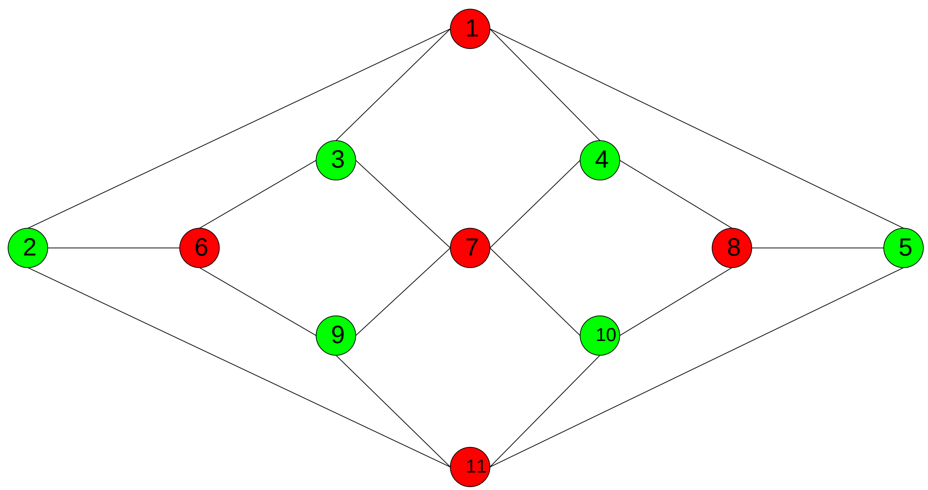
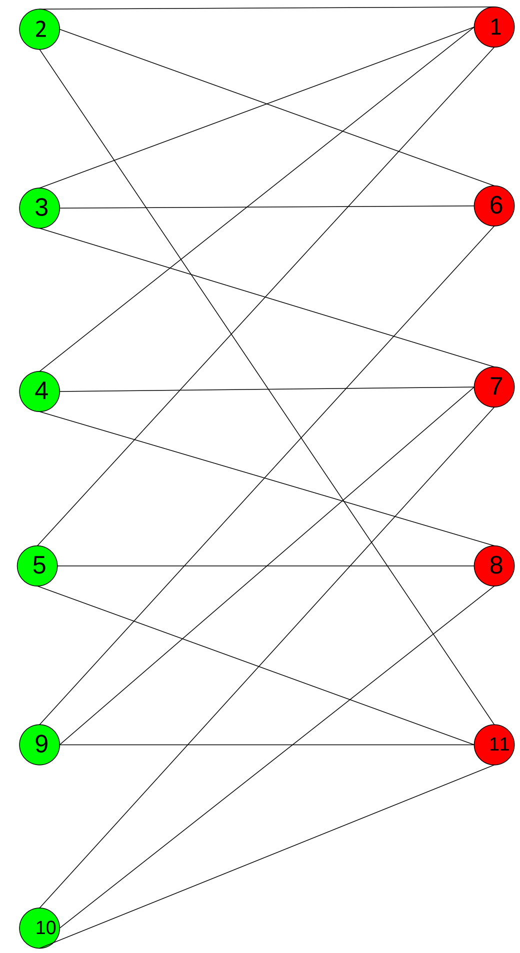
Grafuri bipartite

Graf bipartit





Graf bipartit

- Un graf neorientat $G = (V, E)$ se numește **bipartit** $\Leftrightarrow$

existá o partiție a lui V în două submulțimi V_1, V_2 (**bipartiție**):

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2:

