Arbori parțiali de cost minim

Algoritmul lui Prim

Algoritmul lui Prim

- Se porneşte de la un vârf (care formează arborele iniţial)
- La un pas este selectată o muchie de cost minim de la un vârf deja adăugat la arbore la unul neadăugat

O primă formă a algoritmului

Kruskal

- Inițial T= (V; ∅)
- pentru i = 1, n-1
  - alege o muchie uv cu **cost minim** a.î. u,v sunt în **componente conexe diferite (T+uv aciclic)**
  - E(T) = E(T) ∪ uv

Prim

- s- vârful de start
- Inițial T= ({s}; ∅)

O primă formă a algoritmului

Kruskal

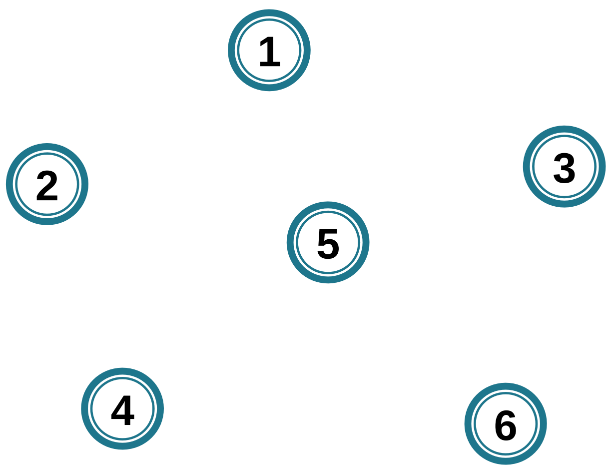
- **Inițial T= (V; ∅)**
- **pentru i = 1, n-1**
  - alege o muchie uv cu **cost minim** a.î. u,v sunt în **componente conexe diferite (T+uv aciclic)**
  - $E(T) = E(T) \cup uv$

Prim

- **s- vârful de start**
- **Inițial T= ({s}; ∅)**
- **pentru i = 1, n-1**
  - alege o muchie uv cu **cost minim** a.î. $u \in V(T)$ și $v \notin V(T)$
  - $V(T) = V(T) \cup \{v\}$
  - $E(T) = E(T) \cup uv$

Kruskal

- **Inițial**: cele n vârfuri sunt izolate, fiecare formând o componentă conexă



- **Se încearcă unirea acestor componente prin muchii de cost minim**

Prim

- **Inițial**: se pornește de la un vârf de start

- **Se adăugă pe rând câte un vârf la arborele deja construit, folosind muchii de cost minim**

Kruskal

- <u>**La un pas**</u>:

Muchiile selectate formează o **pădure**

Prim

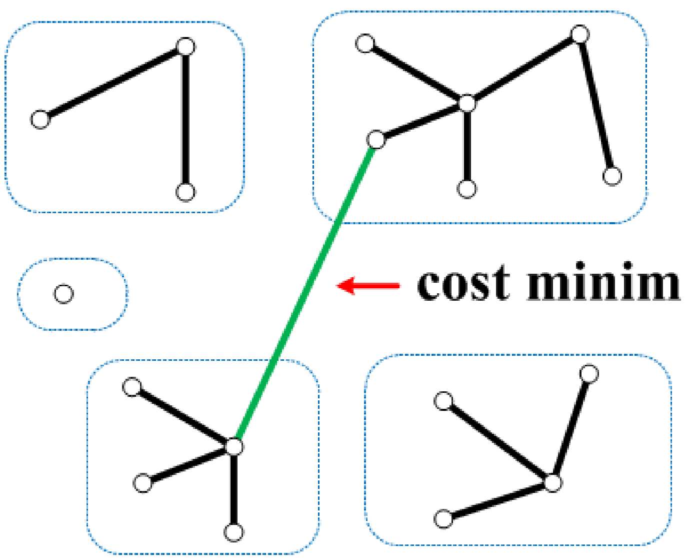
- <u>**La un pas**</u>:

Muchiile selectate formează un **arbore**

Kruskal

- <u>La un pas</u>:

Muchiile selectate formează o **pădure**

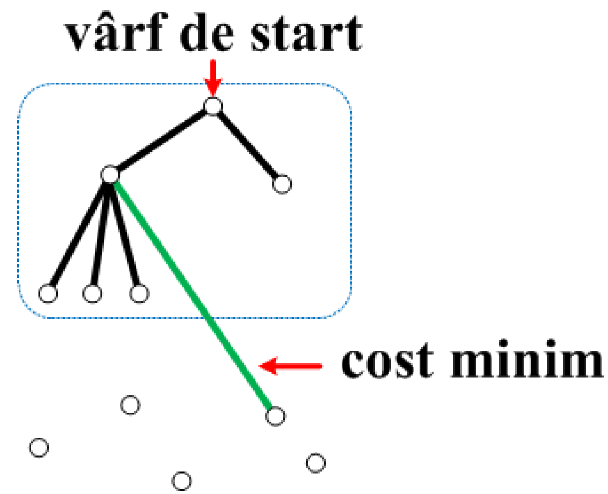


Este selectată o muchie de cost minim care unește doi arbori din pădurea curentă (două componente conexe)

Prim

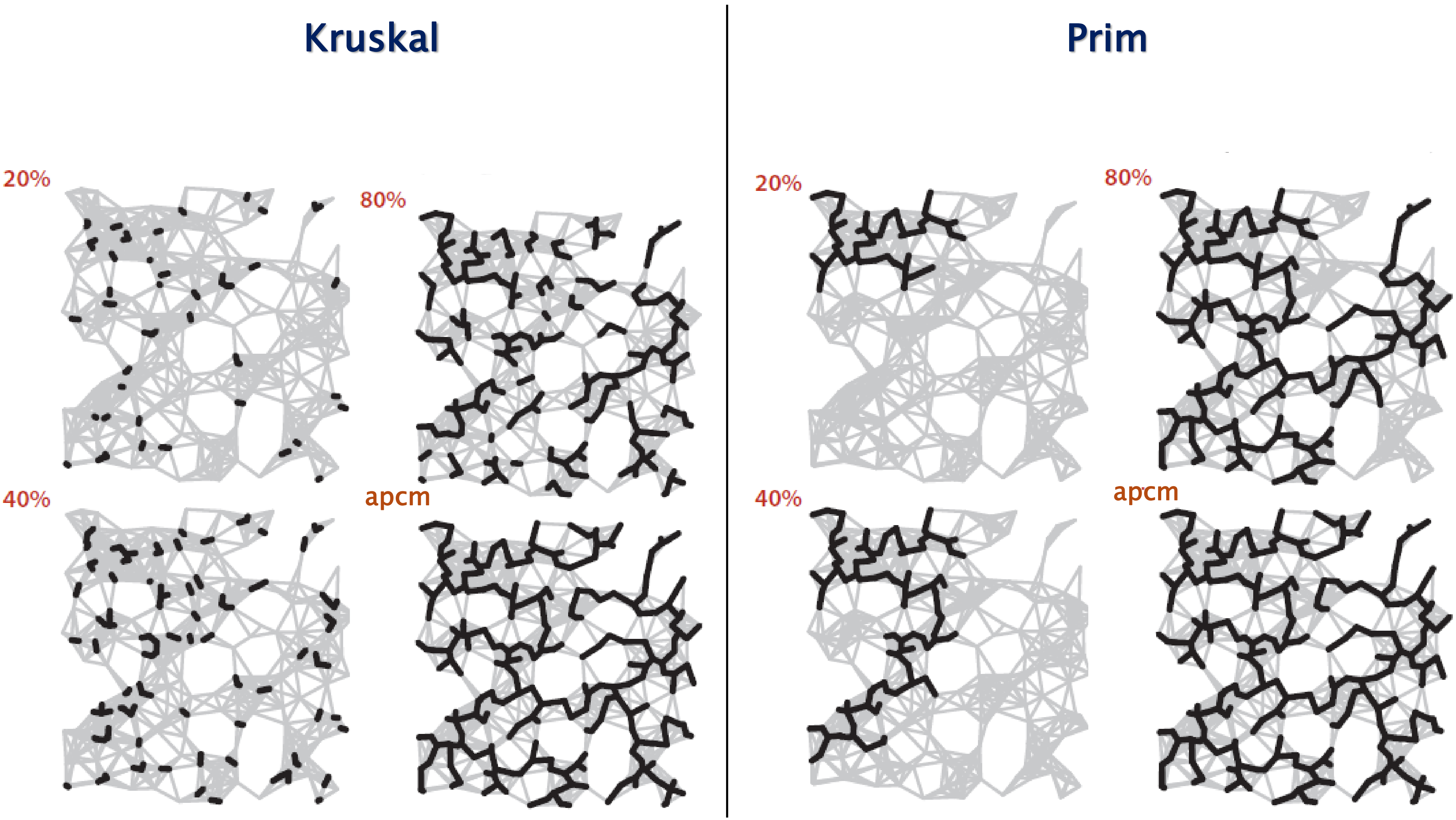
- <u>La un pas</u>:

Muchiile selectate formează un **arbore**



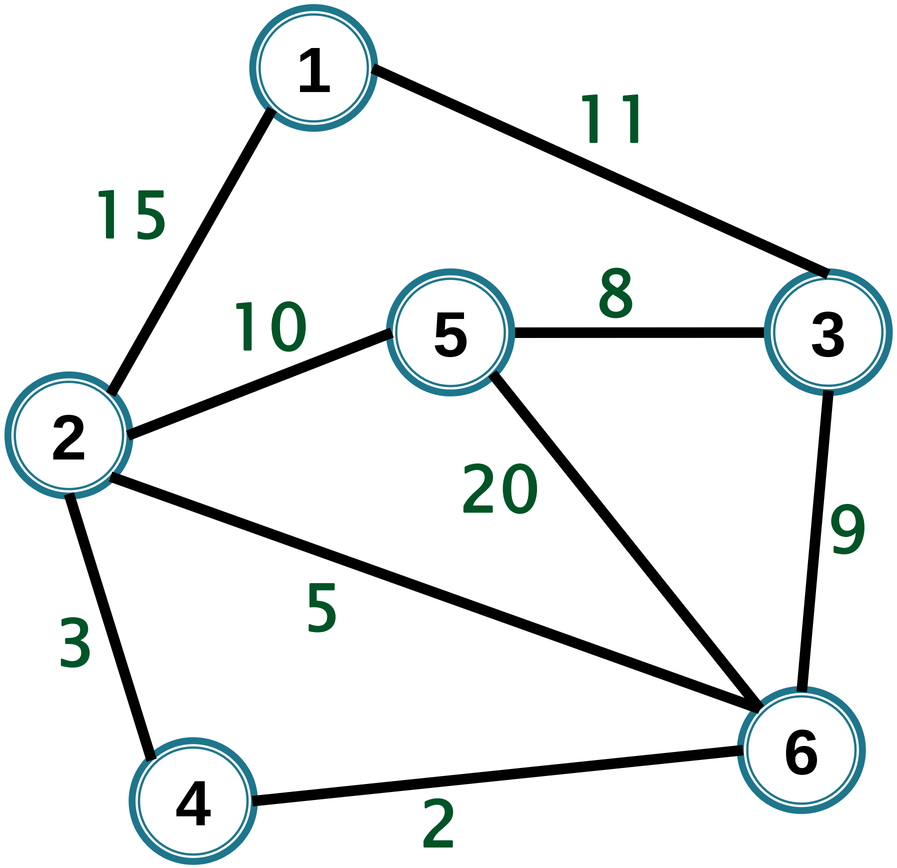
Este selectată o muchie de cost minim care unește un vârf din arbore cu unul care nu este în arbore(neselectat)

