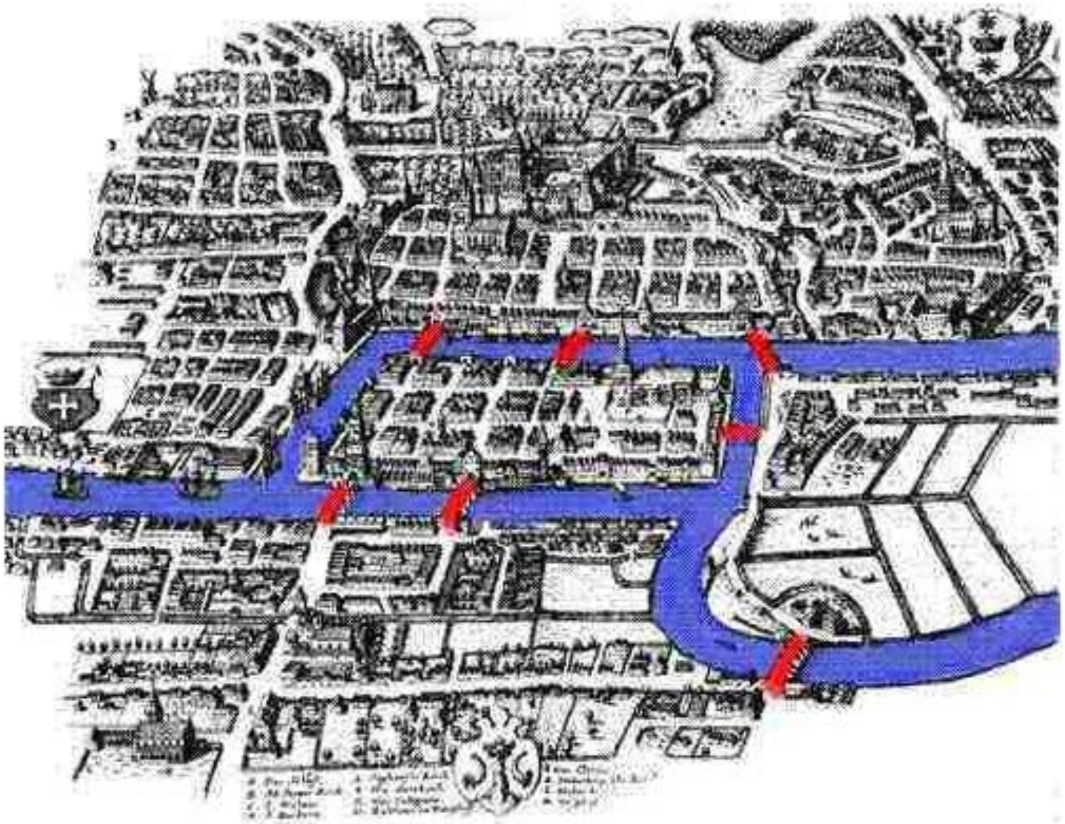
Grafuri euleriene

Istoric. Aplicații

– din cursul 1

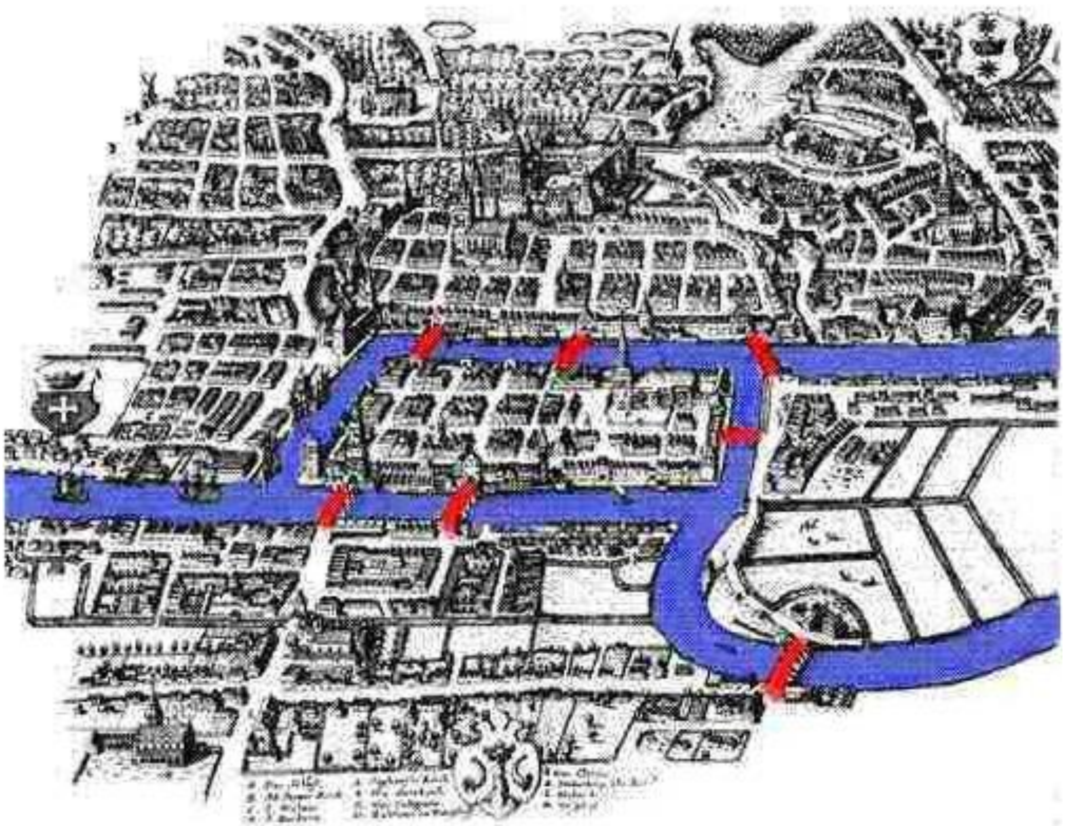
Problema celor 7 poduri din Königsberg

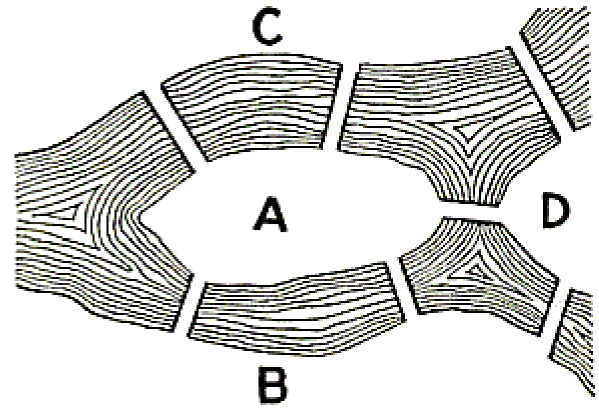


Este posibil ca un om să facă o plimbare în care să treacă pe toate cele 7 poduri o singură dată?

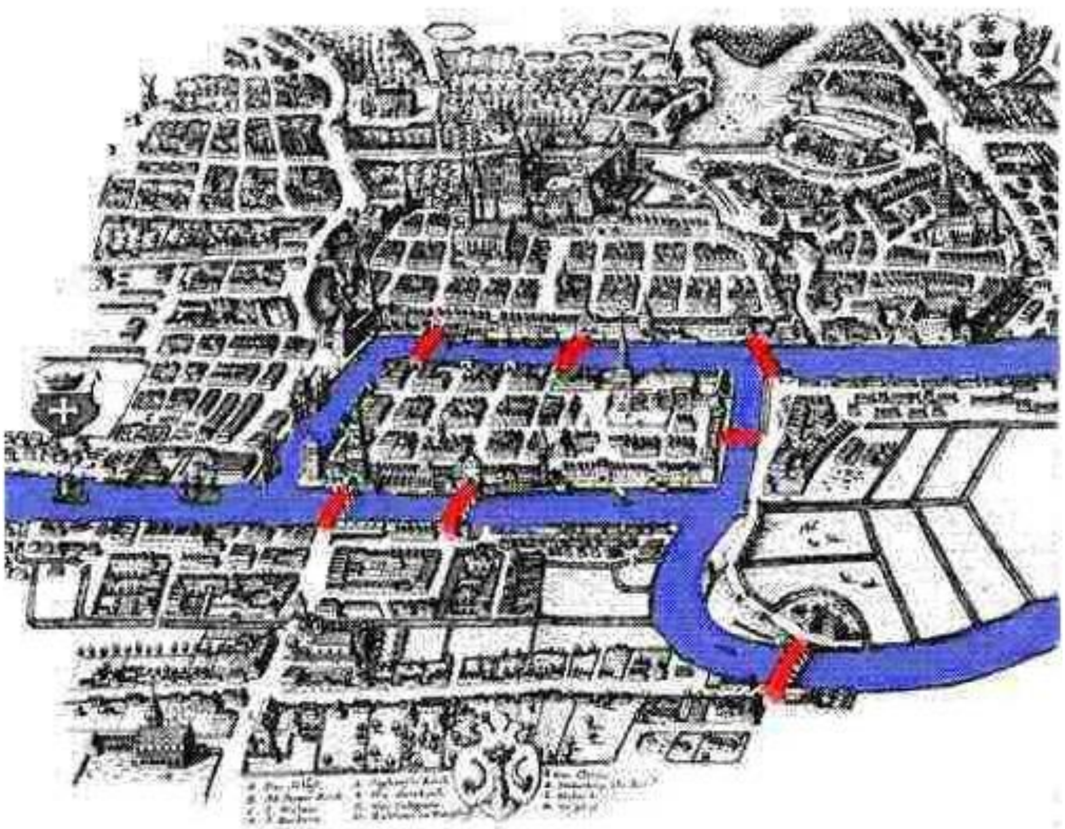
http://think-like-a-git.net/sections/graph-theory/seven-bridges-of-konigsberg.html

