

# Curs 1

Cristian Niculescu

## 1 Introducere

Bibliografie:

Jeremy Orloff, Jonathan Bloom, *Introduction to Probability and Statistics*, MIT OpenCourseWare, 2014

Cristian Niculescu, *Probabilități și statistică*, Editura Universității din București, 2015

### 1.1 Probabilități vs. statistică

Probabilitățile și statistica sunt strâns legate deoarece toate afirmațiile statistice sunt la bază afirmații despre probabilități. În ciuda acestui fapt, cele 2 domenii se simt uneori ca subiecte foarte diferite. Probabilitățile sunt independente logic; sunt câteva reguli și toate răspunsurile rezultă logic din aceste reguli, cu toate că pot fi calcule complicate. În statistică aplicăm probabilitățile pentru a trage concluzii din date.

#### Exemplu probabilistic

Avem o monedă corectă (probabilități egale pentru avers sau revers). O aruncăm de 100 de ori. Care este probabilitatea a cel puțin 60 de aversuri? Există un singur răspuns (aproximativ 0.02844397) și vom învăța cum să-l calculăm.

#### Exemplu statistic

Avem o monedă de proveniență necunoscută. Pentru a investiga dacă este corectă o aruncăm de 100 de ori și numărăm aversurile. Să spunem că numărăm 60 de aversuri. Sarcina noastră ca statisticieni este să tragem o concluzie (inferență) din aceste date. Sunt multe moduri de a proceda, atât în termeni de forma pe care o ia concluzia, cât și în ce privește calculele probabilităților folosite pentru a justifica concluzia. De fapt, statisticieni diferiți pot trage concluzii diferite.

Observăm că în primul exemplu procesul aleator este deplin cunoscut (probabilitatea aversului = 0.5). Obiectivul este să găsim probabilitatea unui anume rezultat (cel puțin 60 de aversuri) provenind din procesul aleator. În

al 2-lea exemplu, rezultatul este cunoscut (60 de aversuri) și obiectivul este să clarificăm procesul aleator necunoscut (probabilitatea aversului).

## 1.2 Interpretări frecvenționiste vs. Bayesiene

Există 2 școli proeminente și uneori conflictuale de statistică: [Bayesiană](#) și [frecvenționistă](#). Abordările lor sunt bazate pe interpretări diferite ale sensului probabilității.

**Frecvenționiștii** spun că probabilitatea măsoară [frecvența diferitelor rezultate ale unui experiment](#). De exemplu, spunând că o monedă corectă are o probabilitate de 50% a aversurilor înseamnă că, dacă o vom arunca de multe ori, atunci ne așteptăm ca aproximativ jumătate din aruncări să fie aversuri.

**Bayesienii** spun că probabilitatea este un concept abstract care măsoară [o stare de cunoaștere sau un grad de încredere](#) într-o propoziție dată. În practică, Bayesienii nu atribuie o singură valoare pentru probabilitatea aversului unei monede. Mai degrabă ei consideră un domeniu de valori, fiecare cu propria probabilitate de a fi adevărată.

Abordarea frecvenționistă a fost mult timp dominantă în domenii ca biologia, medicina, sănătatea publică și științele sociale. Abordarea Bayesiană s-a bucurat de o renaștere în era computerelor performante și datelor mari. Este utilă în special când se încorporează date noi într-un model statistic existent, de exemplu, când se antrenează un sistem de recunoaștere a vorbirii sau a feței. Astăzi, statisticienii creează instrumente puternice folosind ambele abordări în moduri complementare.

## 1.3 Aplicații, modele didactice și simulare

Probabilitățile și statistica sunt larg folosite în științele naturii, inginerie, medicină, științele sociale, economie, genetică, fizică, electronică, cercetări operaționale, actuariat, studiul sistemelor complexe și îmbunătățirea fiabilității lor, teoria finanțelor și informatică. Lista aplicațiilor este mare: teste ale unui tratament medical contra altuia (sau a unui placebo), măsuri ale legăturii genetice, căutarea particulelor elementare, învățarea automată pentru vedere sau vorbire, strategii și probabilități de jocuri de noroc, meteorologie, prognoză economică, epidemiologie, marketing, căutare pe net...

Date fiind atât de multe aplicații captivante, poate vă mirați de ce vom consuma atât de mult timp gândindu-ne la [modele didactice](#) ca monede și zaruri. Înțelegându-le pe acestea cu desăvârșire, vom dezvolta un bun simț pentru fondul simplu interior multor probleme complexe din lumea reală. De fapt, modesta monedă este un model realist pentru orice situații cu 2 rezultate posibile: succes sau eșec al unui tratament, motor de avion, pariu, sau chiar

al unui curs.

Uneori o problemă este atât de complicată încât cel mai bun mod de înțelegere a ei este prin simulare pe computer. Aici folosim software pentru a face experimente *virtuale* de multe ori pentru a estima probabilități.

## 2 Numărare și mulțimi

### 2.1 Scopurile învățării

1. Să știe definițiile și notațiile pentru mulțimi, intersecție, reuniune, complementară.
2. Să poată să vizualizeze operațiile cu mulțimi folosind diagrame Venn.
3. Să înțeleagă cum este folosită numărarea la calculul probabilităților.
4. Să poată folosi regula produsului, principiul includerii și al excluderii, permutările, aranjamentele și combinările pentru a calcula numărul elementelor unei mulțimi.

### 2.2 Numărare

#### 2.2.1 Întrebări motivante

**Exemplul 1.** O monedă este *corectă* dacă, aruncând-o, obținem avers sau revers cu aceeași probabilitate. Aruncăm o monedă de 3 ori. Care este probabilitatea să obținem exact un avers?

