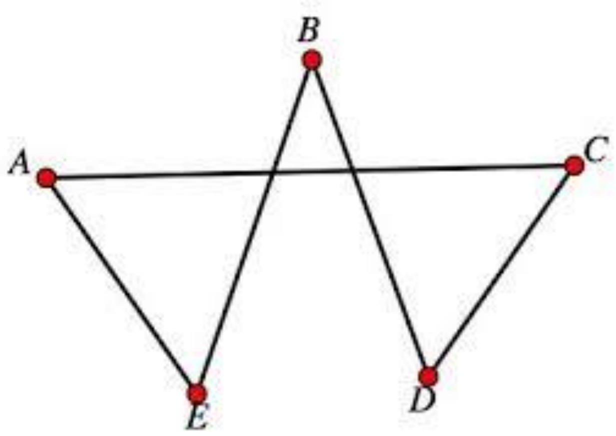
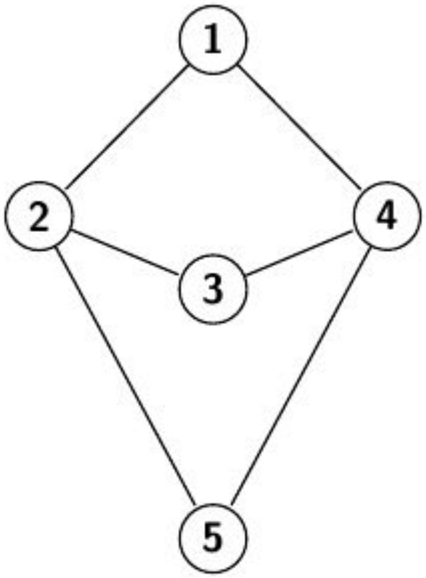
Grafuri Hamiltoniene

Definitii

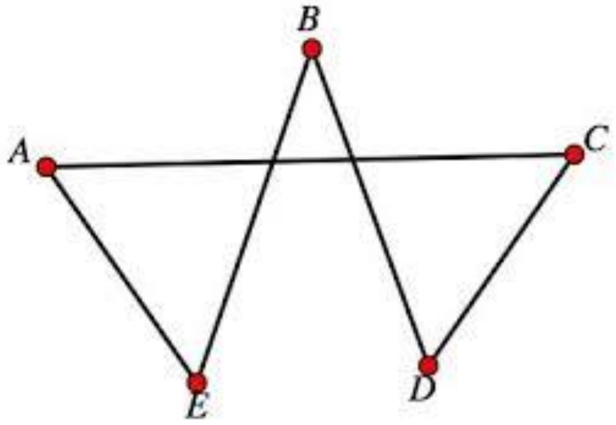
Un graf este hamiltonian dacă admite un **ciclu hamiltonian** adică un ciclu care contine toate nodurile grafului.

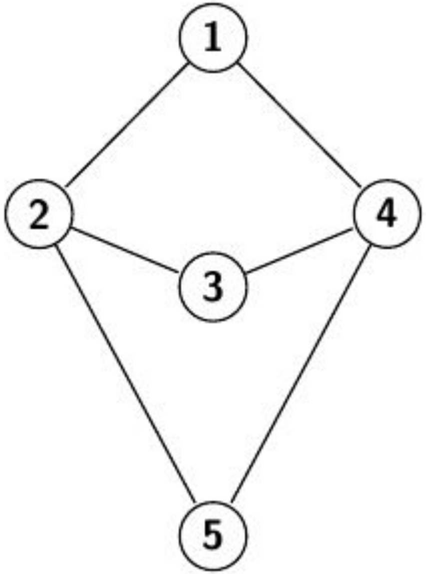




Definitii

Un graf este hamiltonian dacă admite un **ciclu hamiltonian** adică un ciclu care contine toate nodurile grafului.





