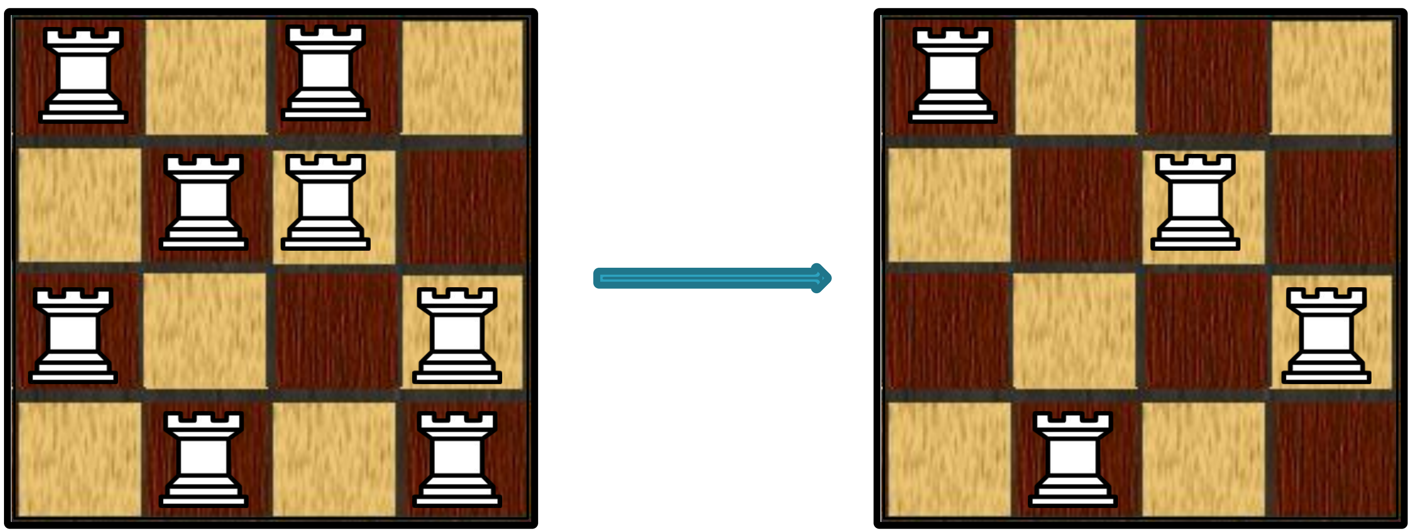
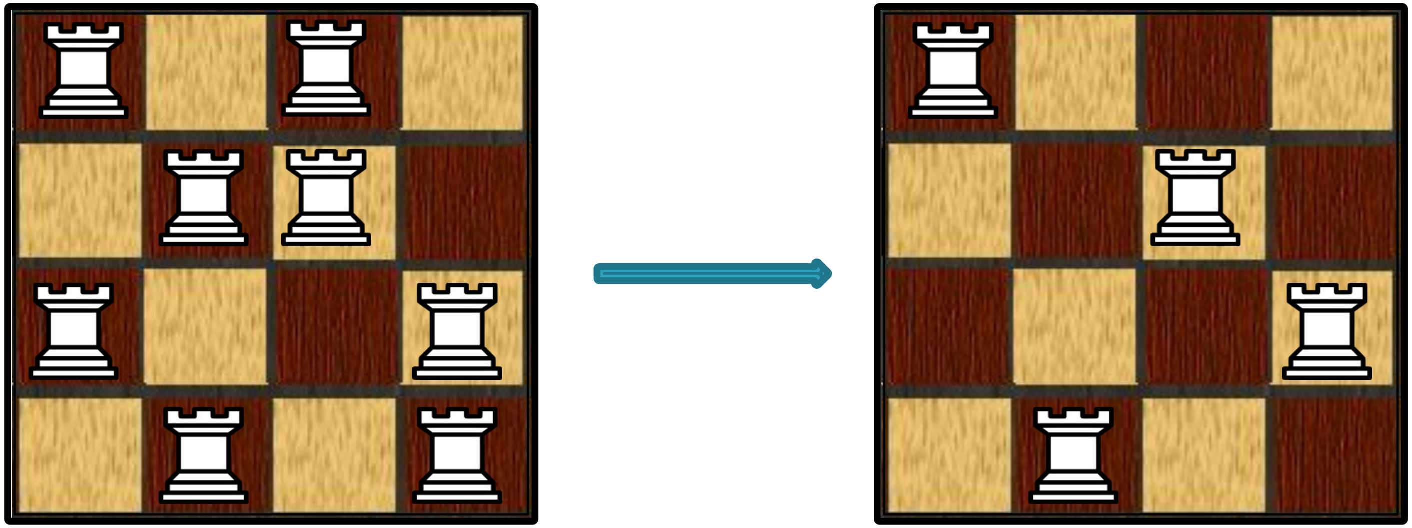
Cuplaje aplicatii