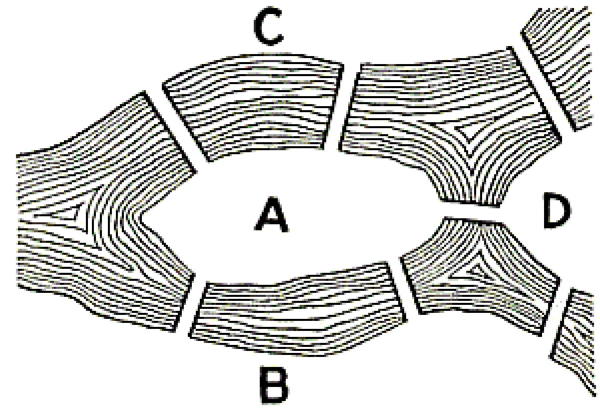
Problema celor 7 poduri din Königsberg



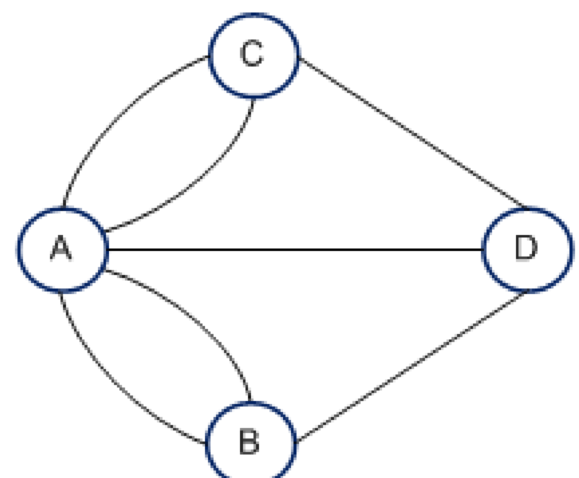


Problema celor 7 poduri din Königsberg

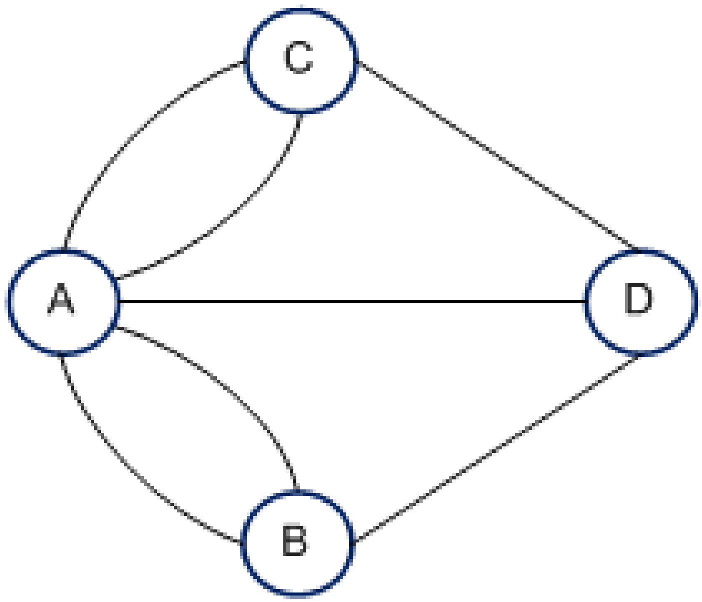




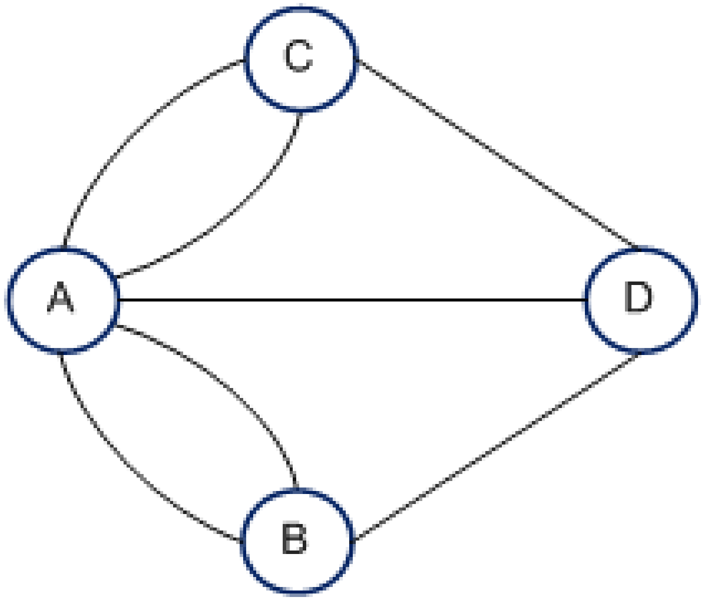
Modelare:

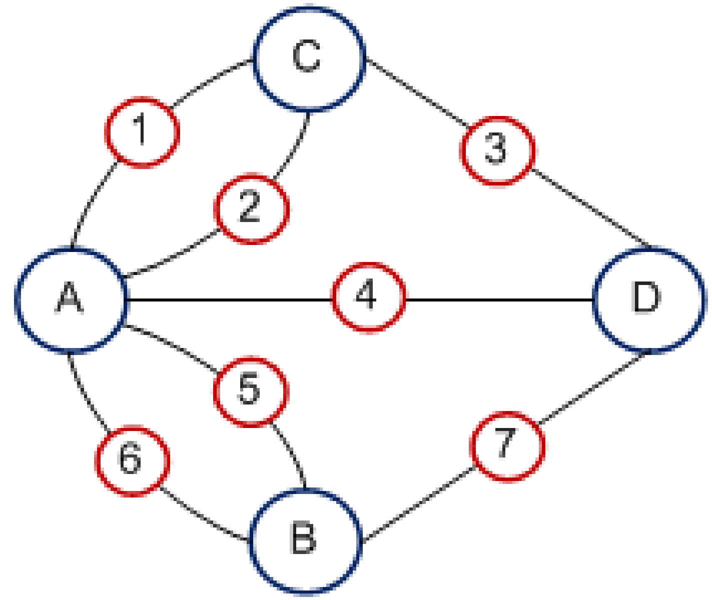


Problema celor 7 poduri din Königsberg



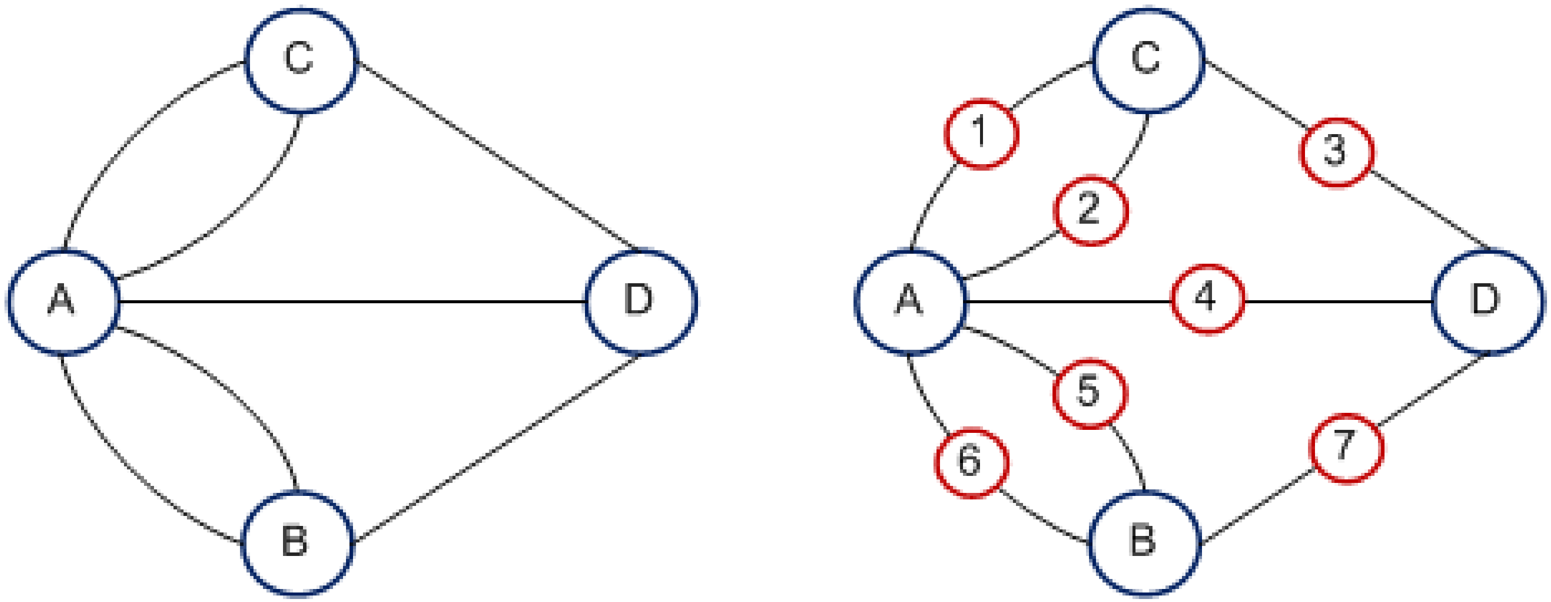
Problema celor 7 poduri din Königsberg





graf simplu

Problema celor 7 poduri din Königsberg



1736 – Leonhard Euler

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

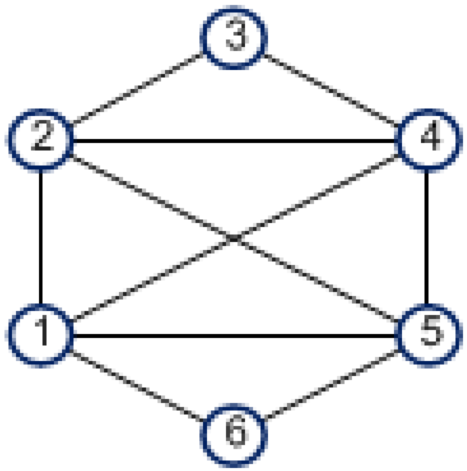
- **Ciclu eulerian** – traseu închis care trece o singură dată prin toate muchiile
- **Graf eulerian**

