

Aplicație

Flux maxim \rightarrow cuplaj maxim
în grafuri bipartite

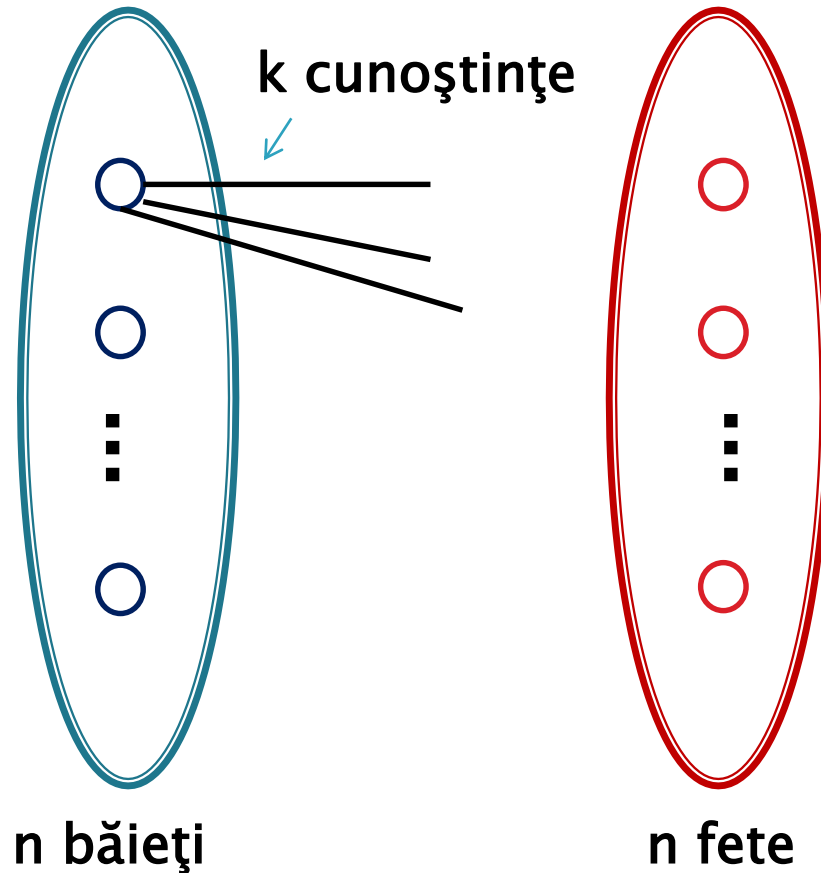
Cuplaje

Repere istorice. Aplicații

- ▶ **Problema seratei (perechilor) – sec XIX**
 - n băieți, n fete
 - Un băiat cunoaște exact k fete
 - O fată cunoaște exact k băieți

Repere istorice. Aplicații

► Problema seratei (perechilor)



Repere istorice. Aplicații

► Problema seratei (perechilor) – sec XIX

- ❖ Se poate organiza o repriză de dans astfel încât fiecare participant să danseze cu o cunoștință a sa?

Repere istorice. Aplicații

► Problema seratei (perechilor) – sec XIX

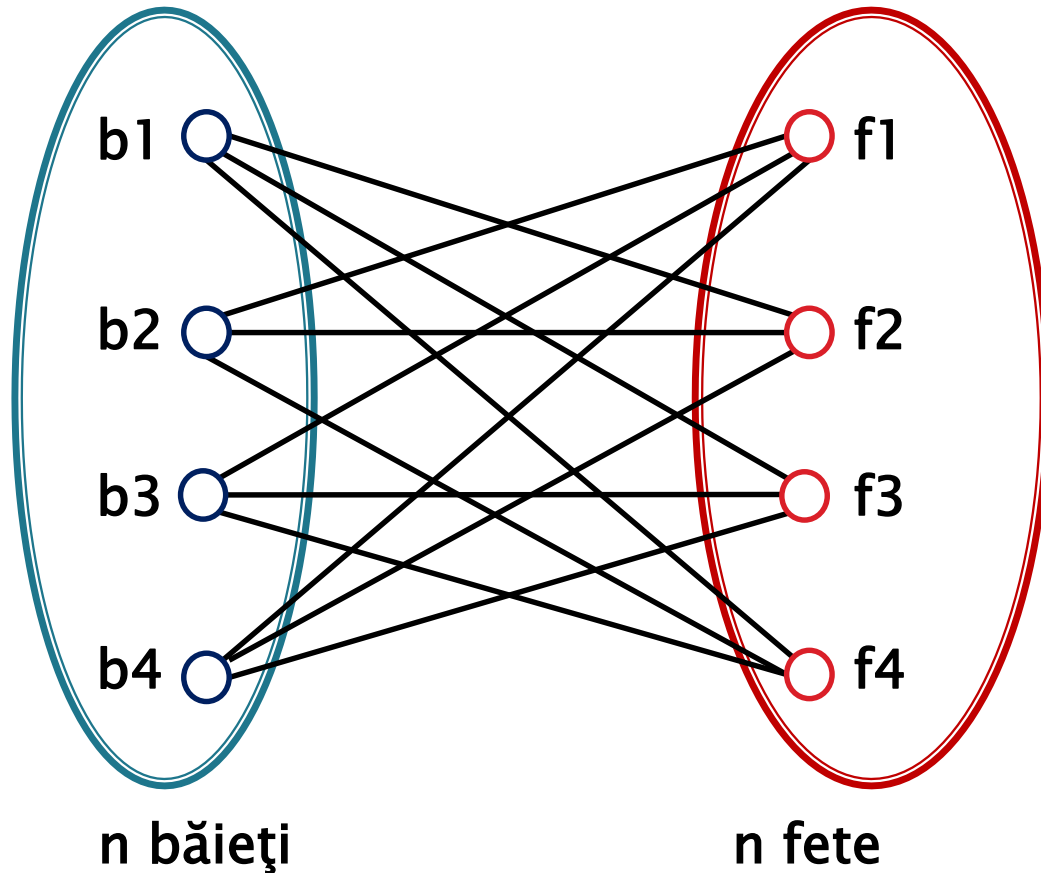
- ❖ Se poate organiza o repriză de dans astfel încât fiecare participant să danseze cu o cunoștință a sa?
- ❖ Se pot organiza k reprize de dans în care fiecare participant să danseze câte un dans cu fiecare cunoștință a sa?

Repere istorice. Aplicații

► Problema seratei (perechilor) – sec XIX

$n=4$

$k=3$



Repere istorice. Aplicații

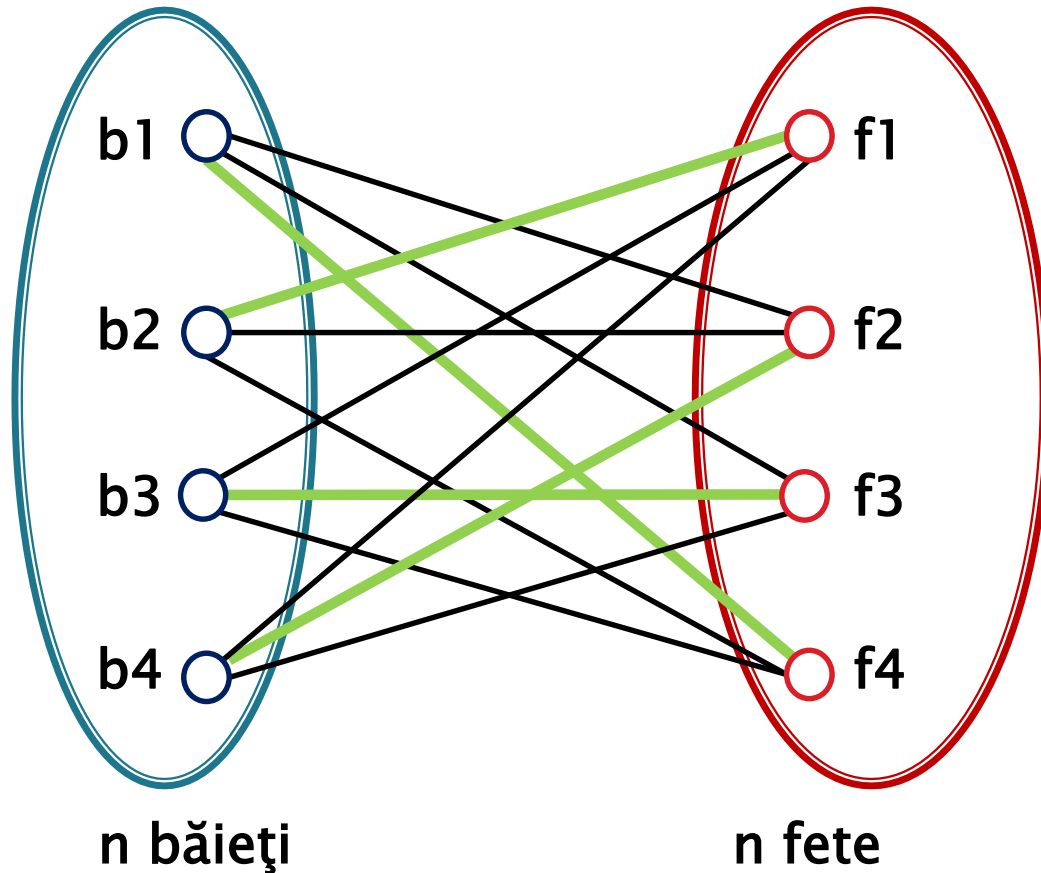
- ▶ O repriză de dans

b1,f4

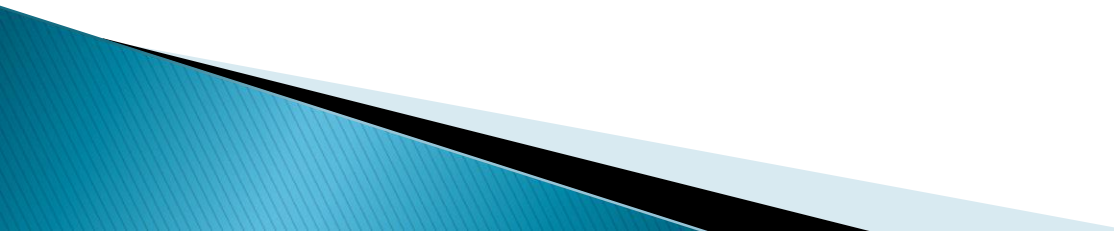
b2,f1

b3,f3

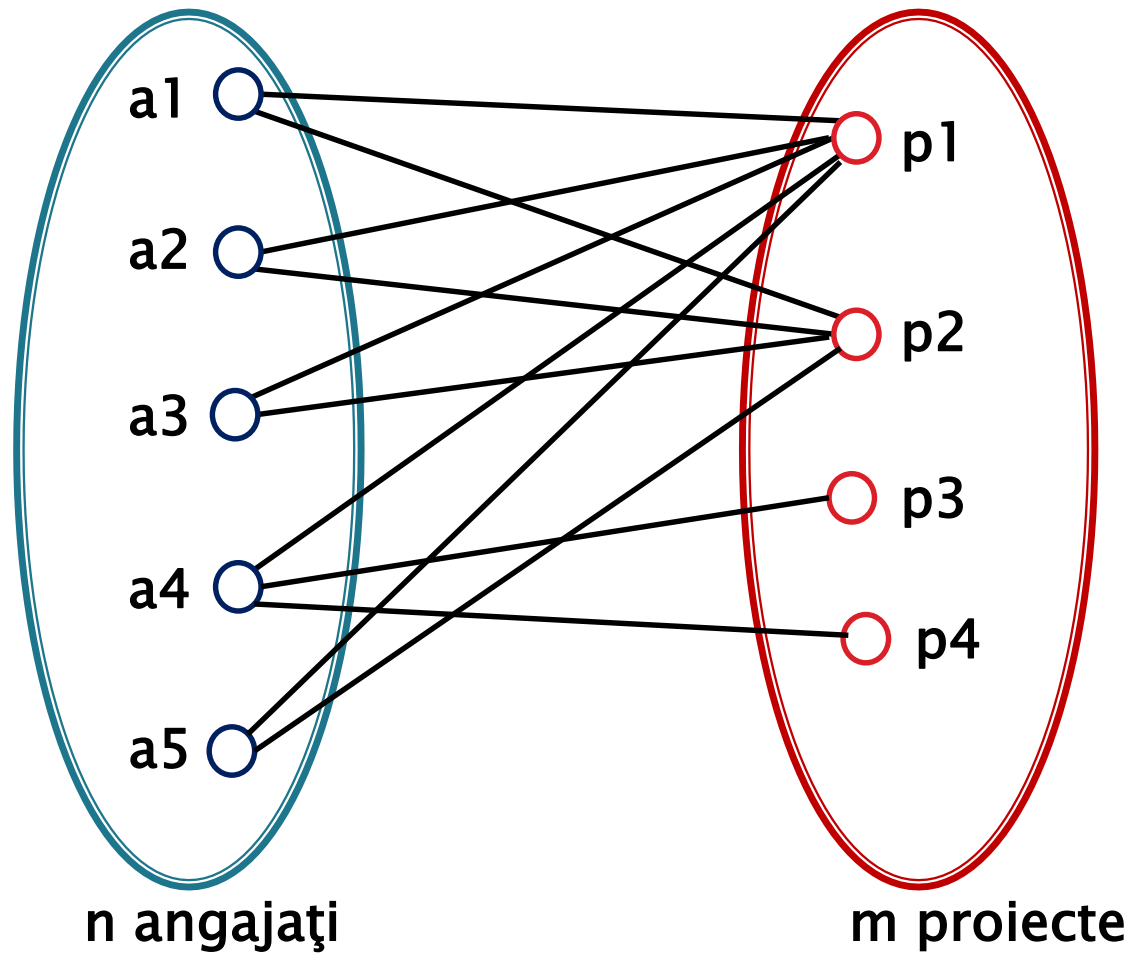
b4,f2



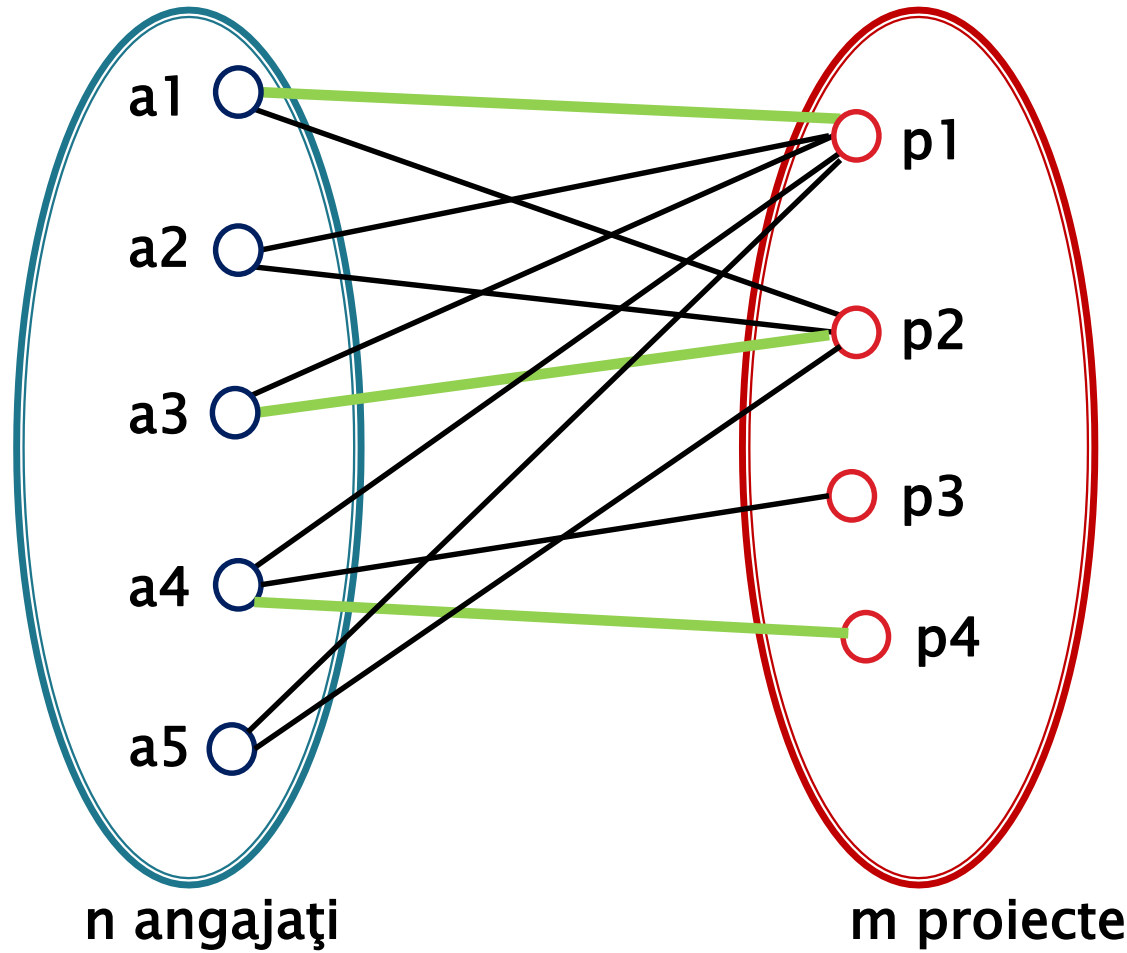
Repere istorice. Aplicații

- ▶ **Organizare de competiții**
 - ▶ **Probleme de repartiție**
 - lucrători – locuri de muncă
 - profesori – examene /conferințe
 - **Problema orarului**
- 

Alte aplicații

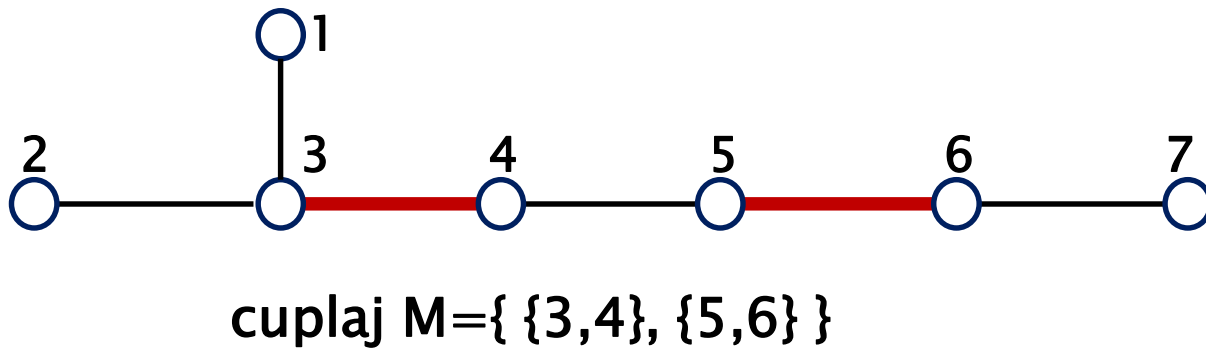


Alte aplicații



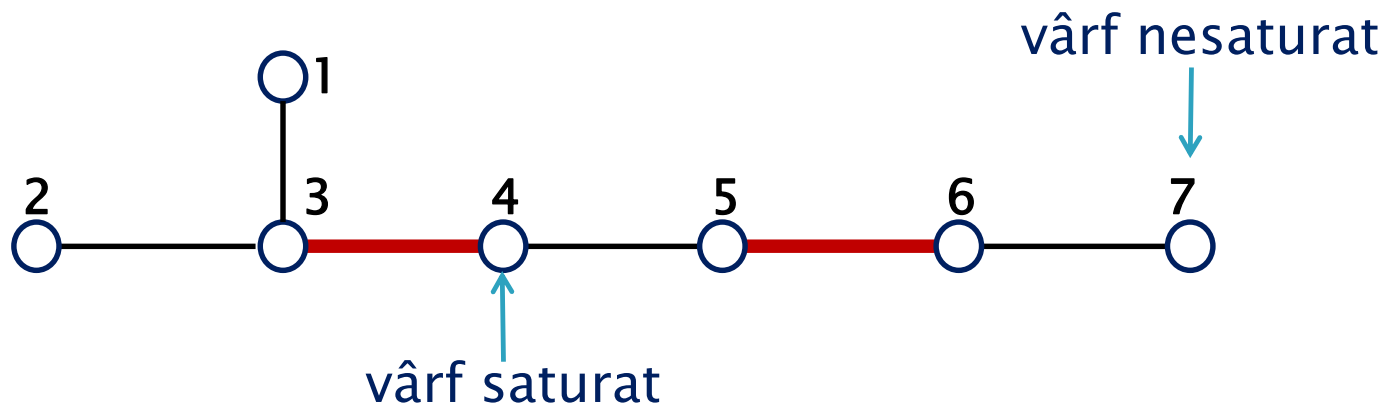
Fie $G = (V, E)$ un graf și $M \subseteq E$.

- ▶ M s.n **cuplaj** dacă orice două muchii din M sunt neadiacente



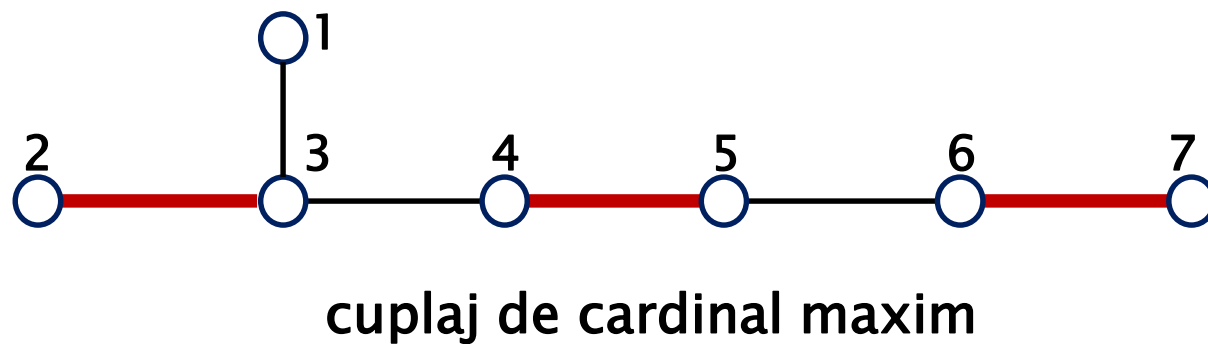
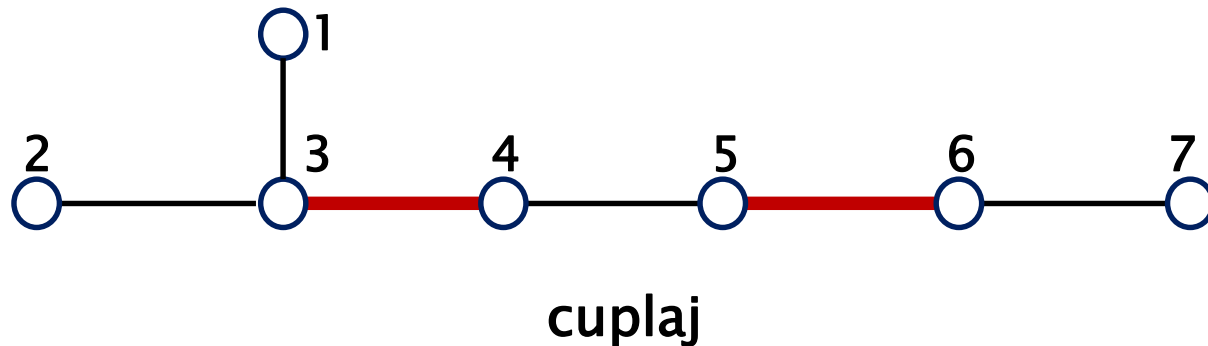
Fie $G = (V, E)$ un graf și $M \subseteq E$.

