

Noțiuni introductive



Multiset

Fie S o mulțime (finită) nevidă.

Multiset:

- ☐ Intuitiv: O “mulțime” unde elementele se pot repeta

Multiset

Fie S o mulțime (finită) nevidă.

Multiset:

□ $R = (S, r), r : S \rightarrow \mathbb{N}$ **funcție de multiplicitate**

Notăție

□ $R = \{x^{r(x)} \mid x \in S\}$

Multiset

Exemplu

- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $R = \{2^2, 3, 5^3\}$

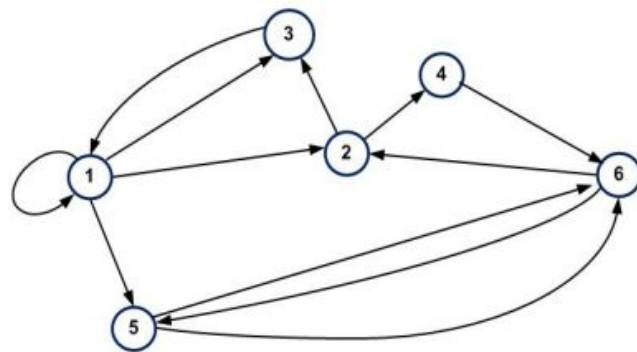
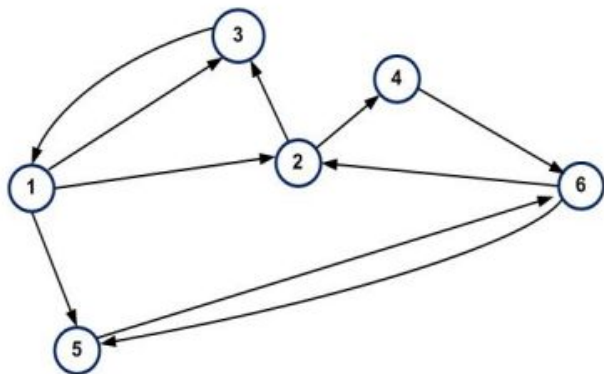
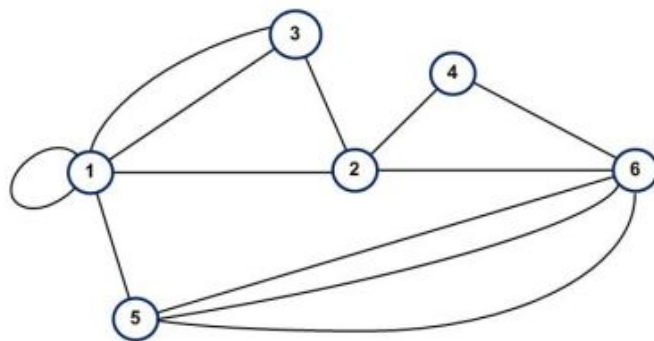
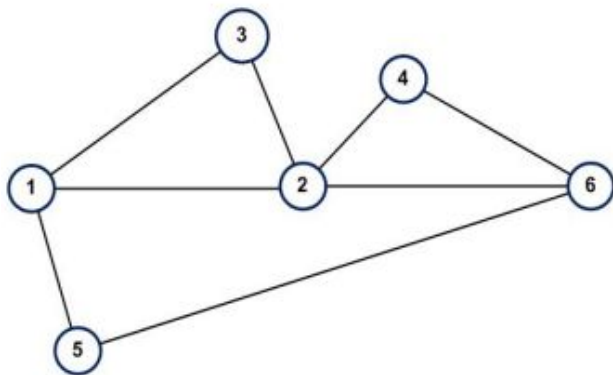
$|R| = 2+1+3 = 6$ – **suma multiplicităților**