**Răspuns:** Cu 3 aruncări, putem lista ușor cele 8 cazuri posibile (avers =  $H$ , revers =  $T$ ):

$$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}.$$

3 din aceste cazuri au exact 1 avers:

$$\{HTT, THT, TTH\}.$$

Deoarece toate cazurile sunt egal probabile, avem

$$P(1 \text{ avers în } 3 \text{ aruncări}) = \frac{\text{numărul de cazuri cu 1 avers}}{\text{numărul total de cazuri}} = \frac{3}{8}.$$

**Gândiți:** Ar fi practică listarea cazurilor la 10 aruncări?

Un pachet de 52 de cărți de joc are 13 ranguri (2,3,...,9,10,J,Q,K,A) și 4 culori ( $\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit$ ). O mână de poker constă în 5 cărți. O *pereche* este o mână care constă în 2 cărți având un rang și 3 cărți având alte 3 ranguri, de

exemplu,  $\{3\clubsuit, 3\diamondsuit, 5\heartsuit, 8\spadesuit, 10\spadesuit\}$ .

**Testați-vă intuiția:** probabilitatea unei perechi este:

- (a) sub 5%
- (b) între 5% și 10%
- (c) între 10% și 20%
- (d) între 20% și 40%
- (e) peste 40%.

În acest moment putem doar să ghicim această probabilitate. Unul din scopurile noastre este să învățăm cum s-o calculăm exact. Pentru a începe, observăm că, deoarece fiecare mulțime de 5 cărți este egal probabilă, putem calcula probabilitatea unei perechi astfel

$$P(\text{o pereche}) = \frac{\text{numărul de "o pereche"}}{\text{numărul total de mâini}}.$$

Deci, pentru a afla probabilitatea exactă, avem nevoie să calculăm numărul de elemente din fiecare din aceste mulțimi. Și trebuie s-o facem iscusit, deoarece sunt prea multe elemente pentru a le lista pe toate.

Am observat deja de câteva ori că toate cazurile posibile erau egal probabile și am folosit asta pentru a afla o probabilitate numărând. Afirmăm aceasta riguros în următorul principiu.

**Principiu:** Presupunem că sunt  $n$  cazuri posibile pentru un experiment și fiecare caz este egal probabil. Dacă sunt  $k$  cazuri favorabile, atunci probabilitatea unui caz favorabil este  $k/n$ .

Vă puteți gândi la un scenariu în care cazurile posibile nu sunt egal probabile?

Iată un scenariu: la un examen, puteți lua orice notă de la 1 la 10. Sunt 10 cazuri. Este probabilitatea de a lua sub 5 egală cu  $4/10$ ?

## 2.2.2 Mulțimi și notații

### Definiții

O **mulțime**  $S$  este o colecție de elemente.

**Element:** Scriem  $x \in S$  pentru faptul că elementul  $x$  este în mulțimea  $S$ .

**Submulțime:** Spunem că mulțimea  $A$  este submulțime a lui  $S$  dacă toate elementele lui  $A$  sunt în  $S$ . Scriem  $A \subseteq S$ .

**Complementară:** Complementara lui  $A$  față de  $S$  este mulțimea elementelor lui  $S$  care **nu** sunt în  $A$ . Scriem  $A^c$ ,  $\mathcal{C}A$ ,  $\overline{A}$  sau  $S \setminus A$ .

**Reuniune:** Reuniunea lui  $A$  și  $B$  este mulțimea tuturor elementelor din  $A$  sau  $B$  (sau din ambele). Scriem  $A \cup B$ .

**Intersecție:** Intersecția lui  $A$  și  $B$  este mulțimea tuturor elementelor din  $A$  și

$B$ . Scriem  $A \cap B$ .

**Mulțimea vidă:** Mulțimea vidă este mulțimea care nu are niciun element. O notăm cu  $\emptyset$ .

**Disjuncte:**  $A$  și  $B$  sunt **disjuncte** dacă n-au niciun element comun. Adică  $A \cap B = \emptyset$ .

**Diferență:** Diferența lui  $A$  și  $B$  este mulțimea elementelor din  $A$  care nu sunt în  $B$ . Scriem  $A \setminus B$  sau  $A - B$ .

**Exemplul 2.** Plecăm cu o mulțime de 10 animale

$S = \{\text{antilopă, albină, pisică, câine, elefant, broască, țânțar, hienă, iguană, jaguar}\}$ .

Considerăm 2 submulțimi:

$M = \{\text{antilopă, pisică, câine, elefant, hienă, jaguar}\}$

$W = \{\text{antilopă, albină, elefant, broască, țânțar, hienă, iguană, jaguar}\}$ .

Scopul nostru aici este să cercetăm diferite operații cu mulțimi.

**Intersecție:**  $M \cap W = \{\text{antilopă, elefant, hienă, jaguar}\}$ .

**Reuniune:**

$M \cup W = \{\text{antilopă, albină, pisică, câine, elefant, broască, țânțar, hienă, iguană, jaguar}\}$ .

**Complementară:**  $M^c = \{\text{albină, broască, țânțar, iguană}\}$ .

**Diferență:**  $M \setminus W = \{\text{pisică, câine}\}$ .

Adesea sunt multe moduri de a obține aceeași mulțime, de exemplu,  $M^c = S \setminus M$ ,  $M \setminus W = M \cap C W$ .

Relațiile dintre reuniune, intersecție și complementară sunt date de **legile lui DeMorgan**:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

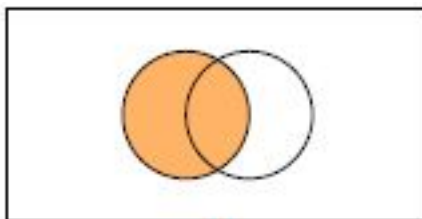
### Diagrame Venn-Euler

**Diagramele Venn-Euler** dau un mod ușor de a vizualiza operațiile cu mulțimi.

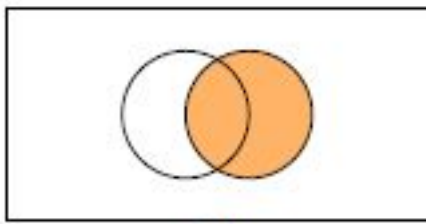
În toate figurile,  $S$  este regiunea din interiorul dreptunghiului mare,  $L$  este regiunea din interiorul cercului din stânga și  $R$  este regiunea din interiorul cercului din dreapta. Regiunea colorată arată mulțimea scrisă sub fiecare figură.



