

# Curs 6

Cristian Niculescu

## 1 Probleme recapitulative

### 1.1 Numărare și probabilități

- 1) a) În câte moduri putem aranja literele cuvântului STATISTICS? (De exemplu, SSSTTTIIAC este un aranjament).  
b) Dacă toate aranjamentele sunt egal posibile, care este probabilitatea ca "I"-urile să fie unul după altul?

### 1.2 Probabilitate condiționată și teorema lui Bayes

- 2) Corupt de puterea lui, juriul showului tv *Următorul matematician de top al Americii* a luat mită de la unii participanți. În fiecare episod, fiecare participant rămâne în show sau este eliminat.

Dacă un participant a mituit juriul, rămâne în show cu probabilitatea 1. Dacă un participant nu a mituit juriul, rămâne în show cu probabilitatea  $1/3$ .

De-a lungul a 2 episoade, presupunem că  $1/4$  dintre participanți au mituit juriul. Aceiași participanți mituiesc juriul în ambele runde, i.e., dacă un participant dă mită în prima rundă, dă mită și în a 2-a (și viceversa).

- a) Dacă alegem aleator un participant care a rămas în show după primul episod, care este probabilitatea să fi mituit juriul?  
b) Dacă alegem aleator un participant, care este probabilitatea să rămână în show după ambele episoade?  
c) Dacă alegem aleator un participant care a rămas în show după primul episod, care este probabilitatea să fie eliminat în al 2-lea episod?

### 1.3 Independență

- 3) Aruncăm un zar corect cu 20 de fețe, numerotate de la 1 la 20. Determinați dacă următoarele perechi de evenimente sunt independente.

- a) "Număr par" și "Număr  $\leq 10$ ".
- b) "Număr par" și "Număr prim".

## 1.4 Medie și dispersie

4) Fie  $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/8 & 1/4 & 5/8 \end{pmatrix}$ .

- a) Calculați  $E(X)$ .
- b) Dați pmf pentru  $Y = X^2$  și folosiți-o pentru a calcula  $E(Y)$ .
- c) În loc de aceasta, calculați  $E(X^2)$  direct dintr-un tabel extins.
- d) Calculați  $\text{Var}(X)$ .
- e) Calculați media și dispersia unei variabile aleatoare Bernoulli( $p$ ).
- f) Presupunem că 100 de oameni își aruncă pălăria într-o cutie și apoi aleg aleator câte o pălărie din cutie. Care este media numărului de oameni care își iau înapoi pălăria proprie?

Indicație: Exprimați numărul de oameni care își iau înapoi propria pălărie ca o sumă de variabile aleatoare a căror medie este ușor de calculat.

## 1.5 Funcții masă de probabilitate, funcții densitate de probabilitate și funcții de repartiție

- 7) a) Presupunem că  $X$  are funcția densitate de probabilitate  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  pentru  $x \geq 0$ . Calculați cdf,  $F_X(x)$ .
- b) Dacă  $Y = X^2$ , calculați pdf și cdf ale lui  $Y$ .
- 8) Presupunem că aruncăm un zar corect de 100 de ori (independent) și primim 3 dolari de fiecare dată când dăm 6. Fie  $X_1$ , numărul de dolari primiți în aruncările de la 1 la 25.
- Fie  $X_2$ , numărul de dolari primiți în aruncările de la 26 la 50.
- Fie  $X_3$ , numărul de dolari primiți în aruncările de la 51 la 75.
- Fie  $X_4$ , numărul de dolari primiți în aruncările de la 76 la 100.
- Fie  $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ , numărul de dolari primiți în 100 de aruncări.
- a) Care este funcția masă de probabilitate a lui  $X$ ?
- b) Care este media și dispersia lui  $X$ ?
- c) Fie  $Y = 4X_1$ . (Deci, în loc să aruncăm de 100 de ori, aruncăm doar de 25 de ori și înmulțim câștigurile cu 4.)
- i) Care sunt media și dispersia lui  $Y$ ?
- ii) Cum sunt media și dispersia lui  $Y$  în comparație cu ale lui  $X$ ? (I.e., sunt mai mari, mai mici, sau egale?) Explicați pe scurt de ce aceasta are sens.

## 1.6 Probabilitate comună, covarianță, corelație

9) (**Puzzle aritmetic**) Pmf-urile comune și marginale ale lui  $X$  și  $Y$  sunt parțial date în următorul tabel.