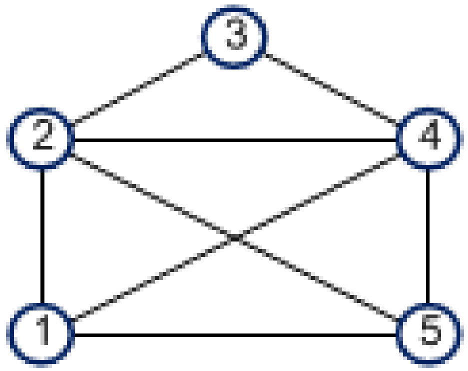
Problema celor 7 poduri din Königsberg

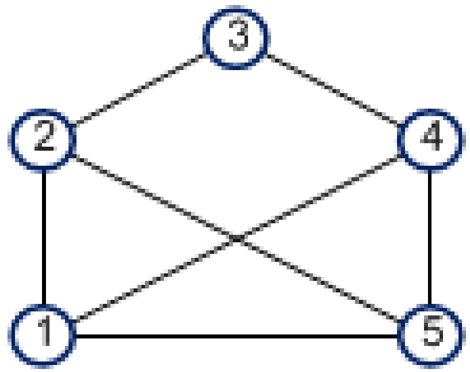
- **Interpretare**

Se poate desena diagrama printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie şi fără a desena o linie de două ori (în plus: să terminăm desenul în punctul în care l-am început)?

  - Tăierea unui material



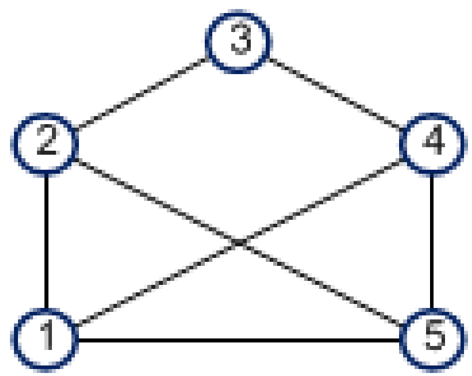




Problema celor 7 poduri din Königsberg

- **Interpretare**

  De câte ori (minim) trebuie să ridicăm creionul de pe hârtie pentru a desena diagrama?



Grafuri euleriene

Fie G graf neorientat

- **Ciclu eulerian** al lui G = ciclu C în G cu

$$E(C) = E(G)$$

- G e**ulerian** = conține un **ciclu** eulerian

- **Lanț eulerian** al lui G = lanț simplu P în G cu

$$E(P) = E(G)$$

Grafuri euleriene

Observație

– **Fie** $P=[v_1, \ldots, v_k]$ un lanț (nu neapărat elementar)

- Dacă $v_1 \neq v_k$, atunci vârfurile interne din P au gradul în P par, iar extremitățile au gradul în P impar
- Dacă $v_1 = v_k$, atunci toate vârfurile din P au gradul în P par

Grafuri euleriene

Lemă

Fie $G=(V,E)$ un graf neorientat, **conex**, cu **toate vârfurile de grad par** și $E \neq \emptyset$.

Atunci pentru orice $x \in V$ există **un ciclu** C în G cu **$x \in V(C)$**

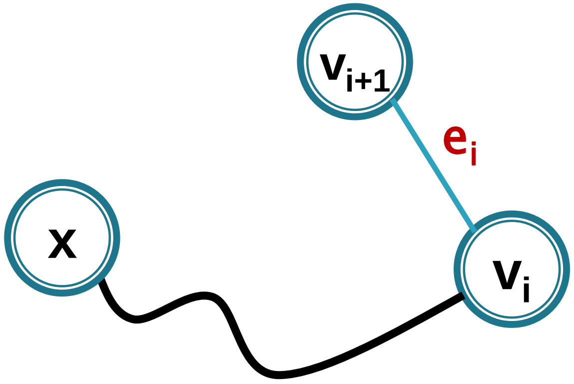
(**ciclu care conține x, nu neapărat eulerian, nici neapărat elementar**)

Grafuri euleriene

Demonstrație – Algoritm de determinare a unui ciclu care conține x:

- $i = 1$, $v_1 = x$
- $E(C) = \varnothing$
- Repetă

  până când $v_i = x$

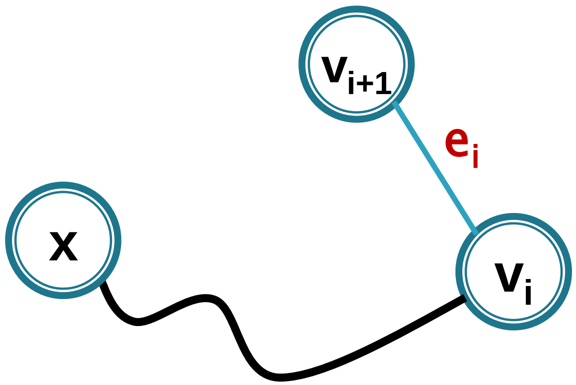


Grafuri euleriene

Demonstrație – Algoritm de determinare a unui ciclu care conține x:

- $i = 1$, $v_1 = x$
- $E(C) = \emptyset$
- Repetă
    - **selectează $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G) - E(C)$**
    - **$E(C) = E(C) \cup \{e_i\}$**
    - **$i = i + 1$**

  până când $v_i = x$

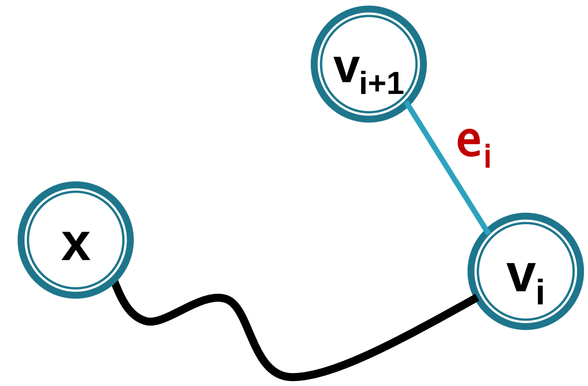


Grafuri euleriene

Demonstrație – Algoritm de determinare a unui ciclu care conține x:

- $i = 1$, $v_1 = x$
- $E(C) = \varnothing$
- Repetă
  - **selectează $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G) - E(C)$**
  - **$E(C) = E(C) \cup \{e_i\}$**
  - **$i = i + 1$**

  până când $v_i = x$



Algoritmul este corect deoarece:

Grafuri euleriene

Demonstrație – Algoritm de determinare a unui ciclu care conține x:

- $i = 1$, $v_1 = x$
- $E(C) = \varnothing$
- Repetă
  - **selectează $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G) - E(C)$**
  - **$E(C) = E(C) \cup \{e_i\}$**
  - **$i = i + 1$**

  până când $v_i = x$

Dacă $v_i \neq x$, atunci $d_C(v_i)$ este impar (cf. obs. Anterioare).

