

Noțiuni introductive



Multiset

- ▶ Intuitiv: O “mulțime” unde elementele se pot repeta

Multiset

- ▶ S o mulțime (finită) nevidă
- ▶ **Multiset**
 - $R = (S, r), r : S \rightarrow \mathbb{N}$ funcție de multiplicitate
- ▶ **Notăție**
 - $R = \{x^{r(x)} \mid x \in S\}$

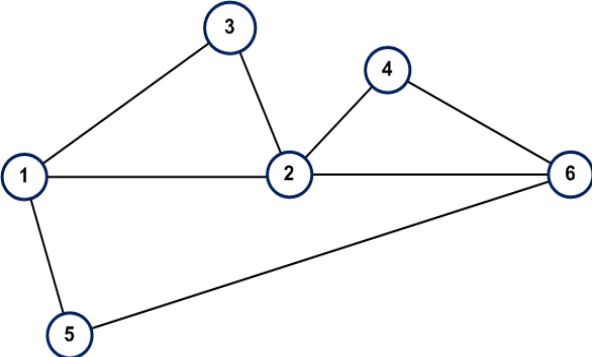
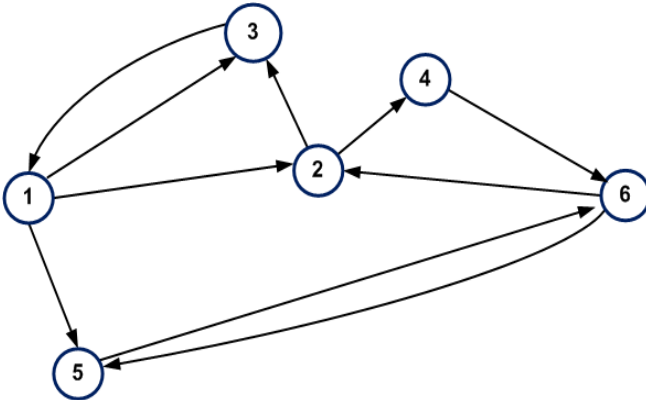
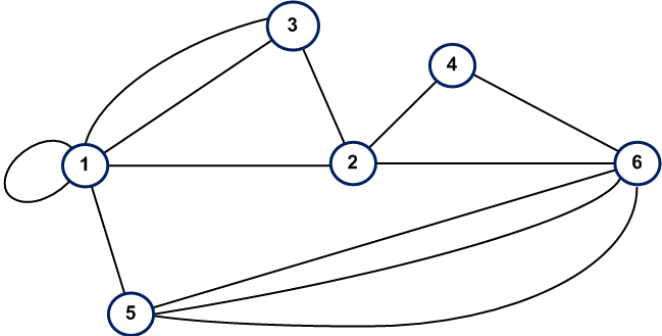
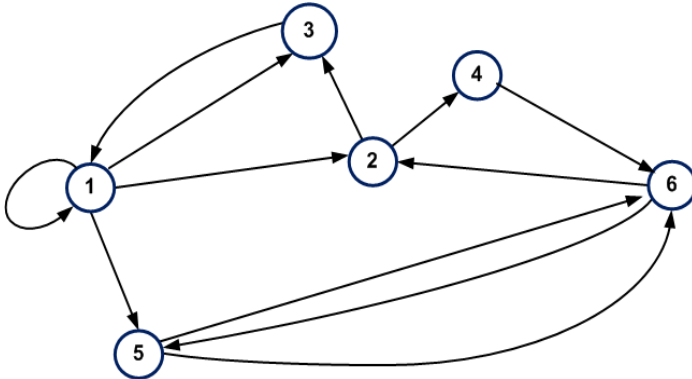
Exemplu

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$R = \{2^2, 3, 5^3\}$$

- $|R| = 2 + 1 + 3 = 6$ – suma multiplicităților
- $1 \notin R$

Graf, multigraf

	neorientat	orientat
graf	 <p>An unoriented graph with 6 nodes labeled 1 through 6. The edges are: (1,3), (1,2), (1,5), (2,3), (2,4), (2,6), and (5,6).</p>	 <p>An oriented graph with 6 nodes labeled 1 through 6. The directed edges are: (1,3), (3,1), (1,2), (2,3), (2,4), (4,2), (2,6), (6,2), (1,5), (5,6), and (6,5).</p>
multigraf	 <p>A multigraph with 6 nodes labeled 1 through 6. It contains multiple edges between some nodes: two edges between 1 and 3, one edge between 1 and 2, one edge between 1 and 5, one edge between 2 and 3, one edge between 2 and 4, one edge between 2 and 6, and three edges between 5 and 6. Node 1 also has a self-loop.</p>	 <p>An oriented multigraph with 6 nodes labeled 1 through 6. It contains multiple directed edges between some nodes: two edges from 1 to 3, one edge from 3 to 1, one edge from 1 to 2, one edge from 2 to 3, one edge from 2 to 4, one edge from 4 to 2, one edge from 2 to 6, one edge from 6 to 2, one edge from 1 to 5, one edge from 5 to 6, one edge from 6 to 5, and one self-loop on node 1.</p>

Graf orientat

$$G = (V, E)$$

V – finită

E – perechi (**ordonate**) de 2 elemente **distincte** din V

- $v \in V$ – **vârf**
- $e = (u, v) = \mathbf{uv}$ – **arc**

$u = e^-$ – **vârf inițial** / origine /
extremitate inițială

$v = e^+$ – **vârf final** / terminus /
extremitate finală

Graf neorientat

$$G = (V, E)$$

V – finită

E – **submulțimi** de 2 elemente
(distincte) din V

- $v \in V$ – **vârf / nod**
- $e = \{u, v\} = (u, v) = \mathbf{uv}$ – **muchie**

u, v – **capete** / **extremități**

Notății

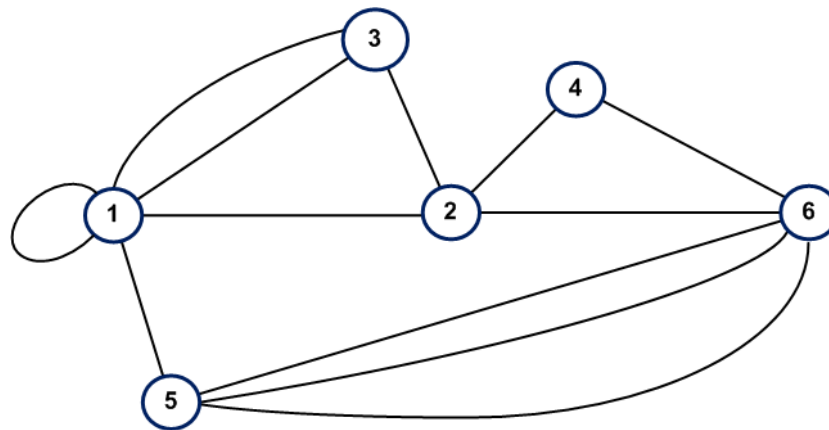
- ▶ $V(G)$, $E(G)$
- ▶ $e = uv$

Multigraf neorientat/orientat

► $G = (V, E, r)$

$r(e)$ – multiplicitatea muchiei e

- $e = \{u, u\}$ = **buclă**
- e cu $r(e) > 1$ = **muchie/arc multiplă/multiplu**

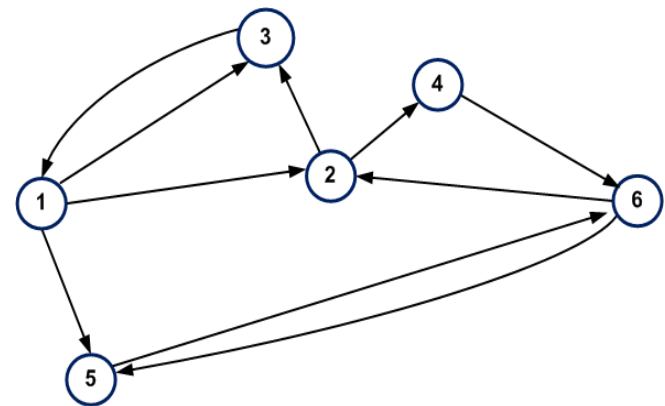


Grade

Graf orientat

- grad interior $d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$
- grad exterior $d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$
- grad $d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$

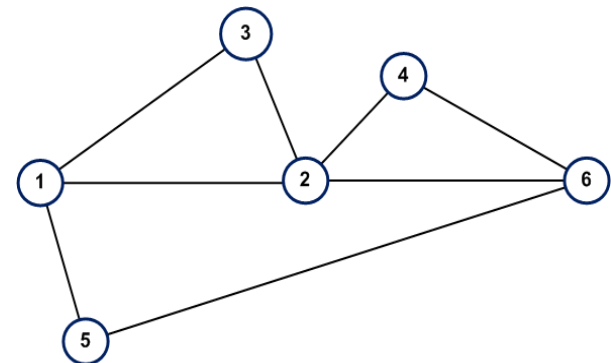
$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), \dots, d_G^-(v_n)\}$$



Graf neorientat

- grad $d_G(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate pentru } e\}|$