Ciclu hamiltonian ACDBEA

Nu avem ciclu hamiltonian

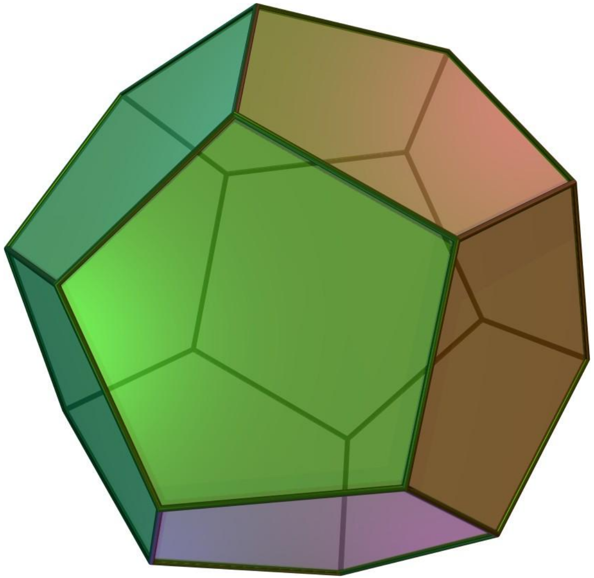
Istorie

Ciclu Hamiltonian a fost numit așa după Sir William Rowan Hamilton care în 1856-1857 a inventat un joc care cerea găsirea unui ciclu Hamiltonian.Jocul a fost numit jocul Icosian și cerea găsirea unui ciclu Hamiltonian într-un “dodecaedru”.

Jocul icosian

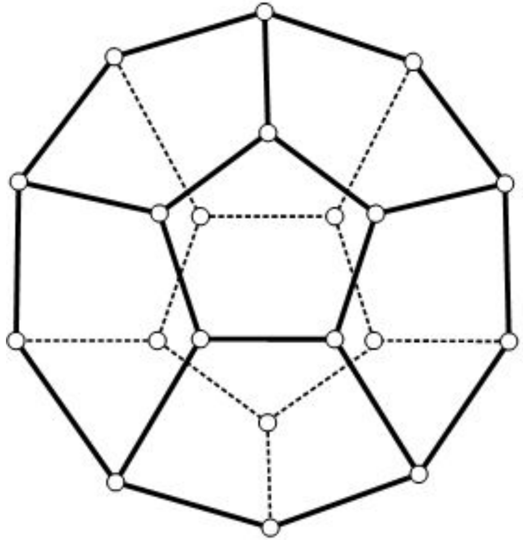
- 1856 – **Hamilton –** *“voiaj în jurul lumii”* :

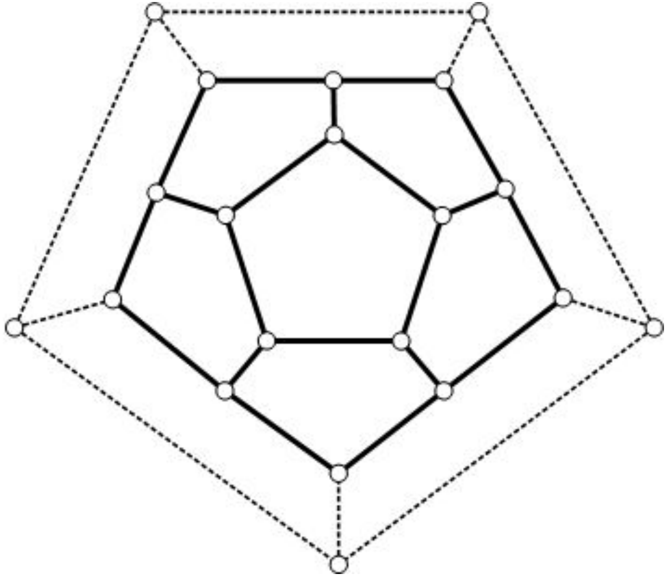
Există un traseu închis pe muchiile dodecaedrului care să treacă prin fiecare vârf o singură dată



