41. Considerăm $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Este aplicaţia tr liniară ? Dacă da, atunci determinaţi Ker(tr) şi Im(tr). Găsiţi o bază pentru Ker(tr) în cazul $n=2$.

42. Este $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicaţie liniară ? Explicaţi.

43. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixată. Considerăm aplicaţia $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A(X) = AX - XA$. Studiaţi dacă f_A este aplicaţie liniară. Exprimaţi $\mathrm{Ker}(f_A)$.

44. Considerăm elementele $E = E_{12}, F = E_{21}, H = E_{11} - E_{22}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculaţi valorile aplicaţiilor f_E, f_F, f_H în fiecare din aceste elemente, unde f_A este aplicaţia definită în problema precedentă.

Seminar 6

Eşalonaţi următoarele matrice

45. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **46.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **47.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

48. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **49.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **50.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **52.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Seminar 7

Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare folosind medota Gauss-Jordan

53. $\begin{cases} x - 2y + z + t = 1 \\ x - 2y + z - t = -1 \\ x - 2y + z + 5t = 5 \end{cases}$ **54.** $\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$

55. $\begin{cases} 2x & -y & & & = 1 \\ -x & +2y & -z & & = 2 \\ 0 & -y & +2z & -t & = -1 \end{cases}$ **56.** $\begin{cases} x & & & +t & = & 1 \\ & y & +z & +t & = & -1 \\ x & +y & & +t & = & -1 \\ x & & & +t & = & 1 \end{cases}$

Folosind algoritmul Gauss-Jordan să se calculeze inversele matricelor

57. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **58.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 7 \\ -3 & 5 & -9 \end{pmatrix}$ **59.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **60.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Seminar 8

61. Fie vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Formează aceştia bază pentru $\mathbb{R}^3$? Care este matricea trecerii din baza canonică în baza $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$? Dar din matricea de trecere din baza $\mathcal{C}$ în cea canonică?

62. Considerăm mulţimea $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$. Demonstraţi că este subspaţiu vectorial al $\mathbb{Q}-$ spaţiului vectorial $\mathbb{R}$.
a) Demonstraţi că $\mathcal{B} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ este bază a spaţiului vectorial $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
b) Considerarăm $T : V \longrightarrow V, T(x) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})x$. Să se determine $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$.

Pentru exerciţiile următoare demonstraţi în fiecare caz că aplicaţia considerată este morfism. Să se găsească matricea morfismului considerând pentru $\mathbb{R}^n$, $(\forall)n$, baza canonică. Să se găsească $\mathrm{Ker}(f)$, $\dim(\mathrm{Ker}(f))$, $\mathrm{Im}(f)$ şi $\dim(\mathrm{Im}(f))$.

63. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y \\ -x + y \end{pmatrix}$.

64. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - z \end{pmatrix}$.

65. Există morfism injectiv între $\mathbb{R}^3$ şi $\mathbb{R}^2$?

Seminar 9

66. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixată. Considerăm aplicaţia $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_A(X) = AX - XA$. Am demonstrat că f_A este morfism. Considerăm subspaţiul $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$, al matricelor de urmă nulă şi elementele $E = E_{12}, F = E_{21}, H = E_{11} - E_{22}$ din $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Demonstraţi că $\mathcal{B} = \{E, F, H\}$ formează bază pentru $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ şi găsiţi matricele aplicaţiilor f_E, f_F, f_H în baza $\mathcal{B}$.

67. Să se determine forma polinomului caracteristic $P_A(X)$ pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Să se găsească valorile şi vectorii proprii asociate acestora pentru matricele

68. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **69.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **70.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ **71.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

72. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ **73.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **74.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Seminar 10

75. Să se demonstreze că vectorii x_i obţinuţi prin algoritmul Gram-Schmidt sunt ortogonali doi câte doi.

Să se aplice algoritmul Gram-Schmidt vectorilor:

76. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

77. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

78. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

79. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

80. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Seminar 11

Să se aducă la forma canonică următoarele forme pătratice.

81. $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$ unde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Metoda Gauss: Colectăm toţi termenii ce conţin x_1 şi forţăm un pătrat perfect cu aceştia. $Q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2x_3 + \frac{1}{9}x_3^2) - \frac{1}{3}x_3^2 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3(x_2 + \frac{1}{3}x_3)^2 - \frac{1}{3}x_3^2$.
Şi pentru x_2 am colectat termenii ce-l conţineau şi am forţat un pătrat perfect
Deci $Q(x') = x_1'^2 + 3x_2'^2 - \frac{1}{3}x_3'^2$. unde $x_1' = x_1 - x_2 + x_3, x_2' = x_2 + \frac{1}{3}x_3, x_3' = x_3$.