$X \backslash Y$	1	2	3	
1	1/6	0	...	1/3
2	...	1/4	...	1/3
3	...	...	1/4	...
	1/6	1/3	...	1

- a) Completați tabelul.  
b) Sunt  $X$  și  $Y$  independente?

10) **Covarianță și independență**

Fie  $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ .

Fie  $Y = X^2$ .

- a) Completați următorul tabel dând funcția de frecvență comună pentru  $X$  și  $Y$ . Includeți probabilitățile marginale.

$X$	-2	-1	0	1	2	total
$Y$						
0						
1						
4						
total						

- b) Aflați  $E(X)$  și  $E(Y)$ .  
c) Arătați că  $X$  și  $Y$  nu sunt independente.  
d) Arătați  $Cov(X, Y) = 0$ .

Acesta este un exemplu de variabile aleatoare necorelate dar dependente. Motivul pentru care aceasta se poate întâmpla este că doar dependența liniară este măsurată de corelație. În acest caz,  $X$  și  $Y$  nu sunt legate liniar.

11) **Repartiții comune continue.** Presupunem că  $X$  și  $Y$  sunt variabile aleatoare continue cu funcția de densitate comună  $f(x, y) = x + y$  pe pătratul unitate  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

- a) Fie  $F(x, y)$  cdf comună. Calculați  $F(1, 1)$ . Calculați  $F(x, y)$ .  
b) Calculați densitățile marginale pentru  $X$  și  $Y$ .  
c) Sunt  $X$  și  $Y$  independente?  
d) Calculați  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $E(X^2 + Y^2)$ ,  $Cov(X, Y)$ .

## 1.7 Legea numerelor mari, teorema limită centrală

12) Presupunem că  $X_1, \dots, X_{100}$  sunt i.i.d. cu media  $1/5$  și dispersia  $1/9$ . Utilizați teorema limită centrală pentru a estima  $P(\sum X_i < 30)$ .

13) (Mai mult cu teorema limită centrală)

IQ-ul mediu al unei populații este 100 cu deviația standard 15 (prin definiție, IQ-ul este normalizat, deci așa este și aici). Care este probabilitatea ca un grup de 100 de oameni selectat aleator să aibă un IQ mediu peste 115?

**Tabel standard normal al probabilităților cozii stângi.**

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$  pentru  $N(0, 1)$ . (Folosiți interpolarea pentru a estima valorile pentru a 3-a zecimală a lui  $z$ .)