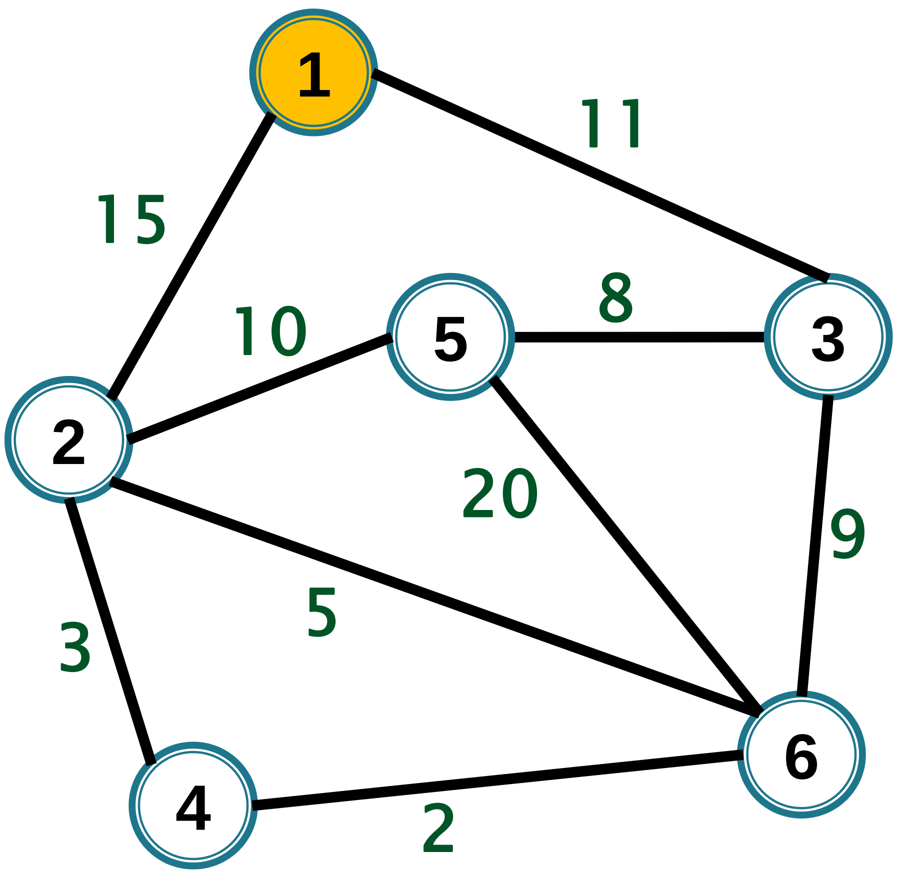
Arbori parțiali de cost minim



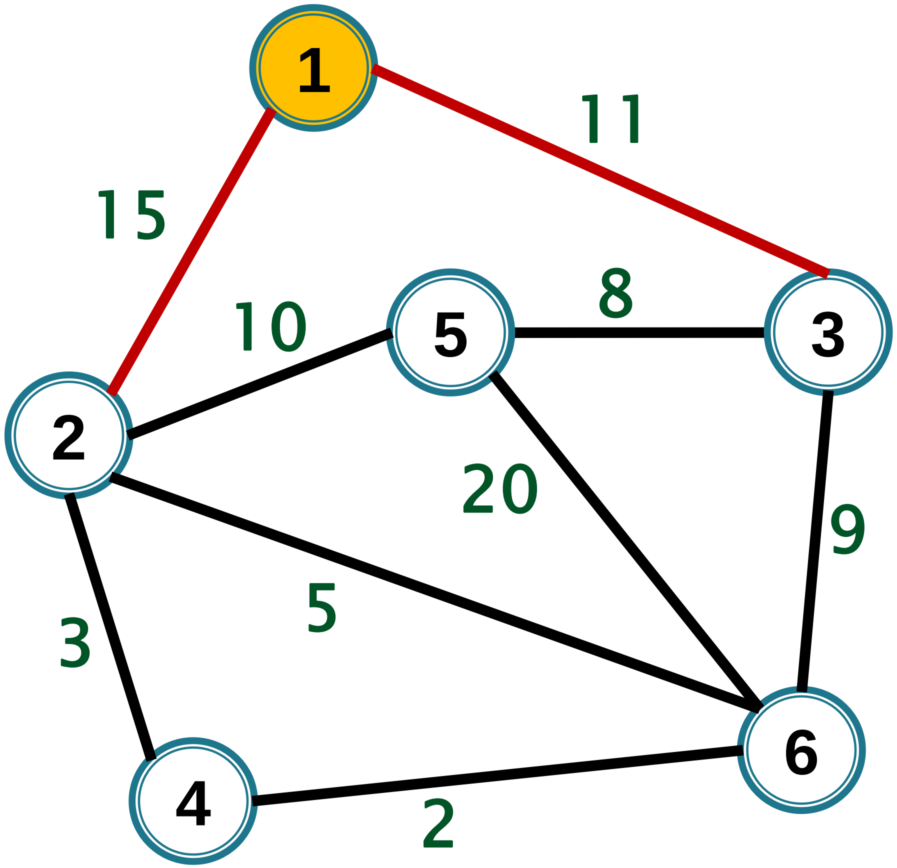
Imagine din

R. Sedgewick, K. Wayne – **Algorithms, 4th edition, Pearson** Education, 2011


1
2
3
4
5
6
11
15
10
8
20
9
5
3
2

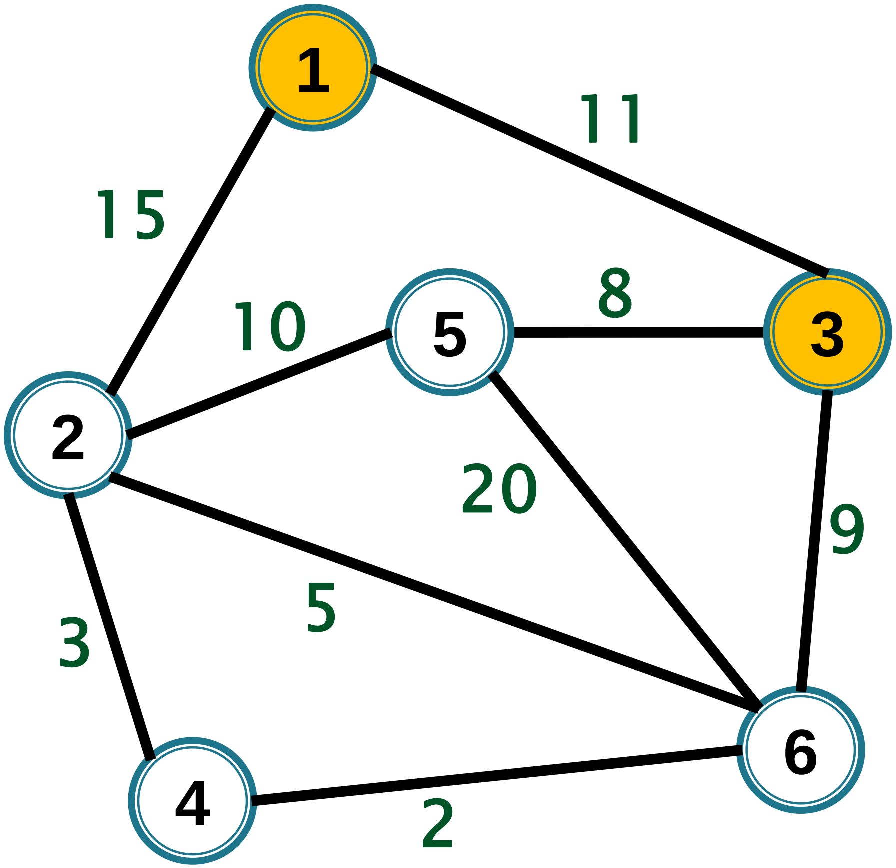


s = 1

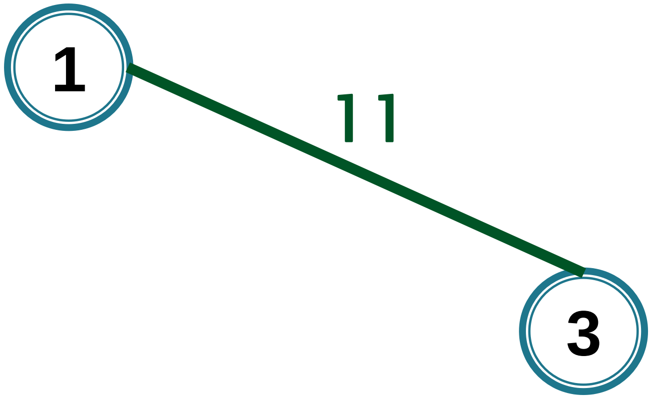


1
11
15
10
8
5
3
2
20
9
5
3
6
4
2

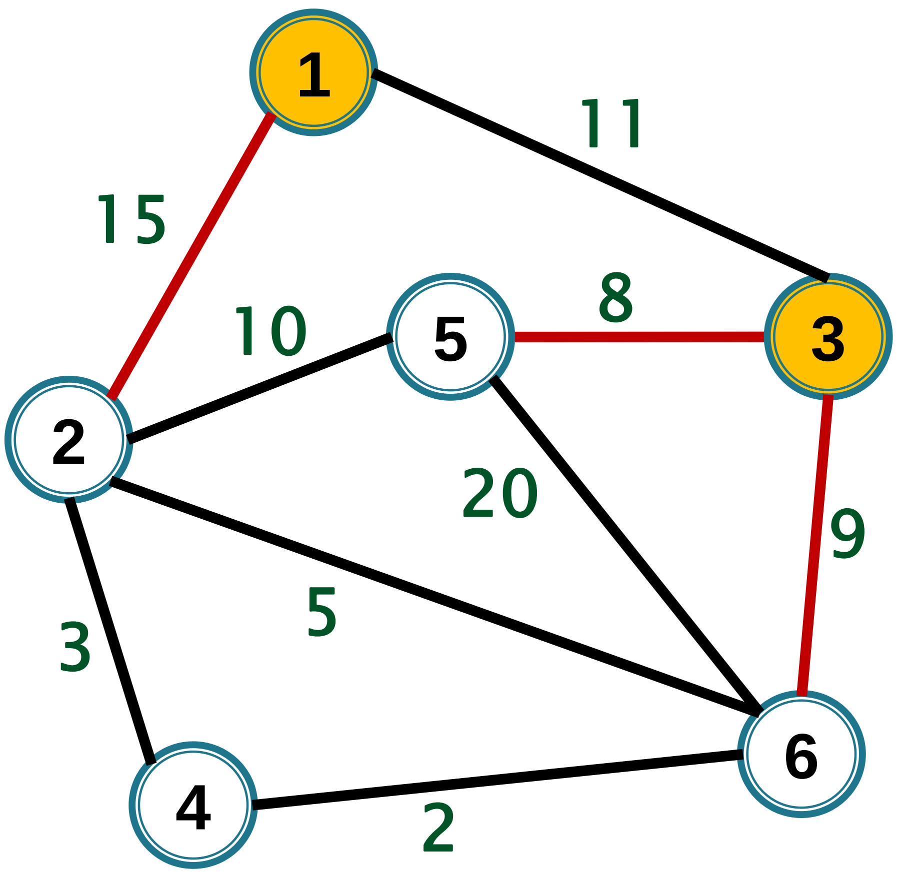
1

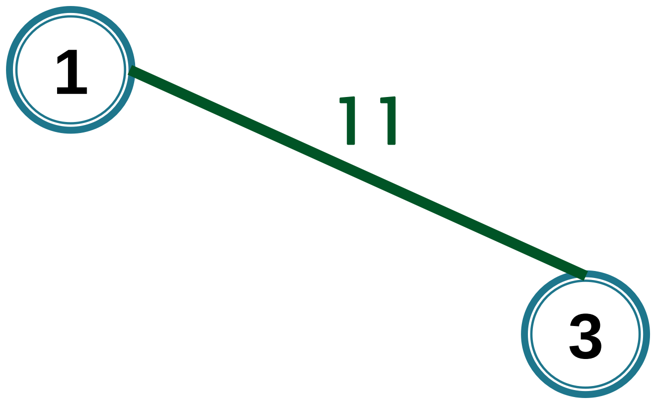


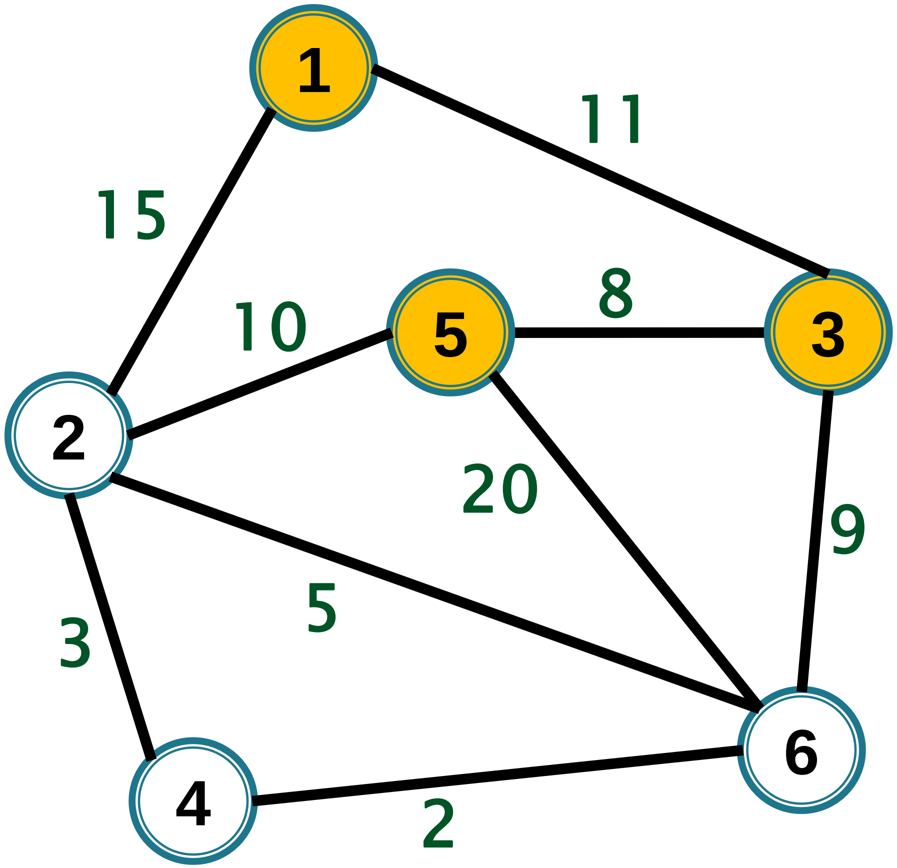
1
2
3
4
5
6
11
15
10
8
20
9
5
3
2

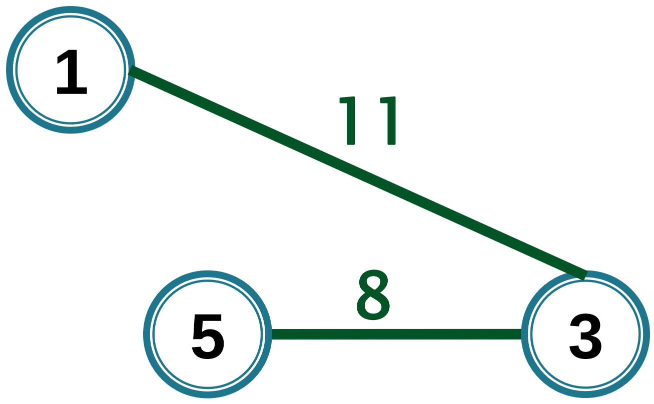


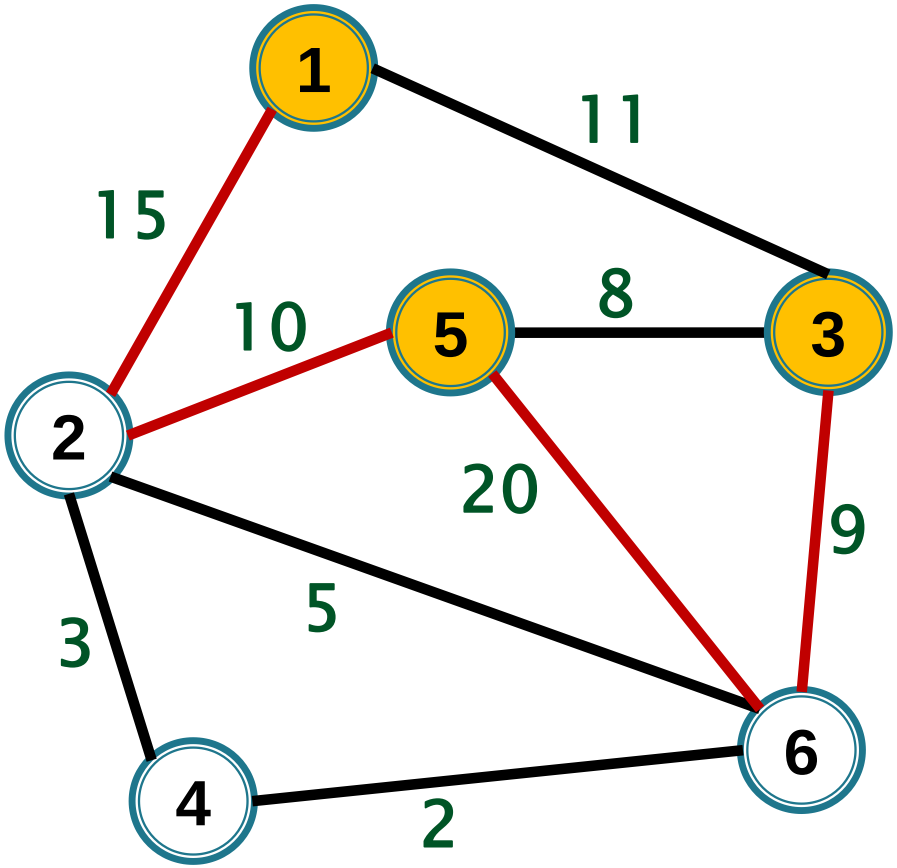
1
3
11


1
2
3
4
5
6