Din ipoteză, $d_G(v_i)$ este par, deci $d_{G-E(C)}(v_i) > 0$

$\Rightarrow$ muchia e_i există

Grafuri euleriene

Demonstrație – Algoritm de determinare a unui ciclu care conține x:

- $i = 1$, $v_1 = x$
- $E(C) = \varnothing$
- Repetă
  - selectează $e_i = v_i v_{i+1} \in E(G) - E(C)$
  - $E(C) = E(C) \cup \{e_i\}$
  - $i = i + 1$

  până când $v_i = x$

$|E(G)| < \infty$, deci algoritmul se termină (v_i ajunge egal cu x)

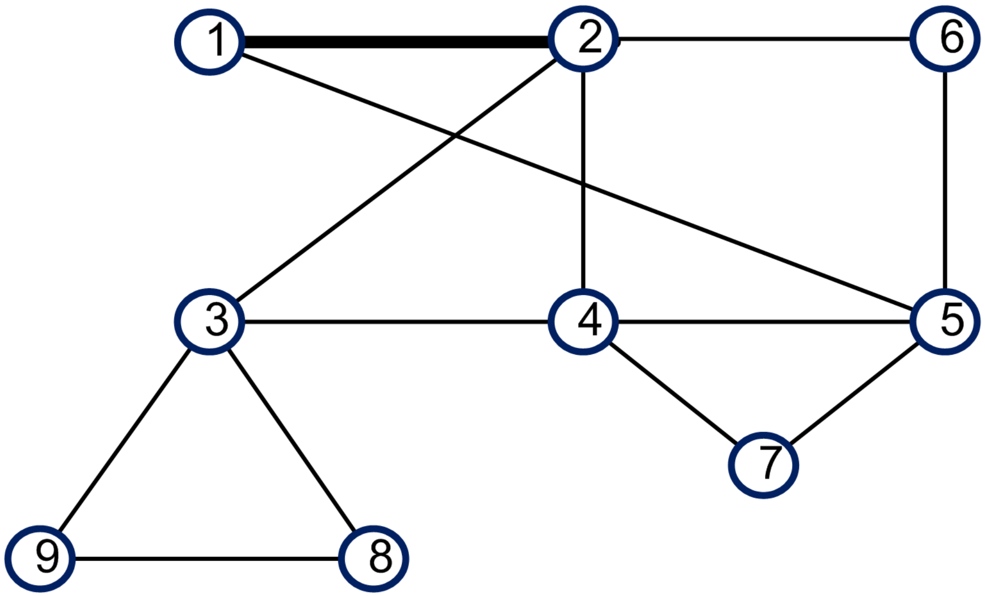
Dacă $v_i \neq x$, atunci $d_C(v_i)$ este impar (cf. obs. Anterioare).

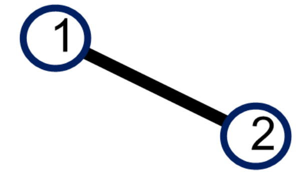
Din ipoteză, $d_G(v_i)$ este par, deci $d_{G-E(C)}(v_i) > 0$

