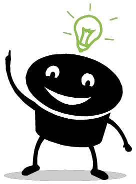
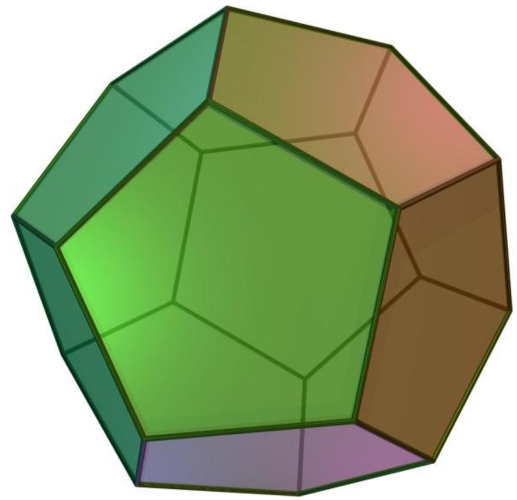
Grafuri planare

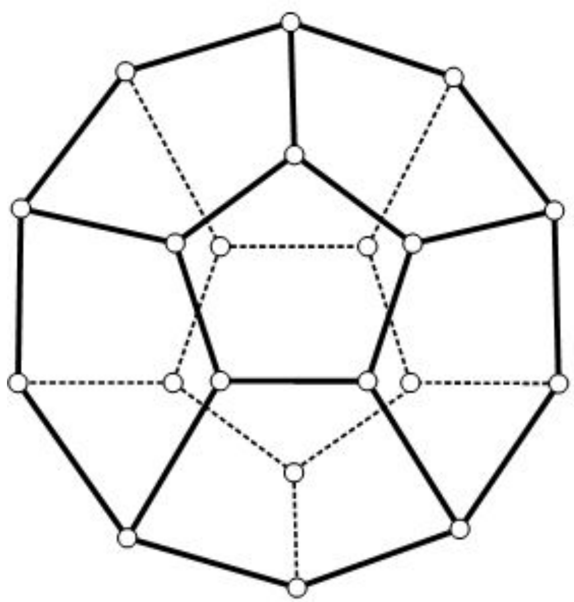
Graf planar

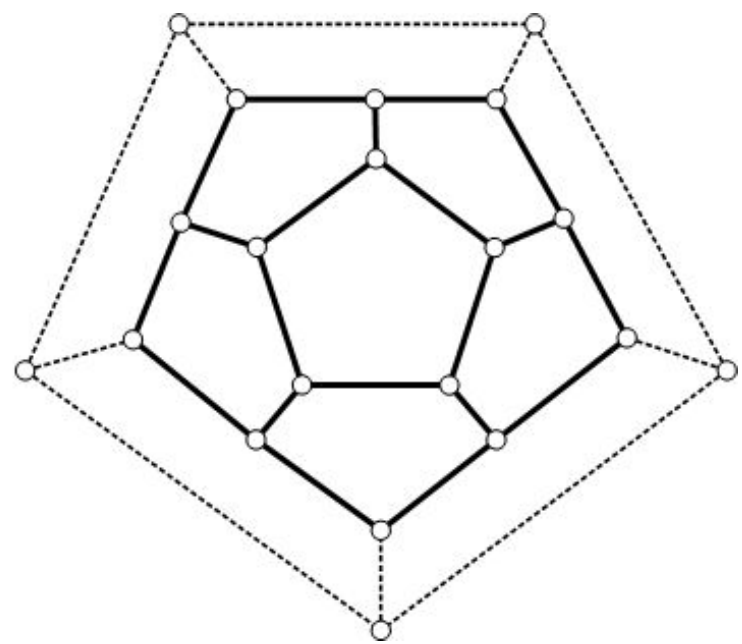


- Amintiri din primul curs