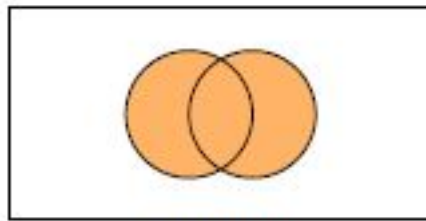
$S$



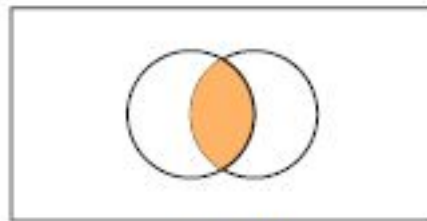
$L$



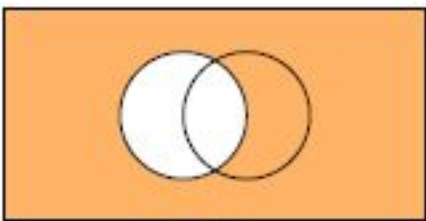
$R$



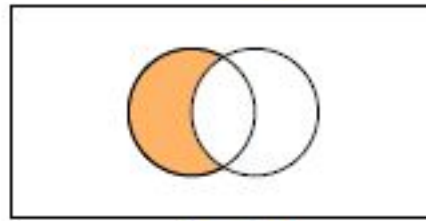
$L \cup R$



$L \cap R$

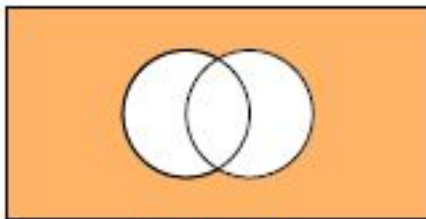


$L^c$

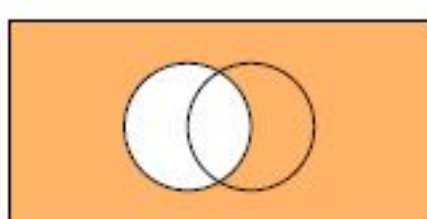


$L - R$

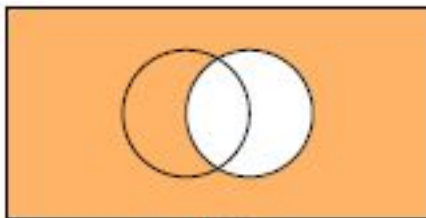
Demonstrația legilor lui DeMorgan



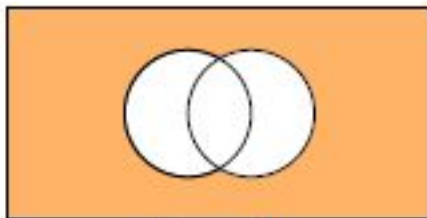
$(L \cup R)^c$



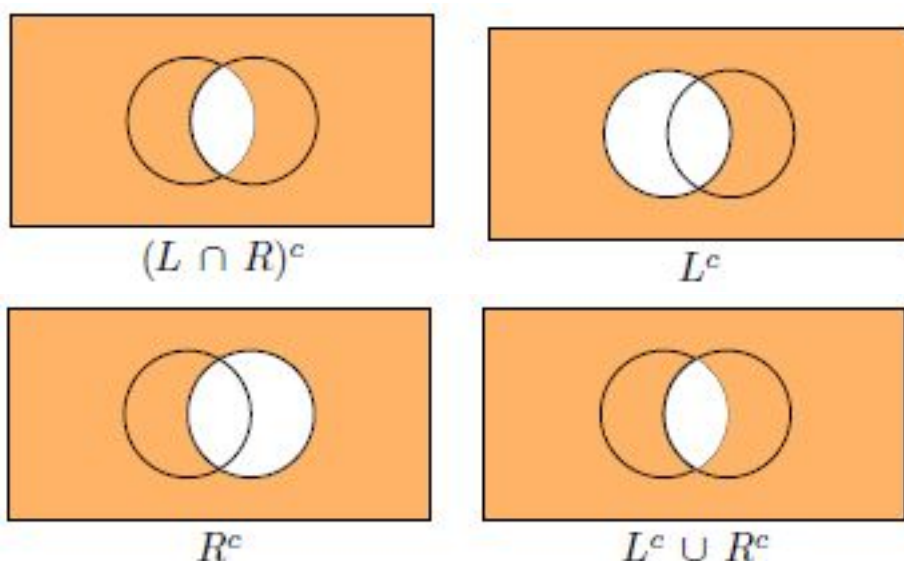
$L^c$



$R^c$



$L^c \cap R^c$



**Exemplul 3.** Verificați legile lui DeMorgan pentru submulțimile  $A = \{1, 2, 3\}$  și  $B = \{3, 4\}$  ale mulțimii  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

**Răspuns:** Pentru fiecare lege, calculăm ambii membri ai relației și arătăm că sunt egali.

1.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  :

Membrul stâng:  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow (A \cup B)^c = \{5\}$ .

Membrul drept:  $A^c = \{4, 5\}$ ,  $B^c = \{1, 2, 5\} \Rightarrow A^c \cap B^c = \{5\}$ .

Cei 2 membri sunt egali, q.e.d.

2.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  :

Membrul stâng:  $A \cap B = \{3\} \Rightarrow (A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 5\}$ .

Membrul drept:  $A^c = \{4, 5\}$ ,  $B^c = \{1, 2, 5\} \Rightarrow A^c \cup B^c = \{1, 2, 4, 5\}$ .

Cei 2 membri sunt egali, q.e.d.