$$|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$$

Graf bipartit

Observații

- $G = (V, E)$ **bipartit** $\Leftrightarrow$

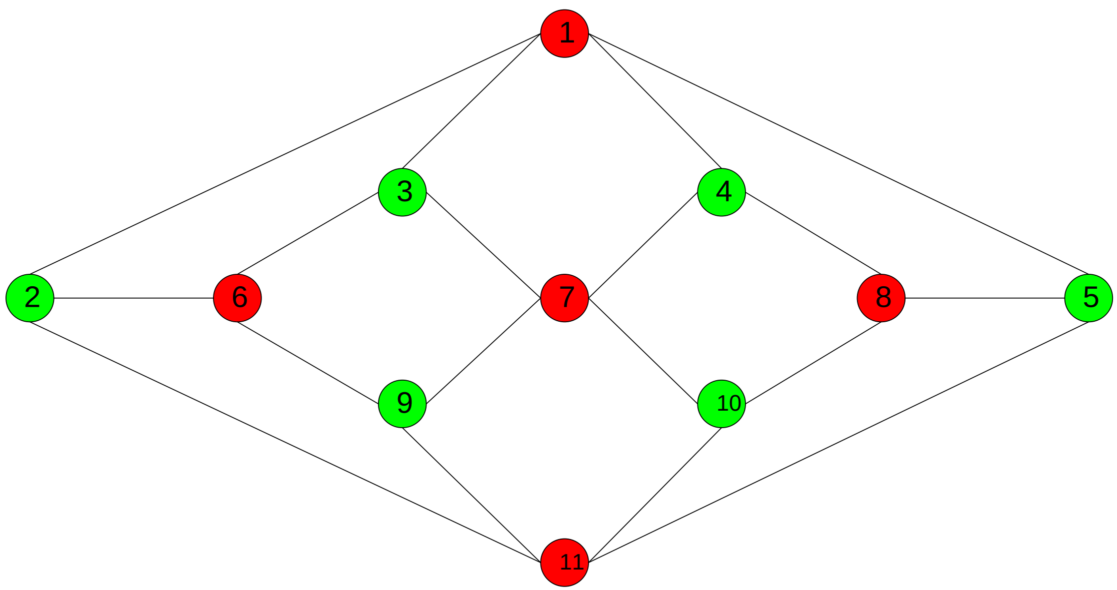
  există o 2-colorare proprie a vârfurilor (**bicolorare**):

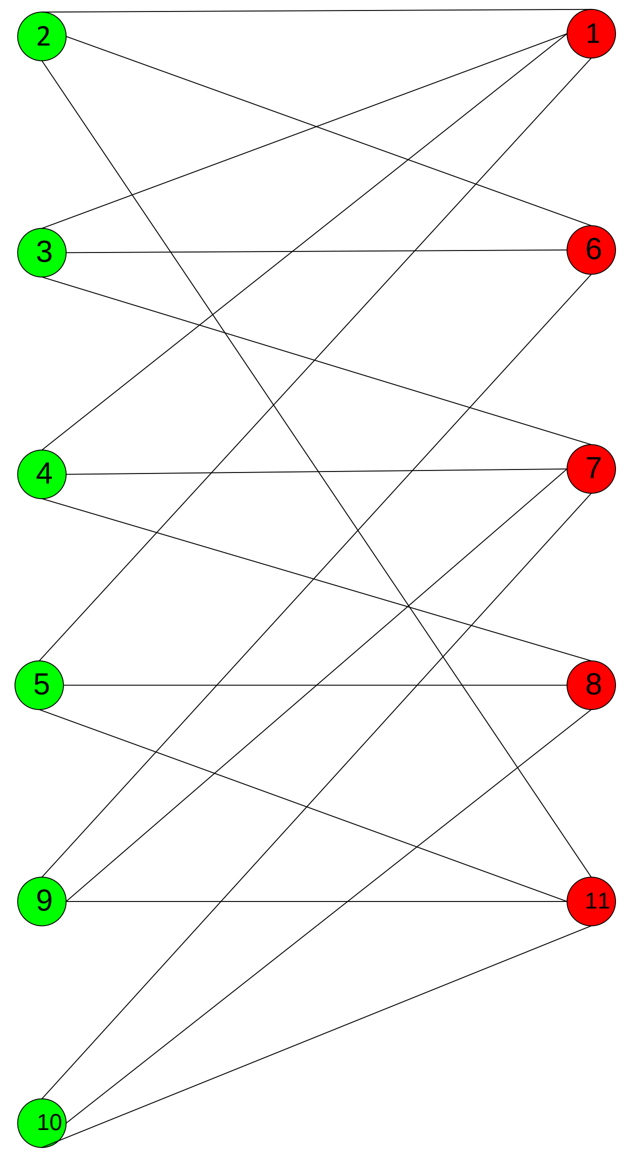
  $$c : V \rightarrow \{1, 2\}$$

  (i.e. astfel încât pentru orice muchie $e=xy\in E$ avem $c(x) \neq c(y)$)