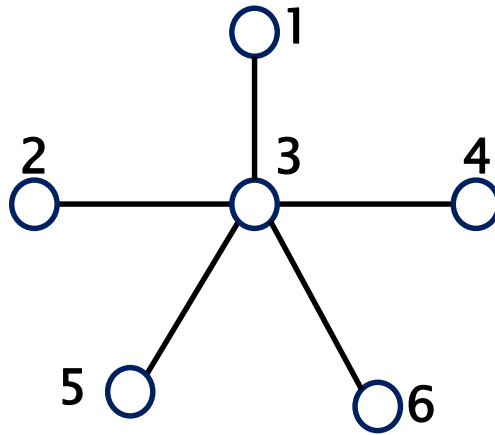
- ▶ M s.n **cuplaj** dacă orice două muchii din M sunt neadiacente
- ▶ $V(M)$ = mulțimea vârfurilor **M -saturate**
- ▶ $V(G) - V(M)$ = mulțimea vârfurilor **M -nesaturate**



- ▶ Un cuplaj M^* s.n **cuplaj de cardinal maxim** (**cuplaj maxim**):

$$|M^*| \geq |M|, \forall M \subseteq E \text{ cuplaj}$$





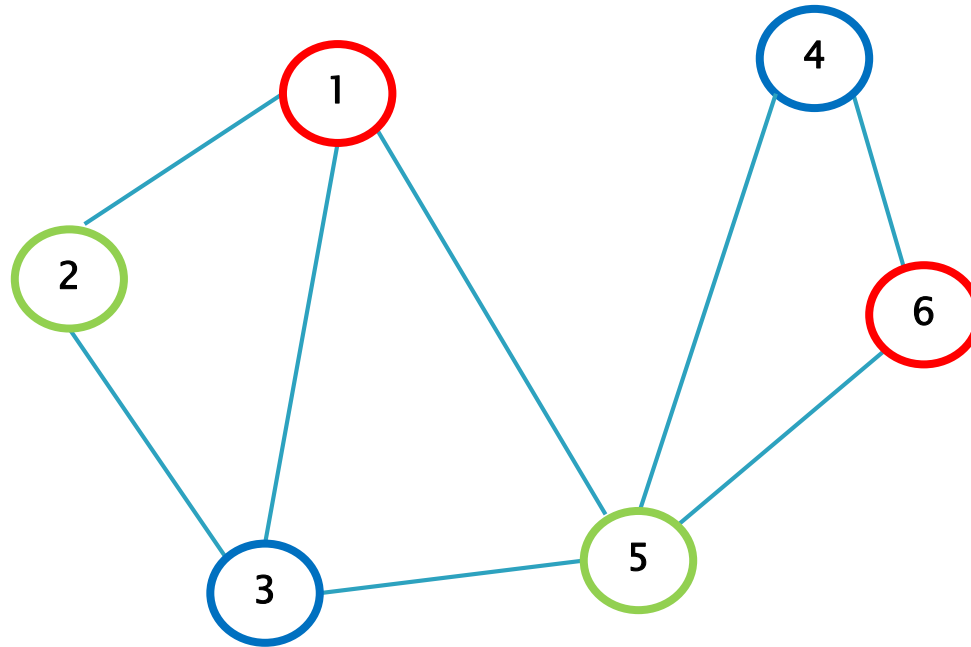
cuplaj de cardinal maxim ?

Grafuri bipartite

Colorări ale grafurilor

- ▶ $G = (V, E)$ graf neorientat
 - $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ s.n. p-colorare a lui G
 - $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ cu $c(x) \neq c(y) \ \forall xy \in E$ s.n. p-colorare proprie a lui G
 - G s.n. p-colorabil dacă admite o p-colorare proprie

Colorări ale grafurilor



3-colorabil, dar nu și 2-colorabil (!)

Graf bipartit

- ▶ $G = (V, E)$ graf neorientat s.n. **bipartit** \Leftrightarrow există o partiție a lui V în două submulțimi V_1, V_2 (**bipartiție**):

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2

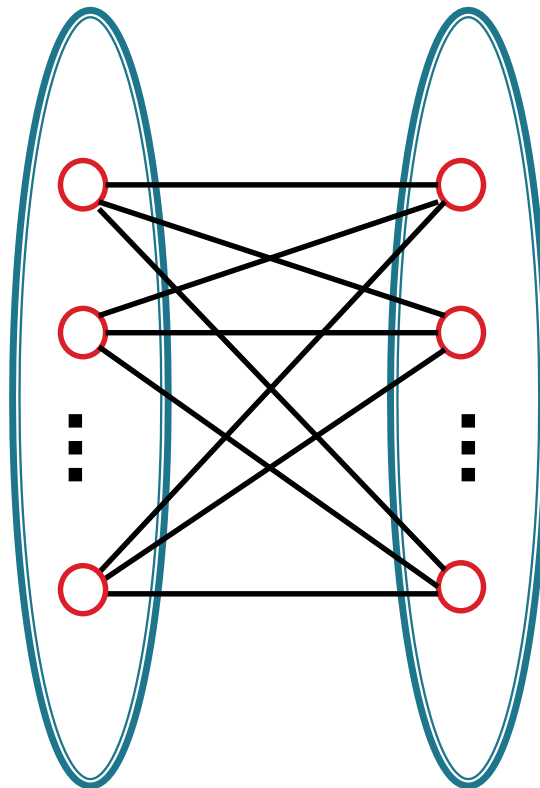
- ▶ Notăm $G = (V_1 \dot{\cup} V_2, E)$

Graf bipartit

- ▶ $G = (V, E)$ s.n **bipartit complet** \Leftrightarrow

este bipartit și $E = \{xy \mid x \in V_1, y \in V_2\}$

- ▶ Notăm cu $K_{p,q}$ dacă $p = |V_1|$ și $q = |V_2|$



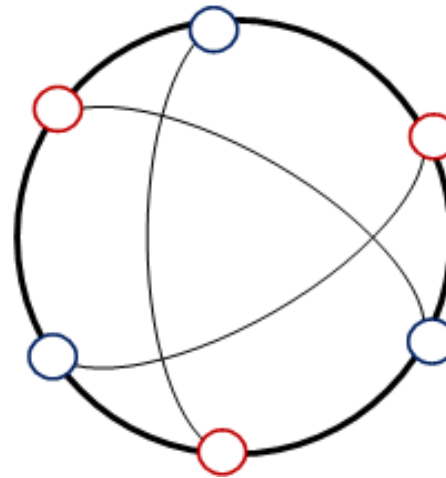
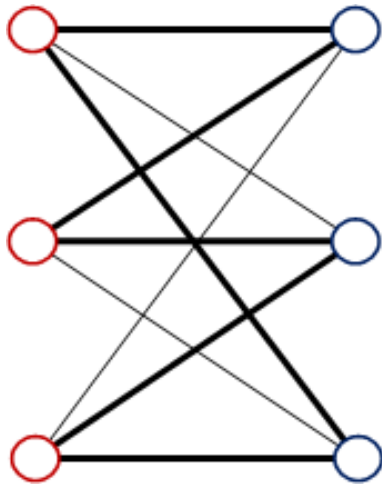
Graf bipartit

- ▶ $G = (V, E)$ s.n **bipartit complet** \Leftrightarrow

este bipartit și $E = \{xy \mid x \in V_1, y \in V_2\}$

- ▶ Notăm cu $K_{p,q}$ dacă $p = |V_1|$ și $q = |V_2|$

- ▶ $K_{3,3}$



Graf bipartit

Observație

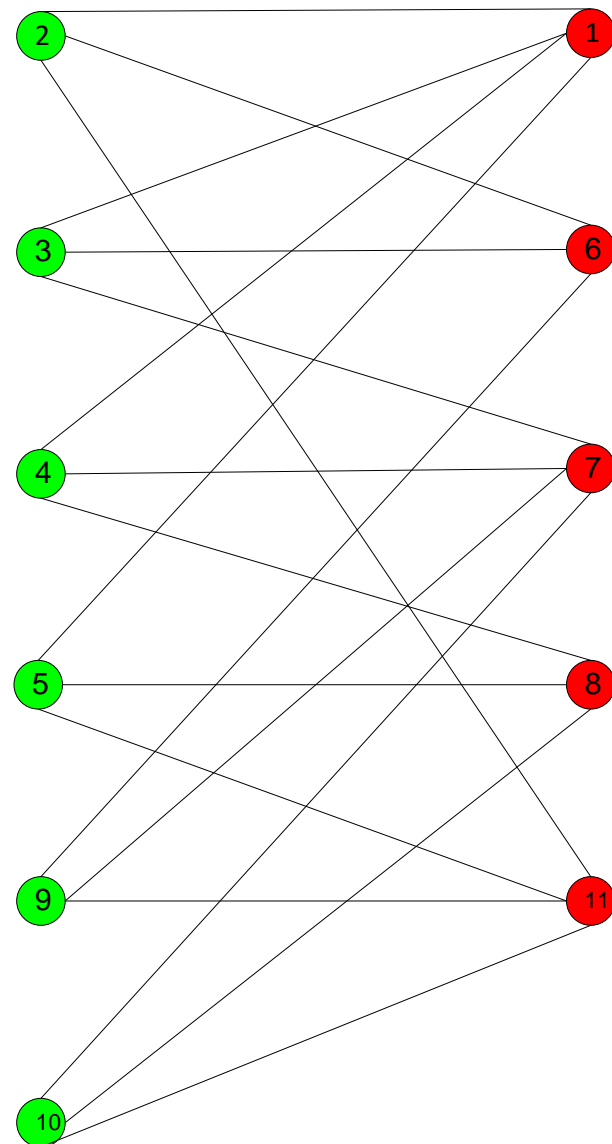
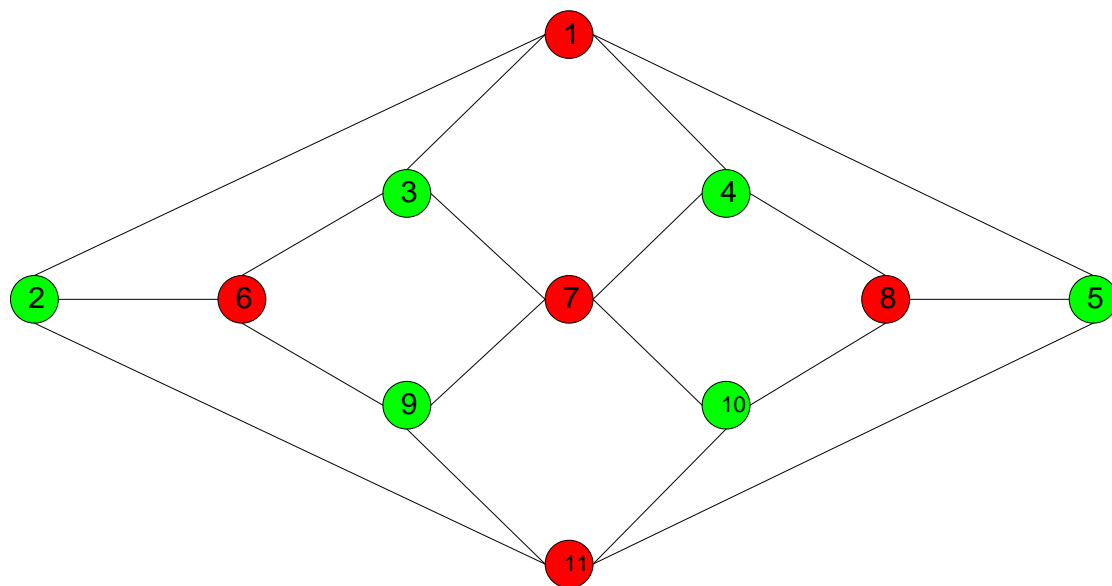
► $G = (V, E)$ **bipartit** \Leftrightarrow

există o 2-colorare proprie a vârfurilor (**bicolorare**):

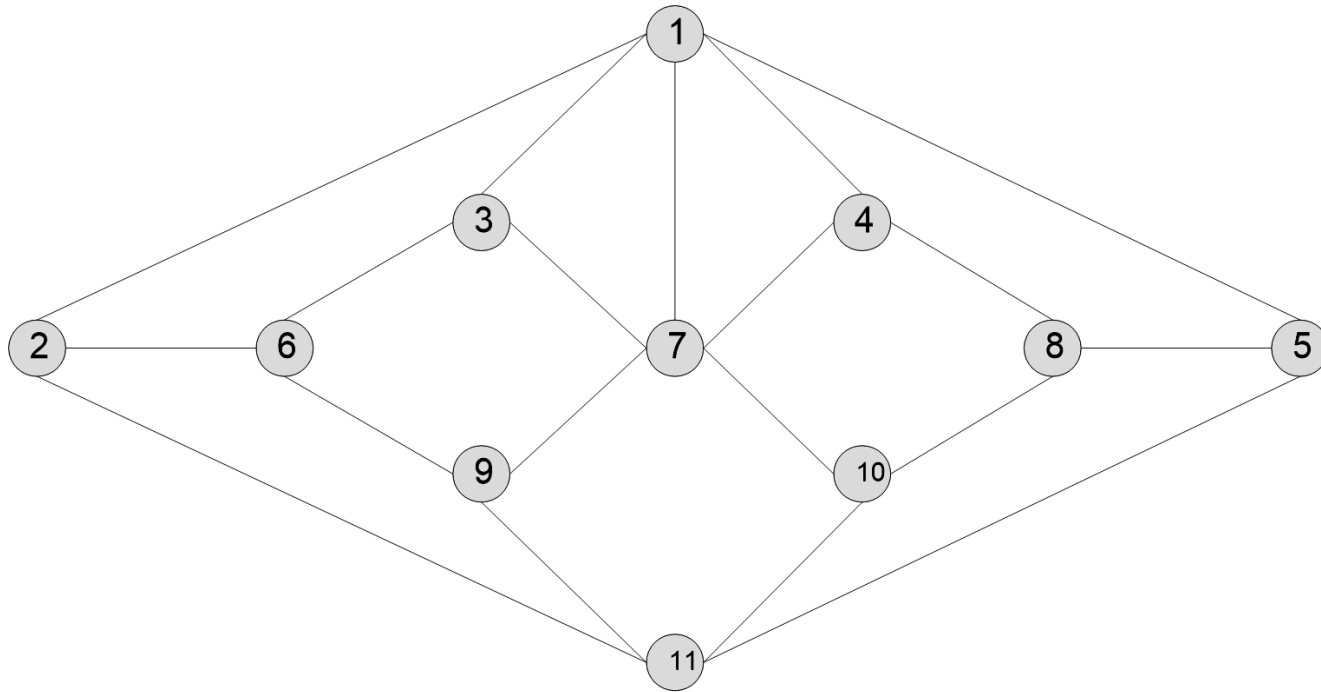
$$c : V \rightarrow \{1, 2\}$$

(i.e. astfel încât pentru orice muchie $e=xy \in E$ avem $c(x) \neq c(y)$)

Graf bipartit

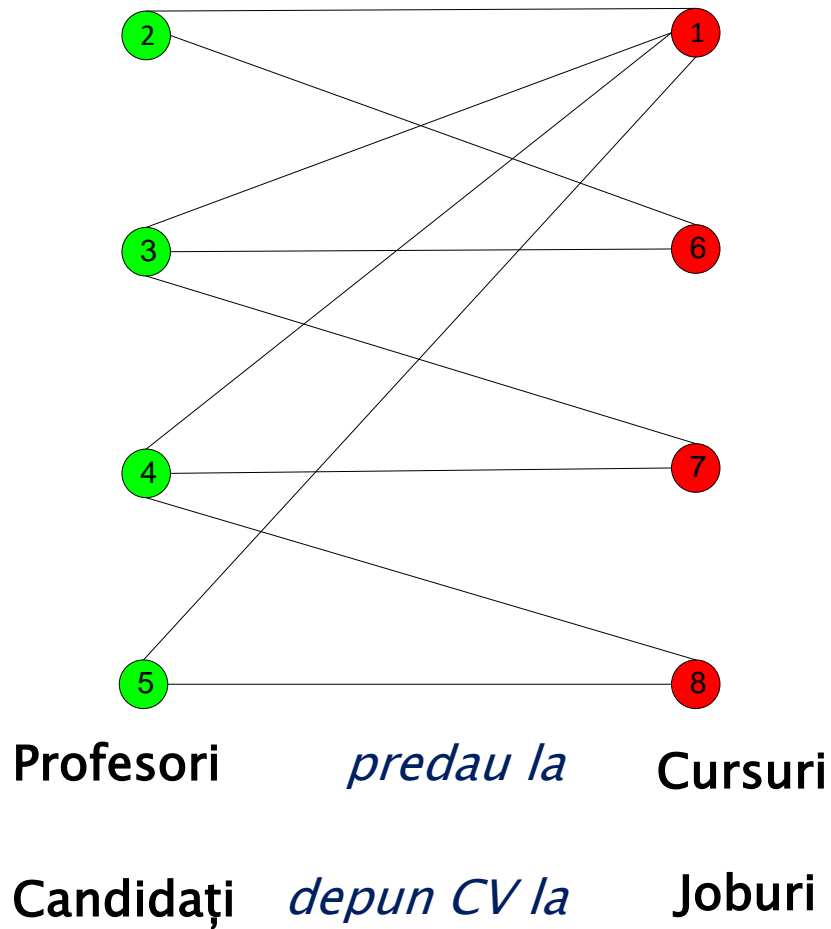


Graf bipartit



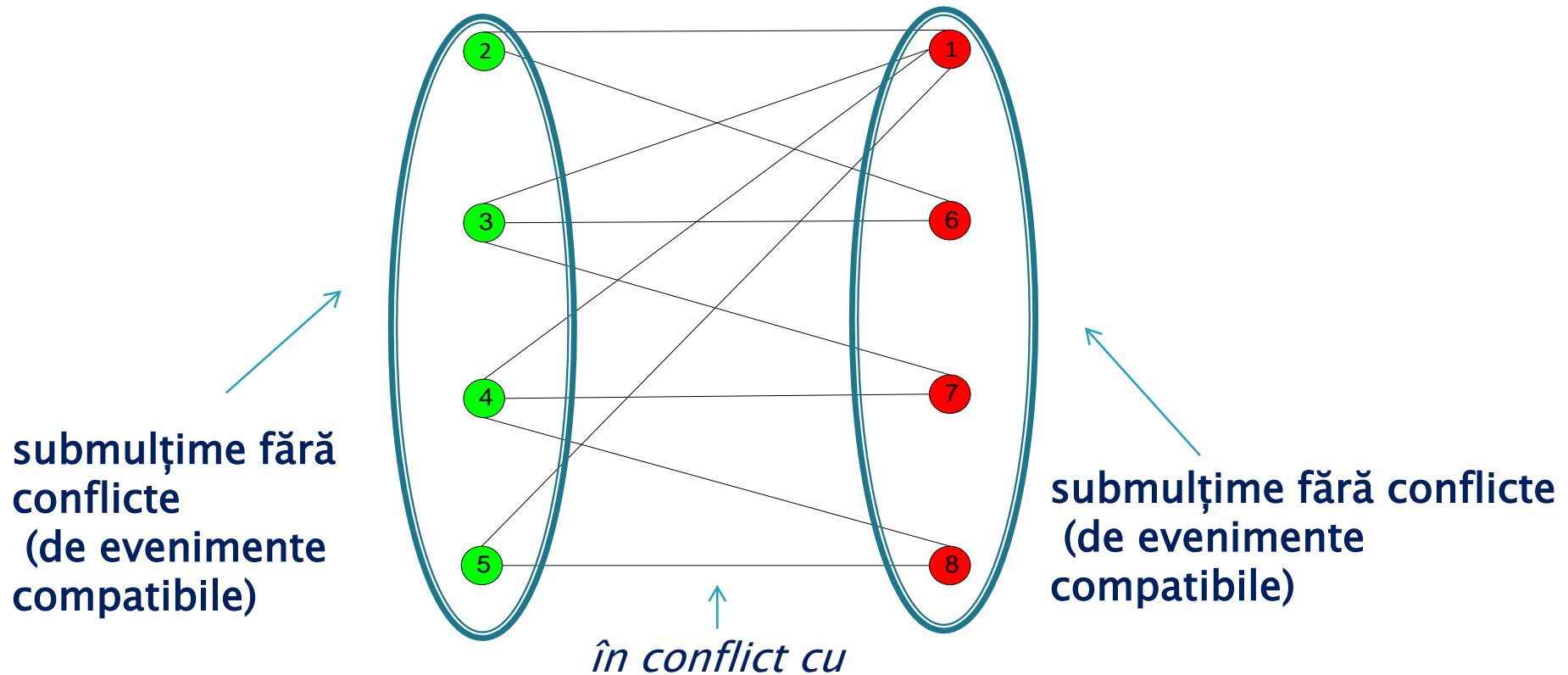
nu este bipartit

Modelare



Aplicații

Graf de conflicte (exemplu substanțe care interacționează, activități incompatibile, relații în rețele sociale)



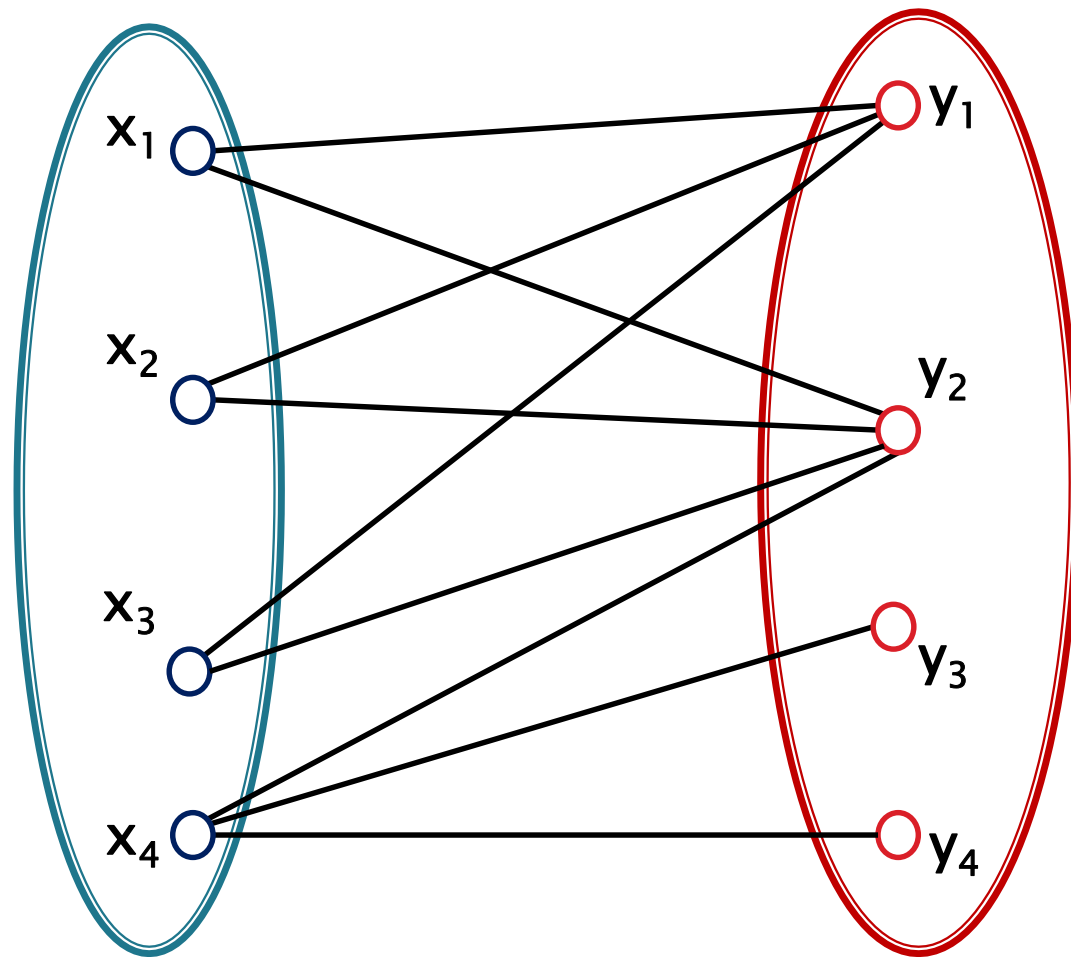
- Cuplaje, rețele...

