Laborator 1 - solutii

Exercitiul 1 (numarare & combinatorica)

Un alfabet este alcatuit din n litere. Prin "cuvant" intelegem un sir finit de litere din alfabet.

1. Cate cuvinte de lungime k (arbitrara) avem?
2. Cate cuvinte de lungime $k \leq n$ fara repetitie avem?
3. In cate moduri putem rearanja un cuvant de lungime $k \leq n$? (fara repetitie)
4. Cate cuvinte de lungime $k \leq n$, la care nu conteaza ordinea, ale caror litere nu se repeta, avem?
5. O litera ocupa 1 byte. De cata memorie avem nevoie pentru a stoca un vocabular din toate cuvintele (fara repetitii, unde ordinea literelor nu conteaza) formate cu un alfabet de lungime 26?

Solutie:

1. Cazul general: date fiind k multimi finite $A_1, A_2, \ldots A_k$, cardinalul produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, este egal cu produsul cardinalelor multimilor $A_1, A_2 \ldots A_k$.
   Produsul cartezian $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ este egal cu multimea $\{(a_1, a_2, \ldots a_k) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots a_k \in A_k\}$.
   Daca $k = 2$, elementul de pe prima pozitie dintr-un cuplu poate fi ales in $|A_1|$ moduri. Pentru fiecare astfel de element de pe prima pozitie, elementul de pe cea de-a doua pozitie poate fi ales in $|A_2|$ moduri. Deci, elementele produsului $A_1 \times A_2$ fi alese in $|A_1| \times |A_2|$ moduri. Astfel, demonstram prin inductie ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, si orice $A_1, A_2, \ldots, A_n$ multimi finite, $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$.
   Presupunem relatia de mai sus adevarata pentru un $n \in \mathbb{N}$ si o demonstram pentru $n+1$. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ niste multimi finite. Vrem sa numaram cate elemente are multimea $\{(a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots a_n \in A_n, a_{n+1} \in A_{n+1}\}$. Din faptul ca am presupus ca pentru n, elementele $a_1, \ldots a_n$ pot fi alese in $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$ moduri, atunci pentru fiecare astfel de alegere, il putem considera pe a_{n+1} in $|A_{n+1}|$ moduri. Deci, $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n+1}| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_{n+1}|$.
   In cazul de fata, daca alfabetul este multimea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$, atunci pentru un $k \in \mathbb{N}$, avem de calculat cardinalul multimii $\mathcal{A}^k$, care este egal cu n^k conform propozitiei de mai sus.

2. Pentru o multime finita $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}$ oarecare, vrem sa aflam cardinalul multimii $\mathcal{A}_k = \{(x_1, x_2, \ldots x_k) | x_1, x_2, \ldots x_k \in \mathcal{A}, x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq$
   $\neq x_k \neq x_1\}$, unde $k \in \{1, \ldots, n\}$.
   Constrangerea pentru k are loc deoarece nu putem defini $\mathcal{A}_{n+m}$, intrucat pentru a forma un tuplu din aceasta multime ar fi necesare $n+m$ elemente diferite din $\mathcal{A}$.
   Pentru $k = 1$, $|\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}| = n$.

Pentru $k = 2$, primul element dintr-un cuplu (x_1, x_2) din $\mathcal{A}_2$ il putem alege in $|\mathcal{A}| = n$ moduri. Pentru fiecare x_1, exista $n - 1$ valori posibile pentru x_2. Deci,
$|\mathcal{A}_2| = |\mathcal{A}| \cdot (|\mathcal{A}| - 1) = n \cdot (n - 1)$.
Fixand $\mathcal{A} = n$, demonstram prin inductie ca pentru orice $k \in \{1, \dots, n\}$, avem $|\mathcal{A}_k| = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$. Presupunem relatia adevarata pentru un $k \in \{1, 2, \dots n - 1\}$ si o demonstram pentru $k + 1$. Calculam $|\mathcal{A}_{k+1}|$. Din ipoteza de inductie, stim ca primele k elemente ale unui tuplu $(x_1, \dots x_k, x_{k+1}) \in \mathcal{A}_{k+1}$ se aleg in $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$. Pentru fiecare astfel de alegere, elementul x_{k+1} poate fi ales in $n - k$ moduri deoarece trebuie sa fie diferit de elementele de pe primele k pozitii. Deci, $|\mathcal{A}_{k+1}| = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)$. Deci, am demonstrat prin inductie ca pentru orice multime finita $\mathcal{A}$ si pentru orice $k \in \{1, 2, \dots |\mathcal{A}|\}$, numarul de cuvinte de lungime k care nu contin repetitii este $|\mathcal{A}| \cdot (|\mathcal{A}| - 1) \cdot \dots \cdot (|\mathcal{A}| - k + 1) = \frac{|\mathcal{A}|!}{(|\mathcal{A}|-k)!}$.
Notatie: $\frac{n!}{(n-k)!} = \mathcal{A}_n^k$.