### Produsul cartezian

**Produsul cartezian al mulțimilor**  $S$  și  $T$  este mulțimea perechilor ordonate:

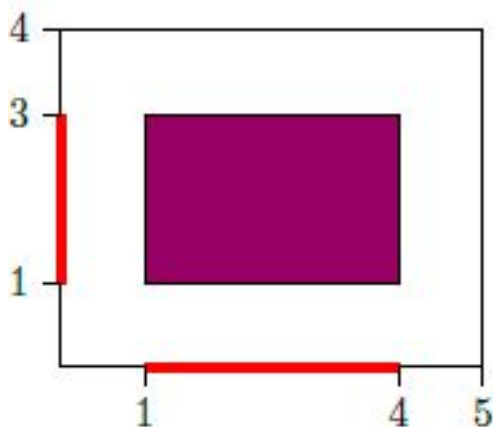
$$S \times T = \{(s, t) | s \in S, t \in T\}.$$

În cuvinte, membrul drept se citește "mulțimea perechilor ordonate  $(s, t)$  cu proprietatea că  $s$  este în  $S$  și  $t$  este în  $T$ ".

Următoarele diagrame arată 2 exemple de produs cartezian.

| $\times$ | 1     | 2     | 3     | 4     |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| 1        | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) |
| 2        | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) |
| 3        | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) |

$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$$



$$[1, 4] \times [1, 3] \subset [0, 5] \times [0, 4]$$

Ultima figură ilustrează de asemenea faptul că dacă  $A \subset S$  și  $B \subset T$ , atunci  $A \times B \subset S \times T$ .

### 2.2.3 Numărare

Dacă  $S$  este finită, folosim  $|S|$  sau  $\#S$  pentru a nota numărul elementelor lui  $S$  (cardinalul lui  $S$ ).

2 principii de numărare utile sunt *principiul includerii și excluderii* și *regula produsului*.

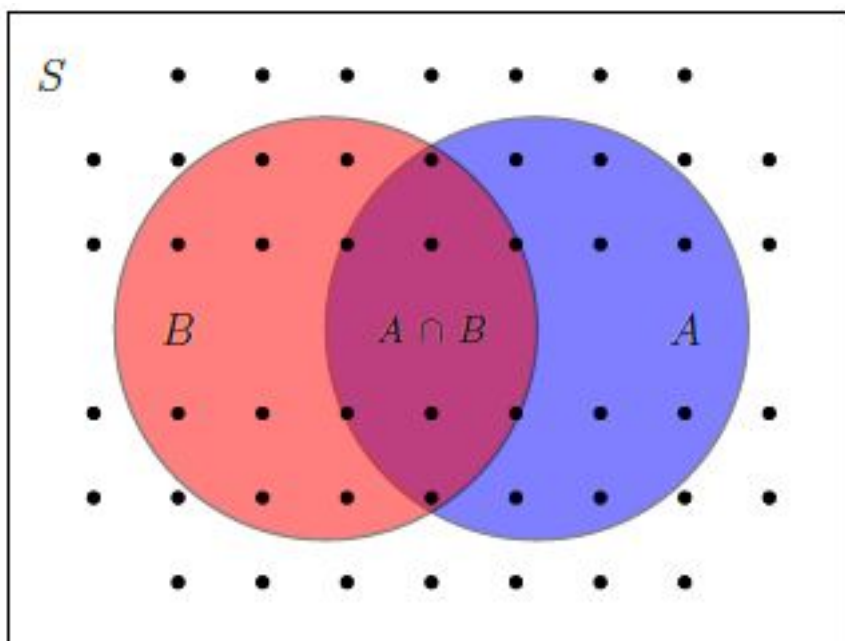
#### Principiul includerii și excluderii

Principiul includerii și excluderii spune

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Putem ilustra asta printr-o diagramă Venn-Euler.  $S$  este mulțimea tuturor punctelor,  $A$  este mulțimea punctelor din cercul albastru, iar  $B$  este mulțimea punctelor din cercul roșu.





$|A|$  este numărul de puncte din  $A$  și analog pentru celelalte mulțimi. Figura arată că  $|A| + |B|$  numără *de 2 ori*  $|A \cap B|$ , de aceea  $|A \cap B|$  este scăzut în formula includerii și excluderii.

**Exemplul 4.** Într-o trupă de cântăreți și chitariști sunt 7 cântăreți, 4 chitariști și 2 ambele. Cât de mare este trupa?

**Răspuns:** Fie  $S$  mulțimea cântăreților și  $G$  mulțimea chitariștilor. Principiul includerii și excluderii spune că

$$\text{mărimea trupei} = |S \cup G| = |S| + |G| - |S \cap G| = 7 + 4 - 2 = 9.$$

## Regula produsului

**Regula produsului** spune:

Dacă există  $n$  moduri de a face acțiunea 1 și apoi  $m$  moduri de a face acțiunea 2, atunci există  $n \cdot m$  moduri de a face acțiunea 1 urmată de acțiunea 2.

O numim de asemenea regula **multiplicării**.

**Exemplul 5.** Dacă avem 3 cămăși și 4 pantaloni, atunci putem face  $3 \cdot 4 = 12$  costumații.

**Gândiți:** Un punct extrem de important este că regula produsului are loc chiar dacă modurile de a face acțiunea 2 depind de acțiunea 1, atât timp cât *numărul* de moduri de a face acțiunea 2 este independent de acțiunea 1. Pentru a ilustra asta:

**Exemplul 6.** Există 5 competitori în finala de 100m la olimpiadă. În câte moduri pot fi date medaliile de aur, argint și bronz? (Presupunem că

egalitățile sunt excluse.)

**Răspuns:** Există 5 moduri de a da medalia de aur. Odată ce aceasta este dată, există 4 moduri de a da medalia de argint și apoi 3 moduri de a da medalia de bronz. Răspuns  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  de moduri.

Observăm că alegerea medaliatului cu aur afectează câștigătorul argintului, dar numărul posibilităților medaliați cu argint este totdeauna 4.

## 2.2.4 Permutări, aranjamente și combinări

### Permutări și aranjamente

O **permutare** a unei mulțimi este o ordonare particulară a elementelor sale. De exemplu, mulțimea  $\{a, b, c\}$  are 6 permutări:  $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ . Am aflat numărul permutărilor listându-le pe toate. Puteam de asemenea să aflăm numărul permutărilor folosind regula produsului. Adică, există 3 moduri de a alege primul element, apoi 2 moduri pentru al 2-lea și 1 pentru al 3-lea. Asta dă un total de  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  permutări.