$1 \notin R$

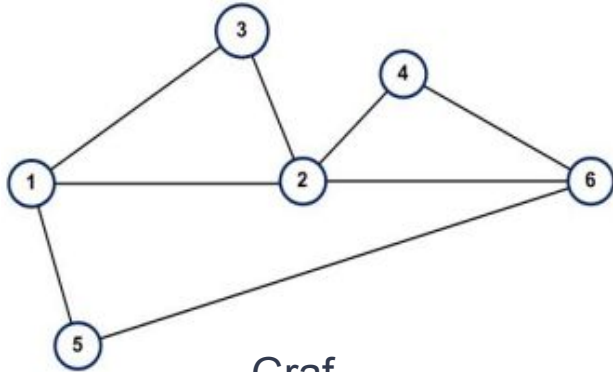
Grafuri



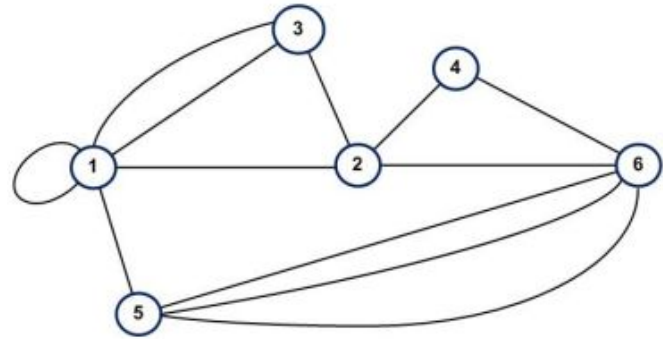
Graf, multigraf



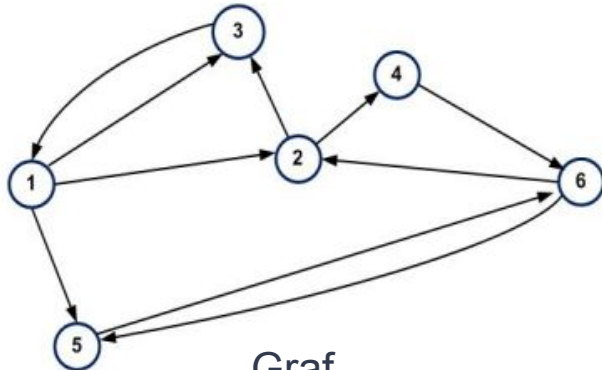
Graf, multigraf



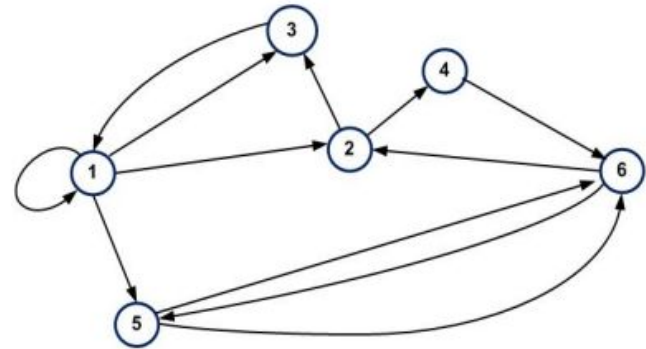
Graf



Multigraf

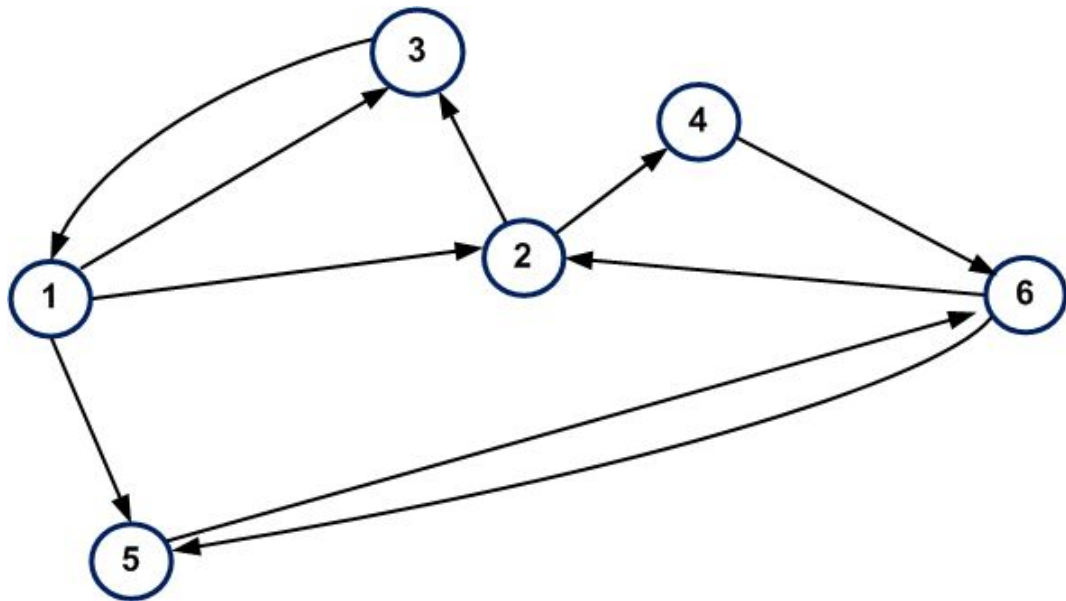


Graf



Multigraf

Graf orientat



Graf orientat

Graf orientat: $G = (V, E)$

- V – mulțime finită
- E – perechi (ordonate) de 2 elemente distincte din V
- $v \in V$ – vârf
- $e = (u, v) = \mathbf{uv}$ – arc
- $u = e^-$ – vârf inițial / origine / extremitate inițială
- $v = e^+$ – vârf final / terminus / extremitate finală

Graf orientat

$$G = (V, E)$$

$d_G^-(u)$ – grad interior

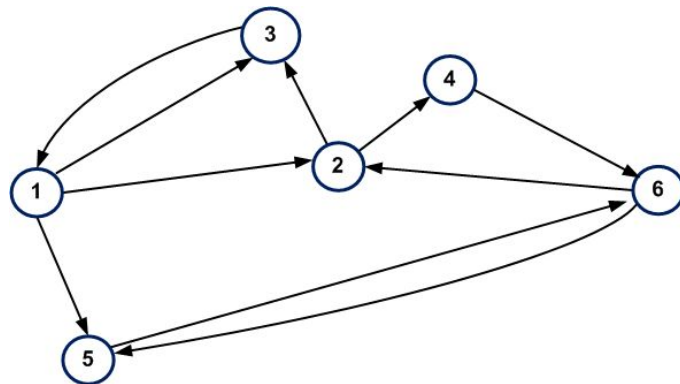
$$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$$

$d_G^+(u)$ – grad exterior

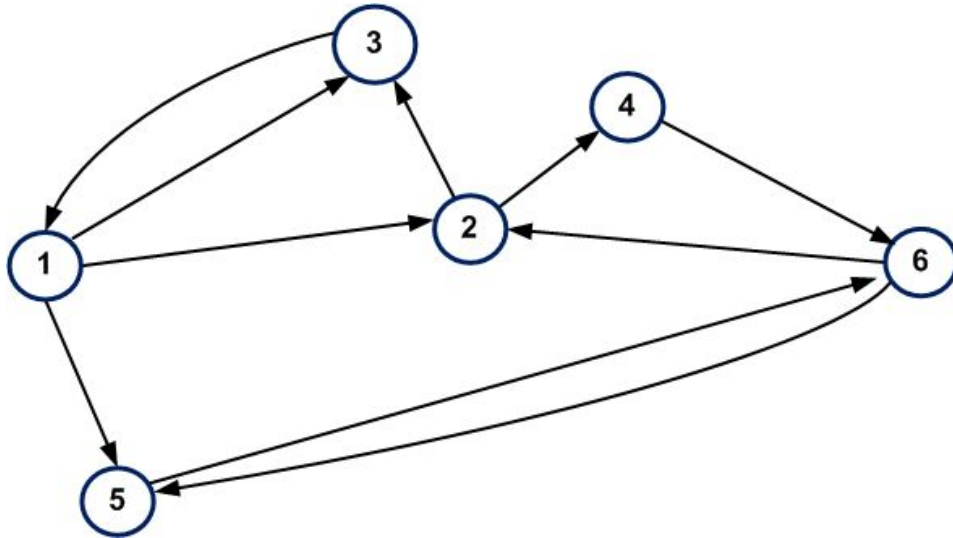
$$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$$