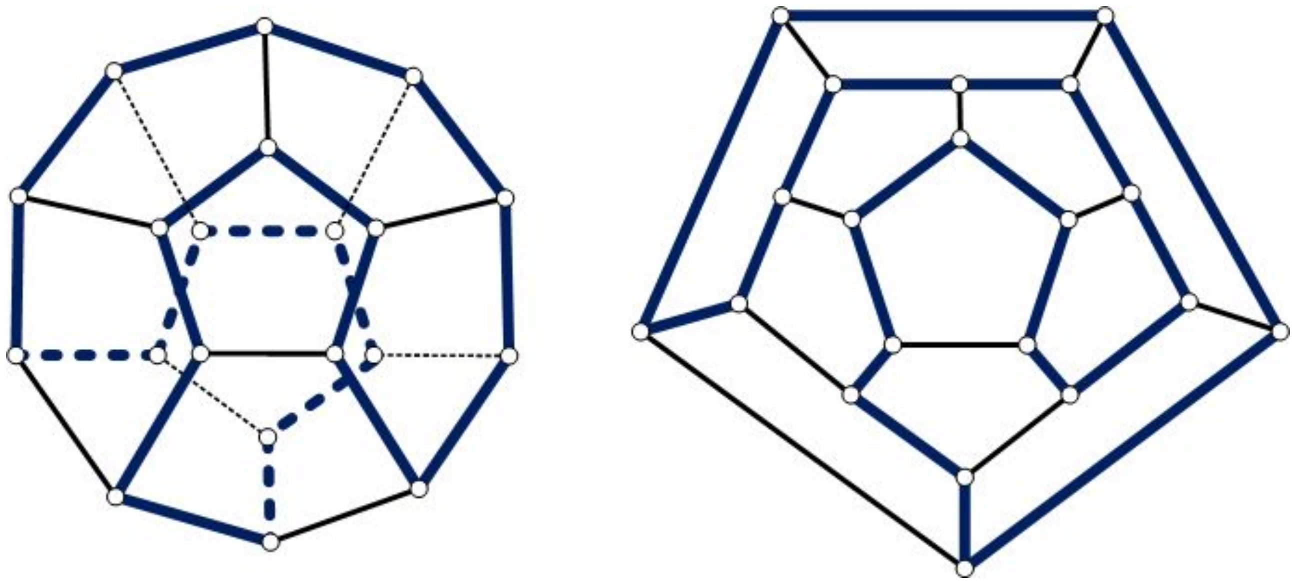
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dodecahedron.jpg

Jocul icosian





Jocul icosian



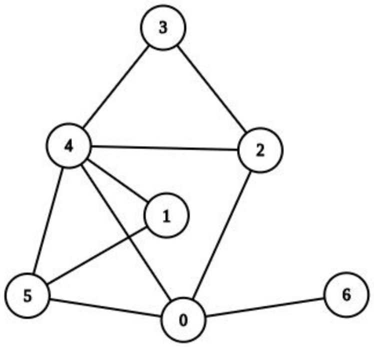
Jocul icosian

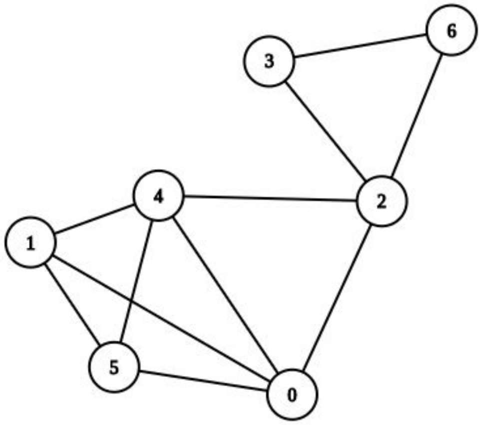
- Ciclu hamiltonian - trece o singură dată prin toate vârfurile

- Graf hamiltonian

- Problema comis-voiajorului

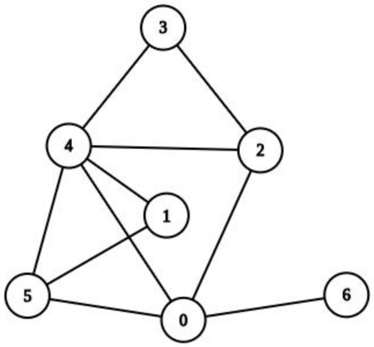
Care din următoarele grafuri e hamiltonian ?

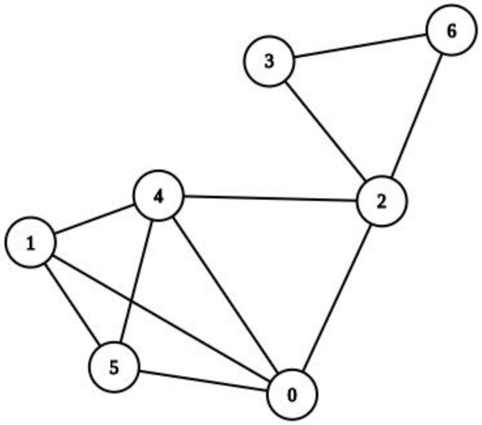




Care din următoarele grafuri e hamiltonian ?

