

Algoritmi Fundamentali

Ruxandra Marinescu – Ghemeci

verman@fmi.unibuc.ro

ruxandra.marinescu@fmi.unibuc.ro

ruxandra.marinescu@unibuc.ro

Programa



Programa

- ▶ Algoritmi în grafuri
 - Parcurgeri
 - Arbori parțiali de cost minim
 - Distanțe în grafuri, drumuri minime
 - Fluxuri în rețele de transport
 - Grafuri planare
 - Probleme de colorare
 - Grafuri euleriene și hamiltoniene
- ▶ Șiruri de caractere

Structura

- ▶ **Curs**

- 2 ore pe săptămâna

- ▶ **Laborator**

- 2 ore la două săptămâni
 - limbaj C/C++ sau Python

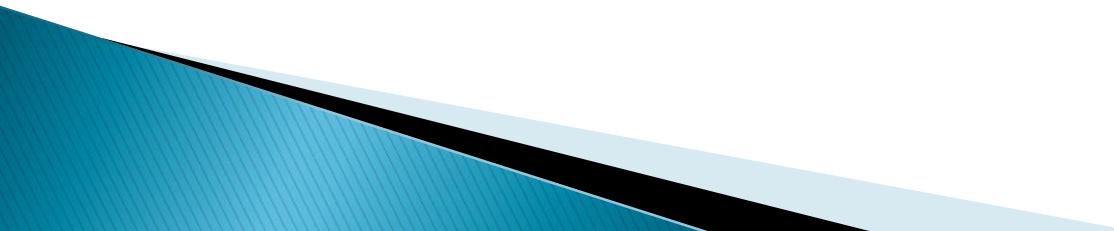
- ▶ **Seminar**

- 2 ore la două săptămâni
 - discuții probleme curs/laborator, complexități + exerciții

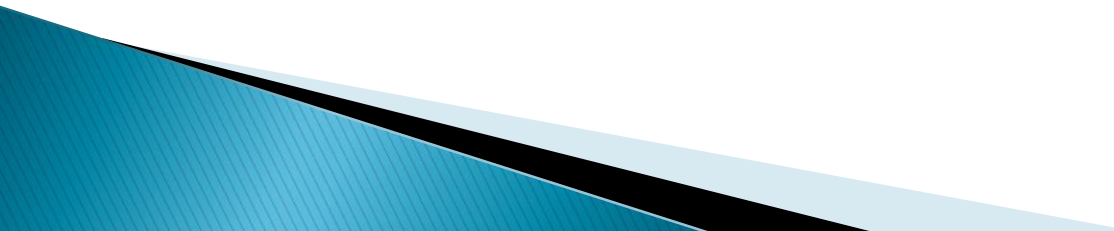
Obiectiv general

- ▶ Dezvoltarea gândirii algoritmice prin familiarizarea cu algoritmi fundamentali și aplicații ale acestora

Obiective specifice

- ▶ Prezentarea principalelor noțiuni și rezultate + **utilitatea acestora**
 - ▶ **Modelarea** problemelor cu ajutorul grafurilor + **elaborarea de algoritmi** de grafuri pentru rezolvarea acestora
 - ▶ Justificare a **corectitudinii** algoritmilor propuși + estimarea eficienței acestora
 - ▶ **Implementarea** eficientă a algoritmilor
- 

Motivații

- ✓ Domeniu fundamental
 - ✓ Numeroase aplicații în diverse domenii
procesarea imaginilor, bioinformatică, rețele, baze de date, proiectare, strategii
 - ✓ Instrumente pentru a dezvolta algoritmi eficienți
 - ✓ Probleme de algoritmică ce apar des la interviuri
 - ✓ Baza pentru cursuri viitoare
- 

Evaluare



Evaluare

- ▶ **Examen scris** **40 %** din notă
- ▶ **Laborator** **50 %** din notă
 - **teme obligatorii** – punctaj teme_oblig ≤ 4
 - **teme suplimentare** (mai dificile) – punctaj tema_suplim ≤ 6
 - **test de laborator** – punctaj test ≤ 6
 - Punctajul de la temele suplimentare poate înlocui punctajul de la testul de laborator sau poate contribui la creșterea acestuia .

Astfel, nota finala la laborator va fi

$$\text{tema_oblig} + \min(6, \max(\text{tema_suplim}, \frac{\text{tema_suplim}}{3} + \text{test}))$$

- ▶ **Seminar** **10 %** din notă
 - teme de seminar (!trebuie prezentate în cadrul seminarului)
 - bonus 1 punct

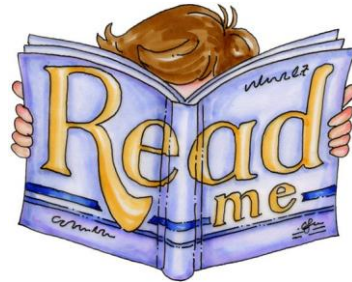
Evaluare

- ▶ Condiție necesară:

Nota (nerotunjită) de la laborator ≥ 5 puncte

Nota (nerotunjită) de la examen scris ≥ 5 puncte

Bibliografie



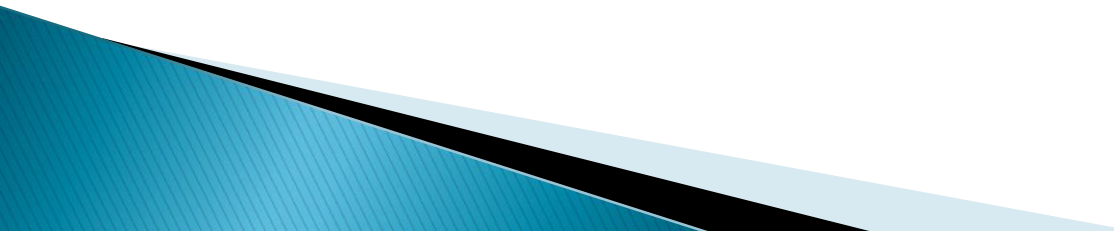
BIBLIOGRAFIE – Algoritmică

- Jon Kleinberg, Éva Tardos, **Algorithm Design**, Addison–Wesley 2005
<http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/>
 - T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.R. Rivest– **Introducere in algoritmi**, MIT Press, trad. Computer Libris Agora
 - S. Dasgupta, C.H. Papadimitriou, U.V. Vazirani – **Algorithms**, McGraw–Hill, 2008
 - Steven S. Skiena – **Algorithms**, Springer, 2008
 - H. Georgescu, **Tehnici de programare**, Editura Universității din București, 2005
- 

BIBLIOGRAFIE – Teoria grafurilor

- Douglas B. West, **Introduction to Graph Theory**, Prentice Hall 1996, 2001
- J.A. Bondy, U.S.R Murty – **Graph theory with applications**, The Macmillan Press 1976 / Springer 2008
- Dragoș–Radu Popescu, **Combinatorică și teoria grafurilor**, Editura Societatea de Științe Matematice din România, București, 2005.

BIBLIOGRAFIE – Exerciții curs + seminar

- Dragoș–Radu Popescu, R. Marinescu–Ghemeci, **Combinatorică și teoria grafurilor prin exerciții și probleme**, Editura Matrixrom, 2014
 - Ioan Tomescu, **Probleme de combinatorica si teoria grafurilor / Problems in Combinatorics and Graph Theory**
- 

BIBLIOGRAFIE

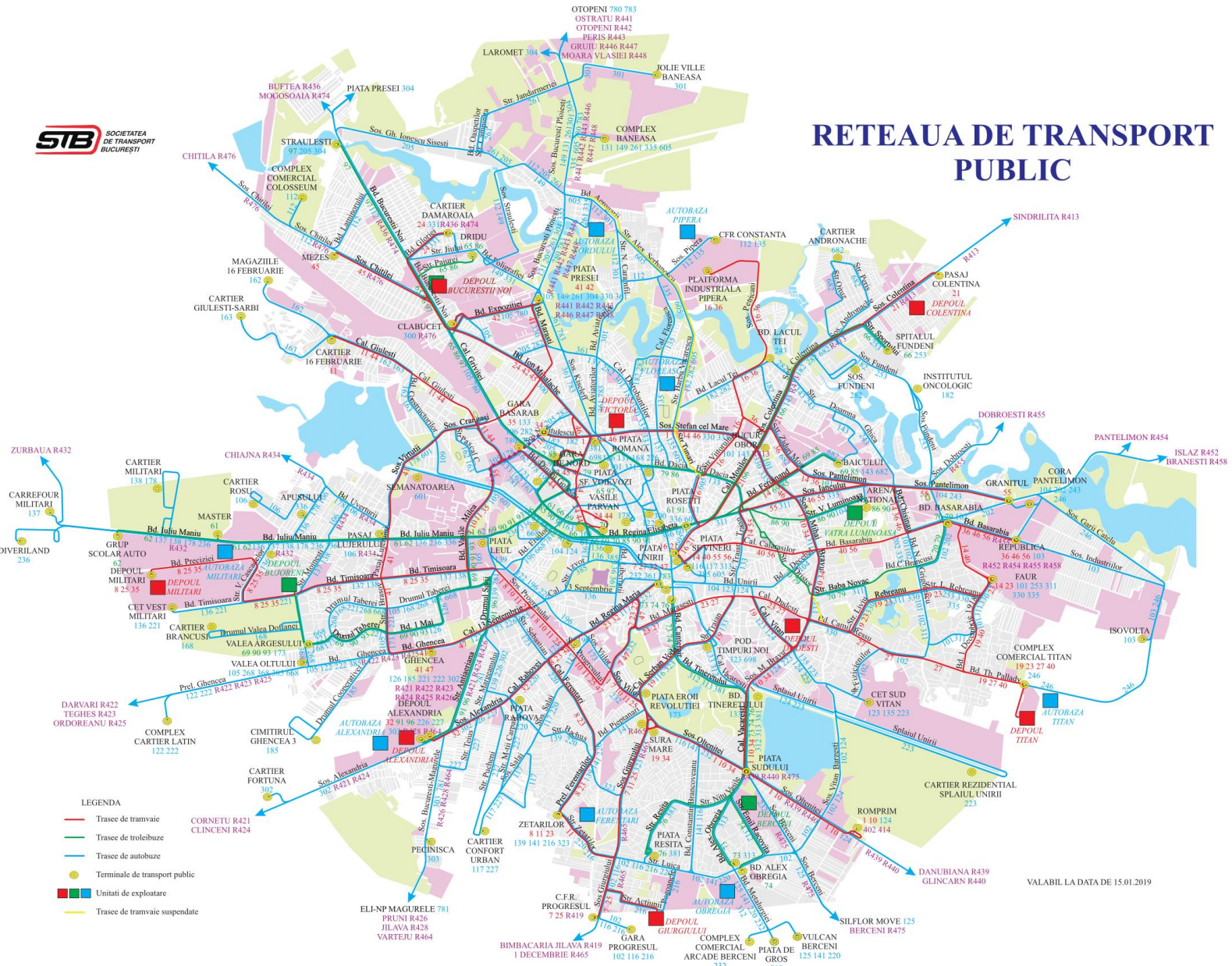
- ❖ **coursera.org**
- ❖ **infoarena.ro, leetcode.com ...**

