# Laborator 4 - solutii

***Convergenta in distributie:***
Fie $X_1, \dots X_n, \dots$ v.a. reale. Spunem ca $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$ (sirul de v.a $X_n, n \in \mathbb{N}$ converge in distributie catre $F$) daca $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$, pentru orice $x$ punct de continuitate ptr $F$. $F_n, F$ sunt functii de repartitie, i.e $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n < x), F(x) = \mathbb{P}(X < x)$.
***Teorema Limita Centrala:***
Fie $X_1, \dots X_n \dots$ iid cu $\mathbb{E}[X_1] = \mu < \infty, \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Atunci:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{S}_n - \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} Z, \text{ unde } Z \sim N(0,1)$$

## Exercitiul 1

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \beta \cdot X \sim N(\beta \cdot \mu, \sigma^2 \cdot \beta^2)$.

***Solutie:***

Determinam functia de repartitie: $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z < x), \forall x \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{P}(Z < x) = \mathbb{P}(\beta X < x) = \mathbb{P}(X < x/\beta) = \int_{-\infty}^{x/\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$.
Facem schimbarea de variabila $s = t/\beta, ds = dt/\beta$.
Avem $\mathbb{P}(Z < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(s/\beta-\mu)^2}{2\sigma^2}} 1/\beta ds = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\beta^2}} \cdot e^{-\frac{(s-\beta\mu)^2}{2\sigma^2\beta^2}}\, ds$. Deci, $Z = \beta X \sim N(\beta\mu, \sigma^2\beta^2)$.

## Exercitiul 2

Un pod poate rezista la o greutate de 10000 tone. Media unei masini care traverseaza podul este de 4 tone cu deviatie standard de 3 tone. Stim ca la un moment dat pe pod sunt 2450 masini. Aproximati probabilitatea de colaps a podului.

***Solutie:***
Prima data modelam variabilele aleatoare folosite. Sa presupunem ca pe pod trece mereu o singura masina. Atunci variabila aleatoare $X : \Omega = \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ reprezinta masa masinii care este prezenta in momentul $k$ pe pod. Faptul ca media unei masini care traverseaza podul este de 4 tone este echivalent cu $\mathbb{E}[X] = 4$ si deviatia standard de 3 tone inseamna $\mathrm{Var}(X) = 3$.
Variabila aleatoare care modeleaza faptul ca la momentul $k$ avem $n = 2450$ de masini este $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, X = X_1 + \dots X_n$, unde $X_i$ iid , $\mathbb{E}[X_i] = \mu = 4, \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 = 3$; Probabilitatea de colaps este echivalenta cu $\mathbb{P}(X > 10000) = \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{2450} > 10000)$;
$\mathbb{P}(X > 10000) = 1 - \mathbb{P}(X < 10000) = 1 - F(10000)$, unde $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ este functia de repartitie a lui $X = X_1 + \dots + X_{2450}$;

Folosim Teorema Limita Centrala astfel: $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{2450} > 10000) =$
$= \mathbb{P}(\frac{X_1+\cdots+X_{2450}}{2450} > \frac{10000}{2450}) = \mathbb{P}(\frac{X_1+\cdots+X_{2450}}{2450} - 4 > \frac{10000}{2450} - 4) = \mathbb{P}(\bar{S}_{2450} - 4 > \frac{10000}{2450} - 4) =$
$\mathbb{P}(\frac{\sqrt{2450}}{\sqrt{3}}(\bar{S}_{2450} - 4) > \frac{\sqrt{2450}}{\sqrt{3}}(\frac{10000}{2450} - 4)) = 1 - \mathbb{P}(\frac{\sqrt{2450}}{\sqrt{3}}(\bar{S}_{2450} - 4) < \frac{\sqrt{2450}}{\sqrt{3}}(\frac{10000}{2450} - 4)) =$
$= 1 - F_{2450}(\frac{\sqrt{2450}}{\sqrt{3}}(\frac{10000}{2450} - 4))$, unde $F_{2450} : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ este functia de repartitie a v.a. $\frac{\sqrt{2450}}{\sqrt{3}}(\bar{S}_{2450} - 4)$;
Din Teorema Limita Centrala, stim ca pentru orice $x$ punct de continuitate pentru $\Theta$, avem ca $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, unde $F_n$ sunt functiile de repartitie pentru $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}}(\bar{S}_n - 4)$ si $\Theta$ este functia de repartitie a normalei standard $N(0,1)$.
Asadar, $\lim_{n\to\infty} F_n(\frac{\sqrt{2450}}{\sqrt{3}}(\bar{S}_{2450} - 4) = \Theta(\frac{\sqrt{2450}}{\sqrt{3}}(\bar{S}_{2450} - 4))$. Acest lucru inseamna ca $1 - F_{2450}(\frac{\sqrt{2450}}{\sqrt{3}}(\frac{10000}{2450} - 4)) \approx 1 - \Theta(\frac{\sqrt{2450}}{\sqrt{3}}(\frac{10000}{2450} - 4)) \approx 1 - \Theta(2.28)$. Aceasta valoare se ia din tabelul cu valorile lui $\Theta$.