$\Rightarrow$ muchia e_i există

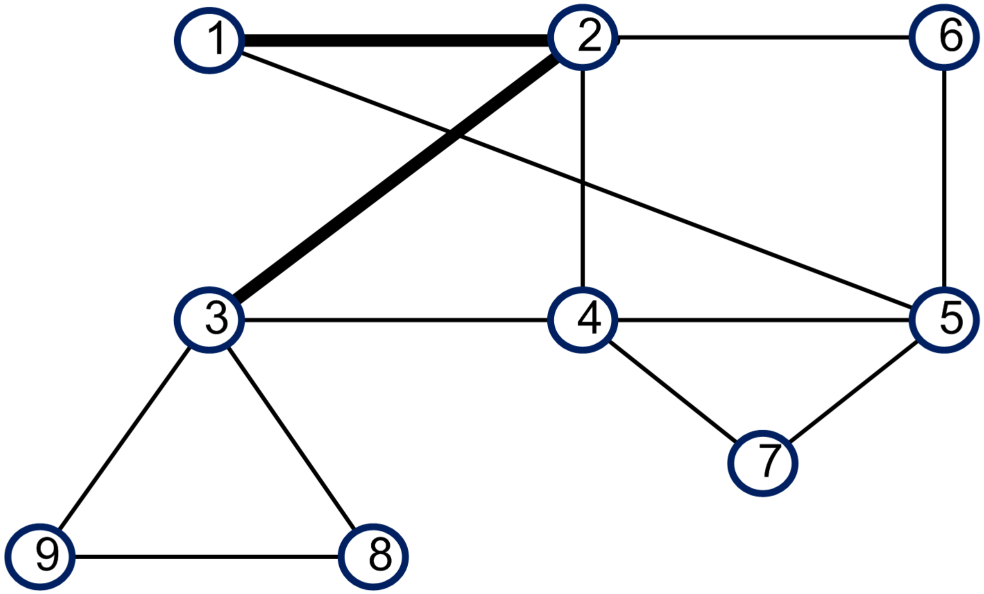
Grafuri euleriene

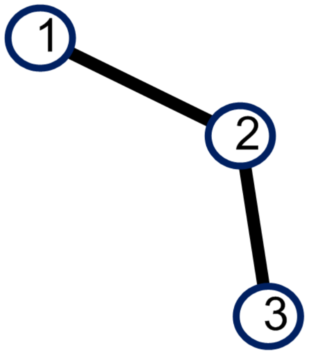
x=1



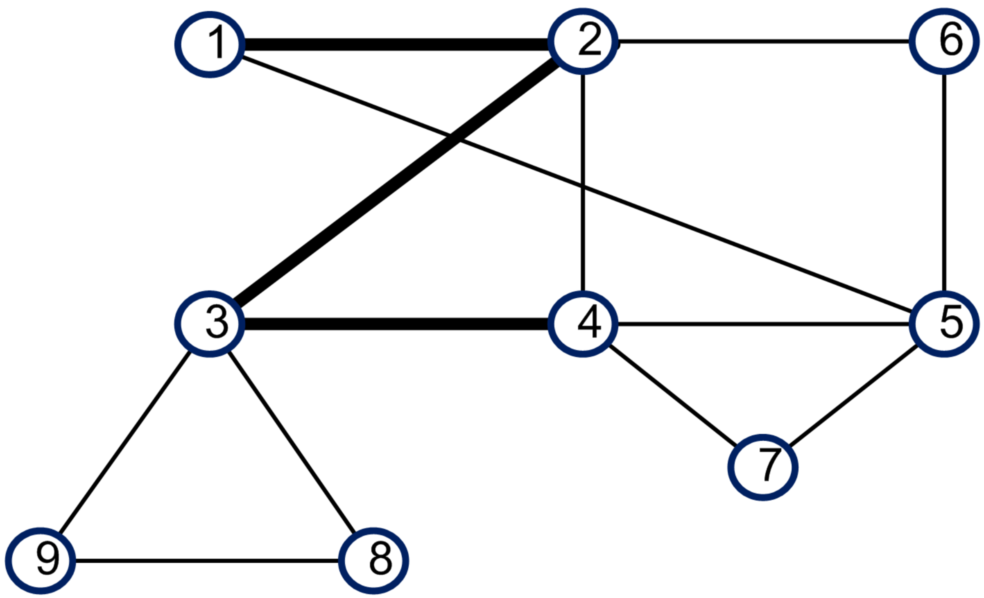


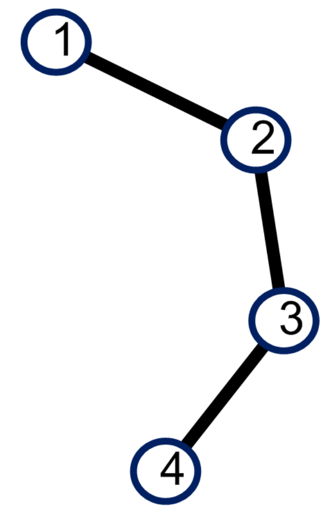
Grafuri euleriene



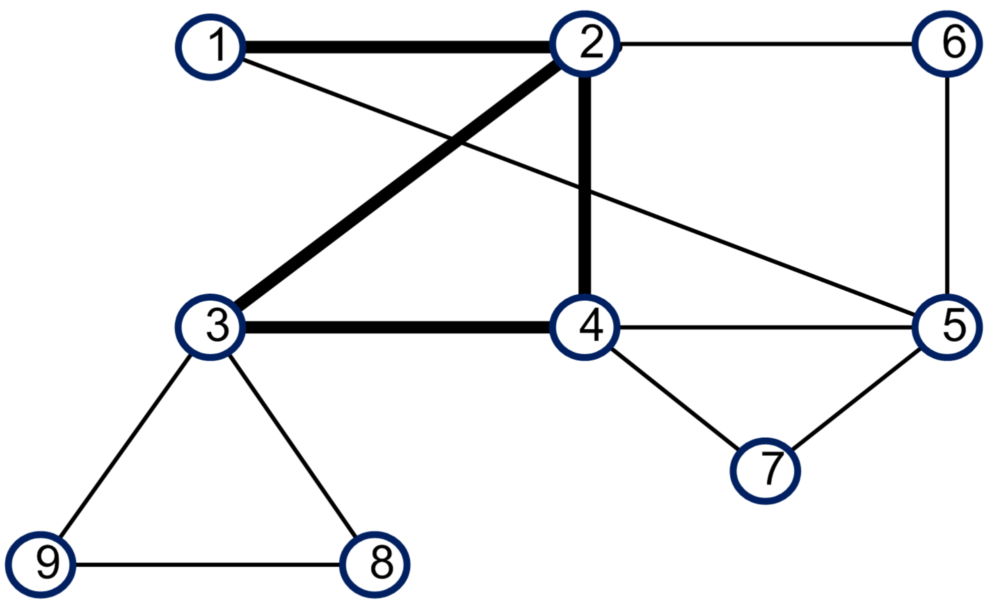


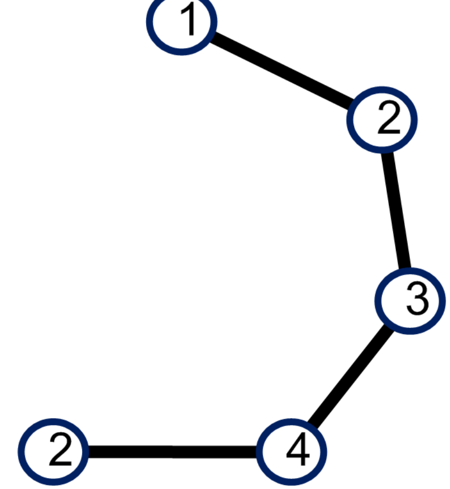
Grafuri euleriene



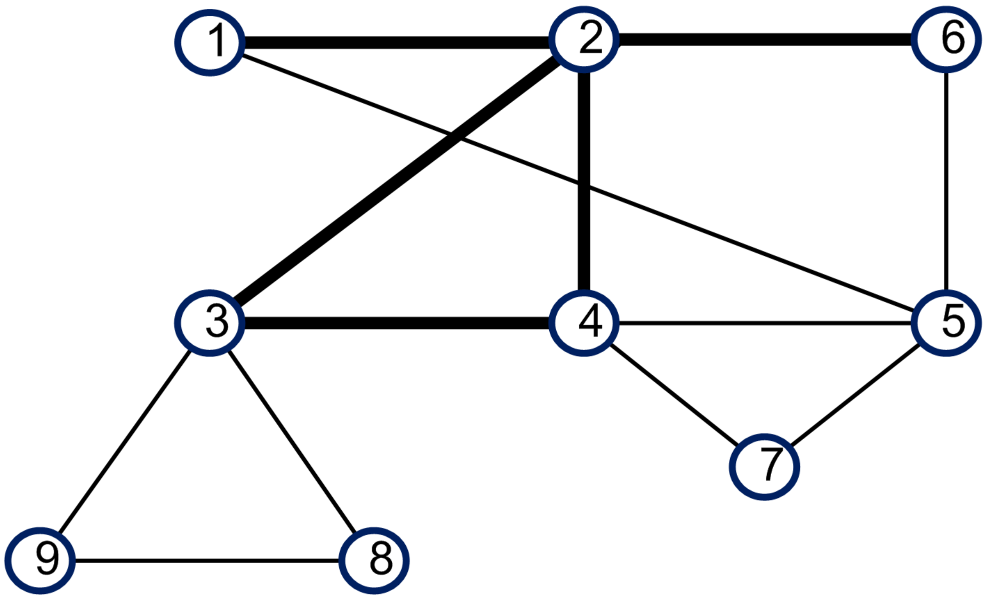


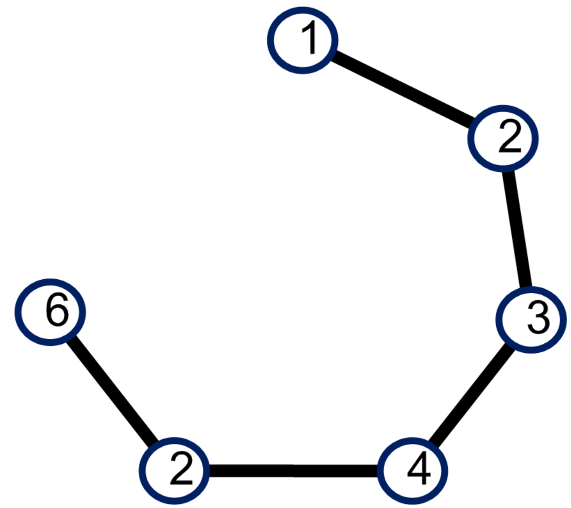
Grafuri euleriene



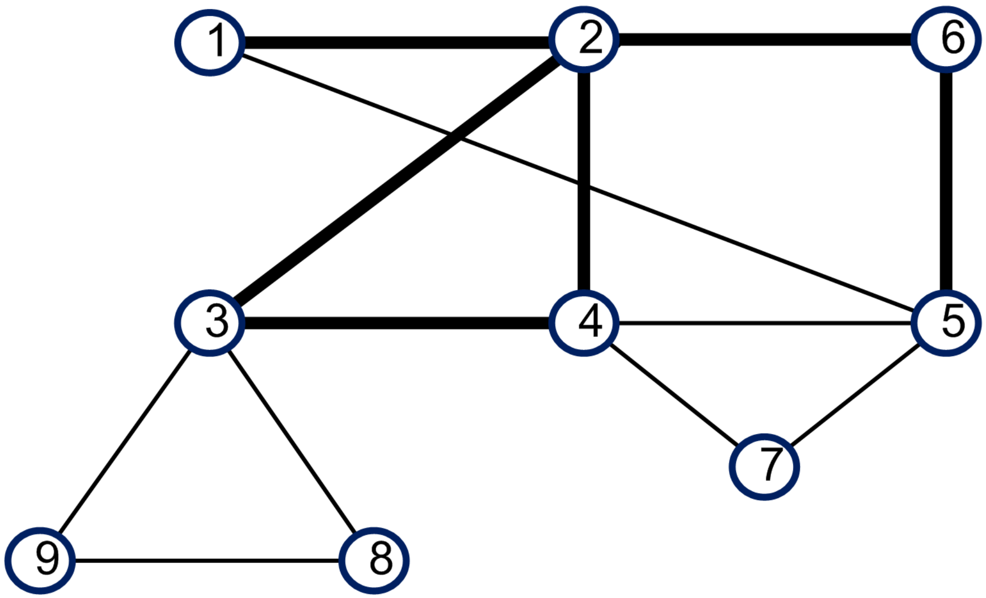


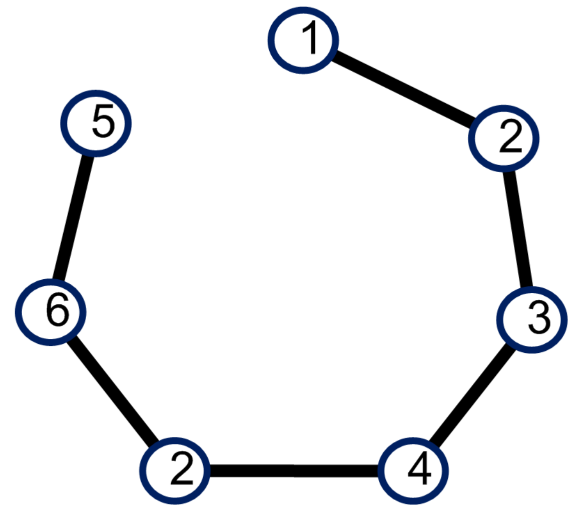
Grafuri euleriene



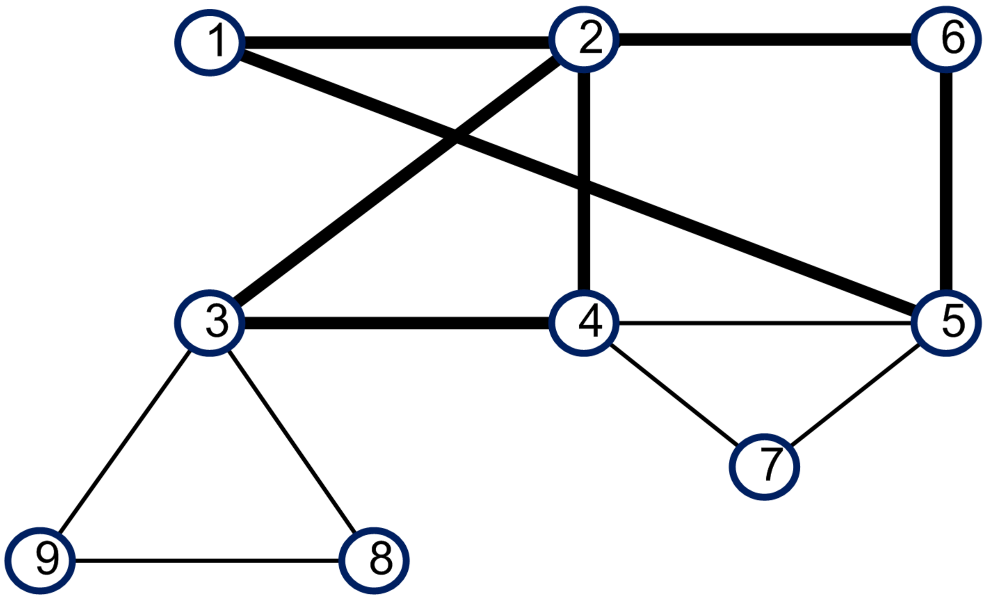


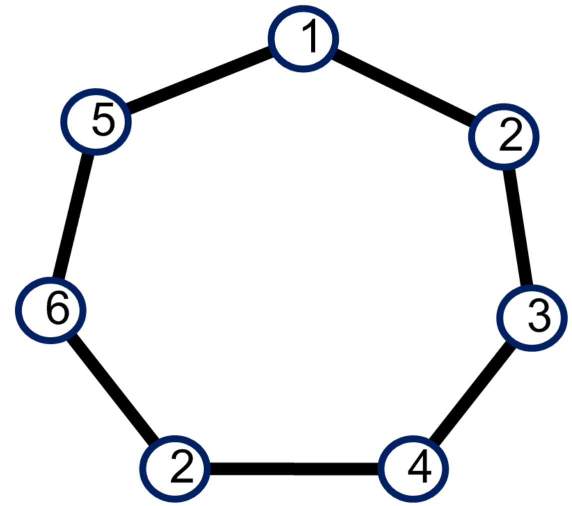
Grafuri euleriene





Grafuri euleriene





Grafuri euleriene

Teorema lui Euler

Fie $G=(V, E)$ un (multi)**graf** neorientat, conex, cu $E \neq \emptyset$.