$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$
-4.00	0.0000	-2.00	0.0228	0.00	0.5000	2.00	0.9772
-3.95	0.0000	-1.95	0.0256	0.05	0.5199	2.05	0.9798
-3.90	0.0000	-1.90	0.0287	0.10	0.5398	2.10	0.9821
-3.85	0.0001	-1.85	0.0322	0.15	0.5596	2.15	0.9842
-3.80	0.0001	-1.80	0.0359	0.20	0.5793	2.20	0.9861
-3.75	0.0001	-1.75	0.0401	0.25	0.5987	2.25	0.9878
-3.70	0.0001	-1.70	0.0446	0.30	0.6179	2.30	0.9893
-3.65	0.0001	-1.65	0.0495	0.35	0.6368	2.35	0.9906
-3.60	0.0002	-1.60	0.0548	0.40	0.6554	2.40	0.9918
-3.55	0.0002	-1.55	0.0606	0.45	0.6736	2.45	0.9929
-3.50	0.0002	-1.50	0.0668	0.50	0.6915	2.50	0.9938
-3.45	0.0003	-1.45	0.0735	0.55	0.7088	2.55	0.9946
-3.40	0.0003	-1.40	0.0808	0.60	0.7257	2.60	0.9953
-3.35	0.0004	-1.35	0.0885	0.65	0.7422	2.65	0.9960
-3.30	0.0005	-1.30	0.0968	0.70	0.7580	2.70	0.9965
-3.25	0.0006	-1.25	0.1056	0.75	0.7734	2.75	0.9970
-3.20	0.0007	-1.20	0.1151	0.80	0.7881	2.80	0.9974
-3.15	0.0008	-1.15	0.1251	0.85	0.8023	2.85	0.9978
-3.10	0.0010	-1.10	0.1357	0.90	0.8159	2.90	0.9981
-3.05	0.0011	-1.05	0.1469	0.95	0.8289	2.95	0.9984
-3.00	0.0013	-1.00	0.1587	1.00	0.8413	3.00	0.9987
-2.95	0.0016	-0.95	0.1711	1.05	0.8531	3.05	0.9989
-2.90	0.0019	-0.90	0.1841	1.10	0.8643	3.10	0.9990
-2.85	0.0022	-0.85	0.1977	1.15	0.8749	3.15	0.9992
-2.80	0.0026	-0.80	0.2119	1.20	0.8849	3.20	0.9993
-2.75	0.0030	-0.75	0.2266	1.25	0.8944	3.25	0.9994
-2.70	0.0035	-0.70	0.2420	1.30	0.9032	3.30	0.9995
-2.65	0.0040	-0.65	0.2578	1.35	0.9115	3.35	0.9996
-2.60	0.0047	-0.60	0.2743	1.40	0.9192	3.40	0.9997
-2.55	0.0054	-0.55	0.2912	1.45	0.9265	3.45	0.9997
-2.50	0.0062	-0.50	0.3085	1.50	0.9332	3.50	0.9998
-2.45	0.0071	-0.45	0.3264	1.55	0.9394	3.55	0.9998
-2.40	0.0082	-0.40	0.3446	1.60	0.9452	3.60	0.9998
-2.35	0.0094	-0.35	0.3632	1.65	0.9505	3.65	0.9999
-2.30	0.0107	-0.30	0.3821	1.70	0.9554	3.70	0.9999
-2.25	0.0122	-0.25	0.4013	1.75	0.9599	3.75	0.9999
-2.20	0.0139	-0.20	0.4207	1.80	0.9641	3.80	0.9999
-2.15	0.0158	-0.15	0.4404	1.85	0.9678	3.85	0.9999
-2.10	0.0179	-0.10	0.4602	1.90	0.9713	3.90	1.0000
-2.05	0.0202	-0.05	0.4801	1.95	0.9744	3.95	1.0000

## 2 Soluțiile problemelor recapitulative

### 2.1 Numărare și probabilitate

1) a) Creăm un aranjament în etape și calculăm numărul de posibilități la fiecare etapă:

Etapa 1: alegem 3 din cele 10 locuri pentru a pune S-urile:  $C_{10}^3$ .

Etapa 2: alegem 3 din cele 7 locuri rămase pentru a pune T-urile:  $C_7^3$ .

Etapa 3: alegem 2 din cele 4 locuri rămase pentru a pune I-urile:  $C_4^2$ .

Etapa 4: alegem 1 din cele 2 locuri rămase pentru a pune A-ul:  $C_2^1$ .

Etapa 5: folosim ultimul loc pentru C:  $C_1^1$ .

Numărul de moduri de aranjare este:

$$C_{10}^3 \cdot C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = 120 \cdot 35 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 = 50400.$$

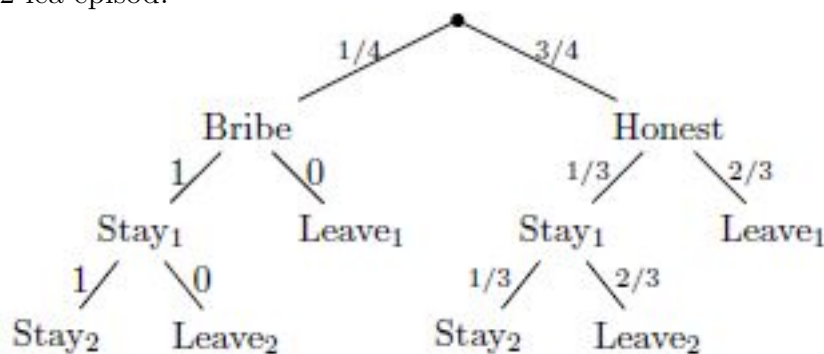
b) Sunt  $C_{10}^2 = 45$  de moduri egal posibile de a plasa cele 2 I-uri.

Sunt 9 moduri de a le plasa unul lângă altul, i.e. pe pozițiile 1 și 2, pozițiile 2 și 3, ..., pozițiile 9 și 10.

Deci probabilitatea ca I-urile să fie adiacente este  $9/45 = 1/5 = 0.2$ .