3. Pentru o multime finita $\mathcal{A} = \{a_1, \dots a_k\}$, cu $k \in \mathbb{N}$ oarecare, vrem sa aflam cardinalul multimii $\mathcal{A}_k = \{(x_1, \dots x_k) | x_1, \dots x_k \in \mathcal{A}, x_1 \neq \dots \neq x_k \neq x_1\}$. Conform punctului anterior, am determinat aceasta valoare ca fiind egala cu $\frac{k!}{0!} = k!$.

4. Vrem pentru o multime finita $\mathcal{A} = \{a_1, \dots a_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}$ sa aflam cardinalul multimii $\mathcal{C}_k = \{\{x_1, \dots x_k\} | x_1, \dots x_k \in \mathcal{A}\}$. Cunoastem $|\mathcal{A}_k|$. Pentru fiecare multime $\{x_1, \dots x_k\} \in \mathcal{C}_k$, conform punctului anterior, avem $k!$ tupluri formate din toate elementele din aceasta, i.e. $k!$ elemente din $\mathcal{A}_k$. Deci, $|C_k| = \frac{|\mathcal{A}_k|}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.
Notatie: $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \mathcal{C}_n^k = \binom{n}{k}$. Observam ca $\mathcal{C}_n^k = \mathcal{C}_n^{n-k}$.

5. Pentru un cuvant de lungime k fara repetitii unde ordinea nu conteaza avem nevoie de k octeti. Avem in total $\mathcal{C}_n^k$ astfel de cuvinte deci toate cuvintele de lungime k se stocheaza pe $k \cdot \mathcal{C}_n^k$ octeti.
Toate cuvintele se stocheaza pe $S = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathcal{C}_n^k$ octeti.

   Stiind ca $\mathcal{C}_n^k = \mathcal{C}_n^{n-k}$, avem ca $S = \sum_{k=1}^{[n/2]} n \cdot \mathcal{C}_n^k = n \cdot \sum_{k=1}^{[n/2]} \mathcal{C}_n^k$. Tot datorita $\mathcal{C}_n^k = \mathcal{C}_n^{n-k}$, avem ca $\sum_{k=1}^{[n/2]} \mathcal{C}_n^k = 1/2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathcal{C}_n^k$. Ultima suma este egala cu numarul tuturor submultimilor unei multimi de cardinal n, valoare pe care o determinam prin numarare. Fiecare submultime finita $P = \{x_1, \dots x_k\} \subseteq \mathcal{A} = \{a_1, \dots a_n\}$ poate fi reprezentata ca un tuplu de lungime n format numai din 0 si 1, definit astfel: pe pozitia i avem valoarea 1 daca si numai daca $a_i \in P$, 0 altfel. De asemenea, fiecarui tuplu din $\{0, 1\}^n$ ii corespunde cate o submultime din $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ (multimea partilor lui $\mathcal{A}$). Deci, numarul de submultimi ale unei multimi cu n elemente este cardinalul multimii $\{0, 1\}^n$ care este egal cu 2^n.
Astfel, $S = n \cdot 2^{n-1}$.

Exercitiul 2

Aruncam cu 2 zaruri.

1. Dati exemplu de un experiment posibil;
2. Definiti spatiul total Ω;
3. Descrieti urmatoarele evenimente:
   - suma e 7;
   - suma e 1;
   - suma e mai mica decat 13;
   - primul zar e par;

Solutie:
Multimea tuturor experimentelor este $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Evenimentul "suma e 7" este definit de submultimea $A = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$.
Evenimentul "suma e 1" este $\varnothing$.
Evenimentul "suma e mai mica decat 13" este intreaga multime Ω.
Evenimentul "primul zar e par" este multimea $\{2, 4, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Exercitiul 3

Fie $\Omega = \mathbb{N}$ si $\mathscr{C} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$ si fie $A_0 = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| < \infty \text{ sau } |A^C| < \infty\}$. Demonstrati:

1. A_0 este algebra (adica exact definitia de la $\sigma-$algebra doar ca e inchisa doar la reuniuni finite);
2. $A_0 \supseteq \mathscr{C}$;
3. daca $\mathcal{A} \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ este algebra si $\mathcal{A} \supseteq \mathscr{C}$, atunci $\mathcal{A} \supseteq A_0$ (i.e. $A_0 = \mathcal{A}(\mathscr{C})$).