Aplicaţie:
Matrice de permutări

Problemă

Pe o tablă de tip șah de dimensiuni nxn sunt așezate ture, astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană sunt **același număr de ture**. Să se arate că se pot păstra pe tablă n dintre aceste ture, care nu se atacă două câte două





$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

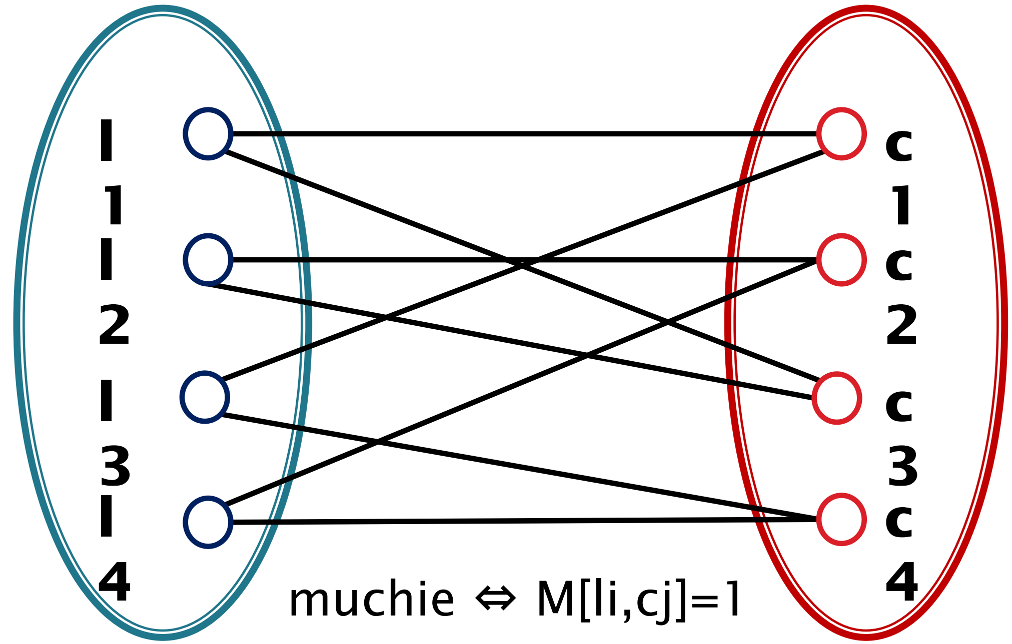
Reformulare cu matrice

Fie $p>1$ și M o matrice $n \times n$ cu elemente $\{0,1\}$ a.î pe fiecare linie și pe fiecare coloană sunt exact p elemente 1.

Atunci M conține o matrice de permutări (având un unic 1 pe fiecare linie și coloană)