Algoritm

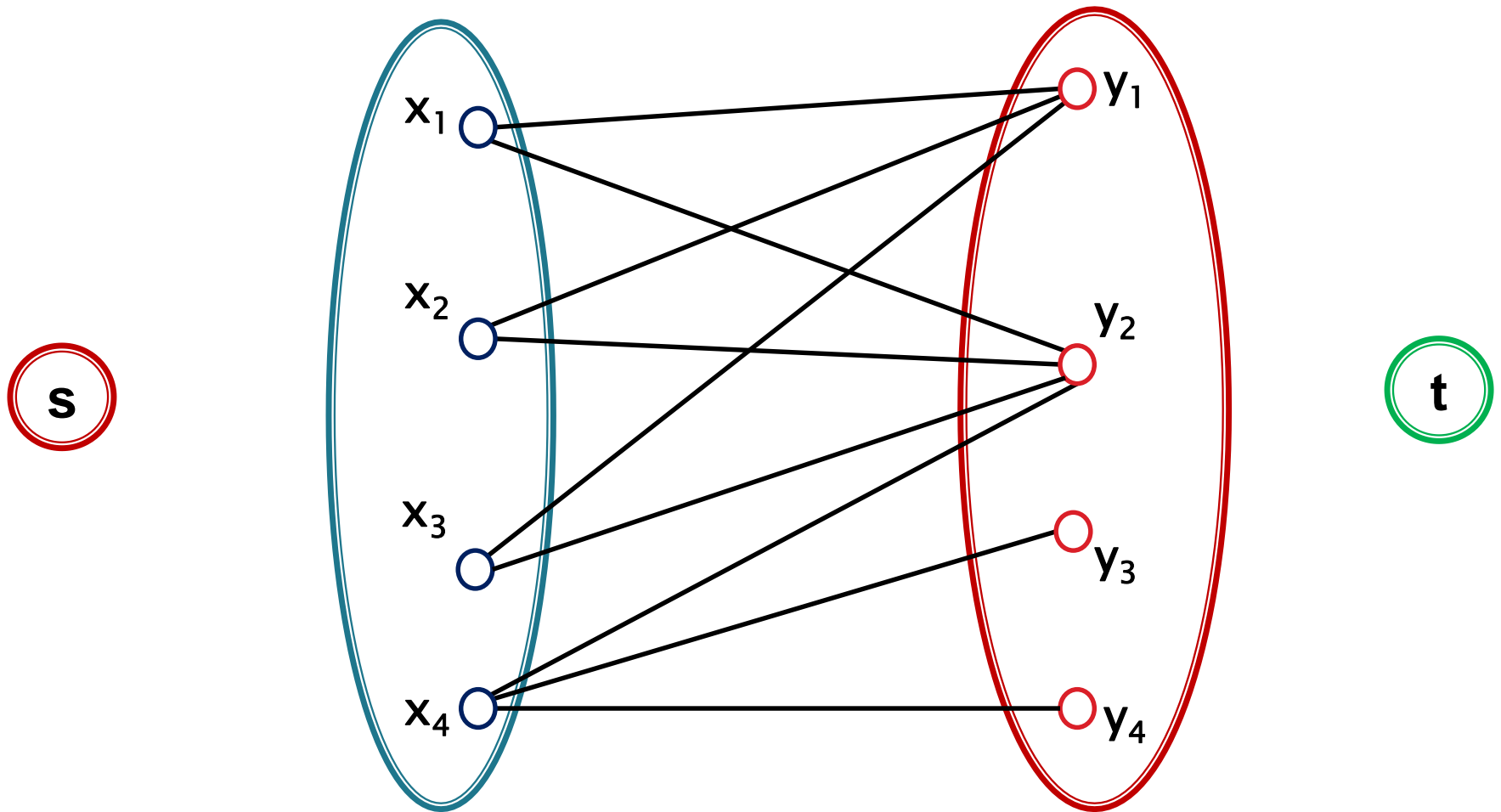
Flux maxim \rightarrow cuplaj maxim
în graf bipartit

► Algoritm de determinare a unui cuplaj maxim într-un graf bipartit

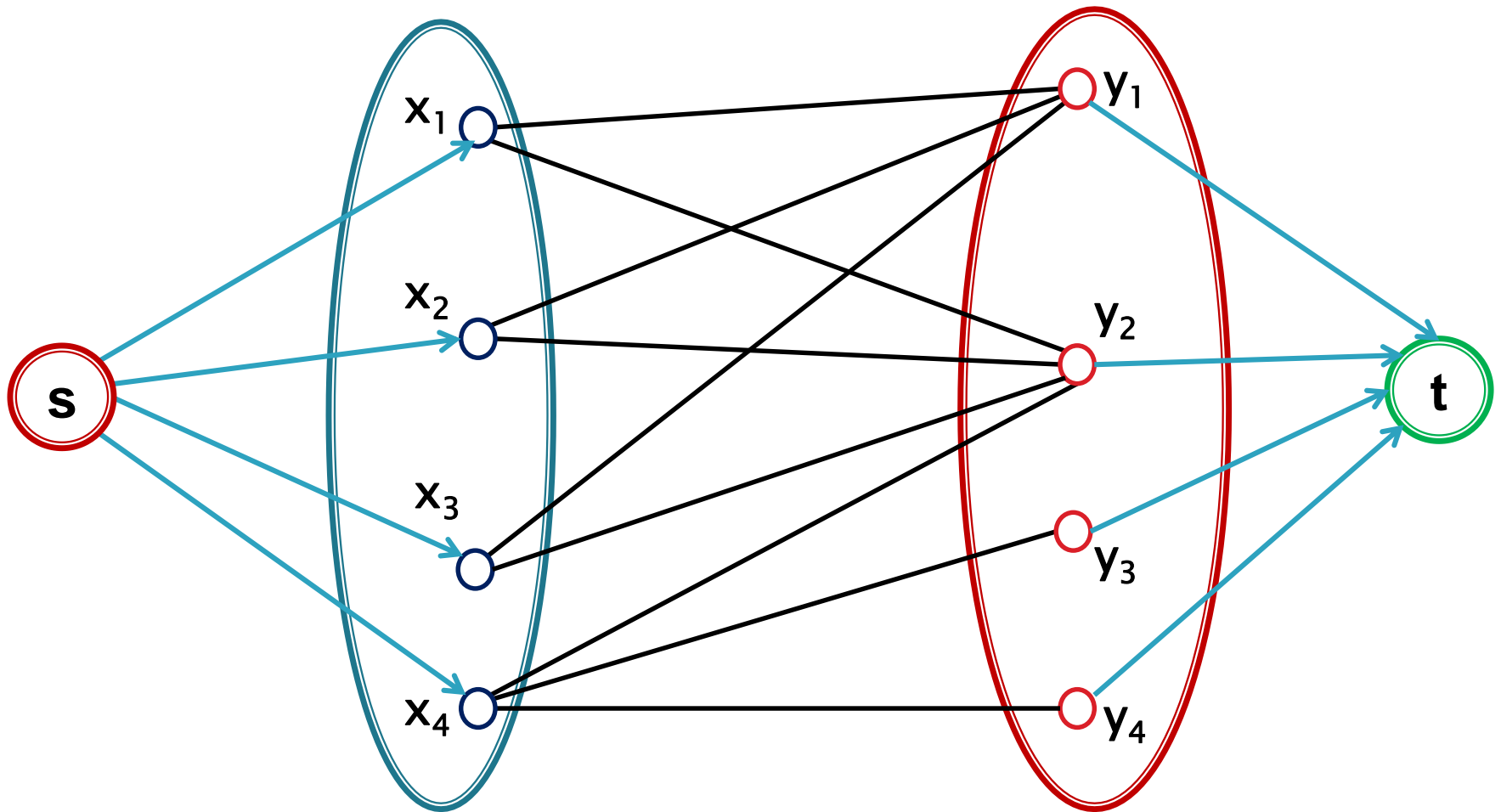
- Reducem problema determinării unui cuplaj maxim într-un cuplaj bipartit G la determinarea unui flux maxim într-o rețea de transport asociată lui G
- Construim rețeaua de transport N_G asociată lui G astfel:



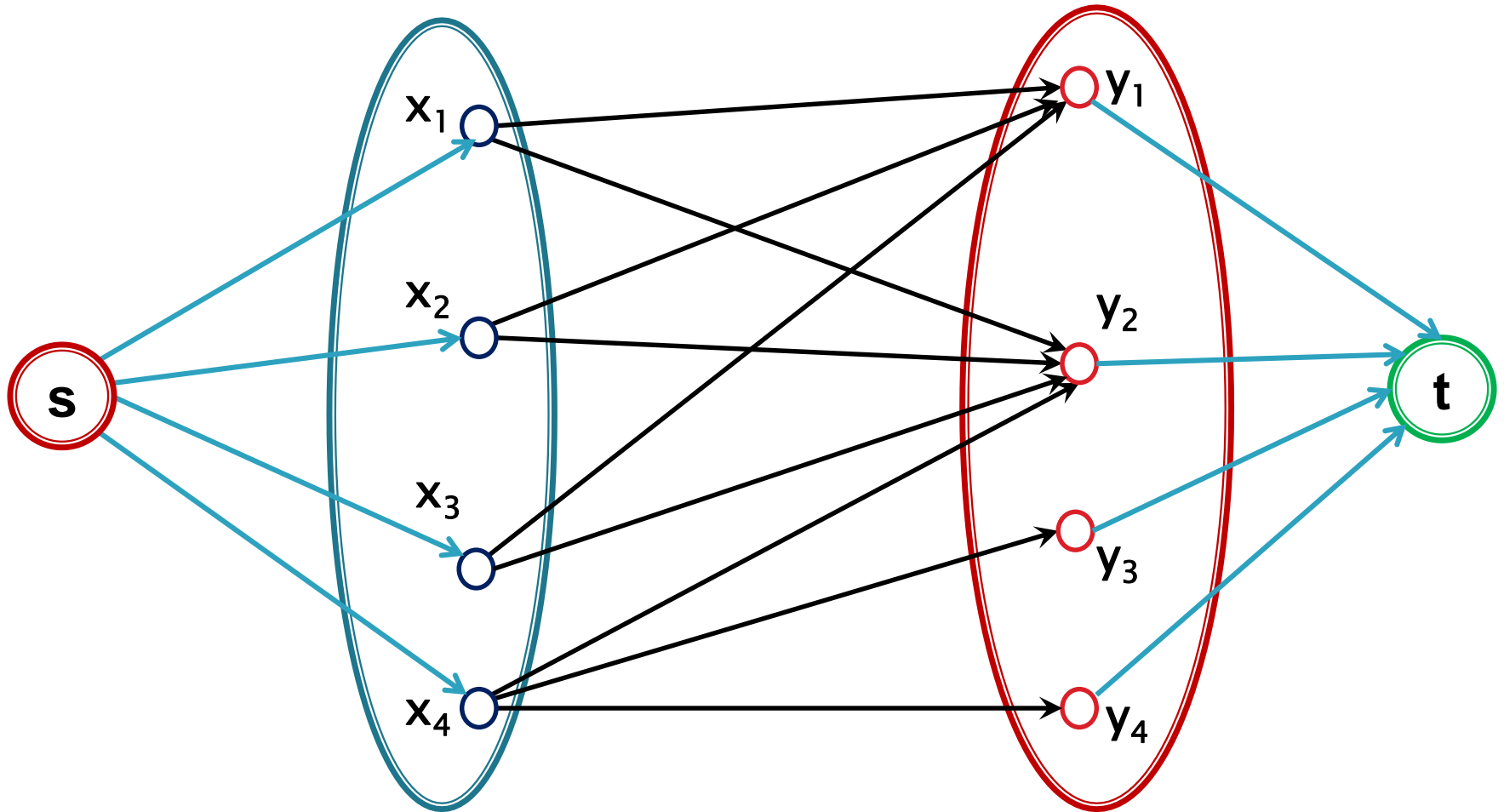
- ▶ Adăugăm două noduri noi s și t



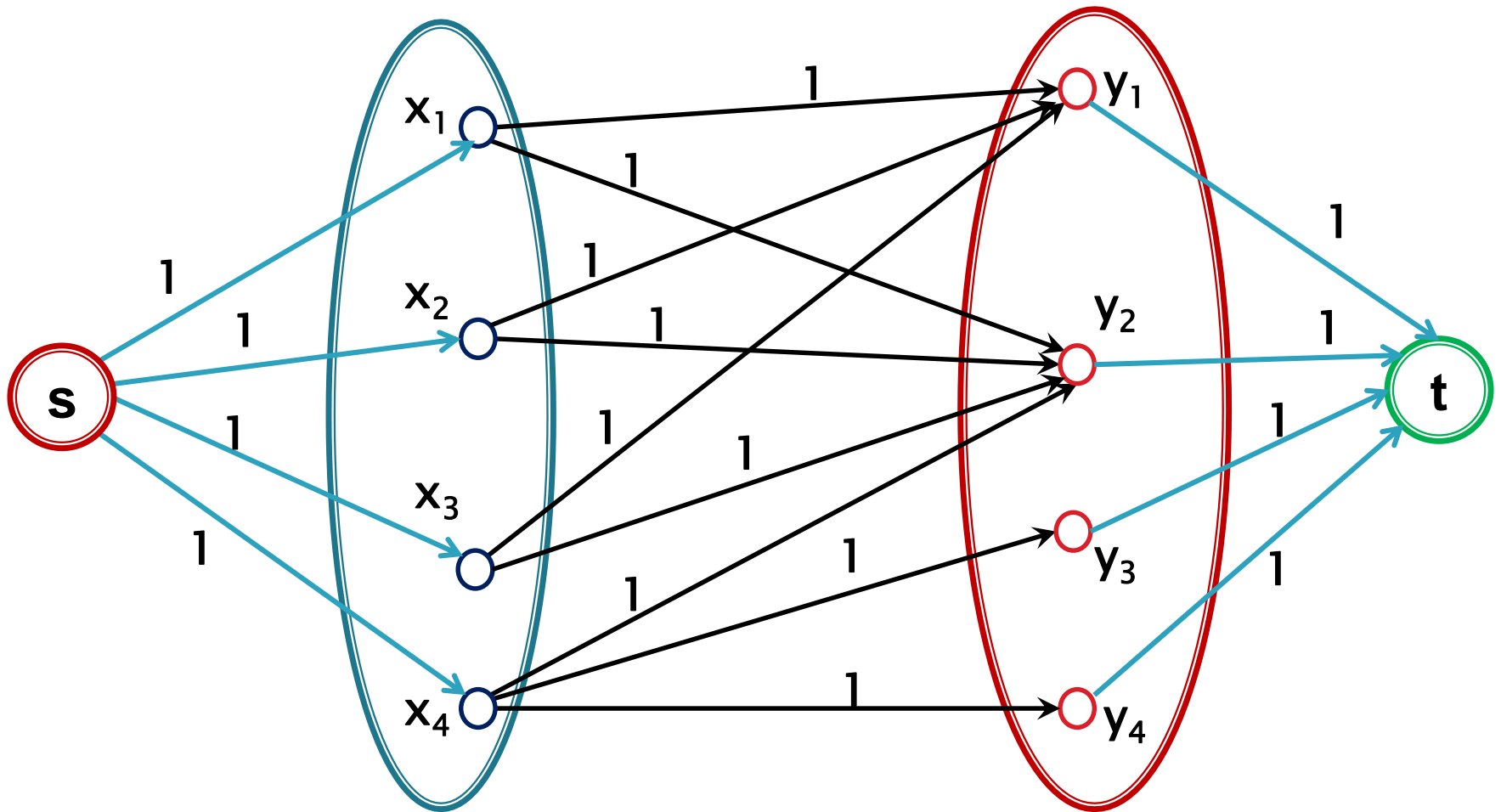
- ▶ Adăugăm arce (s, x_i) , pentru $x_i \in X$ și (y_j, t) , $y_j \in Y$



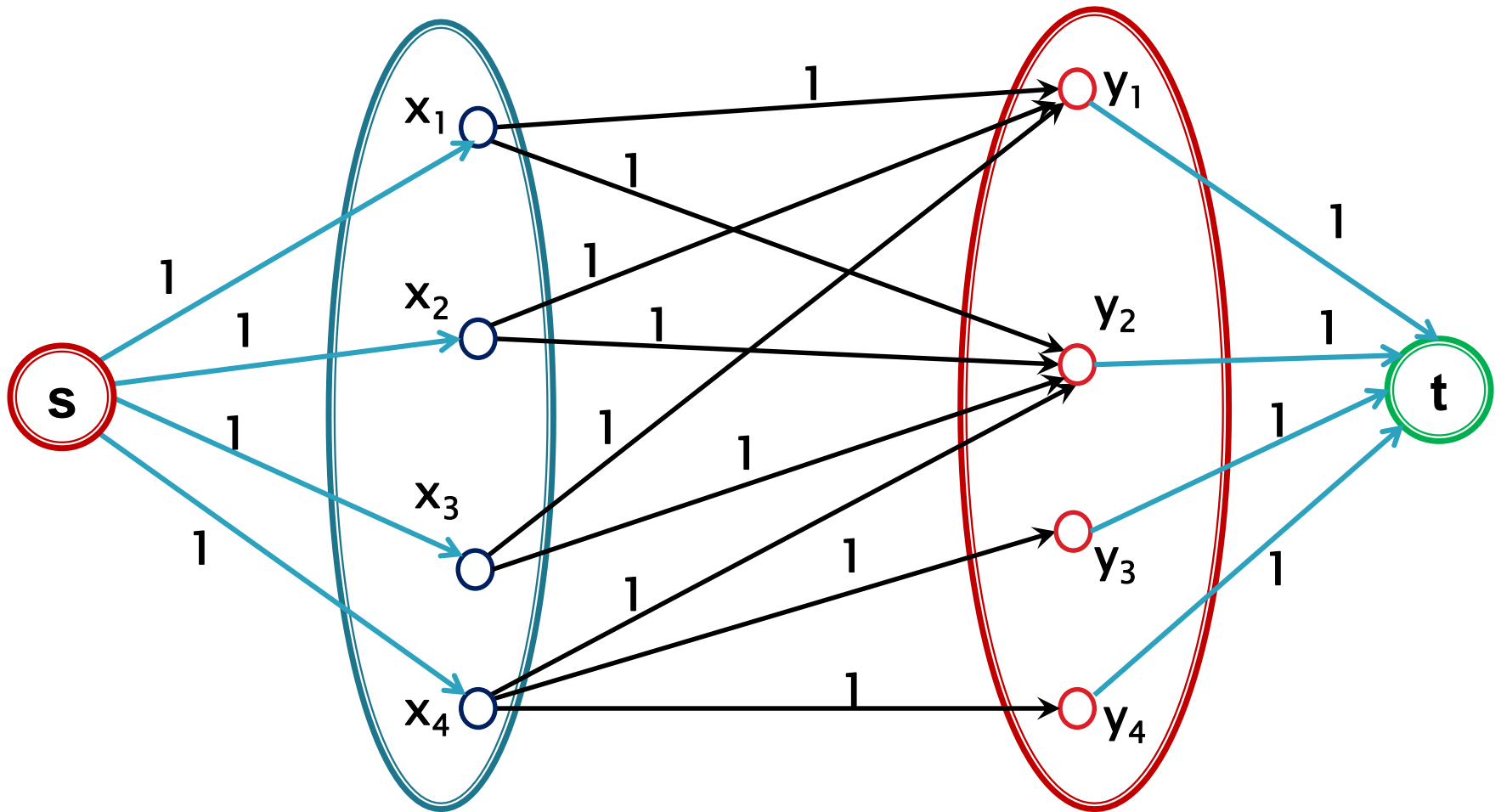
- Transformăm muchiile $x_i y_j$ în arce (de la X la Y)



- Asociem fiecărui arc capacitatea 1

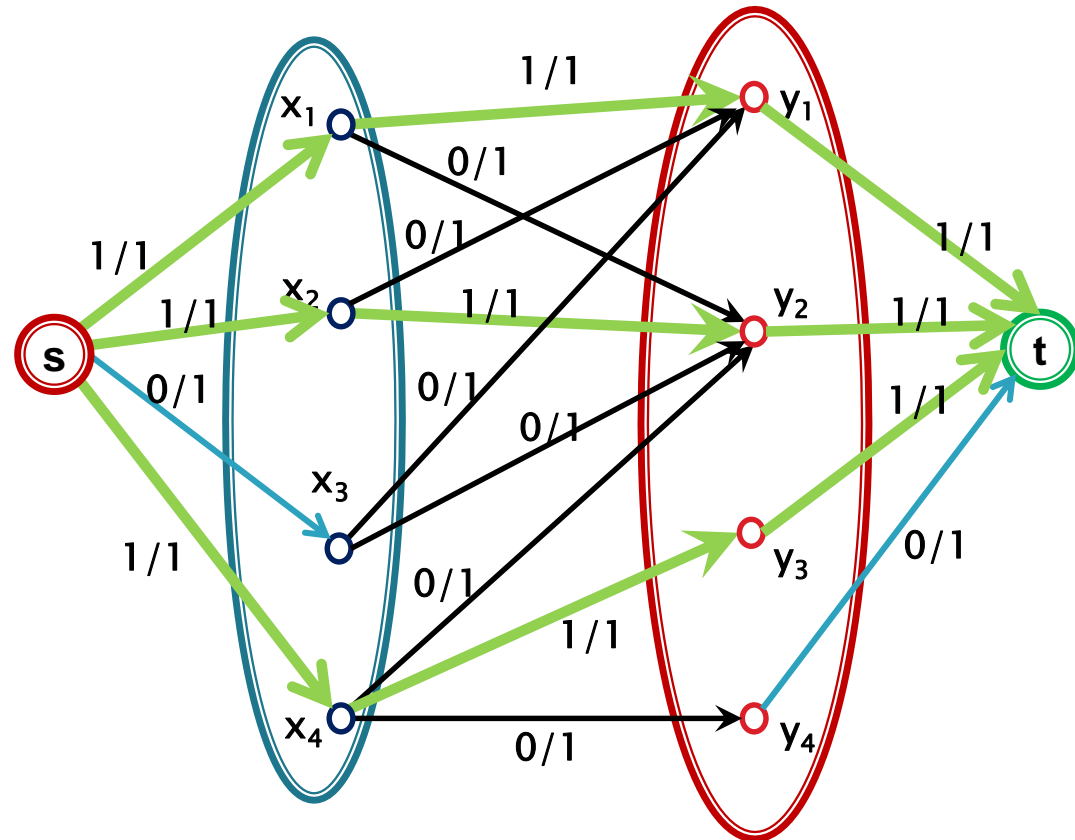
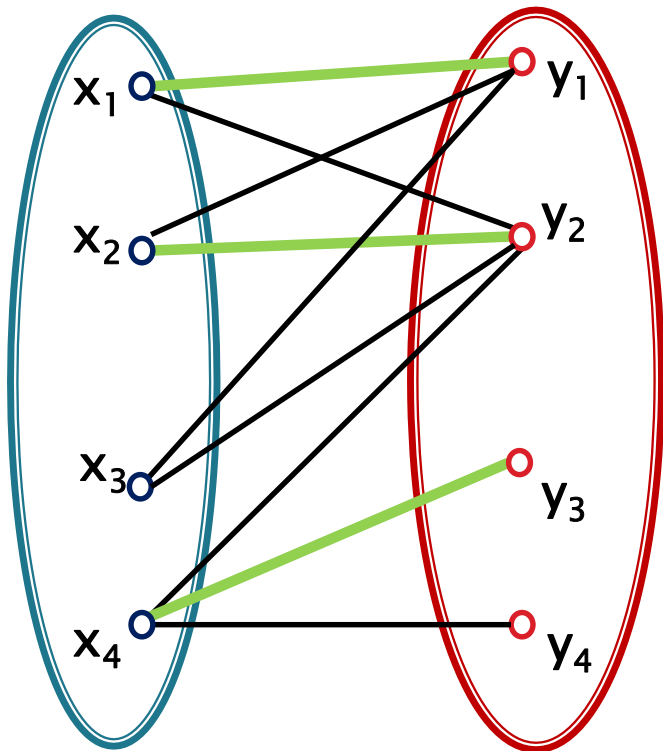


- Asociem fiecărui arc capacitatea 1



Pentru orice flux f în această rețea avem $f(e) \in \{0,1\}$

- Cuplaj M în $G \Leftrightarrow$ flux f în rețea
cu $|M| = \text{val}(f)$



► Proprietatea 1

Fie $G=(X\cup Y, E)$ un graf bipartit și M un cuplaj în G .
Atunci există un flux f în rețeaua de transport asociată N_G cu

$$\text{val}(f) = |M|$$

► Proprietatea 1

Fie $G=(X\cup Y, E)$ un graf bipartit și M un cuplaj în G .
Atunci există un flux f în rețeaua de transport asociată N_G cu

$$\text{val}(f) = |M|$$

Justificare. Dat un cuplaj M în G , se poate construi un flux f în N_G cu $\text{val}(f) = |M|$ astfel:

► Proprietatea 1

Fie $G=(X\cup Y, E)$ un graf bipartit și M un cuplaj în G .
Atunci există un flux f în rețeaua de transport asociată N_G cu

$$\text{val}(f) = |M|$$

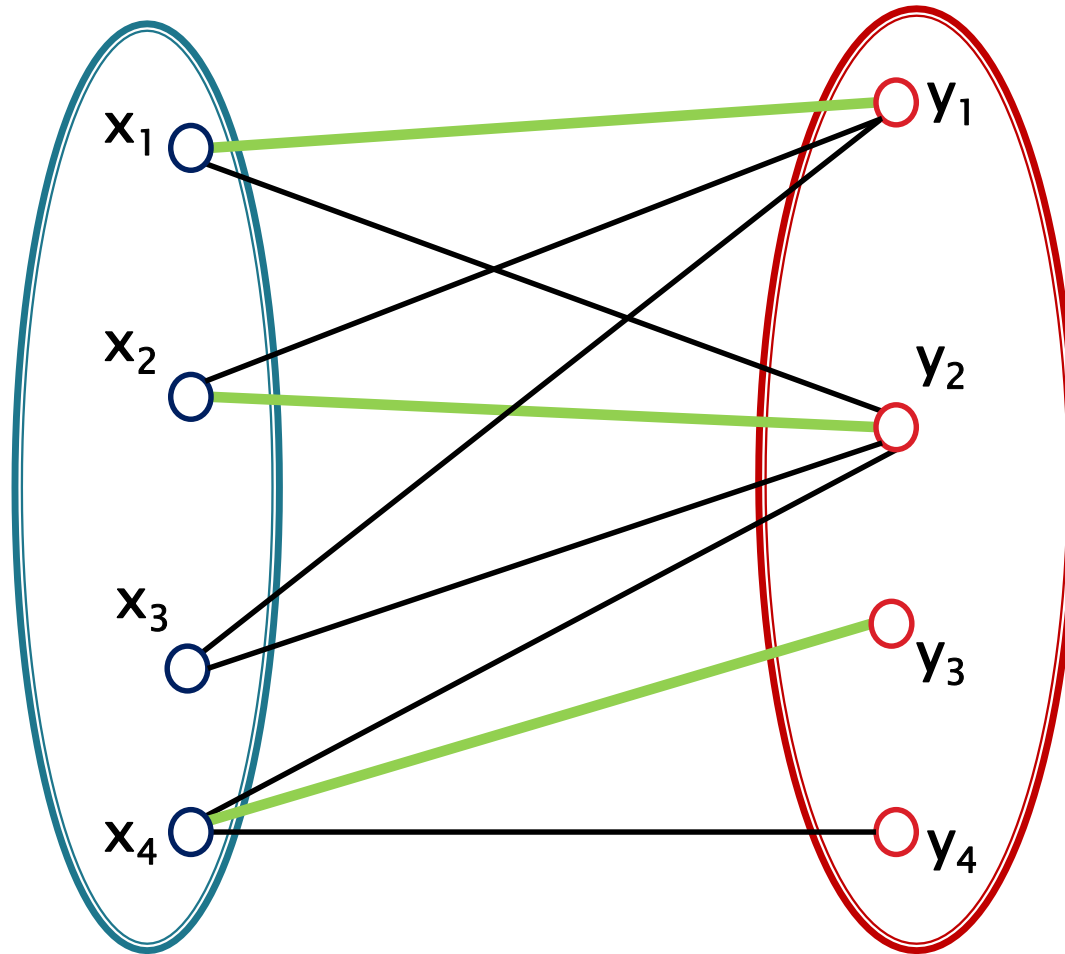
Justificare. Dat un cuplaj M în G , se poate construi un flux f în N_G cu $\text{val}(f) = |M|$ astfel:

Definim:

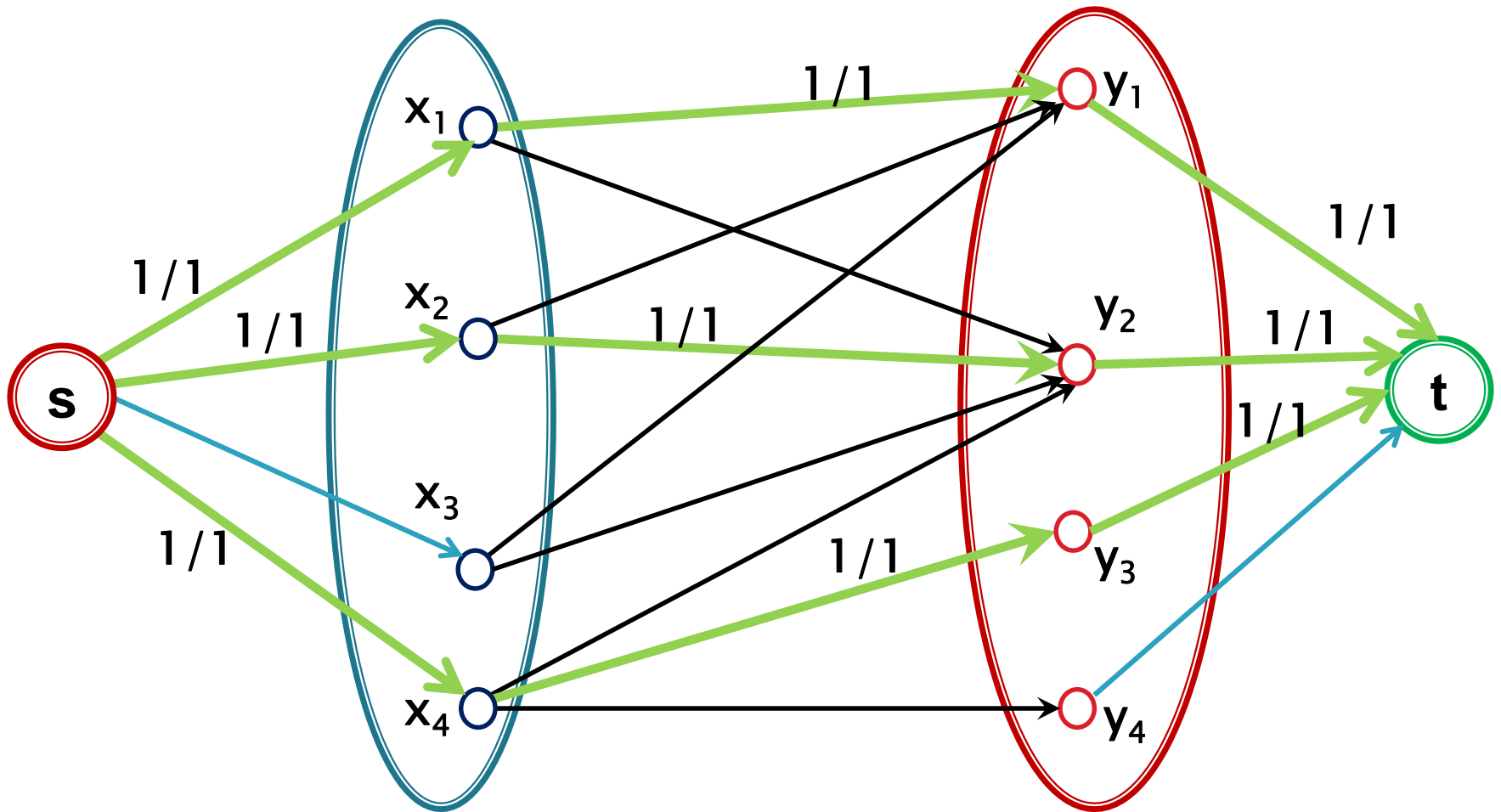
- $f(sx) = f(xy) = f(yt) = 1$, pentru orice $xy \in M$
- $f(uv) = 0$, în rest

Atunci f este flux cu $\text{val}(f) = |M|$ (pentru vârfurile din M fluxul intern și extern este 1, pentru celelalte 0)

- Dat cuplaj în graf \Rightarrow definim flux în rețea

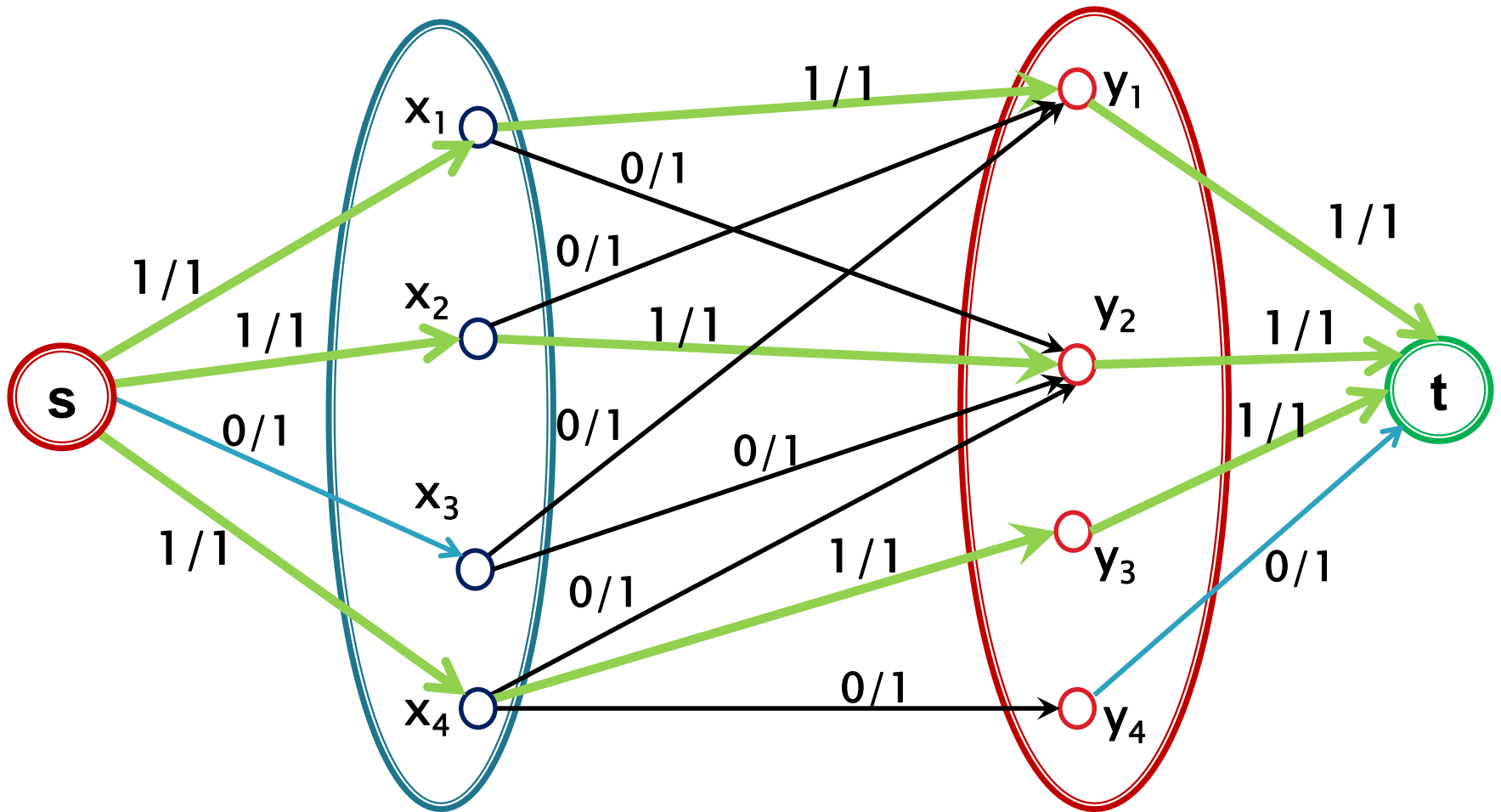


- Dat cuplaj în graf \Rightarrow definim flux în rețea



Celelalte arce au flux 0 și capacitate 1

► Dat cuplaj în graf \Rightarrow definim flux în rețea



► Proprietatea 2

Fie $G=(X\cup Y, E)$ un graf bipartit și f un flux în rețeaua de transport N_G asociată. Atunci există M un cuplaj în G cu

$$\text{val}(f) = |M|$$

► Proprietatea 2

Fie $G=(X\cup Y, E)$ un graf bipartit și f un flux în rețeaua de transport N_G asociată. Atunci există M un cuplaj în G cu

$$\text{val}(f) = |M|$$

Justificare. Dat un flux f în N , se poate construi un cuplaj M în G cu $\text{val}(f) = |M|$ astfel:

► Proprietatea 2

Fie $G=(X\cup Y, E)$ un graf bipartit și f un flux în rețeaua de transport N_G asociată. Atunci există M un cuplaj în G cu

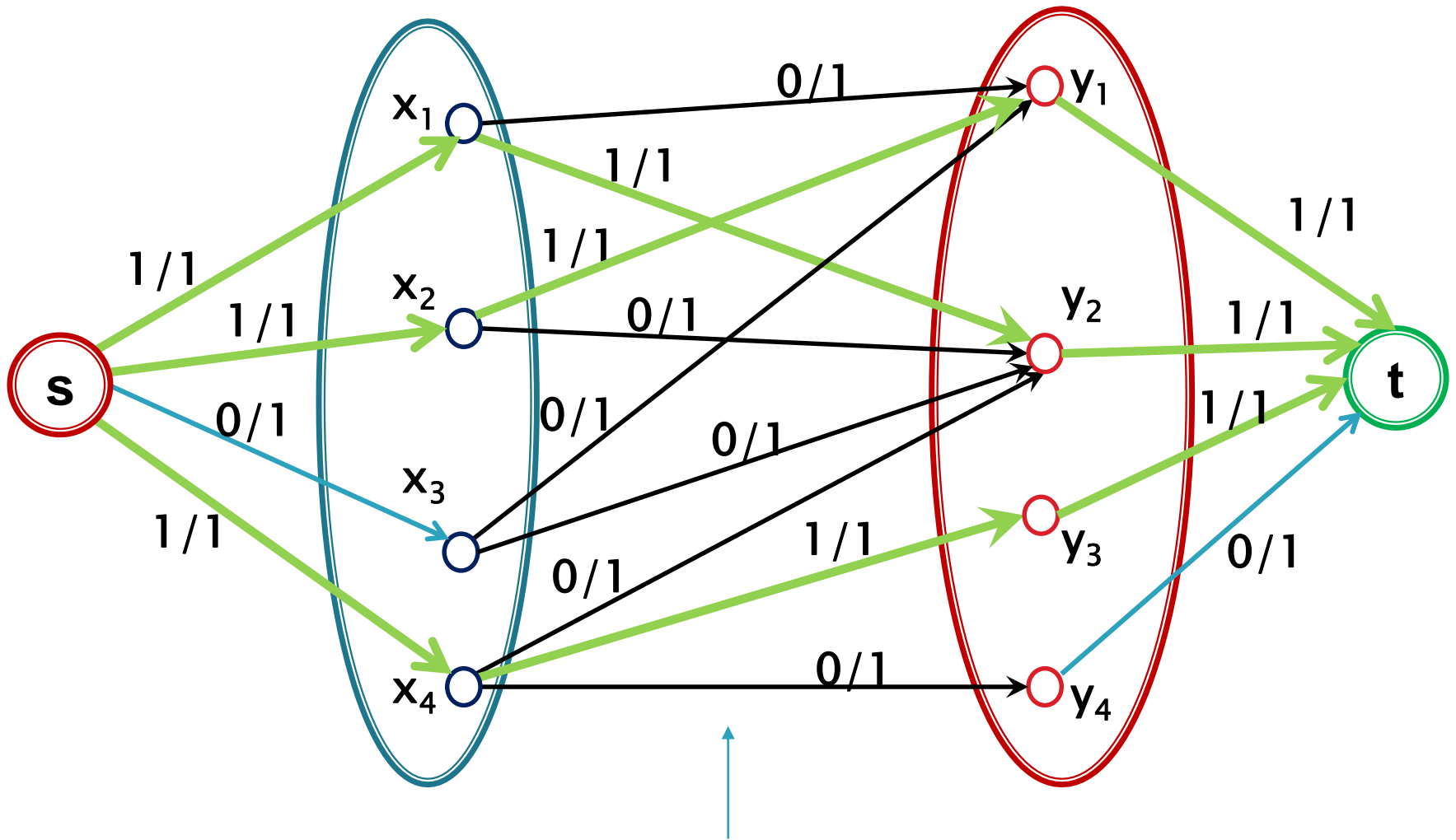
$$\text{val}(f) = |M|$$

Justificare. Dat un flux f în N , se poate construi un cuplaj M în G cu $\text{val}(f) = |M|$ astfel:

$$M = \{xy \mid f(xy) > 0 \text{ și } x \neq s, y \neq t\}$$

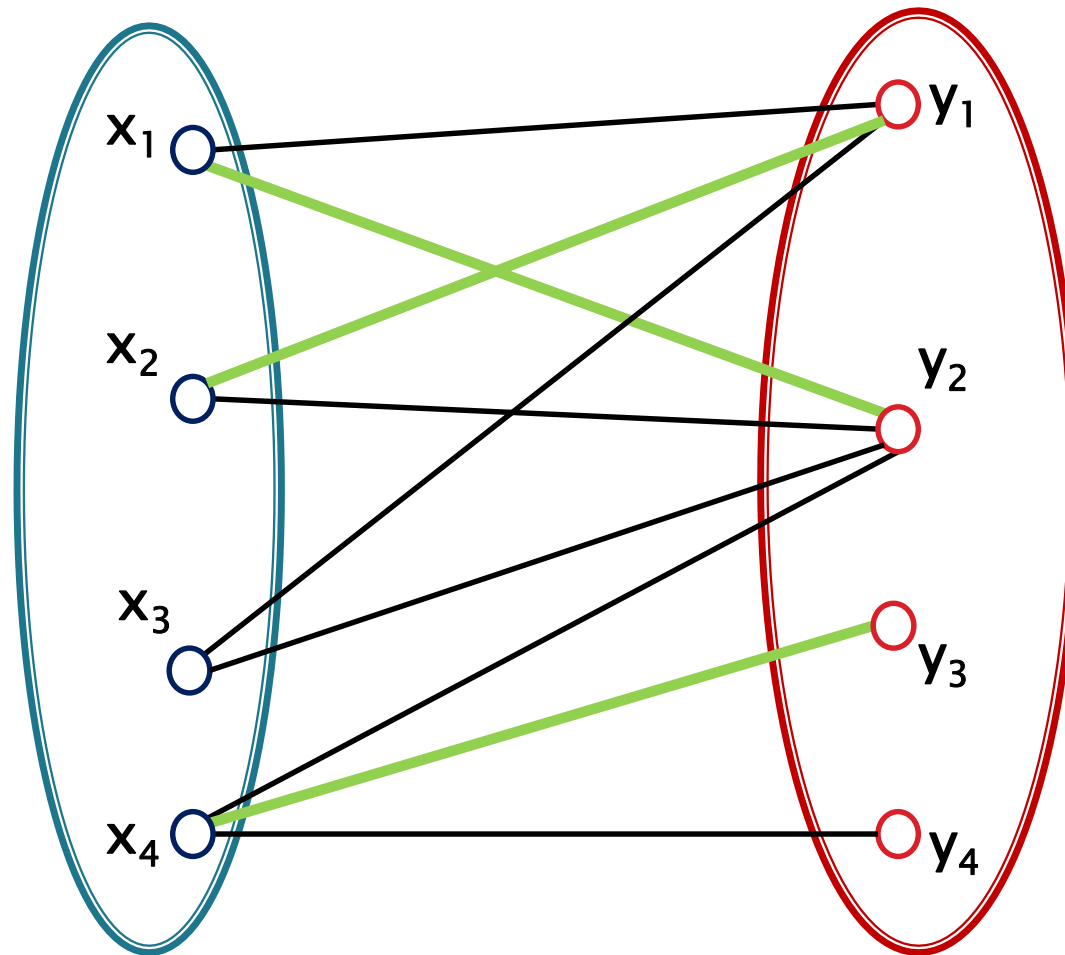
M este cuplaj cu $|M| = \text{val}(f)$ (exercițiu, rezultă din conservarea fluxului)

► Dat flux în rețea \Rightarrow cuplaj în graf



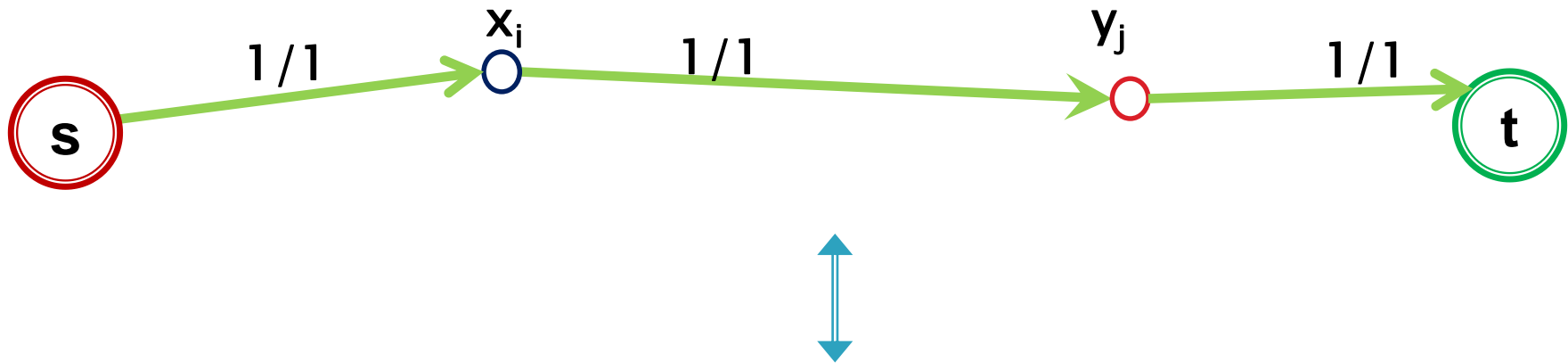
arcele care au flux pozitiv dau muchiile din M

► Dat flux în rețea \Rightarrow cuplaj în graf



► Concluzie: Flux în rețea \Leftrightarrow cuplaj în graf

Drum cu o unitate de flux



Muchie în cuplaj



► Consecință

f^* flux maxim în $N \Rightarrow$ cuplajul corespunzător M^* este cuplaj maxim în G

A determina un **cuplaj maxim** într-un graf bipartit \Leftrightarrow
a determina un **flux maxim** în rețeaua asociată

Algoritm de determinare a unui cuplaj maxim în $G=(X\cup Y,E)$:

1. Construim N rețeaua de transport asociată
2. Determinăm f^* flux maxim în N
3. Considerăm $M = \{xy \mid f^*(xy)=1, x\in X, y\in Y, xy\in N\}$

(pentru fiecare arc cu flux nenul xy din N care nu este incident în s sau t , muchia xy corespunzătoare din G se adaugă la M)

4. return M

Algoritm de determinare a unui cuplaj maxim în $G=(X\cup Y,E)$:

1. Construim N rețeaua de transport asociată
2. Determinăm f^* flux maxim în N
3. Considerăm $M = \{xy \mid f^*(xy)=1, x\in X, y\in Y, xy\in N\}$

(pentru fiecare arc cu flux nenul xy din N care nu este incident în s sau t , muchia xy corespunzătoare din G se adaugă la M)

4. return M

Complexitate?