Solutie:

1. Demonstram:
   (a) $A \in A_0 \Rightarrow A^C \in A_0$;
   $A \in A_0 \Leftrightarrow |A| < \infty$ sau $|A^C| < \infty$.
      i. $A = (A^C)^C$, deci $|A| < \infty \Leftrightarrow |(A^C)^C| < \infty \Leftrightarrow A^C \in A_0$.
      ii. A^C e finita deci apartine lui A_0.

(b) $A, B \in A_0 \Rightarrow A \cup B \in A_0$;
Avem 3 cazuri:

i. Ambele multimi sunt finite; atunci reuniunea lor e tot finita, deci $A \cup B \in A_0$;
ii. O multime este finita, cealalta nu insa are complementara finita; presupunem A finita si B^C finita; $A \cup B$ nu are cum sa fie finita pentru ca B nu este finita (daca ar fi ar insemna ca $\mathbb{N}$ este finita, absurd) si $B \subseteq A \cup B$ insa il analizam pe $(A \cup B)^C$. Acesta este egal cu $A^C \cap B^C \subseteq B^C$, care este finita. Astfel, $A \cup B \in A_0$;
iii. Ambele multimi au complementara finita; atunci $(A \cup B)^C$ este finita din acelasi argument ca mai sus;

2. Fie $\{n\} \in \mathscr{C}$ care este finita deci apartine lui A_0. Astfel, orice multime din $\mathscr{C}$ este si in A_0 ceea ce este echivalent cu $A_0 \supseteq \mathscr{C}$.

3. Prin acest punct vrem sa demonstram ca orice algebra care il include pe $\mathscr{C}$ il include si pe A_0, pentru a finaliza demonstratia faptului ca A_0 este cea mai mica algebra care il include pe $\mathscr{C}$, i.e A_0 este algebra generata de $\mathscr{C}$.
Fie $\mathcal{A} \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ o algebra care il include pe $\mathscr{C}$. Fie $A \in A_0$; vrem sa demonstram ca $A \in \mathcal{A}$.

   - Daca A e finita atunci $A = \{a_1, \dots a_k\}, a_1, \dots a_k \in \mathbb{N}$. A se poate scrie ca reuniune finita de multimi din $\mathscr{C}$: $A = \{a_1\} \cup \dots \cup \{a_k\}$. Pentru ca $\mathscr{C} \subset \mathcal{A}$ si $\mathcal{A}$ este algebra, atunci si $A \in \mathcal{A}$, pentru ca este o reuniune finita de multimi din A.
   - Daca complementara lui A este finita, atunci conform argumentului de mai sus, $A^C \in \mathcal{A}$. Pentru ca $\mathcal{A}$ este algebra, atunci si $A \in \mathcal{A}$.

   In concluzie, $A_0 \subseteq \mathcal{A}$, pentru orice algebra $\mathcal{A}$ ca mai sus ceea ce implica faptul ca multimea formata din submultimi finite ale lui $\mathbb{N}$ sau care au complementara astfel este algebra generata de $\mathscr{C}$.

Exercitiul 5

1. Un coleg arunca cu un zar: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Colegul are acces la informatii de tipul $\{1\}, \{2\}, \dots, \{6\}$. Definiti probabilitatea ca un eveniment la care are acces sa se intample;

2. Colegul arunca de 100 de ori cu un zar (probabil masluit) si la fiecare aruncare ne spune daca zarul e par si daca e divizibil cu 3. Definiti probabilitatea definita pe $\sigma -$ algebra la care avem acces.