Metoda Jacobi: Matricea asociată formei pătratice este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Este o matrice simetrică. Minorii principali sunt $\Delta_1 = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \Delta_3 = \det(A) = 4 - 4 - 1 = -1 \neq 0$. Deci forma canonică ce rezultă din teorema Jacobi este $Q(\overline{x}) = \frac{1}{\Delta_1}\overline{x}_1{}^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\overline{x}_2{}^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\overline{x}_3{}^2 = \overline{x}_1{}^2 + \frac{1}{3}\overline{x}_2{}^2 - 3\overline{x}_3{}^2$.

Metoda transformărilor ortogonale. Trebuie să aflăm valorile proprii ale matricei A şi pentru acesta polinomul caracteristic. $P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 1 & X-4 & 0 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = X^3 - 6X^2 + 7X + 1$. Singurele rădăcini raţionale ale polinomului caracteristic pot fi ± 1. Verificând, se constată că nu sunt. Rădăcinile se pot găsi aplicând metoda Cardano, care este anevoioasă. Rădăcinile se scriu cu ajutorul radicalilor de ordin 3. Ne oprim aici cu această metodă. Putem folosi teoria şi astfel putem spune că în această formă canonică coeficienţii pătratelor perfecte sunt valorile proprii.

82. $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3$ unde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Metoda Gauss: $Q(x) = (x_1 + 3x_2 - x_3)^2 - 9x_2^2 - x_3^2 + 6x_2x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2 = (x_1 + 3x_2 - x_3)^2 - 6x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_2x_3 = (x_1 + 3x_2 - x_3)^2 - 6(x_2^2 - x_2x_3) - 5x_3^2 = (x_1 + 3x_2 - x_3)^2 - 6(x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{6}{4}x_3^2 - 5x_3^2 = (x_1 + 3x_2 - x_3)^2 - 6(x_2 - \frac{1}{2}x_3)^2 - \frac{7}{2}x_3^2$.
Deci $Q(x') = x_1'^2 - 6x_2'^2 - \frac{7}{2}x_3'^2$. unde $x_1' = x_1 + 3x_2 - x_3, x_2' = x_2 - \frac{1}{2}x_3, x_3' = x_3$.

Metoda Jacobi: Matricea asociată formei pătratice este $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.
Este o matrice simetrică. Minorii principali sunt $\Delta_1 = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \Delta_3 = \det(A) = -12 - 3 + 36 = 21 \neq 0$. Deci forma canonică ce rezultă din teorema Jacobi este $Q(\overline{x}) = \frac{1}{\Delta_1}\overline{x}_1{}^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\overline{x}_2{}^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\overline{x}_3{}^2 = \overline{x}_1{}^2 - \frac{1}{6}\overline{x}_2{}^2 - \frac{2}{7}\overline{x}_3{}^2$.

Metoda transformărilor ortogonale. Trebuie să aflăm valorile proprii ale matricei A şi pentru acesta polinomul caracteristic. $P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -3 & 1 \\ -3 & X-3 & 0 \\ 1 & 0 & X+4 \end{vmatrix} = (X-1)(X-3)(X+4) - (X-3) - 9(X+4) = (X+4)(X^2-4X+3-9) - (X-3) = X^3 - 23X - 21$. Rădăcini raţionale ale polinomului caracteristic pot fi $\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$. Se verifică că nici una nu este rădăcină. Ca şi în exerciţiul anterior rădăcinile se pot găsi aplicând metoda Cardano, care se scriu cu ajutorul radicalilor de ordin 3. Ne oprim aici cu această metodă. Putem folosi teoria şi astfel putem spune că în această formă canonică coeficienţii pătratelor perfecte sunt valorile proprii.

83. $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ unde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Metoda Gauss:

$Q(x) = (x_1+x_2+x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 - x_2^2 - x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_2^2+x_2x_3+x_3^2) = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_2+\frac{1}{2}x_3)^2 - \frac{3}{2}x_3^2$.