### 2.2 Probabilitate condiționată și teorema lui Bayes

2) Facem un arbore. Stay<sub>1</sub> înseamnă că participantului i s-a permis să rămână în joc după primul episod și Stay<sub>2</sub> că i s-a permis să rămână în joc după al 2-lea episod.



Evenimentele relevante sunt:

$B$  = "participantul mituiește juriul"

$H$  = "participantul este cinstit (nu mituiește juriul)"

$S_1$  = "participantului i se permite să rămână în joc după primul episod"

$S_2$  = "participantului i se permite să rămână în joc după al 2-lea episod"

$L_1$  = "participantul este eliminat în primul episod"

$L_2$  = "participantul este eliminat în al 2-lea episod"

a) Din legea probabilității totale,

$$P(S_1) = P(S_1|B)P(B) + P(S_1|H)P(H) = 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

De aceea, din regula lui Bayes,  $P(B|S_1) = P(S_1|B) \frac{P(B)}{P(S_1)} = 1 \cdot \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$ .

b) Folosind arborele avem

$$P(S_2) = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

c) Vrem să calculăm  $P(L_2|S_1) = \frac{P(L_2 \cap S_1)}{P(S_1)}$ .

a)  $\implies P(S_1) = 1/2$ . Pentru numărător avem (vezi arborele)

$$P(L_2 \cap S_1) = P(L_2 \cap S_1|B)P(B) + P(L_2 \cap S_1|H)P(H) = 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{6}.$$

De aceea  $P(L_2|S_1) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$ .

## 2.3 Independență

3)  $E = \text{"număr par"} = \{2, 4, \dots, 20\}$ .

$L = \text{"număr } \leq 10" = \{1, 2, \dots, 10\}$ .

$B = \text{"număr prim"} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ .

a)  $P(E) = 10/20 = 1/2$ ,  $P(E|L) = 5/10 = 1/2 \implies P(E) = P(E|L) \implies E$  și  $L$  sunt independente.

b)  $P(E) = 10/20 = 1/2$ ,  $P(E|B) = 1/8 \implies P(E) \neq P(E|B) \implies E$  și  $B$  nu sunt independente.

## 2.4 Media și dispersia

4) a)  $E(X) = (-1) \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{5}{8} = -\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{1}{2}$ .

b)

valorile lui $X$	-1	0	1
probabilitățile	1/8	1/4	5/8
$X^2$	1	0	1

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \implies E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

c) Formula schimbării de variabile spune să folosim ultima linie a tabelului extins de la b):  $E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{4}$  (la fel ca la b)).

d)  $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ .

5) Facem un tabel:

$X$	0	1
probabilitățile	$1-p$	$p$
$X^2$	0	1

Din tabel,  $E(X) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$ .

Deoarece  $X$  și  $X^2$  au același tabel,  $E(X^2) = E(X) = p$ .

De aceea,  $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$ .

6) Fie  $X$  numărul de persoane care își iau înapoi propria pălărie.

Urmând indicația: fie  $X_j = 1$  dacă persoana  $j$  își ia înapoi pălăria proprie și  $X_j = 0$  dacă nu.

Avem  $X = \sum_{j=1}^{100} X_j$ , deci  $E(X) = \sum_{j=1}^{100} E(X_j)$ .

Deoarece persoana  $j$  poate lua cu aceeași probabilitate orice pălărie, avem  $P(X_j = 1) = 1/100$ .

Astfel,  $X_j \sim \text{Bernoulli}(1/100) \implies E(X_j) = 1/100 \implies E(X) = 1$ .

## 2.5 Funcții masă de probabilitate, funcții densitate de probabilitate și funcții de repartiție

7) a) Cdf a lui  $X$  este

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = (-e^{-\lambda t}) \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}, \forall x > 0.$$

b) Pentru  $y > 0$  avem

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}}.$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} e^{-\lambda\sqrt{y}}.$$

8) a) Fie  $T$  numărul de apariții ale lui 6 în 100 de aruncări.

Știm că  $T \sim \text{Binomial}(100, 1/6)$ .