3. La primele 100 de aruncari colegul ne spune daca zarul e par si la urmatoarele 100 ne spune daca este divizibil cu 3; Aceeasi cerinta ca la punctul 2;

Solutie:

1. Multimea experimentelor este $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Colegul are acces la multimea evenimentelor $\mathscr{C} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}\}$, deci la algebra generata de aceasta care este $\mathcal{A}(\mathscr{C}) = \mathscr{P}(\Omega)$. Daca vrem sa definim $\mathbb{P} : \Omega \to [0, 1]$ este suficient sa definim $\mathbb{P}$ pe $\mathscr{C}$, si se extinde astfel: $\mathbb{P}(P) = \sum_{i \in P} \mathbb{P}(\{i\})$, pentru orice $P \in \mathscr{P}(\Omega)$. Deci, pentru $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, definim $\mathbb{P}(\{i\}) = p_i$, unde $p_1, \ldots p_6 \in [0, 1], p_1 + \cdots + p_6 = 1$.

2. Multimea experimentelor este tot $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (aruncarile nu depind in niciun fel unele de altele; ne intereseaza doar rezultatul unei aruncari). Avem acces la urmatoarele evenimente: $A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 6\}$, deci la algebra generata de ele, $\mathcal{A}(A, B)$. Sa presupunem ca dupa cele 100 de aruncari am obtinut rezultatele $R = \{a_1, \ldots a_{100}\}$, $a_1 \ldots a_{100} \in \Omega = \{1, \ldots 6\}$. Atunci, $\mathbb{P}(A) = \frac{|\{x \in R | x \in A\}|}{100}, \mathbb{P}(B) = \frac{|\{x \in R | x \in B\}|}{100}$.
   Ne intereseaza sa vedem probabilitatile pe atomii lui A si B: $C_1 = A \cap B = \{6\}, C_2 = A \setminus B = \{2, 4\}, C_3 = B \setminus A = \{3\}, C_4 = \Omega \setminus (A \cup B) = \{1, 5\}$. Noi stim la fiecare aruncare (notam rezultatul cu x) daca $x \in A$ si daca $x \in B$, deci stim daca $x \in A \cap B$, si daca $x \in A \setminus B$, si daca $x \in B \setminus A$, si daca $x \in \Omega \setminus (A \cup B)$.
   Deci putem defini $\mathbb{P} : \{C_1, C_2, C_3, C_4\} \longrightarrow [0, 1]$ cunoscand R astfel: pentru orice $i \in \{1, \ldots 4\}, \mathbb{P}(C_i) = \frac{|\{x \in R | x \in C_i\}|}{100}$. Pentru ca orice $E \in \mathcal{A}(\{A, B\}) = \mathcal{A}(\{C_1, C_2, C_3, C_4\})$ se scrie in mod unic ca reuniune de multimi din $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, atunci $\mathbb{P}$ se extinde in mod unic la $\mathcal{A}(\{C_1, C_2, C_3, C_4\})$. Mai mult, observam ca pentru orice $E \in \mathcal{A}(\{C_1, C_2, C_3, C_4\})$, avem ca $\mathbb{P}(E) = \frac{|\{x \in R | x \in E\}|}{100}$ (pentru C_1, C_2 disjuncte, $\frac{|\{x \in R | x \in C_1 \cup C_2\}|}{100} = \frac{|\{x \in R | x \in C_1\}|}{100} + \frac{|\{x \in R | x \in C_2\}|}{100}$).
   Vrem in continuare sa calculam $\mathbb{P}(C_1), \mathbb{P}(C_2), \mathbb{P}(C_3), \mathbb{P}(C_4)$ in functie de $\mathbb{P}(A)$ si $\mathbb{P}(B)$. Observam ca daca incercam acest lucru, ne lovim de fiecare data de $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(C_1)$. Daca atunci cand facem aruncarile, calculam $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$, obtinem restul de probabilitati ale atomilor, deci intreaga probabilitate pe $\mathcal{A}(\{A, B\})$.
   Notam $p_1 = \mathbb{P}(C_1), p_2 = \mathbb{P}(C_2), p_3 = \mathbb{P}(C_3), p_4 = \mathbb{P}(C_4)$. Cunoscandu-l pe p_1, rezolvam sistemul:
   $$\begin{cases} p_1 + p_2 = \mathbb{P}(A) \\ p_1 + p_3 = \mathbb{P}(B) \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$
   care este echivalent cu:
   $$\begin{cases} p_2 = \mathbb{P}(A) - p_1 \\ p_3 = \mathbb{P}(B) - p_1 \\ p_4 = p_1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + 1 \end{cases}$$
   In concluzie, in acest caz, putem defini o probabilitate in mod unic pe $\mathcal{A}(\{A, B\})$ cunoscand probabilitatile calculate pentru A, B, $A \cap B$.