În general, regula produsului ne spune că numărul de permutări ale unei mulțimi de  $k$  elemente este

$$k! = k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Vorbim de asemenea de aranjamentele a  $k$  elemente dintr-o mulțime cu  $n$  elemente. Arătăm ce înseamnă asta cu un exemplu.

**Exemplul 7.** Listați toate aranjamentele de 3 elemente ale mulțimii  $\{a, b, c, d\}$ .

**Răspuns:** Este o listă mai lungă,

*abc acb bac bca cab cba*  
*abd adb bad bda dab dba*  
*acd adc cad cda dac dca*  
*bcd bdc cbd cdb dbc dcb*

Observăm că  $abc$  și  $acb$  se numără ca aranjamente distincte. Adică, **pentru aranjamente ordinea contează**.

Există 24 de aranjamente. Observăm că regula produsului ne-ar fi spus că sunt  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  permutări fără a ne mai deranja să le listăm.

### Combinări

În contrast cu aranjamentele, **la combinări ordinea nu contează: aranjamentele sunt liste, iar combinările sunt mulțimi**. Arătăm ce vrem să spunem printr-un exemplu.

**Exemplul 8.** Listați toate combinările de 3 elemente din mulțimea  $\{a, b, c, d\}$ .

**Răspuns:** O astfel de combinare este o colecție de 3 elemente fără a consi-

dera ordinea. Astfel,  $abc$  și  $cab$  reprezintă ambele aceeași combinație. Putem lista toate combinațiile listând toate submulțimile de exact 3 elemente.

$$\{a, b, c\} \quad \{a, b, d\} \quad \{a, c, d\} \quad \{b, c, d\}.$$

Există doar 4 combinații, în contrast cu cele 24 de aranjamente din exemplul anterior. Factorul 6 apare deoarece fiecare combinație de 3 elemente poate fi scrisă în 6 ordini diferite.

### Formule

Folosim următoarele notații.

$A_n^k$  = numărul aranjamentelor (listelor) de  $k$  elemente distincte dintr-o mulțime cu  $n$  elemente.

$C_n^k = \binom{n}{k}$  = numărul combinațiilor (submulțimilor) de  $k$  elemente dintr-o mulțime cu  $n$  elemente.

Subliniem că prin numărul de combinații de  $k$  elemente înțelegem numărul de submulțimi de  $k$  elemente.

Acestea au următoarele notații și formule:

$$\text{Aranjamente: } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

$$\text{Combinații: } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Notăția  $A_n^k$  se citește "aranjamente de  $n$  luate câte  $k$ ". Notăția  $C_n^k$  se citește "combinații de  $n$  luate câte  $k$ ". Formula pentru  $A_n^k$  rezultă din regula produsului. Ea implică de asemenea formula pentru  $C_n^k$ , deoarece o submulțime de  $k$  elemente poate fi ordonată în  $k!$  moduri.

Putem ilustra relația dintre aranjamente și combinații aliniind rezultatele din cele 2 exemple anterioare.

|       |       |       |       |       |        |               |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------|---------------|
| $abc$ | $acb$ | $bac$ | $bca$ | $cab$ | $cba$  | $\{a, b, c\}$ |
| $abd$ | $adb$ | $bad$ | $bda$ | $dab$ | $dba$  | $\{a, b, d\}$ |
| $acd$ | $adc$ | $cad$ | $cda$ | $dac$ | $dca$  | $\{a, c, d\}$ |
| $bcd$ | $bdc$ | $cbd$ | $cdb$ | $dbc$ | $dc b$ | $\{b, c, d\}$ |

Aranjamente:  $A_4^3$

Combinații:  $C_4^3$

Observăm că fiecare linie din lista de aranjamente constă din toate cele 3! permutări ale mulțimii corespunzătoare din lista de combinații.

### Exemple

**Exemplul 9.** Calculați:

- (i) Numărul de moduri de a alege 2 din 4 obiecte (ordinea nu contează).
- (ii) Numărul de moduri de a lista 2 din 4 obiecte.
- (iii) Numărul de moduri de a alege 3 din 10 obiecte.

**Răspuns:** (i)  $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ .

(ii)  $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$ .

(iii)  $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ .

**Exemplul 10.** (i) Calculați numărul de moduri de a obține 3 aversuri într-o secvență de 10 aruncări ale unei monede.

(ii) Dacă moneda este corectă, care este probabilitatea a exact 3 aversuri din 10 aruncări?

**Răspuns:** (i) Se cere numărul de secvențe de 10 aruncări (aversuri sau reversuri) cu exact 3 aversuri. Adică, trebuie să alegem exact 3 din 10 aruncări să fie aversuri. Asta este aceeași întrebare ca ultima din exemplul precedent.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120.$$

(ii) Fiecare aruncare are 2 cazuri posibile (avers sau revers). Astfel, regula produsului spune că există  $2^{10} = 1024$  secvențe de 10 aruncări. Deoarece moneda este corectă, fiecare secvență este egal probabilă. Deci probabilitatea a 3 aversuri este

$$\frac{120}{1024} = 0.1171875.$$

## 3 Probabilitate: terminologie și exemple

### 3.1 Scopurile învățării

1. Să știe definițiile spațiului probelor, evenimentului și probabilității.
2. Să poată organiza un scenariu cu caracter aleator într-un experiment și spațiu al probelor.
3. Să poată face calcule de bază folosind o probabilitate.

### 3.2 Terminologie

#### 3.2.1 Definiții

**Experiment:** o procedură repetabilă cu cazuri (rezultate) posibile bine definite.

**Spațiul probelor:** mulțimea tuturor cazurilor posibile. De obicei notăm spațiul probelor cu  $\Omega$ , uneori cu  $S$ .