Deci $Q(x') = x_1'^2 - 2x_2'^2 - \frac{3}{2}x_3'^2$ unde $x_1' = x_1 + x_2 + x_3, x_2' = x_2 + \frac{1}{2}x_3, x_3' = x_3$.

Metoda Jacobi: Matricea asociată formei pătratice este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Este o matrice simetrică. Minorii principali sunt $\Delta_1 = 1 \neq 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $\Delta_3 = \det(A) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$. Deci forma canonică ce rezultă din teorema Jacobi este $Q(\overline{x}) = \frac{1}{\Delta_1}\overline{x}_1{}^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\overline{x}_2{}^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\overline{x}_3{}^2 = \overline{x}_1{}^2 - \frac{1}{2}\overline{x}_2{}^2 - \frac{2}{3}\overline{x}_3{}^2$.

Metoda transformărilor ortogonale. Aflăm polinomul caracteristic şi apoi valorile proprii ale matricei A. $P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ -1 & X+1 & 0 \\ -1 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-1)(X+1)^2 - 2(X+1) = (X+1)[(X^2-1)-2] = (X+1)(X^2-3)$. Valorile proprii sunt $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{3}$. Forma canonică este $Q(z) = -z_1^2 + \sqrt{3}z_2^2 - \sqrt{3}z_3^2$. Putem afla şi baza în care se realizează această formă canonică. Vectorii proprii asociaţi valorilor proprii de mai sus sunt soluţiile sistemelor omogene $(A - \lambda_i \cdot I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3}$. Astfel, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vedem că $v_j \perp v_k, j \neq k$.

Normele vectorilor sunt $||v_1|| = \sqrt{2}, ||v_2|| = \sqrt{6+2\sqrt{3}}, ||v_3|| = \sqrt{6-2\sqrt{3}}$. Considerăm vectorii $e_i = \frac{1}{||v_i||}v_i$. Baza în care se scrie forma canonică este $\{e_1, e_2, e_3\}$. Considerăm matricea $S = (e_1\ e_2\ e_3)$ ce are coloanele e_1, e_2, e_3 şi D matricea ce are pe diagonala principală valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Avem relaţia $D = {}^tSAS$, rîntre matricele A şi D la schimbarea din baza dată în baza ortonormală $\{e_1, e_2, e_3\}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$. Această identitate apare în **propoziţia 4** din cursul 10.

84. $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x) = 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$ unde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Metoda Gauss: Cum nu avem nici un pătrat perfect facem schimbarea de variabile $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3$. Obţinem $Q(y) = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) - (y_1 + y_2)y_3 + 2(y_1 - y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 - y_1y_3 - y_2y_3 + 2y_1y_3 - 2y_2y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + y_1y_3 - 3y_2y_3 = 2(y_1^2 + \frac{1}{2}y_1y_3) - 2y_2^2 - 3y_2y_3 = 2(y_1 + \frac{1}{4}y_3)^2 - 2y_2^2 - 3y_2y_3 - 2\frac{1}{16}y_3^2 = 2(y_1 + \frac{1}{4}y_3)^2 - 2(y_2^2 + \frac{3}{2}y_2y_3 + \frac{1}{16}y_3^2) = 2(y_1 + \frac{1}{4}y_3)^2 - 2(y_2 + \frac{3}{4}y_3)^2 + y_3^2$.

Facem schimbarea de variabile $z_1 = y_1 + \frac{1}{4}y_3, z_2 = y_2 + \frac{3}{4}y_3, z_3 = y_3$ şi obţinem forma canonică $Q(z) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + z_3^2$.

Metoda Jacobi: Matricea asociată formei pătratice este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Primul minor principal $\Delta_1 = 0$ şi deci metoda Jacobi nu poate fi aplicată.

Metoda transformărilor ortogonale. Polinomul caracteristic este $P_A(X) = \det(XI_3 - A) = X^3 - \frac{9}{4}X + 1$. Din nou avem un caz în care polinomul caracteristic nu are rădăcini raţionale şi ne oprim cu această metodă aici.

Seminar 12

85. Considerăm mulţimea $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 3, x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1\}$. Să se determine dimensiunea, subspaţiul director şi ecuaţiile parametrice.

86. Considerăm $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 3, x_1 - x_3 = 2\}, L_1' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 1, x_1 - x_3 = 2\}, L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 5\}$. Să se arate că $L_1 \cap L_2 = L_1$ şi $L_1' \cap L_2 = L_1 \cap L_1' = \emptyset$. Ce reprezintă aceste varietăţi? Sunt acestea paralele?