Deoarece primim 3 dolari de fiecare dată când dăm 6, avem  $X = 3T$ . Deci, putem scrie

$$P(X = 3k) = C_{100}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}, \text{ pentru } k = 0, 1, 2, \dots, 100.$$

Sau putem scrie

$$P(X = x) = C_{100}^{x/3} \left(\frac{1}{6}\right)^{x/3} \left(\frac{5}{6}\right)^{100-x/3}, \text{ pentru } x = 0, 3, 6, \dots, 300.$$



b)  $E(X) = E(3T) = 3E(T) = 3 \cdot 100 \cdot \frac{1}{6} = 50$ .  
 $Var(X) = Var(3T) = 9Var(T) = 9 \cdot 100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 125$ .  
c) i) Fie  $T_1$  numărul total de apariții ale lui 6 în primele 25 de aruncări. Deci,  
 $X_1 = 3T_1$  și  $Y = 12T_1$ .  
 $T_1 \sim \text{Binomial}(25, 1/6)$ , deci

$$E(Y) = E(12T_1) = 12E(T_1) = 12 \cdot 25 \cdot \frac{1}{6} = 50$$

și

$$Var(Y) = Var(12T_1) = 144Var(T_1) = 144 \cdot 25 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 500.$$

ii) Mediile sunt aceleași din liniaritate deoarece  $X$  și  $Y$  sunt ambele  $300 \times$  o variabilă aleatoare Bernoulli( $1/6$ ).

Pentru dispersie,  $Var(X) = 4Var(X_1)$  deoarece  $X$  este suma a 4 variabile *independente* toate identice cu  $X_1$ . Dar  $Var(Y) = Var(4X_1) = 16Var(X_1)$ . Deci  $Var(Y) = 4Var(X)$ . Aceasta are sens intuitiv, deoarece  $X$  este construită din mai multe încercări independente ca  $X_1$ .

## 2.6 Probabilitate comună, covarianță, corelație

9) (**Puzzle aritmetic**) a) Suma probabilităților marginale este 1, deci cele 2 probabilități marginale lipsă sunt  $P(X = 3) = 1/3$ ,  $P(Y = 3) = 1/2$ . Suma probabilităților de pe fiecare linie sau coloană este probabilitatea marginală corespunzătoare. De exemplu,  $1/6 + 0 + P(X = 1, Y = 3) = 1/3$ , deci  $P(X = 1, Y = 3) = 1/6$ . Iată tabelul completat:

$X \backslash Y$	1	2	3	
1	1/6	0	1/6	1/3
2	0	1/4	1/12	1/3
3	0	1/12	1/4	1/3
	1/6	1/3	1/2	1

b) Nu, nu sunt independente, deoarece, de exemplu,  
 $P(X = 2, Y = 1) = 0 \neq P(X = 2) \cdot P(Y = 1)$ .

### 10) Covarianță și independență

a)

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2	
0	0	0	1/5	0	0	1/5
1	0	1/5	0	1/5	0	2/5
4	1/5	0	0	0	1/5	2/5
	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1

Fiecare coloană, exceptând marginea, are doar o probabilitate nenulă. De exemplu, când  $X = -2$ , atunci  $Y = 4$ , deci în coloana  $X = -2$  doar  $P(X = -2, Y = 4) \neq 0$ .

b) Folosind repartițiile marginale:

$$E(X) = \frac{1}{5}(-2 - 1 + 0 + 1 + 2) = 0.$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} = 2.$$

c) Arătăm că probabilitatea intersecției nu este produsul probabilităților:

$$P(X = -2, Y = 0) = 0 \neq 1/25 = P(X = -2)P(Y = 0).$$

Deoarece acestea nu sunt egale,  $X$  și  $Y$  nu sunt independente. (Este evident că  $X^2$  nu este independent de  $X$ .)

d) Folosind tabelul din a) și mediile din b), avem:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{1}{5} \cdot (-2) \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot (-1) \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot 4 - 0 \cdot 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

## 11) Repartiții comune continue

$$\begin{aligned} a) F(a, b) &= P(X \leq a, Y \leq b) = \int_0^a \int_0^b (x + y) dy dx = \int_0^a \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=b} dx \\ &= \int_0^a \left( xb + \frac{b^2}{2} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2}b + \frac{b^2}{2}x \right) \Big|_0^a = \frac{a^2b + ab^2}{2}. \end{aligned}$$

Deci  $F(x, y) = \frac{x^2y + xy^2}{2}$  pe  $[0, 1] \times [0, 1]$  și  $F(1, 1) = 1$ .