11
15
10
8
20
9
5
3
2

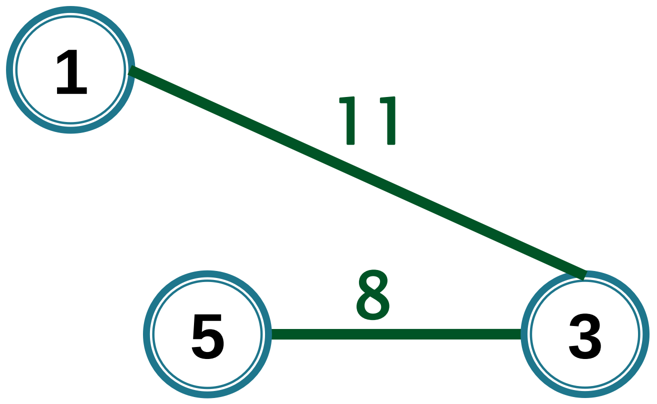

1
3
11


1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2

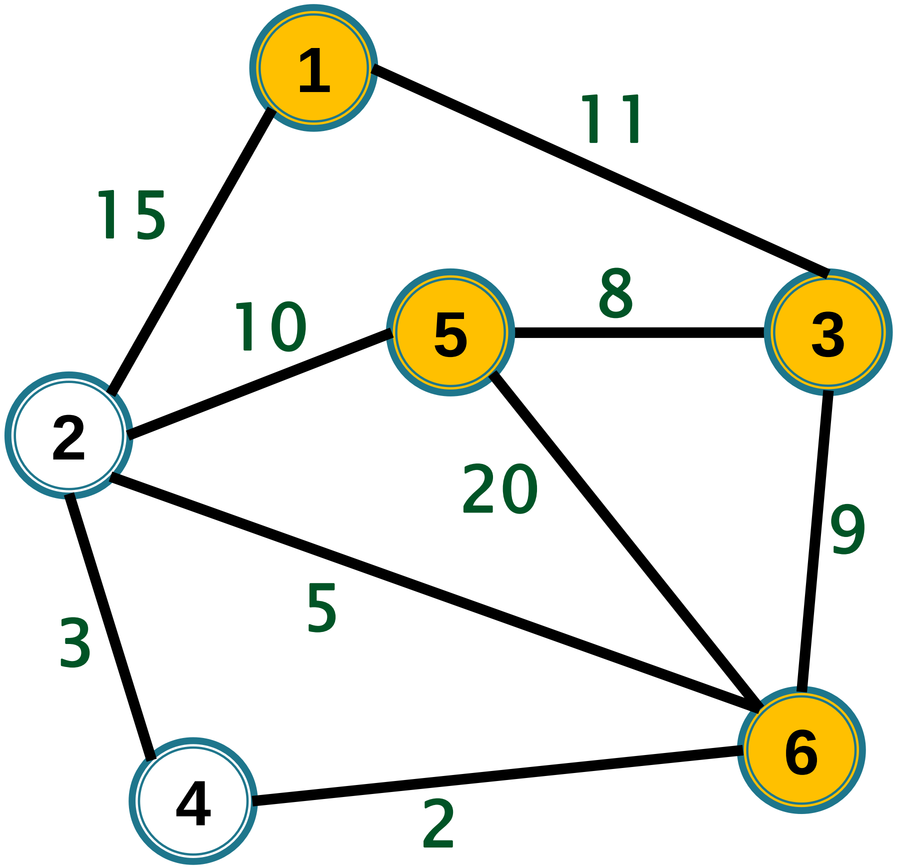

1
5
3
11
8

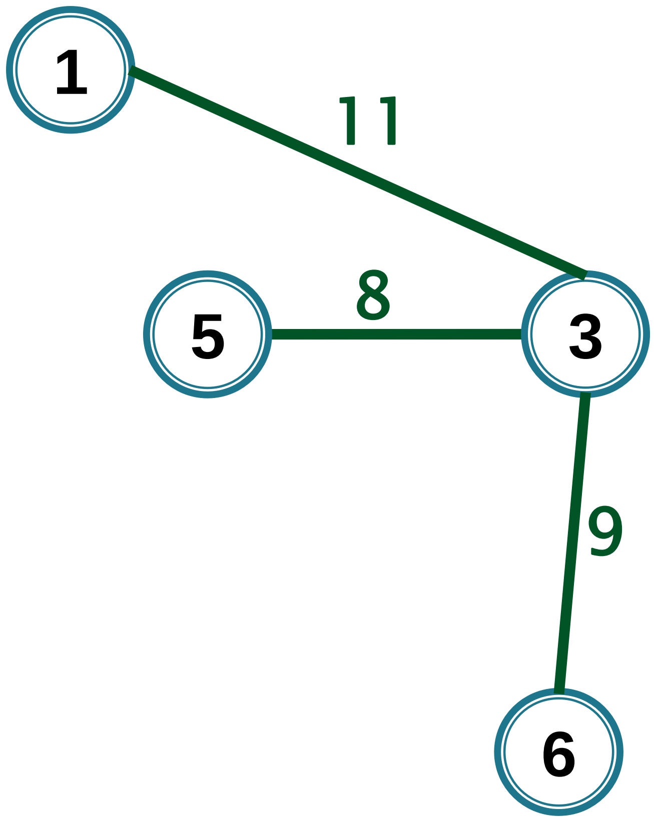


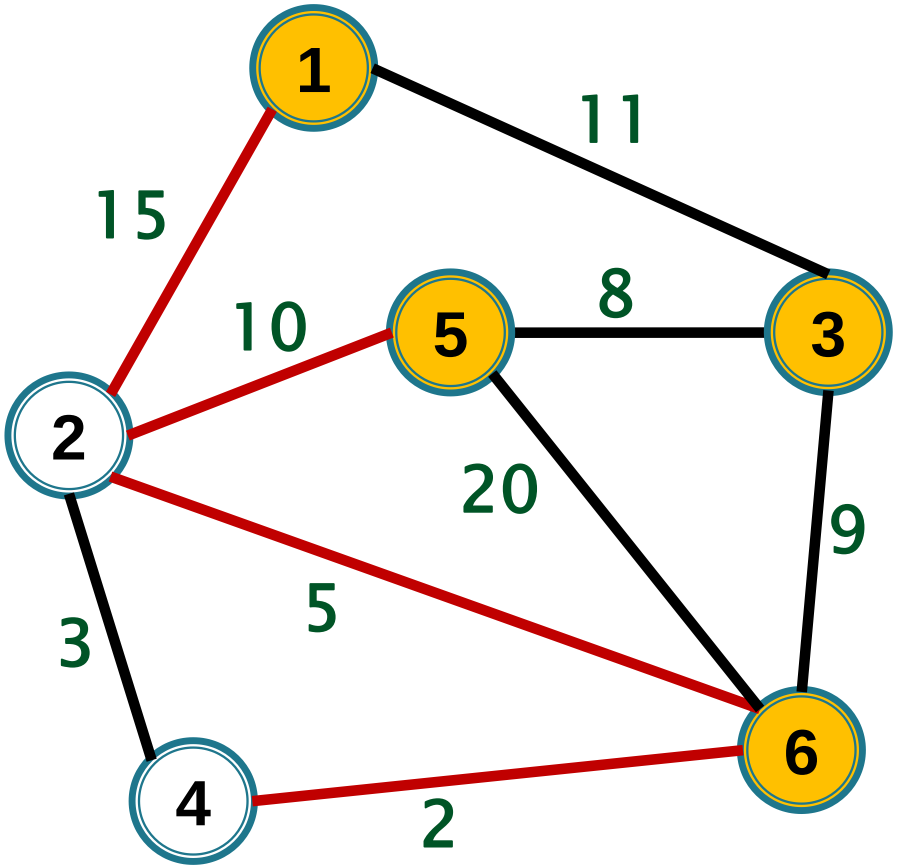
1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2



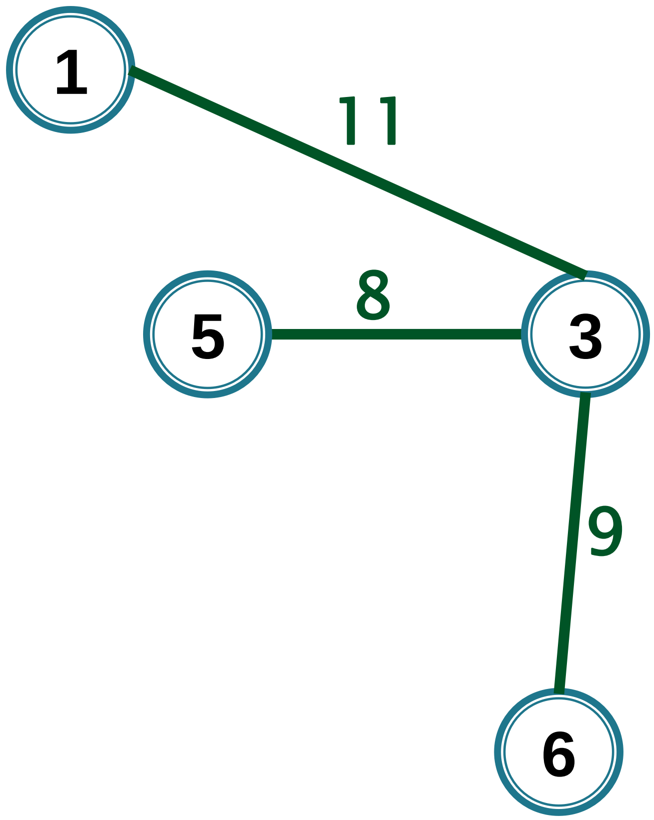
1
5
3
11
8


1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2

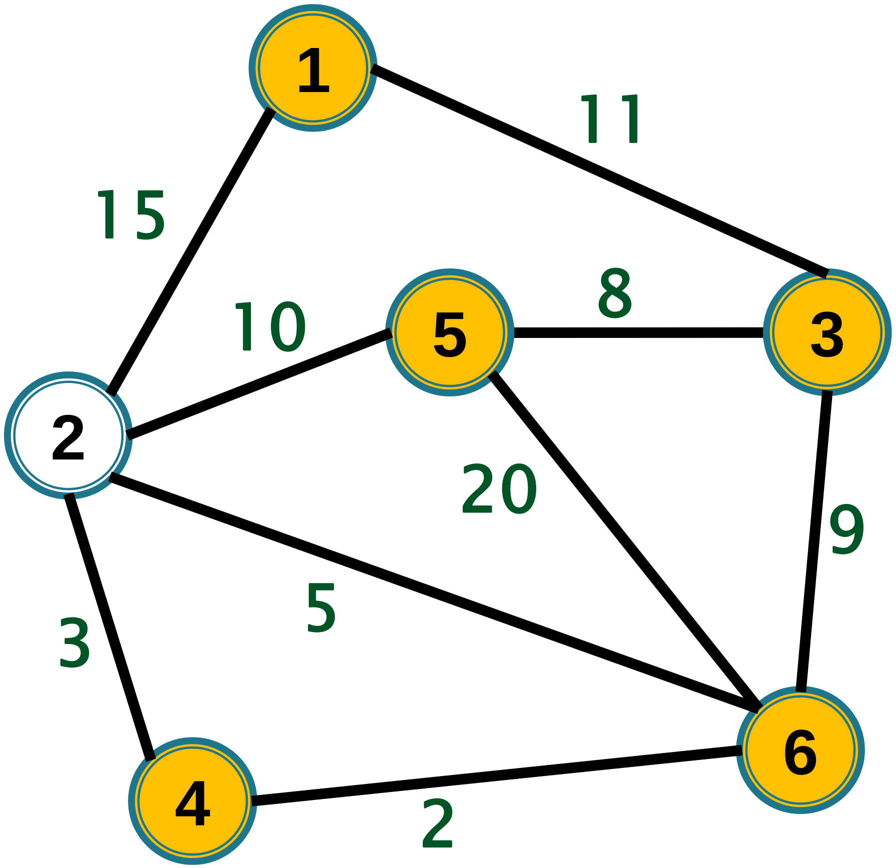

1
3
5
6
11
8
9

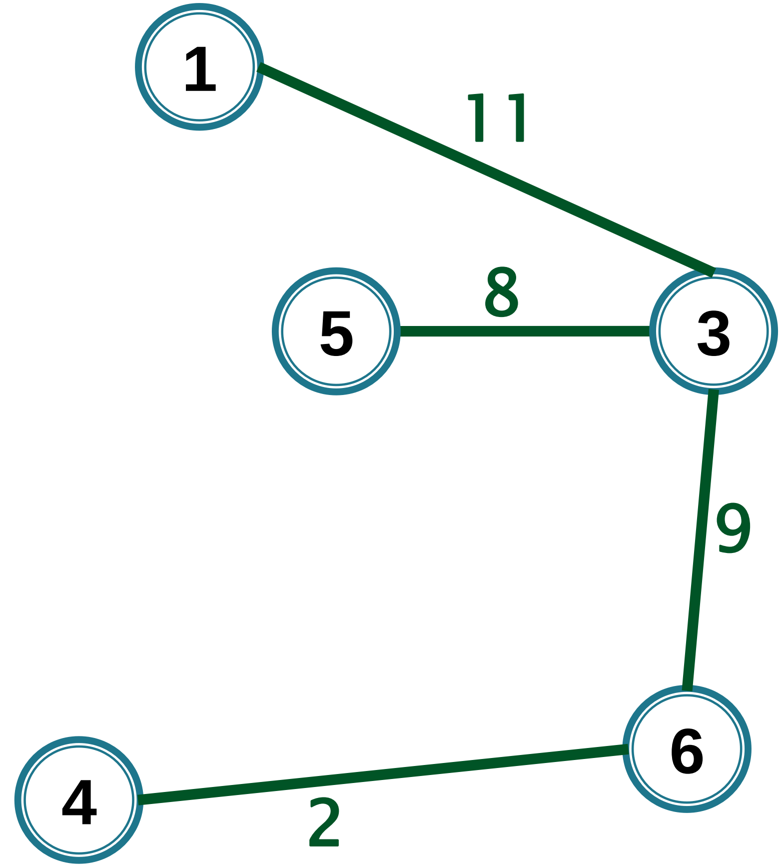


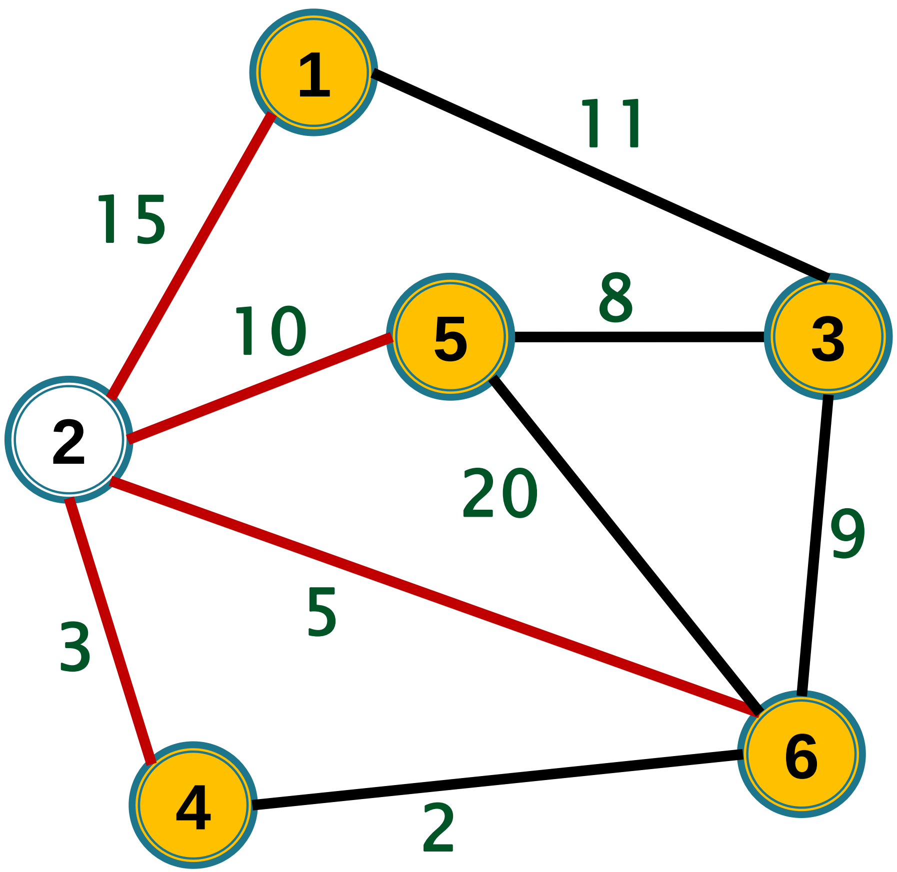
1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2