87. Considerăm $p = {}^t(2, -1, 4) \in \mathbb{R}^3$ şi $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 2\}.p \in L_1$? Considerăm $L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4\}.p \in L_2?L_1||L_2$? Fie $L_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -4, x_1 + x_2 + x_3 = 5\}.p \in L_3?L_3||L_1$? Care sunt dimensiunile varietăţilor liniare L_1, L_2, L_3?

88. Fie $p = {}^t(2, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ şi dreapta d de ecuaţii parametrice $x_1 = 1 - 2t, x_2 = 2 + 3t, x_3 = 4 - t$. Să se determine subspaţiul vectorial director al dreptei d şi să se determine dacă $p \in d$. Scrieţi ecuaţiile implicite .

89. Considerăm dreptele date prin ecuaţii parametrice $d_1 = \{1+2t, 3-t, 1+t \mid t \in \mathbb{R}\}, d_2 = \{2+2s, -s, 2+s \mid s \in \mathbb{R}\}, d_3 = \{1+u, 2+u, 2u \mid u \in \mathbb{R}$. Studiaţi poziţia relativă a dreptelor d_1, d_2 şi d_3.

90. Scrieţi ecuaţiile implicite, indicaţi subspaţiul director şi precizaţi dimensiunea varietăţilor liniare:
a) $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \ {}^t(s-t+1, s-t+2, s-3), s, t \in \mathbb{R}\}$
b) $L_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \ {}^t(s+1, s-2, s-3), s, t \in \mathbb{R}\}$.

91. Scrieţi ecuaţii parametrice şi implicite pentru dreapta care trece prin punctul $p = \ {}^t(2, 0, 4)$ şi are spaţiul director generat de $v = \ {}^t(1, 0, -1)$. Aceeaşi cerinţă şi pentru dreapta ce trece prin punctele $p = \ {}^t(1, -1, 1), q = \ {}^t(3, 1, -4)$.

92. Considerăm punctele $p = \ {}^t(0, 1, -1), q = \ {}^t(1, 2, -2), r = \ {}^t(3, 1, 2)$ în $\mathbb{R}^3$. Arătaţi că sunt necoliniare şi scrieţi ecuaţii parametrice şi implicite pentru planul determinat de ele.

93. Care este poziţia relativă a planelor $\pi = \{(2-s-t, 3-s+t, 3s-2t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ şi $\pi' = \{(1-2s, 2+2t, 3+s-5t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$?

Determinăm ecuaţiile implicite a planelor π şi π'. Ecuaţiile parametrice ce definesc planul π sunt: $x_1 = 2-s-t, x_2 = 3-s+t, x_3 = 3s-2t$. Scoatem t din prima ecuaţie şi introducem în celelalte două. $t = 2-x_1-s, x_2 = 3-s+2-x_1-s, x_3 = 3s-2(2-x_1-s)$. Ultimele două ecuaţii devin $x_1+x_2 = 5-2s$ şi $-2x_1+x_3 = -4+5s$. Eliminăm s din aceste ecuaţii şi obţinem $\frac{x_1+x_2-5}{-2} = s = \frac{-2x_1+x_3+4}{5} \Leftrightarrow -5x_1-5x_2+25 = -4x_1+2x_3+8 \Leftrightarrow 17 = x_1+5x_2+2x_3$. Deci $\pi = \{x_1+5x_2+2x_3 = 17\}$.
Pentru planul π' ecuaţiile parametrice sunt $x_1 = 1-2s, x_2 = 2+2t, x_3 = 3+s-5t$. Scoatem pe s din prima ecuaţie, pe t din a doua şi introducem în ecuaţia a treia. Avem $s = \frac{x_1-1}{-2}, t = \frac{x_2-2}{2}, x_3 = 3+\frac{x_1-1}{-2}-5\frac{x_2-2}{2} \Leftrightarrow 2x_3 = 6-x_1+1-5x_2+10 \Leftrightarrow x_1+5x_2+2x_3 = 17$. Deci $\pi' = \{x_1+5x_2+2x_3 = 17\} = \pi$.

94. Considerăm dreapta $d \subset \mathbb{R}^3$ cu ecuaţiile implicite $2x_1-x_2-x_3 = 3, x_2+3x_3 = 1$. Construiţi dreptele d_1, d_2, d_3 astfel ca $d_1 || d, d_1 \neq d$; $d_2 \cap d = \{\text{un punct}\}$; d_3 necoplanară cu d.