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), \dots, d_G^+(v_n)\}$$



Grade

Graf orientat

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

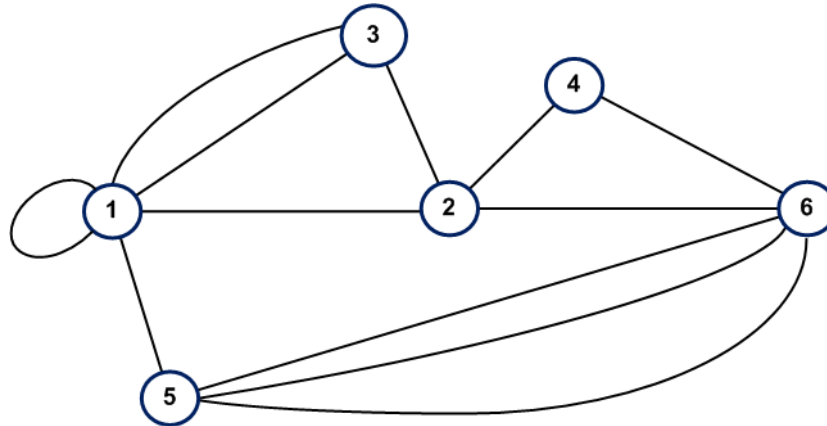
Graf neorientat

$$\sum_{u \in V} d_G(u) = 2|E|$$

Grade multigraf neorientat

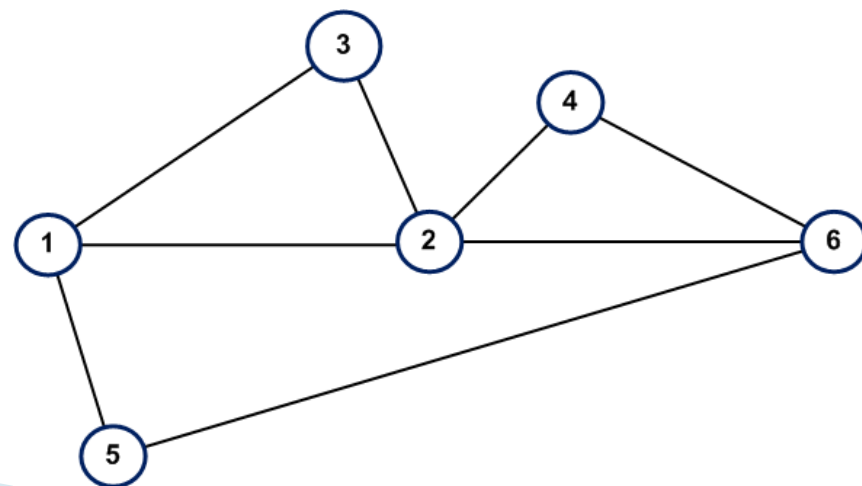
- ▶ $G = (V, E, r)$ – multigraf

$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă, } u \text{ extremitate a lui } e\}| + 2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă, } u \text{ extremitate a lui } e\}|$$



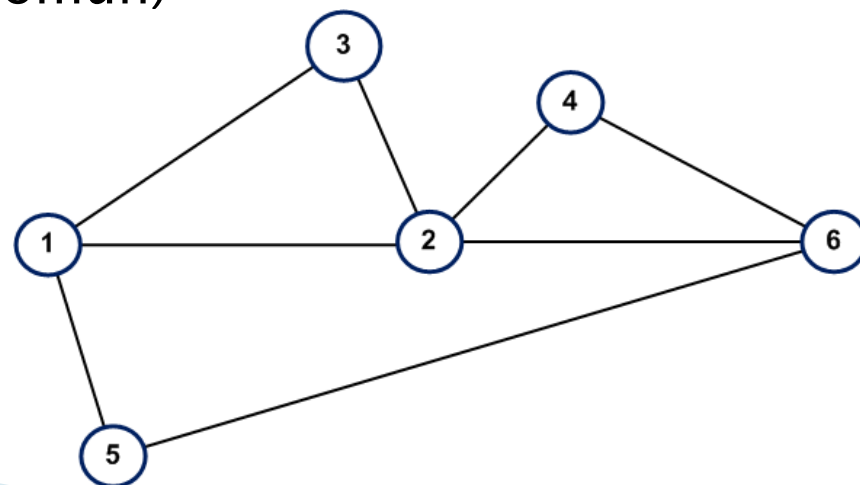
Adiacență. Incidență

- ▶ Fie $G = (V, E)$ un graf
 - u și $v \in V$ sunt **adiacente** dacă $uv \in E$
 - Un **vecin** al lui $u \in V$ este un vârf adiacent cu el
 - **Notăție** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u



Adiacență. Incidență

- ▶ Fie $G = (V, E)$ un graf
 - u și $v \in V$ sunt **adiacente** dacă $uv \in E$
 - Un **vecin** al lui $u \in V$ este un vârf adiacent cu el
 - **Notăție** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u
 - O muchie $e \in E$ este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e
 - e și $f \in E$ sunt **adiacente** dacă există un vârf în care sunt incidente (au o extremitate în comun)



Graf orientat

- Drum (walk)
- Drum simplu (trail)
- Drum elementar (path)
- Circuit + elementar
- Lungimea unui drum
- Distanță între două vârfuri

Graf neorientat

- Lanț (walk)
- Lanț simplu (trail)
- Lanț elementar (path)
- Ciclu + elementar
- Lungimea unui lanț
- Distanță între două noduri

Drumuri/ Lanțuri

Fie G un graf **orientat/neorientat**

- ▶ Un **drum/lanț** este o secvență P de vârfuri

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

a.î. între oricare două vârfuri consecutive există arc/muchie:

$$(v_i, v_{i+1}) \in E(G), \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$$

Drumuri/ Lanțuri

Fie G un graf **orientat/neorientat**

- ▶ Un **drum/lanț** este o secvență P de vârfuri

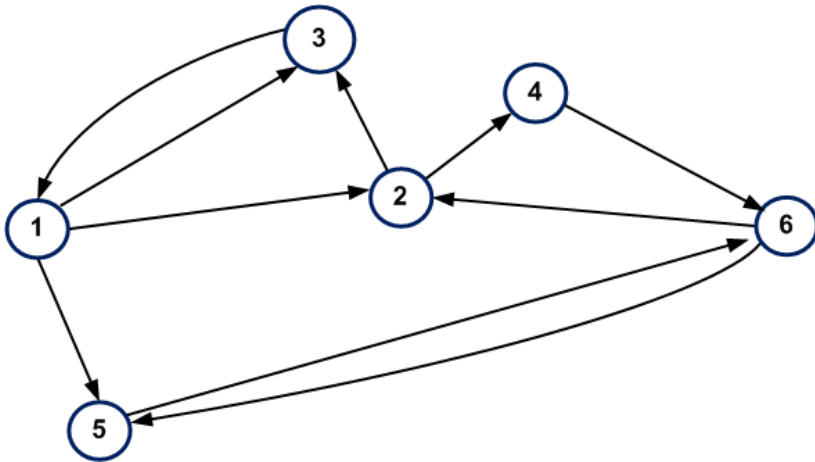
$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

a.î. între oricare două vârfuri consecutive există arc/muchie:

$$(v_i, v_{i+1}) \in E(G), \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$$

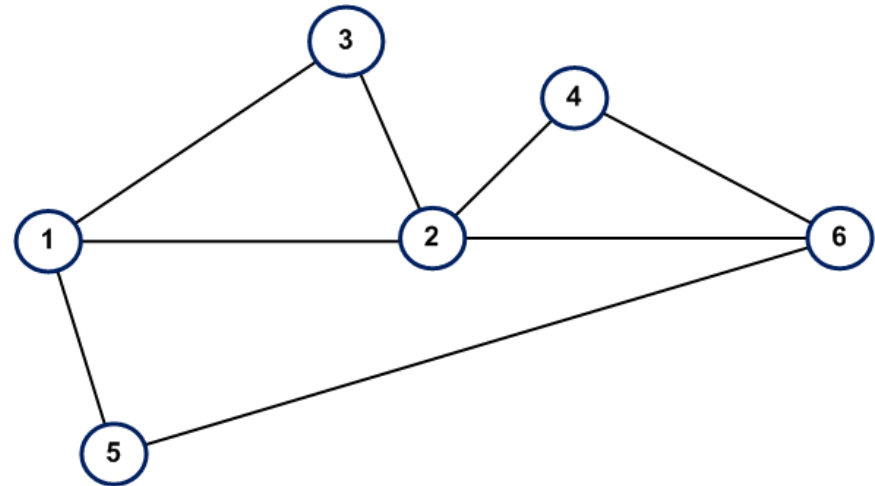
- ▶ P este **drum/lanț simplu** dacă nu conține **un arc/o muchie** de mai multe ori ($(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1}), \forall i \neq j$)
- ▶ P este **drum/lanț elementar** dacă nu conține **un vârf** de mai multe ori ($v_i \neq v_j, \forall i \neq j$)

Example



Drum neelementar, dar simplu:

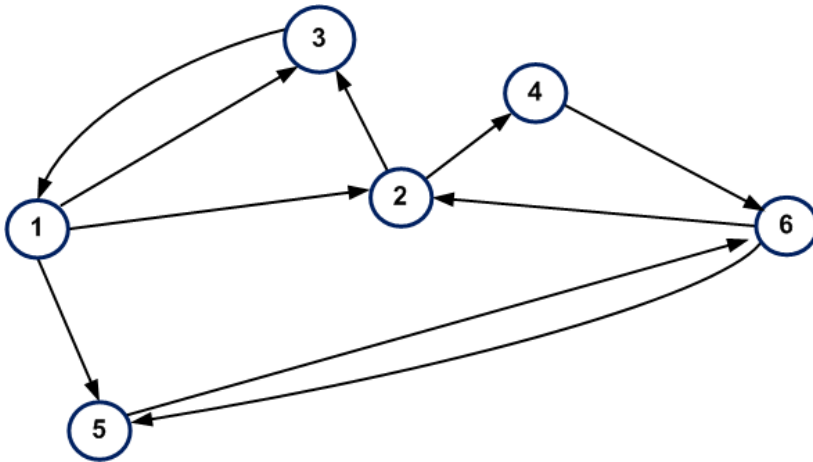
Drum elementar:



Lanț neelementar, dar simplu:

Lanț elementar:

Example

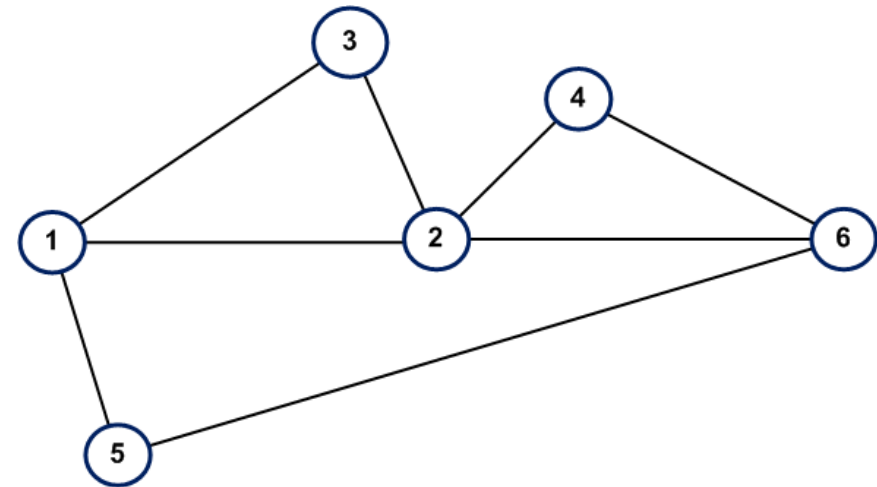


Drum neelementar, dar simplu:

$P=[1, 3, 1, 2]$

Drum elementar:

$P=[1, 2, 4, 6]$



Lanț neelementar, dar simplu:

$P=[1, 3, 2, 1, 5]$

Lanț elementar:

$P=[1, 2, 4, 6]$

Drumuri/ Lanțuri

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

- ▶ Lungimea lui $P = I(P) = k-1 = |E(P)|$ – număr de arce/muchii

Drumuri/ Lanțuri

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

- ▶ Lungimea lui $P = I(P) = k-1 = |E(P)|$
- ▶ v_1 și v_k se numesc **capetele/ extremitățile** lui P
- ▶ P se numește și **v_1-v_k drum**

Notăm

- $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
- $e_i = (v_i, v_{i+1})$
- $E(P) = \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$
- Pentru $i \leq j$ notăm $[v_i \underline{P} v_j]$ **subdrumul** lui P dintre v_i și v_j

Distanță. Drum minim

- ▶ Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$\delta_G(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{daca } u = v \\ \infty, & \text{daca nu exista } u - v \text{ drum/lant in } G \\ \min\{l(P) \mid P \text{ este } u - v \text{ drum/lant in } G\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui $u-v$ drum/lanț)

Distanță. Drum minim

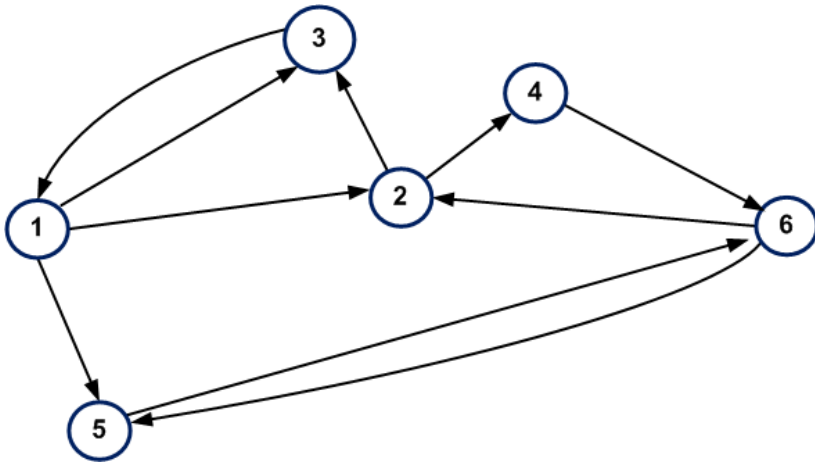
- ▶ Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$\delta_G(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{daca } u = v \\ \infty, & \text{daca nu exista } u - v \text{ drum/lant in } G \\ \min\{l(P) \mid P \text{ este } u - v \text{ drum/lant in } G\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui $u-v$ drum/lanț)

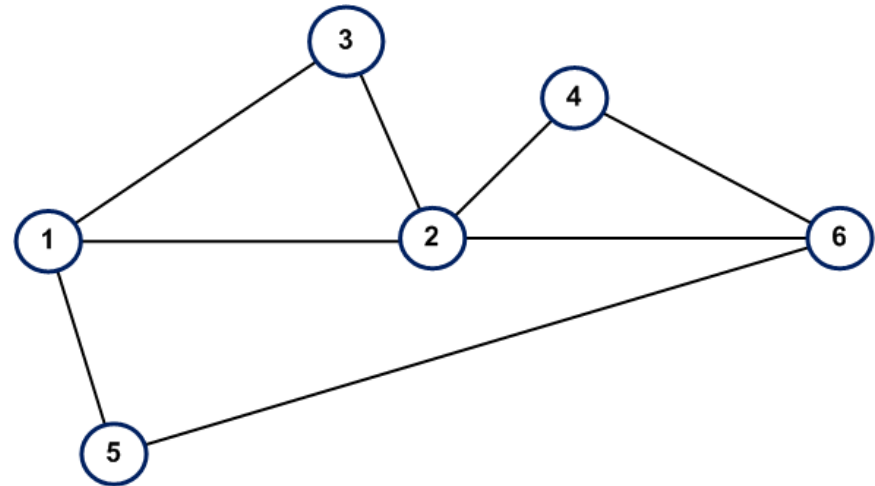
- ▶ Un $u-v$ drum de lungime $\delta_G(u, v)$ se numește **drum minim de la u la v**
- ▶ Vom nota și $\delta(u, v)$ dacă G se deduce din context sau $d(u, v)$ dacă nu apar confuzii de notație

Exemple



$$\delta(1, 6) =$$

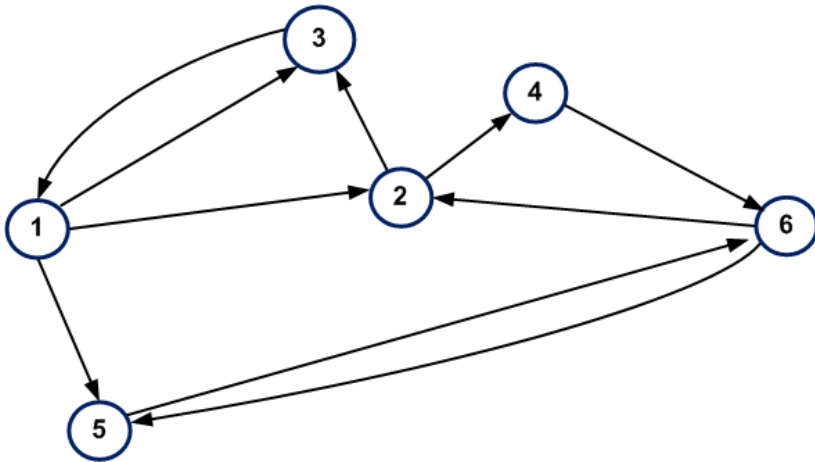
Un drum minim de la 1 la 6:



$$\delta(1, 4) =$$

Un lanț minim de la 1 la 4:

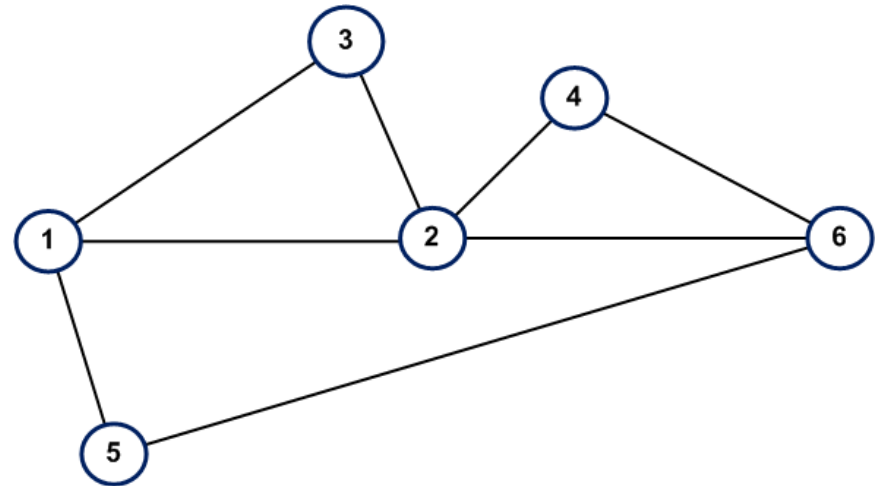
Exemple



$$\delta(1, 6) = 2$$

Un drum minim de la 1 la 6:

$$P = [1, 5, 6]$$



$$\delta(1, 4) = 2$$

Un lanț minim de la 1 la 4:

$$P = [1, 2, 6]$$

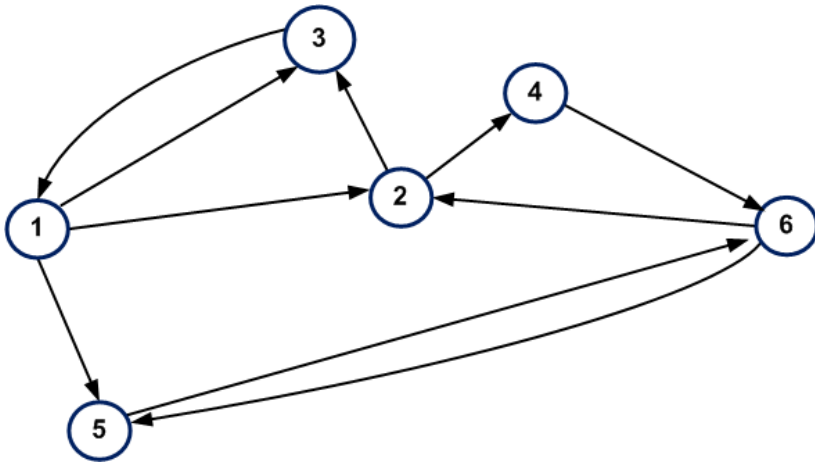
Circuite/Cicluri

- ▶ Un **circuit/ciclu** este un drum/lanț *simplu* cu capetele identice

$$C = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_1]$$

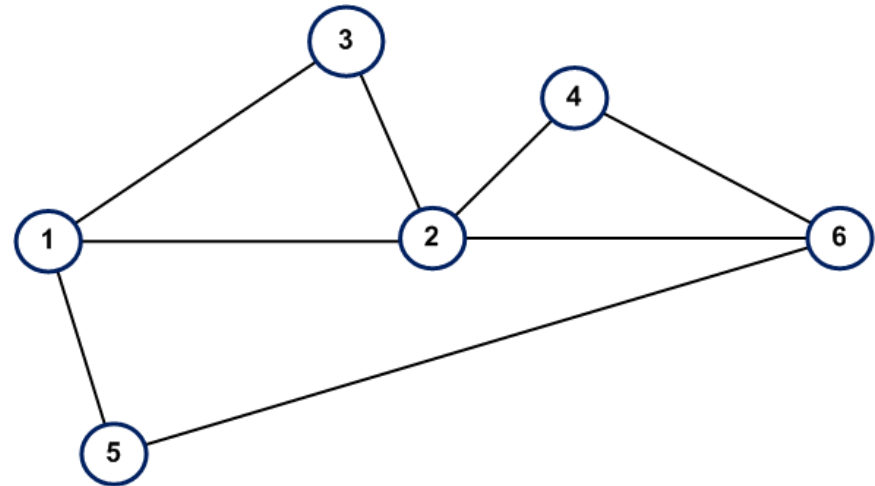
- ▶ **Circuit/ciclu elementar:** drumul/lanțul $[v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$ este elementar
- ▶ **Notății** $V(C)$, $E(C)$

Example



Circuit neelementar:

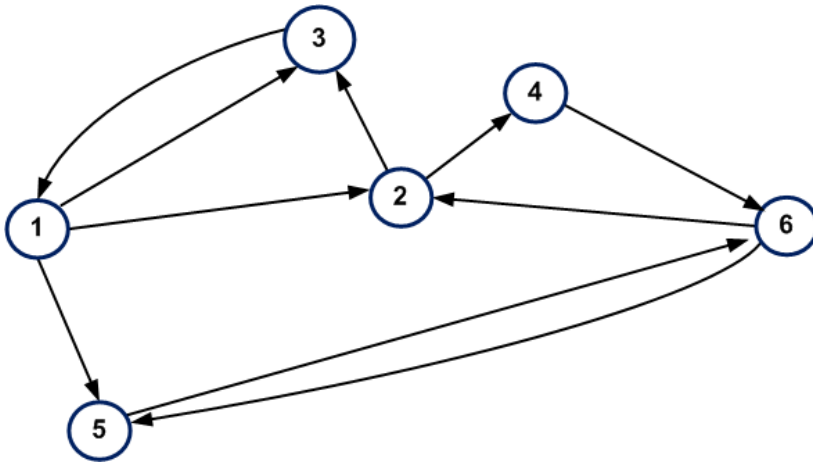
Circuit elementar:



Ciclu neelementar:

Ciclu elementar:

Exemple

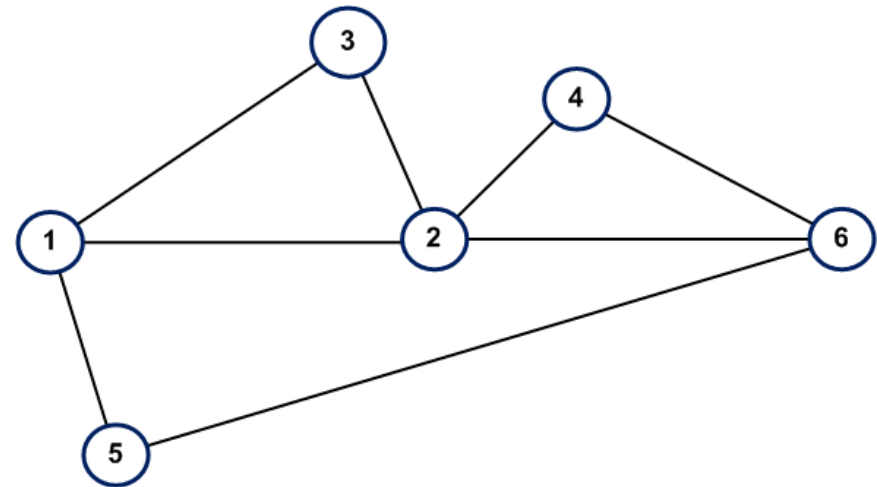


Circuit neelementar:

$P=[1, 2, 4, 6, 2, 3, 1]$

Circuit elementar:

$P=[2, 4, 6, 2]$



Ciclu neelementar:

$P=[1, 2, 6, 4, 2, 3, 1]$

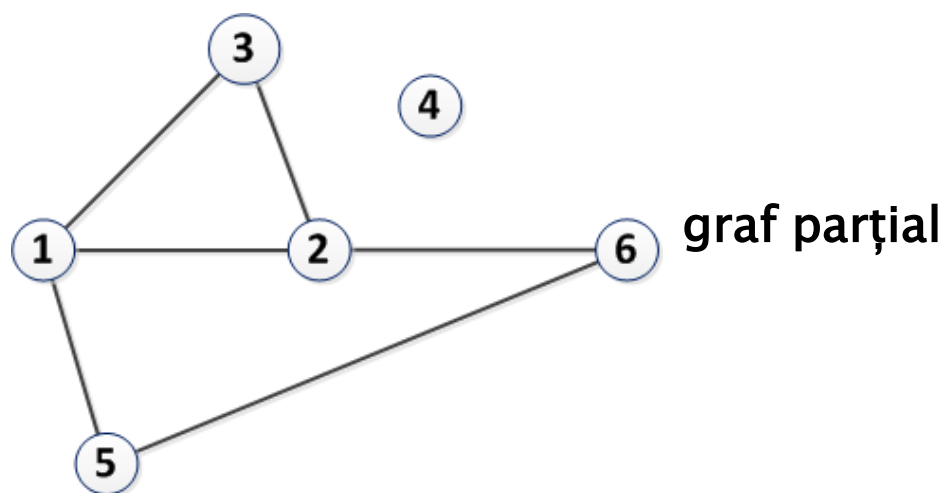
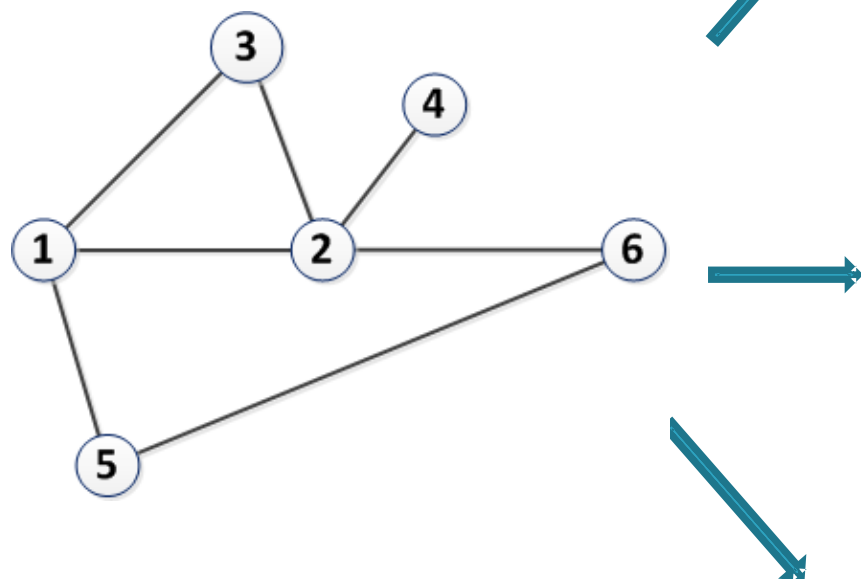
Ciclu elementar:

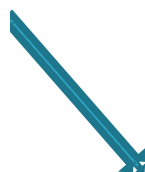
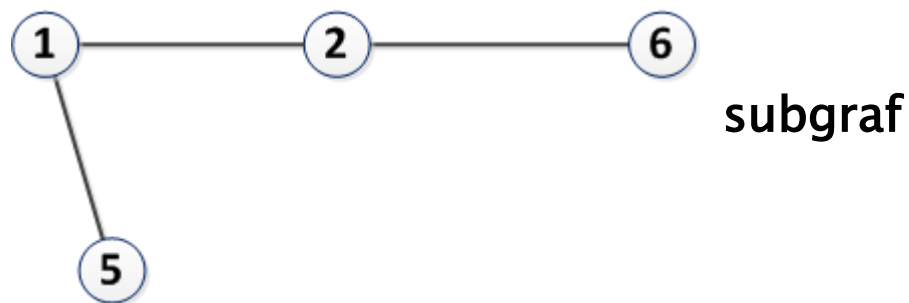
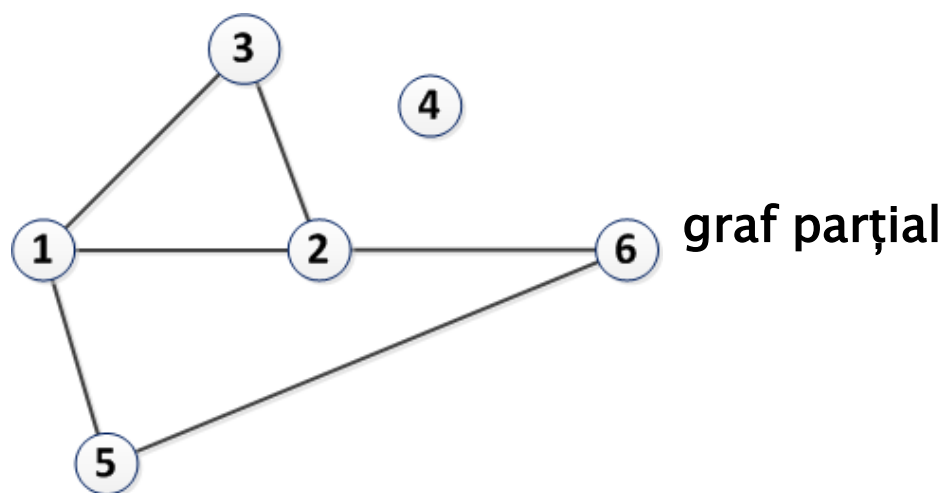
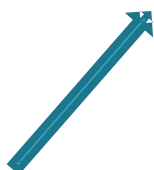
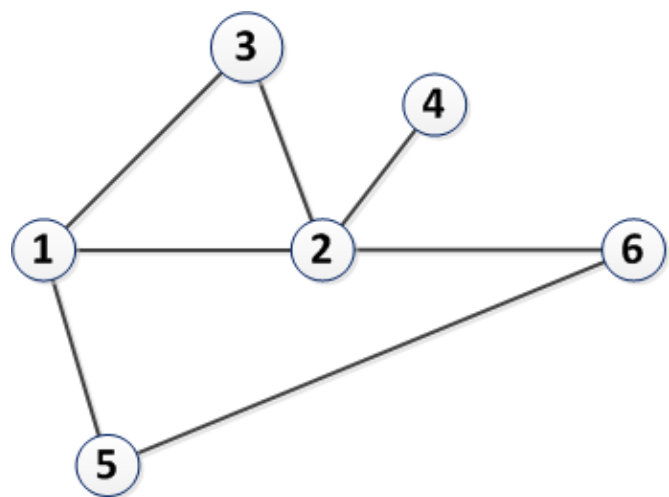
$P=[1, 2, 6, 5, 1]$

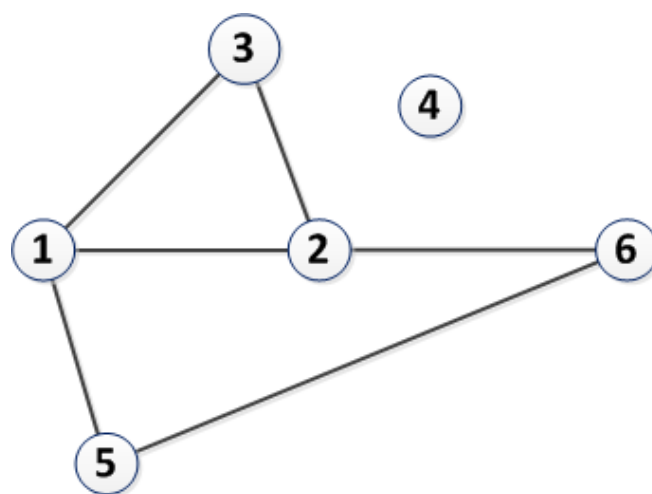
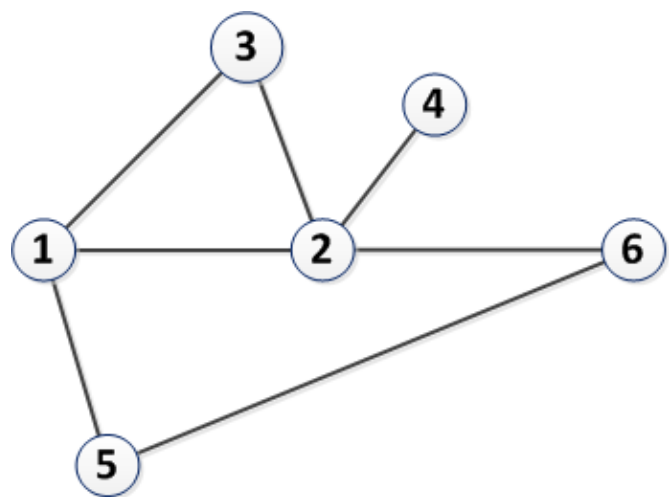
Graf parțial. Subgraf. Conexitate

Graf parțial. Subgraf

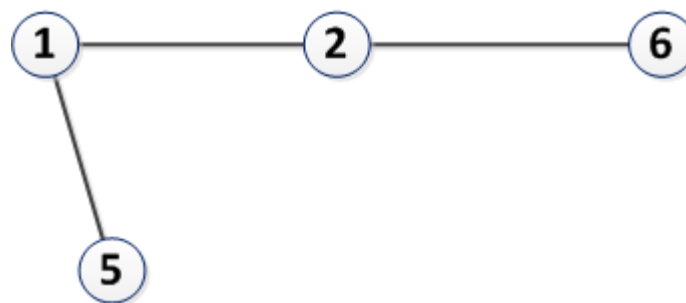
- ▶ graf parțial
- ▶ subgraf
- ▶ subgraf indus



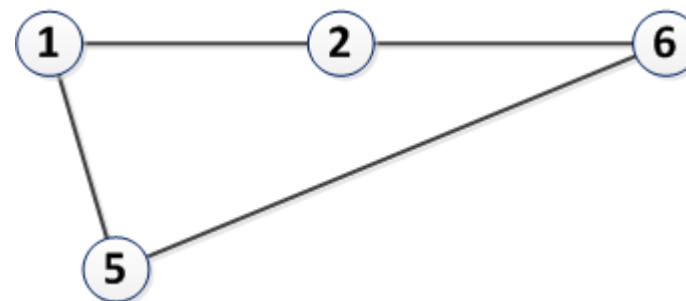
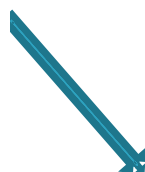




graf parțial



subgraf



subgraf
indus de
 $\{1,2,5,6\}$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- ▶ G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă
 $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- ▶ G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă
 $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$
- ▶ G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $G_1 < G$) dacă
 $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

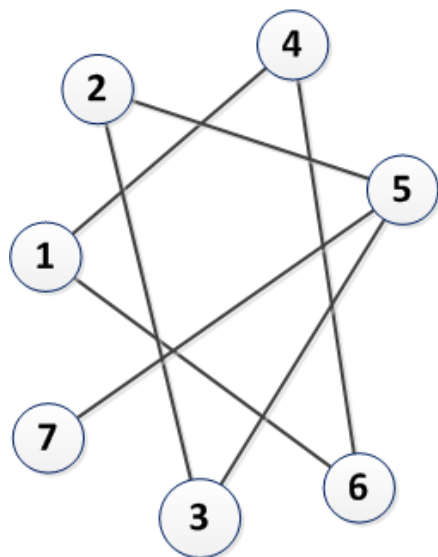
Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

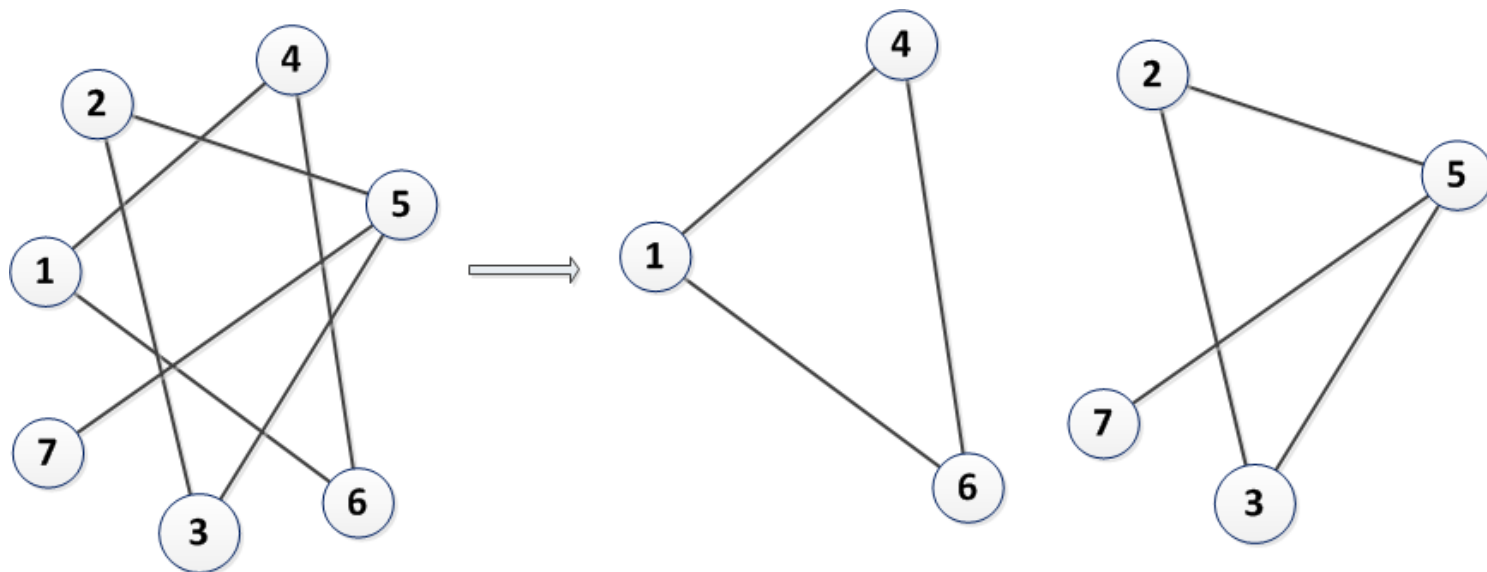
- ▶ G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă
 $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$
- ▶ G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $G_1 < G$) dacă
 $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$
- ▶ G_1 este **subgraf indus de V_1 în G** (vom nota $G_1 = G[V_1]$) dacă
 $V_1 \subseteq V,$
 $E_1 = \{e \mid e \in E(G), e \text{ are ambele extremități în } V_1\}$
(toate arcele/muchiile cu extremități în V_1)

Conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- ▶ graf conex
- ▶ componentă conexă





două componente conexe

Conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- ▶ G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț
- ▶ O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- ▶ Pentru cazul orientat – **tare-conexitate**

Conexitate

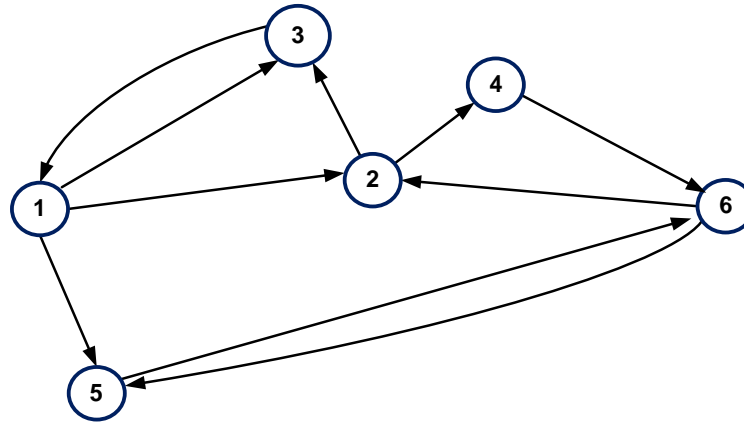
Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- ▶ G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț
- ▶ O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- ▶ Pentru cazul orientat – **tare-conexitate**
- ▶ Toate vârfurile și muchiile lui G aparțin unei (singure) componente conexe)

Tare conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf orientat

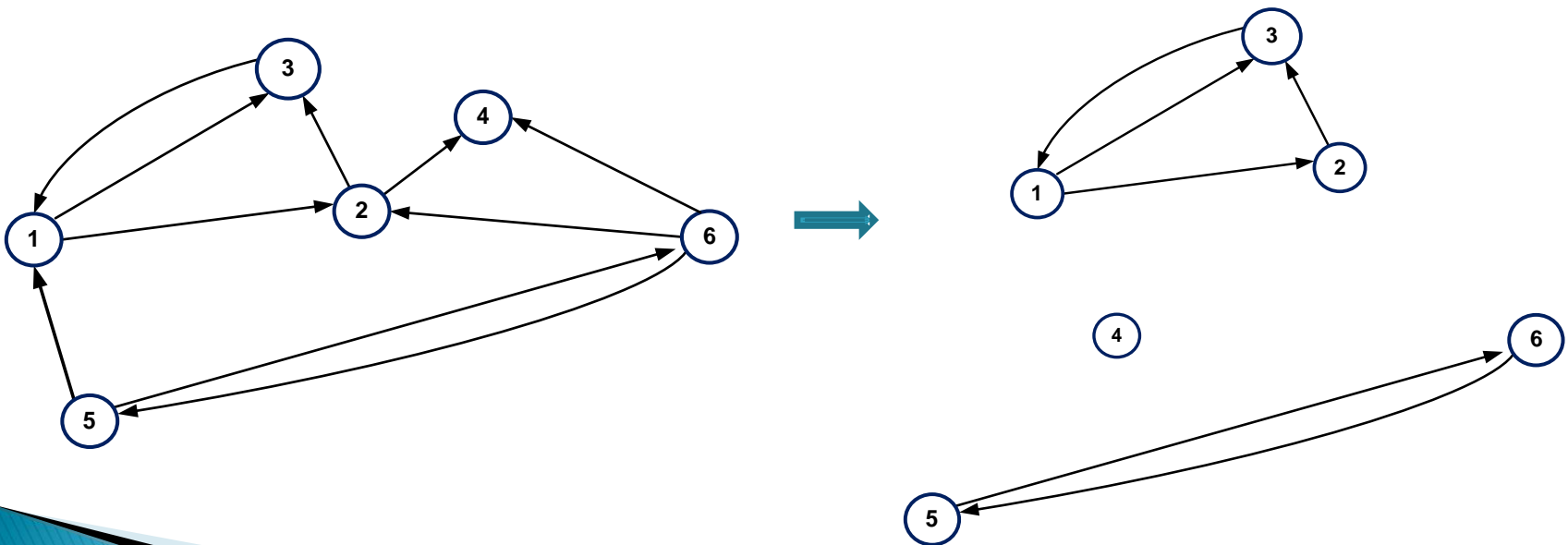
- ▶ G este **graf tare-conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un drum



Tare conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf orientat

- ▶ G este **graf tare-conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un drum
- ▶ O **componentă tare-conexă** a lui G este un subgraf indus tare-conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf tare-conex)



Tare conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf orientat

- ▶ G este **graf tare-conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un drum
- ▶ O **componentă tare-conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- ▶ Toate vârfurile lui G aparțin unei (singure) componente tare-conexe
- ▶ Un arc din G nu aparține neapărat unei componente tare-conexe

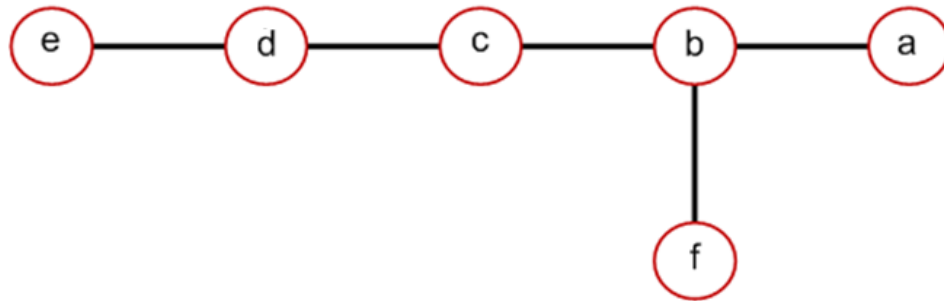
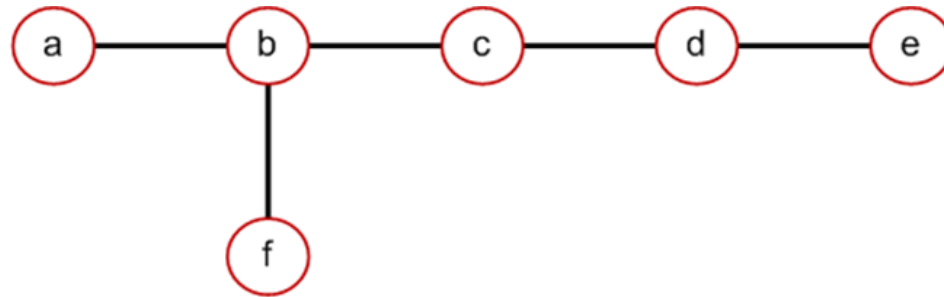
Notății

- ▶ $G - v$, $v \in V(G)$
- ▶ $G - e$, $e \in E(G)$
- ▶ $G - V'$, $V' \subseteq V(G)$
- ▶ $G - E'$, $E' \subseteq E(G)$
- ▶ $G + e$

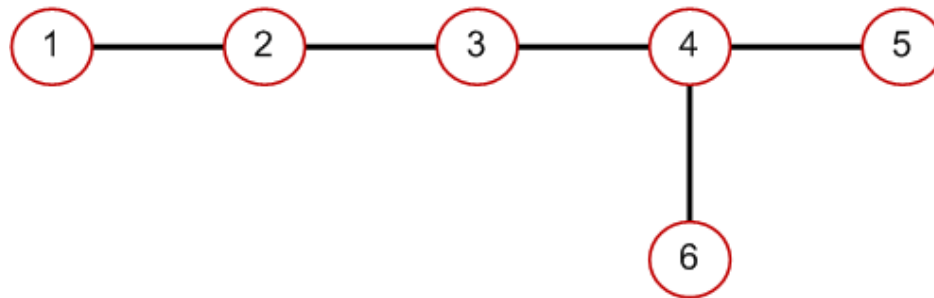
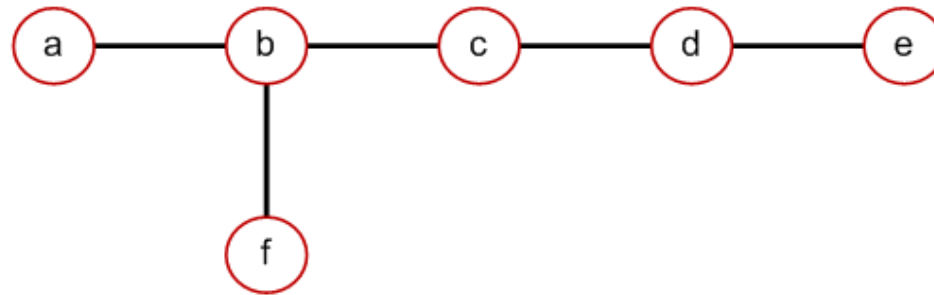
Egalitate. Izomorfism



Egalitate



Egalitate?