$$b) f_X(x) = \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 (x + y) dy = \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} = x + \frac{1}{2}.$$

Din simetrie,  $f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$ .

c) Pentru a vedea dacă  $X$  și  $Y$  sunt independente, verificăm dacă densitatea comună este produsul densităților marginale.

$$f(x, y) = x + y, \quad f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(y + \frac{1}{2}\right).$$

Deoarece acestea nu sunt egale,  $X$  și  $Y$  nu sunt independente.

$$\begin{aligned} d) E(X) &= \int_0^1 \int_0^1 x(x + y) dy dx = \int_0^1 \left[ x^2y + x\frac{y^2}{2} \right] \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left( x^2 + \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

(Sau, folosind b),  $E(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{12}$ .)

Din simetrie,  $E(Y) = \frac{7}{12}$ .

$$E(X^2 + Y^2) = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2)(x+y) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[ x^3 y + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left( x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{4} \right) dx$$

$$= \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} + \frac{x}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6}.$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 y + x y^2) dy dx = \int_0^1 \left[ \left( \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) dx = \left( \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = -\frac{1}{144}.$$

## 2.7 Legea numerelor mari, teorema limită centrală

12) Standardizăm:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_i X_i < 30\right) &= P\left(\frac{\frac{1}{n} \sum X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{30/n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &\approx P\left(Z < \frac{30/100 - 1/5}{1/30}\right) \quad (\text{din teorema limită centrală}) \\ &= P(Z < 3) \\ &\approx 0.9987 \quad (\text{din tabelul probabilităților normale sau din R cu } \text{pnorm}(3)) \end{aligned}$$

13) (Mai mult cu teorema limită centrală)

Fie  $X_j$  IQ-ul persoanei  $j$ . Avem  $E(X_j) = 100$  și  $\sigma_{X_j} = 15$ .

Fie  $\bar{X}$  media IQ-urilor a 100 de persoane selectate aleator. Atunci avem

$$E(\bar{X}) = 100 \text{ și } \sigma_{\bar{X}} = 15/\sqrt{100} = 1.5.$$

Problema cere  $P(\bar{X} > 115)$ . Standardizând, obținem

$$P(\bar{X} > 115) \approx P(Z > 10) = 0 \quad (\text{din R, cu } 1-\text{pnorm}(10)).$$

## 3 Introducere în statistică

### 3.1 Scopurile învățării

1. Să știe cele 3 "faze" care se suprapun ale practicii statistice.
2. Să știe ce se înțelege prin termenul *statistică*.

## 3.2 Introducere în statistică

Statistica se ocupă cu date. Vorbind în general, scopul statisticii este de a face inferențe (deducții) bazate pe date. Putem împărți acest proces în 3 faze: colectarea datelor, descrierea datelor și analiza datelor. Aceasta se potrivește cu paradigma metodei științifice. Facem ipoteze despre ce este adevărat, colectăm date în experimente, descriem rezultatele și apoi inferăm din rezultate [puterea dovezilor](#) care privesc ipotezele noastre.

### 3.2.1 Proiectarea experimentelor

Proiectarea unui experiment este crucială pentru a asigura utilitatea datelor colectate. Un experiment proiectat prost va produce date de calitate slabă, din care poate fi imposibil să tragem concluzii utile, valide. "A consulta un statistician după ce un experiment este terminat este adesea doar a-i cere să conducă o examinare post-mortem. El poate spune probabil de ce a murit experimentul." (R. A. Fisher, unul dintre fondatorii statisticii moderne).

### 3.2.2 Statistică descriptivă

Datele neprelucrate iau adesea forma unei masive liste, matrice sau baze de date de etichete și numere. Pentru a da sens datelor, putem calcula [statistici de rezumat](#) ca media, mediana și domeniile intercuartile. Putem de asemenea să vizualizăm datele folosind dispozitive grafice ca histogramele, reprezentări ale împrăstierii și cdf empirică. Aceste metode sunt utile atât pentru comunicarea cât și pentru explorarea datelor pentru a obține o perspectivă în structura lor, de exemplu pentru a recunoaște dacă urmează o repartiție de probabilitate cunoscută.

