Laborator 6 - solutii

Exercitiul 1

- Fie X si Y iid de tipul $\text{Rad}(1/2)$. Fie $Z : \Omega \to \{-1,1\}^2, Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$. Calculati $\text{Cov}(X,Y)$. Determinati distributia lui Z.
- Fie $X, Y \sim \text{Rad}(1/2), Y = -X$. Calculati $\text{Cov}(X,Y), \text{Cor}(X,Y)$ si distributia lui $Z : \Omega \to \{-1,1\}^2, Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$.

Ce concluzii trageti?

Solutie:

- X si Y respecta distributia $\text{Rad}(1/2)$ este echivalent cu faptul ca $X(\omega) \in \{-1,1\}, \forall \omega \in \Omega$, si $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$.

  $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$. Variabila XY ia valorile -1 si 1, distribuite astfel:

  - $\mathbb{P}(XY = -1) = \mathbb{P}([X = -1 \cap Y = 1] \cup [X = 1 \cap Y = -1])$. Cele 2 evenimente sunt disjuncte, deci $\mathbb{P}(XY = -1) = \mathbb{P}([X = -1 \cap Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 1 \cap Y = -1])$. Pentru ca X si Y sunt independente, avem $\mathbb{P}(XY = -1) = \mathbb{P}(X = -1) \cdot \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
  - $\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}([X = -1 \cap Y = -1] \cup [X = 1 \cap Y = 1]) = \frac{1}{2}$ (se calculeaza analog).

  Deci, $\mathbb{E}[XY] = (-1) \cdot \mathbb{P}(XY = -1) + 1 \cdot \mathbb{P}(XY = 1) = 0$.

  $\mathbb{E}[X] = (-1) \cdot \mathbb{P}(X = -1) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = 0$ si analog $\mathbb{E}[Y] = 0$.

  In concluzie, $Cov(X,Y) = 0$.

  A determina distributia lui Z inseamna a calcula $\mathbb{P}((X,Y) = (a,b)) = \mathbb{P}(X = a, Y = b), \forall a, b, \in \{-1,1\}$. Valorile au fost calculate mai sus, adica $\mathbb{P}((X,Y) = (a,b)) = 1/4$, pentru $a, b \in \{-1,1\}$, 0 altfel.

- Procedam ca la punctul anterior, si anume calculam media v.a. XY care ia numai valoarea -1 (pentru ca $Y = -X$). Astfel, $\mathbb{P}(XY = -1) = \mathbb{P}([X = -1 \cap Y = 1] \cup [X = 1 \cap Y = -1]) = \mathbb{P}([X = -1 \cap Y = 1]) + \mathbb{P}([X = 1 \cap Y = -1])$. Cele 2 v.a. nu sunt independente deci nu putem sparge cele doua probabilitati in produse.

  Cand $X = -1$, Y automat ia valoarea 1 si cand $X = 1$, $Y = -1$. Astfel, $\mathbb{P}([X = -1 \cap Y = 1]) = \mathbb{P}(X = -1)$ si $\mathbb{P}([X = 1 \cap Y = -1]) = \mathbb{P}(X = 1)$, deci $\mathbb{P}(XY = -1) = 1$. Astfel, $\mathbb{E}[XY] = -1$.

  Deci, $Cov(XY) = -1$ ($E[X]$ si $E[Y]$ au fost calculate la pct anterior) si $Cor(XY) = \frac{-1}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$, unde σ_X si σ_Y sunt deviantele standard ale celor doua v.a.

  $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$. Variabila X^2 ia numai valoarea 1 cu probabilitate 1, deci $E[X^2] = 1$, iar $E[X] = 0$. Deci, $Var(X) = 1, Var(Y) = 1$, astfel $\sigma_X = 1, \sigma_Y = 1, Cor(X,Y) = -1$.

Corelatia arata daca cele doua v.a. variaza liniar si se observa ca, intr-adevar, uitandu-ne doar la corelatie (facand abstractie de faptul ca $Y = -X$), valoarea -1 confirma acest lucru. De asemenea, ea descrie o dependenta liniara $Y = aX + b$ in care Y descreste in momentul in care X creste. Puteam sa calculam corelatia stiind doar ca $Y = -X$ (fara $\mathbb{E}[XY], \sigma_X, \sigma_Y$), deoarece $Cor(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b, a > 0$ si $Cor(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b, a < 0$.

Exercitiul 2

Fie $X \sim \text{Unif}(-1, 1)$ si $Y = X^2$.

- Calculati $\text{Cov}(X, Y), \text{Cor}(X, Y)$.
- Verificati daca X si Y sunt independente.

Solutie:

- X si Y nu indeplinesc nicio relatie liniara deci trebuie sa calculam $Cor(X, Y)$ si $Cov(X, Y)$ (acestea nu pot lua valoarea 1, vezi rezolvarea Exercitiului 1, punctul 2). Calculam $\mathbb{E}[XY], \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \sigma_X, \sigma_Y$.

  Intrucat $X \sim \text{Unif}(-1, 1)$, stim ca X ia valori numai in intervalul $[-1, 1]$ si $X \sim 1dx$ (densitatea sa este functia p cu $p(x) = 1/(1 - (-1)) = 1/2, x \in [-1, 1], 0$ altfel).