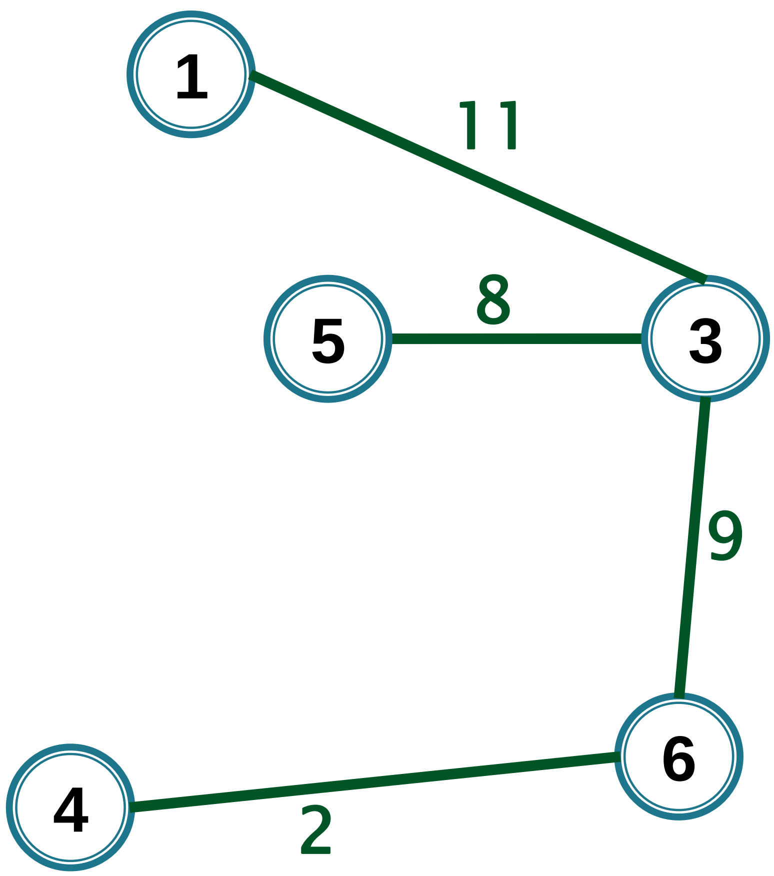
1
3
5
6
11
8
9


1
11
15
10
5
8
3
2
20
9
5
3
4
2
6

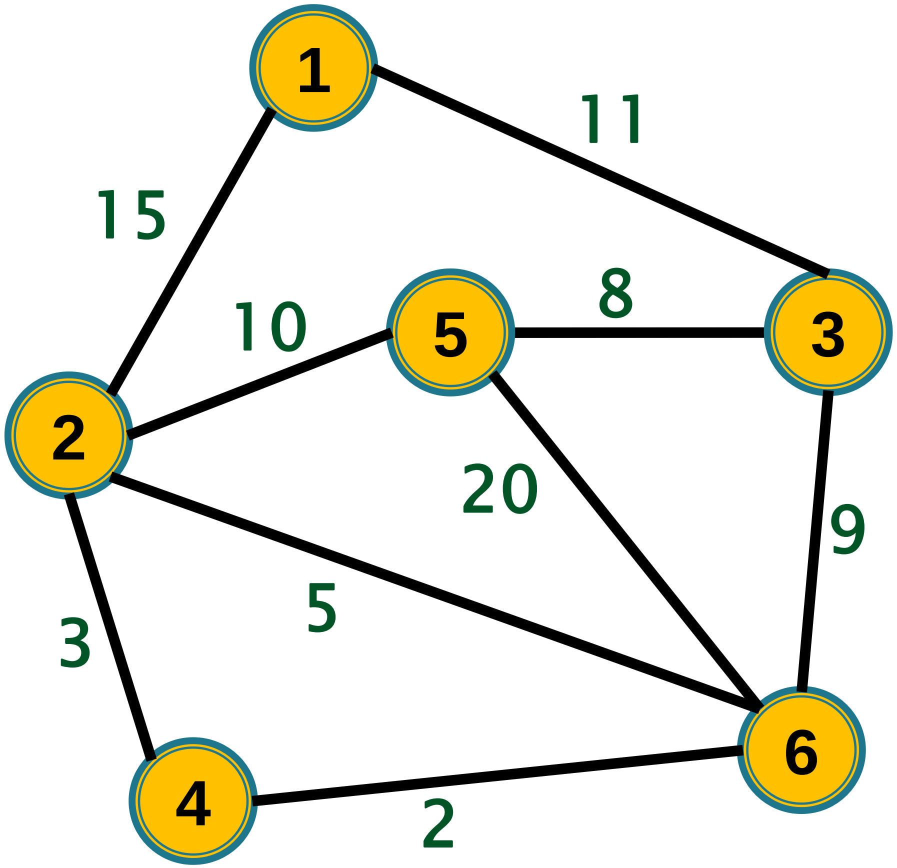

1
11
5
8
3
9
4
6
2

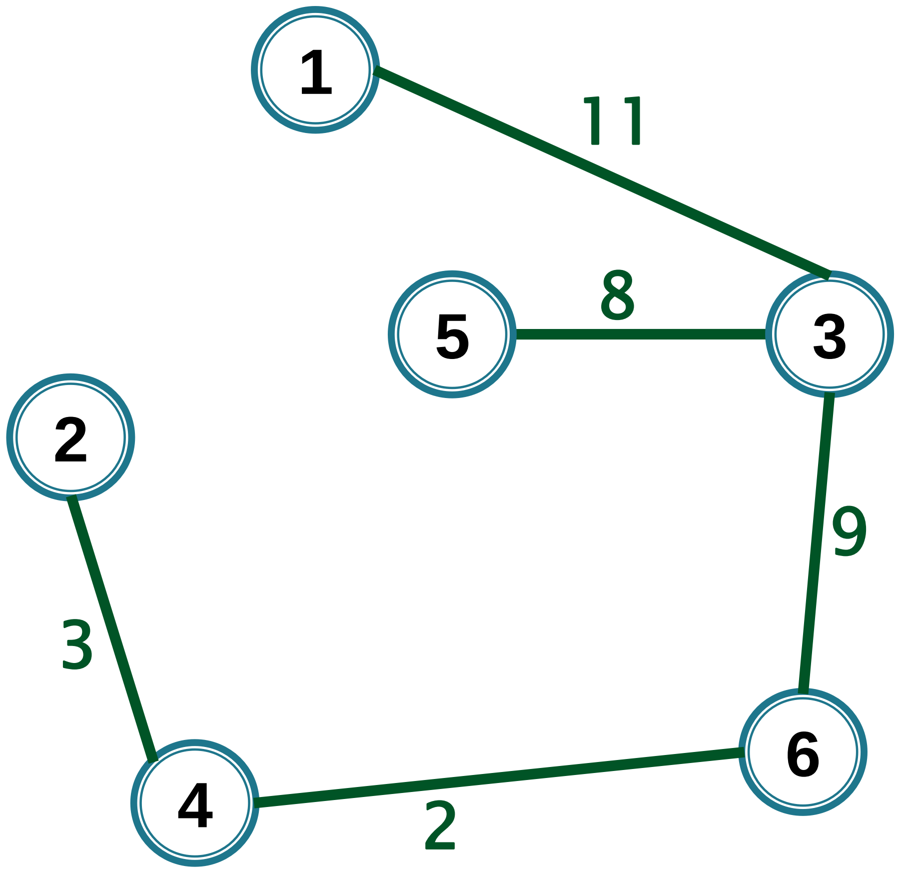


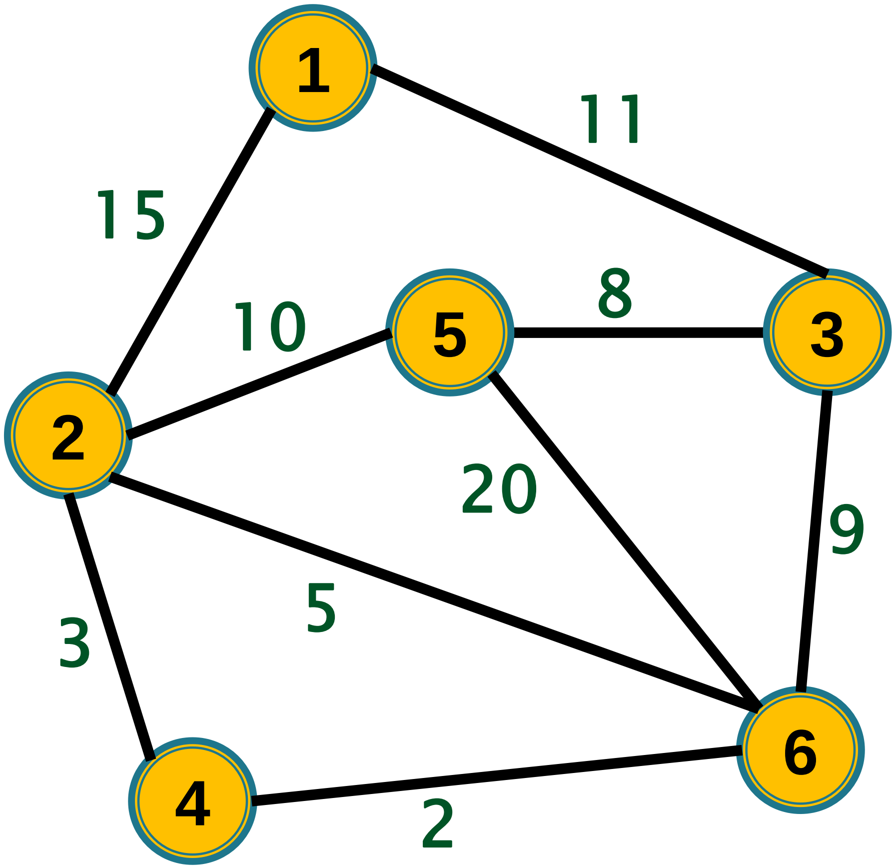
1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2

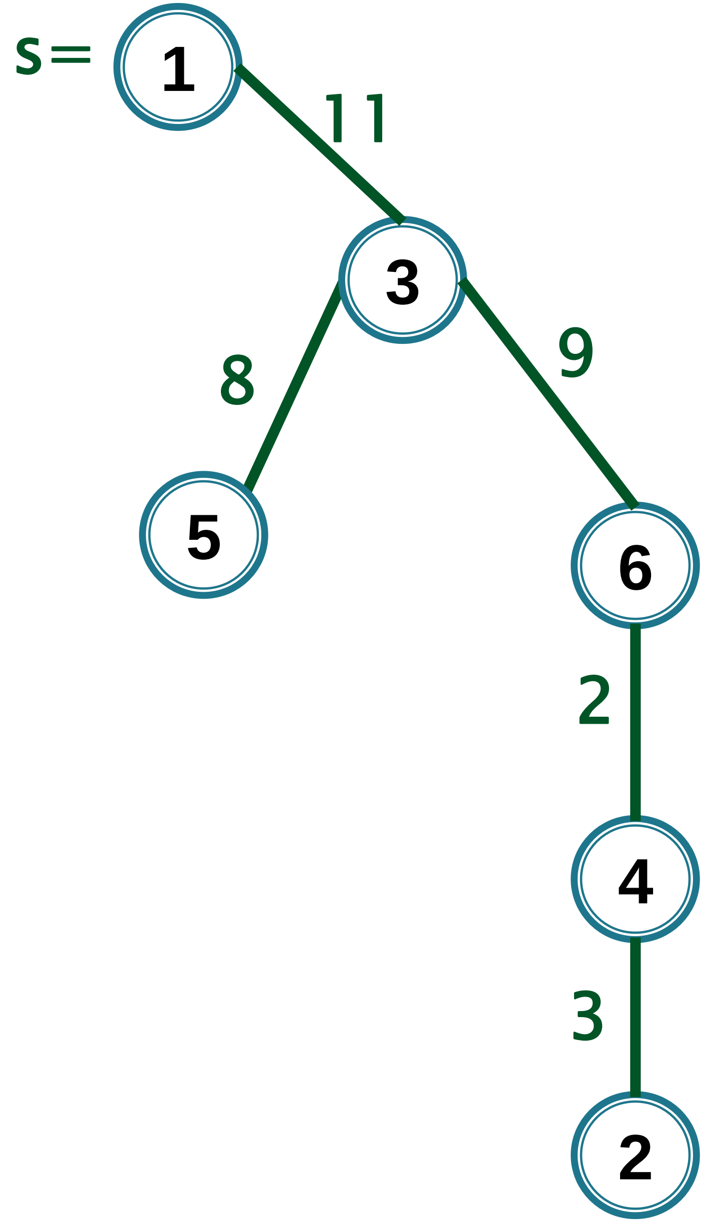


1
3
4
5
6
11
8
9
2


1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2


1
2
3
4
5
6
11
8
9
3
2

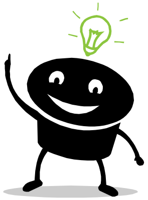

1
2
3
4
5
6
15
11
10
8
20
9
5
3
2


s=
1
11
3
8
9
5
6
2
4
3
2

Implementare+Complexitate

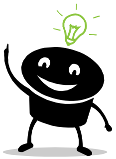
Cum alegem *eficient* o muchie de cost minim cu o extremitate selectată (deja în arbore) și cealaltă nu?

Implementare+Complexitate



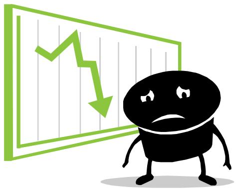
- La fiecare pas parcurgem toate muchiile şi o alegem pe cea de cost minim cu o extremitate selectată şi una neselectată

Implementare+Complexitate



- La fiecare pas parcurgem toate muchiile şi o alegem pe cea de cost minim cu o extremitate selectată şi una neselectată

O(nm)

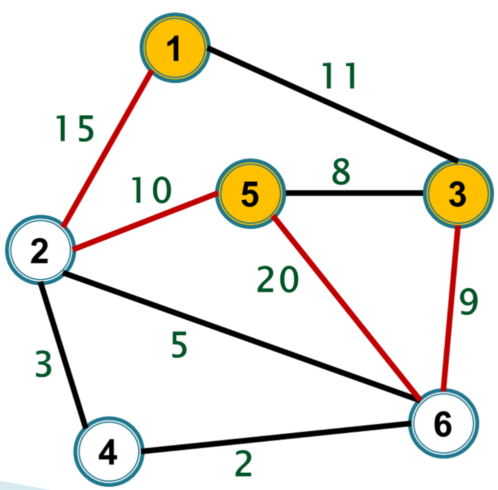


Implementare Prim

Cum evităm să comparam de fiecare dată toate muchiile cu o extremitate în arbore și cealaltă nu.

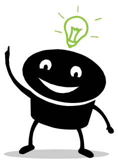
Exemplu:

După ce vârfurile 1 și 5 au fost adăugate în arbore, muchiile **(2,1)** și **(2,5)** sunt comparate la fiecare pas, deși w(2,1)>w(2,5), **deci (2,1) nu va fi selectată niciodată**

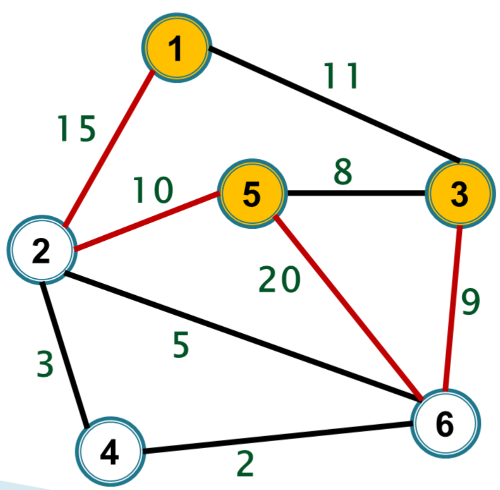


Implementare Prim

Cum evităm să comparam de fiecare dată toate muchiile cu o extremitate în arbore și cealaltă nu.



Pentru un vârf (neselectat) memorăm **doar muchia de cost minim** care îl unește cu un vârf din arbore (selectat)



pentru vârful 2 va fi memorată la acest pas muchia (2, 5)

Implementare+Complexitate

Variante $O(n^2)$/ $O(m\log n)$

- **memorăm la fiecare pas pentru fiecare vârf muchia de cost minim care îl uneşte de un vârf care este deja în arbore**

sau

- heap de muchii

(v. si laborator+seminar + alg. Dijkstra)

Detalii implementare

Algoritmul lui Prim

Implementare Prim

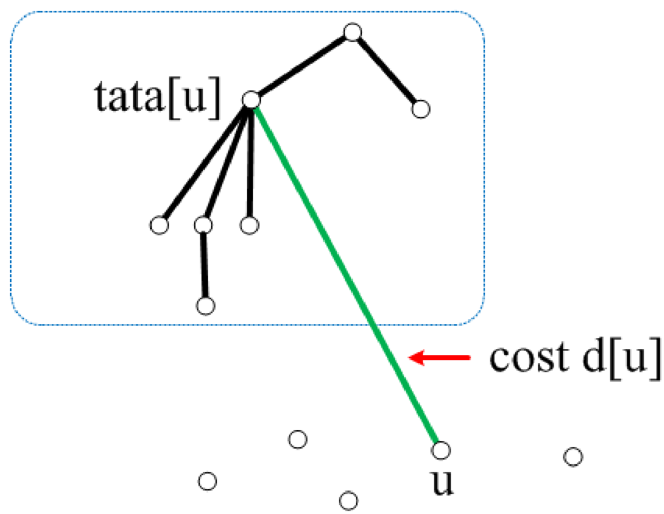
Asociem fiecărui vârf u următoarele informaţii (etichete) – pentru a reține **muchia de cost minim care îl unește de un vârf selectat deja în arbore**:

-
-

Implementare Prim

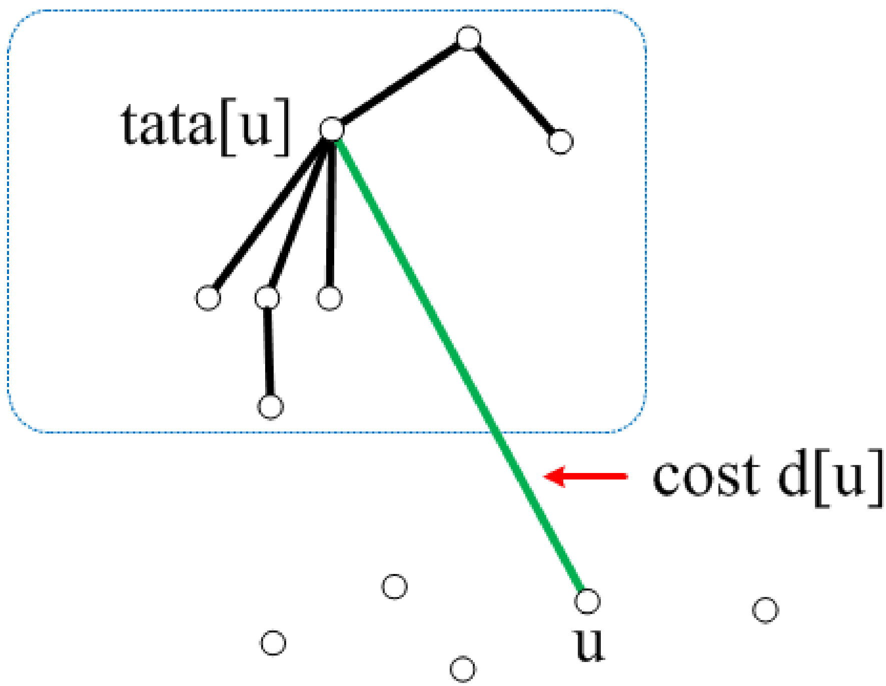
Asociem fiecărui vârf u următoarele informaţii (etichete) – pentru a reține **muchia de cost minim care îl unește de un vârf selectat deja în arbore**:

- **d[u]** = costul minim al unei muchii de la u la un vârf selectat deja în arbore
- **tata[u]** = acest vârf din arbore pentru care se realizează minimul



Implementare Prim

- **Avem**
  - **(u, tata[u])** este muchia de cost minim de la u la un vârf din arbore
  - **d[u] = w(u, tata[u])**



Implementare Prim

Atunci algoritmul se modifică astfel:

- **La un pas**

– se alege **un vârf** u cu **eticheta d minimă** care nu este încă în arbore şi se adaugă la arbore muchia **(tata[u], u)**

  - **aceasta este muchia de cost minim care unește un vârf neselectat de un vârf din arbore**