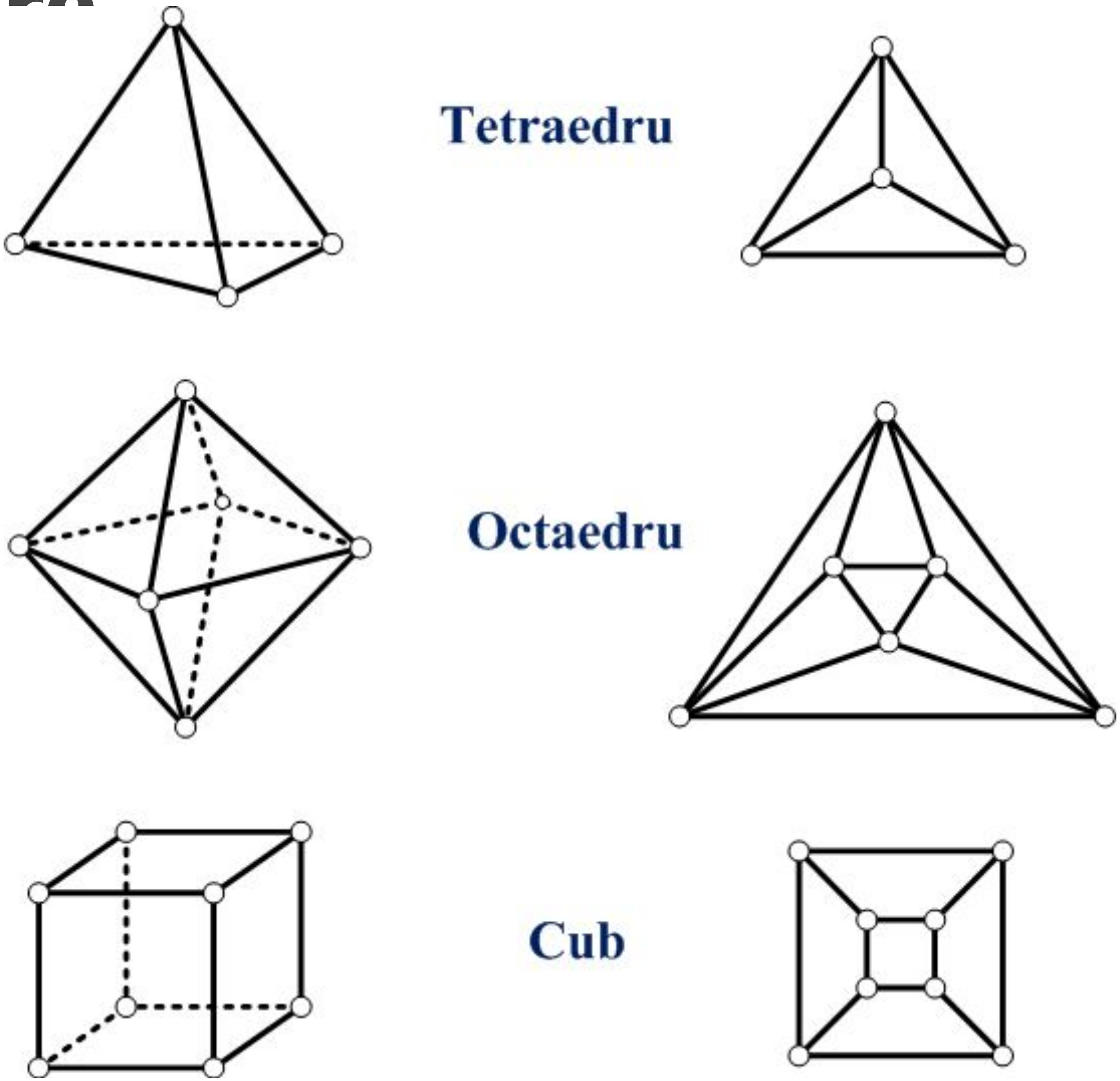
Dodecaedrul



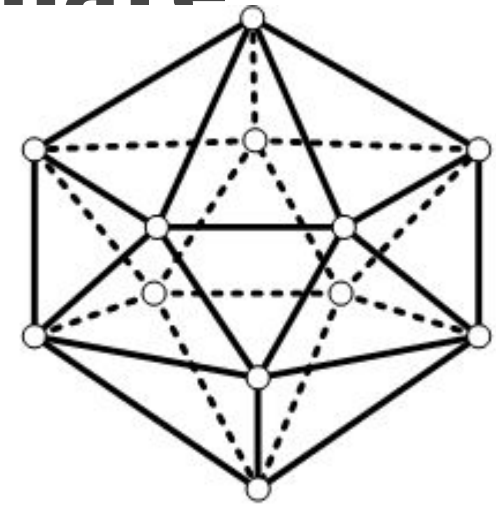




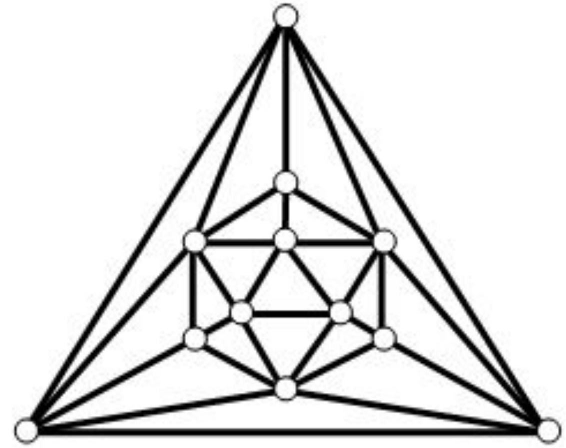
Corpuri platonice – grafuri planare

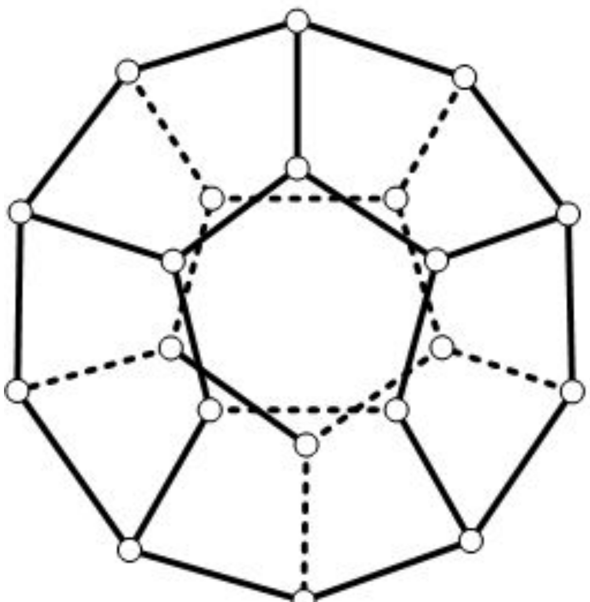