Nici unul! De ce?





Care din următoarele grafuri e hamiltonian ?

Proprietate (conditie necesara):

- **Grafurile hamiltoniene sunt biconexe(nu are noduri critice)!**

Opusul nu este valabil:

- **Nu toate grafurile biconexe sunt hamiltoniene:**

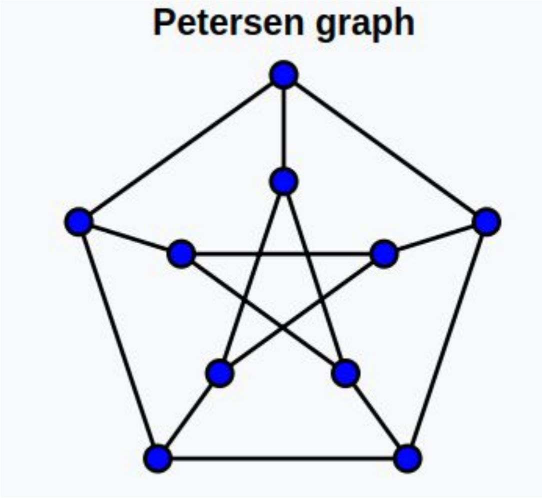
Care din următoarele grafuri e hamiltonian ?

Proprietate (conditie necesara):

- **Grafurile hamiltoniene sunt biconexe!**

Opusul nu este valabil:

- **Nu toate grafurile biconexe sunt hamiltoniene:**



Grafuri Euleriene

Conditie necesara și suficienta ?

Grafuri Euleriene

Conditie necesara și suficienta ?

- DA, fiecare nod trebuie sa aiba grad par (și graful sa fie conex exceptand nodurile izolate).

Grafuri hamiltoniene

Conditii suficiente:

- Teorema lui Dirac
- Teorema lui Ore
- Teorema lui Chvatal si Erdos
- Teorema lui Goodman si Hedetniemi
- Teorema lui Duffus, Gould si Jacobson, 1981 (similara cu Goodman)

Teorema lui Dirac

Teorema: Fie G un graf cu ordinul n ≥ 3. Dacă δ(G) ≥ n/2 atunci G este hamiltonian.

Demonstrație:

- **Alegem un nod v1 la intamplare. (nu conteaza care pentru că, dacă exista ciclul hamiltonian el poate începe în orice nod).**

Teorema lui Dirac

Teorema: Fie G un graf cu ordinul $n \geq 3$. Dacă $\delta(G) \geq n/2$ atunci G este hamiltonian.

Demonstrație:

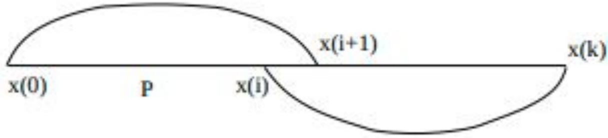
- Alegem un nod x_1 la intamplare. (nu conteaza ce nod pentru că dacă exista un ciclu hamiltonian el poate începe din orice nod).
- Creem un lanț cat mai lung plecand din x_1 și obținem $x_1 \ldots . x_k$. Dacă k == n -> am obtinut lanț Hamiltonian.
- Dacă avem $x_1 \ldots x_k$ și toți vecinii lui xk au fost deja vizitati putem extinde astfel:

Teorema lui Dirac:Fie G un graf cu ordinul $n \geq 3$. Dacˇa $\delta(G) \geq n/2$ atunci G este hamiltonian.

- **Dacă avem $x_1...x_k$ și toți vecinii lui x_k au fost deja vizitati putem extinde astfel:**
  1. **Observam ca k >= n/2, pentru ca fiecare nod are cel puțin n/2 vecini.**
  2. **Exista cel puțin n/2 noduri i astfel inca avem muchie $x_i x_k$.**
  3. **Exista cel puțin n/2 noduri i astfel inca avem muchie $x_0 x_i$.**
  4. **Din principiul lui cutiilor lui Diriclet exista un i astfel inca avem muchie și $x_0 x_{i+1}$ și $x_i x_k$ muchie.**

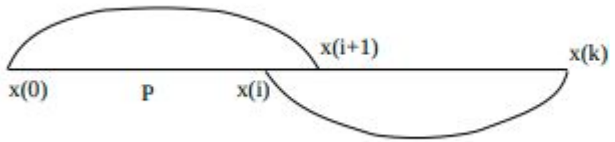
Teorema lui Dirac:Fie G un graf cu ordinul n ≥ 3. Dac˘a δ(G) ≥ n/2 atunci G este hamiltonian.