Algoritm de determinare a unui cuplaj maxim în $G=(X \cup Y, E)$:

1. Construim N rețeaua de transport asociată
2. Determinăm f^* flux maxim în N
3. Considerăm $M = \{xy \mid f^*(xy)=1, x \in X, y \in Y, xy \in N\}$

(pentru fiecare arc cu flux nenul xy din N care nu este incident în s sau t , muchia xy corespunzătoare din G se adaugă la M)

4. return M

Complexitate: $C=1$ (sau $L \leq c^+(s) \leq n$) $\Rightarrow O(mn)$

Aplicație

**Construcția unui graf orientat
din secvențele de grade**

► Se dau secvențele

- $s_0^+ = \{d_1^+, \dots, d_n^+\}$
- $s_0^- = \{d_1^-, \dots, d_n^-\}$

$$\text{cu } d_1^+ + \dots + d_n^+ = d_1^- + \dots + d_n^-$$

Să se construiască, **dacă se poate**, un graf orientat G cu $s^+(G) = s_0^+$ și $s^-(G) = s_0^-$

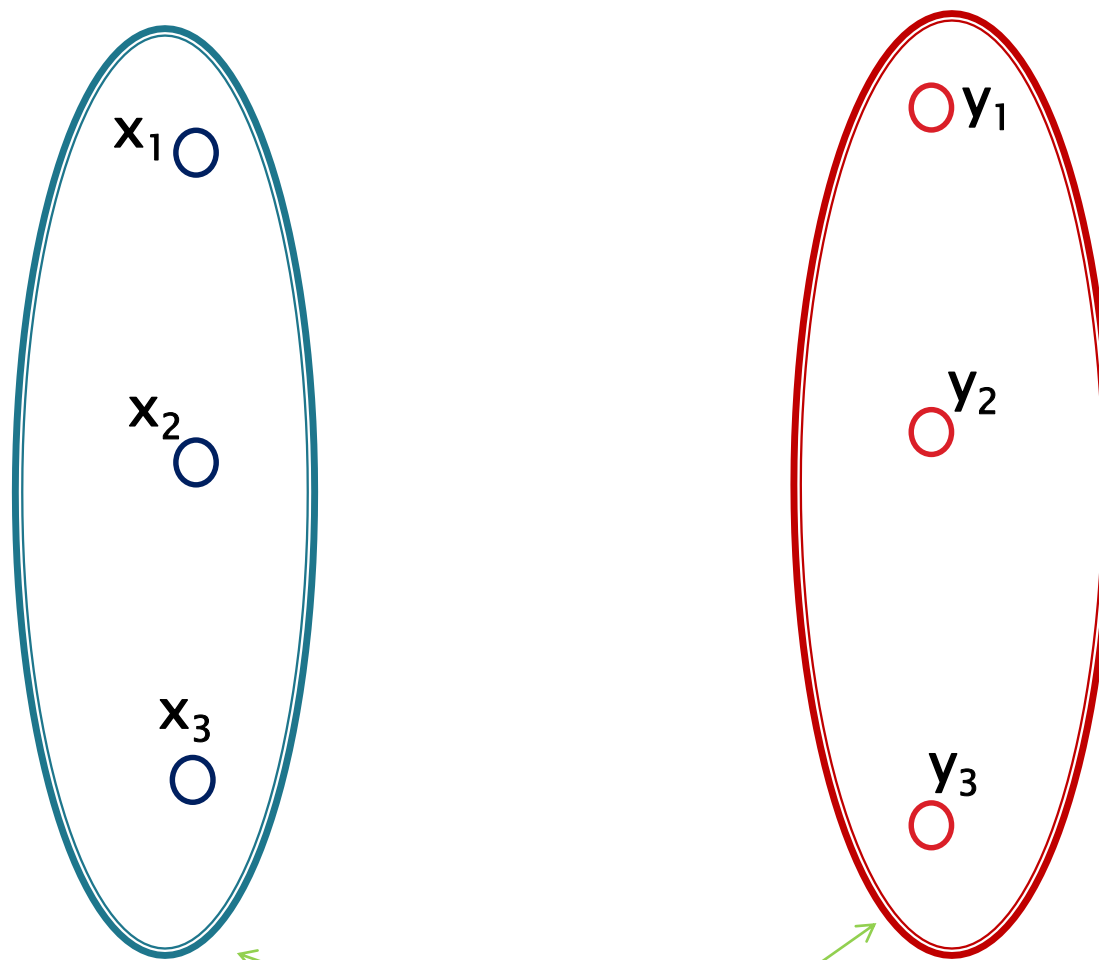
► **Exemplu**

- $s_0^+ = \{1, 0, 2\}$
- $s_0^- = \{1, 1, 1\}$

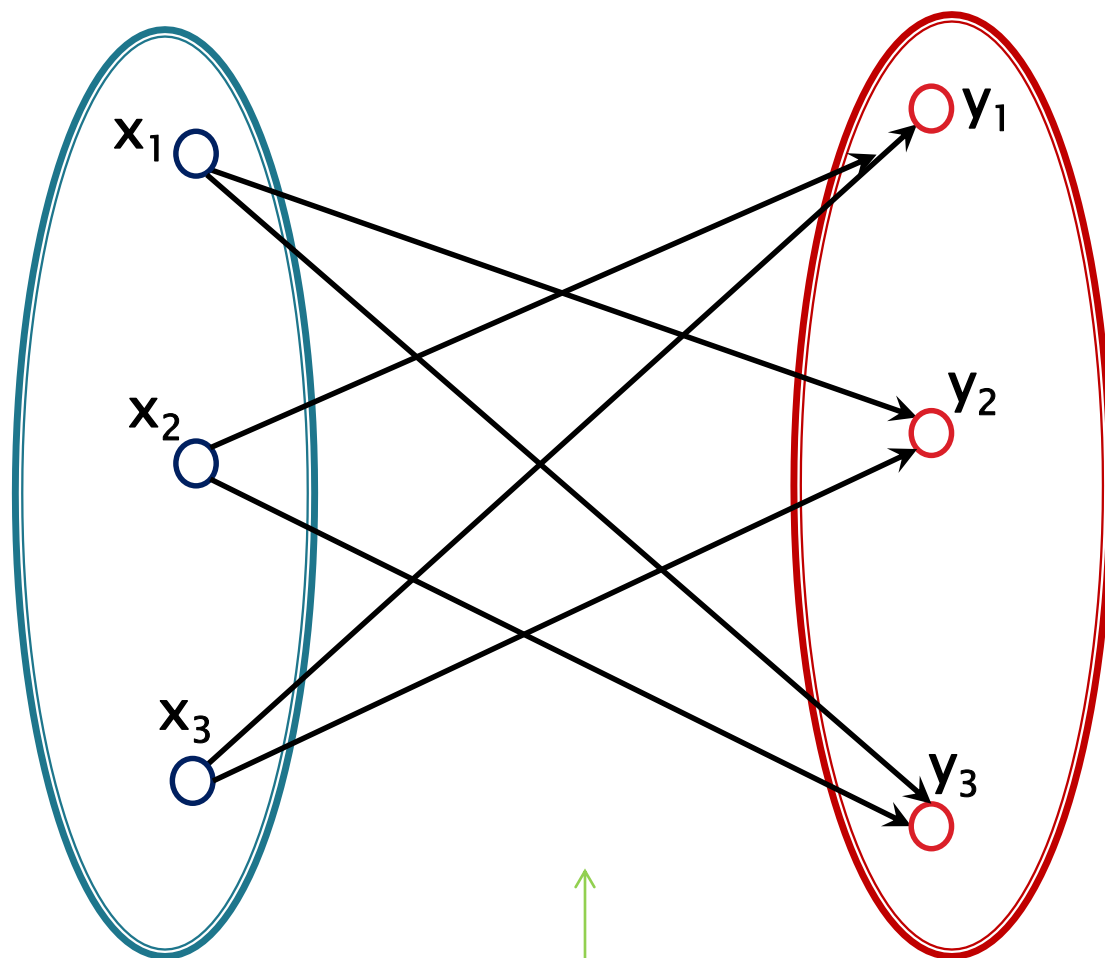
▶ Exemplu

- $s_0^+ = \{1, 0, 2\}$
- $s_0^- = \{1, 1, 1\}$

- ▶ **Construim o rețea asociată celor două secvențe a.î.**
din fluxul maxim în rețea să putem **deduce** dacă G se
poate construi + arcele grafului G (în caz afirmativ)

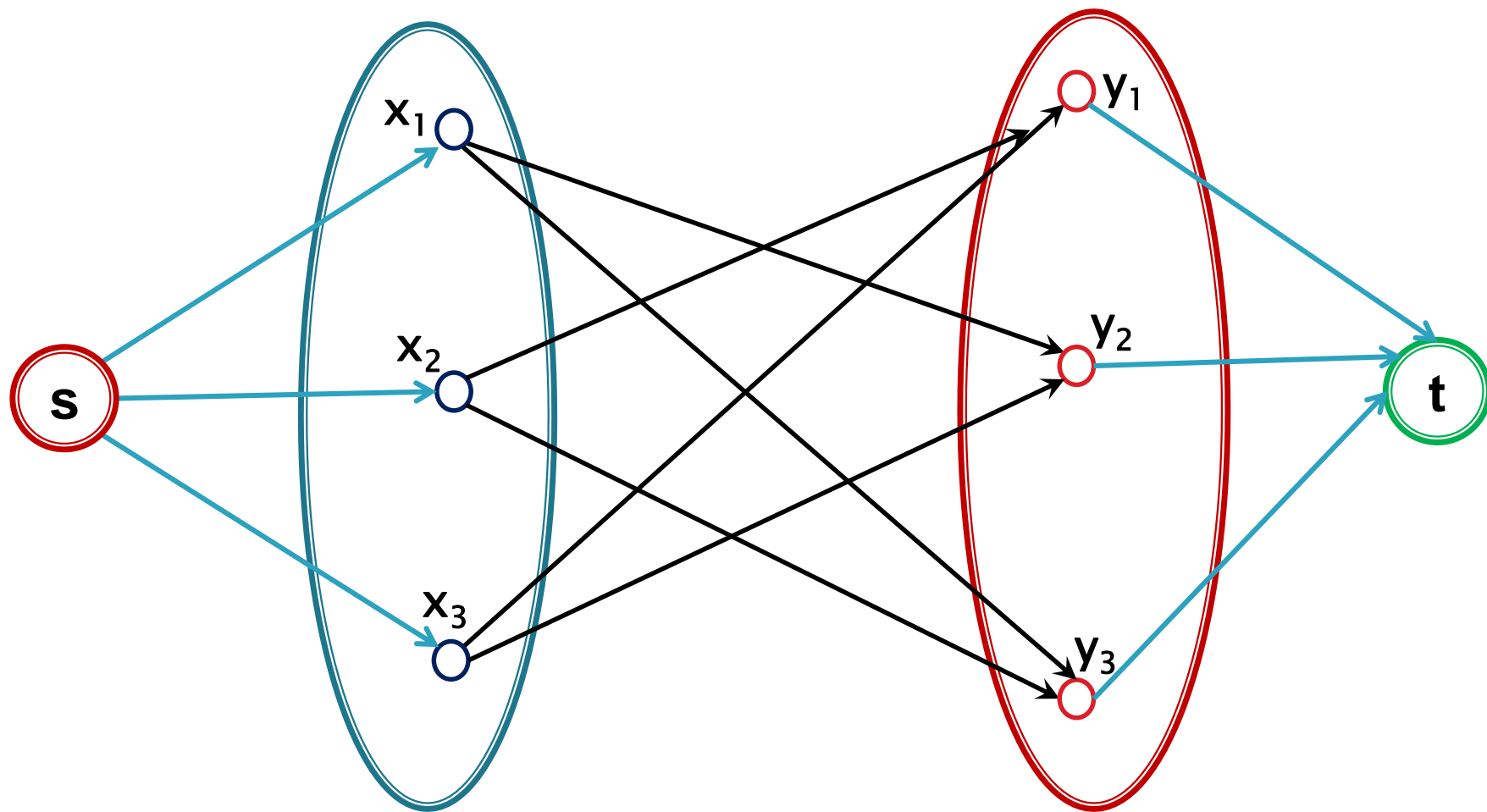


Vârfurile 1, 2,..., n se pun în ambele clase ale bipartiției (câte o copie)

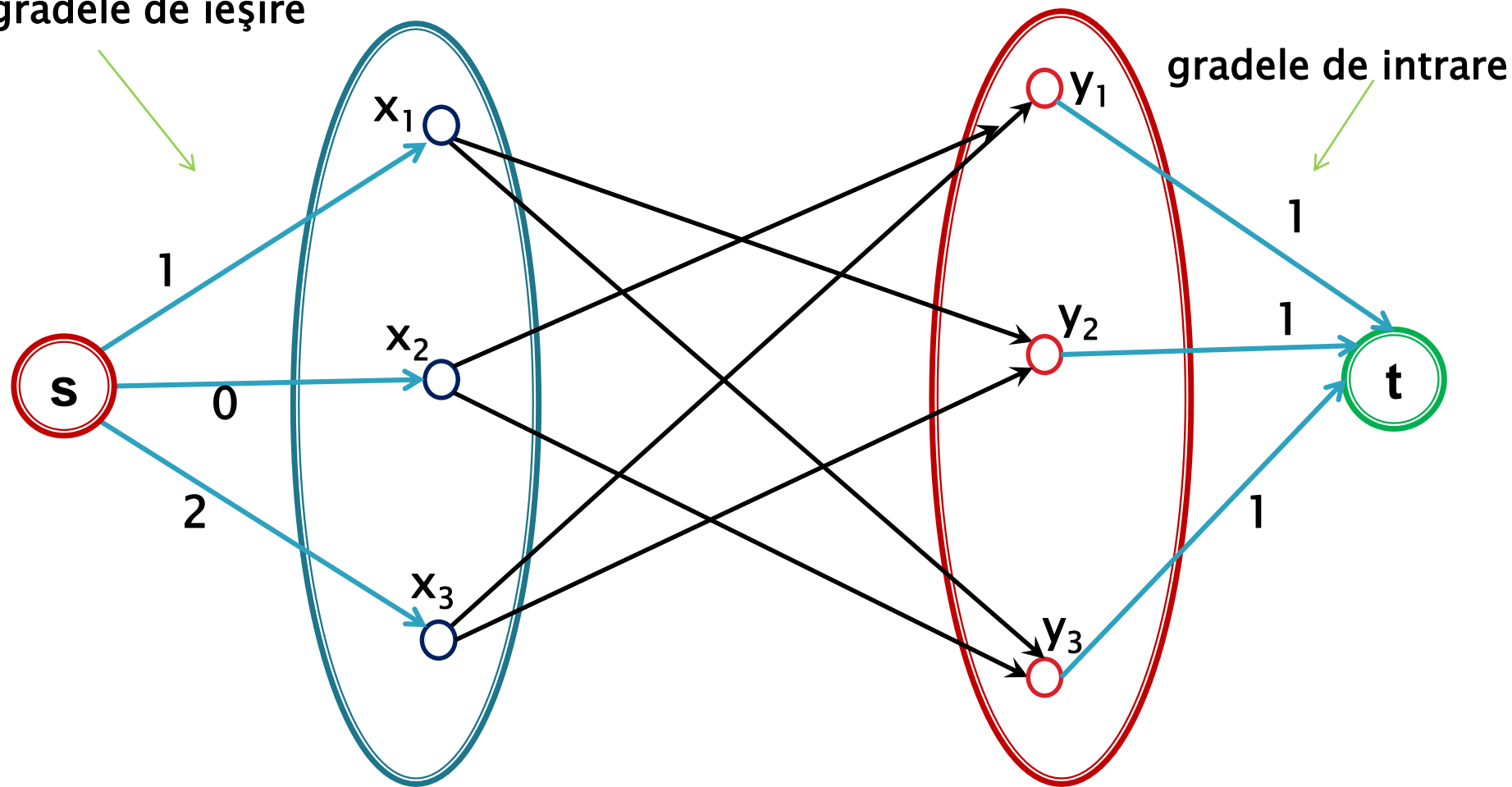


arce $x_i y_j$ cu $i \neq j$

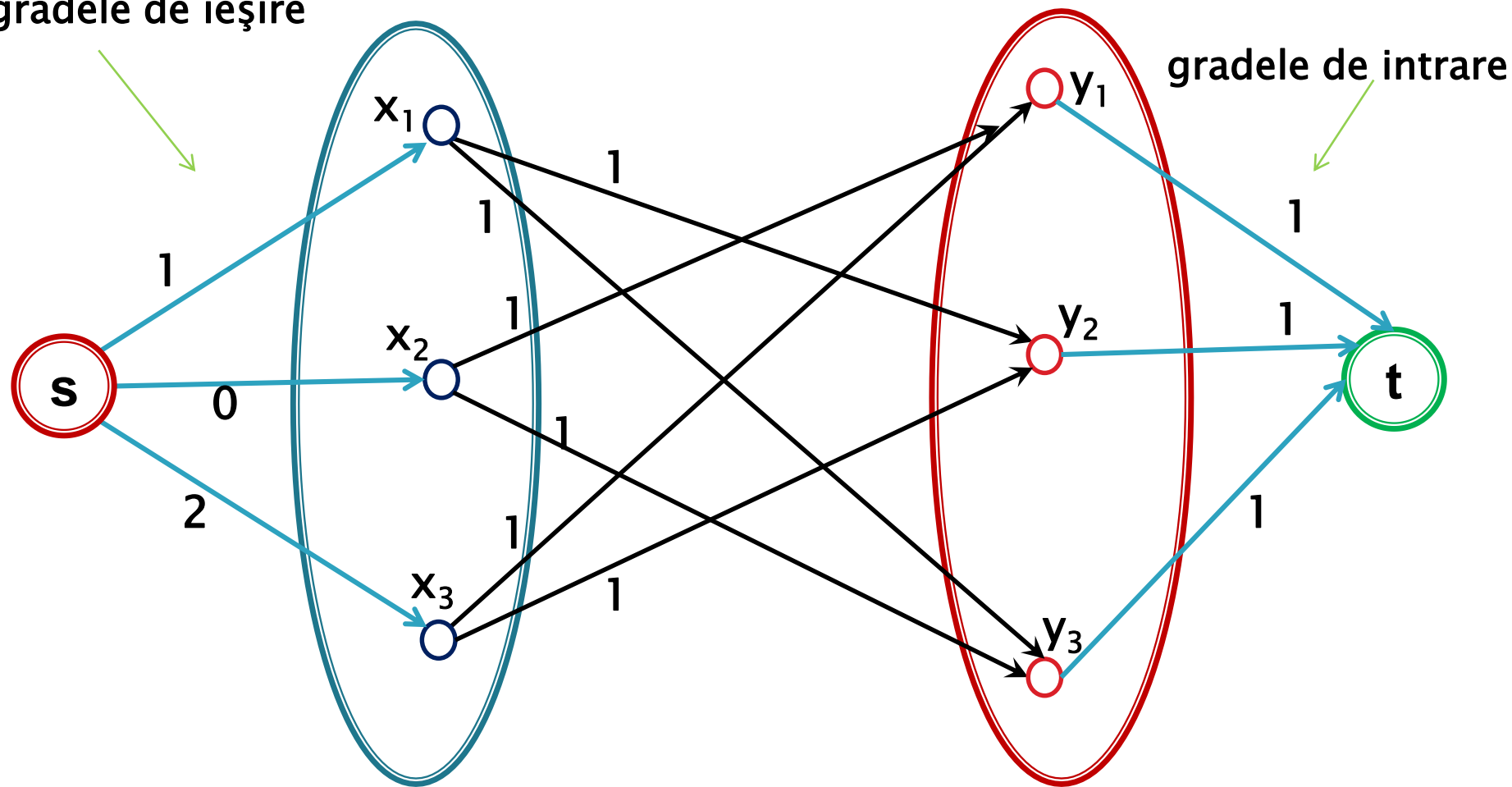
(fluxul pe arcul $x_i y_j$ va fi nenul $\Leftrightarrow ij \in E(G)$)



gradele de ieșire



gradele de ieșire



gradele de intrare

► Proprietate

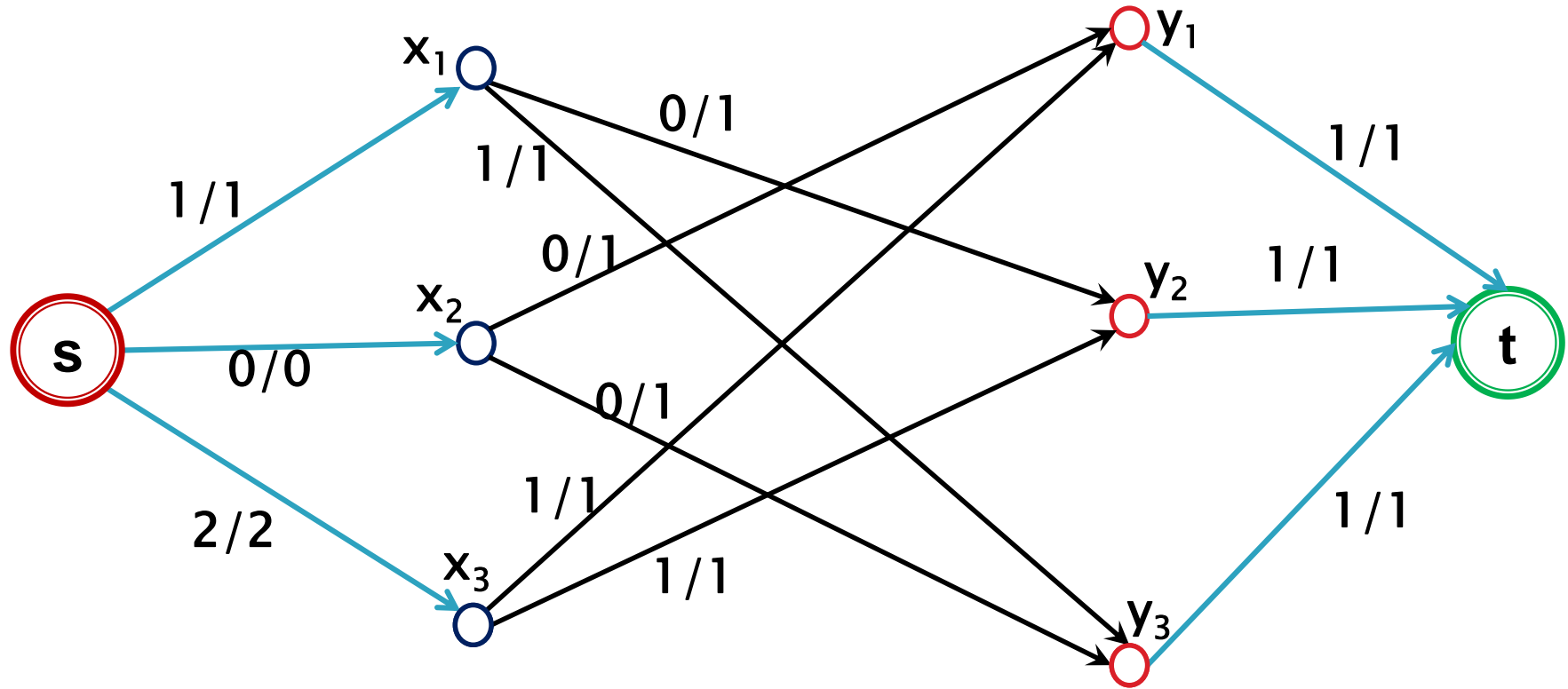
Există graf cu secvențele date \Leftrightarrow în rețeaua asociată fluxul de valoare maximă are

$$\text{val}(f) = d_1^+ + \dots + d_n^+ = d_1^- + \dots + d_n^-$$

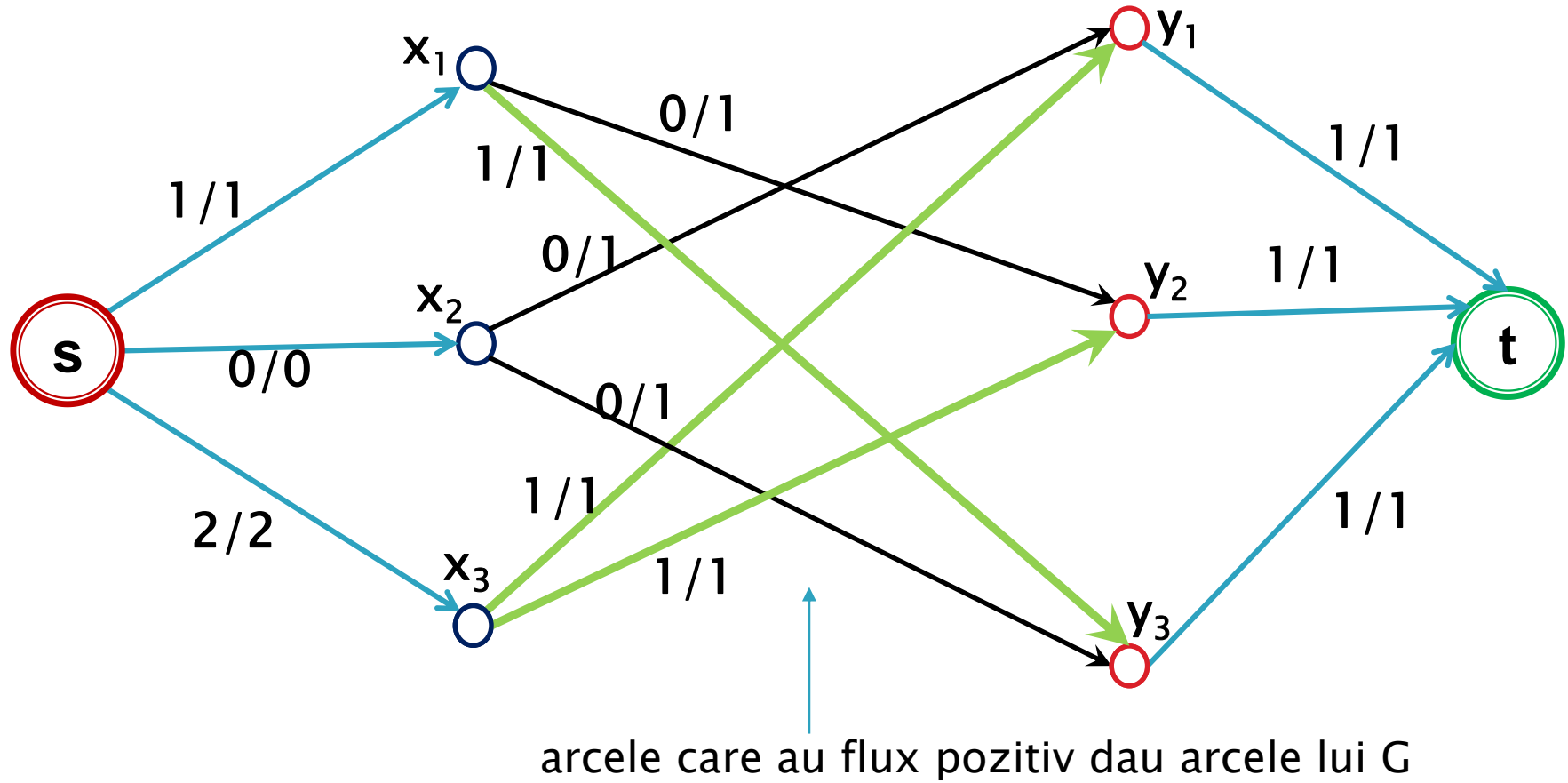
(saturează toate arcele care ies din s și toate arcele care intră în t)