Corpuri platonice – grafuri planare

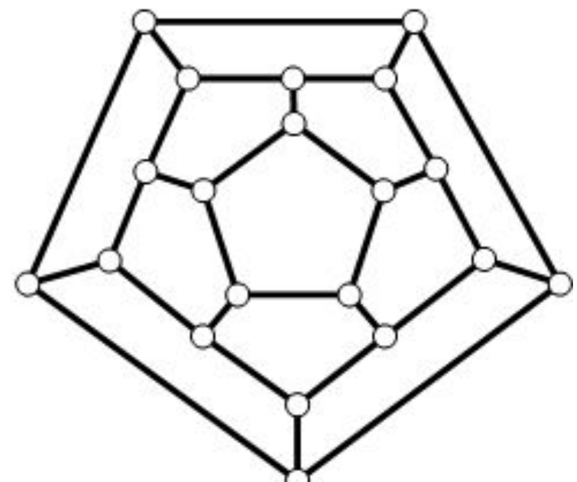


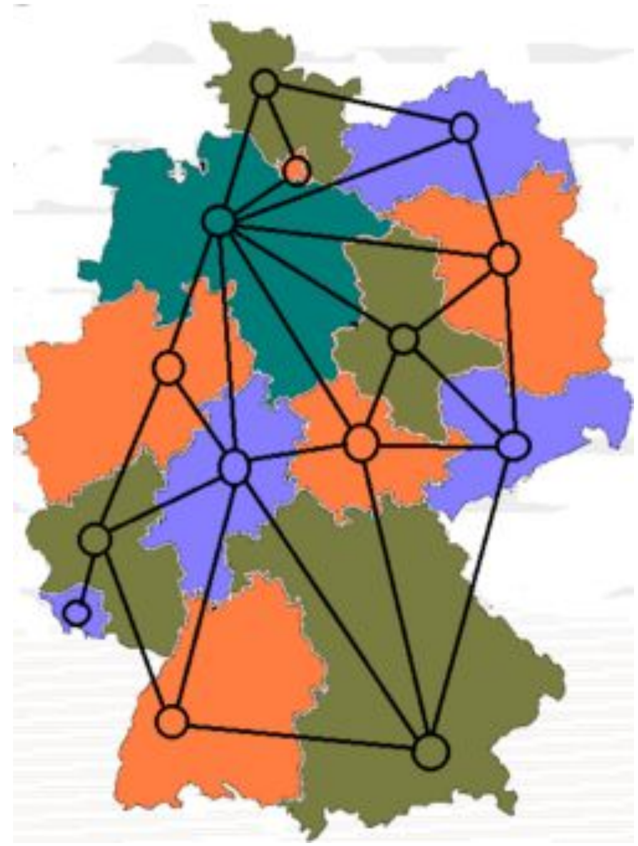
Icosaedru



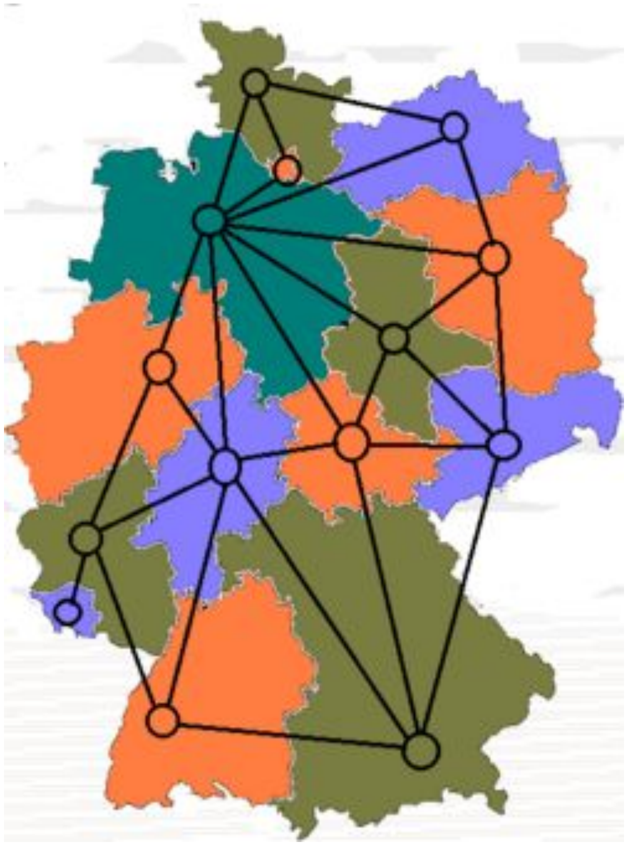


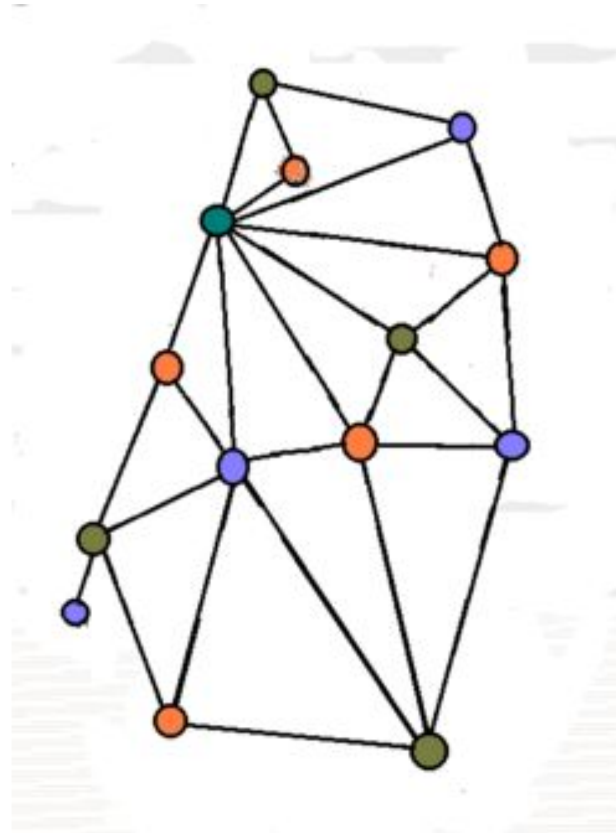