$d_G(u)$ – grad

$$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$



Graf orientat



$$d^-(3) = 2$$

$$d^+(3) = 1$$

Graf orientat

Are loc relația

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

Multisetul gradelor

G orientat, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

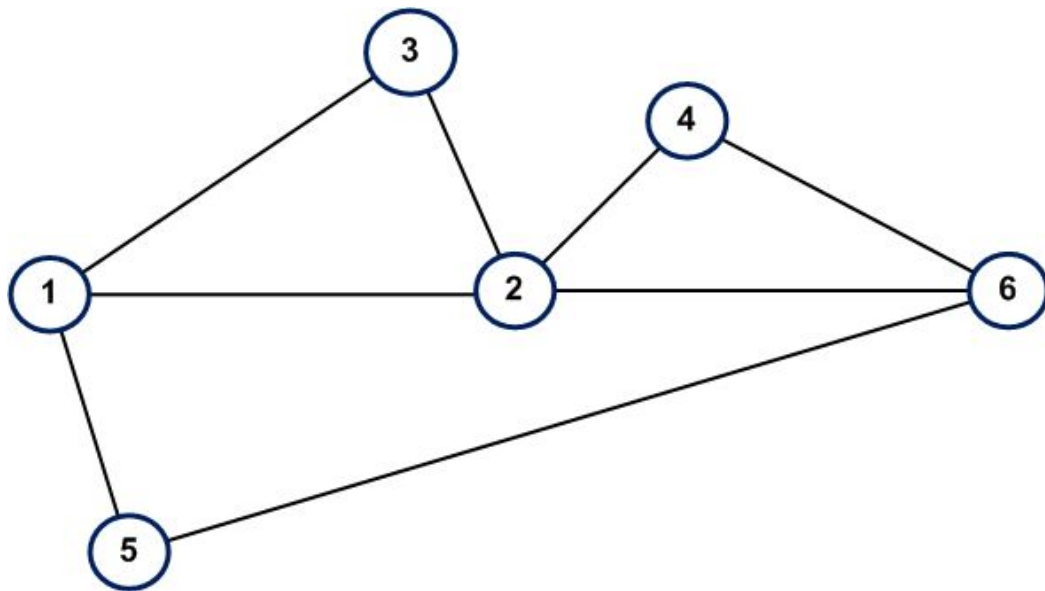
- Multisetul gradelor **interioare**

$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), \dots, d_G^-(v_n)\}$$

- Multisetul gradelor **exterioare**

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), \dots, d_G^+(v_n)\}$$

Graf neorientat

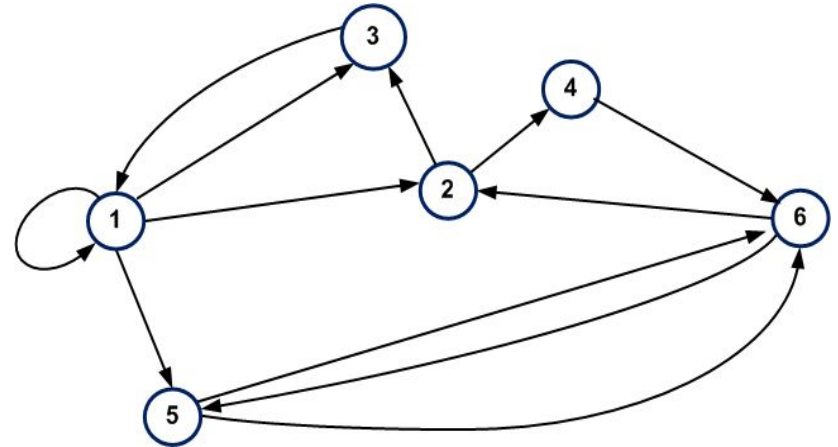
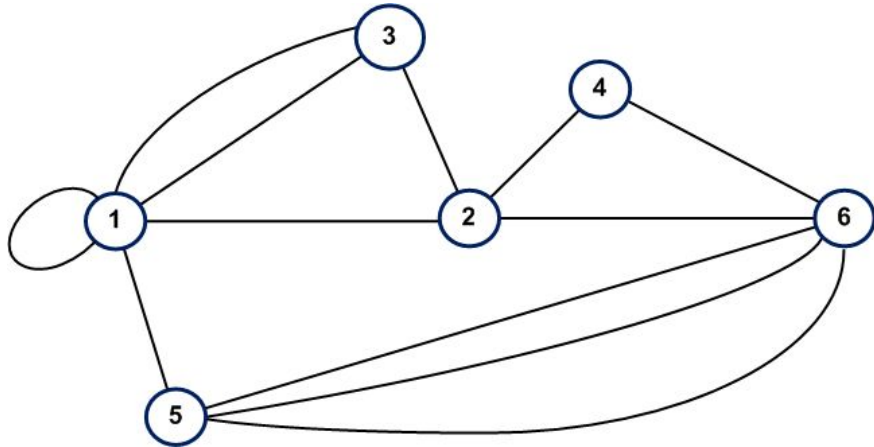


Graf neorientat

Graf neorientat: $G = (V, E)$

- ☐ V – mulțime finită
- ☐ E – submulțime de 2 elemente (distincte) din V
- ☐ $v \in V$ – vârf / nod
- ☐ $e = \{u, v\} = uv$ – muchie
- ☐ u, v – capete / extremități

Multigraf neorientat/orientat



Multigraf

$$\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}, r)$$

□ $r(e)$ – multiplicitatea muchiei e

Multigraf

$$G = (V, E, r)$$

- $r(e)$ – **multiplicitatea muchiei e**
 - $e = \{u, u\}$ – **buclă**
 - e cu $r(e) > 1$ – **muchie multiplă**

$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă, } u \text{ extremitate a lui } e\}| + 2 * |\{e \in E \mid e \text{ este buclă, } u \text{ extremitate a lui } e\}|$$

Alte noțiuni fundamentale

Adiacență. Incidență

A dark blue diagonal gradient bar that starts from the bottom left corner and extends towards the top right corner, covering the lower half of the slide.

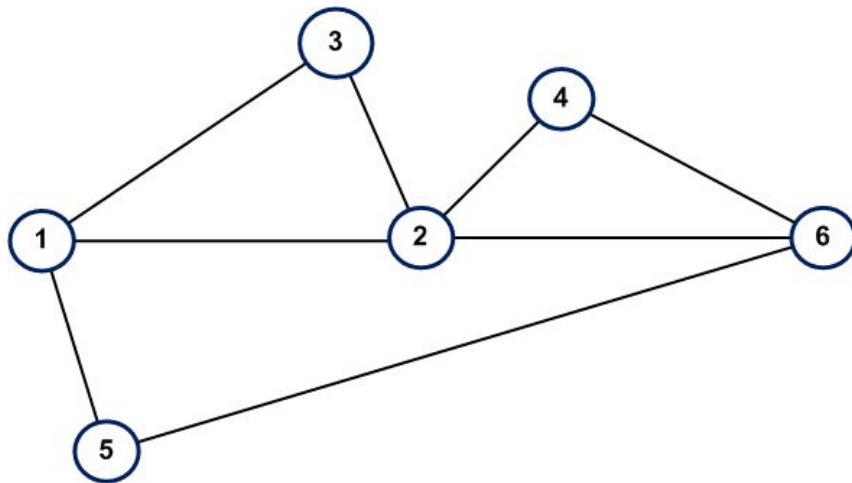
Adiacență. Incidență

Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**.

- u și $v \in V$ sunt **adiacente** dacă $uv \in E$
- un **vecin** al lui $u \in V$ este un vârf adiacent cu el

Notăție

$N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u



Adiacență. Incidență

Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**.

- o muchie $e \in E$ este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e
- e și $f \in E$ sunt **adiacente** dacă există un vârf în care sunt incidente (au o extremitate în comun)

Drumuri. Circuite



Drumuri. Circuite

- ☐ **Drum (walk)**
- ☐ **Drum simplu (trail)**
- ☐ **Drum elementar (path)**
- ☐ **Circuit, circuit elementar**
- ☐ **Lungimea unui drum**
- ☐ **Distanță între două vârfuri**

Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat**.

Un **drum** este o secvență P de vârfuri

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

unde $v_1, \dots, v_k \in V(G)$

cu proprietatea că, între oricare două vârfuri consecutive, există un arc

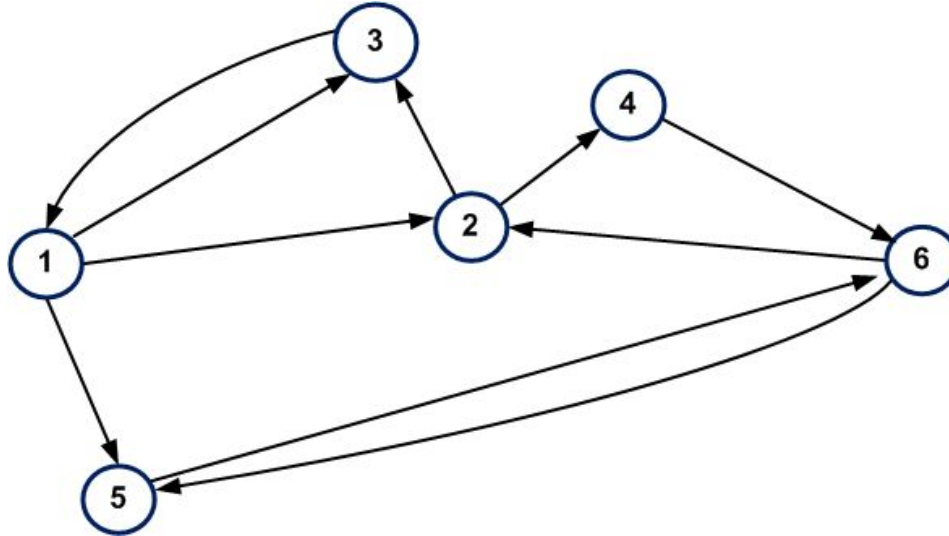
$$(v_i, v_{i+1}) \in E(G), \quad \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$$

Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat** și fie un **drum** $P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$.

- ☐ P este **drum simplu** dacă nu conține un **arc** de mai multe ori $((v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1}), \forall i \neq j)$
- ☐ P este **drum elementar** dacă nu conține un **vârf** de mai multe ori $(v_i \neq v_j, \forall i \neq j)$

Drumuri. Circuite



[1, 2, 4, 6, 2, 4] - drum care nu este simplu

[1, 2, 4, 6, 2, 3] - drum simplu care nu este elementar

[1, 2, 4, 6] - drum elementar

Drumuri. Circuite

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

- **Lungimea** lui P este $I(P) = k-1$ (cardinalul multisetului arcelor lui P)
- v_1 și v_k se numesc **capetele / extremitățile** lui P
- P se numește și **v_1 - v_k lanț**

Drumuri. Circuite

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

Notăm

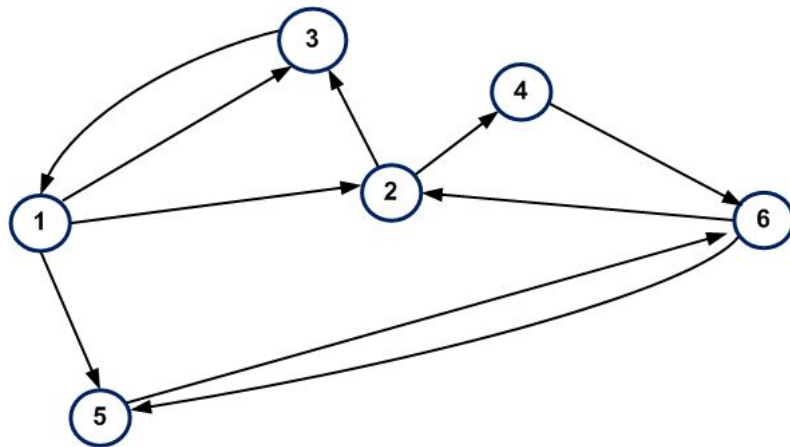
- ☐ $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
- ☐ $e_i = (v_i, v_{i+1})$
- ☐ $E(P) = \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$

Drumuri. Circuite

Pentru două vârfuri u și v , definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{daca } u = v \\ \infty, & \text{daca nu exista } u - v \text{ drum in } G \\ \min\{l(P) \mid P \text{ este } u - v \text{ drum in } G\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Reprezintă cea mai mică lungime a unui $u-v$ drum.