Modelare cu grafuri

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

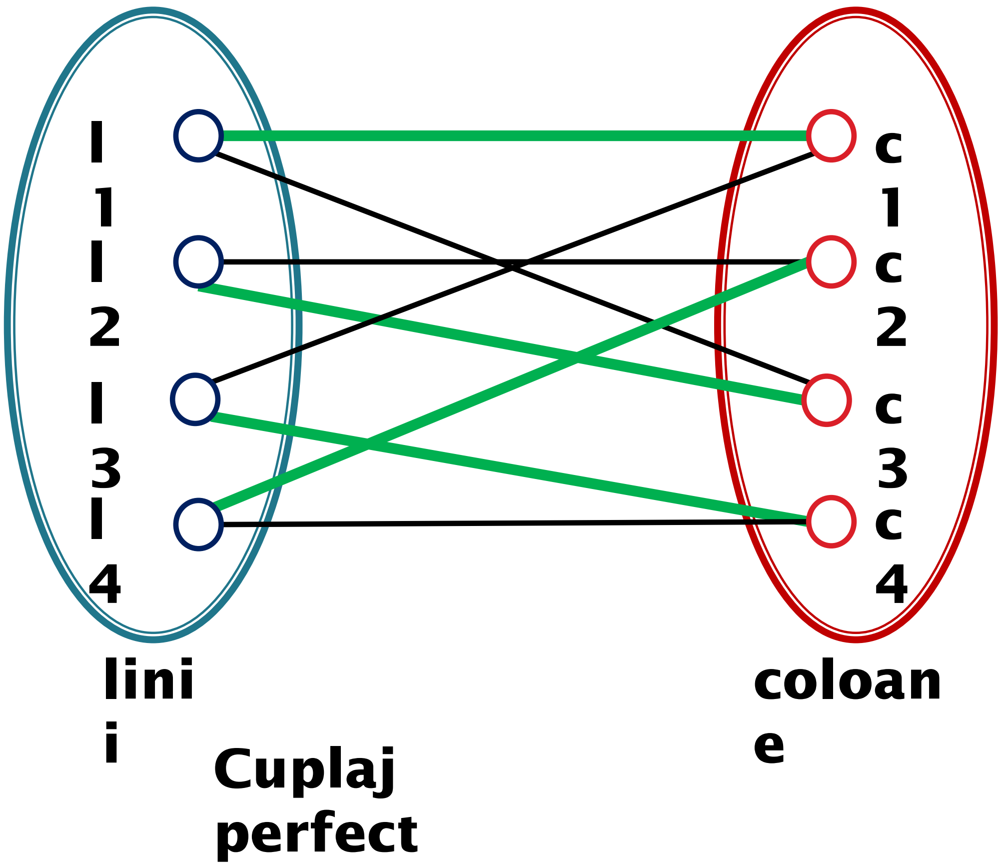


linii

coloane

G – graf bipartit p-regulat

- **există matrice de permutări în M** ⇔ există cuplaj perfect în G
- **Rezultă din consecințele teoremei lui HALL (teorema căsătoriei)**