**Eveniment:** o submulțime a spațiului probelor.

**Funcție de probabilitate:** o funcție dând probabilitatea pentru fiecare caz.

### 3.2.2 Exemple simple

**Exemplul 1.** Aruncarea unei monede corecte.

**Experiment:** aruncăm moneda, raportăm dacă aterizează avers sau revers.

**Spațiul probelor:**  $\Omega = \{H, T\}$ .

**Funcție de probabilitate:**  $P(H) = 0.5$ ,  $P(T) = 0.5$ .

**Exemplul 2.** Aruncarea de 3 ori a unei monede corecte.

**Experiment:** aruncăm moneda de 3 ori, listăm rezultatele.

**Spațiul probelor:**  $\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ .

**Funcție de probabilitate:** fiecare caz este egal probabil, cu probabilitatea  $1/8$ .

Pentru spații mici de probe putem pune mulțimea cazurilor și probabilitățile într-un [tabel de probabilitate](#).

| Caz           | HHH | HHT | HTH | HTT | THH | THT | TTH | TTT |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Probabilitate | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 |

**Exemplul 3.** Măsurarea masei unui proton

**Experiment:** se urmează o procedură definită pentru a măsura masa și a raporta rezultatul.

**Spațiul probelor:**  $\Omega = [0, \infty)$ , i.e. în principiu putem obține orice valoare pozitivă.

**Funcție de probabilitate:** deoarece există un continuum de cazuri posibile, nu există o funcție de probabilitate. În locul ei avem nevoie să folosim o *densitate de probabilitate*.

**Exemplul 4.** Taxiuri (Un spațiu de probe discret infinit)

**Experiment:** se numără taxiurile care trec pe lângă facultate pe durata cursului.

**Spațiul probelor:**  $\Omega = \mathbb{N}$ .

Acesta este modelat adesea cu următoarea funcție de probabilitate cunoscută ca repartiția (distribuția) Poisson:

$$P(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

unde  $\lambda$  este numărul mediu de taxiuri. Putem pune asta într-un tabel:

| Caz           | 0              | 1                     | 2                         | 3                          | ... | k                          | ... |
|---------------|----------------|-----------------------|---------------------------|----------------------------|-----|----------------------------|-----|
| Probabilitate | $e^{-\lambda}$ | $e^{-\lambda}\lambda$ | $e^{-\lambda}\lambda^2/2$ | $e^{-\lambda}\lambda^3/3!$ | ... | $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ | ... |

**Întrebare:** Acceptând că aceasta este o funcție de probabilitate validă, cât este  $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ ?

**Răspuns:** Aceasta este probabilitatea totală a tuturor cazurilor posibile, deci suma este 1.

Într-o schemă dată poate fi mai mult de o alegere rezonabilă a spațiului probelor. Iată un exemplu simplu.

**Exemplul 5.** 2 zaruri corecte (Alegerea spațiului probelor)

Presupunem că aruncăm un zar corect. Atunci spațiul probelor și funcția de probabilitate sunt

|               |     |     |     |     |     |     |
|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Caz           | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
| Probabilitate | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

Acum presupunem că aruncăm 2 zaruri corecte. Care ar trebui să fie spațiul probelor? Iată 2 opțiuni.

1. Înregistrăm perechea numerelor de pe zaruri (primul zar, al 2-lea zar).
2. Înregistrăm suma numerelor de pe zaruri. În acest caz sunt 11 cazuri  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ . Aceste cazuri **nu sunt toate egal probabile**.

Ca mai sus, putem pune această informație în tabele. Pentru prima opțiune, spațiul probelor este produsul cartezian al spațiilor probelor pentru fiecare zar

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6)\}.$$

Fiecare din cele 36 de cazuri este egal probabil. (De ce 36 de cazuri?) Pentru funcția de probabilitate vom face un tabel 2 dimensional cu liniile corespunzând numerelor de pe primul zar, coloanele numerelor de pe al 2-lea zar, iar în tabel sunt probabilitățile.

|       |   | Zar 2 |      |      |      |      |      |
|-------|---|-------|------|------|------|------|------|
|       |   | 1     | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
| Zar 1 | 1 | 1/36  | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 |
|       | 2 | 1/36  | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 |
|       | 3 | 1/36  | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 |
|       | 4 | 1/36  | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 |
|       | 5 | 1/36  | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 |
|       | 6 | 1/36  | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 | 1/36 |

2 zaruri corecte într-un tabel 2-dimensional

În a 2-a opțiune prezentăm cazurile și probabilitățile în tabelul nostru uzual.

|               |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Caz           | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   |
| Probabilitate | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Suma a 2 zaruri corecte

**Gândiți:** Care este relația dintre cele 2 tabele de probabilități de mai sus? Vom vedea că cea mai bună alegere a spațiului probelor depinde de context. Deocamdată observăm că, dacă dăm rezultatul ca o pereche de numere, este

ușor să aflăm suma.

**Observație.** Listarea experimentului, spațiului probelor și a funcției de probabilitate este un bun mod de a începe lucrul sistematic cu probabilitatea. Vă poate ajuta să evitați unele din capcanele obișnuite din subiect.

### Evenimente

Un **eveniment** este o colecție de cazuri, i.e. un eveniment este o submulțime a spațiului probelor  $\Omega$ .

**Exemplul 6.** Folosind schema din exemplul 2 vom descrie evenimentul să obținem exact 2 aversuri în cuvinte prin  $E = \text{"exact 2 aversuri"}$ . Scris ca o submulțime, acesta devine

$$E = \{HHT, HTH, THH\}.$$

Probabilitatea unui eveniment  $E$  este calculată adunând probabilitățile tuturor cazurilor din  $E$ . În acest exemplu fiecare caz are probabilitatea  $1/8$ , deci avem  $P(E) = 3/8$ .

### 3.2.3 Definiția unui spațiu al probelor discret

**Definiție.** Un **spațiu al probelor discret** este unul care este cel mult numărabil (listabil), putând fi ori finit ori infinit.

**Exemple.**  $\{H, T\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\mathbb{N}^*$ ,  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$  sunt toate mulțimi discrete. Primele 2 sunt finite și ultimele 2 sunt infinite.

**Exemplu.** Intervalul  $[0, 1]$  nu este discret, ci *continuu*.

### 3.2.4 Funcția de probabilitate

Până acum am folosit o definiție ocazională a funcției de probabilitate. Să dăm una mai precisă.