Drumuri. Circuite

Pentru două vârfuri u și v , definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{daca } u = v \\ \infty, & \text{daca nu exista } u - v \text{ drum in } G \\ \min\{l(P) \mid P \text{ este } u - v \text{ drum in } G\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Reprezintă cea mai mică lungime a unui u - v drum.

Un u - v drum de lungime $d_G(u, v)$ se numește **drum minim de la u la v** .

Vom nota și $d(u, v)$ dacă G se deduce din context.

Drumuri. Circuite

Un **circuit** este un drum simplu cu capetele identice.

$$C = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_1]$$

C este **circuit simplu** dacă drumul asociat este simplu.

C este **circuit elementar** dacă drumul asociat este elementar.

Notatii: $V(C)$, $E(C)$

Lanțuri. Cicluri



Lanțuri. Cicluri

Pentru G graf **neorientat**, noțiunile sunt similare.

Un **lanț** este o secvență P de vârfuri cu proprietatea că oricare două vârfuri consecutive sunt adiacente.

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

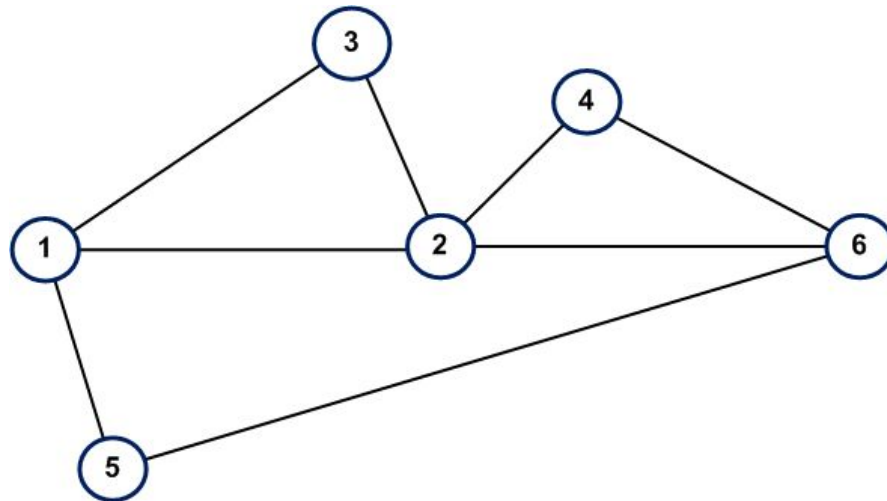
- ☐ lanț simplu, lanț elementar, lungimea unui lanț
- ☐ ciclu, ciclu elementar
- ☐ distanță, lanț minim

Lanțuri. Cicluri

Observație

În cazul unui graf simplu, putem descrie un lanț / ciclu doar ca o **succesiune de vârfuri** (fără a mai preciza și muchiile).

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$$

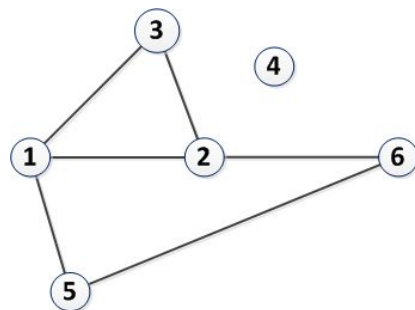
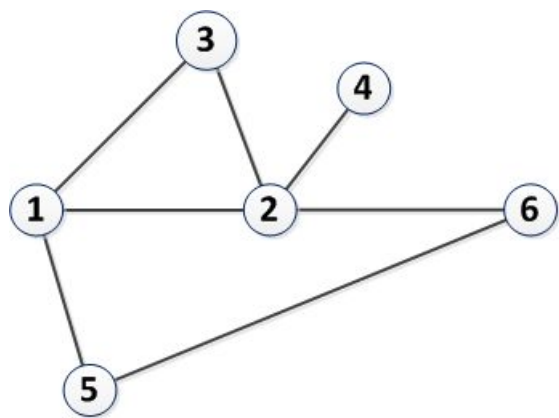


Graf parțial. Subgraf. Conexitate

Graf parțial. Subgraf

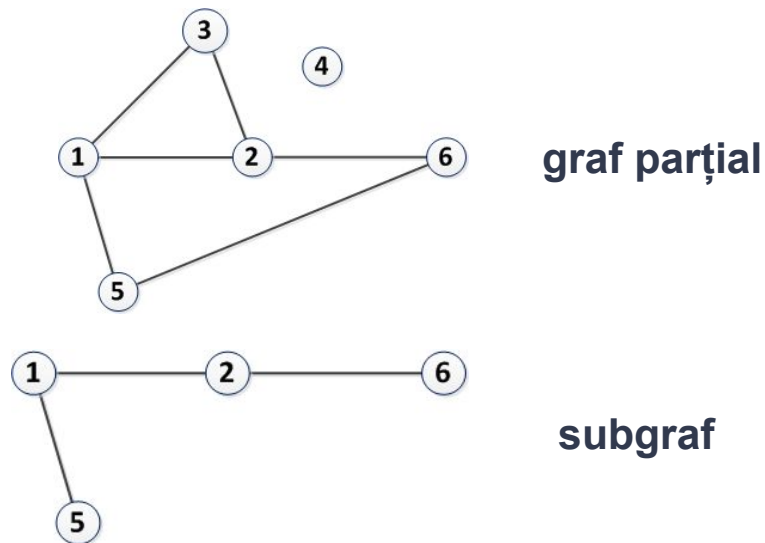
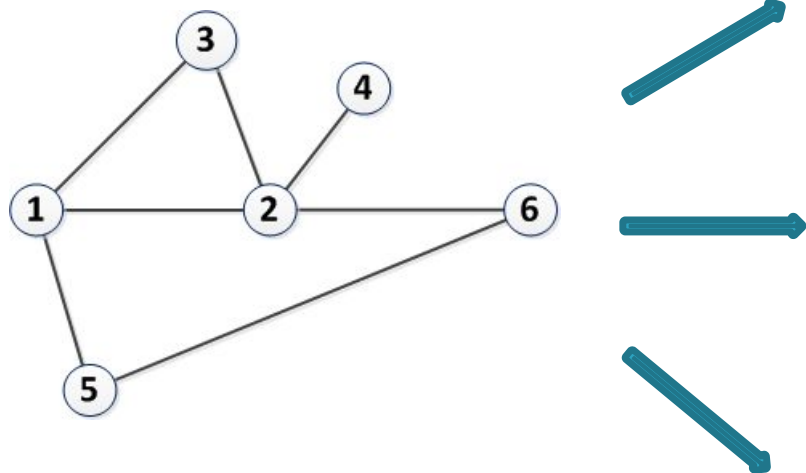
- ☐ graf parțial
- ☐ subgraf
- ☐ subgraf indus