# Exercitiul 3

1. Nivelul de zgomot al unei masini de spalat este o v.a. de medie 44 dB si de abatere standard 5 dB. Admitand aproximarea normala care este probabilitatea sa gasim o medie a zgomotului superioara la 48 dB intr-un esantion de talie 10 masini de spalat?
2. O telecabina are o capacitate de 100 persoane. Stiind ca greutatea populatiei este o v.a. de medie 66.3 kg si o abatere de 15.6 Kg si presupunand ca persoanele care au urcat in telecabina au fost alese in mod aleator din populatie, care este probabilitatea ca greutatea totala a acestora sa depaseasca 7000 Kg?

***Solutie:***

- Variabila aleatoare $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ modeleaza nivelul de zgomot al primei masini de spalat pe care o alegem. Stim ca daca alegem o masina de spalat, in medie nivelul de zgomot este de 44 dB si de abatere standard 5 dB. Acest lucru este echivalent cu faptul ca $\mathbb{E}[X_1] = 44,\ \mathrm{Var}(X_1) = 5$ (nivelul de zgomot al masinii de spalat $\omega$ este $X_1(\omega)$).
  Alegem 10 masini de spalat. Pentru $1 \leq i \leq 10$, alegem o masina de spalat ($\omega$); zgomotul produs de aceasta este $X_i(\omega)$ unde $X_i$ este o v.a. cu $\mathbb{E}[X_i] = \mu = 44,\ \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 = 5$. Aceste v.a. sunt independente si identic distribuite.
  Media zgomotului dintr-un esantion de talie 10 este modelat de v.a. $\bar{S}_{10} = \frac{X_1+\cdots+X_{10}}{10}$.
  Vrem sa calculam $\mathbb{P}(\bar{S}_{10} > 48)$. Folosim Teorema Limita Centrala:
  $\mathbb{P}(\bar{S}_{10} > 48) = 1 - \mathbb{P}(\bar{S}_{10} < 48) = 1 - \mathbb{P}(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}(\bar{S}_{10} - 44) < \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}(48 - 44)) \approx$
  $\approx 1 - \Theta(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}(48 - 44)) = 1 - \Theta(2.53)$, unde $\Theta$ este functia de repartitie a $N(0,1)$.
- Cand alegem persoana $i$, greutatea acesteia este $X_i(\omega)$ unde $X_i$ este o v.a. de medie $\mu = 66.3$ Kg si varianta $\sigma^2 = 15.6$ Kg. Pentru ca alegerea persoanei se face independent, aceste v.a. sunt independente.

Vrem sa calculam $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{100} > 7000) = \mathbb{P}(\bar{S}_{100} > 70) = \mathbb{P}(\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{15.6}}(\bar{S}_{100} - 66.3) > \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{15.6}}(70-66.3)) = 1-\mathbb{P}(\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{15.6}}(\bar{S}_{100}-66.3) < \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{15.6}}(70-66.3)) \approx 1-\Theta(\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{15.6}}(70-66.3)) = 1 - \Theta(2.37)$.

Tabelul cu valorile Normalei se citeste astfel: se aproximeaza numarul $x$ caruia ii aplicam $\Theta$ la 2 zecimale exacte. Cifra sutimilor se ia de pe coloane, si celelalte cifre se iau de pe linii. Observam ca valoarea maxima caruia i se aplica $\Theta$ este 3.09 intrucat pentru $x > 3.09$,
$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X < 3.09) + \mathbb{P}(X \in (3.09, x)) = \mathbb{P}(X < 3.09)$.
Pentru primul exercitiu, $\Theta(2.28) = 0.9887$ deoarece 2.28 corespunde cuplului $(2.2, 0.08)$.