Izomorfism

Fie G_1, G_2 două grafuri

- ▶ $G_1 = (V_1, E_1)$
- ▶ $G_2 = (V_2, E_2)$

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** ($G_1 \sim G_2$) \Leftrightarrow există $f : V_1 \rightarrow V_2$ bijectivă cu

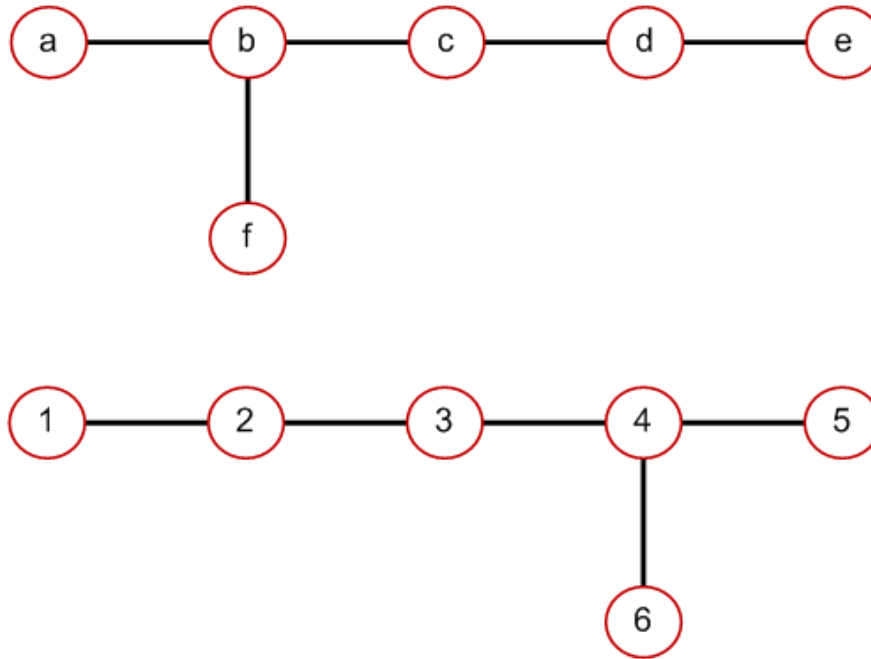
$$uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2$$

pentru orice $u, v \in V_1$

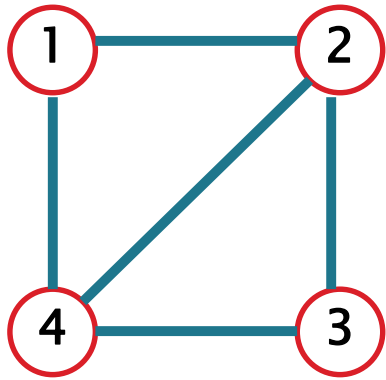
(**f conservă adiacența și neadiacența**)

Izomorfism

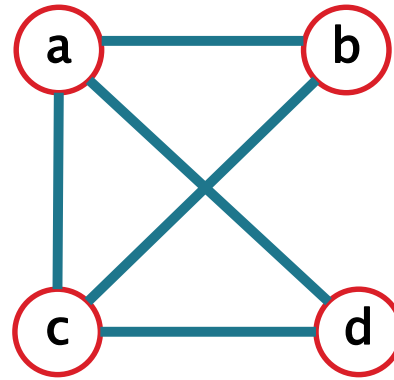
Interpretare: se pot reprezenta în plan prin același desen



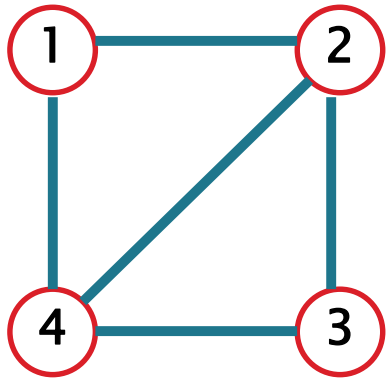
Izomorfism



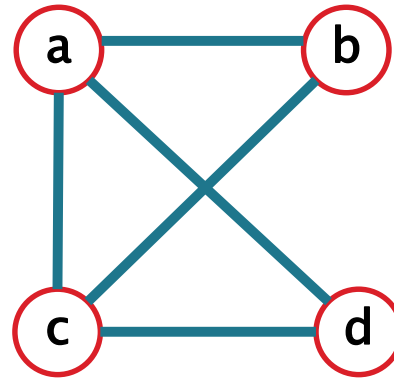
\sim



Izomorfism



\sim

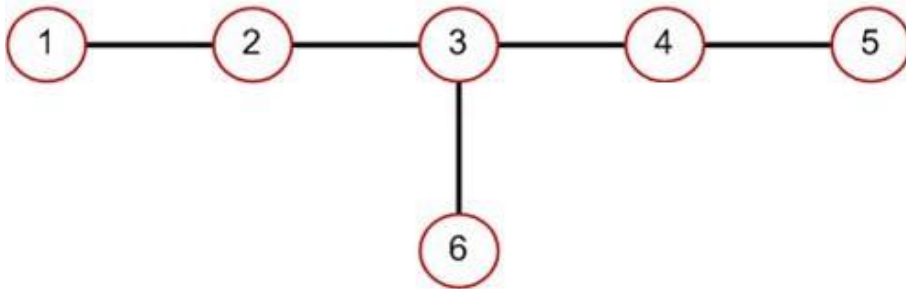
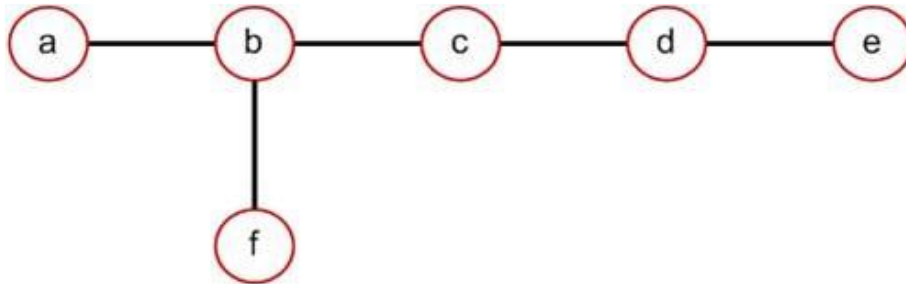


f: 2 \rightarrow a
 4 \rightarrow c
 1 \rightarrow b
 3 \rightarrow d

Izomorfism

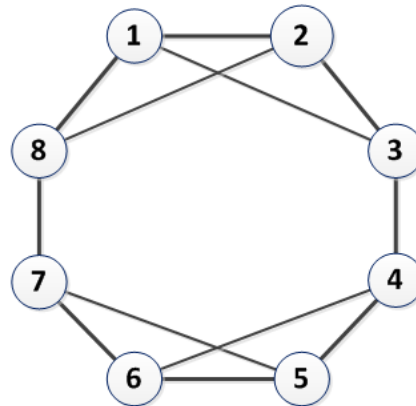
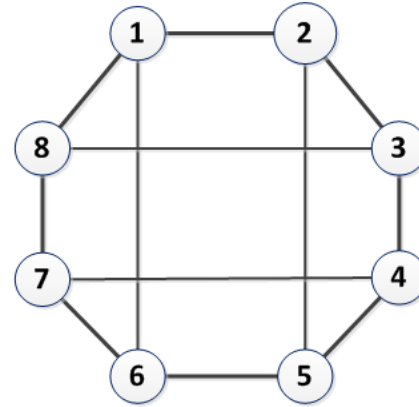
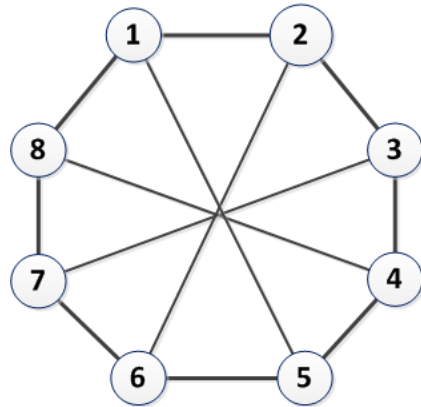
- ▶ $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$
- ▶ $s(G_1) = s(G_2) \Rightarrow G_1 \sim G_2$ Exempu??

Izomorfism

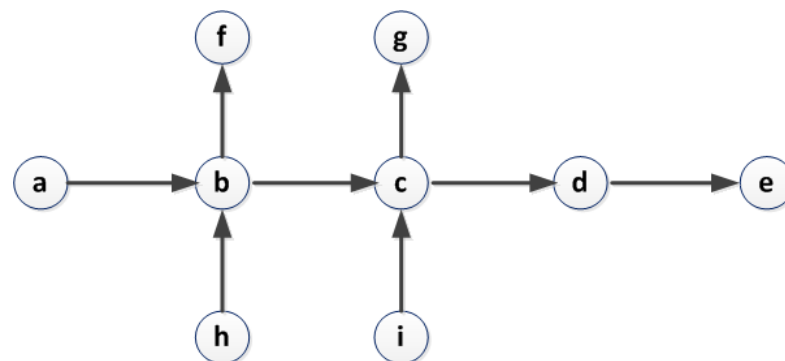
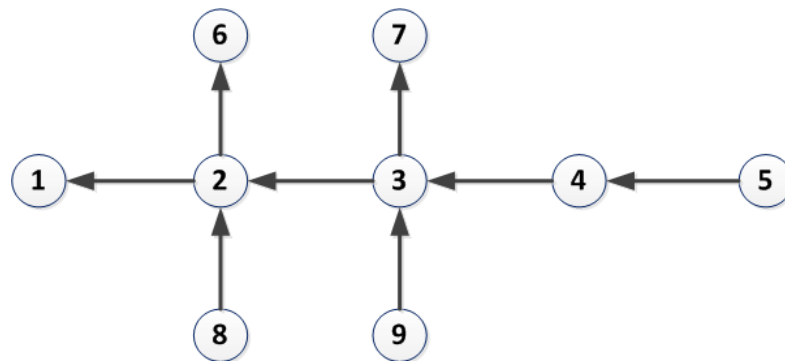


Izomorfe?