Graf parțial. Subgraf

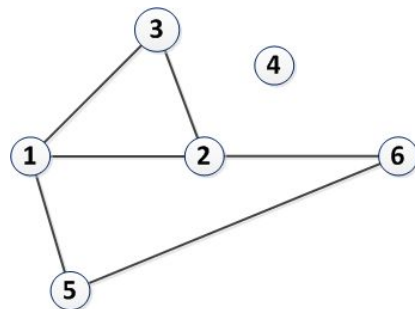
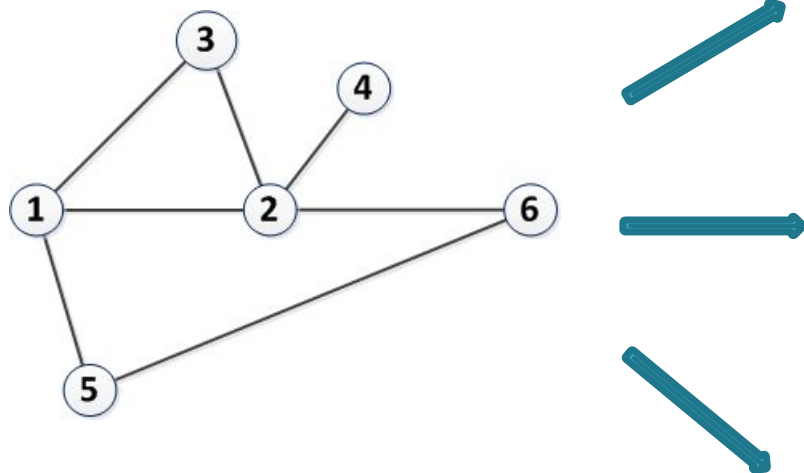


graf parțial

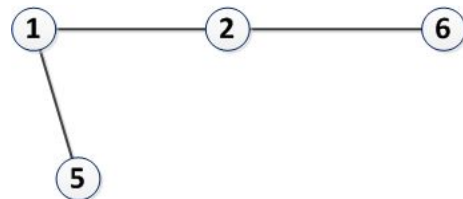
Graf parțial. Subgraf



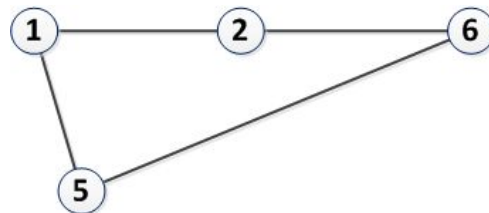
Graf parțial. Subgraf



graf parțial



subgraf



**subgraf
indus de
{1, 2, 5, 6}**

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri.

□ G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă

$$V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri.

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă

$$V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $G_1 < G$) dacă

$$V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri.

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă

$$V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $G_1 < G$) dacă

$$V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$$

- G_1 este **subgraf indus de V_1 în G** (vom nota $G_1 = G[V_1]$) dacă

$$V_1 \subseteq V,$$

$$E_1 = \{e \mid e \in E(G), e \text{ are ambele extremități în } V_1\}$$

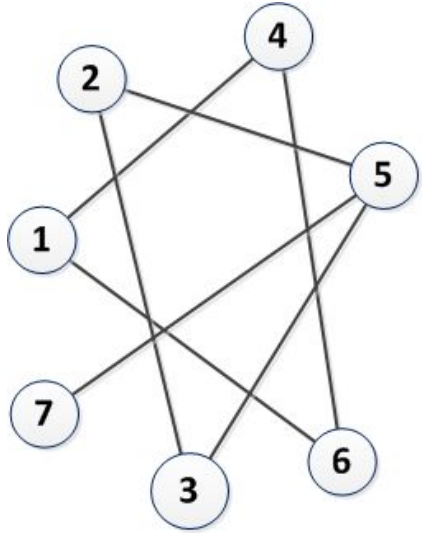
(toate arcele / muchiile cu extremități în V_1)

Conexitate

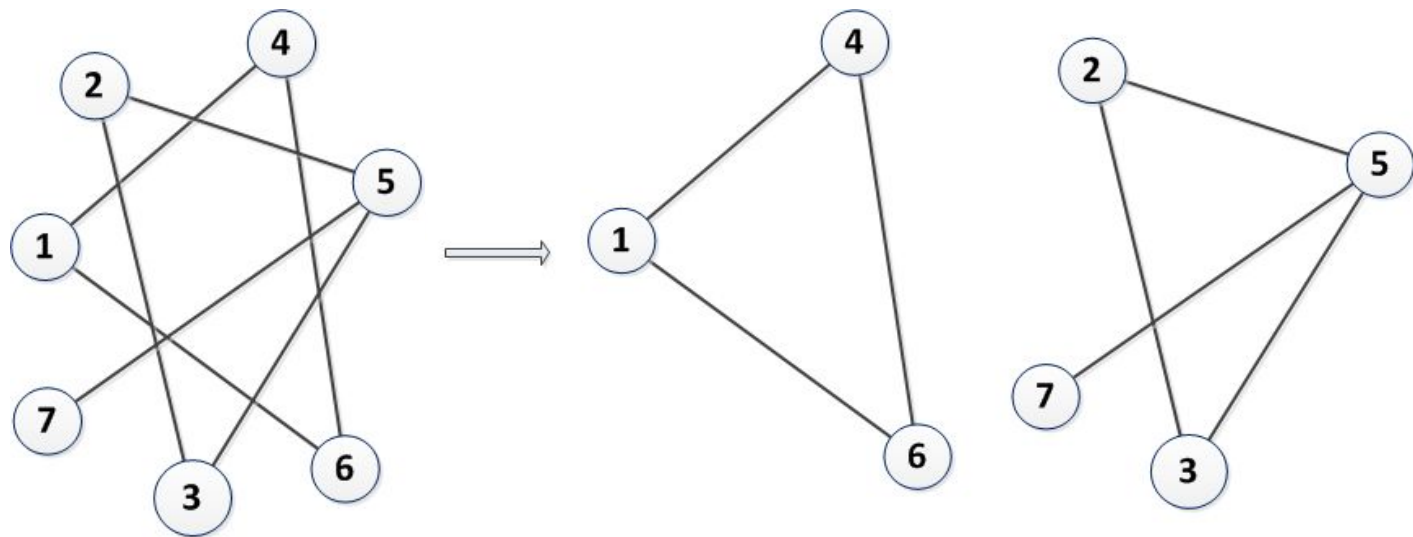
Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- ☐ **graf conex**
- ☐ **componentă conexă**

Conexitate



Conexitate



**două componente
conexe**

Conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- G este un **graf conex** dacă, între orice două vârfuri distincte, există un lanț

Conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- G este un **graf conex** dacă, între orice două vârfuri distincte, există un lanț
- O **componentă conexă** a lui G este un **subgraf indus conex maximal** (care nu este inclus în alt subgraf conex)

Conexitate

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- G este un **graf conex** dacă, între orice două vârfuri distincte, există un lanț
- O **componentă conexă** a lui G este un **subgraf indus conex maximal** (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- Pentru cazul orientat - **tare-conexitate**