#### Definiția funcției de probabilitate

Pentru un spațiu al probelor discret  $S$ , o **funcție de probabilitate**  $P$  atribuie fiecărui caz  $\omega$  un număr  $P(\omega)$  numit probabilitatea lui  $\omega$ .  $P$  trebuie să satisfacă 2 reguli:

Regula 1.  $0 \leq P(\omega) \leq 1$  (probabilitățile sunt între 0 și 1).

Regula 2. Suma probabilităților tuturor cazurilor posibile este 1 (ceva trebuie să aibă loc).

În simboluri, regula 2 spune: dacă  $S = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ , atunci  $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$ . Sau  $\sum_{j=1}^n P(\omega_j) = 1$ .

Probabilitatea unui eveniment  $E$  este suma probabilităților tuturor cazurilor

din  $E$ . Adică,

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega).$$

**Gândiți:** Verificați regulile 1 și 2 pe exemplele 1 și 2 de mai sus.

**Exemplul 7.** Aruncarea până la primul avers (un exemplu clasic)

Presupunem că avem o monedă cu probabilitatea  $p$  a aversurilor și avem următorul scenariu.

**Experiment:** Aruncăm moneda până apare primul avers. Raportăm numărul aruncărilor.

**Spațiul probelor:**  $\Omega = \mathbb{N}^*$ .

**Funcția de probabilitate:**  $P(n) = (1 - p)^{n-1}p$ .

**Provocarea 1:** arătați că suma tuturor probabilităților este 1 (indicație: serii geometrice).

**Provocarea 2:** justificați formula pentru  $P(n)$ .

**Probleme de oprire.** Exemplul didactic anterior este o versiune a unei clase generale de probleme numite **probleme de regula opririi**. O regulă de oprire este o regulă care ne spune când să terminăm un anumit proces. În exemplul didactic de mai sus procesul a fost aruncarea unei monezi și l-am oprit după primul avers. Un exemplu mai practic este o regulă pentru terminarea unei serii de tratamente medicale. O astfel de regulă ar putea depinde de cât de bine funcționează tratamentele, cum le tolerează pacientul și probabilitatea să fie eficace continuarea tratamentelor. Ne putem informa despre probabilitatea opririi într-un anumit număr de tratamente sau numărul mediu de tratamente la care să ne așteptăm înaintea opririi.

### 3.3 Câteva reguli ale probabilității

Pentru evenimentele  $A$ ,  $L$  și  $R$  incluse într-un spațiu al probelor  $\Omega$ :

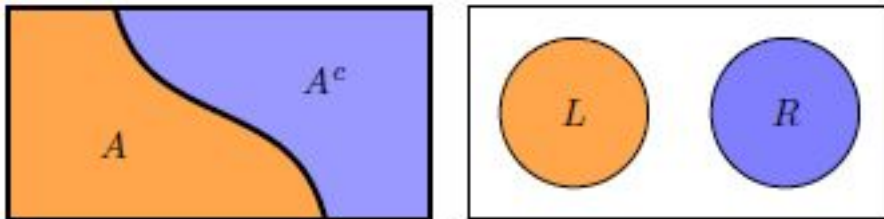
**Regula 1.**  $P(A^c) = 1 - P(A)$ .

**Regula 2.** Dacă  $L$  și  $R$  sunt disjuncte, atunci  $P(L \cup R) = P(L) + P(R)$ .

**Regula 3.** Dacă  $L$  și  $R$  nu sunt disjuncte, avem **principiul includerii și excluderii**:

$$P(L \cup R) = P(L) + P(R) - P(L \cap R).$$

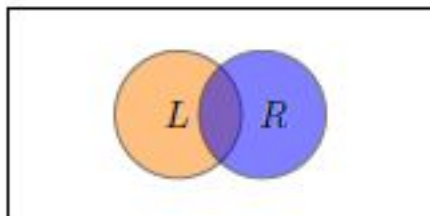
Vizualizăm aceste reguli folosind diagrame Venn-Euler.





$\Omega = A \cup A^c$ , nicio suprapunere

$L \cup R$ , nicio suprapunere



$L \cup R$ , suprapunerea =  $L \cap R$

Le putem de asemenea justifica logic.

Regula 1:  $A$  și  $A^c$  împart  $\Omega$  în 2 regiuni disjuncte. Deoarece probabilitatea totală  $P(\Omega) = 1$ , această regulă spune că probabilitatea lui  $A$  și probabilitatea lui "non  $A$ " sunt complementare, adică au suma 1.

Regula 2:  $L$  și  $R$  împart  $L \cup R$  în 2 regiuni disjuncte. Deci probabilitatea lui  $L \cup R$  este împărțită între  $P(L)$  și  $P(R)$ .

Regula 3: În suma  $P(L) + P(R)$  suprapunerea  $P(L \cap R)$  este numărată de 2 ori. Deci  $P(L) + P(R) - P(L \cap R)$  numără totul din reuniune exact o dată.

**Gândiți:** Regula 2 este un caz special al regulii 3.

Pentru următoarele exemple presupunem că avem un experiment care produce un întreg aleator între 1 și 20. Probabilitățile nu sunt necesar uniforme, i.e., nu sunt necesar aceleași pentru fiecare caz.

**Exemplul 8.** Dacă probabilitatea unui număr par este 0.6, care este probabilitatea unui număr impar?

**Răspuns:** Deoarece a fi impar este complementar cu a fi par, probabilitatea unui număr impar este  $1 - 0.6 = 0.4$ .

Să refacem acest exemplu un pic mai formal. Întâi, pentru a ne putea referi la el, să numim întregul aleator  $X$ . De asemenea, numim  $A$  evenimentul " $X$  este par". Atunci evenimentul " $X$  este impar" este  $A^c$ . Ne este dată  $P(A) = 0.6$ . De aceea  $P(A^c) = 1 - 0.6 = 0.4$ .

**Exemplul 9.** Considerăm 2 evenimente,  $A$ : " $X$  este multiplu de 2";  $B$ : " $X$  este impar și mai mic ca 10". Presupunem că  $P(A) = 0.6$  și  $P(B) = 0.25$ .