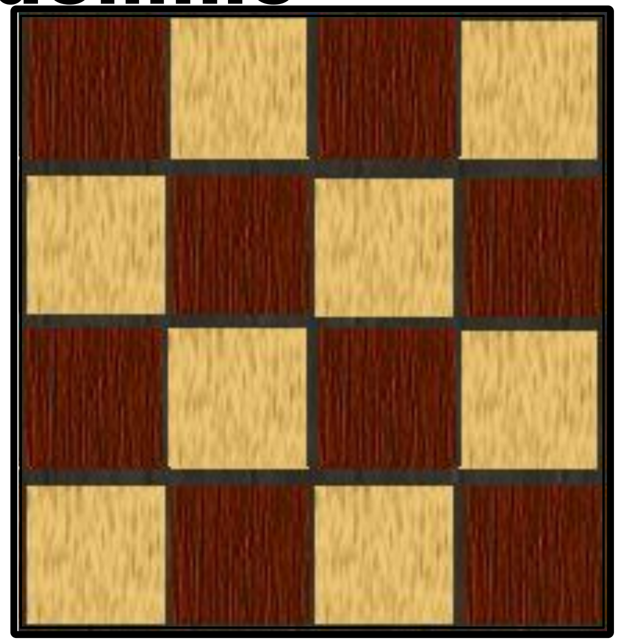


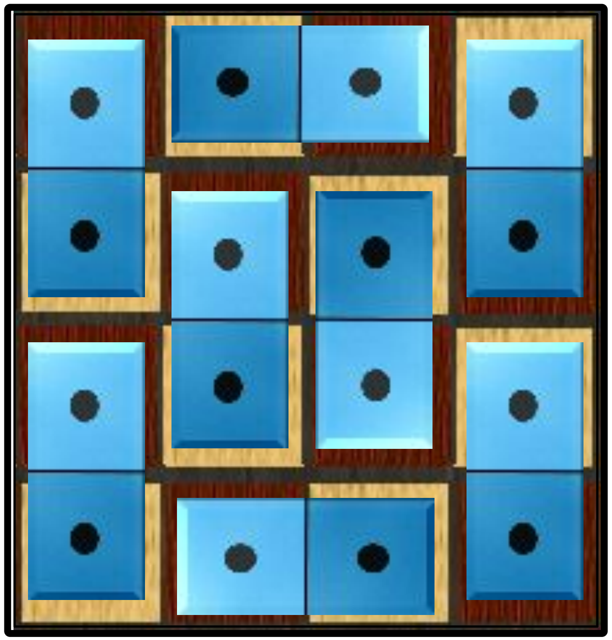
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicaţie:
Acoperire tabla cu piese de domino

Acoperire

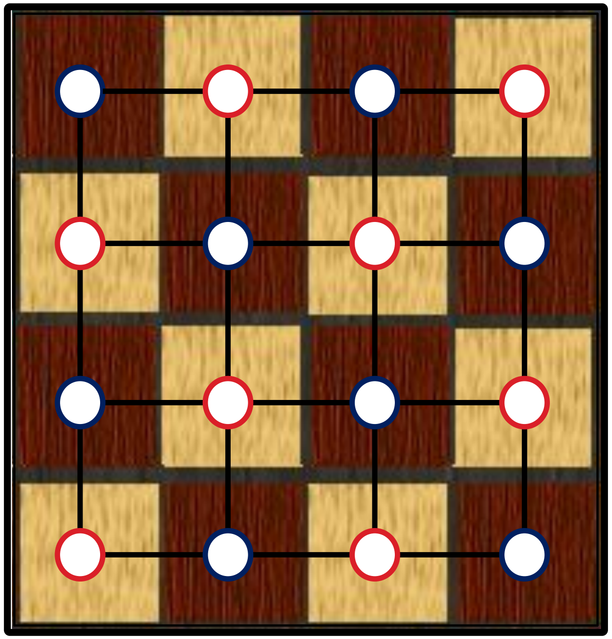
- **Acoperirea unei table cu piese de domino**