tăieturile $(\{s\}, V - \{s\})$, $(V - \{t\}, \{t\})$ sunt minime

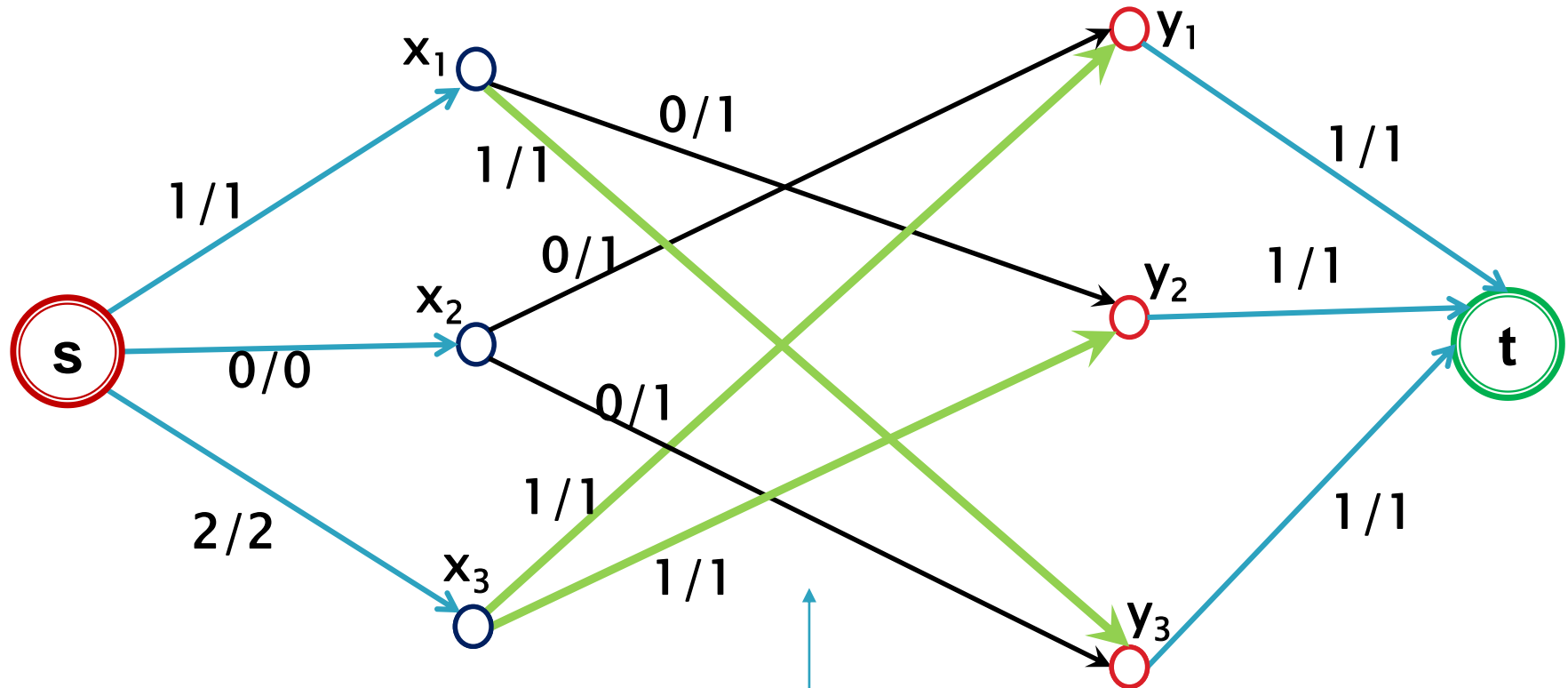
flux în rețea care saturează arcele din s și $t \Rightarrow G$



flux în rețea care saturează arcele din s și $t \Rightarrow G$

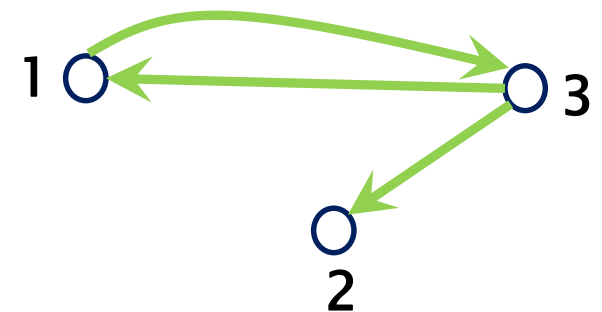


flux în rețea care saturează arcele din s și $t \Rightarrow G$

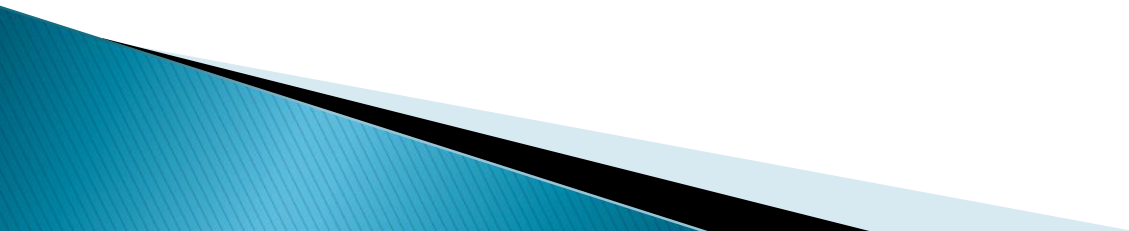


arcele care au flux pozitiv dau arcele lui G

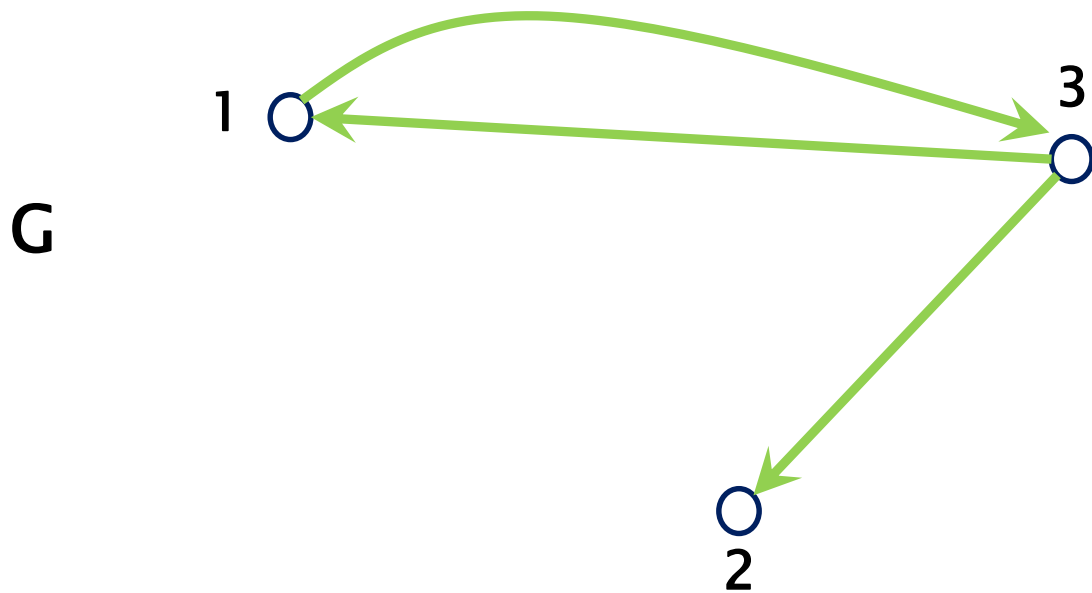
- $x_1y_3 \Rightarrow$ arcul (1, 3)
- $x_3y_1 \Rightarrow$ arcul (3, 1)
- $x_3y_2 \Rightarrow$ arcul (3, 2)



Reciproc



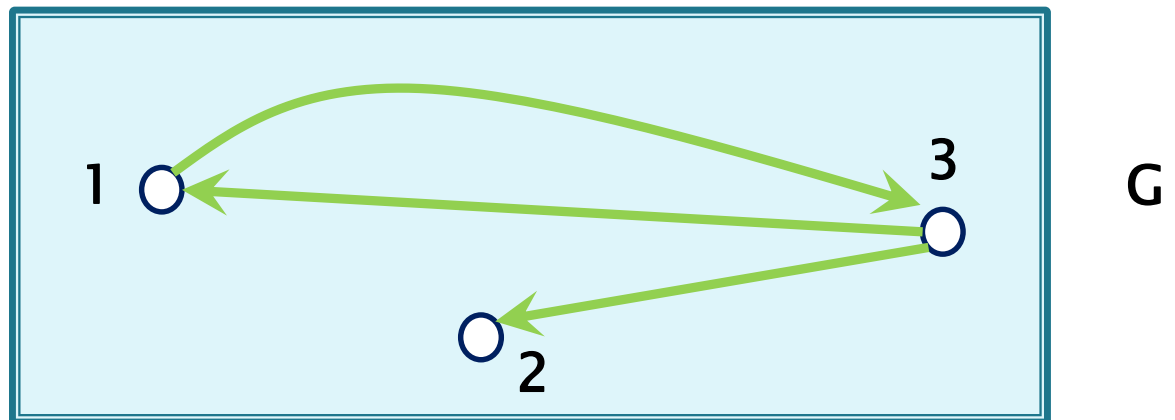
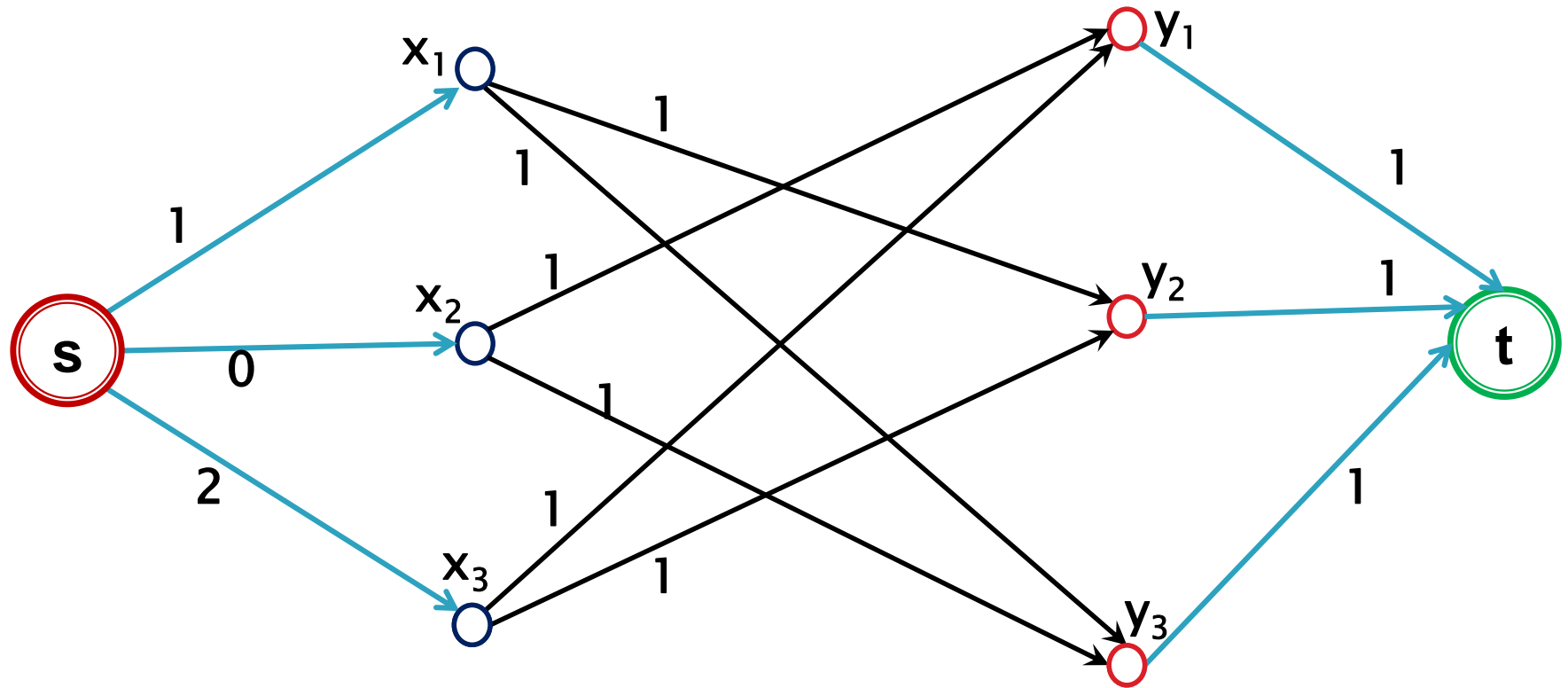
$G \Rightarrow$ flux în rețea