- **Dacă avem $x_1...x_k$ și toți vecinii lui x_k au fost deja vizitati putem extinde astfel:**
  1. **Observam ca k >= n/2, pentru ca fiecare nod are cel puțin n/2 vecini.**
  2. **Exista cel puțin n/2 noduri i astfel inca avem muchie $x_i x_k$.**
  3. **Exista cel puțin n/2 noduri i astfel inca avem muchie $x_{i+1} x_0$.**
  4. **Din principiul lui cutiilor lui Diriclet exista un i astfel inca avem muchie și $x_0 x_{i+1}$ și $x_i x_k$ muchie.**
  5. **Prin urmare obtinem ciclul $x_0...x_i x_k x_{k-1}...x_{i+1} x_0$. De asemenea x_{k+1} va fi conectat cu unul din aceste noduri să zicem x_l prin urmare putem obține un nou lanț permutand ciclu astfel incat sa se termine în xl și adaugand pe x_{k+1} dupa.**



Teorema lui Dirac:Fie G un graf cu ordinul n ≥ 3. Dacˇa δ(G) ≥ n/2 atunci G este hamiltonian.

- **Obtinem prin pasi repeteati un sir $x_1...x_n$.**
- **Dacă avem muchie x_1x_n atunci avem ciclu hamiltonian și am terminat.**
- **Dacă nu avem muchie folosim același principiu de mai sus și formăm ciclul $x_1...x_ix_nx_{n-1}...x_{i+1}x_1$**



Conditii Suficiente

Teorema lui Ore: **Fie G un graf cu ordinul n ≥ 3**, **dacă avem pentru oricare pereche de noduri neadiacente deg(x) + deg(y) >= n -> atunci graful este Hamiltonian**.

https://www.infoarena.ro/ciclu-hamiltonian-in-graf-dens

Conditii Suficiente

Teorema lui Ore: **Fie G un graf cu ordinul n ≥ 3**, **dacă avem pentru oricare pereche de noduri neadiacente deg(x) + deg(y) >= n -> atunci graful este Hamiltonian**.

Teorema lui Dirac:**Fie G un graf cu ordinul n ≥ 3. Dac˘a δ(G) ≥ n/2 atunci G este hamiltonian.**

Care teorema este mai puternica ?

Conditii Suficiente

Teorema lui Ore: **Fie G un graf cu ordinul $n \geq 3$**, **dacă avem pentru oricare pereche de noduri neadiacente deg(x) + deg(y) >= n -> atunci graful este Hamiltonian**.

Teorema lui Dirac**: Fie G un graf cu ordinul $n \geq 3$. Dac˘a $\delta(G) \geq n/2$ atunci G este hamiltonian.**

Care teorema este mai puternica ?

Teorema lui Ore! Teorema lui Dirac este un caz particular al teoremei lui Ore, pentru că dacă orice nod are gradul >= n/2, orice pereche de noduri are suma gradelor >=n.

Definiții ajutătoare

Conectivitatea κ(G) unui graf G este este marimea minima a unei mulțimi de tăiere a lui G.

Cum o calculăm ?

Definiții ajutătoare

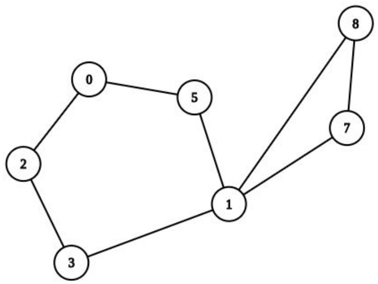
Conectivitatea κ(G) unui graf G este este marimea minima a unei mulțimi de tăiere a lui G.