Materiale curs, laborator, seminar

- MoodleUB
- MS Teams
- Consultații

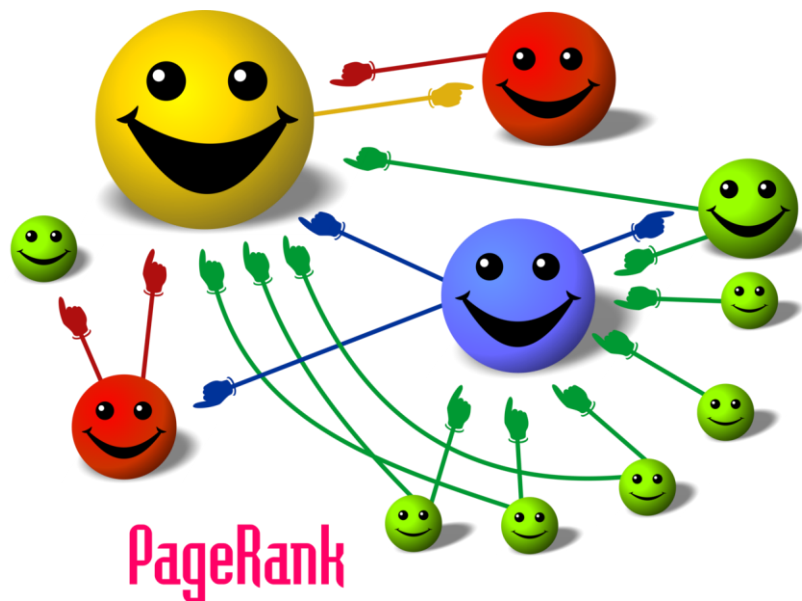
Aplicații

Rețele de transport în comun, trasee turistice, gps

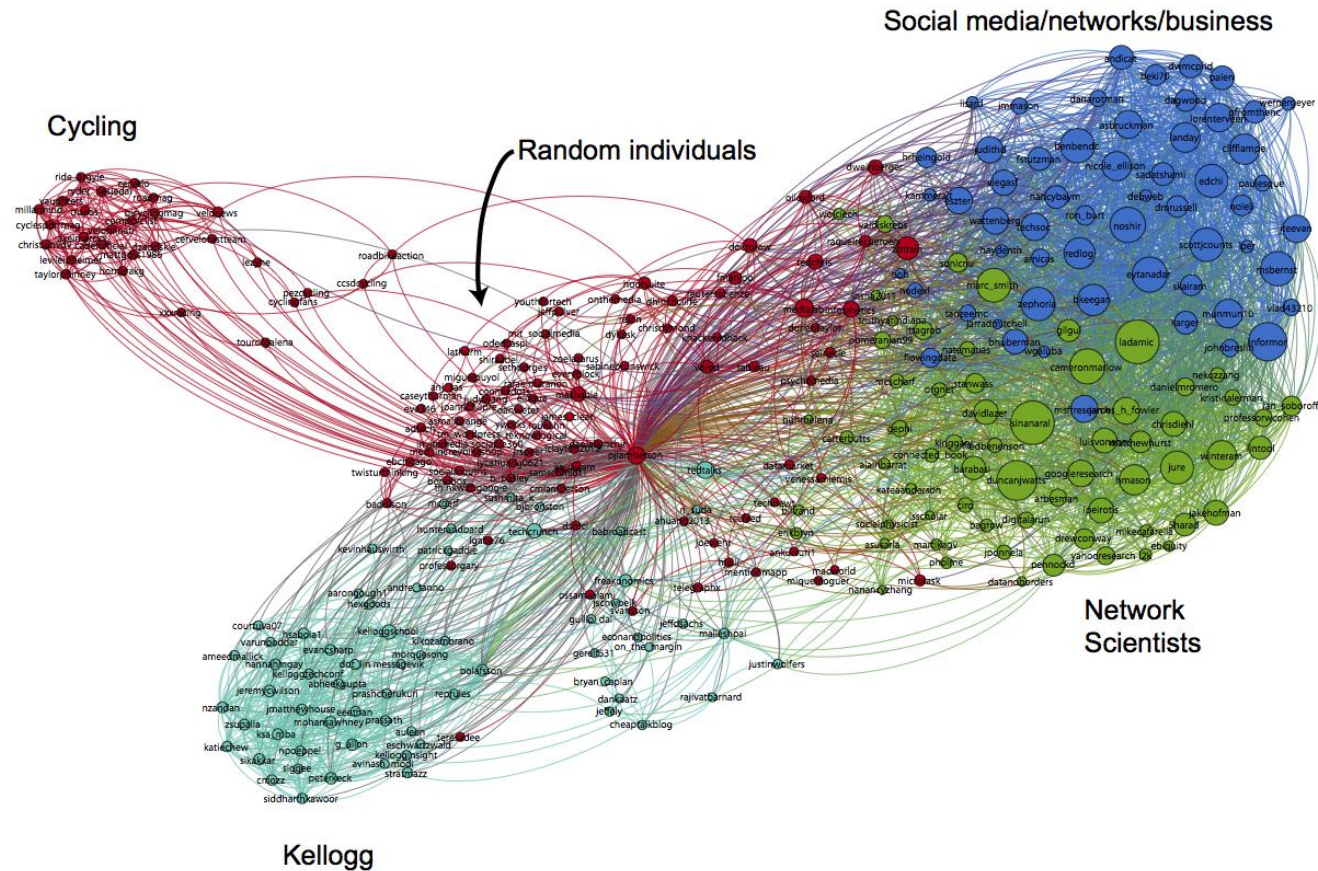


Analiza rețelelor

- ▶ Interacțiuni
 - ▶ Rețele sociale
 - ▶ Rețele biologice
 - ▶ Rețele de citări, de știri, de spionaj etc



Rețele sociale



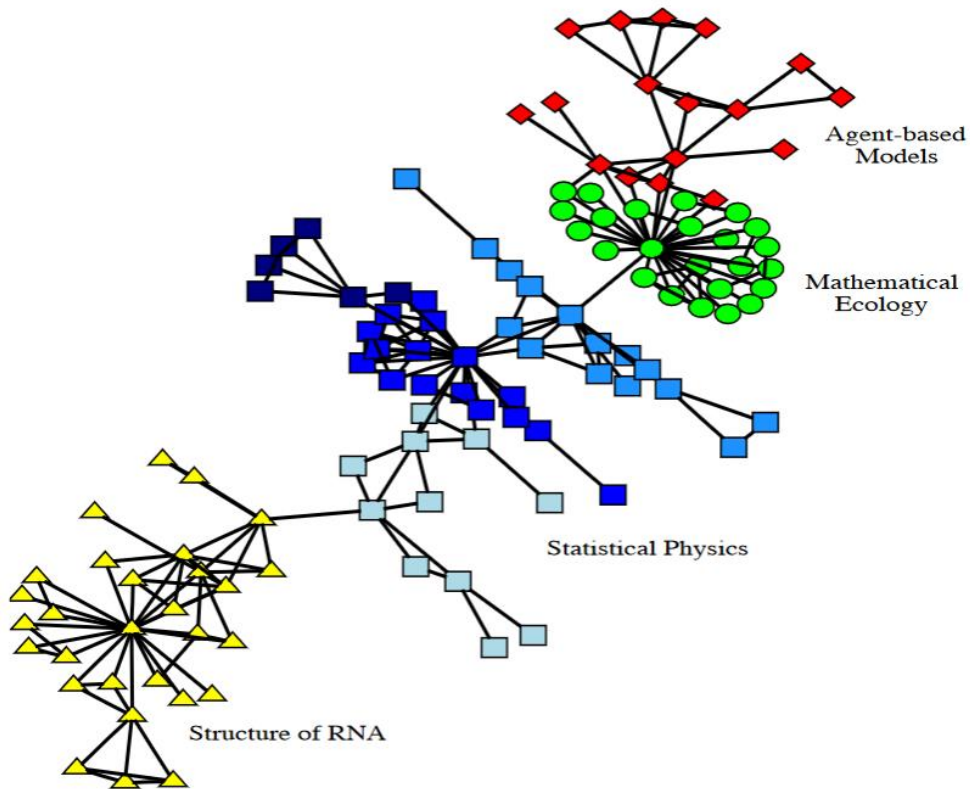
<http://social-dynamics.org/twitter-network-data/>

Softuri pentru vizualizarea și analiza rețelelor

<https://gephi.org/>

<http://nodexl.codeplex.com/>

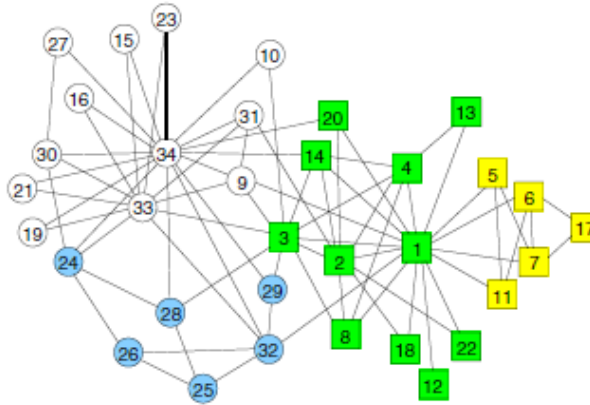
Rețele sociale



**Rețea de colaborări între
cercetătorii de la Institutul
Santa Fe**

**Clusterelor – corespund
departamentelor de cercetare**

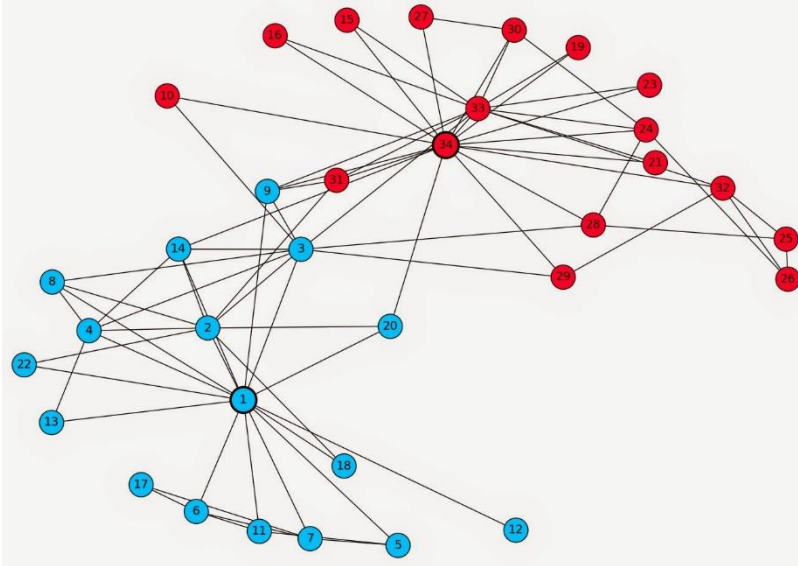
Rețele sociale



**Clubul de carate al lui Zachary:
membri + interacțiuni în afara
clubului**

⇒ comunități

Santo Fortunato, Community detection in graphs,
Physics Reports 486 (2010) 75–174



Zachary, W. W. (1977), Information Flow
Model for Conflict and Fission in Small
Groups, J. of Anthropological Research 33,
452–473.

<http://historicaldataninjas.com/karate-club-network/>
https://en.wikipedia.org/wiki/Zachary%27s_karate_club

Rețele

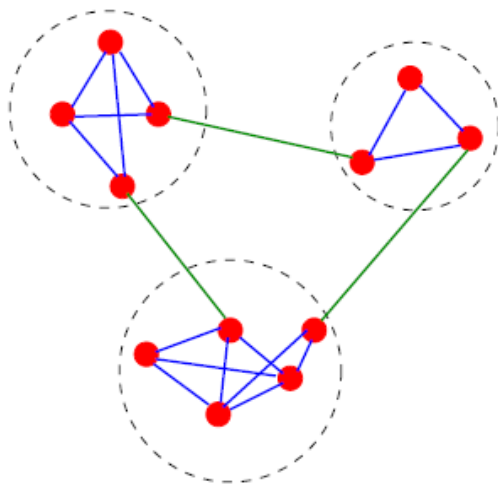
- ▶ **Rețele de știri – detectarea de știri false**

<https://neo4j.com/blog/machine-learning-graphs-fake-news-epidemic-part-2/>

<https://cambridge-intelligence.com/detecting-fake-news/>

- ▶ **Rețele de teroriști**

Rețele



Numeroase noțiuni de grafuri folosite în analiza rețelelor sociale:

- grad \Rightarrow centralitate
- distanță, diametru
- componente biconexe, tare conexe
- conectivitate, tăieturi, flux etc

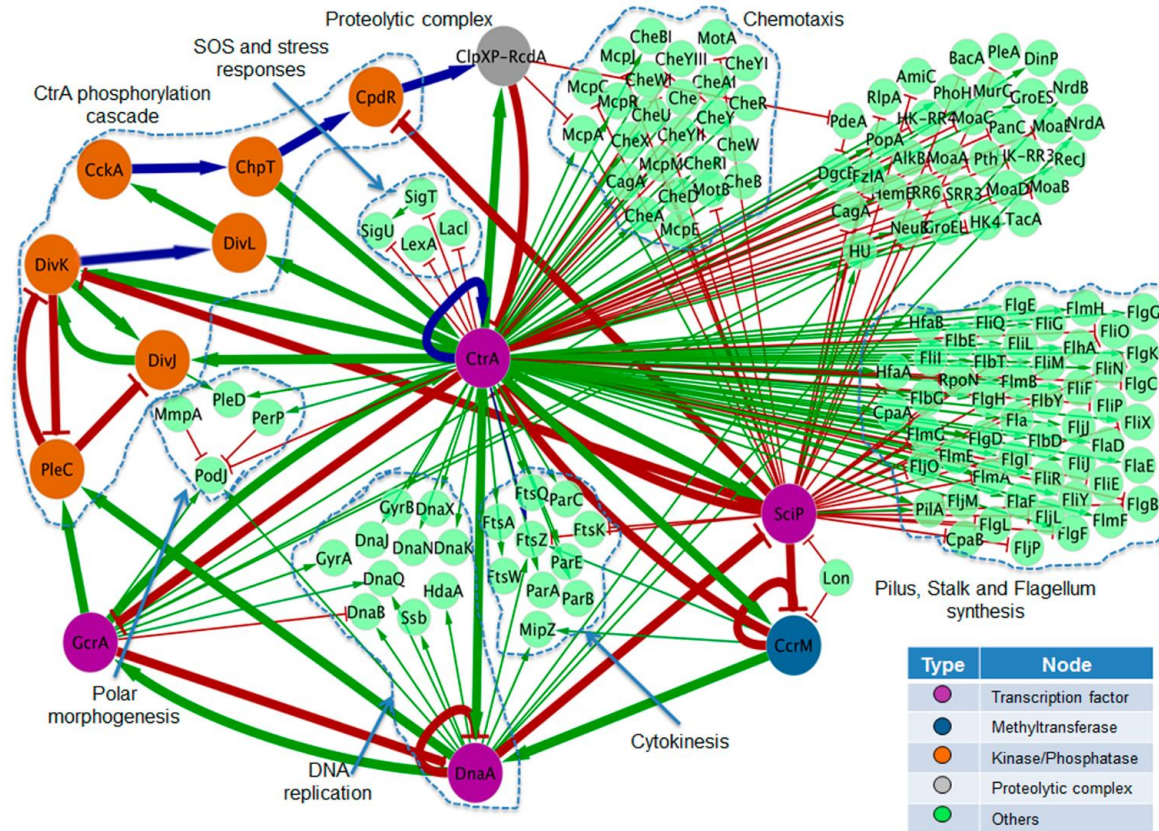
Bioinformatică

- ▶ grafuri de interacțiuni gene/proteine

http://domaingraph.bioinf.mpi-inf.mpg.de/docu/dg_network.php

- ▶ clustering
- ▶ grafuri de intersecție, grafuri De Bruijn
- ▶ arbori filogenetici