3. Pentru primele 100 de aruncari cu banul, avem acces numai la multimea A, implicit la $\mathcal{A}(\{A\}) = \{\varnothing, A, \Omega \setminus A, \Omega\}$. Dupa celelalte 100 de aruncari, avem acces la multimea B,

deci la $\mathcal{A}(\{B\}) = \{\varnothing, B, \Omega \setminus B, \Omega\}$.
Sa presupunem ca avem dupa primele 100 de aruncari rezultatele $R_1 = \{a_1, \dots a_{100}\}$ si dupa urmatoarele 100 obtinem $R_2 = \{b_1, \dots b_{100}\}$. Deci, stim in primul caz $\mathbb{P}(A) = \frac{|\{x \in R_1 | x \in A\}|}{100}$ si in al doilea $\mathbb{P}(B) = \frac{|\{x \in R_2 | x \in B\}|}{100}$. Observam ca de aici nu poate rezulta $\mathbb{P}(A \cap B)$ (si nici un alt atom) spre deosebire de punctul anterior deoarece rezultatele nu fac parte din aceeasi multime.
Astfel, vrem sa definim o probabilitate $\mathbb{P}$ pe $\mathcal{A}(\{A, B\}) = \mathcal{A}\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ cu proprietatea ca $\mathbb{P}(A) = \frac{|\{x \in R_1 | x \in A\}|}{100}$ si $\mathbb{P}(B) = \frac{|\{x \in R_2 | x \in B\}|}{100}$. Stim ca in momentul in care aflam $p_1 = \mathbb{P}(C_1), p_2 = \mathbb{P}(C_2), p_3 = \mathbb{P}(C_3), p_4 = \mathbb{P}(C_4)$, $\mathbb{P}$ se extinde in mod unic la $\mathcal{A}(\{A, B\})$.
Deci, cunoscand numai $\mathbb{P}(A)$ si $\mathbb{P}(B)$, rezolvam sistemul:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = \mathbb{P}(A) \\ p_1 + p_3 = \mathbb{P}(B) \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

care este echivalent cu:

$$\begin{cases} p_2 = \mathbb{P}(A) - p_1 \\ p_3 = \mathbb{P}(B) - p_1 \\ p_4 = p_1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + 1 \end{cases}$$

Spre deosebire de cazul anterior, p_1 este necunoscut. Sistemul are solutie unica pentru p_1 fixat, dar p_1 poate lua orice valoare intre 0 si 1 deci avem o infinitate de solutii.

Concluzia exercitiului:

- Avem 2 multimi $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ si 2 valori $p_A, p_B \in [0, 1]$. Vrem sa construim o probabilitate definita pe $\mathcal{A}(\{A, B\})$ cu $\mathbb{P}(A) = p_A, \mathbb{P}(B) = p_B$.

- In primul caz, aveam acces la A si B in cursul aceleiasi observatii, deci si la algebra generata de ele. Avand acces la $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap B)$, am putut defini in mod unic $\mathbb{P}$ pe $\mathcal{A}(\{A, B\})$.

- In cel de-al doilea caz, nu aveam acces la A si B in cadrul aceleiasi observatii. Vedem ca daca am fi avut totusi acces la $A \cap B$, am fi putut determina in mod unic $\mathbb{P}$. Altfel, probabilitatea se poate defini intr-o infinitate de moduri.

Rezultat teoretic: Fie $\mathscr{C} \in \mathscr{P}(\Omega)$. Spunem ca $\mathscr{C}$ este un π-sistem daca pentru orice $A, B \in \mathscr{C}$, avem $A \cap B \in \mathscr{C}$.

Daca $\mathscr{C}$ este un π-sistem, atunci orice probabilitate $\mathbb{P}$ definita pe $\mathscr{C}$ de extinde in mod unic la o probabilitate $\mathbb{P} : \sigma(\mathscr{C}) \longrightarrow [0, 1]$. In cazul nostru, $\mathscr{C} = \{\{2, 4, 6\}, \{3, 6\}\}$ nu este un π-sistem.

Exercitiul 6

Un joc presupune 3 zaruri: un zar rosu, un zar verde si un zar negru; zarul rosu are fetele $1, 4, 4, 4, 4, 4$, zarul verde are fetele $3, 3, 3, 3, 3, 6$ si cel negru, $2, 2, 2, 5, 5, 5$. Sunt 2 jucatori implicati, iar regula este: un jucator alege un zar iar al doilea alege din celelalte 2. Ambii jucatori arunca apoi cu zarurile alese si castiga cel caruia ii pica un numar mai mare. Care este mai privilegiat? Cel care alege primul sau al doilea? De ce?