Obţinem ecuaţiile parametrice pentru d. Punctele de pe dreapta d sunt soluţiile sistemului $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3 &= 3 \\ \phantom{2x_1-{}} x_2+3x_3 &= 1 \end{cases}$. Matricea extinsă a sistemului este

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$, adunăm linia a doua la prima şi obţinem $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$. Împărţim prima linie cu 2 şi obţinem forma eşalon $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$. Sistemul a devenit $\left\{\begin{array}{rrcl} x_1 & +x_3 & = & 2 \\ x_2 & +3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$. x_3 este variabilă secundară şi soluţia sitemului este $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2-t \\ x_2 & = & 1-3t \\ x_3 & = & t \in \mathbb{R} \end{array}\right.$. Acestea sunt ecuaţiile parametrice ale dreptei d. Mai putem scriei $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = p + tv, t \in \mathbb{R}$ unde $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$d_1 = tv$, este dreapta paralelă cu d şi diferită de d (d_1 trece prin origine).

Considerăm $d_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = p + tv_2$, unde $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vectorii directori v şi v_2 sunt liniar independenţi şi d şi d_2 trec prin acelaşi punct p.

Fie $d_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = p_3 + sv_3, s \in \mathbb{R}$.

pentru a arăta că d şi d_3 sunt necoplanare trebuie să demonstrăm că matricea $A = (v\ v_3)$ are rangul 2 şi matricea $\overline{A} = (v\ v_3\ p_3 - p)$ are rangul 3.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Primele două linii din A ne dau o matice de determinant 1, deci $\operatorname{rang}(A) = 2$, iar matricea $\overline{A}$ are tot determinantul 1, de unde $\operatorname{rang}(\overline{A}) = 3$.

Am ales în acest mod p_3 pentru că este clar că diferenţa $p_3 - p$ un vector liniar indepent de v şi v_3.

95. Considerăm dreptele d_1 şi d_2 în $\mathbb{R}^4$ date de ecuaţiile parametrice $d_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x = {}^t(1-2t, 2-3t, 1+t, 2), t \in \mathbb{R}\}$ şi $d_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x = {}^t(2+s, 1-3s, -2-s, 1+s), s \in \mathbb{R}\}$. Stabiliţi poziţia relativă a celor două drepte.

$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p_1 + tv_1, t \in \mathbb{R}$ unde $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$d_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = p_2 + sv_2, s \in \mathbb{R}$ unde $p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Comparăm rangurile următoarelor matrice: matricea care are coloanele v_1 şi v_2 şi matricea ce are coloanele v_1, v_2 şi $p_2 - p_1$.

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\overline{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Primele două linii din A formează o submatrice de determinant $= 9 \neq 0 \Rightarrow$ $\text{rang}(A) = 2$. Bordând în $\overline{A}$ obţinem submatricea formată din primele trei linii care are determinantul $= -20 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(\overline{A}) = 3$. Deci d_1 şi d_2, nu sunt paralele şi nu se intersectează (sunt necoplanare).

Seminar 13

Să se calculeze invarianţii conicei, să se determine natura şi genul acesteia, să se găsească centrul (dacă există) şi să se aducă la forma redusă.

96. $\mathcal{C} : 4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + 18y - 39 = 0.$

97. $\mathcal{C} : x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0.$

98. $\mathcal{C} : x^2 - 4xy + 4y^2 - 14x - 2y + 3 = 0.$

99. $\mathcal{C} : 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$

100. $\mathcal{C} : 3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4x + 4y + 4 = 0.$

101. $\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0.$

Seminar 14

Să se calculeze invarianţii cuadricei, să se determine natura acesteia, să se găsească centrul (dacă există) şi să se aducă la forma redusă.

102. $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 4y + 1 = 0.$

Forma pătratică este adusă la forma canonică, deci avem de format numai pătratele perfecte.

Ecuaţia este: $x^2-12x+36+y^2-4y+4+z^2-36-4+1=0 \Leftrightarrow (x-6)^2+(y-2)^2+z^2=39$.

Cuadrica este o sferă de centru $C(6,2,0)$ şi rază $\sqrt{39}$.

103. $\mathcal{S}: x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz+2x+2y-2z-3=0$.