Implementare Prim

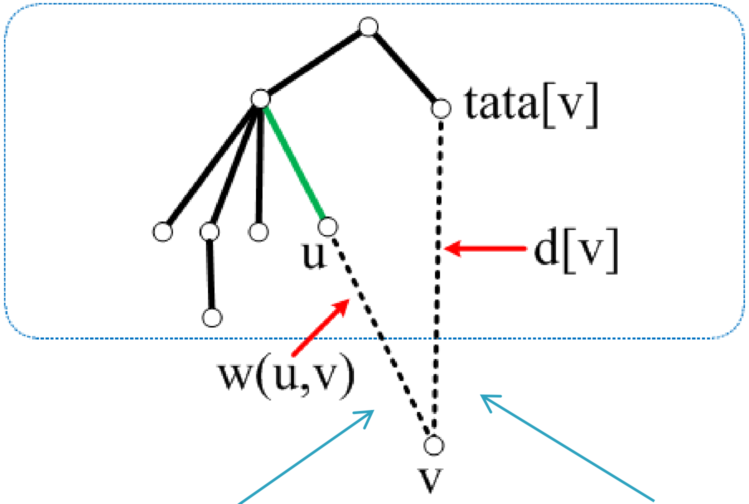
Atunci algoritmul se modifică astfel:

- **La un pas**

– se alege **un vârf** u cu **eticheta d minimă** care nu este încă în arbore şi se adaugă la arbore muchia **(tata[u], u)**

– se actualizează etichetele vârfurilor $v \notin V(T)$ vecine cu u astfel:

```
dacă w(u,v) < d[v] atunci
      d[v] = w(u,v)
      tata[v] = u
```



noua muchie: vu

muchia de cost minim determinată până acum: (v,tata[v])

Implementare Prim

- Muchiile arborelui vor fi în final

  $(u, tata[u]), u \neq s$

Prim

Notăm $Q=V(G) - V(T)$ = mulțimea vârfurilor neselectate încă în arbore

Prim

- s- vârful de start
- `inițializează Q cu V`
- `pentru fiecare u∈V executa`
```
      d[u] = ∞; tata[u]=0
 d[s] = 0
```

Prim

- s- vârful de start
- `inițializează Q cu V`
- `pentru fiecare u∈V executa`

  `d[u] = ∞; tata[u]=0`

  `d[s] = 0`
- `cat timp Q ≠ ∅ executa //` pentru i = 1, n (suficient n-1)

Prim

- s– vârful de start
- inițializează Q cu V
- pentru fiecare u∈V executa

  d[u] = ∞; tata[u]=0

  d[s] = 0
- cat timp Q ≠ ∅ executa

  extrage un vârf u∈Q cu eticheta d[u] minimă

Prim

- s- vârful de start
- `inițializează Q cu V`
- `pentru fiecare u∈V executa`

  `d[u] = ∞; tata[u]=0`

  `d[s] = 0`
- `cat timp Q ≠ ∅ executa`

  extrage un vârf u∈Q cu eticheta d[u] minimă

  `pentru fiecare uv∈E executa`

Prim

- s- vârful de start
- `inițializează Q cu V`
- `pentru fiecare u∈V executa`

```
      d[u] = ∞; tata[u]=0
 d[s] = 0
```

- `cat timp Q ≠ ∅ executa`

      extrage un vârf u∈Q cu eticheta d[u] minimă

```
      pentru fiecare uv∈E executa
              daca v∈Q si w(u,v)<d[v] atunci
                  d[v] = w(u,v)
                  tata[v] = u
```

Prim

- s– vârful de start
- `inițializează Q cu V`
- `pentru fiecare u∈V executa`

```
      d[u] = ∞; tata[u]=0
 d[s] = 0
```

- `cat timp Q ≠ ∅ executa`

    extrage un vârf u∈Q cu eticheta d[u] minimă

```
pentru fiecare uv∈E executa
        daca v∈Q si w(u,v)<d[v] atunci
            d[v] = w(u,v)
            tata[v] = u
```

- scrie (u, tata[u]), pentru u≠ s

Prim

Complexitate

- Inițializări   ->
- n * extragere vârf minim   ->
- actualizare etichete vecini   ->

Prim

Cum putem memora Q pentru a determina eficient vârful u∈Q cu eticheta minimă?

Prim

Cum putem memora Q pentru a determina eficient vârful $u \in Q$ cu eticheta minimă?

- vector?
- heap?

Prim

Varianta 1– Folosim vector de vizitat

$$Q[u] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u \notin Q \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Prim

Complexitate

Varianta 1 – cu vector de vizitat

- **Inițializări** ->
- **n * extragere vârf minim** ->
- **actualizare etichete vecini** ->

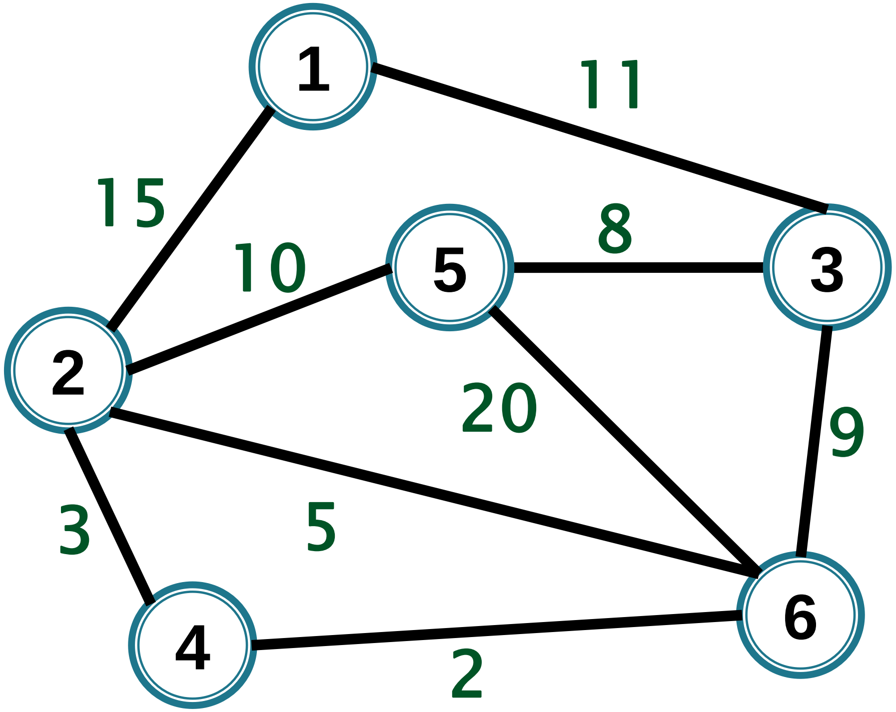
Prim

Complexitate

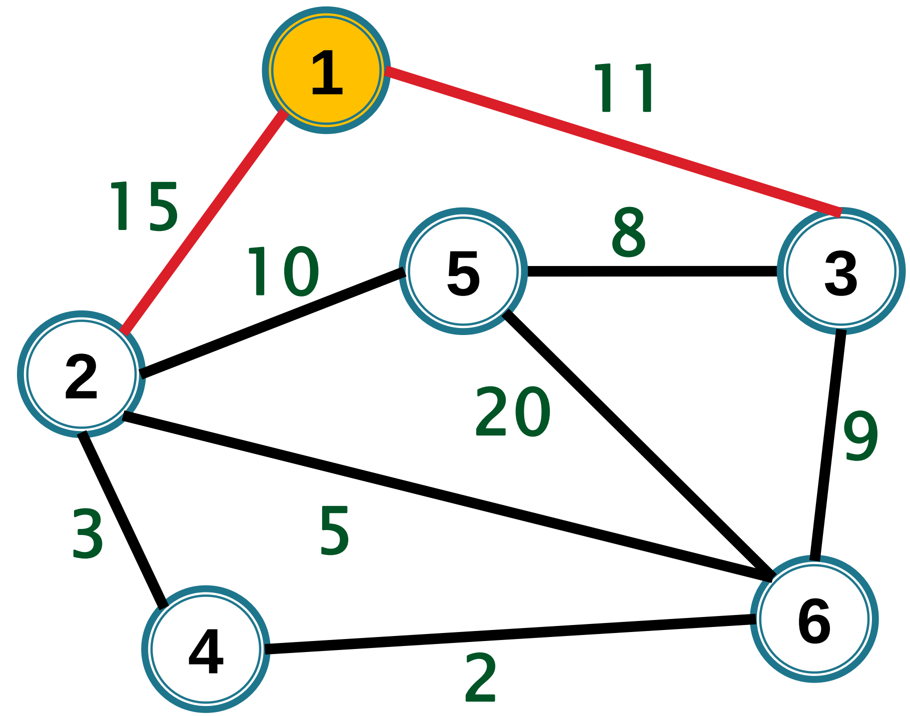
Varianta 1 – cu vector de vizitat

- **Inițializări** -> $O(n)$
- **n * extragere vârf minim** -> $O(n^2)$
- **actualizare etichete vecini** -> $O(m)$

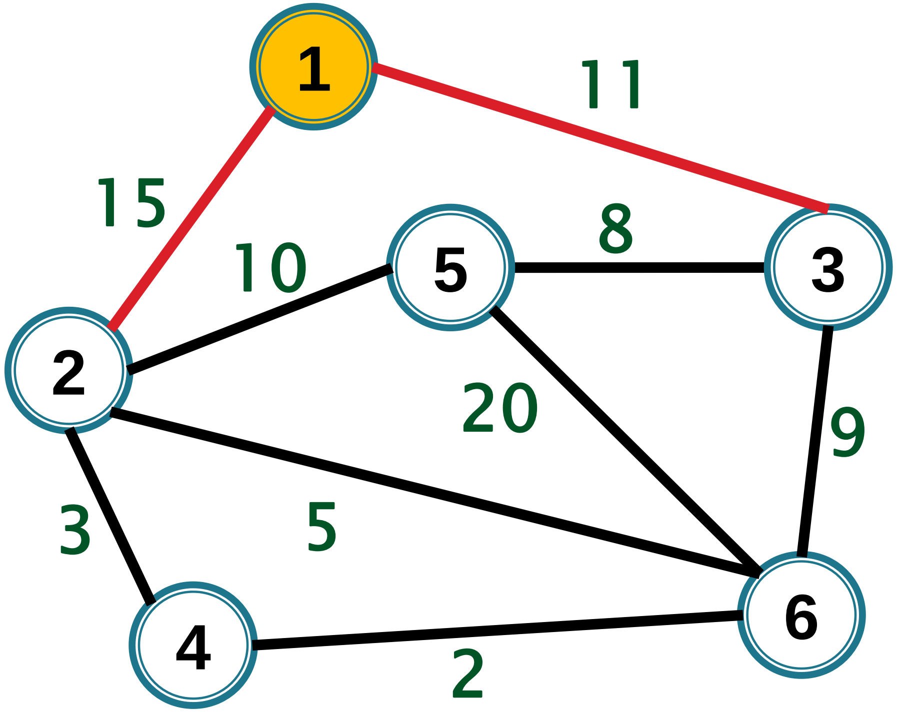
$O(n^2)$



	1	2	3	4	5	6
d/tata=	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]

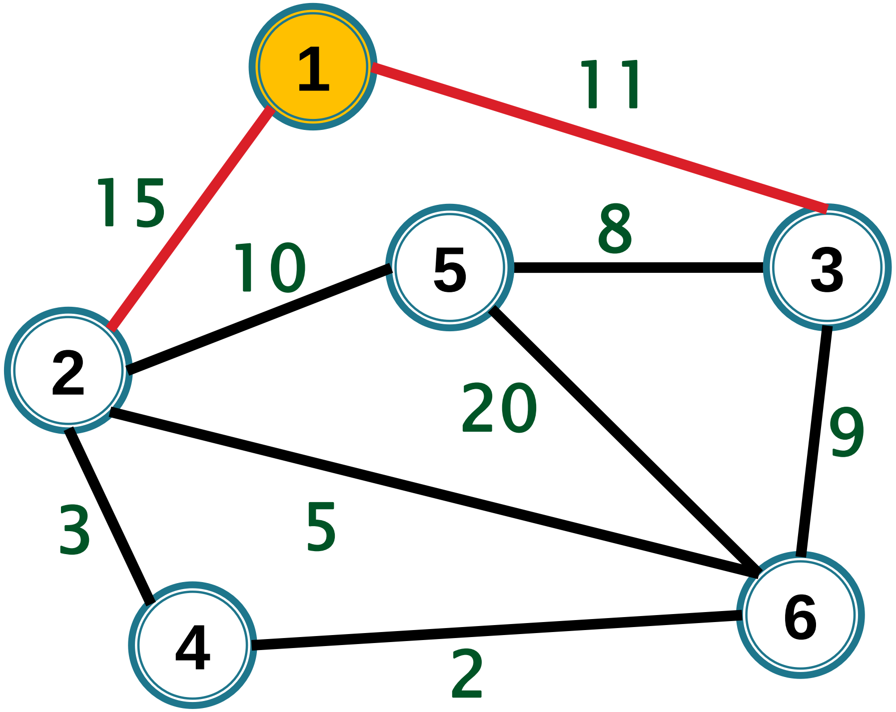


	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:						



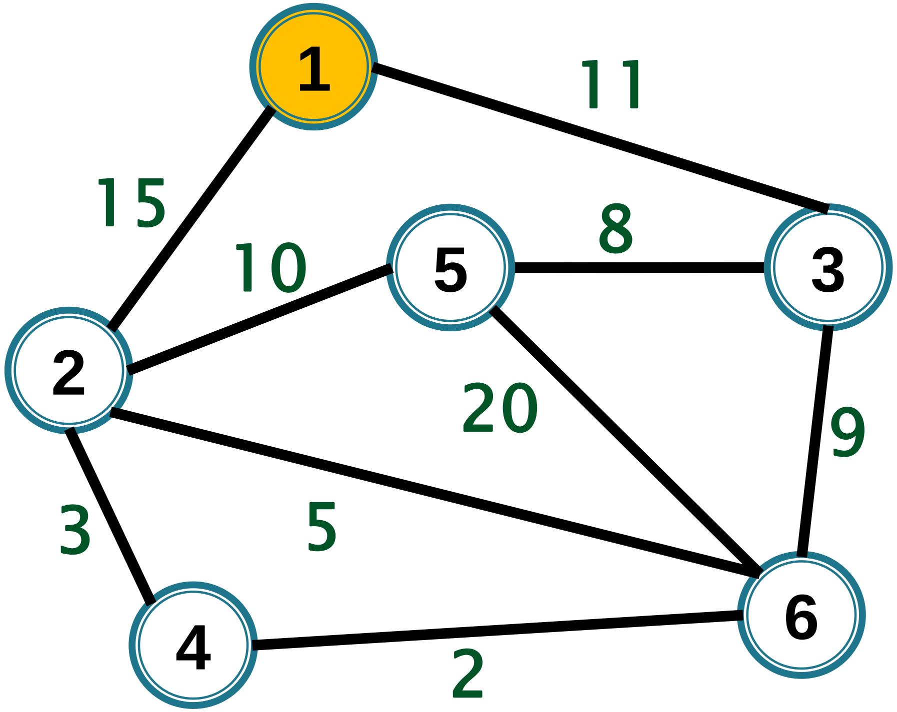
	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]

Sel. 1: viz [1] = 1 (vom reprezenta prin –)



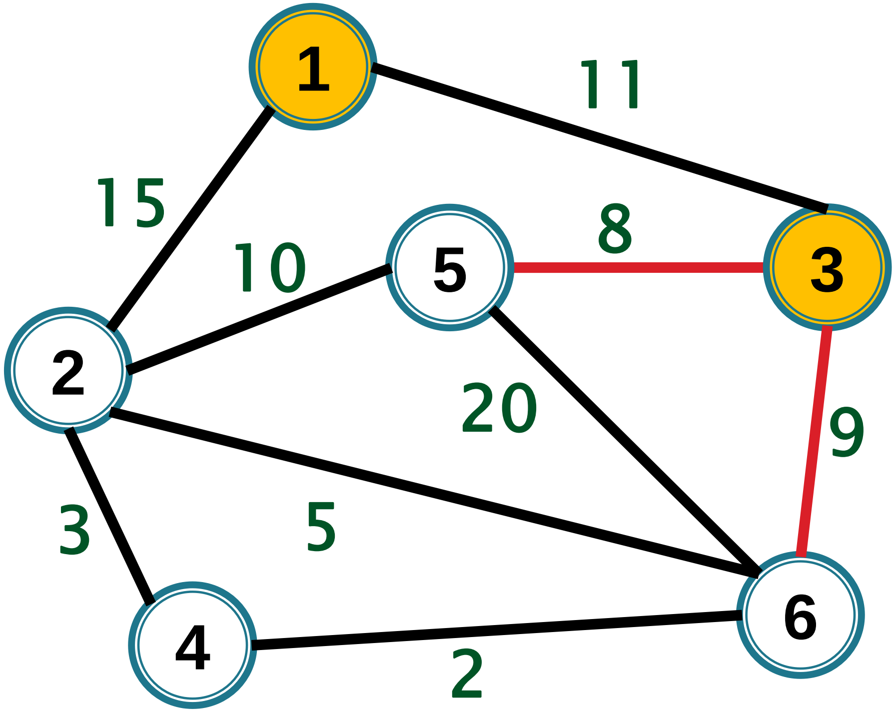
	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]