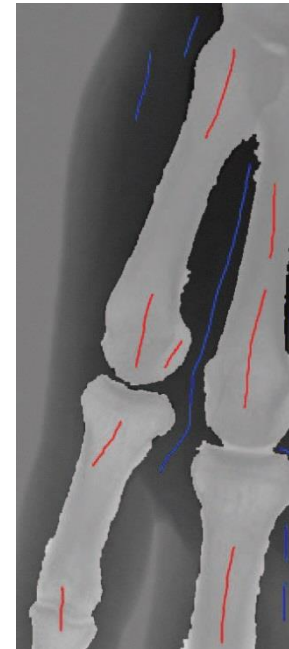
Bioinformatică



https://openi.nlm.nih.gov/detailedresult.php?img=PMC4219702_pone.0111116.g002&req=4

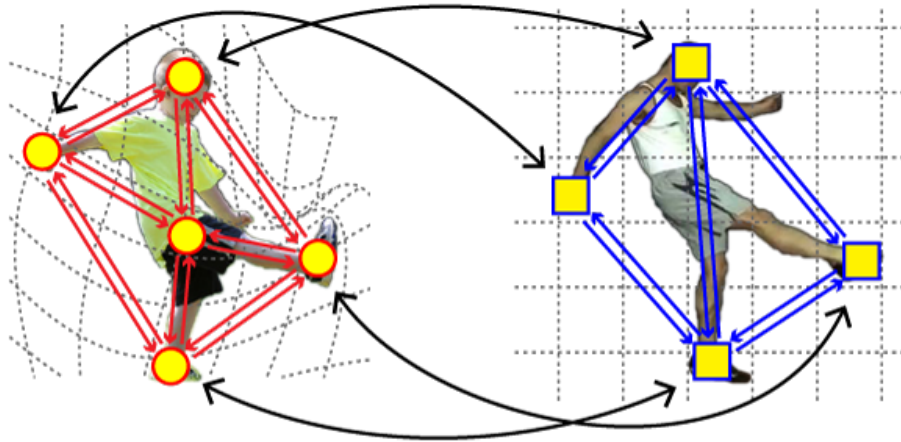
Image segmentation

- tăietura minimă – fluxuri în rețele de transport
- medicină

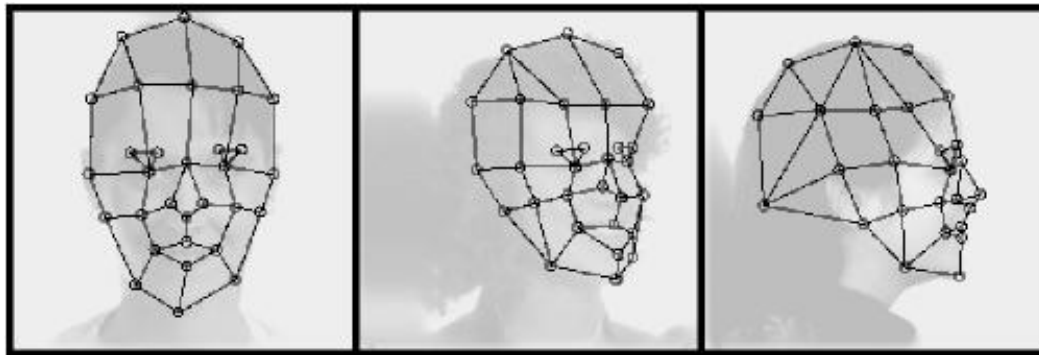


Spatially Varying Color Distributions for Interactive Multi-Label Segmentation (C. Nieuwenhuis, D. Cremers), In IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 35, 2013

Computer vision



F. Zhou and F. De la Torre, Deformable Graph Matching, IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2013 http://www.f-zhou.com/gm/2013_CVPR_DGM.pdf

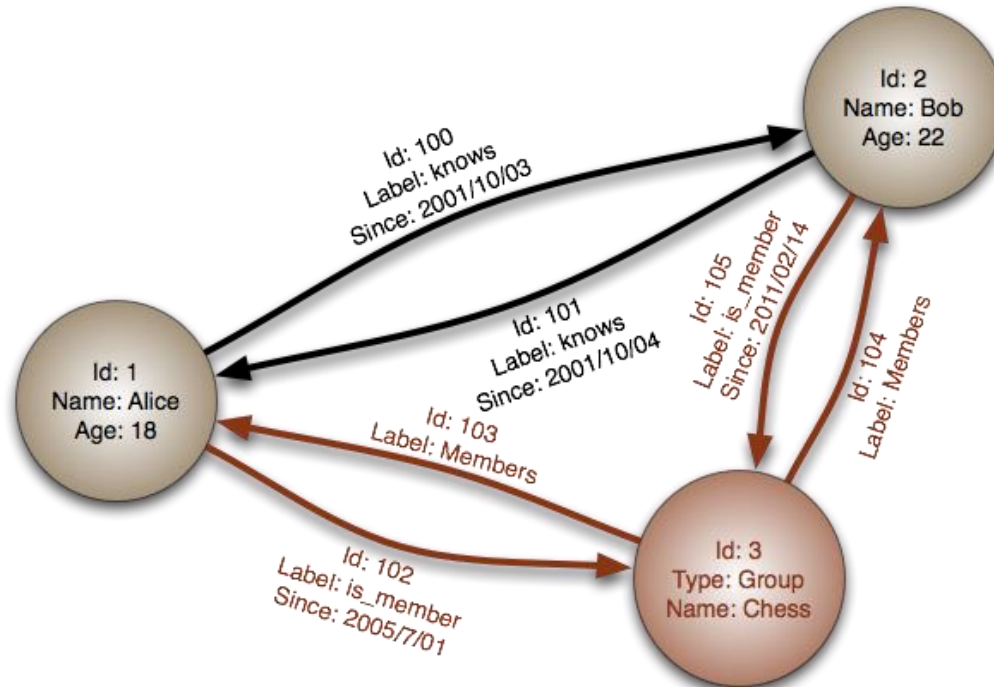


<https://www.ini.rub.de/PEOPLE/wiskott/Projects/EGMFaceRecognition.html>

Baze de date

► Graph database

- Neo4J <https://neo4j.com/>



https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_database

Probleme de planificare

Exemplu – De câte săli este nevoie minim pentru programarea într-o zi a n conferințe cu intervale de desfășurare date?

Conf. 1: interval (1,4)

Conf. 2: interval (2,3)

Conf. 3: interval (2,5)

Conf. 4: interval (6,8)

Conf. 5: interval (3,8)

Conf. 6: interval (6,7)

Probleme de planificare

Exemplu – De câte săli este nevoie minim pentru programarea într-o zi a n conferințe cu intervale de desfășurare date?

Conf. 1: interval (1,4)

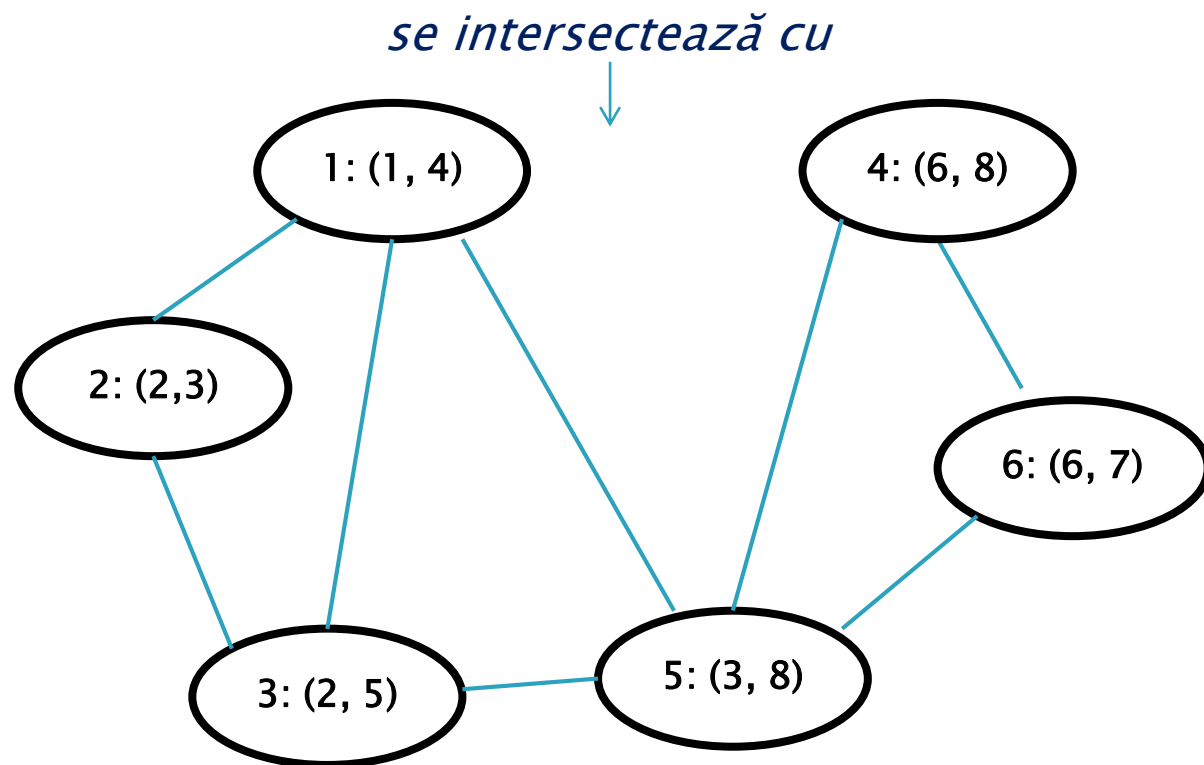
Conf. 2: interval (2,3)

Conf. 3: interval (2,5)

Conf. 4: interval (6,8)

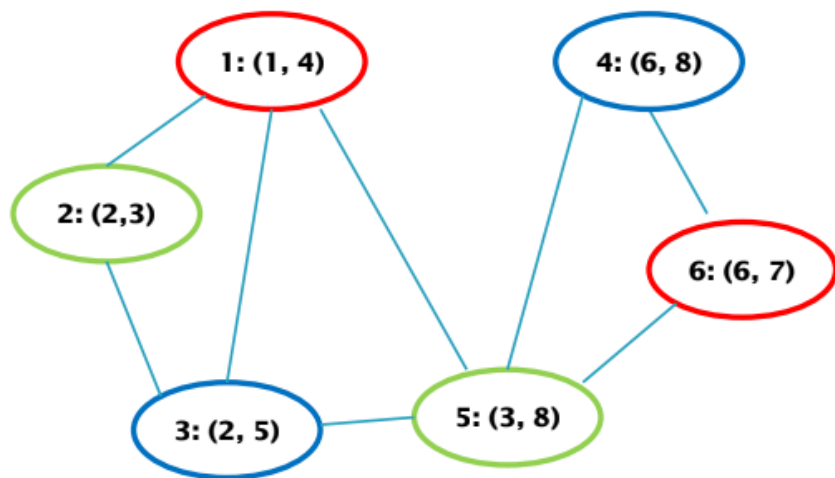
Conf. 5: interval (3,8)

Conf. 6: interval (6,7)



Graful intersecției intervalelor

Probleme de planificare



Sunt necesare minim 3 săli

Sala 1: (1,4), (6,7)

Sala 2: (2,3), (3,8)

Sala 3: (2,5), (6,8)

În termeni de grafuri problema se exprimă astfel:

Care este **numărul cromatic** al grafului interval asociat intervalelor de desfășurare?

- Graful intersecției intervalelor este **3-colorabil**, dar NU este 2-colorabil

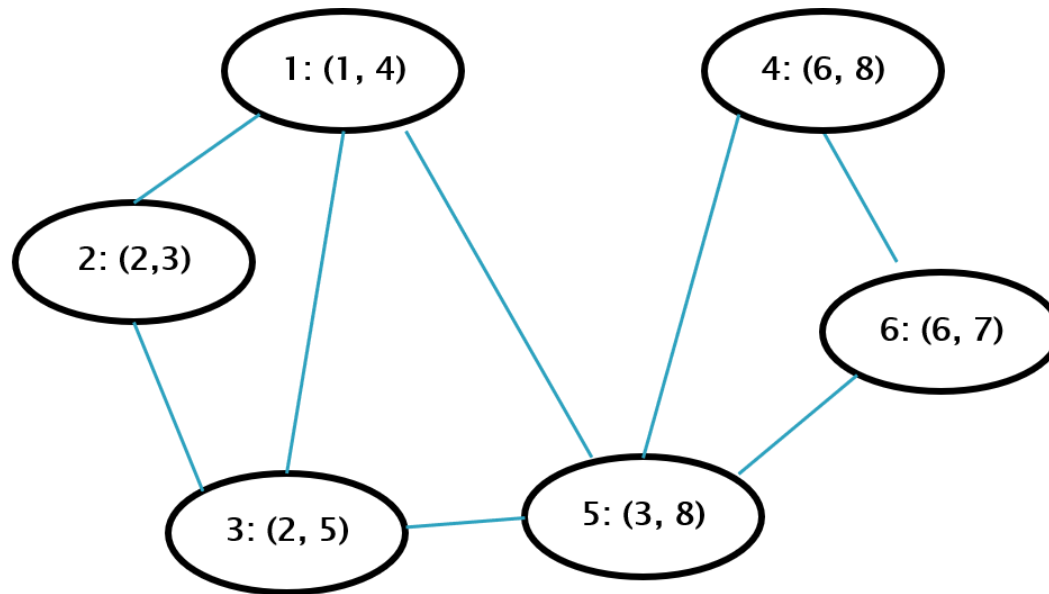


De ce?