Ecuaţia conicei se poate rescrie $(x+y-z)^2+2(x+y-z)-3=0$. Considerăm $x'=x+y-z, y'=y, z'=z$. Ecuaţia devine $x'^2+2x'-3=0 \Leftrightarrow (x'+1)^2-4=0 \Leftrightarrow X^2=2^2$, cu $X=x'+1$.

Cuadrica este o **reuniune de două plane paralele**.

Metoda roto-translaţiei.

Matricea formei pătratice $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$ este $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$P_{A_3}(X)=(X-1)^3-3(X-1)-2=X^2(X-3)$, de unde valorile proprii sunt $\lambda_{1,2}=0, \lambda_3=3$.

$(A_3-0\cdot I_3)=A_3$ are forma eşalon $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Doi vectori proprii ortogonali ai acestei matrice sunt $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, de unde obţinem vectorii de normă 1 $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pentru $\lambda_3=3$, forma eşalon a matricei $A_3-3\cdot I_3$ este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ iar vectorul propriu asociat acestei valori proprii, ortogonal pe v_1 şi v_2 este $v_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vectorul de normă 1 este $e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Matricea ce are coloanele e_1, e_2, e_3 este de determinant -1. Pentru a obţine o matrice de determinant 1 permutăm primele două coloane, adică e_1 cu e_2 şi obţinem matricea $S=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ cu

$\det(S) = 1$ şi ${}^tSS = I_3$. Schimbarea de coordonate este $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = {}^tS \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Astfel $x = \frac{1}{\sqrt{6}}(x'+\sqrt{3}y'+\sqrt{2}z'), y = \frac{1}{\sqrt{6}}(x'-\sqrt{3}y'+\sqrt{2}z'), z = \frac{1}{\sqrt{6}}(2x'-\sqrt{2}z')$.

Ecuaţia cuadricei devine $3z'^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}(x' + \sqrt{3}y' + \sqrt{2}z') + \frac{2}{\sqrt{6}}(x' - \sqrt{3}y' + \sqrt{2}z') - \frac{2}{\sqrt{6}}(2x'-\sqrt{2}z')-3 = 0 \Leftrightarrow 3z'^2+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}z'-3 = 0 \Leftrightarrow 3z'^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}z'-3 = 0 \Leftrightarrow z'^2+\frac{2\sqrt{3}}{9}z'-1 = 0 \Leftrightarrow (z'^2+\frac{2\sqrt{3}}{9}z'+\frac{3}{81})-\frac{1}{27}-1 = 0 \Leftrightarrow (z'+\frac{\sqrt{3}}{9})^2 = \frac{28}{27} \Leftrightarrow Z^2 = (\frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}})^2$, unde $Z = z'+\frac{\sqrt{3}}{9}$.

104. $\mathcal{S} : x^2 - 2xy - 2xz + 2x - 4y + 4 = 0.$

Calculăm şi invarianţii Δ, δ, I, J. Matricea asociată cuadricei este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Dezvoltând $\Delta = \det(A)$ după linia sau coloana a treia şi calculând determinantul 3×3 obţinem $\Delta = 4 \neq 0$.

Matricea formei pătratice asociate este $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\delta = \det(A_3) = 0$, ultimele două linii fiind egale. $I = \mathrm{tr}(A_3) = 1 + 0 + 0 = 1$ şi $J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 0 = -2.$

Forma pătratică asociată este $x^2 - 2xy - 2xz = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz - y^2 - z^2 - 2yz = (x - y - z)^2 - (y + z)^2$.

Notăm $x' = x - y - z, y' = y + z, z' = z$, de unde $x = x' + y', y = y' - z', z = z'$.

Înlocuim în ecuaţia cuadricei şi obţinem $x'^2 - y'^2 + 2(x' + y') - 4(y' - z') + 4 = 0 \Leftrightarrow x'^2+2x'-y'^2-2y'+4z'+4 = 0 \Leftrightarrow (x'+1)^2-(y'+1)^2+4(z'+1) = 0 \Leftrightarrow (y'+1)^2-(x'+1)^2 = 4(z'+1) \Leftrightarrow Y^2 - X^2 = 4Z \Leftrightarrow \frac{Y^2}{2^2} - \frac{X^2}{2^2} = Z$, ceea ce reprezintă ecuaţia unui **paraboloid hiperbolic**. În relaţiile de mai sus $X = x' + 1, Y = y' + 1, Z = z' + 1$.