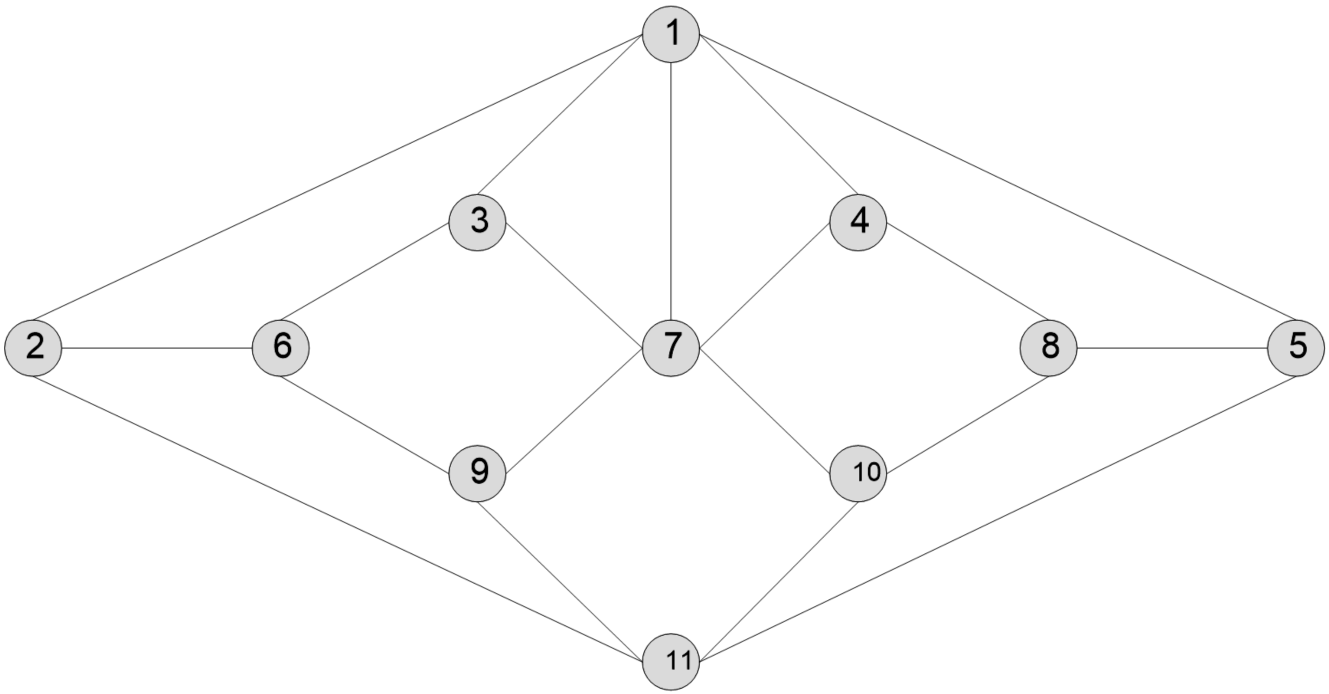
- $G = (V, E)$ bipartit $\Rightarrow \chi(G) \leq 2$

Graf bipartit





Graf bipartit



nu este bipartit

Graf bipartit

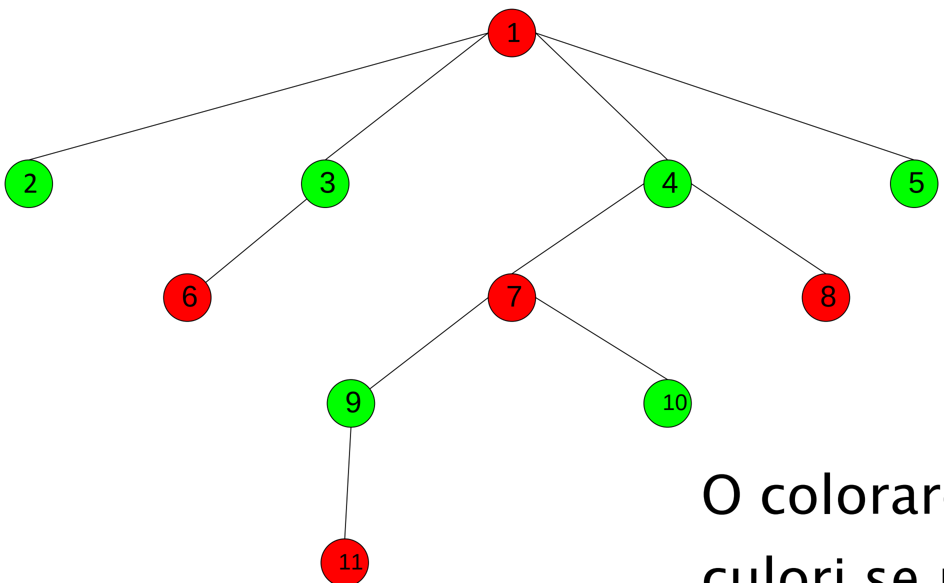
- **Propoziție**

  Un arbore este graf bipartit

Graf bipartit

- **Propoziție**

Un arbore este graf bipartit



O colorare proprie a lui T cu cel mult 2 culori se poate obține astfel:

- fixăm o rădacină
- colorăm vârfurile de pe niveluri pare cu 1 și pe cele de pe niveluri impare cu 2.

Graf bipartit

- **Teorema König – Caracterizarea grafurilor bipartite**

Fie $G = (V, E)$ un graf cu $n \geq 2$ vârfuri.

Avem

G este bipartit $\Leftrightarrow$ toate ciclurile elementare din G sunt pare

Graf bipartit

- **Teorema König – Caracterizarea grafurilor bipartite**

Demonstrație $\Rightarrow$ Evident, deoarece un ciclu impar nu poate fi colorat propriu cu două culori.

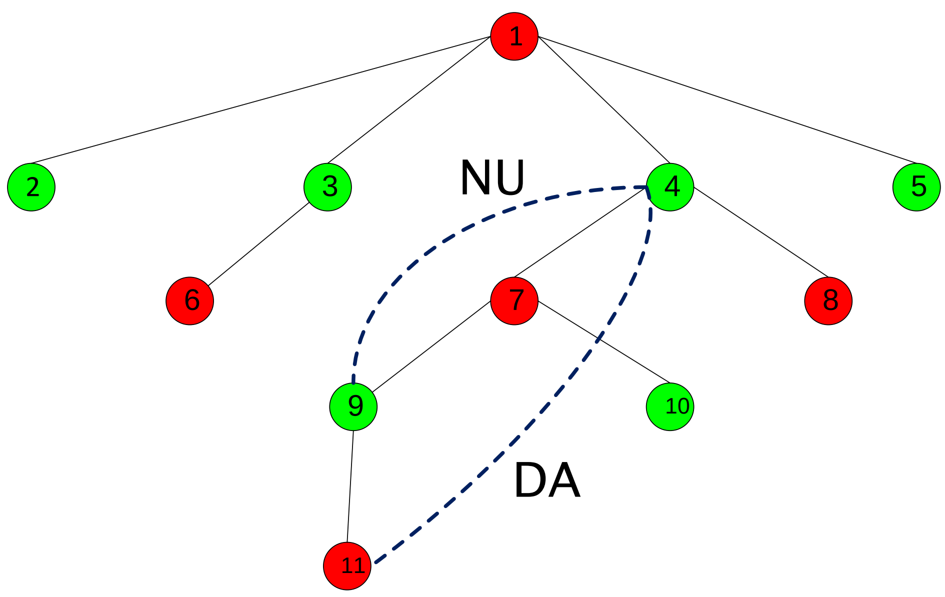
Graf bipartit

- **Teorema König – Caracterizarea grafurilor bipartite**

Demonstrație – ⇐ Presupunem G conex.

Colorăm un arbore parțial T al său (de exp arborele DFS de rădăcină 1) ca în propoziția precedentă (alternativ pe niveluri).