### 3.2.3 Statistică deductivă (inferențială)

În cele din urmă vrem să tragem concluzii despre lume. Adesea aceasta ia forma specificării unui model statistic pentru procesul aleator din care provin datele. De exemplu, presupunem că datele iau forma unei serii de măsurători a căror eroare credem că urmează o repartiție normală. (Observăm că aceasta este totdeauna o aproximare deoarece știm că eroarea trebuie să aibă o margine în timp ce repartiția normală are domeniul  $\mathbb{R}$ .) Putem apoi folosi datele pentru a produce dovezi pentru sau împotriva acestei ipoteze. De exemplu, presupunând că lungimea gestației are o repartiție  $N(\mu, \sigma^2)$ , folosim datele lungimilor gestației să zicem a 500 de sarcini pentru a trage concluzii despre valorile parametrilor  $\mu$  și  $\sigma$ . Similar, putem modela rezultatul alegerii a 2 candidați printr-o repartiție Bernoulli( $p$ ) și utiliza datele

sondajului pentru a trage concluzii despre valoarea lui  $p$ .

Rareori putem face afirmații definitive despre astfel de parametri deoarece chiar datele vin dintr-un proces aleator (cum ar fi pe cine să sondezi). Mai degrabă, dovezile noastre statistice vor implica totdeauna afirmații probabiliste. Din nefericire, media și publicul larg înțeleg greșit sensul probabilist al afirmațiilor statistice. De fapt, cercetătorii înșiși fac adesea aceeași eroare.

**Exemplul 1.** Pentru a studia eficacitatea unui nou tratament pentru cancer, pacienții sunt recrutați și apoi împărțiți într-un grup experimental și un grup de control. Grupului experimental i se dă noul tratament și grupul de control primește standardul curent de îngrijire. Datele colectate de la pacienți pot include informație demografică, istorie medicală, stadiul inițial al cancerului, progresul cancerului în timp, costul tratamentului și efectul tratamentului asupra mărimii tumorii, ratele de remisie, longevitatea și calitatea vieții. Datele vor fi folosite pentru a face deducții despre eficacitatea noului tratament comparativ cu standardul curent de îngrijire.

Obsevăm că acest studiu va trece prin toate cele 3 faze descrise mai sus. Proiectarea experimentului trebuie să specifice mărimea studiului, cine va fi eligibil să se alăture, cum vor fi alese grupurile experimental și de control, cum vor fi administrate tratamentele, dacă subiecții sau doctorii știu sau nu cine ce tratament primește și precis ce date se colectează, printre alte lucruri. Odată ce datele sunt colectate, trebuie descrise și analizate pentru a determina dacă ele susțin ipoteza că noul tratament este mai (sau mai puțin) eficient decât cel(e) curent(e) și cu cât. Aceste concluzii statistice vor fi formulate ca afirmații precise implicând probabilități.

După cum s-a observat mai sus, interpretarea greșită a înțelesului afirmațiilor statistice este o sursă obișnuită de eroare care a dus la tragedie de mai multe ori.

**Exemplul 2.** În 1999 în Marea Britanie, Sally Clark a fost condamnată pentru uciderea celor 2 copii ai ei după ce fiecare copil a murit la câteva săptămâni după naștere (primul în 1996, al 2-lea în 1998). Condamnarea ei s-a bazat foarte mult pe o utilizare defectuoasă a statisticii pentru a exclude sindromul morții subite infantile. Cu toate că a fost achitată în 2003, a suferit în timpul și după închisoare de probleme psihiatrice foarte serioase și a murit în 2007 de intoxicație cu alcool. Vezi [http://en.wikipedia.org/wiki/Sally\\_Clark](http://en.wikipedia.org/wiki/Sally_Clark).

O discuție despre cazul Sally Clark și alte exemple de intuiție statistică proastă este la adresa <http://www.youtube.com/watch?v=kLmzxRcUTo>.

### 3.2.4 Ce este o statistică?

Dăm o definiție simplă al cărei înțeles este cel mai bine elucidat de exemple.

**Definiție.** O **statistică** este orice se poate calcula din datele colectate.

**Exemplul 3.** Considerăm datele a 1000 de aruncări ale unui zar. Sunt statistici: media celor 1000 de aruncări; numărul de 6-uri; suma pătratelor aruncărilor minus numărul aruncărilor pare. Este greu să ne imaginăm cum am putea utiliza ultimul exemplu, dar el este o statistică. Pe de altă parte, probabilitatea de a da 6 nu este o statistică, indiferent dacă zarul este cu adevărat corect sau nu. Mai degrabă, această probabilitate este o proprietate a zarului (și felului în care îl aruncăm) care poate fi **estimată** folosind datele. O astfel de estimare este dată de statistica "numărul de 6-uri/1000".