Conexitate

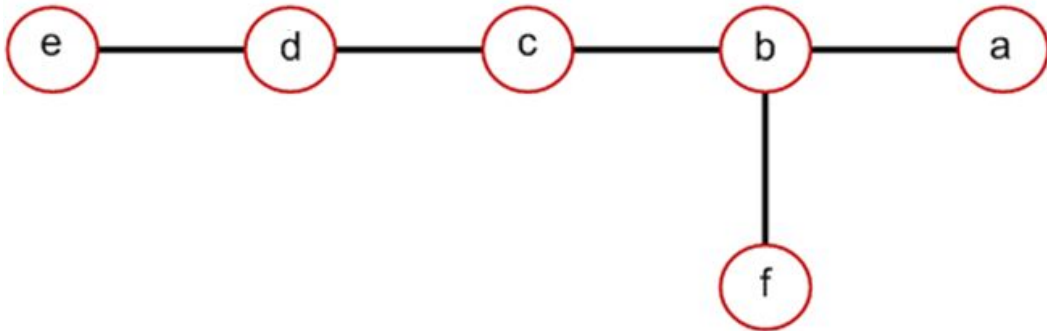
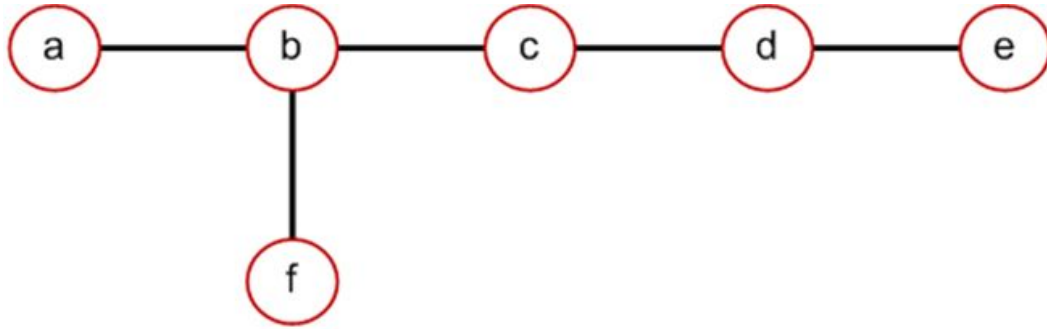
Notății

- **$G - v$** , $v \in V(G)$
- **$G - e$** , $e \in E(G)$
- **$G - V'$** , $V' \subseteq V(G)$
- **$G - E'$** , $E' \subseteq E(G)$
- **$G + e$**

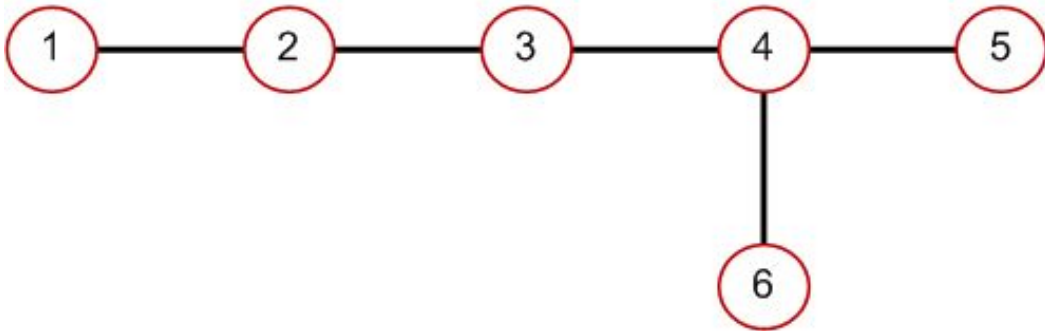
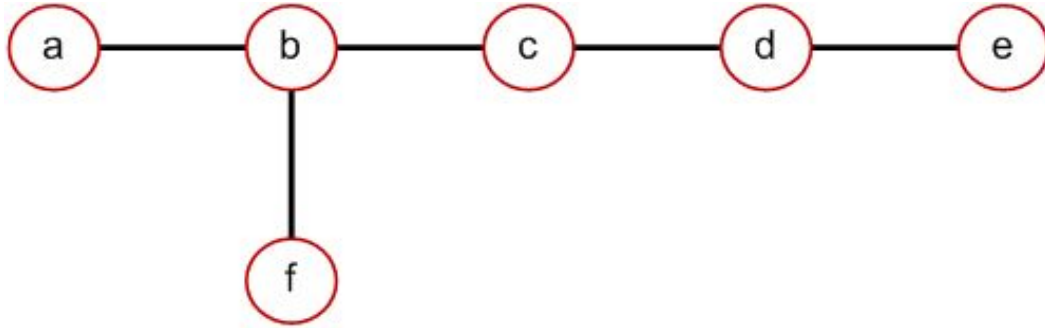
Egalitate. Izomorfism



Egalitate



Egalitate?



Izomorfism

Fie G_1, G_2 două grafuri

- $G_1 = (V_1, E_1)$
- $G_2 = (V_2, E_2)$

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** ($G_1 \sim G_2$) \Leftrightarrow

există $f : V_1 \rightarrow V_2$ bijectivă cu

$$uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2$$

pentru orice $u, v \in V_1$

(f conservă adiacența și neadiacența)

Izomorfism

Interpretare

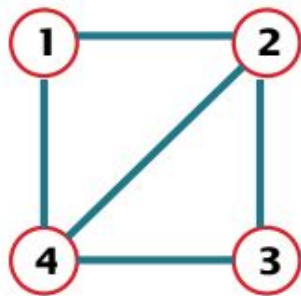
Se pot reprezenta în plan prin același desen



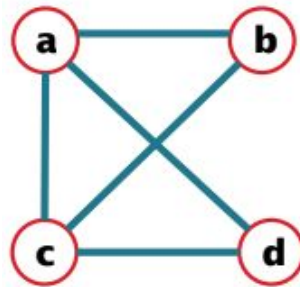
Izomorfism

Interpretare

Se pot reprezenta în plan prin același desen



\sim



f:

$2 \rightarrow a$

$4 \rightarrow c$

$1 \rightarrow b$

$3 \rightarrow d$

Izomorfism

- $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$
- $s(G_1) = s(G_2) \Rightarrow G_1 \sim G_2 ?$

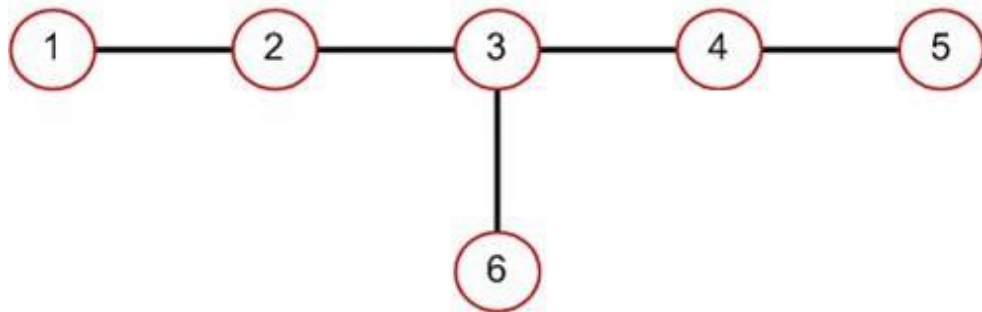
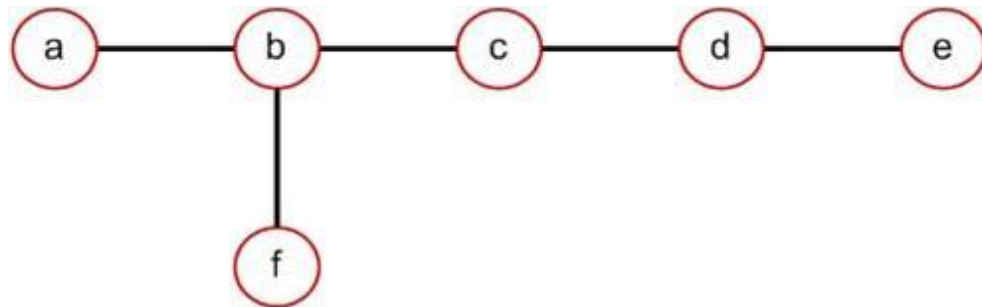
Izomorfism