105. $\mathcal{S} : 4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y + 8z + 2 = 0.$

Aducem forma pătratică $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz$ la forma canonică. Pentru aceasta conform metodei Gauss forţăm un pătrat perfect cu termenii ce conţin pe x.

Astfel, $4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz=4(x^2+xz)+2y^2+3z^2-4yz=4(x^2+2\frac{1}{2}xz+\frac{1}{4}z^2)+2y^2+3z^2-4yz-z^2=4(x+\frac{1}{2}z)^2+2(y^2-2yz+z^2)=4(x+\frac{1}{2}z)^2+2(y-z)^2=4x'^2+2y'^2$, unde $x'=x+\frac{z}{2}, y'=y-z, z'=z$. De aici obţinem $x=x'-\frac{z'}{2}, y=y'+z', z=z'$.

Cu această schimbare de coordonate ecuaţia cuadricei $4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz+6x+4y+8z+2=0$ devine $4x'^2+2y'^2+6(x'-\frac{z'}{2})+4(y'+z')+8z'+2=0 \Leftrightarrow 4x'^2+2y'^2+6x'+4y'+9z'+2=0 \Leftrightarrow 4(x'^2+\frac{3}{2}x')+2(y'^2+2y')+9z'+2=0 \Leftrightarrow 4(x'+\frac{3}{4})^2+2(y'+1)^2+9z'+2-\frac{9}{4}-2=0 \Leftrightarrow 4(x'+\frac{3}{4})^2+2(y'+1)^2+9(z'-\frac{1}{4})=0 \Leftrightarrow -\frac{(x'+\frac{3}{4})^2}{\frac{9}{4}}-\frac{(y'+1)^2}{\frac{9}{2}}=(z'-\frac{1}{4})$.

Cuadrica este un **paraboloid eliptic** dat de ecuaţia $-\frac{X^2}{(\frac{3}{2})^2}-\frac{Y^2}{(\frac{3}{\sqrt{2}})^2}=Z$, unde $X=x'+\frac{3}{4}, Y=y'+1, Z=z'-\frac{1}{4}$. Este îndreptat în sensul negativ al axei Z.

Metoda roto-translaţiei.

Matricea formei pătratice $4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz$ este $A_3=\begin{pmatrix}4&0&2\\0&2&-2\\2&-2&3\end{pmatrix}$.

$P_{A_3}(X)=X(X-3)(X-6)$ (se dezvoltă $\det(XI_3-A_3)$ după prima linie). Valorile proprii sunt $\lambda_1=0, \lambda_2=3, \lambda_3=6$.

Vectorii proprii sunt:

- pentru $\lambda_1=0, v_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ iar vectorul de normă 1, $e_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$.
- pentru $\lambda_2=3, v_2=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ iar vectorul de normă 1, $e_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.
- pentru $\lambda_3=6, v_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ iar vectorul de normă 1, $e_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Se verifică uşor că $e_i \perp e_j$ pentru $i \neq j$.

Matricea $S=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\-2&2&-1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$ cu $\det(S)=1$ şi ${}^tSS=I_3$. Schimbarea de coordonate este

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}={}^tS\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Astfel $x=\frac{1}{3}(x'+2y'+2z'), y=\frac{1}{3}(-2x'+2y'-z'), z=\frac{1}{3}(-2x'-y'+2z')$.

Ecuaţia cuadricei devine $3y'^2+6z'^2+\frac{6}{3}(x'+2y'+2z')+\frac{4}{3}(-2x'+2y'-z')+\frac{8}{3}(-2x'-y'+2z')+2=0 \Leftrightarrow 3y'^2+6z'^2-6x'+4y'+8z'+2=0 \Leftrightarrow 3(y'^2+2\frac{2}{3}y'+$

$\frac{4}{9}) + 6(z'^2 + 2\frac{2}{3}z' + \frac{4}{9}) - 6x' + 2 - \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow 3(y' + \frac{2}{3})^2 + 6(z' + \frac{2}{3})^2 - 6x' - 2 = 0 \Leftrightarrow 3(y' + \frac{2}{3})^2 + 6(z' + \frac{2}{3})^2 = 6(x' + \frac{1}{3})$.

Notând cu $X = x' + \frac{1}{3}, Y = y' + \frac{2}{3}, Z = z' + \frac{2}{3}$ obţinem ecuaţia $\frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} + Z^2 = X$.