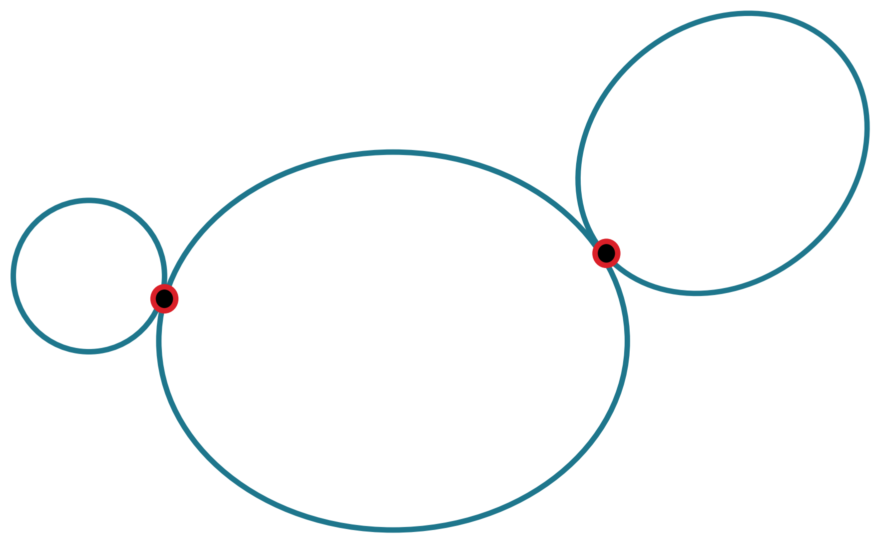
Atunci

G este eulerian $\Leftrightarrow$ **orice vârf din G are grad par**

Algoritmul lui Hierholzer

Determinarea unui ciclu eulerian într-un graf conex (sau un graf conex+ vârfuri izolate) **cu toate vârfurile de grad par**

- bazat pe ideea demonstrației Teoremei lui Euler – **fuziune de cicluri (succesiv)**



Algoritmul lui Hierholzer

- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)

Algoritmul lui Hierholzer

- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)
- **Pasul 1:**
  - **`alege v ∈ V arbitrar`**
  - **`construiește C un ciclu în G care începe cu v (cu algoritmul din Lema)`**

Algoritmul lui Hierholzer

- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)
- **Pasul 1**:
  - **`alege v ∈ V arbitrar`**
  - **`construiește C un ciclu în G care începe cu v (cu algoritmul din Lema)`**
- **cât timp |E(C)| < |E(G)| execută**
  - **selectează v ∈ V(C) cu $d_{G-E(C)}(v) > 0$ (în care sunt incidente muchii care nu aparțin lui C)**

Algoritmul lui Hierholzer

- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)
- **Pasul 1:**
  - **alege v ∈ V arbitrar**
  - **construiește C un ciclu în G care începe cu v (cu algoritmul din Lema)**
- **cât timp |E(C)| < |E(G)| execută**
  - **selectează v ∈ V(C) cu $d_{G-E(C)}(v) > 0$ (în care sunt incidente muchii care nu aparțin lui C)**
  - **construiește C′ un ciclu în G - E(C) care începe cu v**

Algoritmul lui Hierholzer

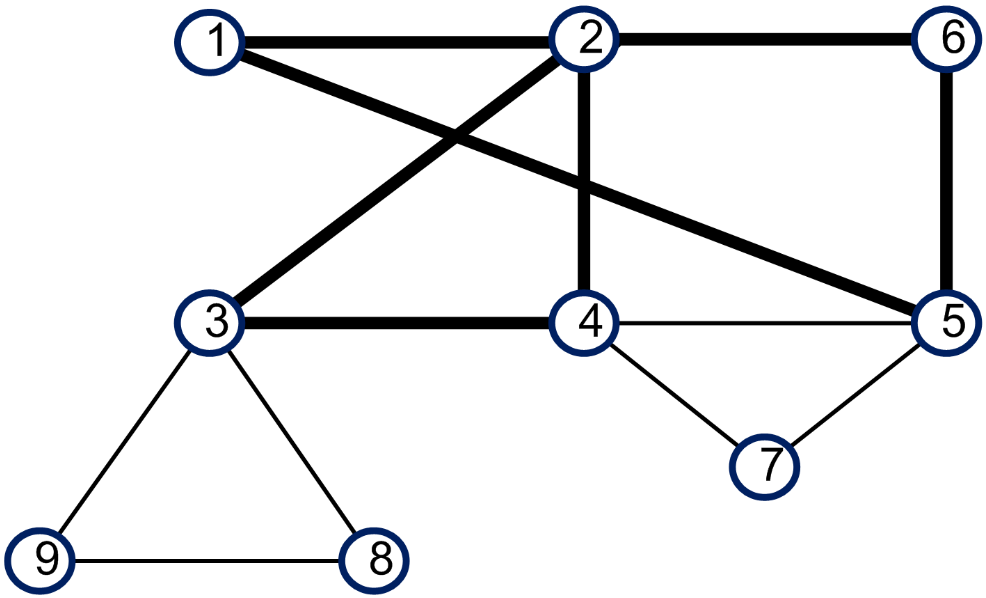
- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)
- **Pasul 1:**
  - **alege v ∈ V arbitrar**
  - **construiește C un ciclu în G care începe cu v (cu algoritmul din Lema)**
- **cât timp |E(C)| < |E(G)| execută**
  - **selectează v ∈ V(C) cu $d_{G-E(C)}(v) > 0$ (în care sunt incidente muchii care nu aparțin lui C)**
  - **construiește C′ un ciclu în G - E(C) care începe cu v**
  - **C = ciclul obținut prin fuziunea ciclurilor C și C′ în v**

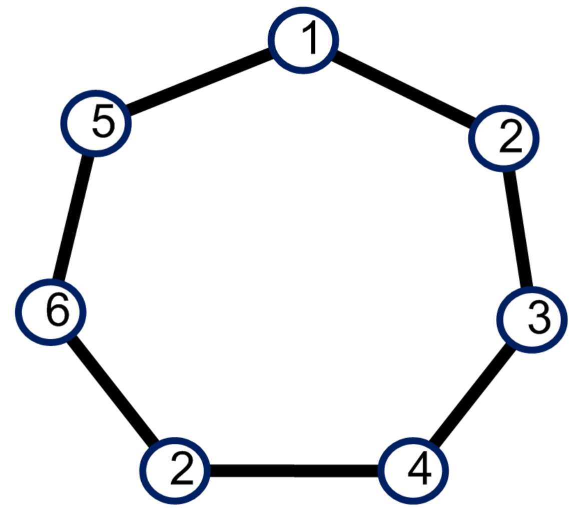
Algoritmul lui Hierholzer

- **Pasul 0** – verificare condiții (conex+vf. izolate, grade pare)
- **Pasul 1**:
  - `alege v ∈ V arbitrar`
  - `construiește C un ciclu în G care începe cu v (cu algoritmul din Lema)`
- **cât timp** |E(C)| < |E(G)| **execută**
  - `selectează v ∈ V(C) cu` $d_{G-E(C)}(v) > 0$ `(în care sunt incidente muchii care nu aparțin lui C)`
  - `construiește C′ un ciclu în G - E(C) care începe cu v`
  - `C = ciclul obținut prin fuziunea ciclurilor C și C′ în v`
- **scrie C**

Algoritmul lui Hierholzer

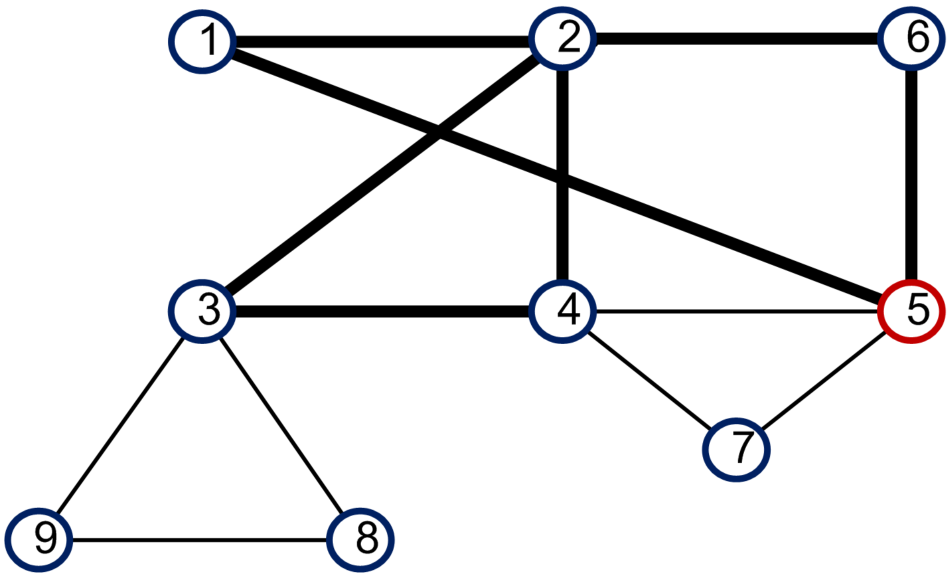
Pornim cu ciclul construit cu algoritmul din Lema 1