Orice altă muchie uv din graf are extremitățile colorate diferit deoarece



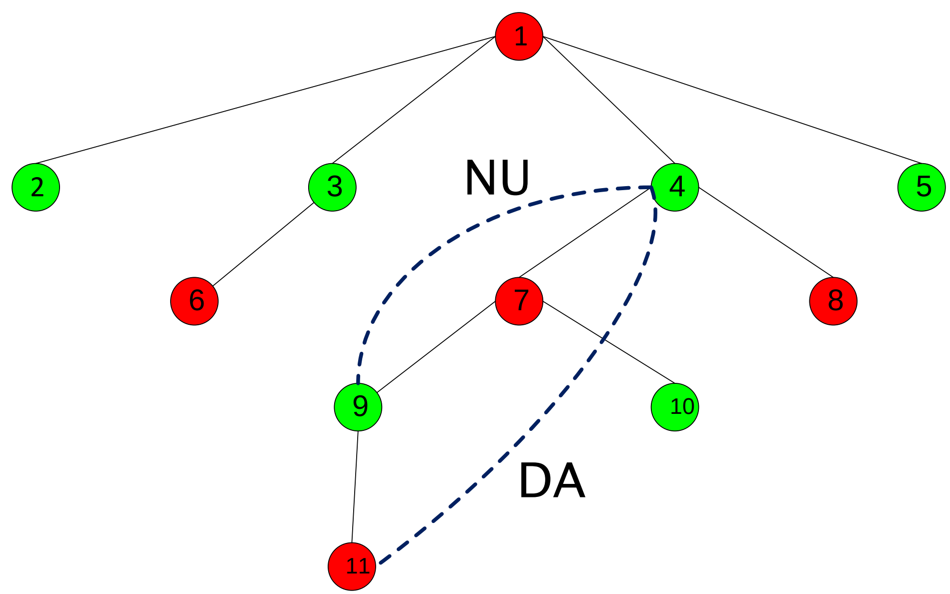
DR Popescu – Combinatorică și Teoria grafurilor (Teorema 4.18)

Graf bipartit

- **Teorema König – Caracterizarea grafurilor bipartite**

Demonstrație – $\Leftarrow$ Presupunem G conex.

Colorăm un arbore parțial T al său (de exp arborele DFS de rădăcină 1) ca în propoziția precedentă (alternativ pe niveluri). Orice altă muchie uv din graf are extremitățile colorate diferit deoarece formează un ciclu elementar cu lanțul de la u la v din arbore și acest ciclul are lungime pară, deci u și v se află pe niveluri de paritate diferită în T



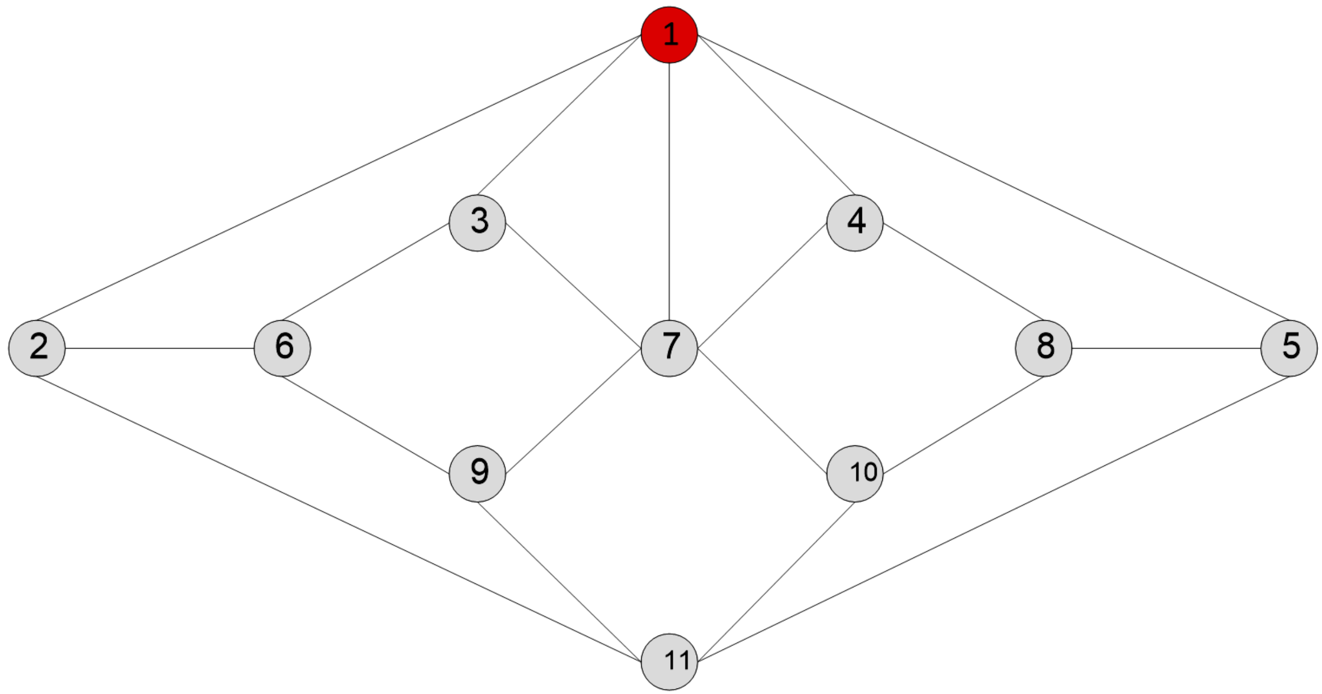
DR Popescu – Combinatorică și Teoria grafurilor (Teorema 4.18)