Probleme de planificare



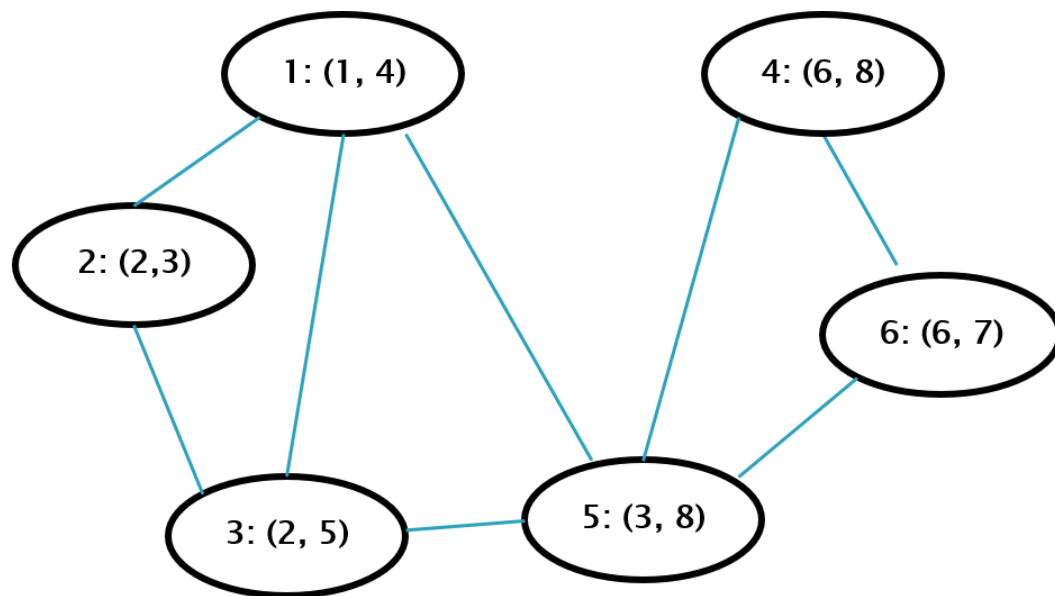
Cum se poate exprima în termeni de grafuri problema spectacolelor studiată la PA la metoda Greedy?



Probleme de planificare



Cum se poate exprima în termeni de grafuri problema spectacolelor studiată la PA la metoda Greedy?



spectacole compatibile



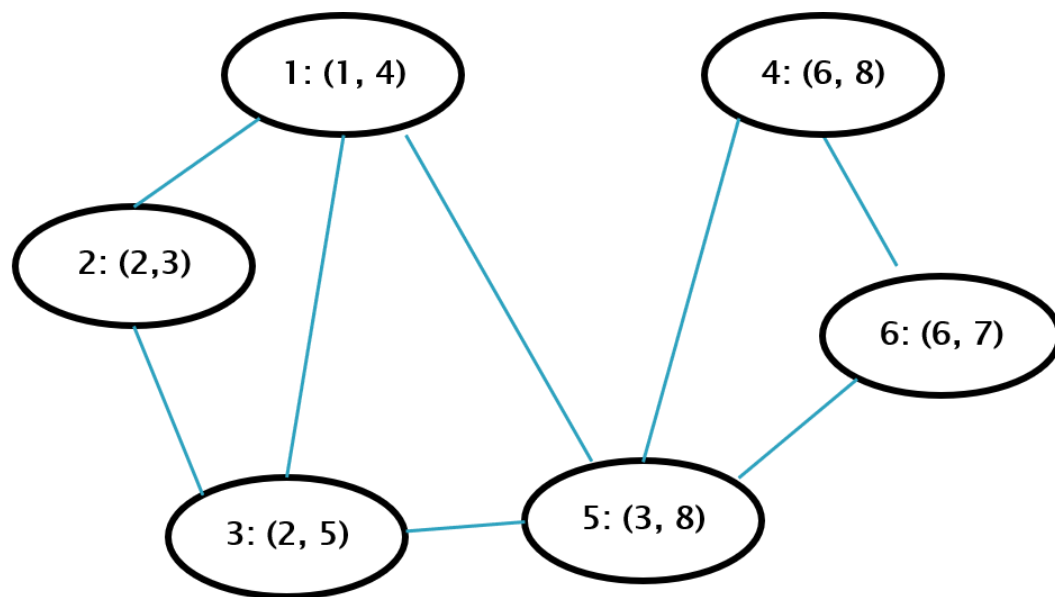
intervale disjuncte



vârfuri neadiacente

Probleme de planificare

Cum se poate exprima în termeni de grafuri problema spectacolelor studiată la PA la metoda Greedy?



Determinați o **mulțime independentă** de vârfuri (adică de vârfuri neadiacente două câte două) din graful interval asociat.

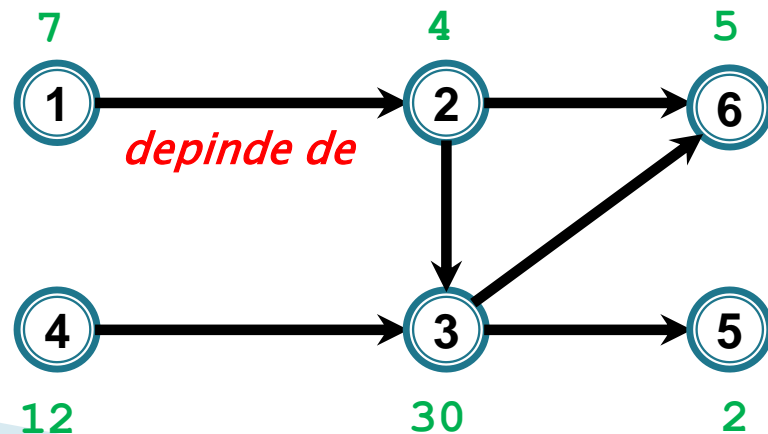
Grafuri de dependențe/ interacțiuni

- Drum critic în grafuri de dependențe asociat unui proiect

Exemplu date proiect – se cere durata minimă a proiectului:

- Activitatea 1 – durata 7
- Activitatea 2 – durata 4
- Activitatea 3 – durata 30
- Activitatea 4 – durata 12
- Activitatea 5 – durata 2
- Activitatea 6 – durata 5
- Dependențe între activități: (1, 2), (2, 3), (3, 6), (4, 3), (2, 6), (3, 5)

Graf asociat – problema se reduce la determinarea unui drum maxim:



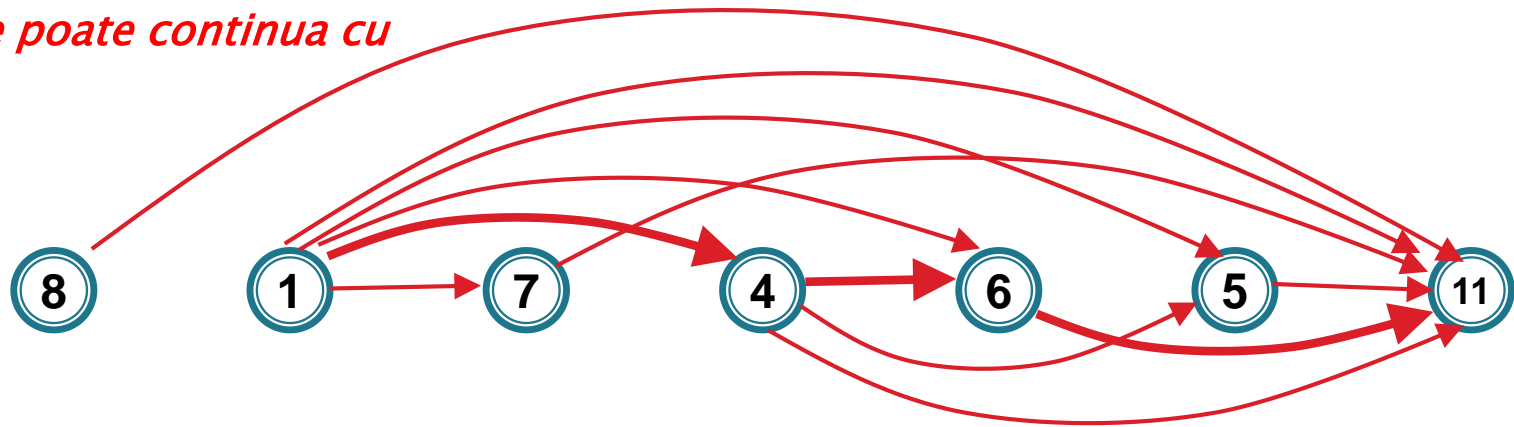
Grafuri de dependențe/ interacțiuni

- Programare dinamică – drum optim în grafuri fără circuite

Exemplu – Problema determinării celui mai lung subșir crescător al unui șir

Pentru șirul 8, 1, 7, 4, 6, 5, 11 graful asociat este

se poate continua cu

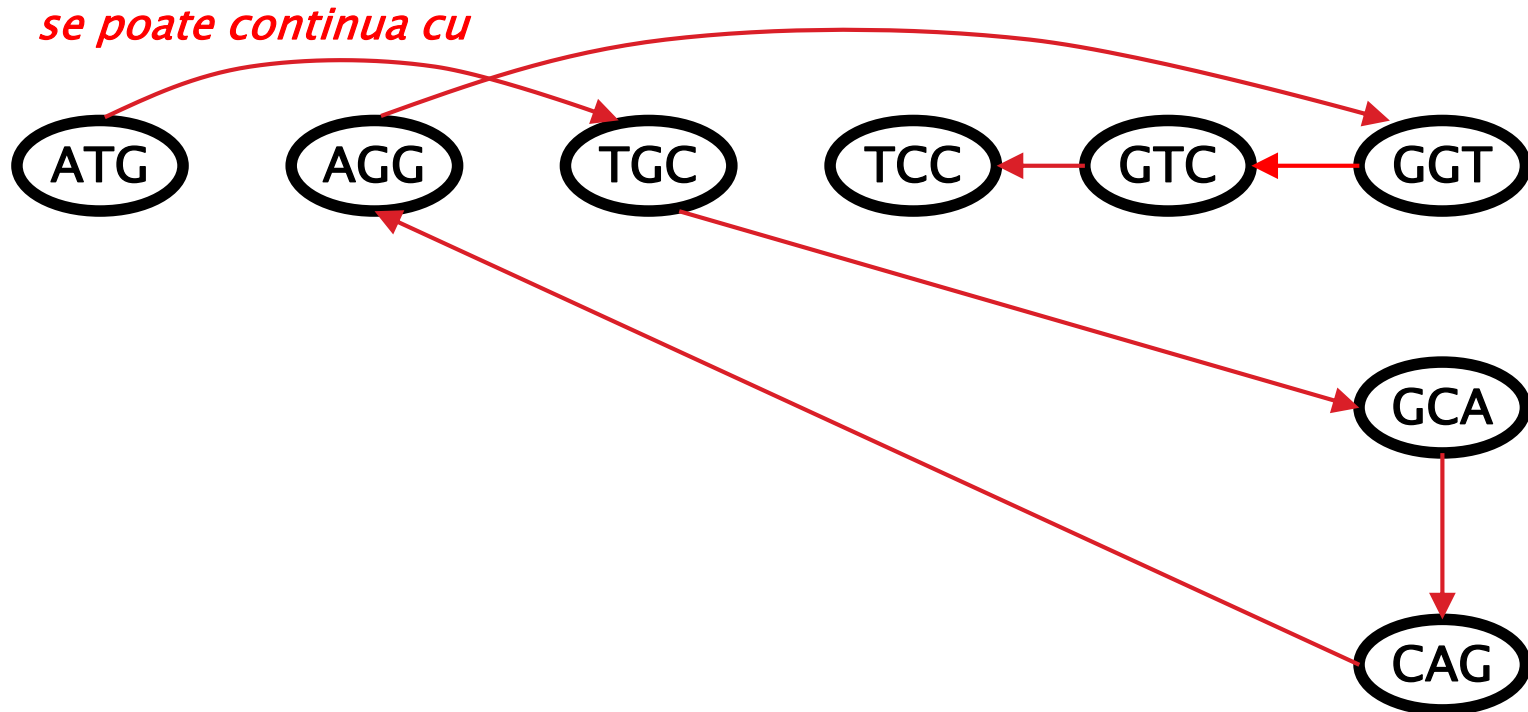


Problema se reduce la a determina un drum maxim în graful asociat (fără circuite – DAG)

Grafuri de dependențe/ interacțiuni

► Shortest superstring problem

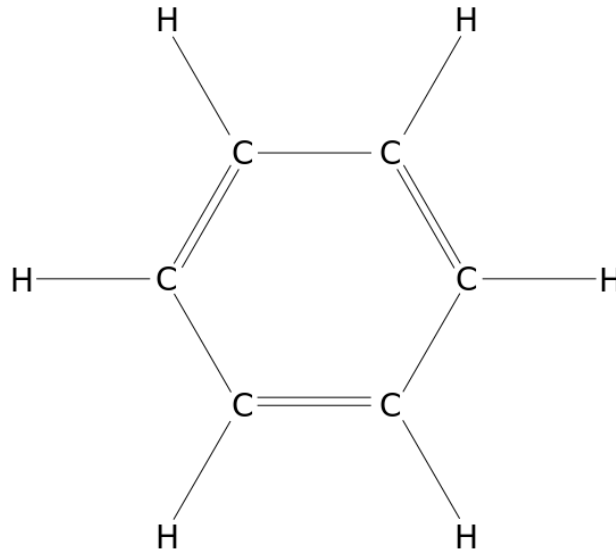
$S = \{\text{ATG}, \text{AGG}, \text{TGC}, \text{TCC}, \text{GTC}, \text{GGT}, \text{GCA}, \text{CAG}\}$



Drum Hamiltonian unic: ATG, TGC, GCA, CAG, AGG, GGT, GTC, TCC =>
superstring **ATGCAGGTCC**

Chimie

- ▶ Graf ← “notație grafică” din chimie
 - J. Silvester, 1878



Chimie

- ▶ indici topologici (Wiener, Randic...)
- ▶ izomorfism, graf de interacțiuni...

