Laborator 2

Exercitiul 1

Dorim sa simulam aruncarea cu o moneda echilibrata. Consideram $H \equiv 1, T \equiv 0$.

1. Folosind functia numpy.random.randinit, generati un sir de $N = 10000$ de experimente;
2. Ilustrati faptul ca pe masura ce efectuam mai multe experimente,
   $P =$ nr de aparitii ale lui H/nr de simulari $\longrightarrow 1/2$.

Exercitiul 2

La fel ca la Exercitiul 4, pentru aruncarea cu zarul.

Exercitiul 3

Un sir de numere $x = [x_1, x_2, ..., x_n], 0 \leq x_i \leq 1$ se numeste distribuit uniform pe $[0,1]$ daca $\frac{\#x_i \in (a,b)}{n} \approx b - a, \forall (a,b) \subseteq [0,1]$. Desigur, $b-a$ trebuie sa fie rezonabil in raport cu n (numarul de sample-uri). Instructiunea random.uniform(0, 1, size=n) genereaza astfel de sir in Python. Pentru diverse valori ale lui n, si ale lui $b-a$, verificati ca sirul este intr-adevar uniform;

Exercitiul 4

Am vazut ca random.uniform genereaza un numar aleator uniform in $[0,1]$, de exemplu daca $x = \text{random.uniform}(0, 1, N)$ si N e mare, atunci $P(x \in (a,b)) = \frac{\#(a<x_i<b)}{N} \approx b - a$. Folositi random.uniform pentru a simula N aruncari cu o moneda masluita. De exemplu, $P(H) = p = 0.7, P(T) = q = 0.3$, si atunci vom considera ”moneda masluita” astfel: $H \equiv 1$ pica cand $x_N < 0.7$ si $T \equiv 0$ pica cand $x_N \geq 0.7$.

Exercitiul 5

Un cod scris de echipa de informatica de la firma PS contine un bug in 5 din 100 de cazuri. Mihai are rolul de a verifica daca codul contine vreun bug. Performanta lui Mihai este urmatoarea:

- Din 100 de coduri cu bug, pe 95 le identifica corect;
- Din 100 de coduri fara bug, in 98 de cazuri identifica corect;

Mihai testeaza un cod nou si decide ca nu are bug. Care e probabilitatea sa greseasca?
2 solutii:

1. Teoretica
2. Practica:
   - De simulat evenimentul in care testam un cod si obtine sau nu un bug;
   - In functie de acesta, simulam evenimentul in care Mihai decide asupra codului;
   - Numaram in cate cazuri Mihai a prezis ca codul are un bug si cate din acestea erau prezise corect;

Exercitiul 6

Aratati ca $P(A|B_1) = P(A|B_1, B_2) \cdot P(B_2|B_1) + P(A|B_1, B_2^C) \cdot P(B_2^C|B_1)$

Exercitiul 7

Un program e format din 2 module independente.

1. Primul modul produce erori in 20% din rulari.
2. Cel de-al doilea modul produce erori in 40% din rulari.
3. Daca primul modul are eroare, atunci programul crapa in 50% din cazuri.
4. Daca al doilea modul are eroare, atunci programul crapa in 80% din cazuri.
5. Daca ambele module au eroare, atunci programul crapa in 90% din cazuri.

Daca programul a crapat, care e probabilitatea ca ambele module sa fi produs erori?

Exercitiul 8

Aratati ca $X \sim \text{Bernoulli} \iff \exists A \in \mathcal{F},$ asa incat $X = 1_A$, unde $1_A : \Omega \longrightarrow \{0,1\}, 1_A(\omega) = 1,$ pentru $\omega \in A, 1_A(\omega) = 0,$ pentru $\omega \notin A$.

Exercitiul 9

Aratati ca orice variabila aleatoare discreta se poate scrie ca o combinatie liniara de variabile aleatoare Bernoulli.
Reminder O variabila aleatoare discreta este o v.a. $X : \Omega \longrightarrow \{x_1, x_2, \dots x_n \dots\} \subset \mathbb{R}$.
Morala: daca vrem sa simulam o v.a. discreta aleatoare, este suficient sa simulam v.a. Bernoulli.
Cum se simuleaza o v.a. Bernoulli?

Variabile aleatoare uniforme

Fie $X : \Omega \longrightarrow [0, 1]$. Fie $A \subseteq [0, 1]$. Atunci, pentru $A \subset [0, 1]$, A interval:

$$P(X^{-1}(A)) = P(X \in A) = \begin{cases} b - a, \text{ daca } 0 \leq a \leq b \leq 1 \\ 0, \text{daca } b \leq 0 \text{ sau } a \geq 1, \\ b, \text{daca } a \leq 0 \leq b \leq 1, \\ 1 - a, \text{daca } 0 \leq a \leq 1 \leq b \end{cases} \tag{1}$$

Se noteaza cu $X \sim \text{Unif}([0, 1])$

Exercitiul 10

Fie $X \sim \text{Unif}([0, 1])$ si $p \in [0, 1]$. Aratati ca variabila aleatoare $Z = 1_{[0,p]}(X) = 1_{[0,p]} \circ X$ este Bernoulli(p).

Ideea de baza: pentru a simula o variabila aleatoare Bernoulli(p) se simuleaza o v.a. uniforma si valoarea 1 va fi luata daca valoarea generata este mai mica decat p si 0 altfel.

Exercitiul 11

Sa se simuleze in Python o un sir aleator distribuit Bernoulli(p).

Exercitiul 12

Sa se simuleze in Python o variabila aleatoare discreta care ia valorile $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$, cu probabilitatile $p_1, p_2, \dots p_n$.