Graf bipartit

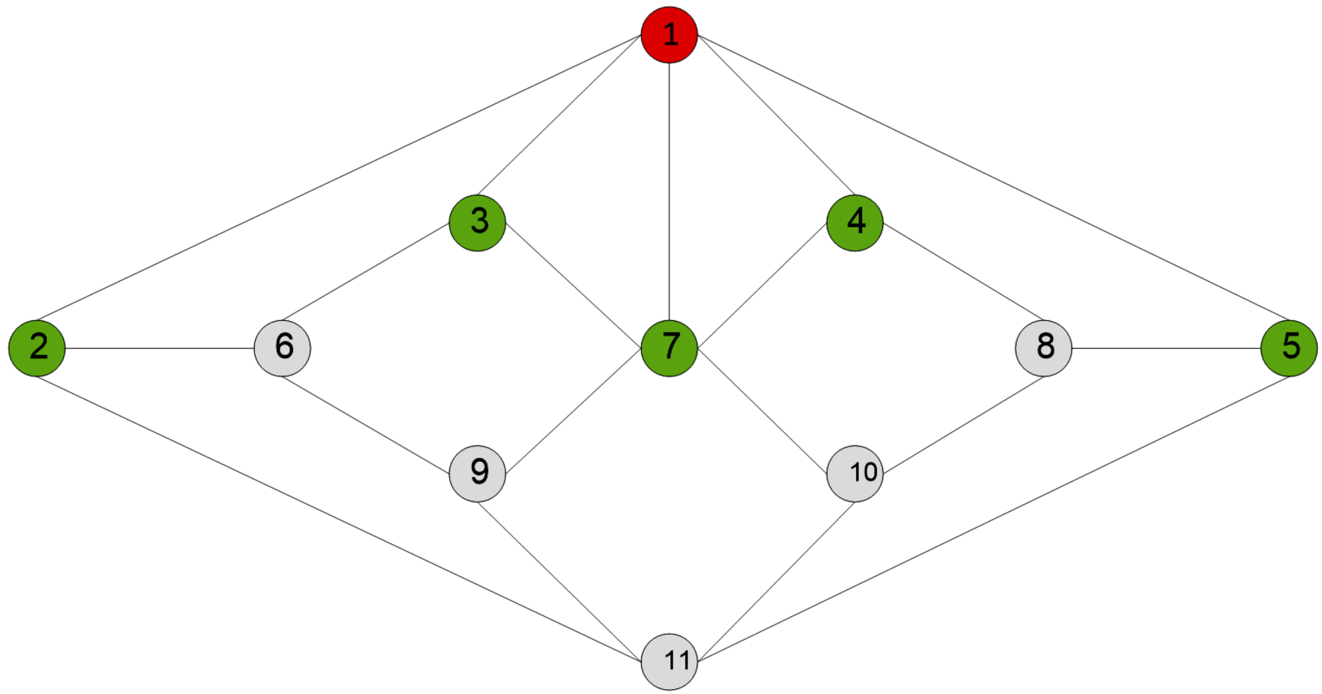
- **Teorema König ⇒ Agoritm pentru a testa dacă un graf conex este bipartit**
  - Colorăm cu (cel mult) 2 culori un arbore parțial al său printr-o **parcurgere** (**colorăm orice vecin j nevizitat al vârfului curent i cu culoarea diferită de cea a lui i**)
  - Testăm dacă celelalte muchii - de la i la **vecini j deja vizitați** (colorați) au extremitățile i și j colorate diferit