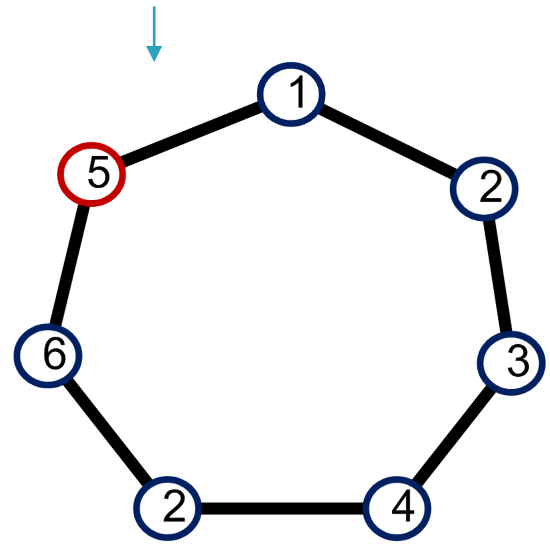


C= [1, 2, 3, 4, 2, 6, 5, 1]

Algoritmul lui Hierholzer

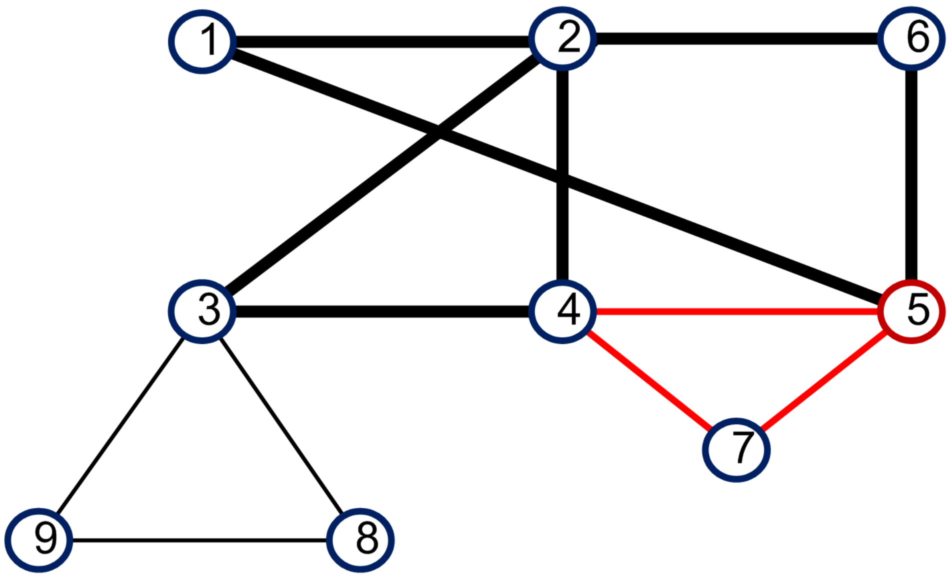


Alegem un vârf din C în care mai sunt incidente muchii,
de exemplu v = 5

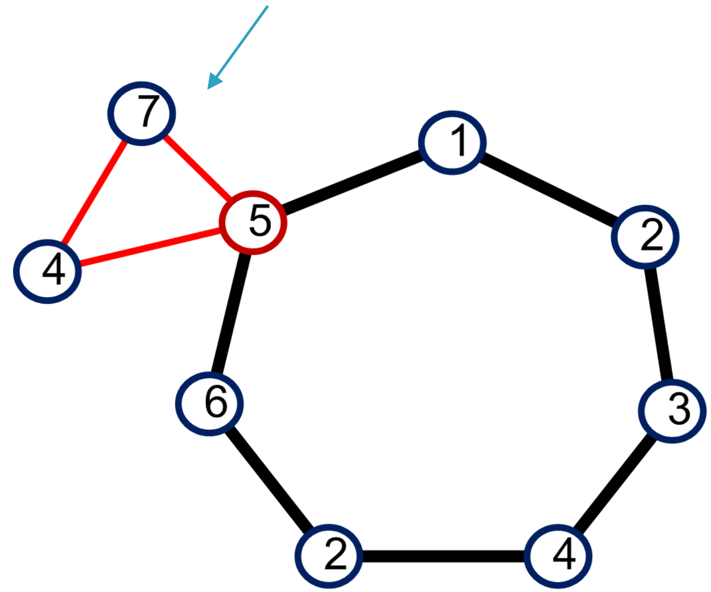


C= [1, 2, 3, 4, 2, 6, 5, 1]

Algoritmul lui Hierholzer



Construim un ciclu C' cu muchiile rămase care conține v = 5

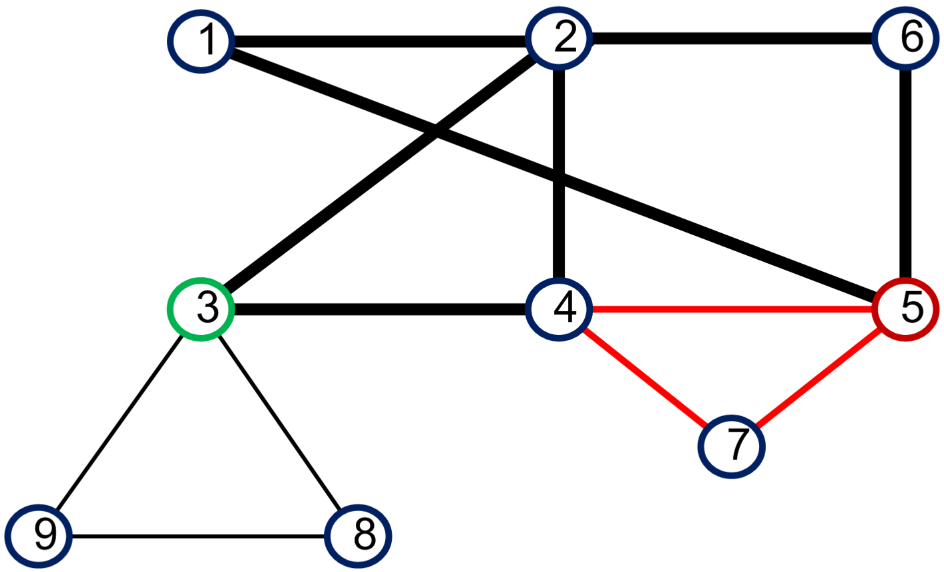


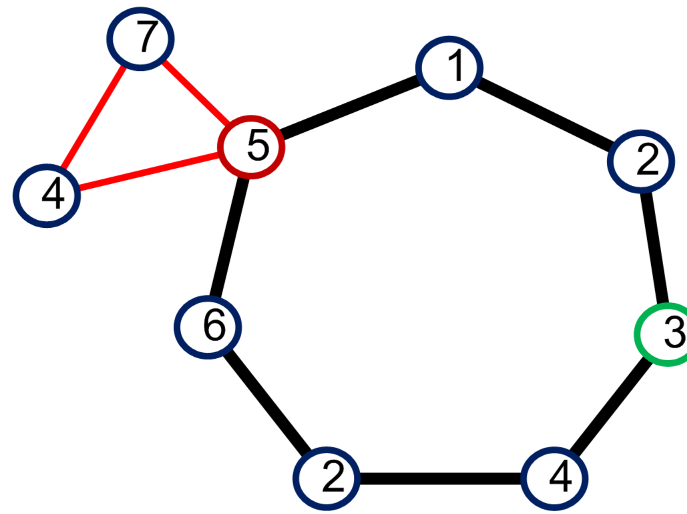
⇒ Un nou ciclu obținut prin fuziunea celor două cicluri

C= [1, 2, 3, 4, 2, 6, **5, 4, 7, 5**, 1]