**Exemplul 4.** Presupunem că tratăm un grup de pacienți cu cancer cu o nouă procedură și colectăm datele despre cât de mult supraviețuiesc după tratament. Din date putem calcula media timpului de supraviețuire al pacienților din grup. Putem folosi această statistică ca o estimare a timpului de supraviețuire pentru viitorii pacienți cu cancer care urmează noua procedură.

**Exemplul 5.** Presupunem că întrebăm 1000 de rezidenți dacă sprijină sau nu legalizarea marijuanei în Massachusetts. Proporția din cei 1000 care sprijină propunerea este o statistică. Proporția din toți rezidenții din Massachusetts care sprijină propunerea *nu* este o statistică deoarece nu i-am întrebat pe fiecare (observați cuvântul "colectate" din definiție). Mai degrabă, sperăm să tragem o concluzie statistică despre proporția la nivel de stat, bazată pe datele din eșantionul nostru aleator.

Folosim 2 tipuri generale de statistici:

1. **Statistici punctuale:** o singură valoare calculată din date, ca media de selecție  $\bar{x}_n$  sau deviația standard de selecție  $s_n$ .
2. **Statistici de interval:** un interval  $[a, b]$  calculat din date. Acesta este efectiv doar o pereche de statistici punctuale și e adesea prezentat în forma  $\bar{x} \pm s$ .

## 3.3 Importanța teoremei lui Bayes

Teorema lui Bayes este foarte importantă pentru statistica inferențială. Reamintim că teorema lui Bayes ne permite să "inversăm" probabilitățile condiționate. Adică, dacă  $H$  și  $D$  sunt evenimente, atunci teorema lui Bayes spune

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)}.$$

În experimentele științifice pornim cu o ipoteză și colectăm date pentru a testa ipoteza. Adesea  $H :=$  "ipoteza noastră e adevărată" și  $D$  sunt datele

colectate. Cu aceste cuvinte, teorema lui Bayes spune

$$P(\text{ipoteza este adevărată} \mid \text{date}) = \frac{P(\text{date} \mid \text{ipoteza este adevărată})P(\text{ipoteza este adevărată})}{P(\text{date})}$$

Membrul stâng este probabilitatea că ipoteza noastră este adevărată date fiind datele colectate. Aceasta este precis ce am vrea să știm. Când toate probabilitățile din dreapta sunt cunoscute exact, putem calcula probabilitatea din stânga exact. Din păcate, în practică rareori știm valorile exacte ale tuturor probabilităților din dreapta. Statisticienii au dezvoltat un număr de moduri de a face față acestei lipse de cunoștințe și de a face totuși inferențe utile.

#### **Exemplul 6. Test pentru boală**

Presupunem că un test pentru o boală are 1% rată fals pozitivă și 1% rată fals negativă. Presupunem de asemenea că rata bolii în populație este 0.002. În sfârșit, presupunem că o persoană selectată aleator face testul și iese pozitiv. În limbaj de ipoteză și date avem:

Ipoteza:  $H$  = "persoana are boala".

Date:  $D$  = "testul a fost pozitiv".

Ce vrem să știm:  $P(H|D) = P(\text{persoana are boala} \mid \text{un test pozitiv})$ .

În acest exemplu toate probabilitățile din dreapta sunt cunoscute, deci putem folosi teorema lui Bayes pentru a calcula ce vrem să știm.

$$\begin{aligned} P(\text{ipoteză} \mid \text{date}) &= P(\text{persoana are boala} \mid \text{un test pozitiv}) \\ &= P(H|D) \\ &= \frac{P(D|H)P(H)}{P(D)} \\ &= \frac{0.99 \cdot 0.002}{0.99 \cdot 0.002 + 0.01 \cdot 0.998} \\ &= 0.1655518. \end{aligned}$$

Înainte de testul am fi spus că probabilitatea ca persoana să fi avut boala era 0.002. După test vedem că probabilitatea este 0.1655518. Adică, testul pozitiv dă unele dovezi că persoana are boala.