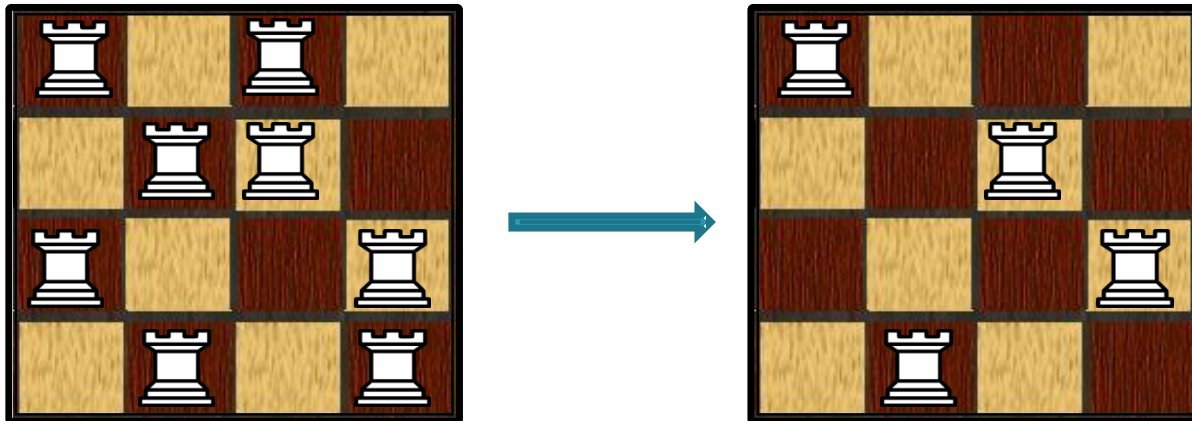
Danail Bonchev and D.H. Rouvray, eds., *Chemical Graph Theory: Introduction and Fundamentals*, Taylor and Francis, 1991

Matematică

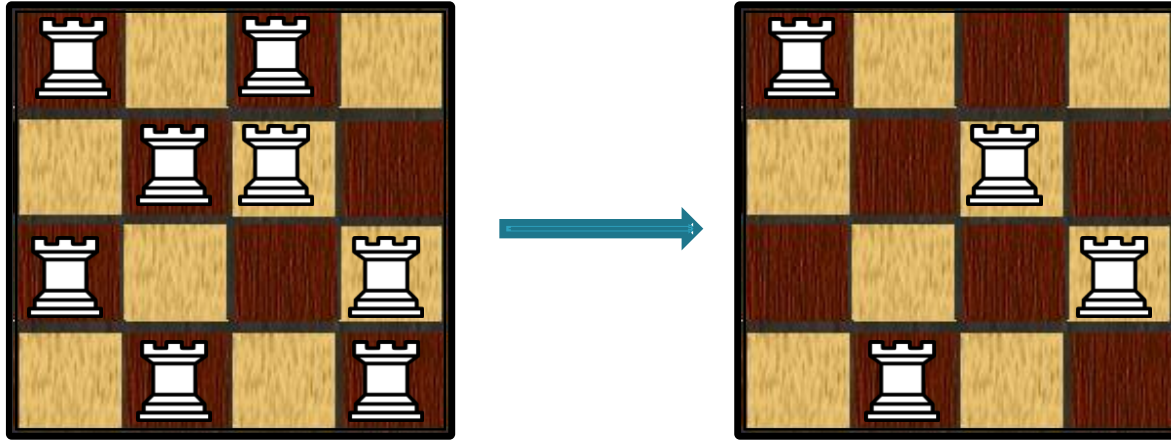
- ▶ **Demonstrarea unor rezultate matematice**
 - Matrice \rightarrow graf
 - Diagonală/ Matrice de permutări – cuplaj
- ▶ **Grafuri asociate grupurilor – grafuri Cayley**

Probleme

Pe o tablă de tip șah de dimensiuni $n \times n$ sunt așezate ture, astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană sunt **același număr de ture**. Să se arate că se pot păstra pe tablă n dintre aceste ture, care nu se atacă două câte două – **Cuplaje**



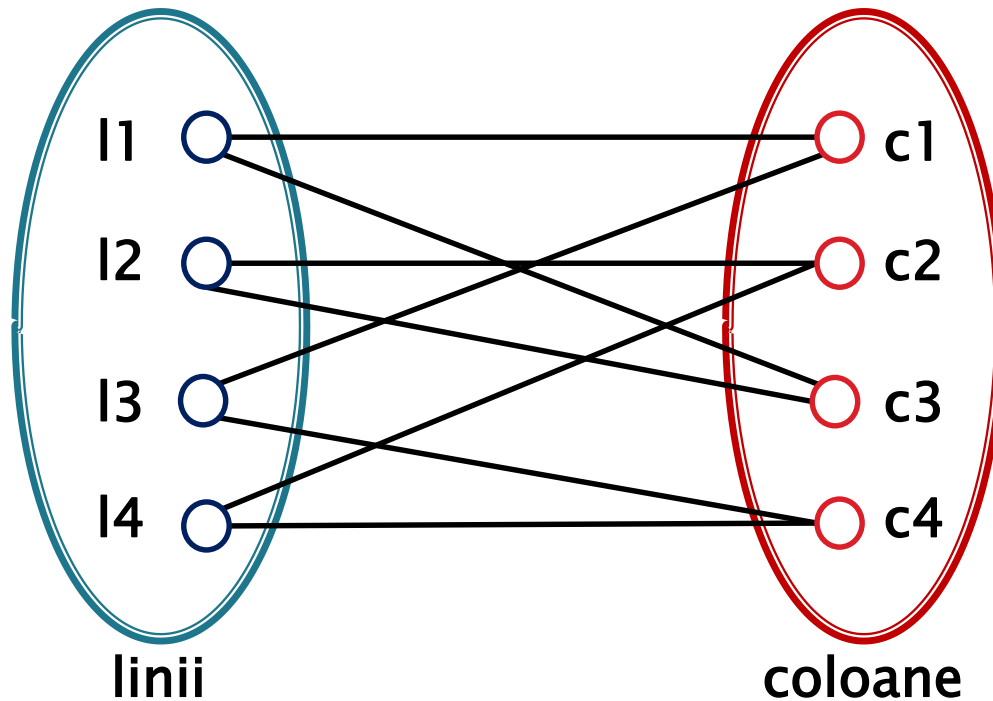
Probleme



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

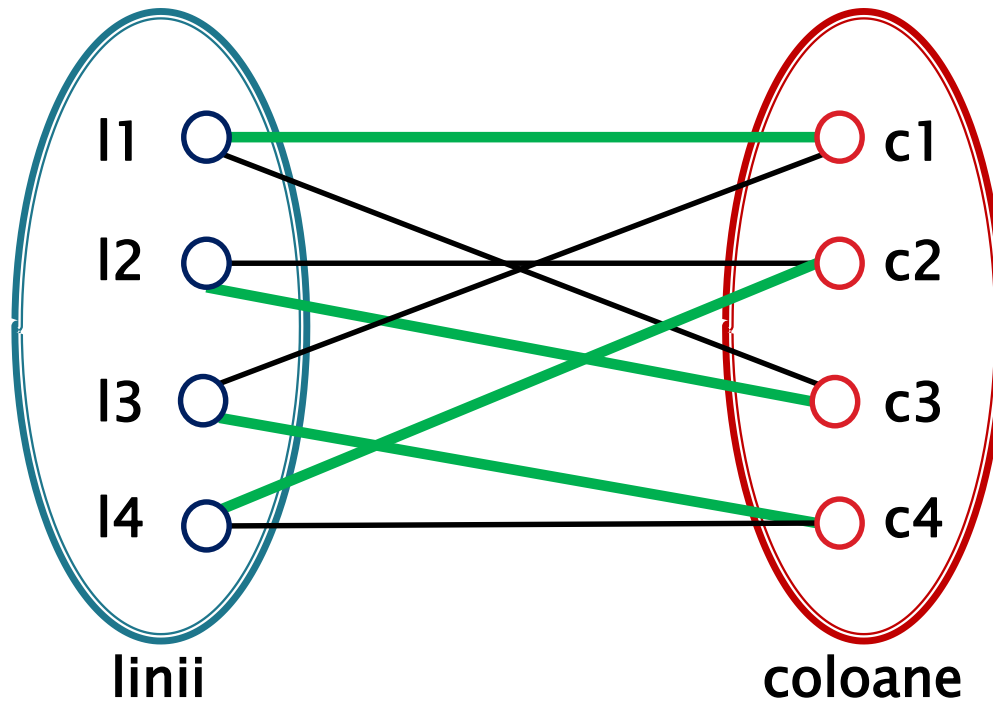
Probleme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Probleme

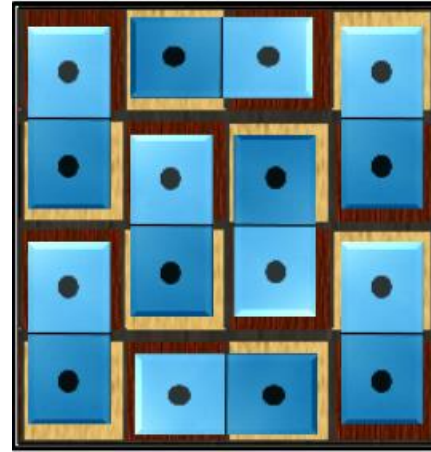
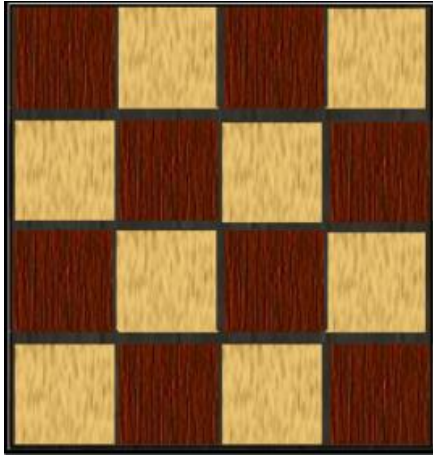
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Cuplaj perfect

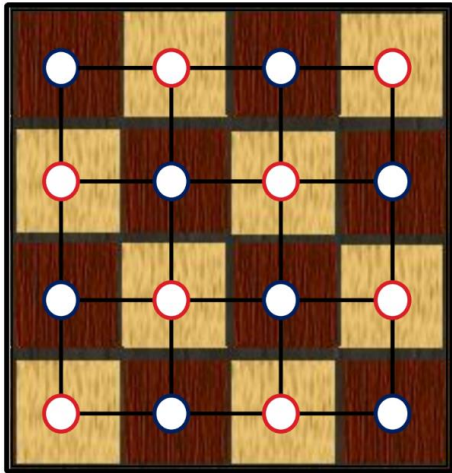
Probleme

- ▶ Acoperirea unei table cu piese de domino



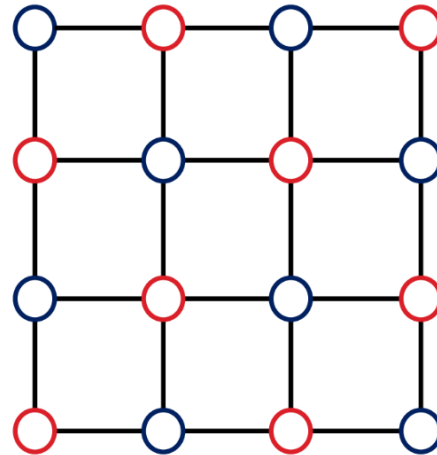
Probleme

Tabla



\Rightarrow

graful grid



Probleme

► Tabla

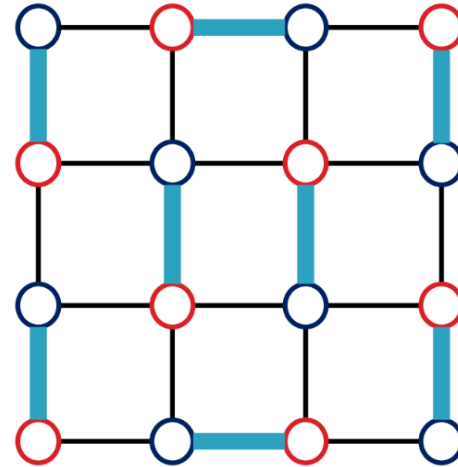
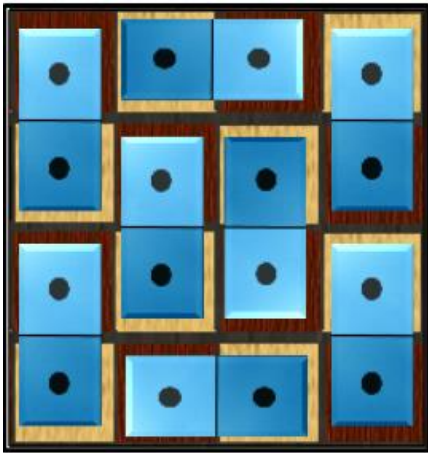
\Rightarrow