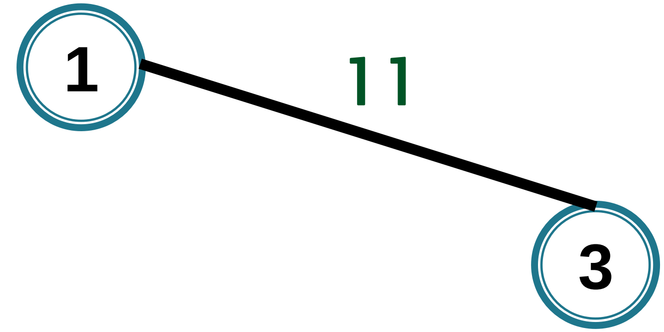
Sel. 1: actualizăm etichetele vecinilor



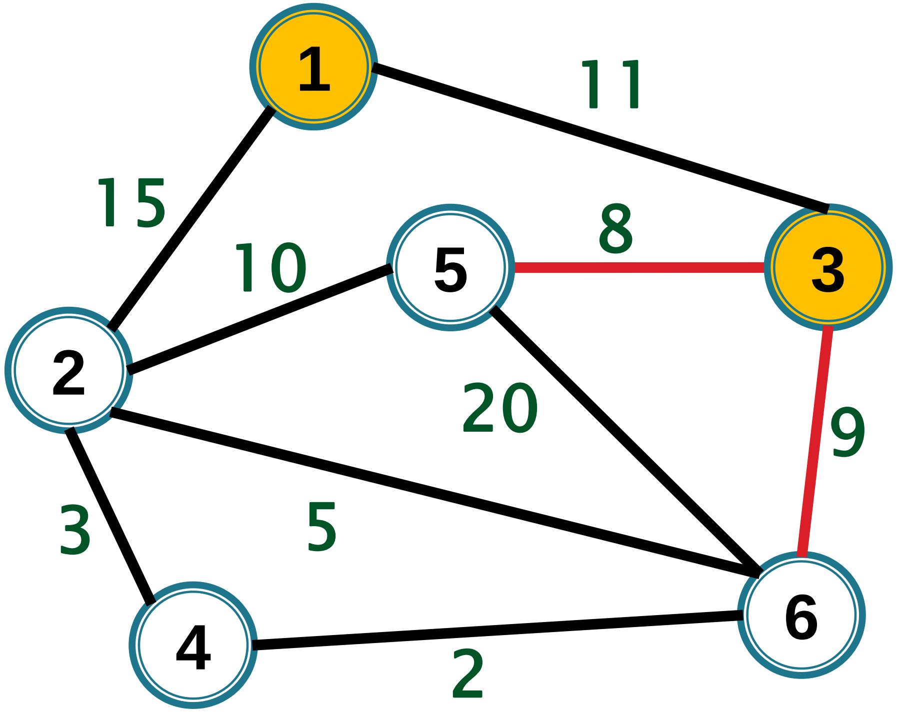
	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]

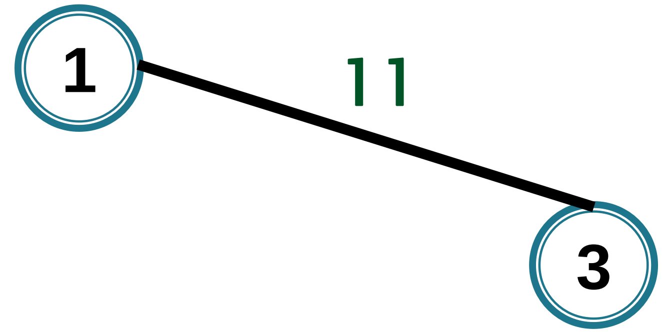
Pentru vârful 2 este memorata muchia (2,1) de cost 15, mai exact costul muchiei în d[2] și cealaltă extremitate în tata[2]



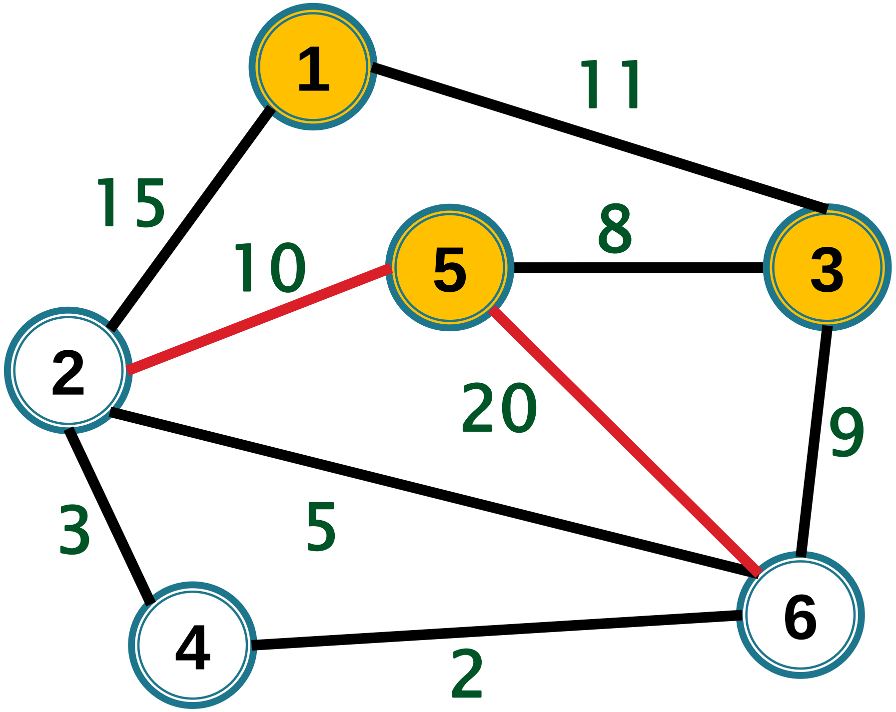


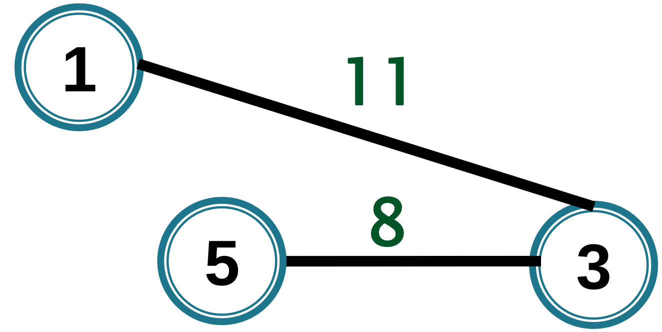
	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:						





	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]

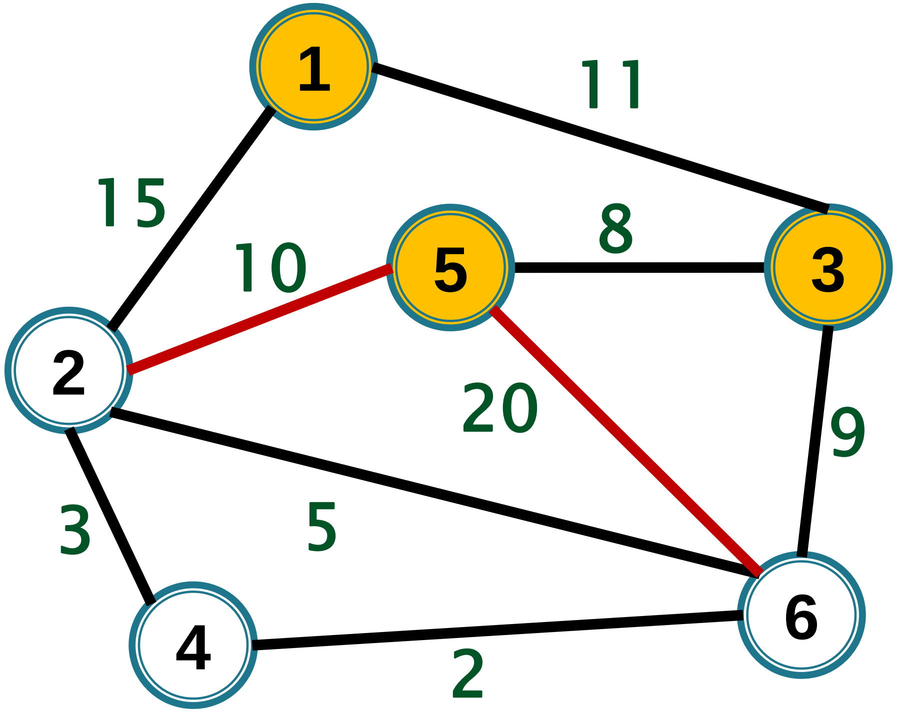


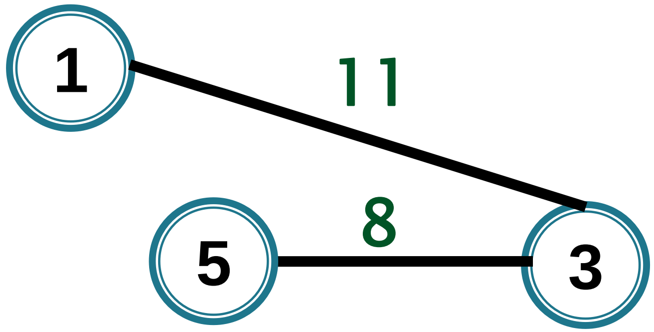


	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:						

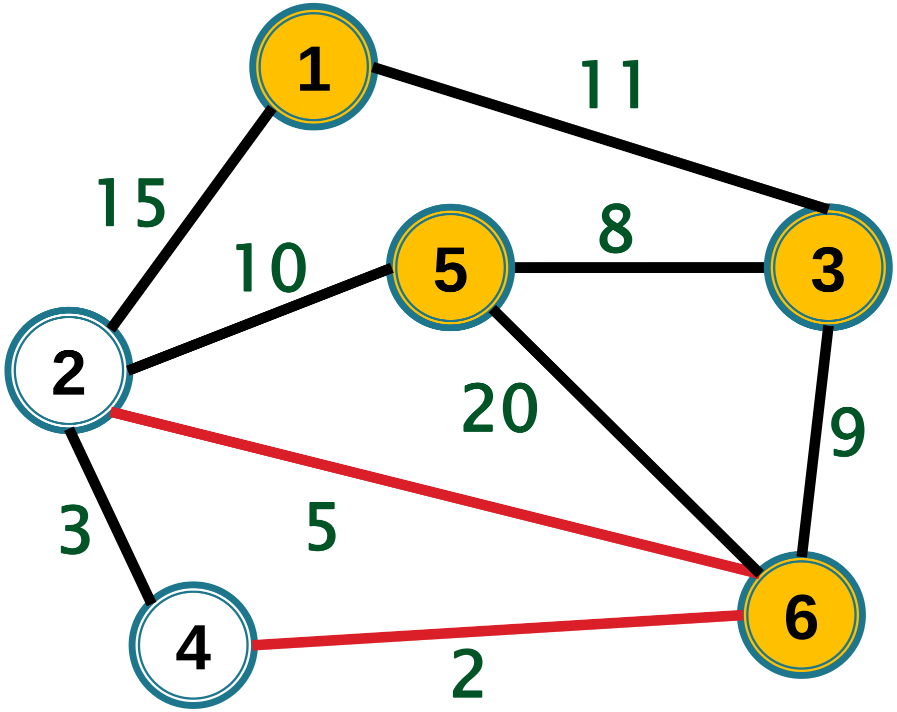
d[2]=min{d[2], w(2,5)}

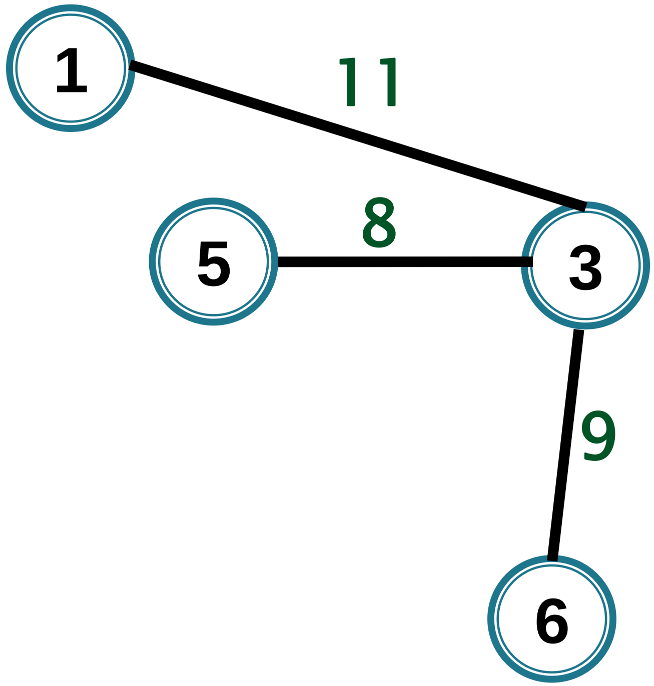
d[6]=min{d[6], w(6,5)}



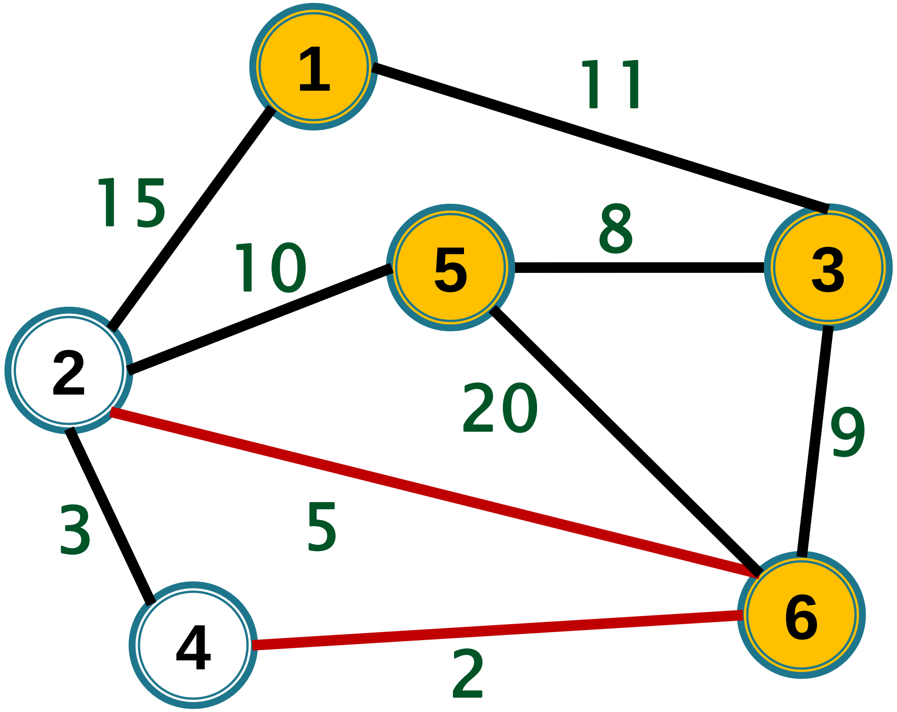


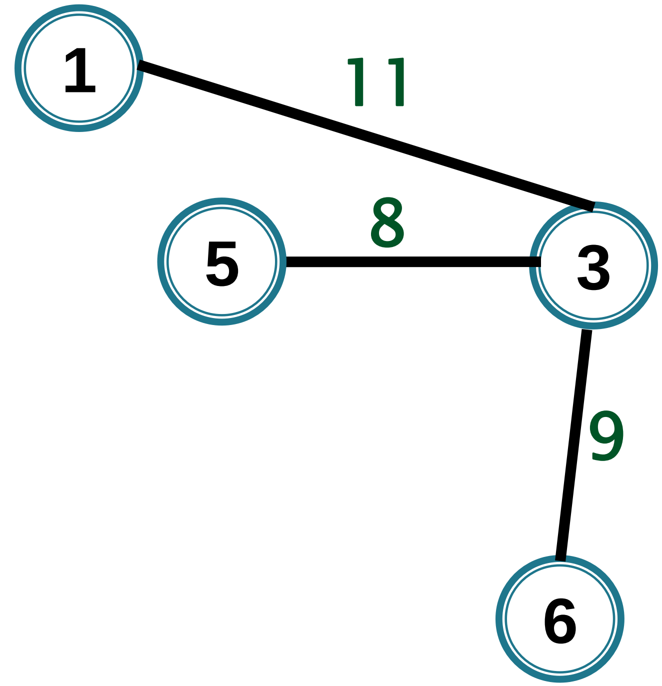
	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]