Algoritmul lui Hierholzer

Alegem un vârf din C în care mai sunt incidente muchii,
de exemplu v = 3

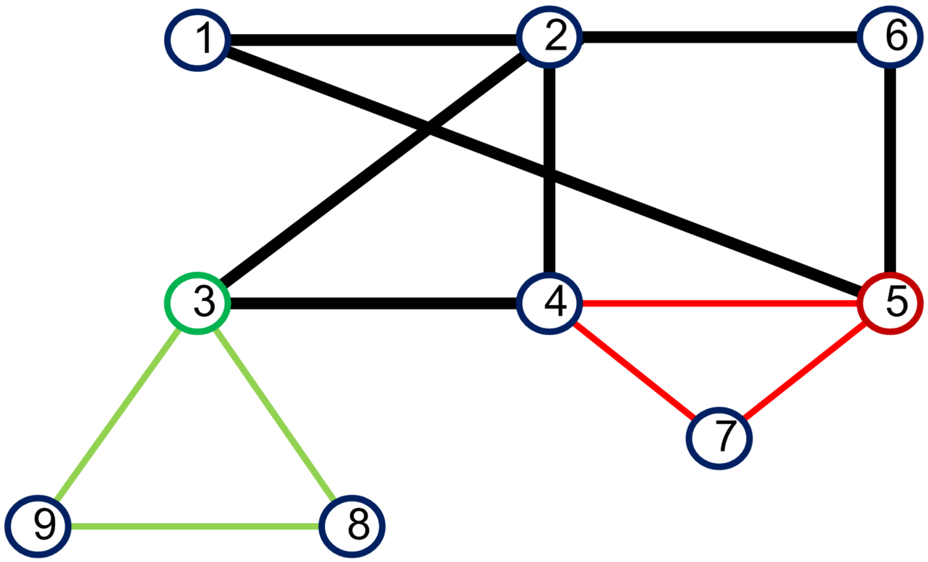


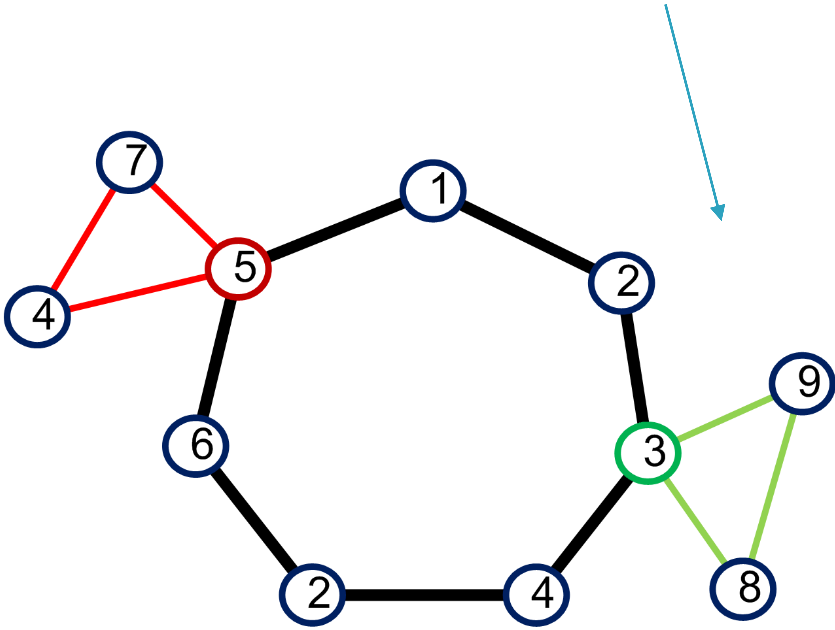


C= [1, 2, 3, 4, 2, 6, 5, 4, 7, 5, 1]

Algoritmul lui Hierholzer

Construim un ciclu C' cu muchiile rămase care conține v = 3

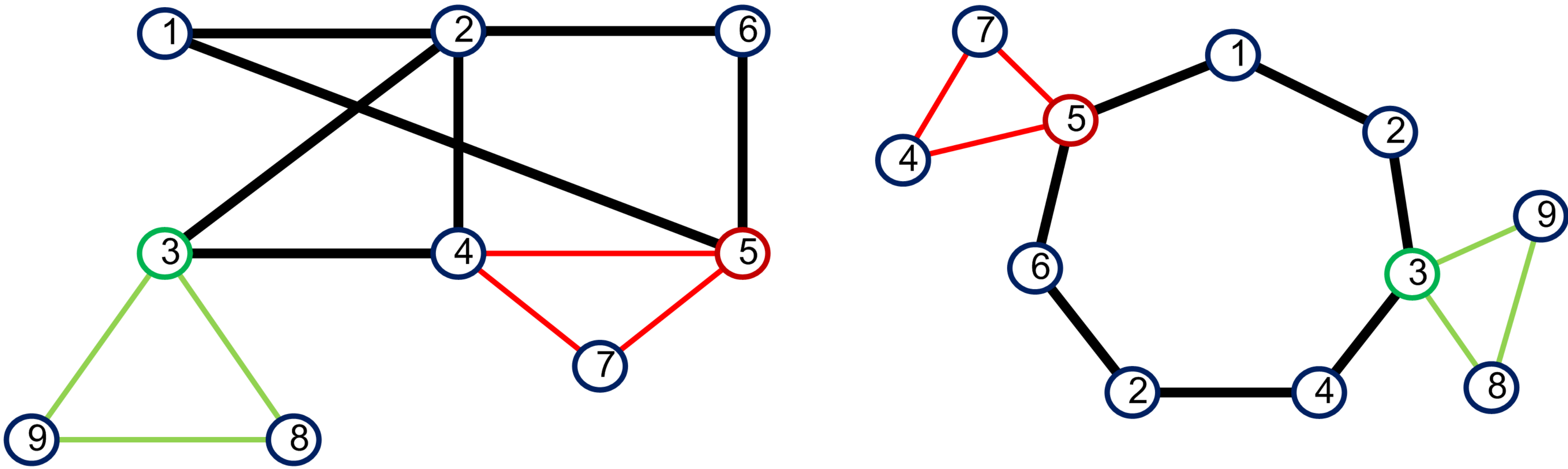




⇒ Un nou ciclu obținut prin fuziunea celor două cicluri

C= [1, 2, 3, 8, 9, 3, 4, 2, 6, 5, 4, 7, 5, 1]

Algoritmul lui Hierholzer



C= [1, 2, 3, 8, 9, 3, 4, 2, 6, 5, 4, 7, 5, 1]

Ciclul conține toate muchiile

$\Rightarrow$ este eulerian

Algoritmul lui Hierholzer

- **Complexitate – O(m)**

Algoritmul lui Hierholzer

- Posibile implementări
- Varianta recursivă

```
euler (nod v)
    cat timp d(v)> 0
          alege vw o muchie incidenta in v
          sterge muchia vw din G
          euler (w)
    C = C + v  //adaugam v la ciclul C
```

Inițial

```
C = Ø
euler(1)  //pornim construcția din varful 1
```

Algoritmul lui Hierholzer

- **Posibile implementări**
  - **Varianta** – Nerecursiv – Liste dublu înlănțuite/stive
  - Muchiile folosite – marcate (nu neapărat șterse) sau ștearsă cea de la finalul listei de adiacență

```
stiva St
push(1,St)
cat timp St este nevida executa
 v = top(St)
 daca grad(v) != 0 atunci
     alege vw o muchie incidenta in v
     sterge muchia vw din G
     push(w,St)
 altfel
     C = C + v
     pop(St)
```

de exp cea de la finalul listei de adiac a lui v

Lanțuri euleriene

Teorema lui Euler

Fie $G=(V, E)$ un graf neorientat, conex, cu $E \neq \emptyset$.

Atunci

G are un lanț eulerian $\Leftrightarrow$ **G are cel mult două vârfuri de grad impar**

Grafuri orientate euleriene

Grafuri orientate euleriene

Observație

– **Fie** $P=[v_1, \ldots, v_k]$ dum

- Dacă $v_1 \neq v_k$, atunci vârfurile interne v din P au

$\boldsymbol{d_P^-(v) = d_P^+(v)}$, iar pentru extremități:

$$\boldsymbol{d_P^-(v_1) = d_P^+(v_1) - 1,\ d_P^-(v_k) = d_P^+(v_k) + 1}$$

- Dacă $v_1 = v_k$, atunci toate vârfurile v din P au gradul intern în P egal cu cel extern:

$$\boldsymbol{d_P^-(v) = d_P^+(v)}$$

Grafuri orientate euleriene

Teorema lui Euler

Fie G=(V, E) un graf orientat, conex (= graful neorientat asociat este conex), cu $E \neq \emptyset$.

Atunci

G este eulerian $\Leftrightarrow$ $\forall$ $v \in V$ $\quad d_G^-(v) = d_G^+(v)$

Drumuri euleriene

Teorema lui Euler

Fie G=(V, E) un (multi)graf orientat, conex, cu $E \neq \emptyset$.

Atunci

G are un drum eulerian $\Leftrightarrow$

Drumuri euleriene

Teorema lui Euler

Fie G=(V, E) un (multi)graf orientat, conex, cu E≠∅.

Atunci

G are un drum eulerian ⇔

(∀ v∈V $d_G^-(v) = d_G^+(v)$ **) sau**

(∃ x∈V cu $d_G^-(x) = d_G^+(x) - 1$**,**

∃ y∈V , y ≠ x cu $d_G^-(y) = d_G^+(y) + 1$ **,**

∀ v∈V−{x, y} $d_G^-(v) = d_G^+(v)$ **)**

Descompuneri euleriene în lanțuri

- **k-descompunere euleriană în lanțuri** a unui graf G =

  o mulțime de k lanțuri simple, muchie-disjuncte

  $$\Delta = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$$

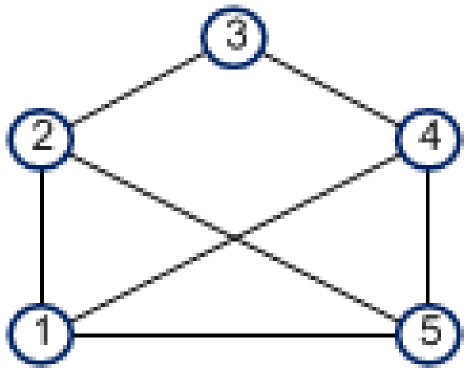
  ale căror muchii induc o k-partiție a lui E(G):

  $$E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \ldots \cup E(P_k)$$

Descompuneri euleriene în lanțuri

- **Interpretare**

  De câte ori (minim) trebuie să ridicăm creionul de pe hârtie pentru a desena diagrama?



Descompuneri euleriene în lanțuri

Teoremă – Descompunere euleriană

Fie $G=(V, E)$ un graf orientat, conex (= graful neorientat asociat este conex), cu **exact 2k vârfuri de grad impar** ($k>0$). Atunci există o k-descompunere euleriană a lui G și k este cel mai mic cu această proprietate.