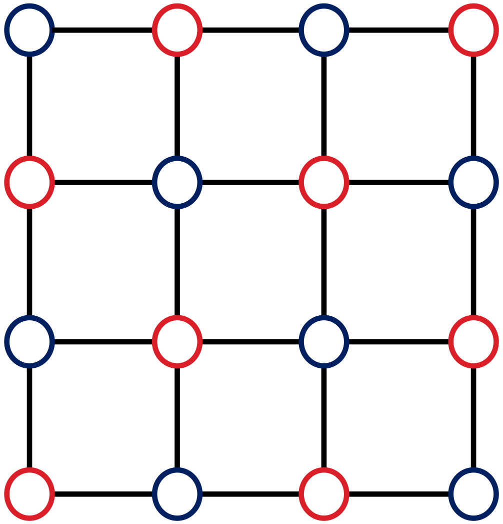




Acoperire

- **Tabla ⇒ graful grid**
- **Acoperire ⇒ cuplaj perfect**

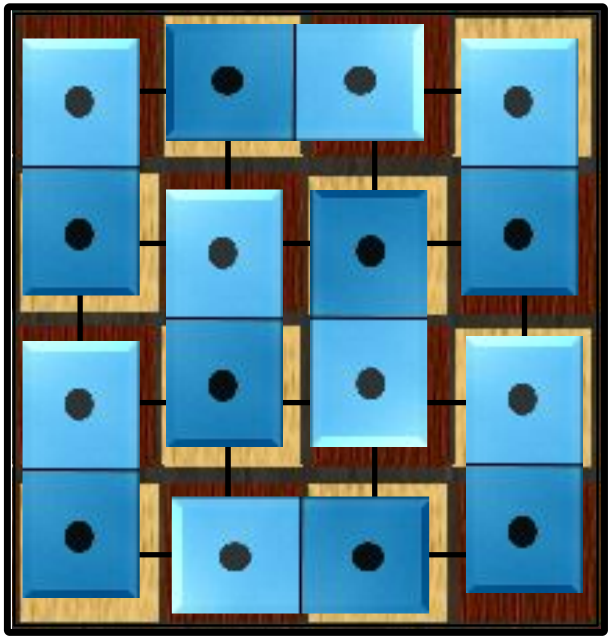


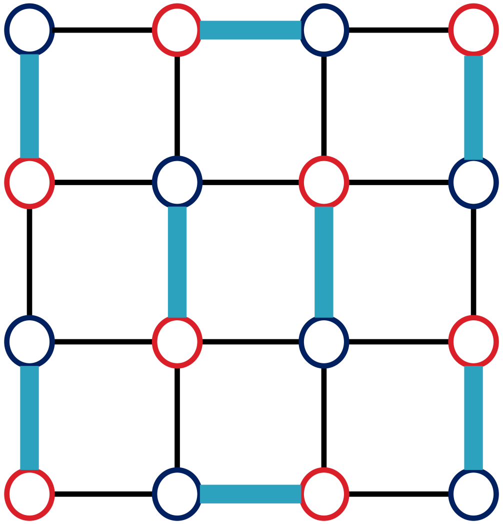


Graful grid

Acoperire

- **Tabla ⇒ graful grid**
- **Acoperire ⇒ cuplaj perfect**





Graful grid

Acoperire

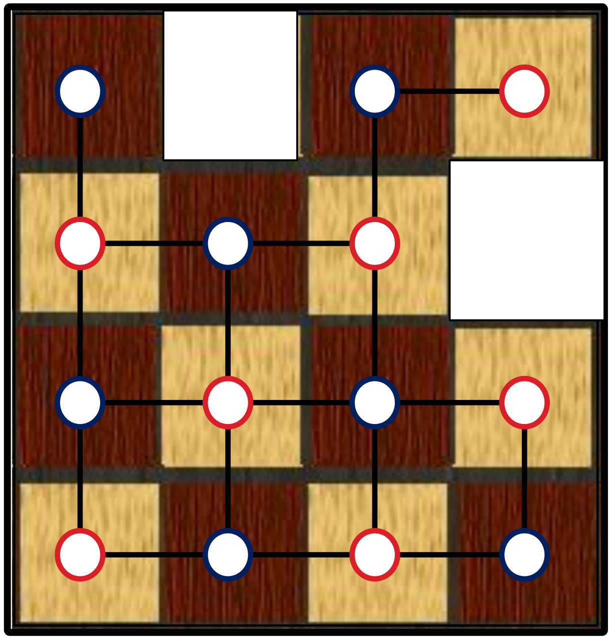
- **Acoperirea unei table m x n cu piese de domino**

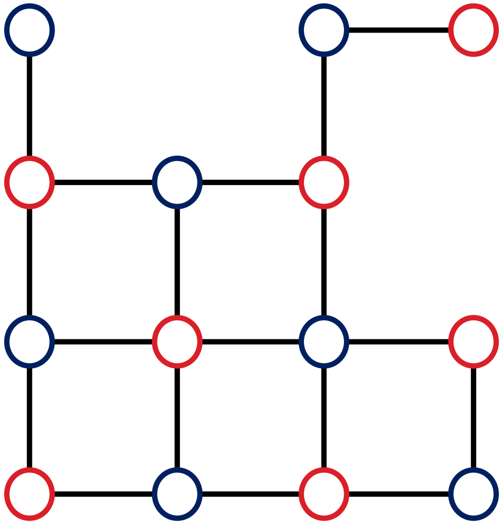
  - **Este acoperibilă ⇔ mn par**

  - **Dacă tabla este acoperibilă, dar eliminăm două pătrățele din ea, în ce condiții rămâne acoperibilă?**

Acoperire

- **Tabla ⇒ graful grid**
- **Acoperire ⇒ cuplaj perfect**





Acoperire

- **Acoperirea unei table m x n cu piese de domino**
  - **Este acoperibilă ⇔ mn par**
  - **Dacă tabla este acoperibilă, dar eliminăm două pătrățele din ea, în ce condiții rămâne acoperibilă?**

- dacă și numai dacă pătrățelele au culori diferite

Aplicaţie:
Sistem de reprezentanţi distincţi pentru submulţimi

Problemă - sistem de reprezentanţi distincţi

Fie A – mulţime finită cu n elemente

$X_1, X_2, \ldots, X_m \subseteq A$

S.n. **sistem de reprezentanţi distincţi** pentru colecţia de submulţimi $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ un vector $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ cu proprietățile

- $r_i \in X_i, \forall i=1,\ldots,m$
- $r_i \neq r_j, \forall i, j=1,\ldots,m, i \neq j$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$X_1 = \{2, 3\} \Rightarrow r_1 = 2$

$X_2 = \{1, 3, 4\} \Rightarrow r_2 = 3$

$X_3 = \{2, 4\} \Rightarrow r_3 = 4$

Problemă - sistem de reprezentanţi distincţi

Nu orice colecție de submulțimi admite un sistem de reprezentanţi distincţi.