Cum o calculăm ? -> **Flux maxim = taietura minima.**

Definiții ajutătoare

Conectivitatea κ(G) unui graf G este este marimea minima a unei mulțimi de tăiere a lui G.

O mulțime de noduri a unui graf G este independentă dacă nu contine noduri adiacente. Numărul de independență α(G) al unui graf G este marimea cea mai mare posibila a unei mulțimi independente a lui G.

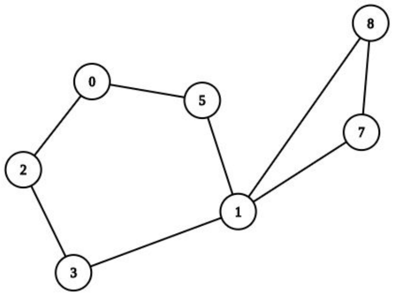


Definiții ajutătoare

Conectivitatea κ(G) unui graf G este este marimea minima a unei mulțimi de tăiere a lui G.

O mulțime de noduri a unui graf G este independentă dacă nu contine noduri adiacente. Numărul de independență α(G) al unui graf G este marimea cea mai mare posibila a unei mulțimi independente a lui G.

3 (una din solutii este {0,3,8})



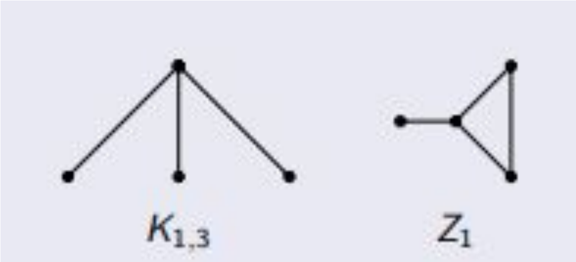
- Teorema lui Chvatal si Erdos

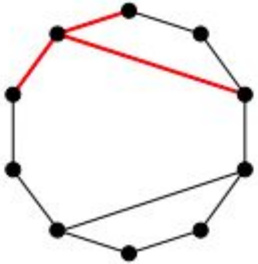
Fie G un graf conectat cu ordinal $n \geq 3$, conectivitatea $\kappa(G)$, și numărul de independență $\alpha(G)$. Daca $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, atunci G este hamiltonian

- Teorema lui Goodman si Hedetniemi

Teorema lui Goodman si Hedetniemi

- **Daca G este un graf 2-conectat ¸si liber de {K1,3, Z1} atunci G este hamiltonian.**





Cum găsim un ciclu hamiltonian ?

?

Cum găsim un ciclu hamiltonian ?

Nu este cunoscut un algoritm polinomial pentru a rezolva aceasta problema. Vom avea o discuție mai lungă pe aceasta tema saptamana viitoare.

Cum găsim un ciclu hamiltonian ?

Nu este cunoscut un algoritm polinomial pentru a rezolva aceasta problema. Vom avea o discuție mai lungă pe aceasta tema saptamana viitoare.

O prima solutie este sa incercam toate permutarile și sa verificam pentru fiecare în parte dacă este o soluție validă:

Cum găsim un ciclu hamiltonian ?

Nu este cunoscut un algoritm polinomial pentru a rezolva aceasta problema. Vom avea o discuție mai lungă pe aceasta tema saptamana viitoare.

O prima solutie este sa incercam toate permutarile și sa verificam pentru fiecare în parte dacă este o soluție validă:

- Complexitate ?