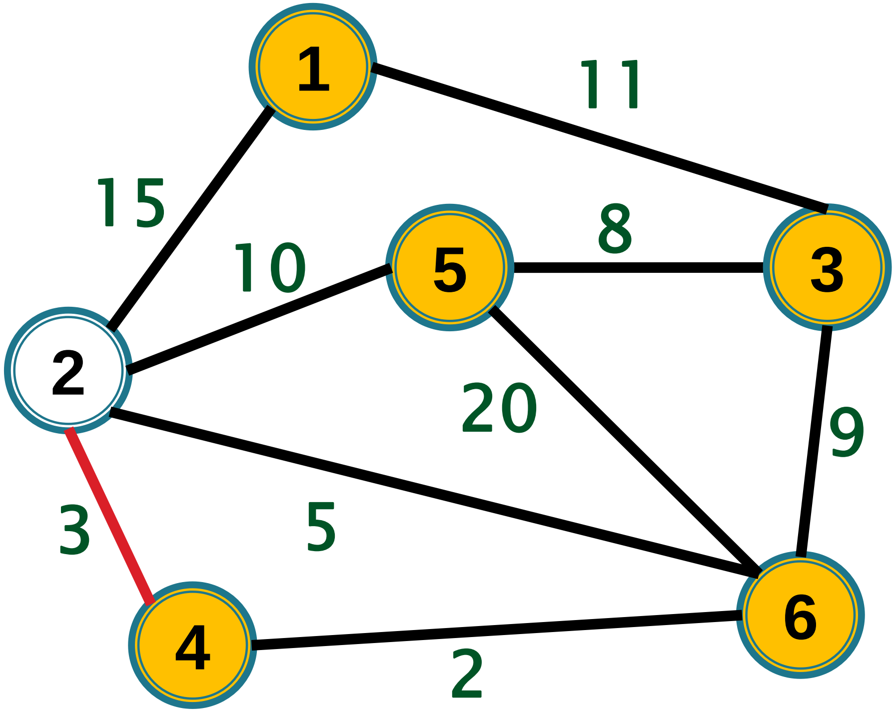


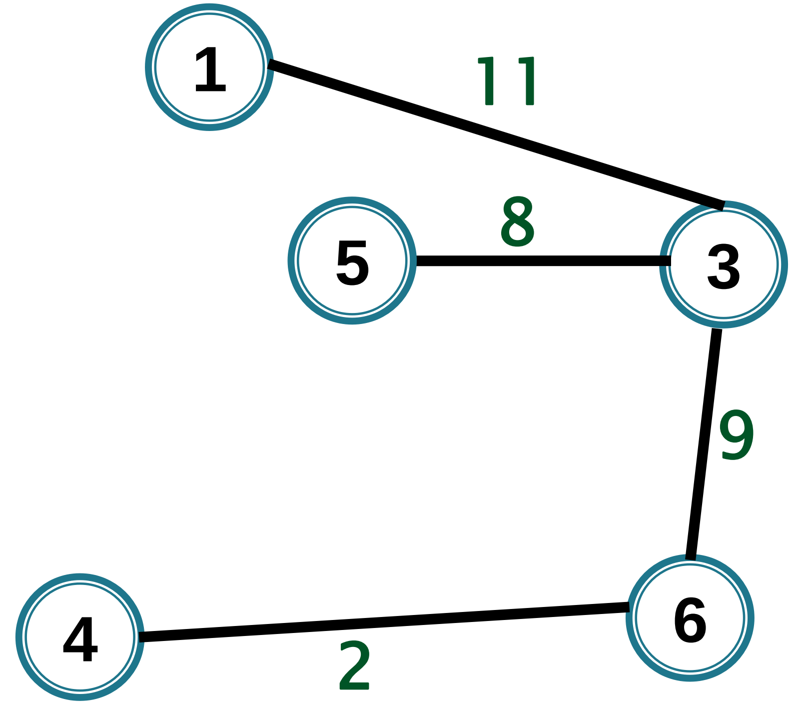
	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:						



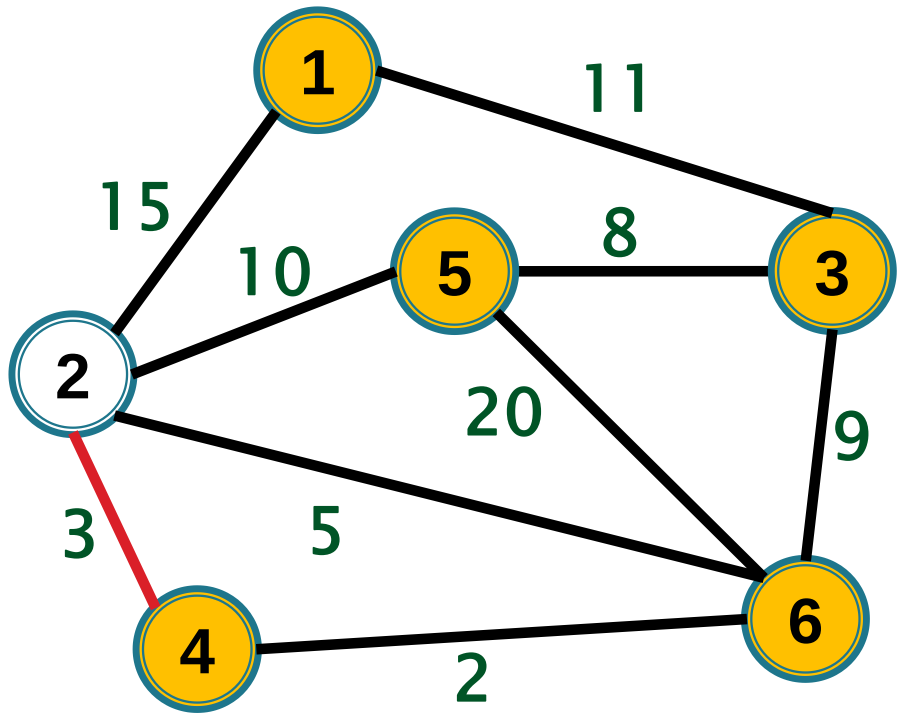


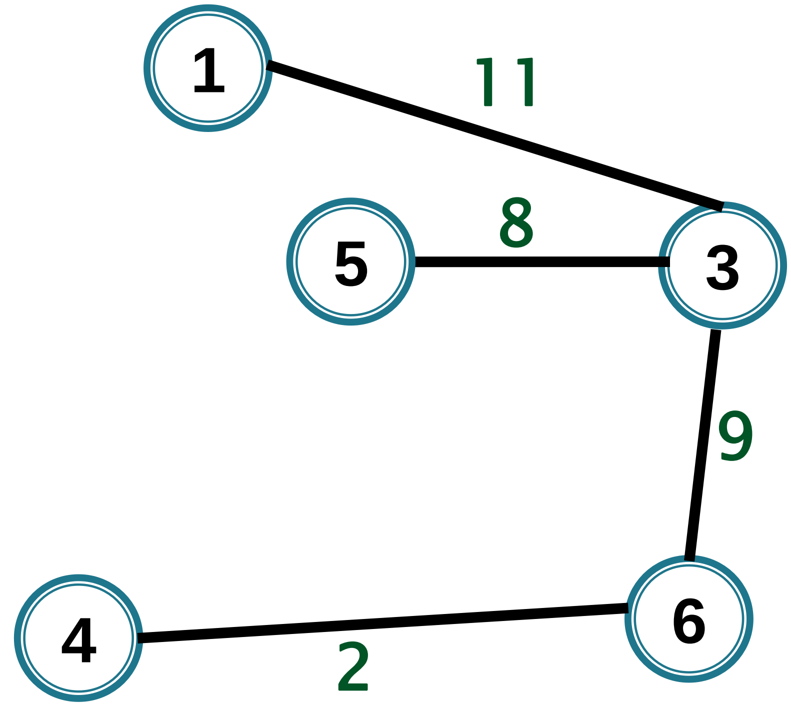
	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:	[– ,	5/6 ,	– ,	2/6,	– ,	–]



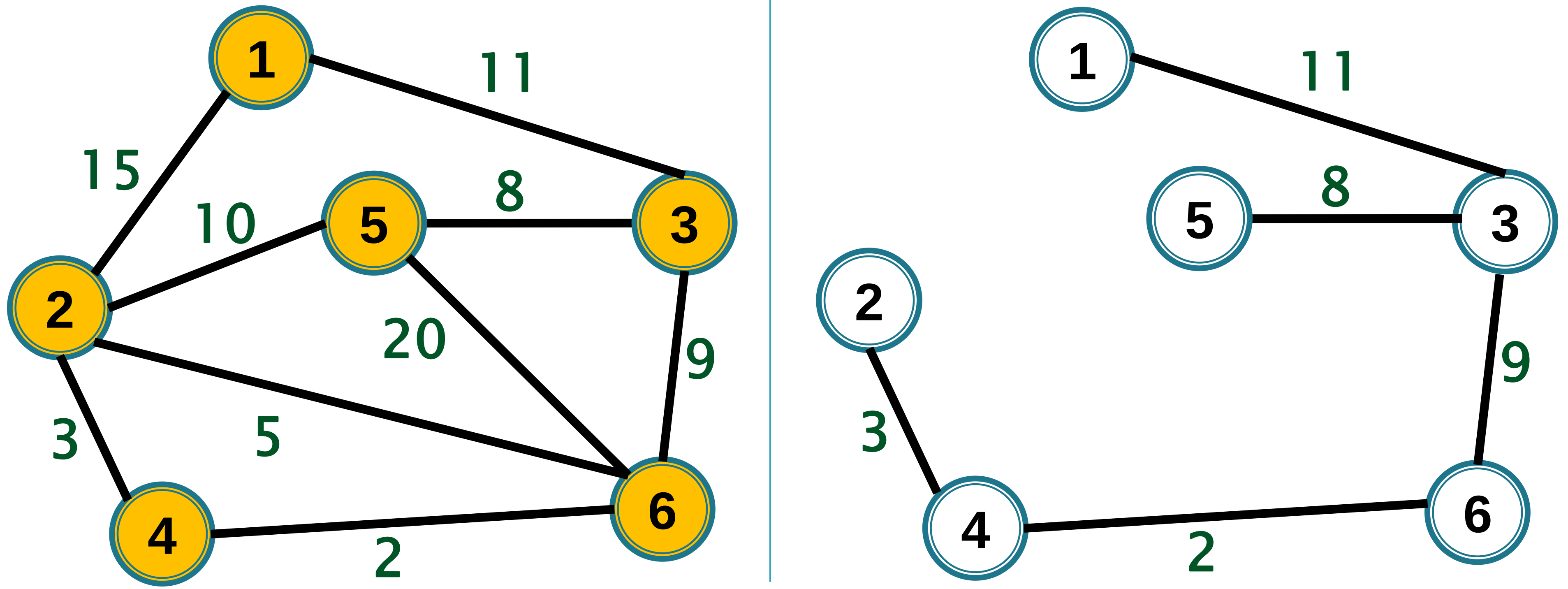


	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:	[– ,	5/6 ,	– ,	2/6,	– ,	–]
Sel. 4:						

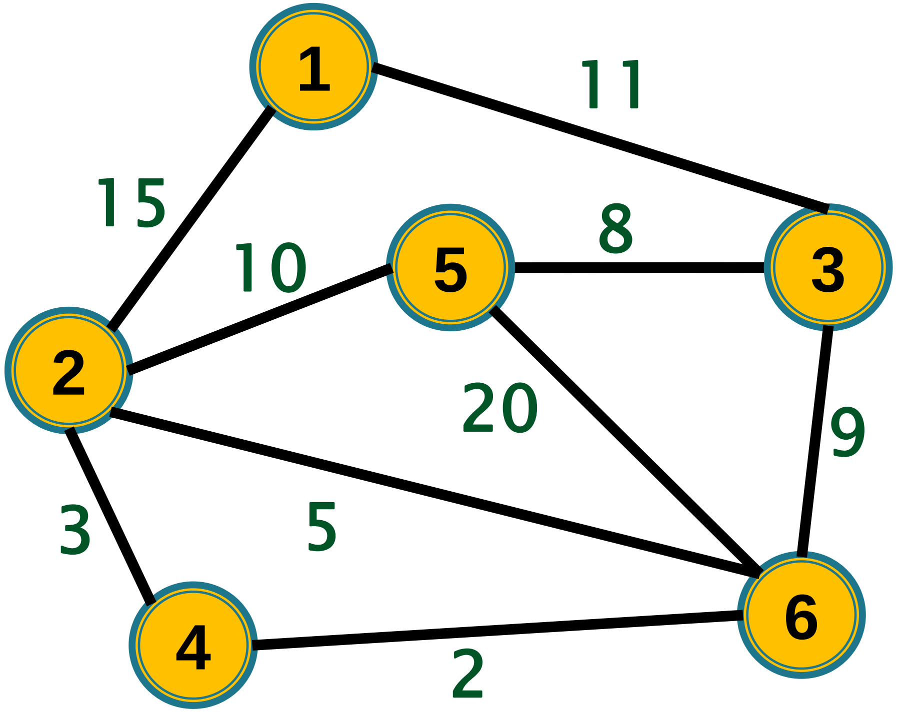


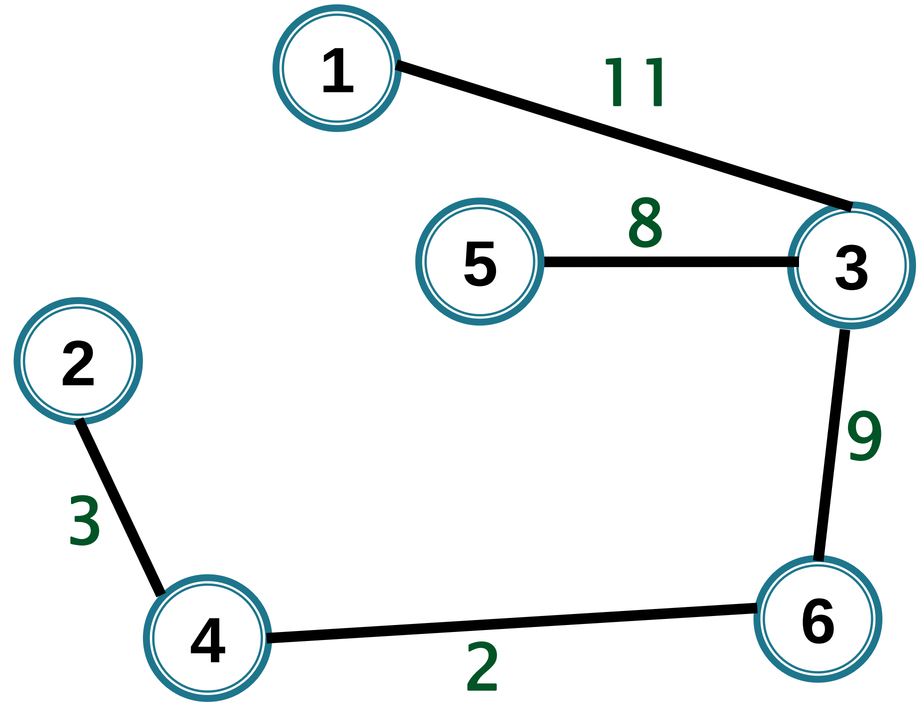


	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:	[– ,	5/6 ,	– ,	2/6,	– ,	–]
Sel. 4:	[– ,	3/4 ,	– ,	– ,	– ,	–]