Exemplu:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$X_1 = \{2, 3\}$

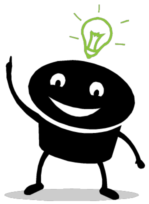
$X_2 = \{3\}$

$X_3 = \{2\}$

Problemă - sistem de reprezentanţi distincţi

Condiții necesare și suficiente pentru existența unui sistem de reprezentanți distincți ai unei colecții de submulțimi din A

Problemă - sistem de reprezentanţi distincţi



Modelăm problema cu ajutorul uni graf bipartit:

- vârf x_i - asociat submulțimii X_i, $i=1,\dots,m$

  $\Rightarrow$ mulțimea **X** de vârfuri

- vârf a_j –asociat fiecărui element din A, $j = 1,\dots,n$,

  $\Rightarrow$ mulțimea **Y** de vârfuri

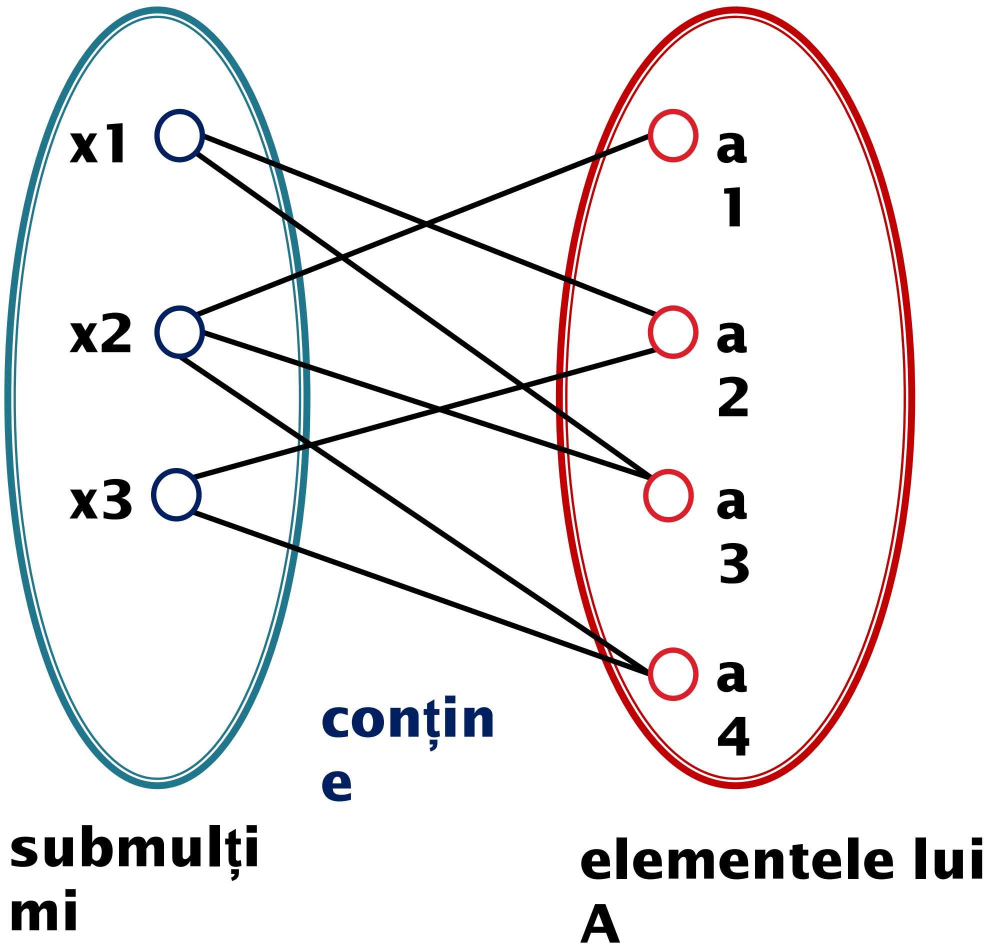
- muchie de la $\mathbf{x}_i$ la $a_j \Leftrightarrow a_j \in X_i$