Dacă graful nu este conex, testăm fiecare componentă conexă

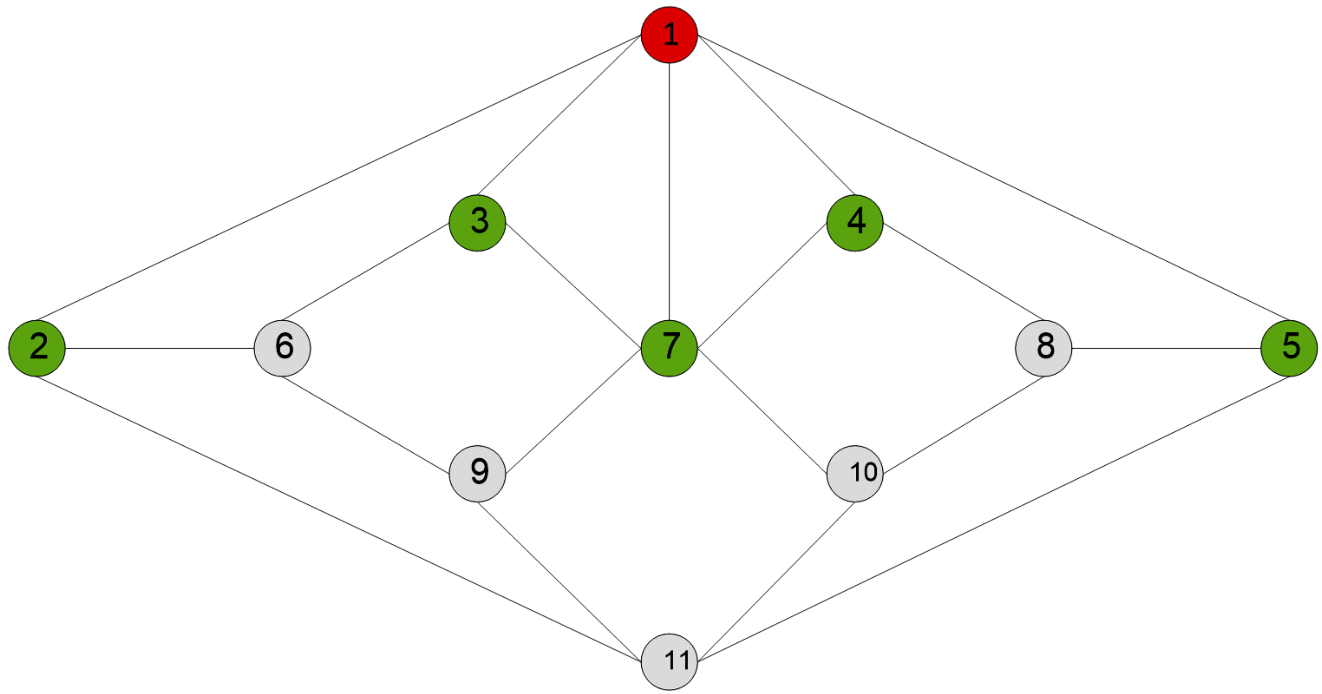
Exemplu test bipartit BF



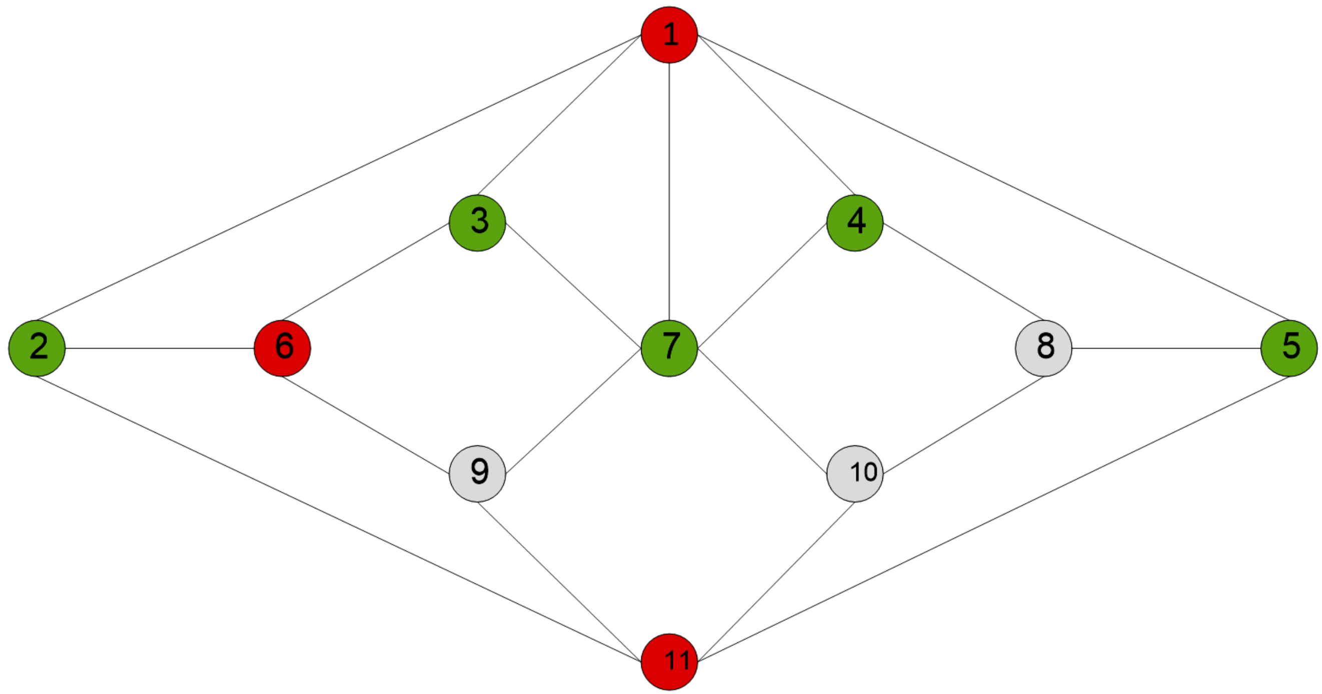