graful grid

► Acoperire

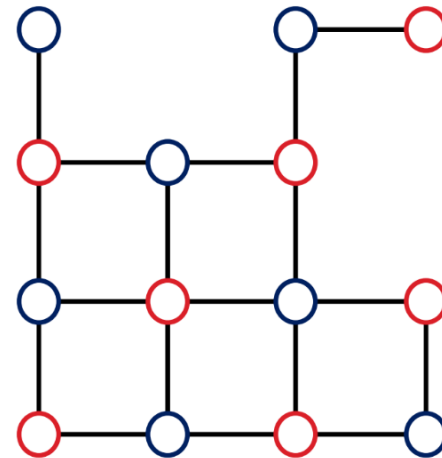
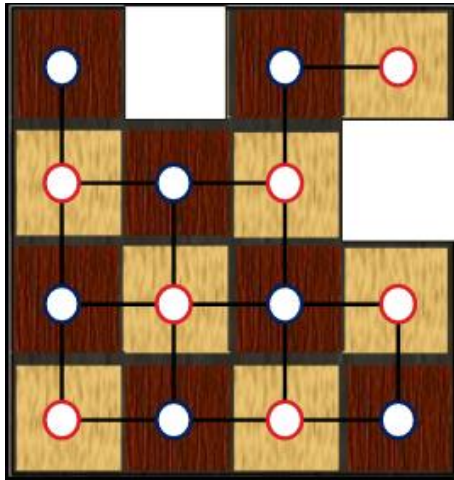
\Leftrightarrow

cuplaj perfect

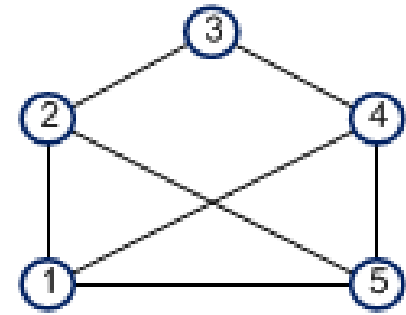
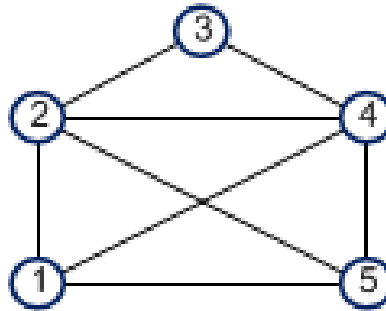
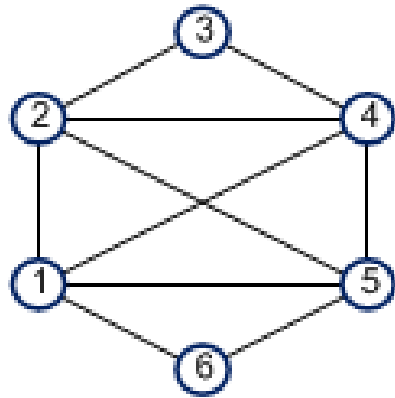


Probleme

- ▶ Acoperirea unei table $m \times n$ cu piese de domino
 - Tabla este acoperibilă $\Leftrightarrow mn$ par
 - Dacă tabla este acoperibilă, dar eliminăm două pătrățele din ea, în ce condiții rămâne acoperibilă?



Probleme



Care dintre diagramele de mai sus se poate desena printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie și fără a desena o linie de două ori?

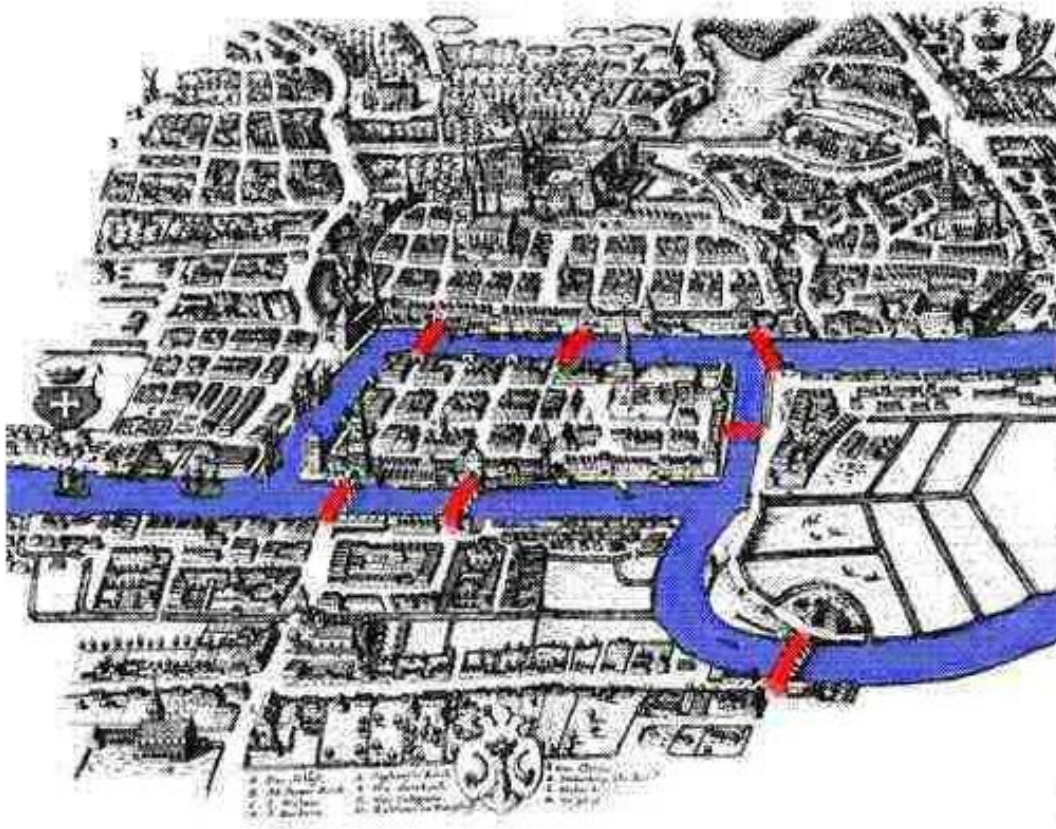
Există linie continuă neînchisă care să intersecteze în interior fiecare segment o singură dată?

Alte aplicații

- ▶ Rețele de calculatoare
- ▶ Limbaje formale
- ▶ Probleme de planificări, repartiții...
- ▶ Teoria jocurilor

Istoric

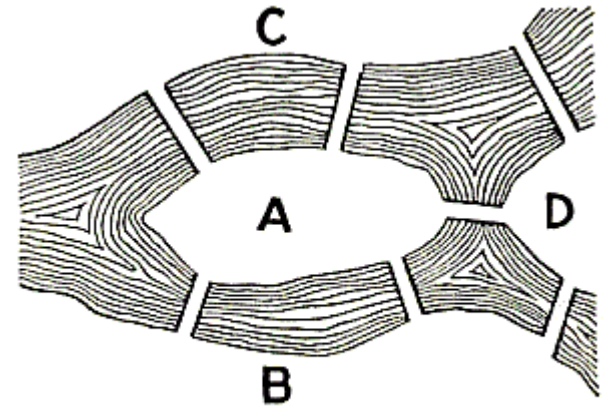
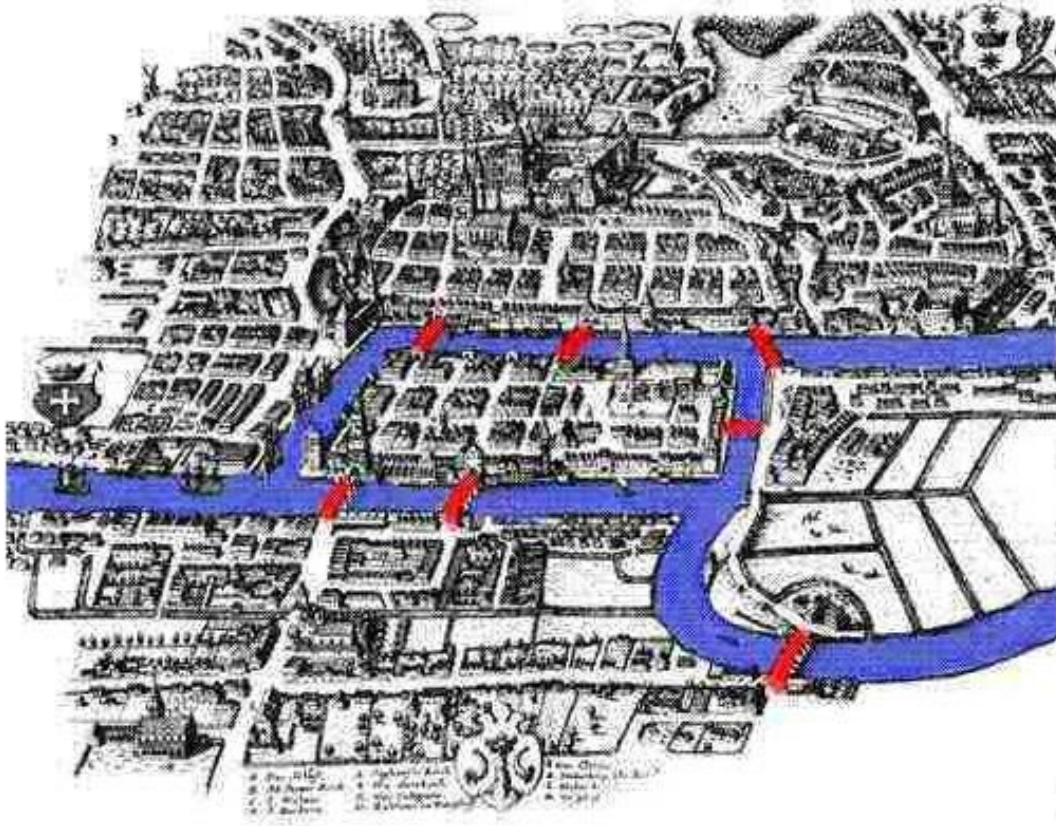
Problema celor 7 poduri din Königsberg



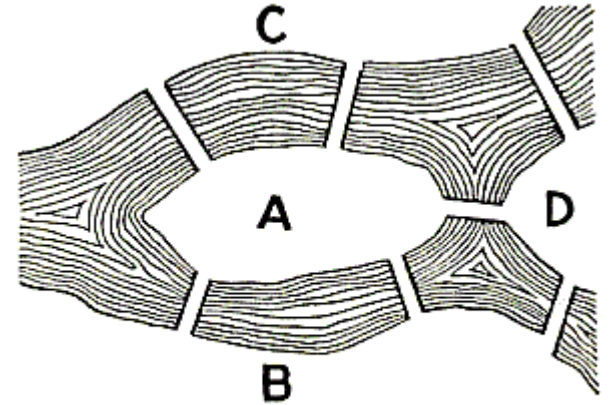
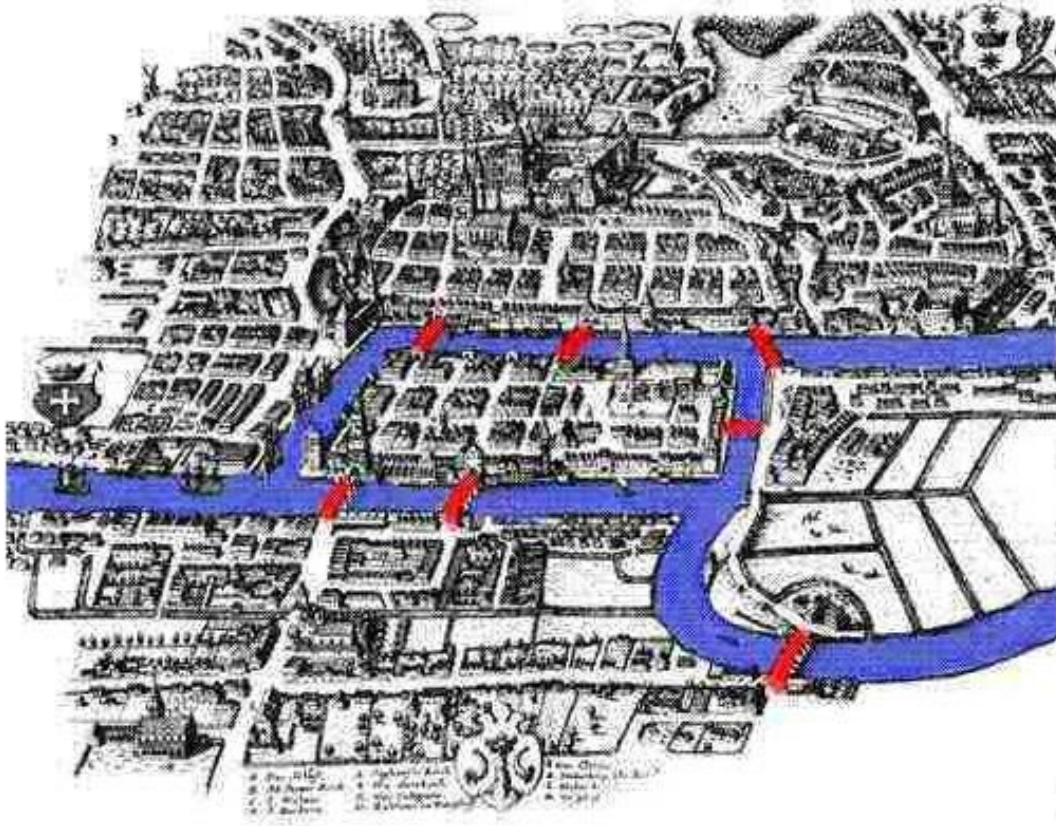
Este posibil ca un om să facă o plimbare în care să treacă pe toate cele 7 poduri o singură dată?