□ $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$

□ $s(G_1) = s(G_2) \Rightarrow G_1 \sim G_2$ **NU**

Izomorfism

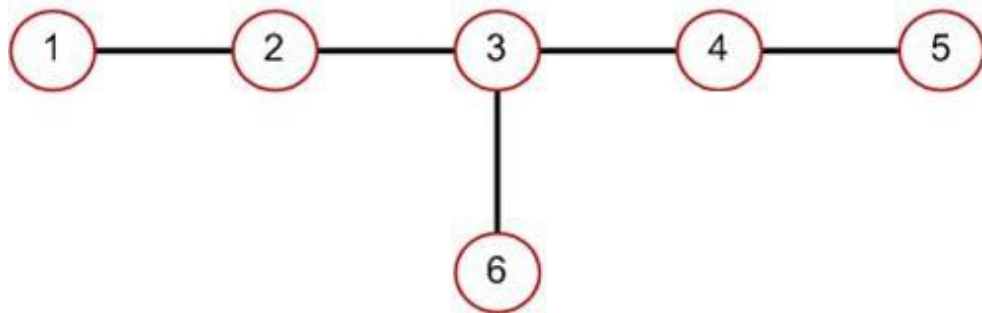
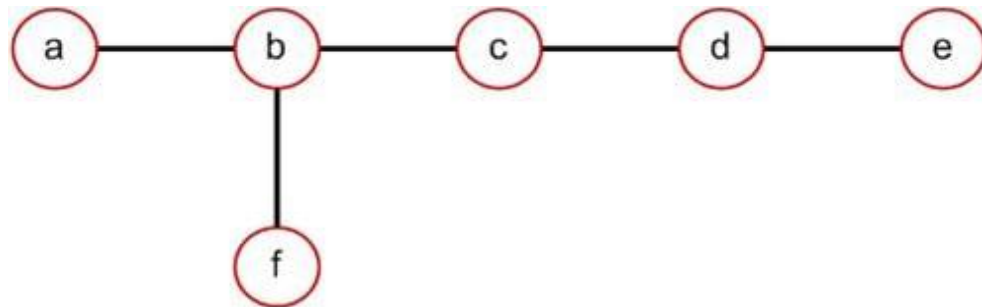
Izomorfe?



Izomorfism

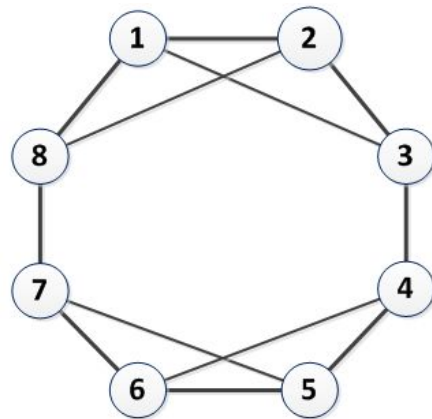
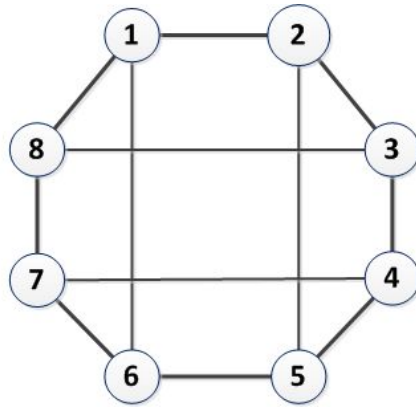
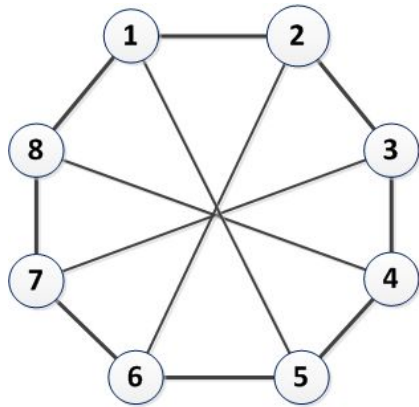
Izomorfe?

Nu, grafurile nu au aceeași structură.



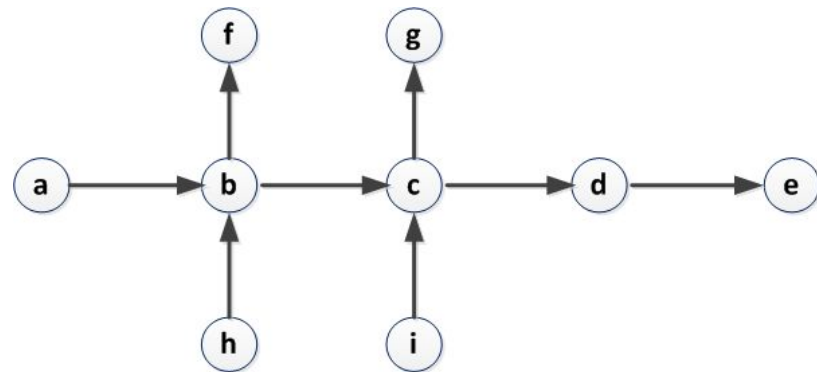
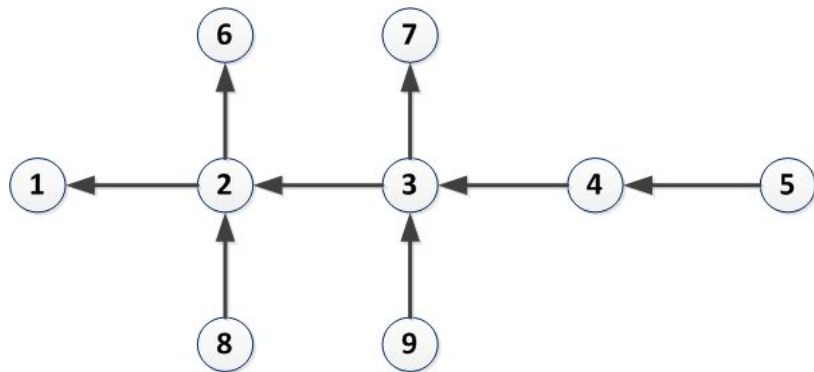
Izomorfism

Care dintre aceste grafuri sunt izomorfe?



Izomorfism

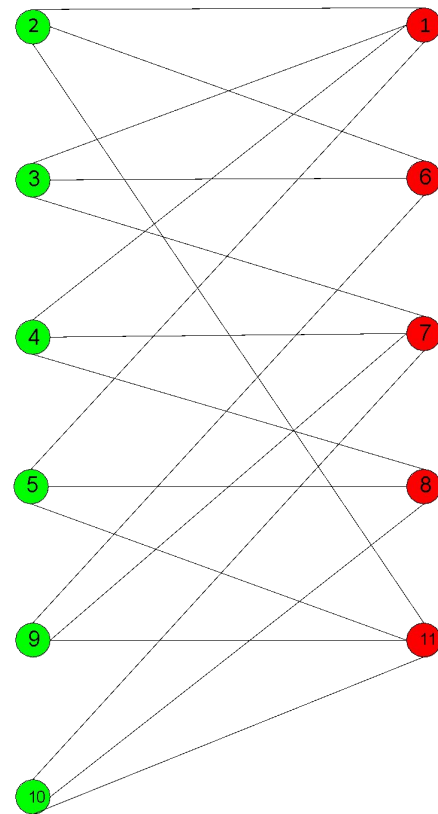
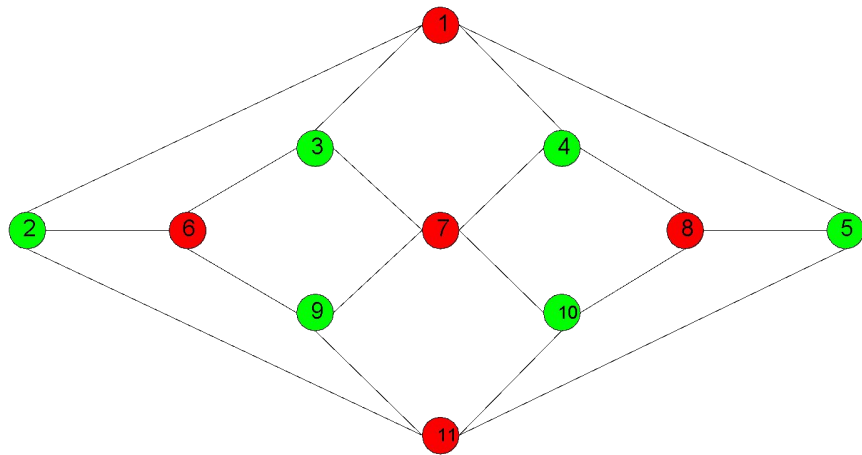
Sunt aceste grafuri izomorfe?