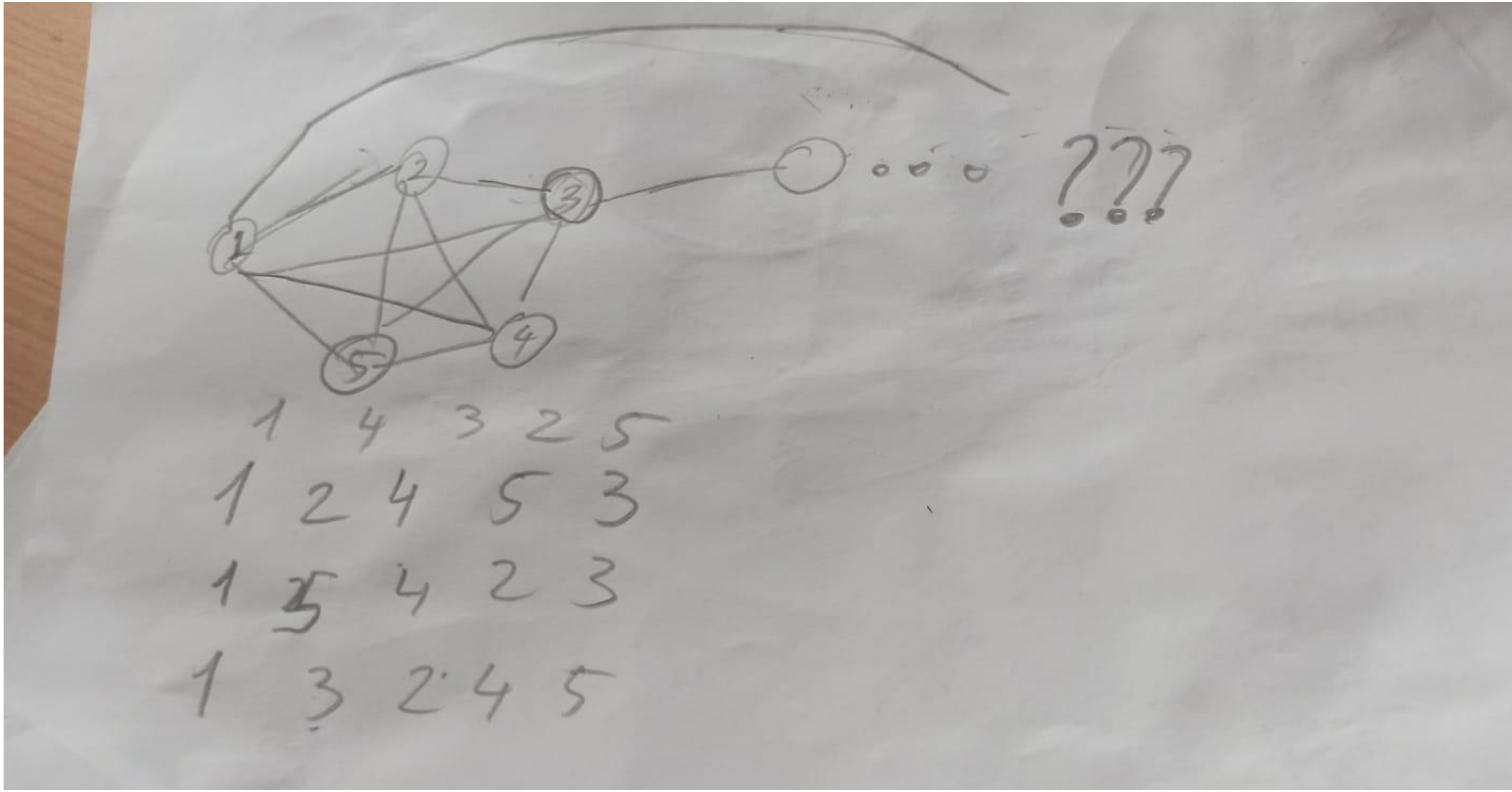
Cum găsim un ciclu hamiltonian ?

Nu este cunoscut un algoritm polinomial pentru a rezolva aceasta problema. Vom avea o discuție mai lungă pe aceasta tema saptamana viitoare.

O prima solutie este sa incercam toate permutarile și sa verificam pentru fiecare în parte dacă este o soluție validă:

- Complexitate O(n! * n)

Cum găsim un ciclu hamiltonian ?



Cum găsim un ciclu hamiltonian ?

O a doua soluție este sa folosim un algoritm exponential mai eficient:

Vom considera matricea `C` având următoarea semnificaţie: `C[j][k]` este costul minim al unui lanţ ce începe în nodul `1`, se termină în nodul `k` şi conţine toate nodurile identificate cu `1` în configuraţia binară a lui `j` exact o singură dată. De exemplu, pentru graful din enunţ, starea caracterizată de tripletul `(4, 23, 0)` va avea valoarea `7` şi va reprezenta costul minim al unui lanţ ce începe în nodul `4`, se termină în nodul `0` şi conţine exact o singură dată nodurile `{0, 1, 2, 4}`, deoarece $23 = (10111)_2$ (ordinea biţilor este considerată cea inversă scrierii în baza `2`).

Solutia are complexitatea O(2^n *n)