<http://think-like-a-git.net/sections/graph-theory/seven-bridges-of-konigsberg.html>

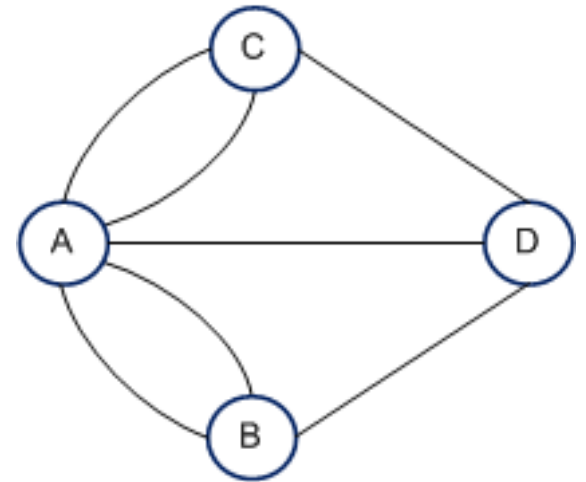
Problema celor 7 poduri din Königsberg



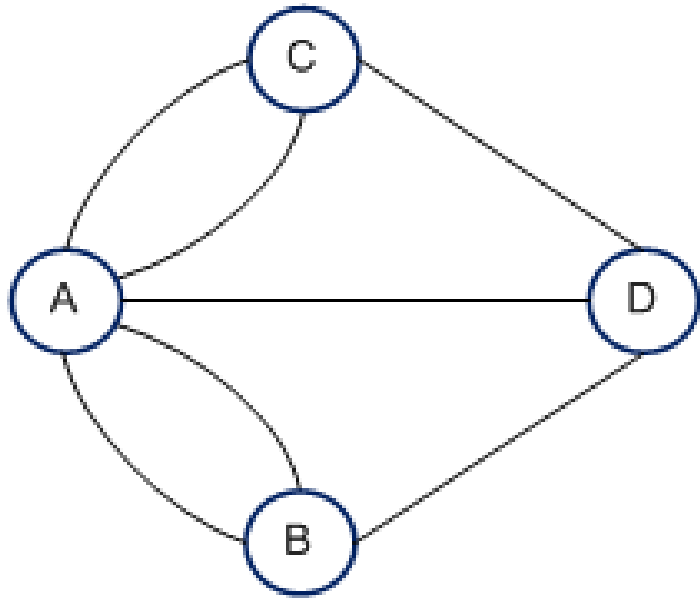
Problema celor 7 poduri din Königsberg



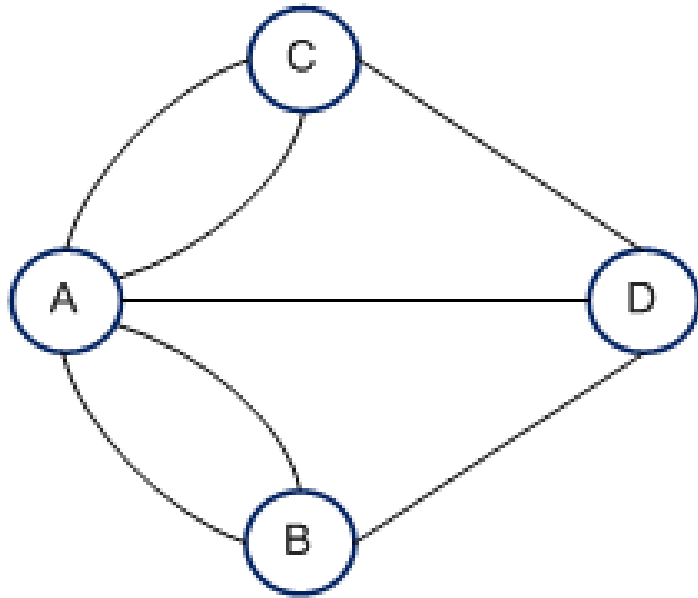
Modelare:



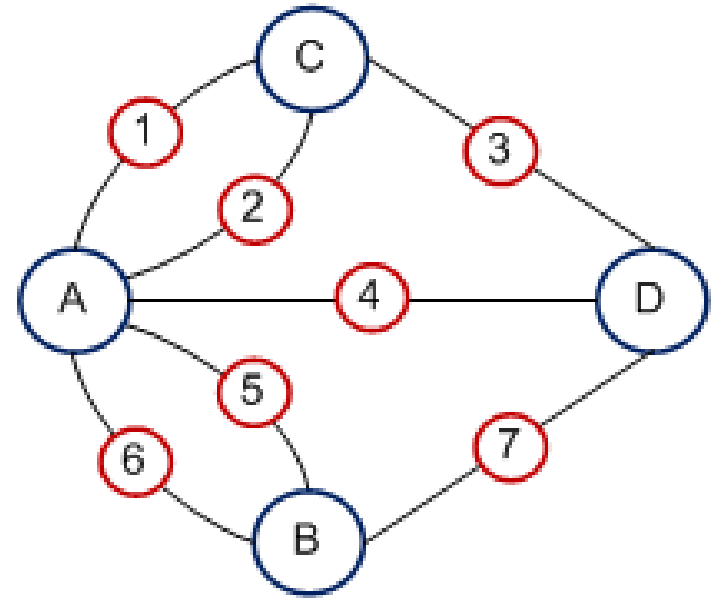
Problema celor 7 poduri din Königsberg



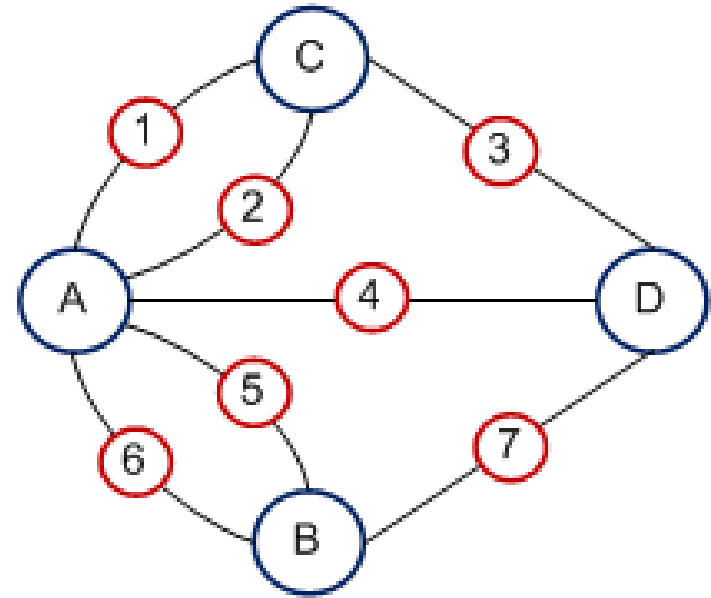
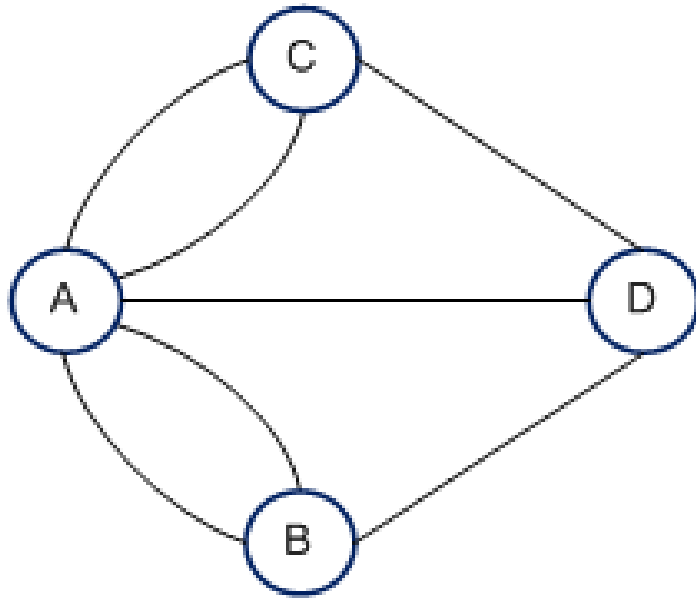
Problema celor 7 poduri din Königsberg



multigraf



Problema celor 7 poduri din Königsberg



1736 – Leonhard Euler

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

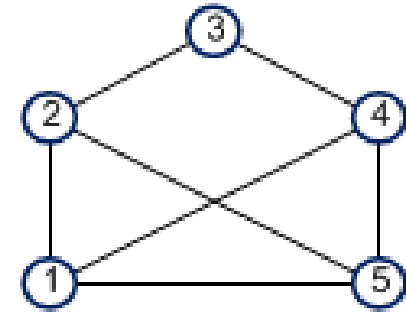
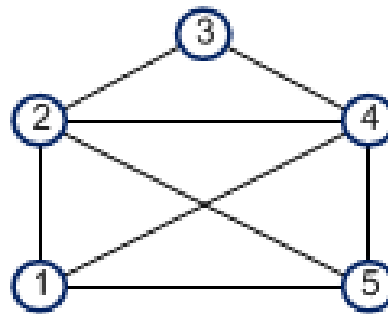
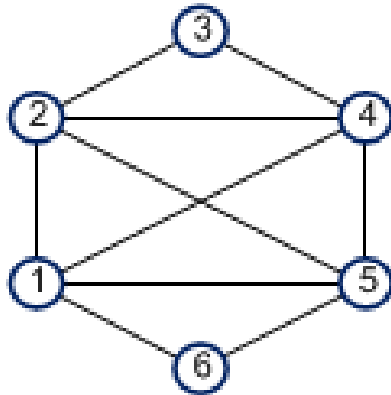
- ▶ **Ciclu eulerian** – traseu închis care trece o singură dată prin toate muchiile
- ▶ **Graf eulerian**

Problema celor 7 poduri din Königsberg

► Interpretare

Se poate desena diagrama printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie și fără a desena o linie de două ori (în plus: să terminăm desenul în punctul în care l-am început)?

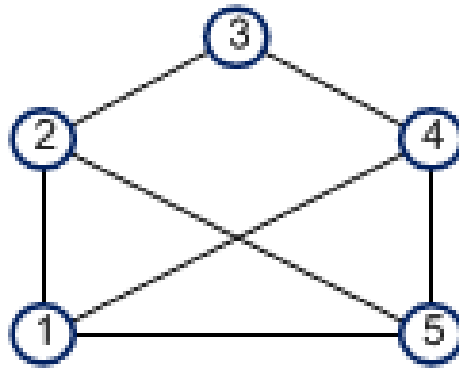
- Tăierea unui material



Problema celor 7 poduri din Königsberg

► Interpretare

De câte ori (minim) trebuie să ridicăm creionul de pe hârtie pentru a desena diagrama?