Exemplu test bipartit BF



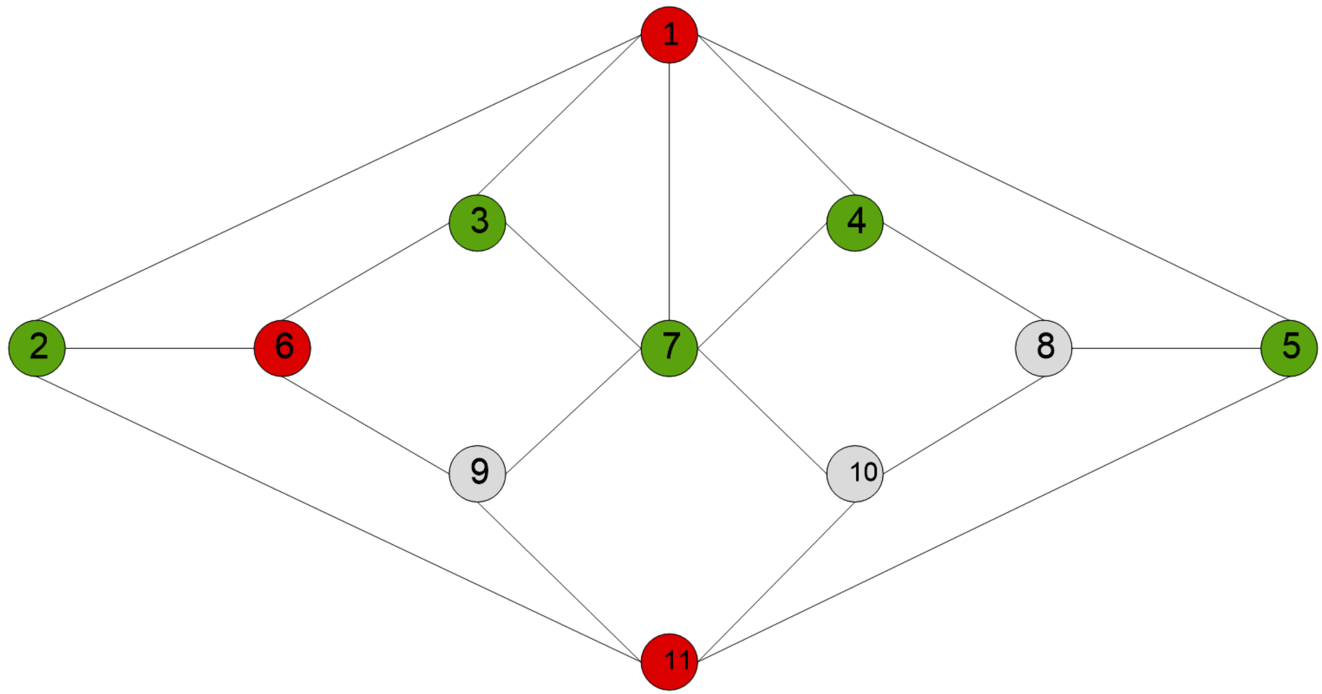
Exemplu test bipartit BF



Exemplu test bipartit BF



Exemplu test bipartit BF



Exemplu test bipartit BF