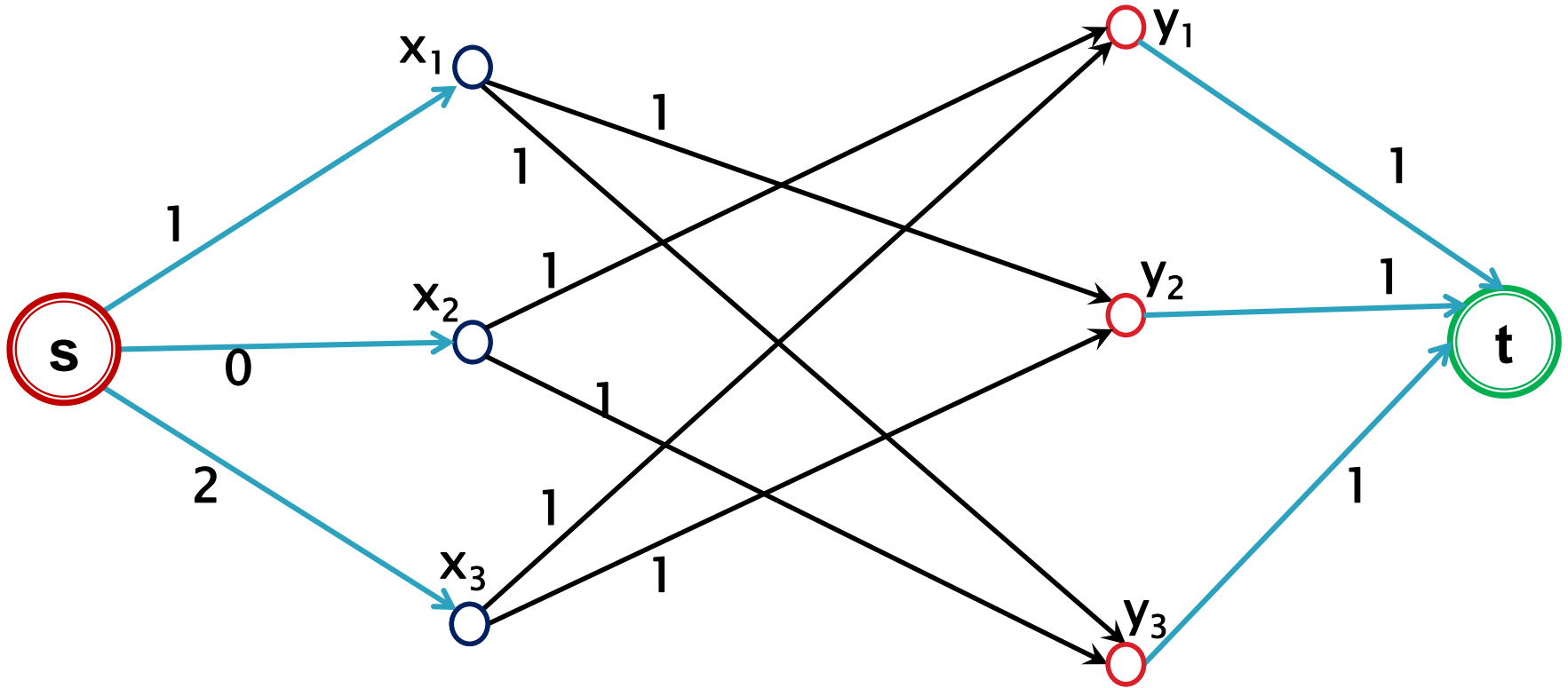
$$s_0^+ = \{1, 0, 2\}$$

$$s_0^- = \{1, 1, 1\}$$

$G \Rightarrow$ flux în rețea

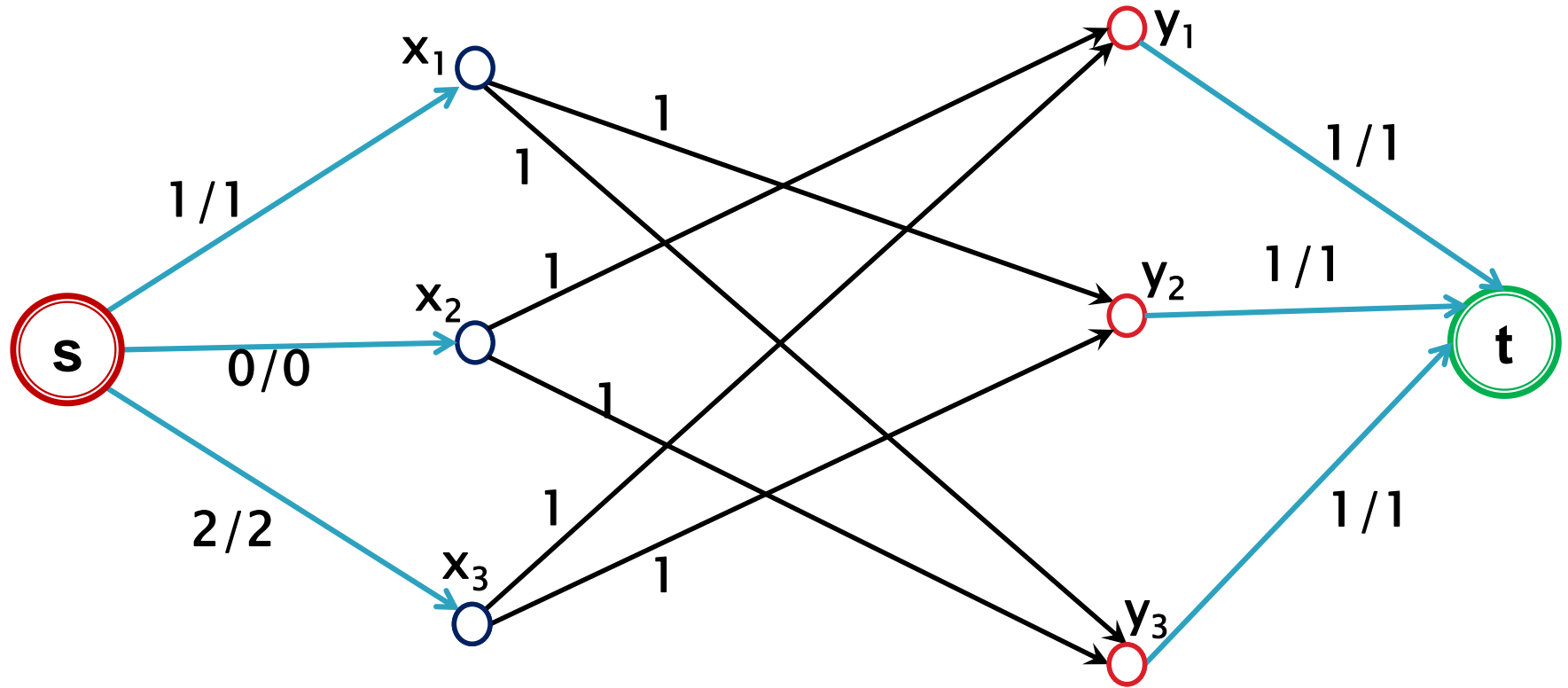


$G \Rightarrow$ flux în rețea

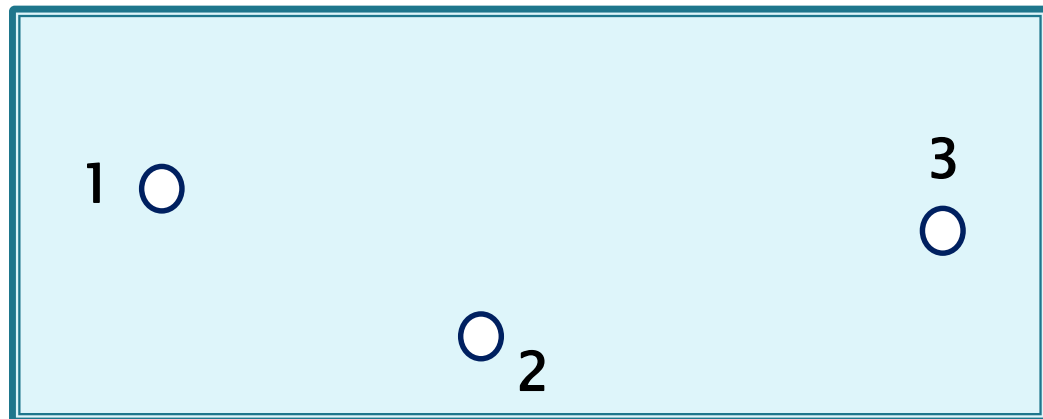


saturăm arcele
din s și t

$G \Rightarrow$ flux în rețea

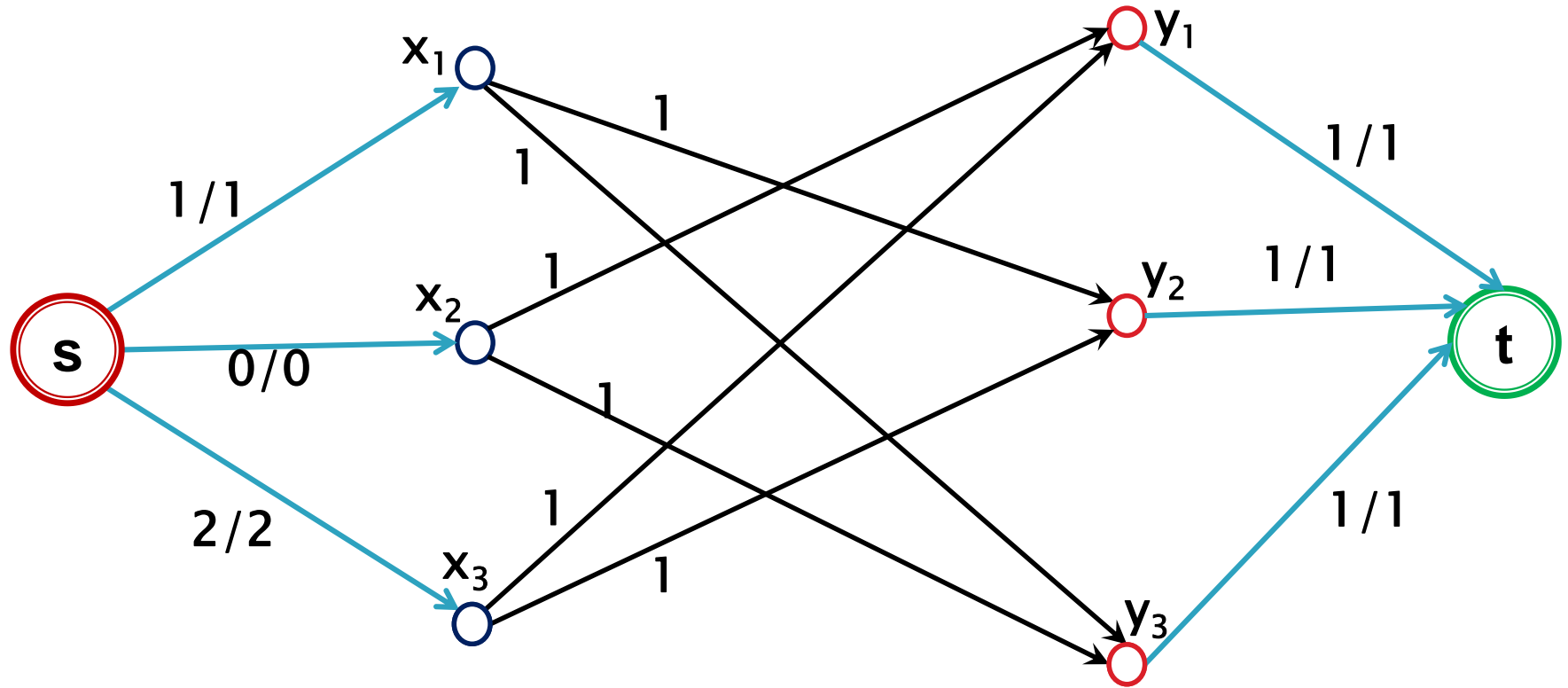


asociem flux
arcelor din G

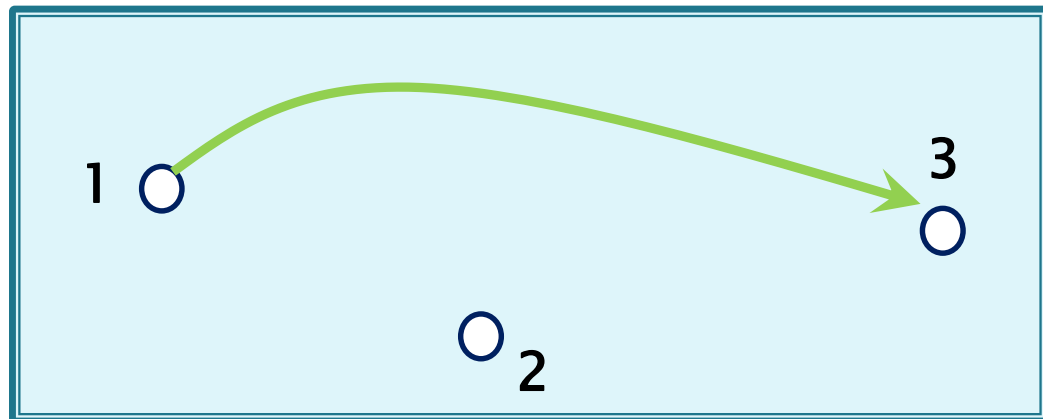


G

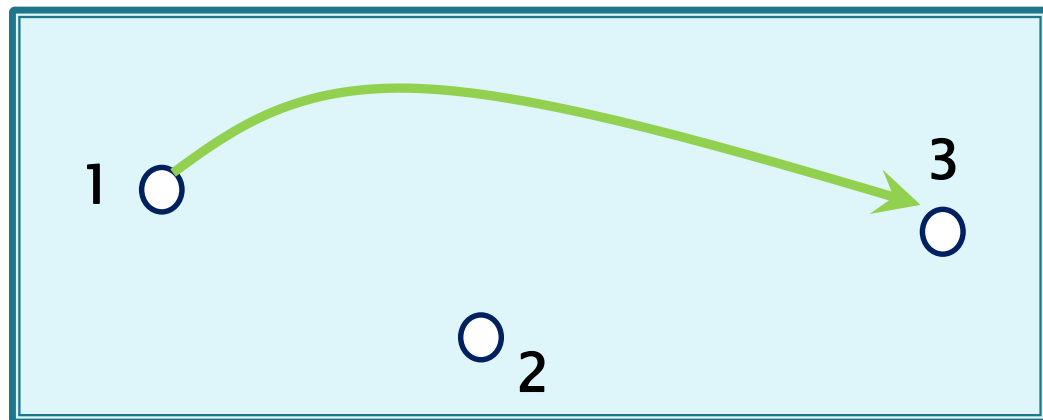
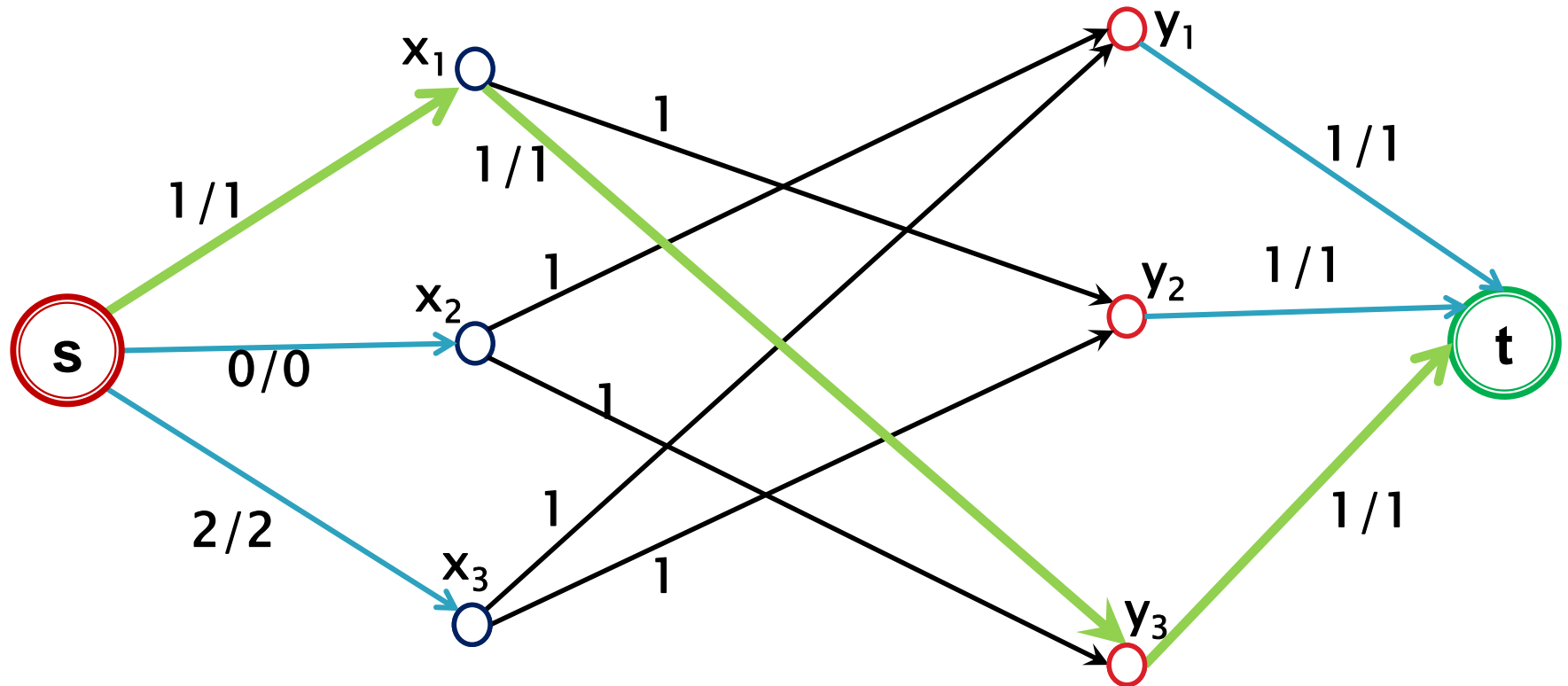
$G \Rightarrow$ flux în rețea



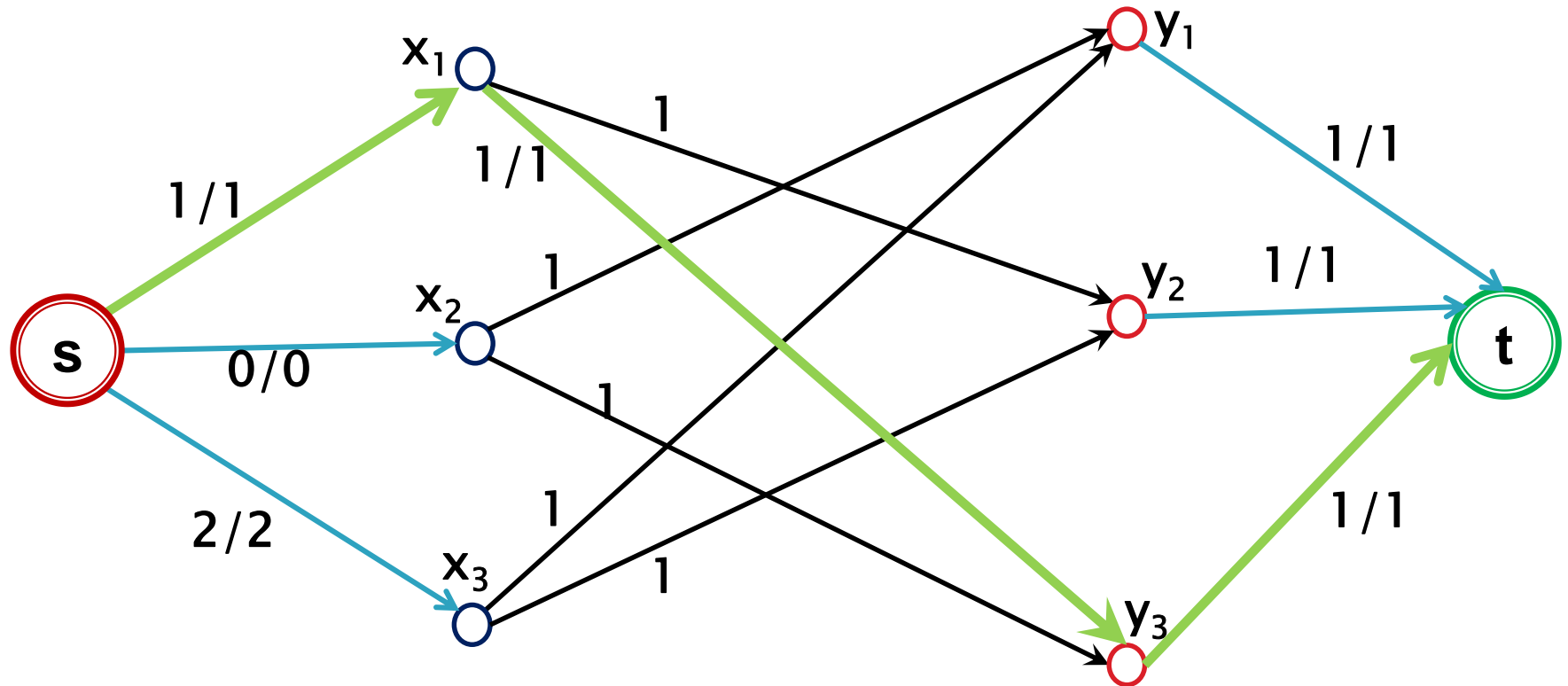
Arc (1,3) \Rightarrow
flux pe arcul $x_1 y_3$



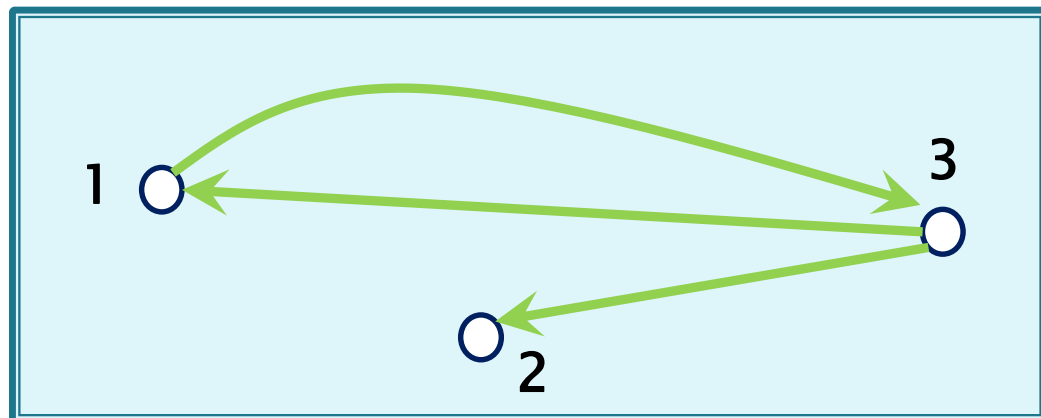
$G \Rightarrow$ flux în rețea



$G \Rightarrow$ flux în rețea

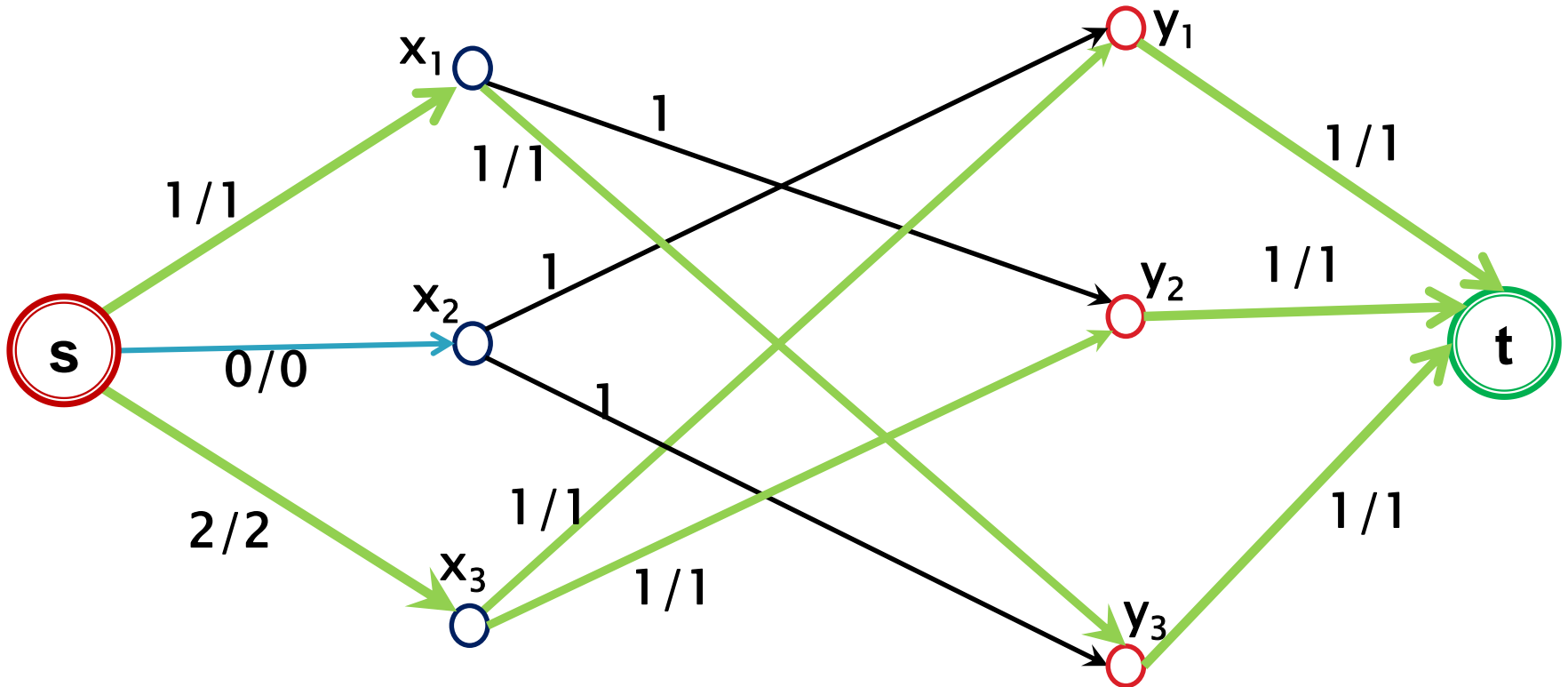


Arce $(3,1), (3,2)$
 $\Rightarrow ?$



G

$G \Rightarrow$ flux în rețea



Restul arcelor au fluxul 0

Algoritm de determinare a unui graf orientat G cu

$$s^+(G) = s_0^+ \text{ și } s^-(G) = s_0^-$$

1. Construim N rețeaua de transport asociată
2. Determinăm f^* flux maxim în N

Algoritm de determinare a unui graf orientat G cu

$$s^+(G) = s_0^+ \text{ și } s^-(G) = s_0^-$$

1. Construim N rețeaua de transport asociată
2. Determinăm f^* flux maxim în N
3. Dacă $\text{val}(f^*) < d_1^+ + \dots + d_n^+$ atunci

Nu există G . STOP

Algoritm de determinare a unui graf orientat G cu

$$s^+(G) = s_0^+ \text{ și } s^-(G) = s_0^-$$

1. Construim N rețeaua de transport asociată

2. Determinăm f^* flux maxim în N

3. Dacă $\text{val}(f^*) < d_1^+ + \dots + d_n^+$ atunci

Nu există G . STOP

4. $V(G) = \{1, \dots, n\}$

$$E(G) = \{ij \mid x_i y_j \in N \text{ cu } f^*(x_i y_j) = 1\}$$

Complexitate: $L \leq c^+(s) = d_1^+ + \dots + d_n^+ = m$

$$|E(N)| = O(n^2) \quad \Rightarrow \quad O(mn^2)$$

Aplicații

Alte probleme de asociere

Probleme de asociere (temă)

- ▶ Se dau 2 mulțimi de obiecte, spre exemplu produse (aflate în fabrici) și clienți (joburi/masini, pagini web/serve, echipe turneu etc).
 - Pentru fiecare produs x se cunoaște
$$c(x) = \text{numărul de unități disponibile din produsul } x$$
 - Pentru fiecare client y se cunoaște
$$c(y) = \text{numărul maxim de unități de produse pe care le poate primi (în total, din toate produsele)}$$
 - Pentru fiecare pereche produs–client (x,y) se cunoaște
$$c(x,y) = \text{numărul maxim de unități din produsul } x \text{ pe care le poate primi clientul } y$$
- Să se determine o modalitate de a distribui cât mai multe produse (unități de produse) clienților cu respectarea constrângerilor**

Probleme de asociere (temă)

- ▶ **Observație** – Problema determinării unui cuplaj de cardinal maxim într-un graf bipartit $G=(X \cup Y, E)$ este un caz particular al acestei probleme, pentru
 - $c(x) = c(y) = 1, \forall x \in X, y \in Y$
 - $c(x, y) = 1$, dacă $xy \in E$
 - $c(x, y) = 0$, dacă $xy \notin E$
- <https://courses.engr.illinois.edu/cs473/sp2010/notes/17-maxflowapps.pdf>

Aplicație

Drumuri arc-disjuncte între două vârfuri.

Conectivitatea unui graf

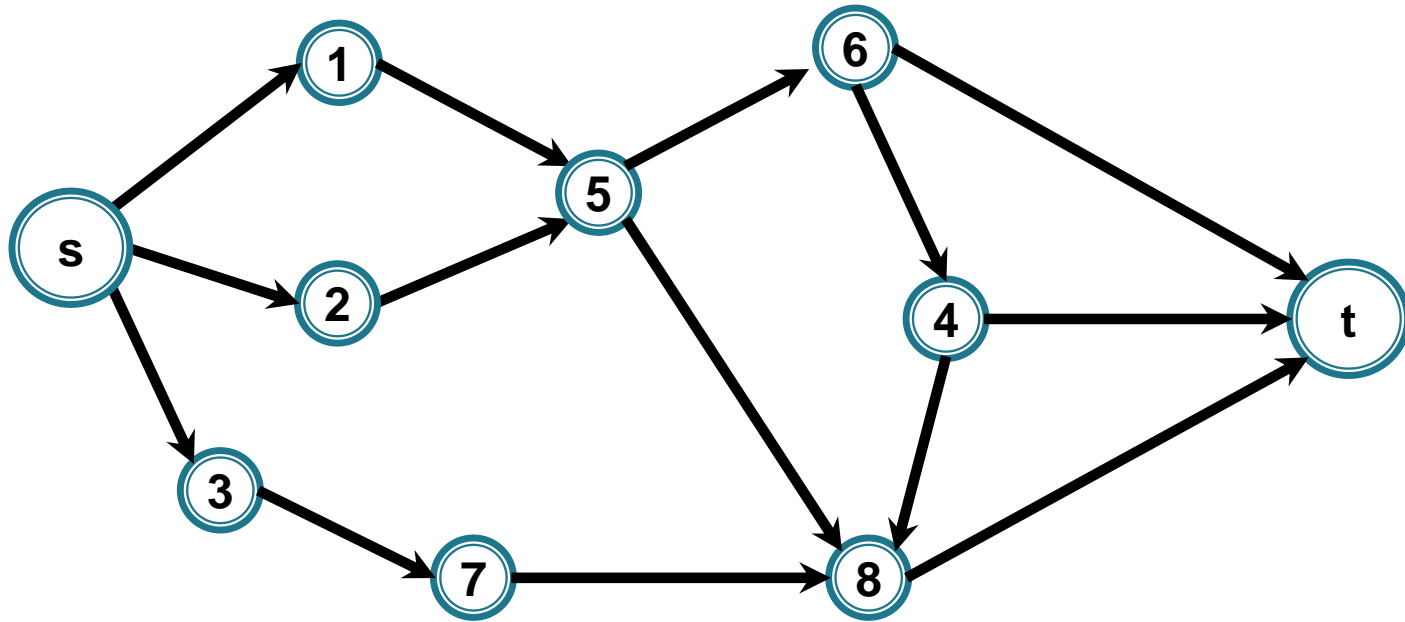
s-t drumuri arc-disjuncte

- ▶ $G = (V, E)$ – orientat, conex (graful neorientat suport)
- ▶ s, t – două vârfuri

Să se determine numărul maxim k de **s-t drumuri elementare arc-disjuncte** (+ k astfel de drumuri)

- Două drumuri P_1, P_2 s.n. **arc-disjuncte** dacă $E(P_1) \cap E(P_2) = \emptyset$

s-t drumuri arc-disjuncte



s-t drumuri arc-disjuncte

- ▶ $G = (V, E)$ – orientat, conex (graful neorientat suport)
- ▶ s, t – două vârfuri

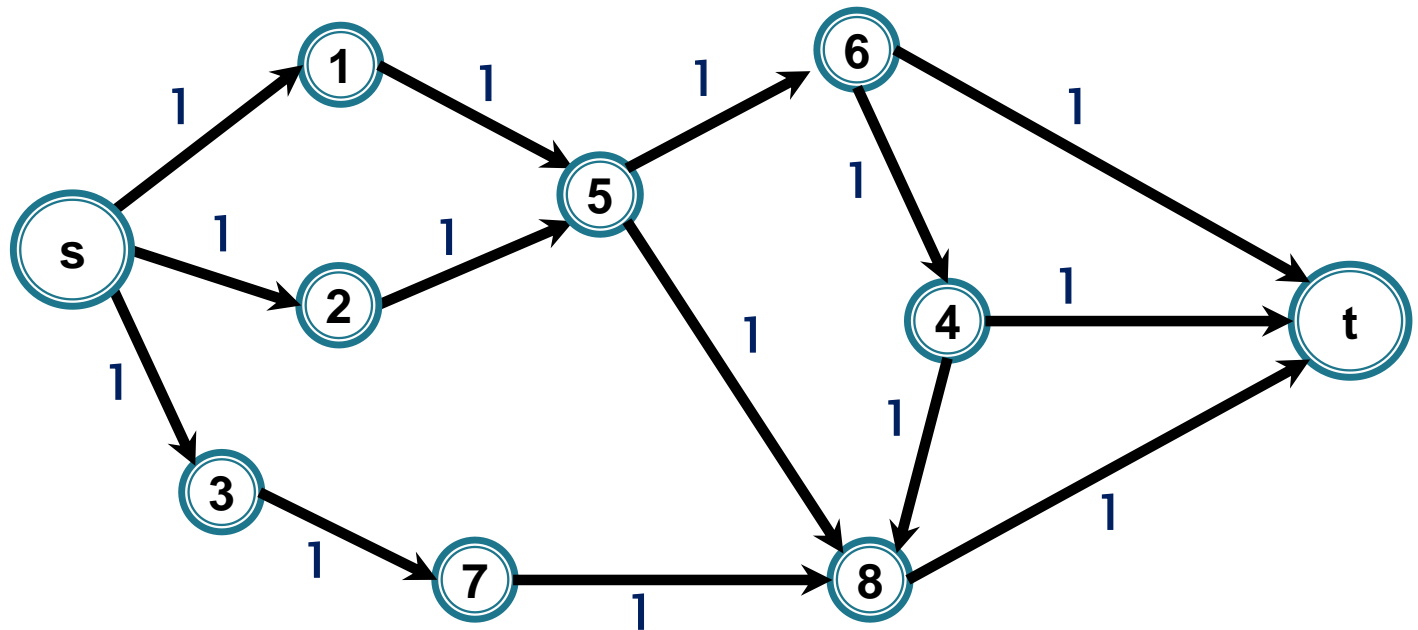
Să se determine numărul maxim k de **s-t drumuri elementare arc-disjuncte** (+ k astfel de drumuri)