Solutie:

Multimea experimentelor este $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si avem definite 3 probabilitati pe $\mathscr{C} = \{\{1\}, \ldots, \{6\}\}$:

- $R(\{1\}) = \frac{1}{6}, R(\{4\}) = \frac{5}{6}$.
- $V(\{3\}) = \frac{5}{6}, V(\{6\}) = \frac{1}{6}$.
- $N(\{2\}) = \frac{1}{2}, N(\{5\}) = \frac{1}{2}$.

Avem 2 jucatori, fiecare foloseste cate o probabilitate diferita; avem 3 cazuri:

- Daca primul foloseste R, al doilea poate alege dintre V si N asa incat in momentul in care se arunca cu zarul, sa fie sanse mai mari de reusita decat ale primului?
- Daca primul foloseste V, aceeasi intrebare ptr N si R;
- Daca primul foloseste N, aceeasi intrebare ptr R si V;

1. Suntem in primul caz: primul alege R;
   - Al doilea alege V; vrem sa vedem acum care este sansa ca la aruncarea lui V sa obtinem o fata mai mare decat la aruncarea cu R;
     Acum, $\Omega = \{1, \ldots 6\} \times \{1, \ldots 6\}$; calculam $P_{RV} = \frac{|\{(x,y)|x>y\}|}{36}$; Pentru ca $2, 3, 5, 6$ au probabilitate 0 de a fi alese cf R, $x \in \{1, 4\}$; analog, $y \in \{3, 6\}$. Deci, $P_{RV} = \frac{\#(4,3)}{36} = \frac{25}{36} > \frac{1}{2}$. Deci, daca alege V are o sansa mare de a castiga.
   - Alege N; calculam $P_{RN} = \frac{|\{(x,y)|x>y\}|}{36}$; y acum va fi in $\{2, 5\}$, deci $P_{RN} = \frac{\#(4,2)}{36} = \frac{15}{36} < \frac{1}{2}$. Deci, al doilea va sti ca trebuie sa aleaga V;
2. Primul alege V; Nu mai este cazul sa verificam ce se intampla daca al doilea alege rosu deoarece stim ca $P_{VR} = 1 - P_{RV}$ din definitie; Vedem pe cazul in care se alege N, si calculam $P_{VN} = \frac{\#(3,2)+\#(6,2)+\#(6,5))}{36} = \frac{15+3+3}{36} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$. Deci, al doilea va sti ca trebuie sa aleaga negru;

3. Daca primul alege N, din calculele de mai sus stim ca $P_{NR} = 1 - P_{RN} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$ si $P_{NV} = 1 - P_{VN} < \frac{1}{2}$. Deci, al doilea va alege rosu;

In concluzie, orice probabilitate ar alege primul jucator, cel de-al doilea va sti ca din celelalte 2 se poate alege una asa incat sansa de reusita sa fie mai mare de 1/2.

Simularea fenomenului:
Facem cate 10000 seturi a cate 3 aruncari cu zarul; la fiecare set numaram cate $R > V, V > N, N > R$ au fost pana atunci. Aceste valori impartite la 10000 trebuie sa se apropie de ce s-a gasit mai sus.

```python
import numpy as np

def count_greater(a, b):
  ctr = 0
  for i in range(len(a)):
    if a[i] > b[i]:
      ctr += 1

  return ctr

def dices(Nr):

  R = [1, 4, 4, 4, 4, 4]
  V = [3, 3, 3, 3, 3, 6]
  N = [2, 2, 2, 5, 5, 5]
  r = []
  v = []
  n = []
  for i in range(Nr):
    r.append(R[np.random.randint(6)])
    v.append(V[np.random.randint(6)])
    n.append(N[np.random.randint(6)])

  p_r_bigger_v = count_greater(r, v)/Nr
  p_v_bigger_n = count_greater(v, n)/Nr
  p_n_bigger_r = count_greater(n, r)/Nr

def main():
  dices(10000)
  print("25/36 " + str(25/36))
  print("7/12 " + str(7/12))
```

Outputul:

```
0.6877
0.5785
0.5861
25/36 0.6944444444444444
7/12 0.5833333333333334
```