Problemă - sistem de reprezentanţi distincţi

Exemplu:

A = {1, 2, 3, 4}

- X_1 = {2, 3}
- X_2 = {1, 3, 4}
- X_3 = {2, 4}

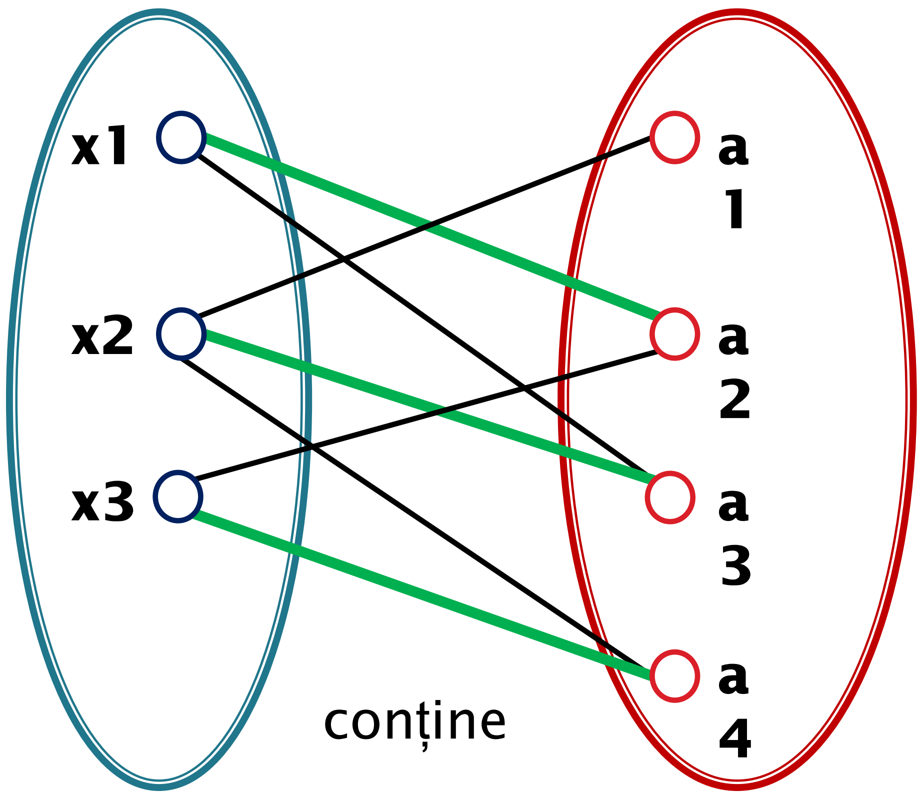


Observație

- Există un sistem de reprezentanți pentru colecția de submulțimi (X_1, X_2, ..., X_m) ale lui A ⇔
  există un cuplaj al lui X în Y în graful asociat

X_1 = {2, 3}
X_2 = {1, 3, 4}
X_3 = {2, 4}

r=(2, 3, 4)



Observație

- Există un sistem de reprezentanți pentru colecția de submulțimi (X_1, X_2, ..., X_m) ale lui A ⇔ **există un cuplaj al lui X în Y în graful asociat**
- Teorema lui HALL:

Dacă pentru orice submultime $S=\{x_{i1}, x_{i2},\dots, x_{ik}\} \subseteq X$ avem

$$|N(S)| \geq |S| = k \text{ (imaginea lui S)}$$

$$N(S) = X_{i1} \cup X_{i2} \cup \dots \cup X_{ik}$$

- Are loc astfel următorul rezultat

Teoremă –existența unui sistem de reprezentanţi distincţi

Fie A o mulțime finită și $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ o colecţie de submulţimi din A.

Colecția **nu** are un sistem de reprezentanți distincți ⇔

∃ k submulțimi în colecție a **căror reuniune are mai puțin de k elemente**