Grafuri standard



Graf bipartit



Graf bipartit

Un graf **neorientat** $G = (V, E)$ se numește **bipartit** \Leftrightarrow există o partiție a lui V în două submulțimi V_1, V_2 (bipartiție):

- $V = V_1 \cup V_2$
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2 :

$$|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$$

Graf bipartit

Observație

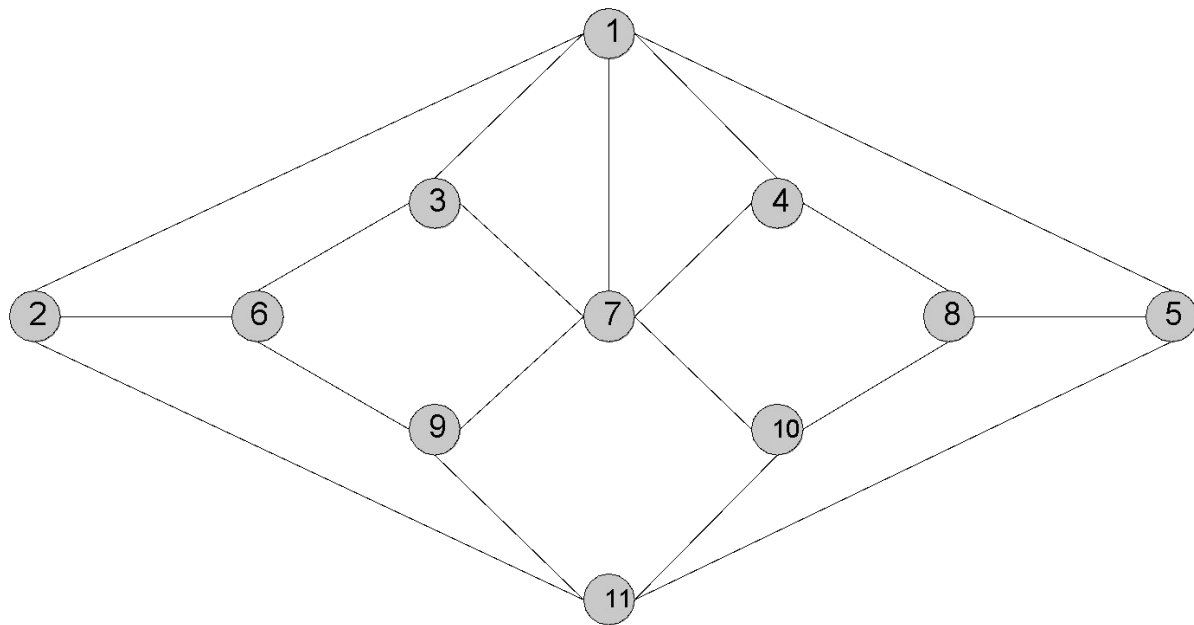
$G = (V, E)$ **bipartit** \Leftrightarrow există o colorare a vârfurilor cu două culori:

$$c : V \rightarrow \{1, 2\}$$

astfel încât, pentru orice muchie $e = xy \in E$, avem

$$c(x) \neq c(y) \quad \textbf{(bicolorare)}$$

Graf bipartit



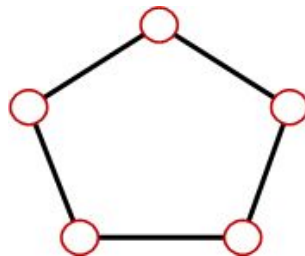
Nu este graf bipartit

Grafuri standard

□ P_n - lanț elementar

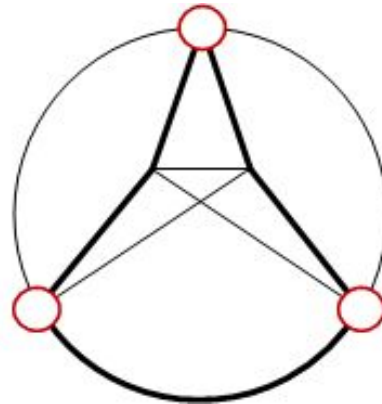
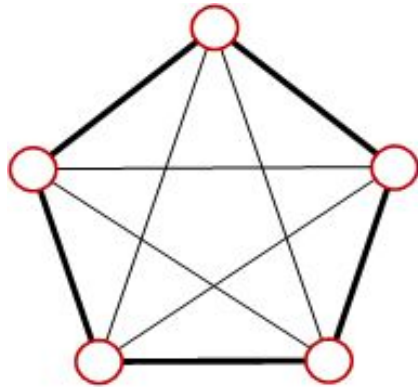


□ C_n - ciclu elementar



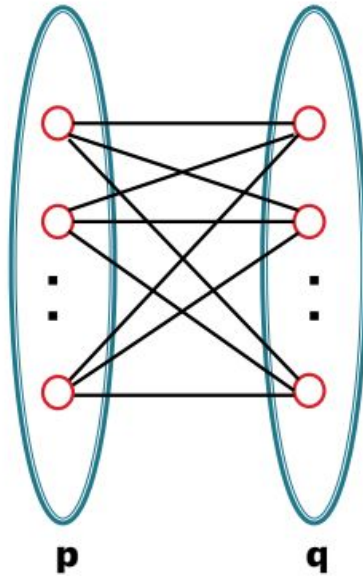
Grafuri standard

- K_n - graf complet de grad n



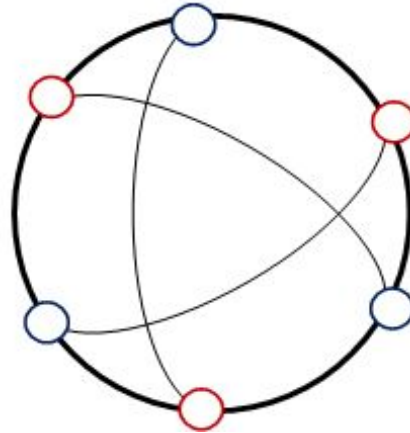
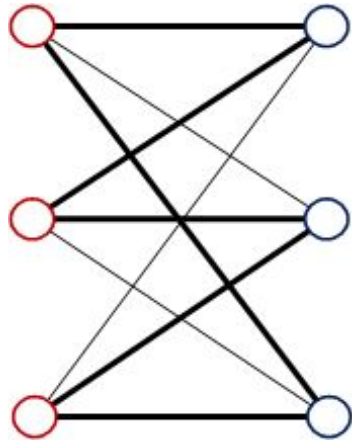
Grafuri standard

□ $K_{p,q}$ - graf bipartit complet



Grafuri standard

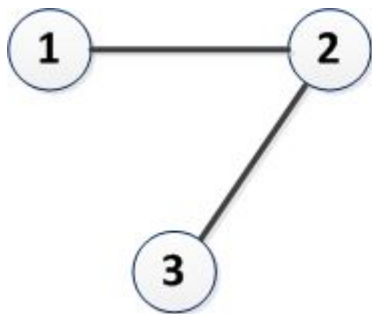
□ $K_{3,3}$



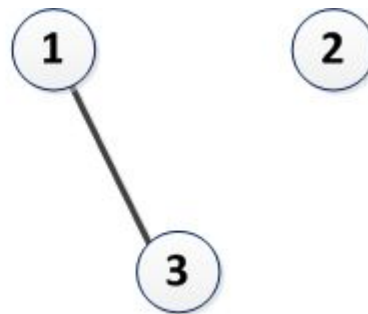
Graful complementar al unui graf neorientat

Fie graful $G = (V, E)$ un graf neorientat.

$\overline{G} = (V, \overline{E})$ **graful complementar al lui G**



G



\overline{G}