Care dintre aceste grafuri sunt izomorfe?

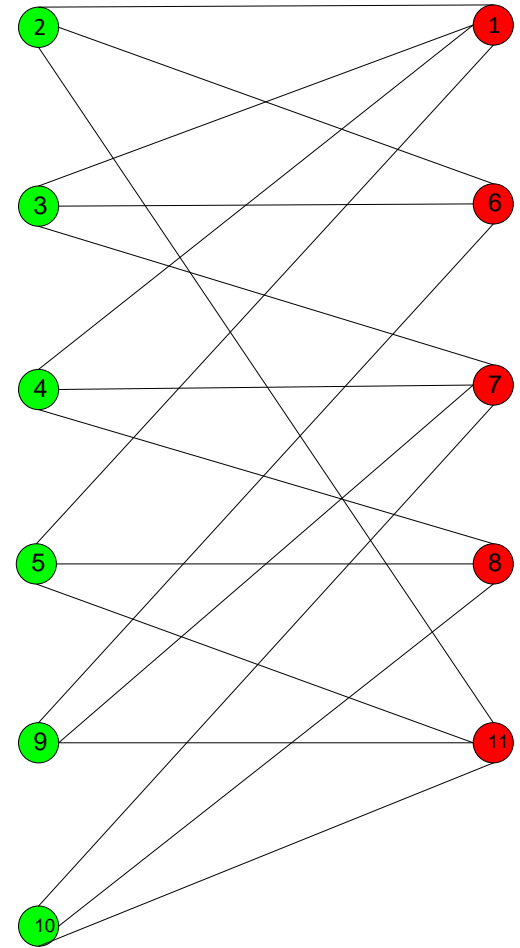
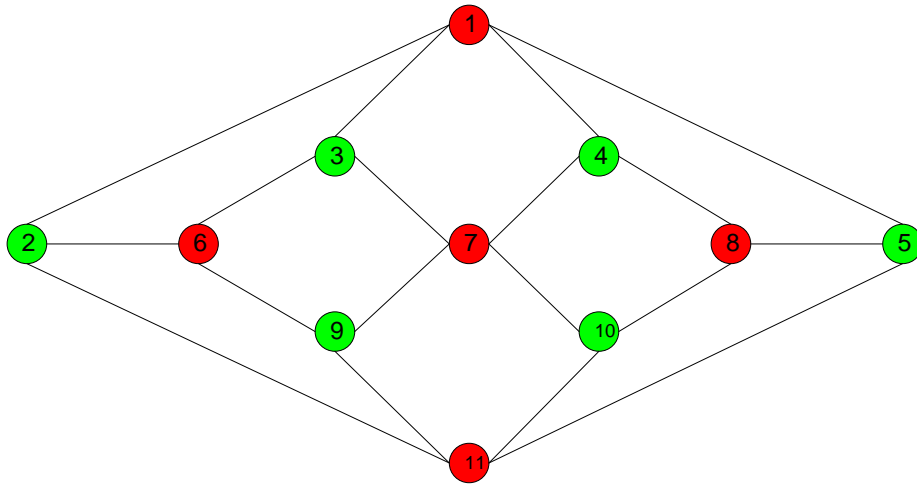


Sunt aceste grafuri izomorfe?



Grafuri standard

Graf bipartit



Graf bipartit

- ▶ Un graf neorientat $G = (V, E)$ se numește **bipartit** \Leftrightarrow

există o partiție a lui V în două submulțimi V_1, V_2 (**bipartiție**):

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2 :

$$|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$$

Graf bipartit

Observație

► $G = (V, E)$ **bipartit** \Leftrightarrow

există o colorare a vârfurilor cu două culori:

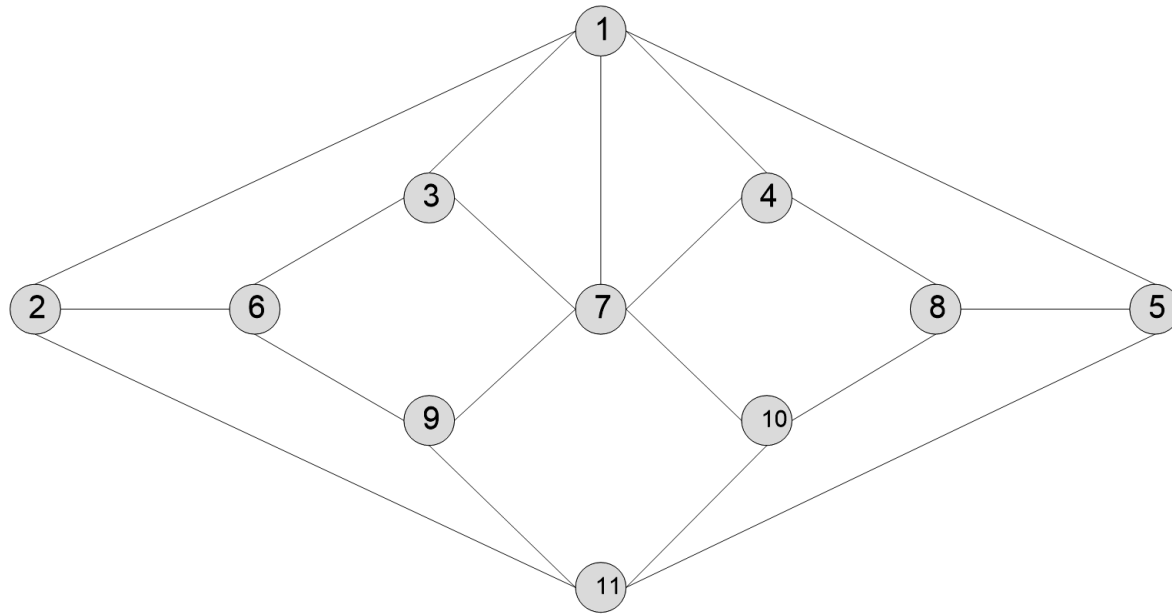
$$c : V \rightarrow \{1, 2\}$$

astfel încât pentru orice muchie $e=xy \in E$ avem

$$c(x) \neq c(y)$$

(**bicolorare**)

Graf bipartit



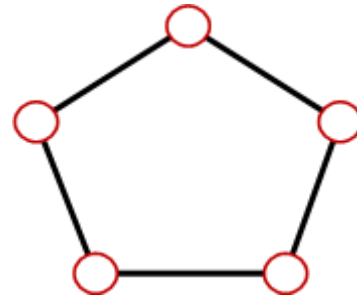
nu este bipartit

Grafuri standard

► P_n – lanț elementar

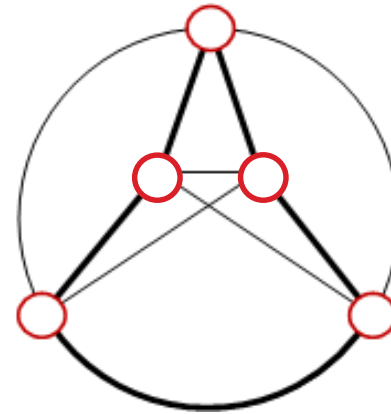
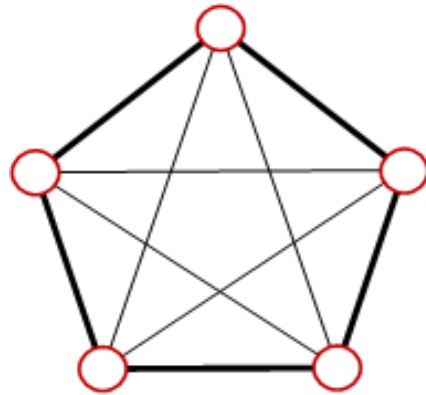


► C_n – ciclu elementar



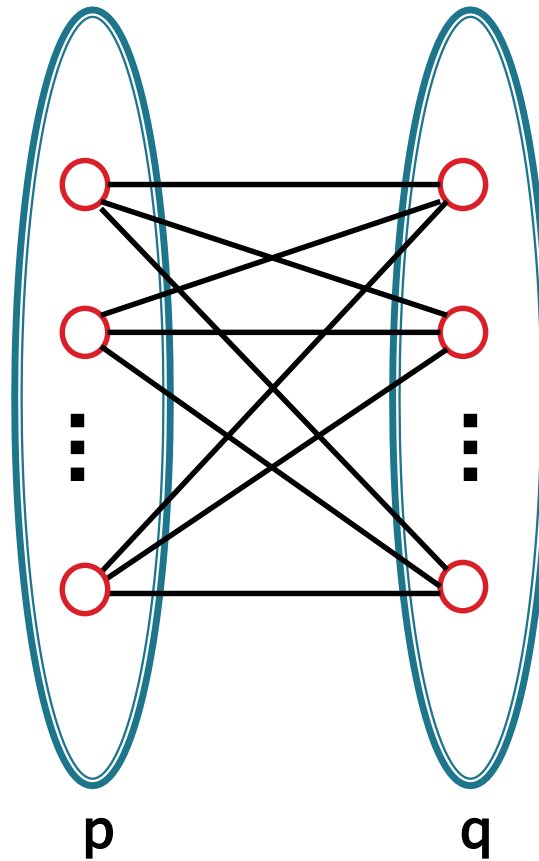
Grafuri standard

- ▶ K_n – graf complet (de ordin n)



Grafuri standard

- ▶ $K_{p,q}$ – graf bipartit complet



Grafuri standard

► $K_{3,3}$