- ▶ **Aplicații**
 - Fiabilitatea rețelelor, conectivitate
 - Probleme de strategie
 - Măsuri de centralitate (a unui nod) în rețele sociale
 - Jon Kleinberg, Éva Tardos, **Algorithm Design**, Addison-Wesley 2005

s-t drumuri arc-disjuncte

► Intuitiv:

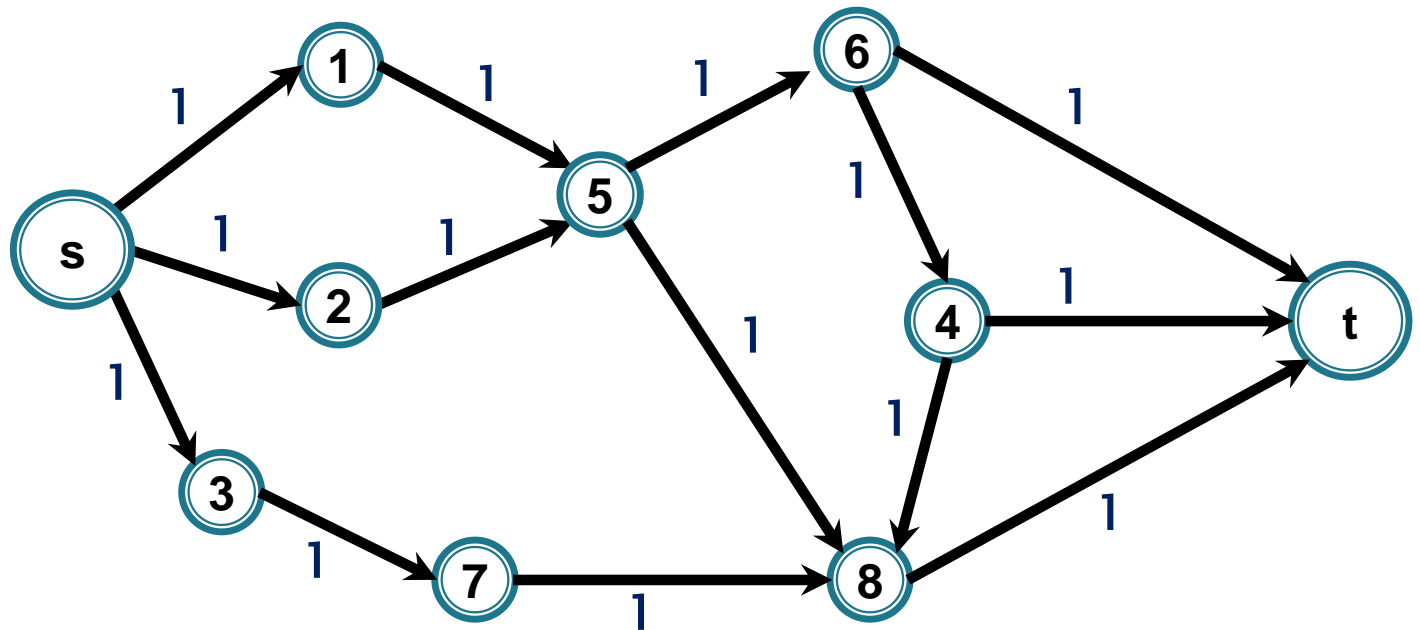
- Asociem fiecărui arc capacitatea 1
- Fluxul maxim: $f(e) \in \{0, 1\}$



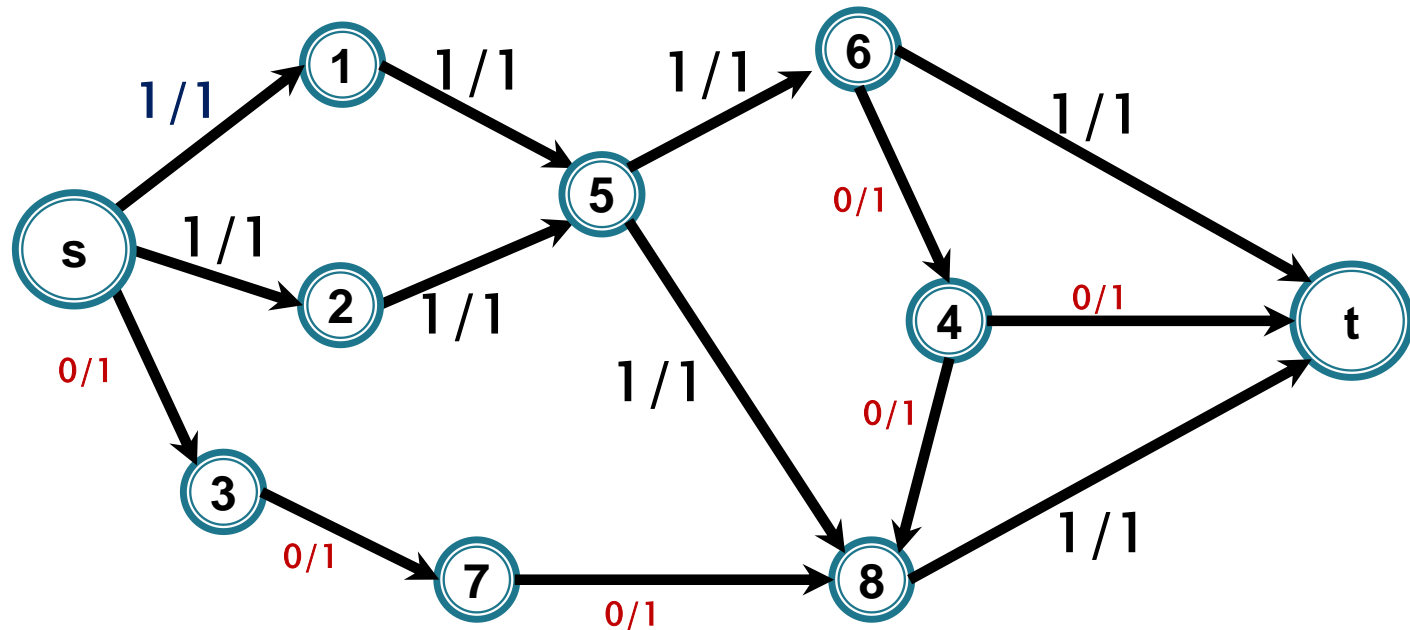
s-t drumuri arc-disjuncte

► Intuitiv:

- Asociem fiecărui arc capacitatea 1
- Fluxul maxim: $f(e) \in \{0, 1\}$
- Un drum de la s la t = **traseul parcurs de o unitate de flux de la s la t**
- Numărul de s-t drumuri arc-disjuncte = valoarea fluxului maxim

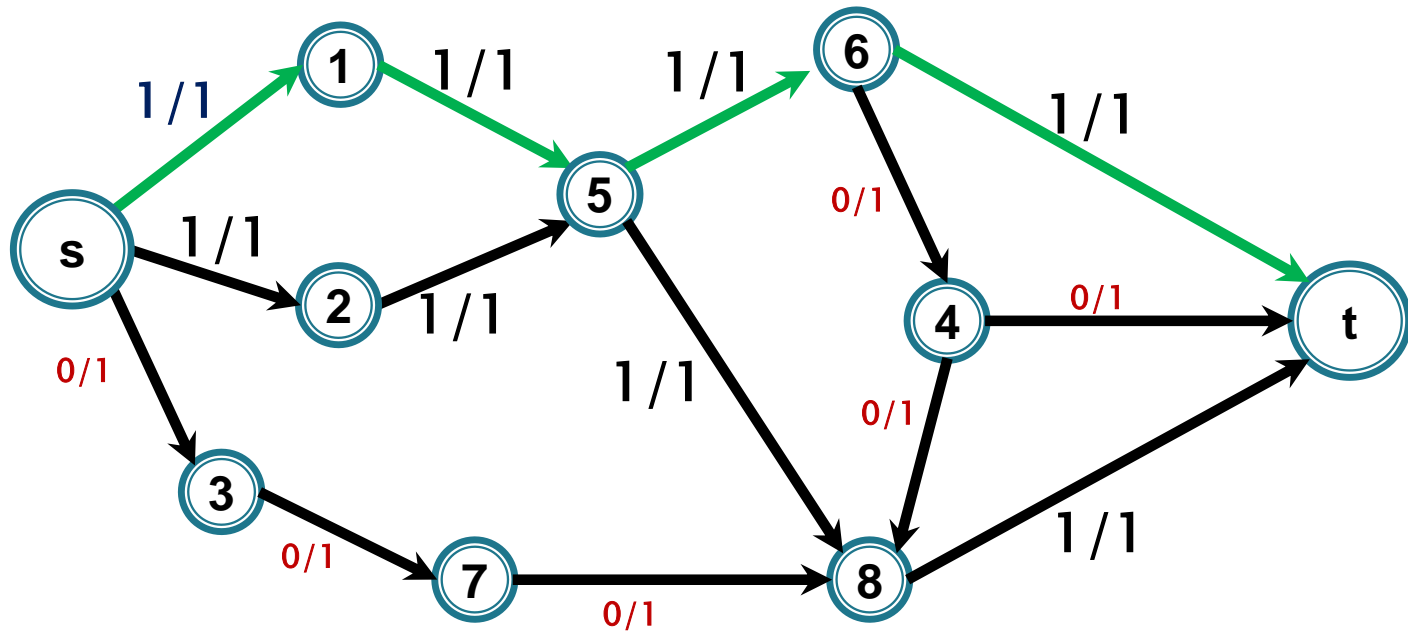


s-t drumuri arc-disjuncte

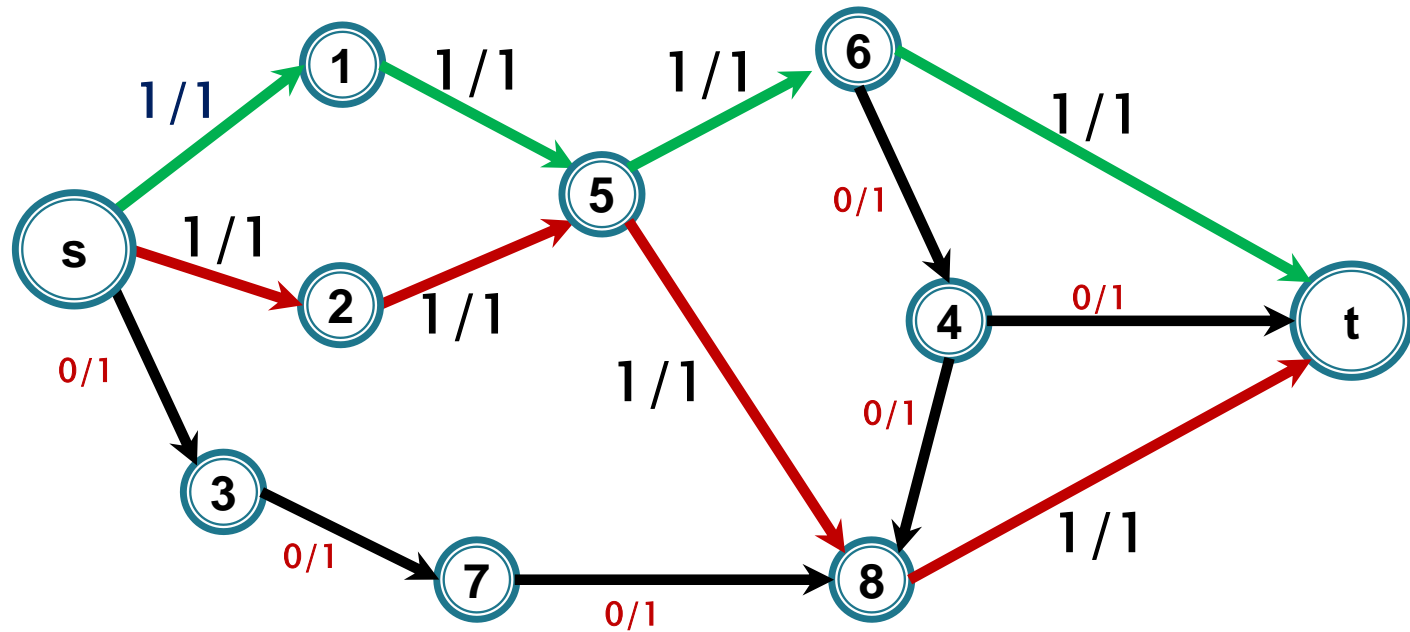


Fluxul maxim

s-t drumuri arc-disjuncte



s-t drumuri arc-disjuncte



s-t drumuri arc-disjuncte

► Teorema lui Menger

Fie G graf orientat, s, t două vârfuri distincte în G .

Numărul minim de arce care trebuie eliminate pentru ca s și t să nu mai fie conectate printr-un drum (să fie **separate**) =
numărul maxim de drumuri arc-disjuncte de la s la t

s-t drumuri arc-disjuncte

► Teorema lui Menger

Fie G graf orientat, s , t două vârfuri distincte în G .

Numărul minim de arce care trebuie eliminate pentru ca s și t să nu mai fie conectate printr-un drum (să fie **separate**) =
numărul maxim de drumuri arc-disjuncte de la s la t



O astfel de mulțime de arce se poate determina cu algoritmul Ford Fulkerson?

s-t drumuri arc-disjuncte

► Teorema lui Menger

Fie G graf orientat, s , t două vârfuri distincte în G .

Numărul minim de arce care trebuie eliminate pentru ca s și t să nu mai fie conectate printr-un drum (să fie **separate**) =
numărul maxim de drumuri arc-disjuncte de la s la t

O astfel de mulțime de arce se poate determina cu algoritmul Ford Fulkerson

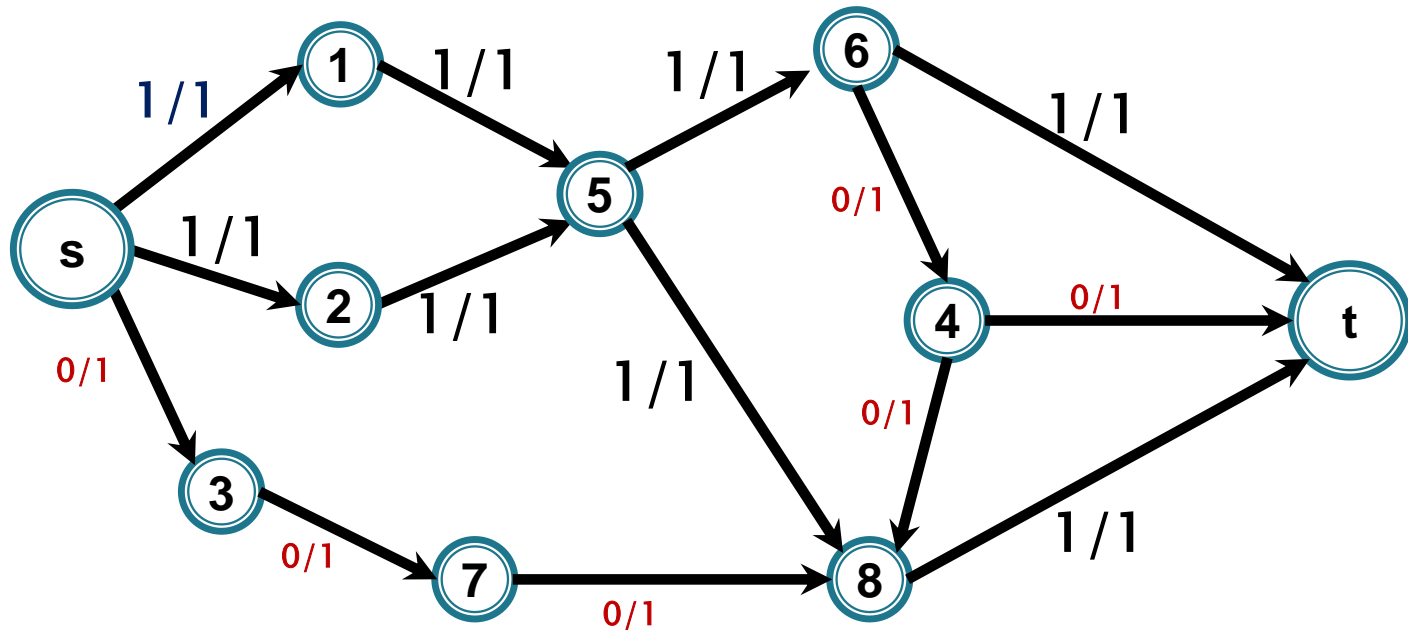


Sunt arcele directe ale tăieturii minime

s-t drumuri arc-disjuncte



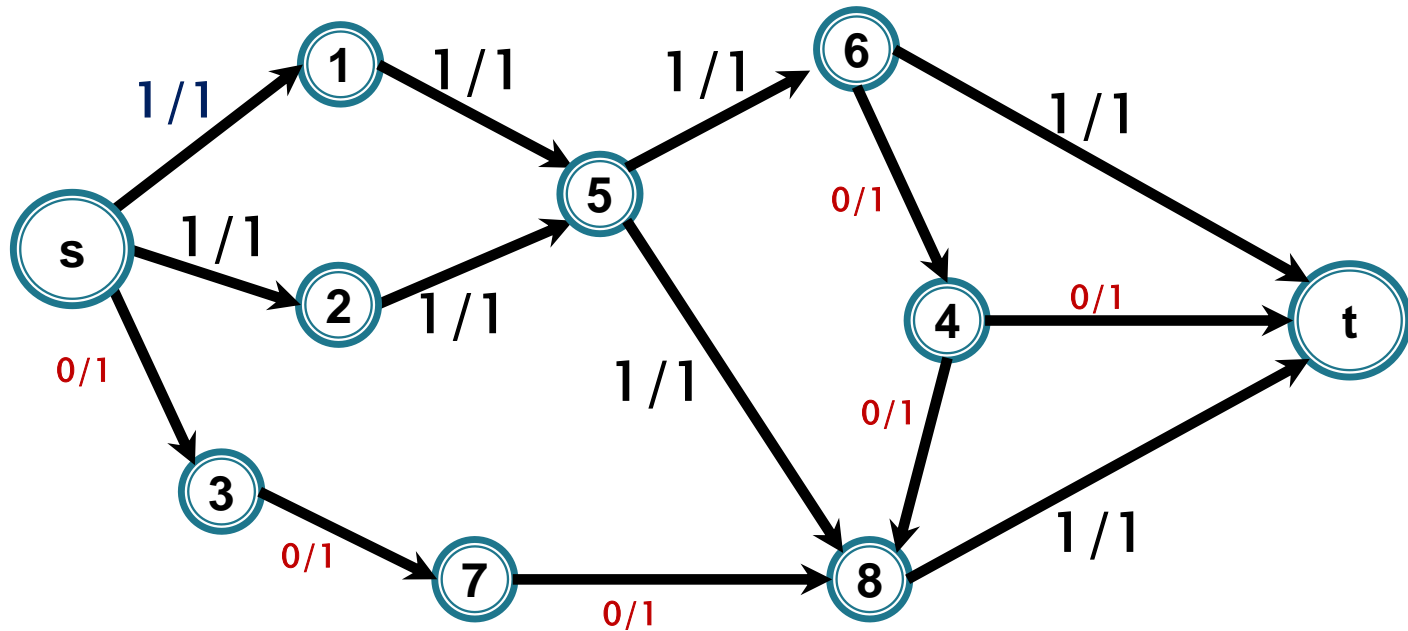
Cum determinăm tăietura minimă?



s-t drumuri arc-disjuncte



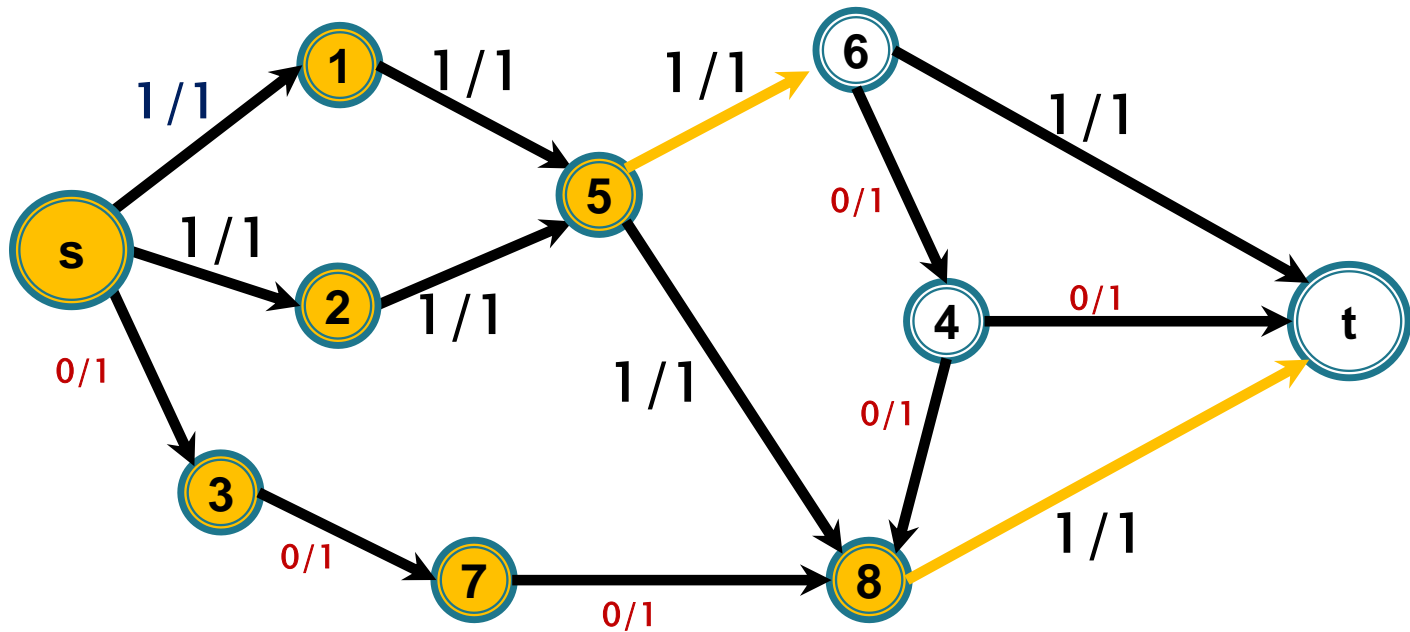
Mulțimea vârfurilor accesibile din s prin lanțuri f-nesaturate



s-t drumuri arc-disjuncte



Mulțimea vârfurilor accesibile din s prin lanțuri f-nesaturate



s-t drumuri arc-disjuncte

Variante

- ▶ Aceeași problemă pentru
 - $G = (V, E)$ – neorientat conex, $|E| > 2$
- ▶ Aceeași problemă pentru **vârfuri** (s-t drumuri care nu au vârfuri interne în comun)

s-t drumuri arc-disjuncte

- ▶ **Muchie-conectivitatea lui G** $k'(G) =$ cardinalul minim al unei mulțimi de muchii $F \subseteq E$ cu proprietatea că $G - F$ nu mai este conex
- ▶ Dacă $k'(G) \geq t$, G se numește **t-muchie conex**
 - Amintim (laborator+seminar):
 - există muchie critică $\Rightarrow G$ este 1-conex
 - Nu există muchie critică $\Rightarrow G$ este 2-conex
- ▶ **Cu ajutorul algoritmului de flux maxim putem determina (muchie)-conectivitatea unui graf**