  Calculam $\mathbb{E}[X] = \int_{-1}^{1} 1/2 \cdot x dx = \int_{-1}^{1} (x^2/2)' dx = 0$.
  Calculam $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2] = \int_{-1}^{1} 1/2 \cdot x^2 dx = 1/2 \cdot \int_{-1}^{1} (x^3/3)' dx = 1/2 \cdot 2/3 = 1/3$.
  Calculam $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^3] = \int_{-1}^{1} 1/2 \cdot x^3 dx = 1/2 \int_{-1}^{1} (x^4/4)' dx = 0$.
  Deci, $Cov(X, Y) = 0$, automat $Cor(X, Y) = 0$.
  Calculam $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[Y] = 1/3$, deci $\sigma_X = 1/\sqrt{3}$.
  Calculam $Var(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathbb{E}[X^4] - 1/9$. $\mathbb{E}[X^4] = \int_{-1}^{1} 1/2 \cdot x^4 dx = 1/2 \cdot \int_{-1}^{1} (x^5/5)' dx = 1/2 \cdot 2/5 = 1/5$. Astfel, $Var(Y) = 1/5 - 1/9 = 4/45$. Rezulta, $\sigma_Y = 2/3\sqrt{5}$.

- Verificam independenta a doua v.a. continue vazand daca $\mathbb{P}(X \in (a, b) \cap Y \in (c, d)) = \mathbb{P}(X \in (a, b)) \cdot \mathbb{P}(Y \in (c, d))$, pentru orice pereche de intervale $(a, b), (c, d)$.
  Intuitiv, faptul ca $Y = X^2$ ne zice ca cele doua nu sunt independente, insa $Cov(X, Y) = 0$. Cautam o pereche de intervale (a, b) si (c, d) asa incat sa nu existe $\omega \in \Omega$ cu $X(\omega) \in (a, b), Y(\omega) = X^2(\omega) \in (c, d)$ (obtinand astfel $\mathbb{P}(X \in (a, b) \cap Y \in (c, d)) = 0$) si $\mathbb{P}(X \in (a, b)) \neq 0, \mathbb{P}(Y \in (c, d)) \neq 0$.
  Pentru $(a, b) = (-1/2, 0), (c, d) = (1/2, 1)$, proprietatile de mai sus sunt indeplinite (se poate verifica usor ca $\mathbb{P}(X \in (-1/2, 0)) \neq 0, \mathbb{P}(Y \in (1/2, 1)) \neq 0$, iar pentru x asa incat $x \in (-1/2, 0)$, avem $x^2 \in (0, 1/4)$ care este disjunct cu $(1/2, 1)$). Deci, X si Y nu sunt independente.

Exercitiul 3

Un pacient asteapta un donator compatibil. Probabilitatea ca un donator sa fie compatibil este de 25%.

- Cat trebuie sa astepte, in medie, pacientul, pana apare primul donator compatibil?
- Care este probabilitatea ca pacientul sa gaseasca primul donator compatibil dupa cel putin 5 donatori?
- Care este probabilitatea ca pacientul sa mai nimereasca 3 donatori incompatibili stiind ca primii 7 donatori au fost incompatibili?

Solutie:

Deoarece masuram numarul de donatori incompatibili pana la primul donator compatibil si nu timpul scurs (in ani sau luni sau saptamani) pana la prima compatibilitate, avem de-a face cu o v.a. Geometrica X care numara donatorii incompatibili pana la primul succes. Avem ca parametrul p al unui succes este $p = 1/4$, deci $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^n \cdot p = (3/4)^n \cdot 1/4$.

- Stim ca media unei v.a. Geometrice este $E[X] = 1/p$. Deci, in medie, dupa 4 donatori incompatibili un pacient gaseste donatorul compatibil.
- Avem de calculat $\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5) = 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \cdots + \mathbb{P}(X = 5))$ ($\mathbb{P}(X > 5) = \sum_{i=5}^{\infty} \mathbb{P}(X = i)$ deci pentru simplitate am calculat cu complementara). Astfel, $\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \sum_{i=0}^{5}(3/4)^i \cdot (1/4) = 1 - 1/4 \cdot \sum_{i=0}^{5}(3/4)^i = 1 - 1/4 \cdot \frac{1-(3/4)^6}{1-(3/4)} = (3/4)^6$. Observam ca aceasta probabilitate este foarte apropiata de 0, valoare valida intrucat media este de 4 donatori.
- Avem de calculat $\mathbb{P}(X > 3 | X > 7)$. Putem calcula folosind definitia probabilitatii conditionate insa stim ca o v.a. Geometrica nu are memorie (folosind definitia se ajunge la acest lucru, oricum). Deci, avem de fapt de calculat $\mathbb{P}(X > 4) = (3/4)^4$ (analog cu punctul anterior).

Exercitiul 4

Esti la un examen care contine o grila cu 20 de intrebari. Fiecare intrebare are 4 solutii. Stii raspunsul corect la 10 intrebari dar nu stii la restul de 10 asa ca la celelalte raspunzi la intamplare. Punctajul tau X este numarul total de raspunsuri corecte. Determina distributia lui X. Calculeaza $\mathbb{P}(X > 15)$.

Solutie:

V.a. X ia valori in $\{10, \dots 20\}$. Vrem sa stim $\mathbb{P}(X = k), k \in \{10, \dots 20\}$.

V.a. $Y = X - 10$ este o v.a. Binomiala de parametri $p = 1/4$ (sansa unei reusite, probabilitatea ca sa pice avers) si $n = 10$ (numarul exact de aruncari), deoarece evenimentul $Y = k$ este echivalent cu k raspunsuri corecte din cele 10, un raspuns corect avand probabilitatea de 1/4 pentru ca atunci cand alegi la intamplare unul din cele 4 raspunsuri este ca si cum ai arunca cu o moneda cu probabilitatea aversului 1/4. Deci, $\mathbb{P}(Y = k) = \binom{10}{k}(1/4)^k \cdot (3/4)^{10-k}$.
$\mathbb{P}(X > 15) = \mathbb{P}(Y > 5) = \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i}(1/4)^i \cdot (3/4)^{10-i}$.