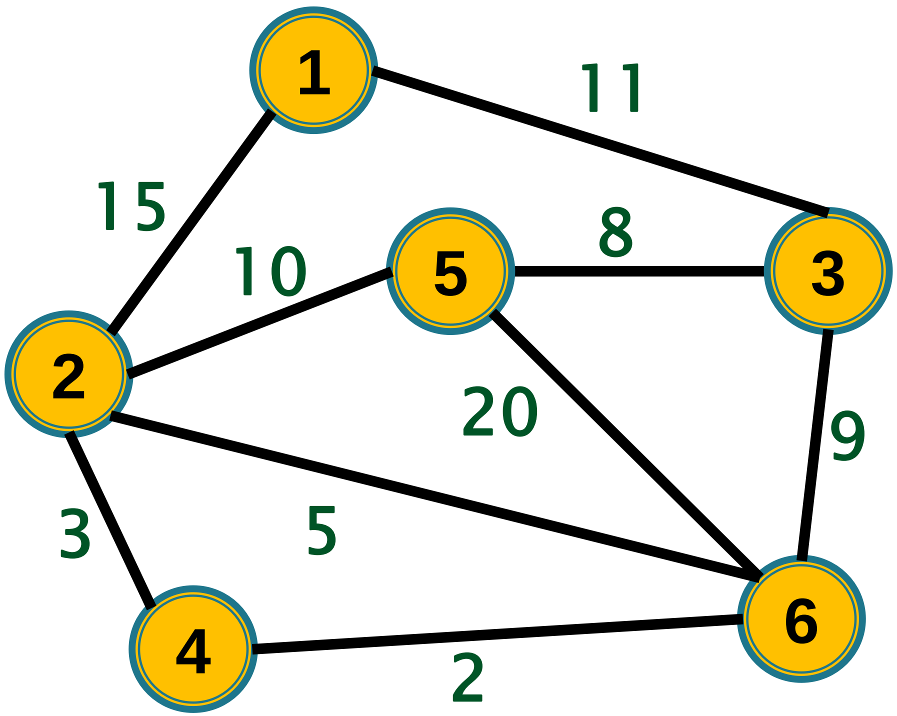


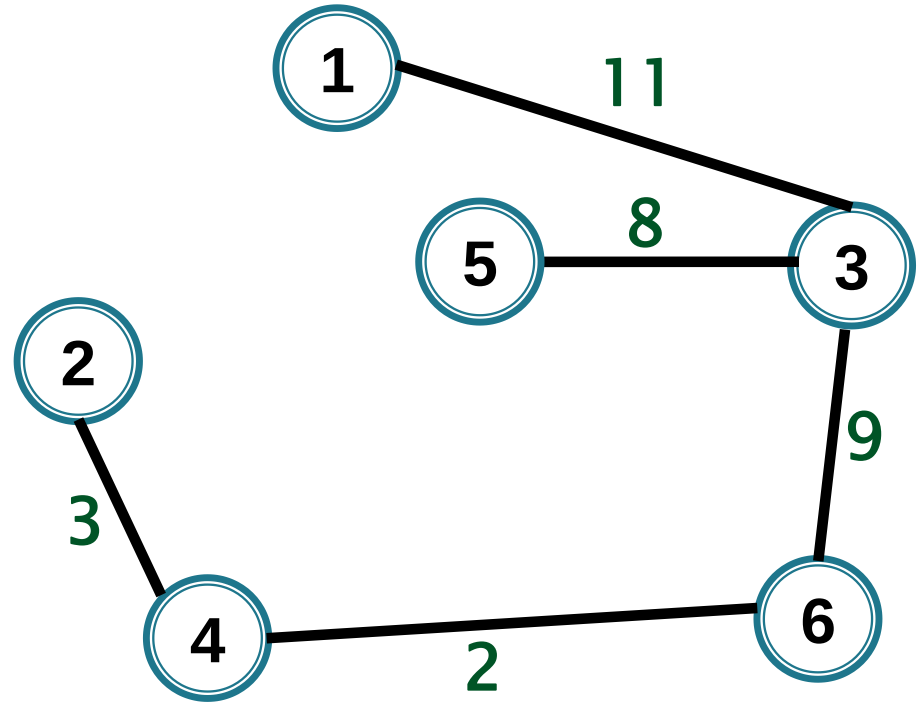
	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:	[– ,	5/6 ,	– ,	2/6,	– ,	–]
Sel. 4:	[– ,	3/4 ,	– ,	– ,	– ,	–]
Sel. 2:						





	1	2	3	4	5	6
d/tata	[0/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 1:	[– ,	15/1,	11/1,	∞/0,	∞/0,	∞/0]
Sel. 3:	[– ,	15/1,	– ,	∞/0,	8/3,	9/3]
Sel. 5:	[– ,	10/5 ,	– ,	∞/0,	– ,	9/3]
Sel. 6:	[– ,	5/6 ,	– ,	2/6,	– ,	–]
Sel. 4:	[– ,	3/4 ,	– ,	– ,	– ,	–]
Sel. 2:	[– ,	– ,	– ,	– ,	– ,	–]





	1	2	3	4	5	6
d/tata **FINAL**	[0/0,	3/4,	11/1,	2/6,	8/3,	9/3]

Vectorul tata ⇒ muchiile arborelui (u,tata[u]), u≠s

Prim

Varianta 2 – memorarea vârfurilor din într-un min-heap Q (min-ansamblu)

- **Inițializare Q** ->
- **n * extragere vârf minim** ->
- **actualizare etichete vecini** ->

Prim(G, w, s)

```
pentru fiecare u∈V executa
      d[u] = ∞; tata[u]=0
 d[s] = 0
 inițializează Q cu V
 cat timp Q ≠ ∅ executa
        u=extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
        pentru fiecare v adiacent cu u executa
              daca v∈Q si w(u,v)<d[v] atunci
                  d[v] = w(u,v)
                  tata[v] = u
                  ???
 scrie (u, tata[u]), pentru u≠ s
```

Prim(G, w, s)

```
pentru fiecare u∈V executa
     d[u] = ∞; tata[u]=0
 d[s] = 0
 inițializează Q cu V
 cat timp Q ≠ ∅ executa
      u=extrage vârf cu eticheta d minimă din Q
      pentru fiecare v adiacent cu u executa
            daca v∈Q si w(u,v)<d[v] atunci
                d[v] = w(u,v)
                tata[v] = u
                //actualizeaza Q - pentru Q heap
 scrie (u, tata[u]), pentru u≠ s
```

Prim

Varianta 2 – memorarea vârfurilor din într-un min-heap Q (min-ansamblu)

- **Inițializare Q** -> O(n)
- **n * extragere vârf minim** -> O(n log n)
- **actualizare etichete vecini** -> O(m log n)

O(m log n)

Prim

Observație – Dacă graful este complet (spre exemplu dacă toate punctele se pot conecta și distanța dintre puncte este distanța euclidiană) $m = n(n-1)/2$ este de ordin n^2

$\Rightarrow$ **$O(n^2)$** mai eficient

Algoritmi bazaţi pe eliminare de muchii

Temă – Care dintre următorii algoritmi determină corect un arbore parţial de cost minim (justificaţi)? Pentru fiecare algoritm corect precizaţi ce complexitate are.

1.
```
T ← G
cât timp T conţine cicluri execută
      alege e o muchie de cost maxim care este
      conţinută într-un ciclu din T
      T ← T - e
```

2.
```
T ← G
cât timp T conţine cicluri execută
      alege C un ciclu oarecare din T şi fie e
      muchia de cost maxim din C
      T ← T - e
```

Corectitudine

Corectitudine Kruskal + Prim

- Cei doi algoritmi determină corect un apcm?
  Chiar dacă muchiile au şi costuri negative?

- Costul arborelui obținut de algoritmul lui Prim nu depinde de vârful de start ?

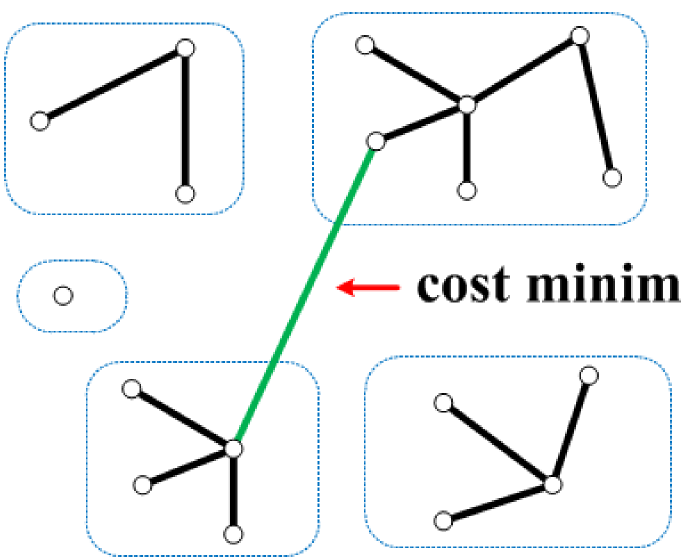
Corectitudine Kruskal + Prim

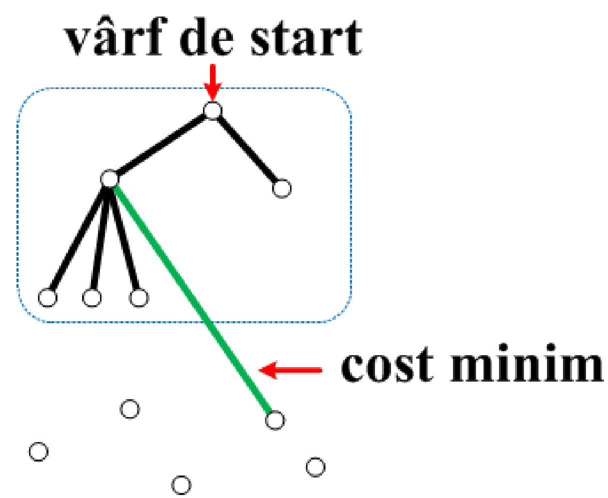
- Fie $A \subseteq E$ o mulțime de muchii

- Notăm $A \subseteq$ apcm $\Leftrightarrow \exists$ T un apcm astfel încât $A \subseteq E(T)$

Amintim

Kruskal	**Prim**
	▪ s– vârful de start
▪ Inițial T= (V; ∅)	▪ Inițial T= ({s}; ∅)
▪ pentru i = 1, n-1	▪ pentru i = 1, n-1
➢ alege o muchie uv cu **cost minim** a.î. u,v sunt în **componente conexe diferite**	➢ alege o muchie uv cu **cost minim** a.î. $u \in V(T)$ și $v \notin V(T)$
	➢ $V(T) = V(T) \cup \{v\}$
➢ $E(T) = E(T) \cup uv$	➢ $E(T) = E(T) \cup uv$





Corectitudine Kruskal + Prim

Atât algoritmul lui Kruskal, cât și cel al lui Prim funcționează după următoarea schemă:

- $A = \emptyset$ (mulțimea muchiilor selectate în arborele construit)
- pentru i = 1, n−1 execută

  alege o muchie *e* astfel încât $A \cup \{e\} \subseteq$ apcm

  $A = A \cup \{e\}$
- returnează $T = (V, A)$

Corectitudine Kruskal + Prim

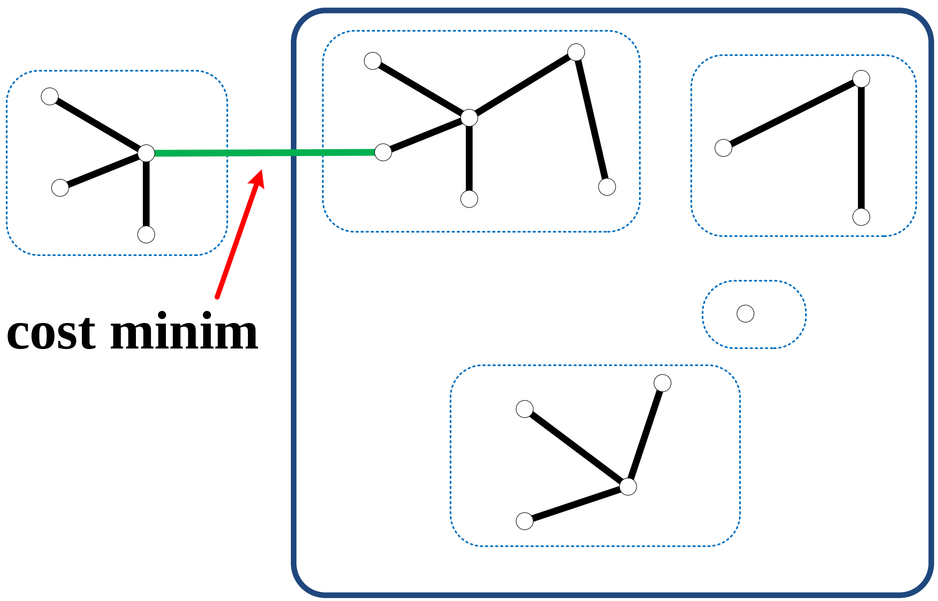
- vom demonstra un **criteriu de alegere a muchiei e** la un pas astfel încât:

$$\mathbf{A} \subseteq \text{apcm} \quad \Rightarrow \quad A \cup \{e\} \subseteq \text{apcm}$$

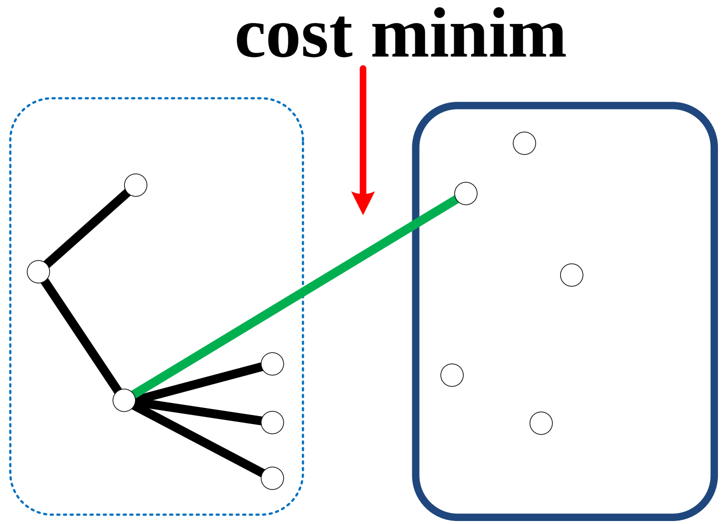
și

- **vom demonstra că algoritmii lui Kruskal și Prim aplică acest criteriu.**

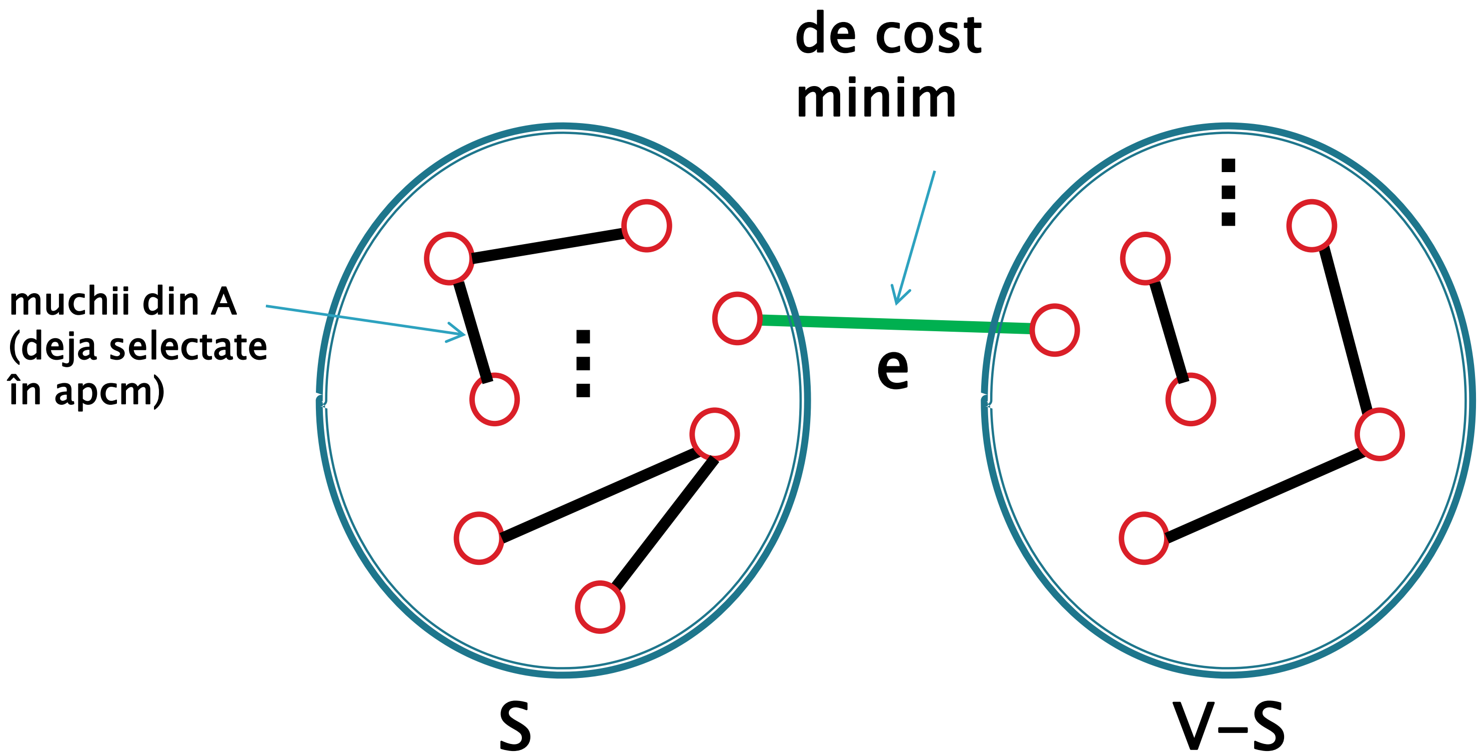
Kruskal



Prim



Corectitudine Kruskal + Prim



$A \subseteq apcm \quad \Rightarrow \quad A \cup \{e\} \subseteq apcm$

Corectitudine Kruskal + Prim

Fie G=(V,E, w) un graf conex ponderat

- **Propoziție.** Algoritmul Kruskal determină un apcm
- **Propoziție.** Algoritmul Prim determină un apcm