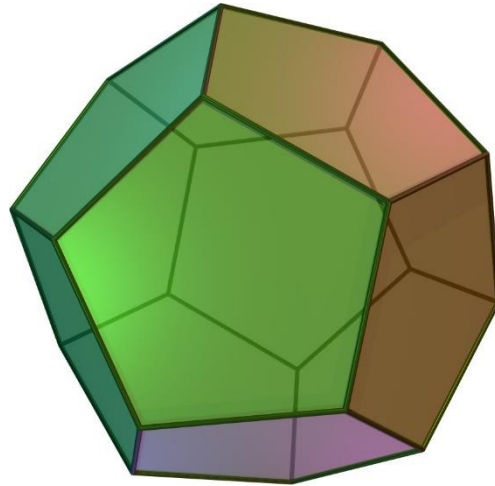


Jocul icosian



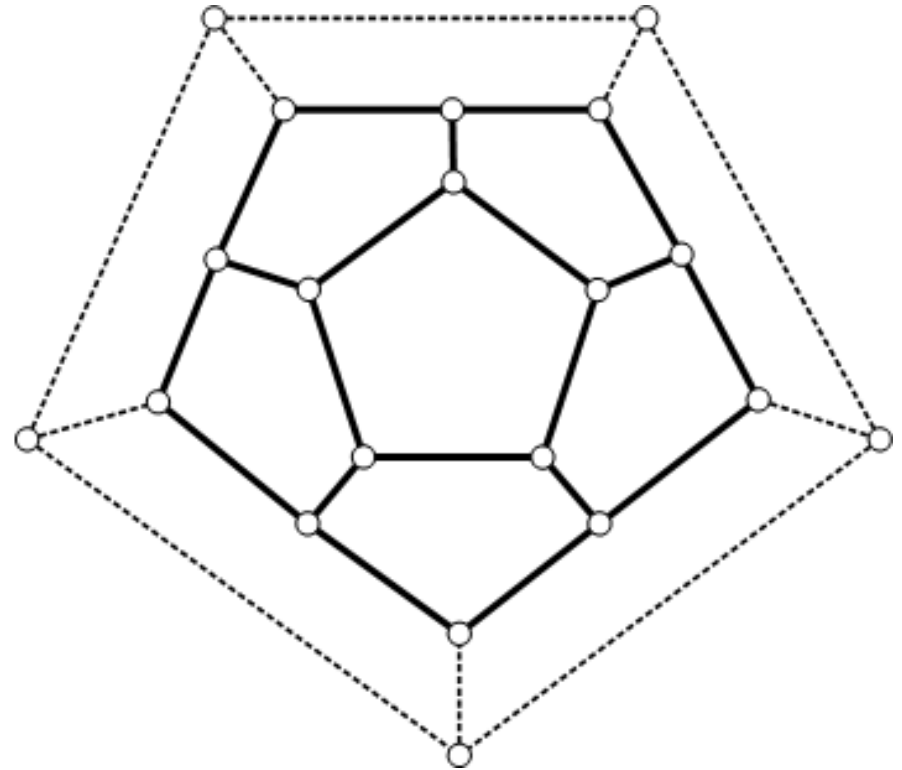
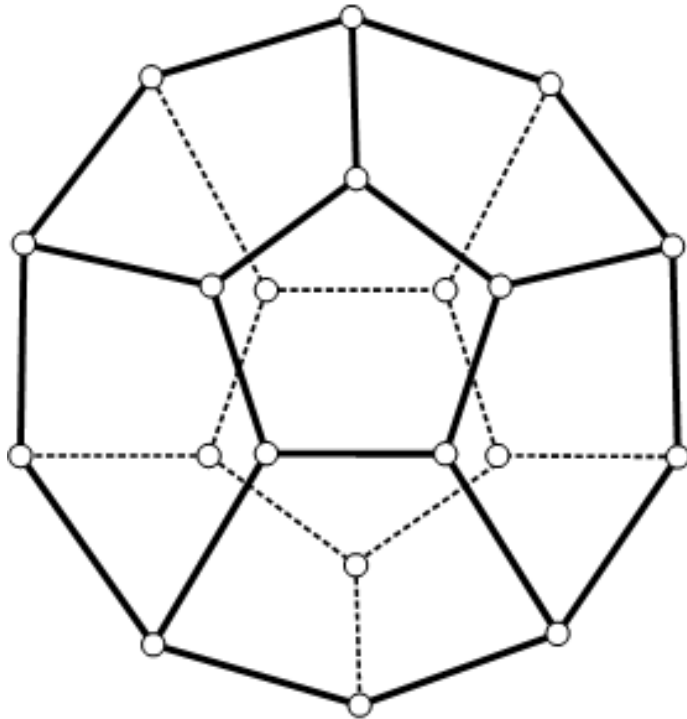
- 1856 – Hamilton – *“voiaj în jurul lumii”*:

Există un traseu închis pe muchiile dodecaedrului care să treacă prin fiecare vârf o singură dată

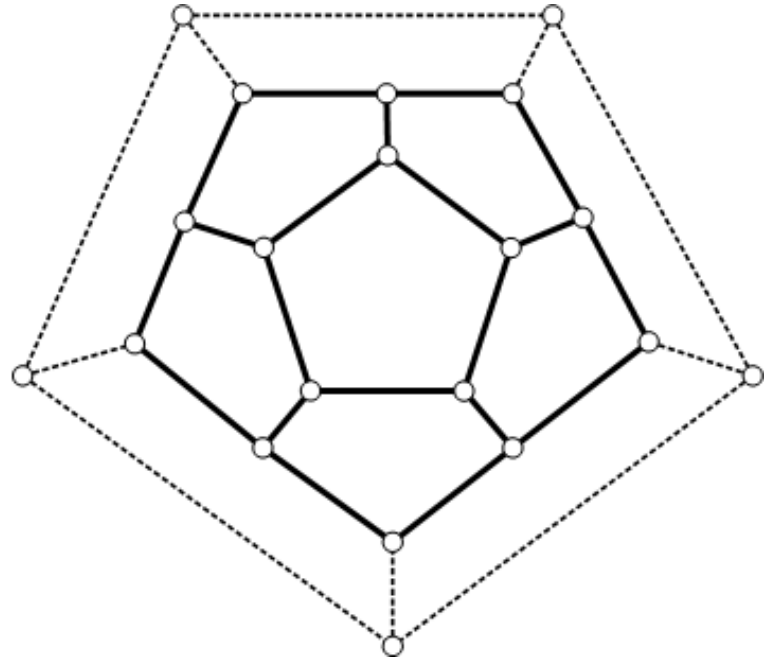
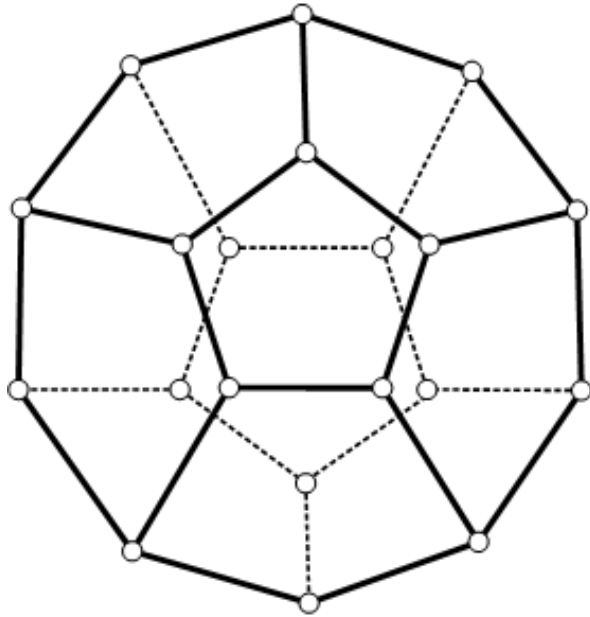


<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dodecahedron.jpg>

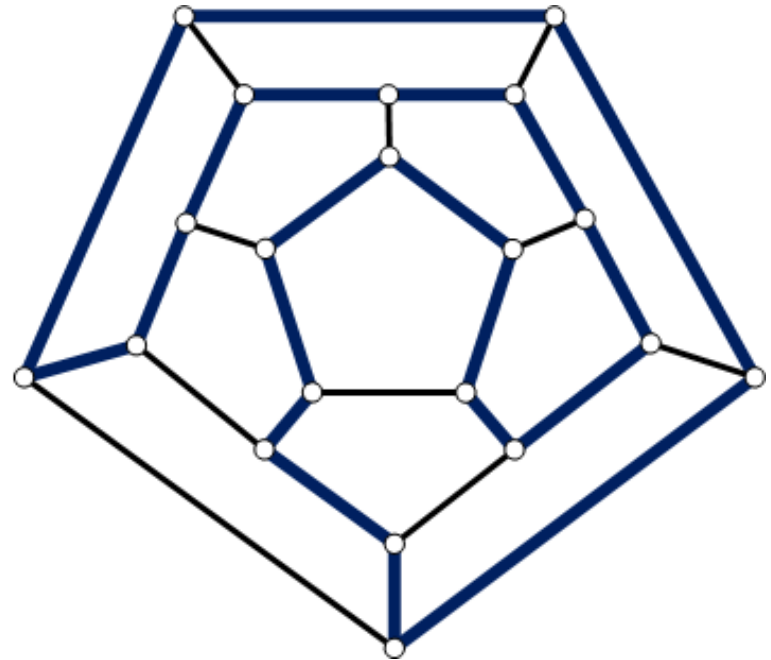
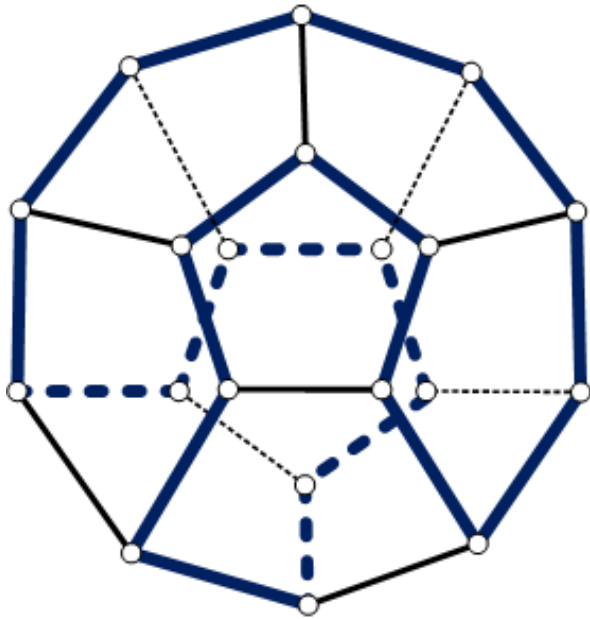
Jocul icosian



Jocul icosian



Jocul icosian



Jocul icosian

Noțiuni de grafuri rezultate:

- Ciclu hamiltonian – trece o singură dată prin toate vârfurile
- Graf hamiltonian
- Problema comis-voiajorului

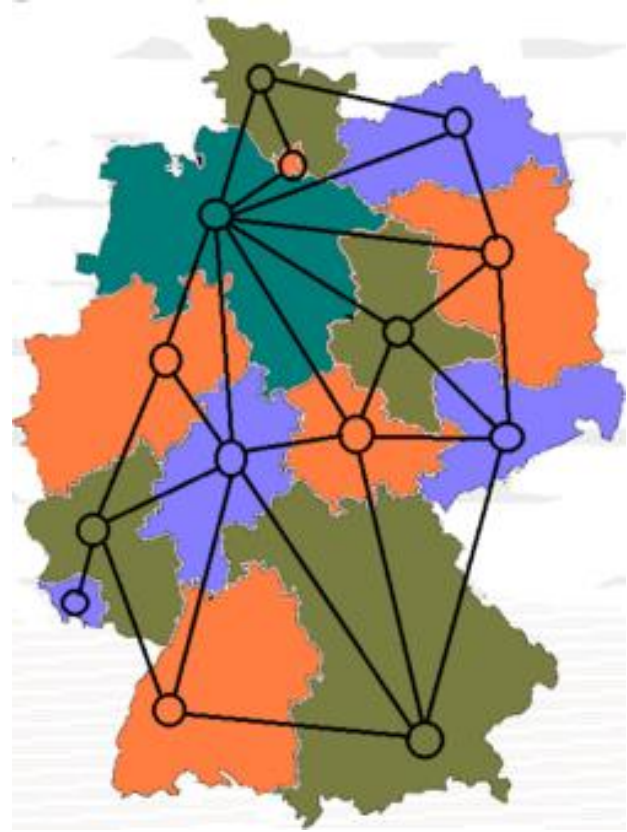
Problema celor 4 culori

- ▶ Problema celor 4 culori – De Morgan 1852

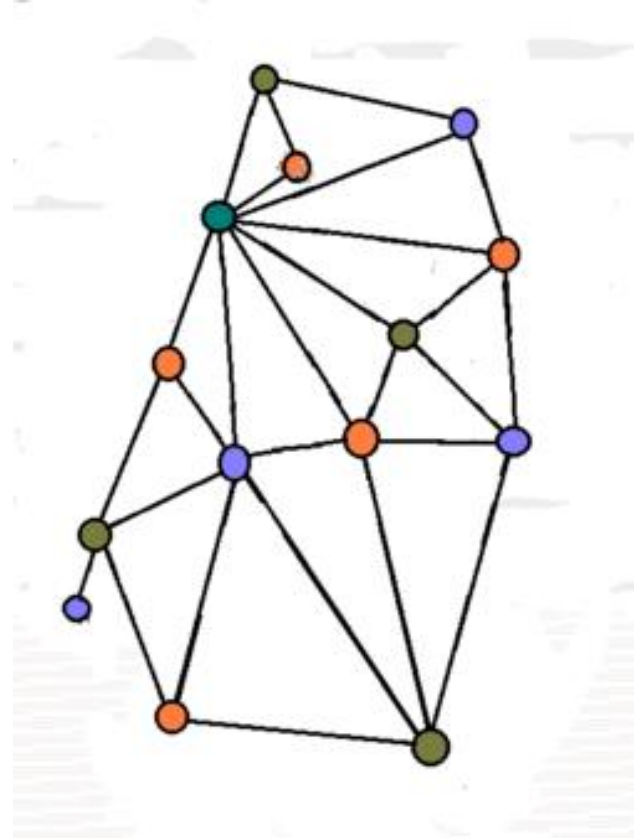


Se poate colora o hartă cu patru culori astfel încât orice două țări, care au frontieră comună și care **nu se reduce la un punct**, să aibă culori diferite?

Problema celor 4 culori



Problema celor 4 culori



Problema celor 4 culori

- ▶ Problema celor 4 culori – Appel și Haken răspuns afirmativ în 1976 cu ajutorul calculatorului