(i) Cine este  $A \cap B$ ?

(ii) Care este probabilitatea lui  $A \cup B$ ?

**Răspuns:** (i) Deoarece toate numerele din  $A$  sunt pare și toate numerele din  $B$  sunt impare, aceste evenimente sunt disjuncte. Adică  $A \cap B = \emptyset$ .

(ii) Deoarece  $A$  și  $B$  sunt disjuncte,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.85$ .

**Exemplul 10.** Fie  $A, B$  și  $C$  evenimentele  $X$  este multiplu de 2, 3, respectiv 6. Dacă  $P(A) = 0.6$ ,  $P(B) = 0.3$  și  $P(C) = 0.2$ , cât este  $P(A \text{ sau } B)$ ?

**Răspuns:** Observăm 2 lucruri. Întâi, am folosit cuvântul "sau", care înseamnă reuniune: " $A \text{ sau } B$ " =  $A \cup B$ . Al 2-lea, un întreg este divizibil cu 6 dacă

și numai dacă este divizibil cu 2 și cu 3. De aici rezultă  $C = A \cap B$ . Deci principiul includerii și excluderii spune

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.3 - 0.2 = 0.7.$$

### 3.4 Definiția axiomatică a probabilității

**Notății.**  $\Omega$  mulțime.

$\mathcal{P}(\Omega) := \{A | A \subseteq \Omega\}$  - mulțimea părților lui  $\Omega$ .

$A \subseteq \Omega$ .

$\bar{A} = \mathcal{C}A := \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}$  - complementara lui  $A$ .

$A_n \rightarrow A \iff (A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \text{ și } A = \bigcup_n A_n)$  sau  $(A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \text{ și }$

$A = \bigcap_n A_n)$

**Definiții.** Fie  $\Omega$  mulțime.  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  corp borelian sau  $\sigma$ -algebră pe  $\Omega$

$\iff$

1)  $\mathcal{K} \neq \emptyset$

2)  $A \in \mathcal{K} \implies \bar{A} \in \mathcal{K}$

3)  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{K} \implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{K}$ .

$(\Omega, \mathcal{K})$  spațiu măsurabil  $\iff \mathcal{K}$  este corp borelian pe  $\Omega$ .

**Proprietăți.**  $(\Omega, \mathcal{K})$  spațiu măsurabil  $\implies$

a)  $\Omega \in \mathcal{K}$

b)  $\emptyset \in \mathcal{K}$

c)  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K} \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{K}$ .

d)  $I$  cel mult numărabilă (i.e. finită sau numărabilă),  $A_i \in \mathcal{K}, \forall i \in I \implies \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{K}$

e)  $A, B \in \mathcal{K} \implies A \setminus B \in \mathcal{K}$ .

**Definiții.**  $\mathcal{K}$  corp borelian pe  $\Omega$ .

$A \in \mathcal{K}$  - eveniment

$\Omega$  - eveniment sigur

$\emptyset$  - eveniment imposibil

$\bar{A}$  - eveniment contrar lui  $A$

$A, B$  disjuncte  $\iff A \cap B = \emptyset$

**Definiții.**  $(\Omega, \mathcal{K})$  spațiu măsurabil.  $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  probabilitate pe  $(\Omega, \mathcal{K}) \iff$

1)  $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{K}$  ( $P$  nenegativă).

2)  $P(\Omega) = 1$  ( $P$  normată).

3)  $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{K}$  disjuncte 2 câte 2,

$$P\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j P(A_j) \quad (P \text{ numărabil aditivă}).$$

$(\Omega, \mathcal{K}, P)$  câmp de probabilitate  $\iff P$  este probabilitate pe spațiul măsurabil  $(\Omega, \mathcal{K})$ .

**Proprietăți.**  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  câmp de probabilitate  $\implies$

1)  $P(\emptyset) = 0$ .

2)  $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K}$  disjuncte 2 câte 2,  $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$  ( $P$  este aditivă).

3)  $A \subseteq B; A, B \in \mathcal{K} \implies P(A) \leq P(B)$ .

4) (Formula lui Poincare)  $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K}$ ,

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^m A_{i_j}\right).$$

În particular,

$$\forall A, B \in \mathcal{K}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$\forall A, B, C \in \mathcal{K},$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

5)  $\forall A \in \mathcal{K}, P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ .

6)  $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{K}, A_n \rightarrow A \implies P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$ .

7)  $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K}, P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n P(A_j)$ .

8)  $\forall A, B, C \in \mathcal{K}, P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$ .

### Exemple

1)  $\Omega$  mulțime finită,

$$\mathcal{K} = P(\Omega),$$

$$P: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}, P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile (lui } A)}{\text{numărul cazurilor egal posibile}}.$$

$(\Omega, \mathcal{K}, P)$  - câmpul de probabilitate al lui Laplace.

Când nu specificăm altfel, pe o mulțime finită  $\Omega$  considerăm câmpul de probabilitate al lui Laplace.

2) La jocul de table, să se determine probabilitatea ca o piesă dată afară să intre la mutarea următoare, dacă sunt  $n \in \{0, 1, \dots, 6\}$  câmpuri libere în casă.

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$$

$$|\Omega| = 36$$

$L_n \subseteq \{1, 2, \dots, 6\}$  - mulțimea câmpurilor libere din casă

$$\begin{aligned}
|L_n| &= n \\
A_n &= \text{"cel puțin unul din zaruri e în } L_n\text{"} \\
\overline{A_n} &= \text{"niciun zar nu e în } L_n\text{"} = (\{1, 2, \dots, 6\} \setminus L_n)^2 \\
P(A_n) &= 1 - P(\overline{A_n}) = 1 - \frac{|\{1, 2, \dots, 6\} \setminus L_n|^2}{|\Omega|} = 1 - \frac{|\{1, 2, \dots, 6\} \setminus L_n|^2}{|\Omega|} = 1 - \frac{(6-n)^2}{36}, \forall n \in \{0, 1, \dots, 6\}.
\end{aligned}$$