# Exercitiul 4

Fie $X, Y : \Omega \to \{-1, 0, 1\}$ cu distributia cuplului $(X, Y) : \Omega \to \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$ astfel $\mathbb{P}(X = a, Y = b) = 1/4$ daca si numai daca $\{a, b\} \in \{\{-1, 0\}, \{0, 1\}\}$, 0 in rest.

- Calculati $\mathbb{E}[X]$ si $\mathbb{E}[Y]$.
- Calculati $\mathbb{E}[XY]$.
- Sunt $X$ si $Y$ independente?

***Solutie:***

- 1. Varianta 1: Stim $\mathbb{E}[X] = (-1) \cdot \mathbb{P}(X = -1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) =$
  $= \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = -1)$.
  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}([X = 1 \cap Y = -1] \cup [X = 1 \cap Y = 0] \cup [X = 1 \cap Y = 1])$. Evenimentele $[X = 1 \cap Y = -1], [X = 1 \cap Y = 0], [X = 1 \cap Y = 1]$ sunt disjuncte deci $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}([X = 1 \cap Y = -1]) + \mathbb{P}([X = 1 \cap Y = 0]) + \mathbb{P}([X = 1 \cap Y = 1]) = 0 + 1/4 + 0 = 1/4$ (conform definitiei din enunt).
  $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}([X = -1 \cap Y = -1] \cup [X = -1 \cap Y = 0] \cup [X = -1 \cap Y = 1])$. Evenimentele $[X = -1 \cap Y = -1], [X = -1 \cap Y = 0], [X = -1 \cap Y = 1]$ sunt disjuncte deci $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}([X = -1 \cap Y = -1]) + \mathbb{P}([X = -1 \cap Y = 0]) + \mathbb{P}([X = -1 \cap Y = 1]) = 0 + 1/4 + 0 = 1/4$ (conform definitiei din enunt).
  Deci, $\mathbb{E}([X]) = 1/4 - 1/4 = 0$.

  2. Varianta 2: Vrem sa legam $X$ de v.a. $(X, Y)$. Stim ca $\mathbb{E}[f(X, Y)] =$
  $= \sum_{(a,b)\in\{-1,0,1\}\times\{-1,0,1\}} f((a, b)) \cdot \mathbb{P}(X = a, Y = b)$, pentru orice $f : \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$ masurabila. Pentru $f(x, y) = x$, obtinem
  $\mathbb{E}[X] = \sum_{(a,b)\in\{-1,0,1\}\times\{-1,0,1\}} a \cdot \mathbb{P}(X = a, Y = b) =$
  $= \sum_{(a,b)\in\{(-1,0),(0,-1),(0,1),(1,0)\}} a \cdot 1/4 = 1/4 - 1/4 = 0$.
  Pentru $Y$ procedam la fel: consideram $f(x, y) = y$, si avem
  $\mathbb{E}[Y] = \sum_{(a,b)\in\{-1,0,1\}\times\{-1,0,1\}} b \cdot \mathbb{P}(X = a, Y = b) =$
  $= \sum_{(a,b)\in\{(-1,0),(0,-1),(0,1),(1,0)\}} b \cdot 1/4 = 1/4 - 1/4 = 0$

# Laborator 4 - solutii

- Consideram $f(x,y) = xy$ si avem $\mathbb{E}[XY] = \sum_{(a,b)\in\{-1,0,1\}\times\{-1,0,1\}} ab\cdot\mathbb{P}(X=a,Y=b) = \sum_{(a,b)\in\{(-1,0),(0,-1),(0,1),(1,0)\}} ab\cdot 1/4 = 0$.
- $X$ si $Y$ independente $\Leftrightarrow \mathbb{P}(X=a,Y=b) = \mathbb{P}(X=a)\cdot\mathbb{P}(Y=b)$.
  Am calculat $\mathbb{P}(X=1) = 1/4$ si $\mathbb{P}(X=-1) = -1/4$. Stim $\mathbb{P}(X=1,Y=-1) = 0$, deci $\mathbb{P}(X=1,Y=-1) \neq \mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(X=-1)$.