Dodecaedru





http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem



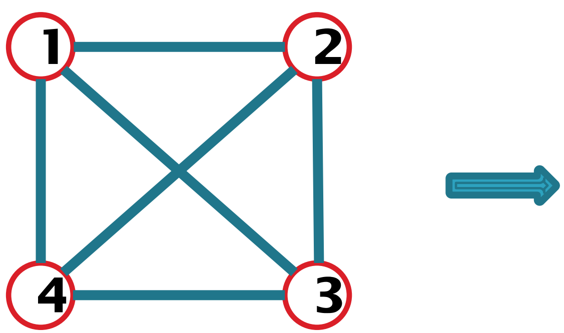


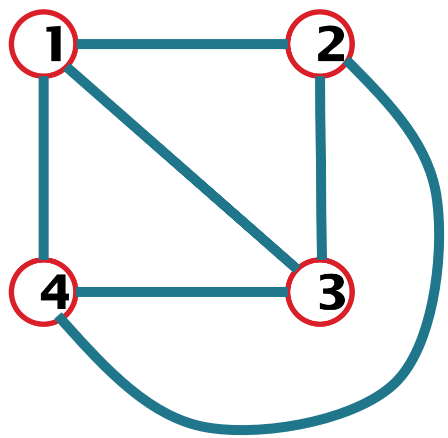
http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem

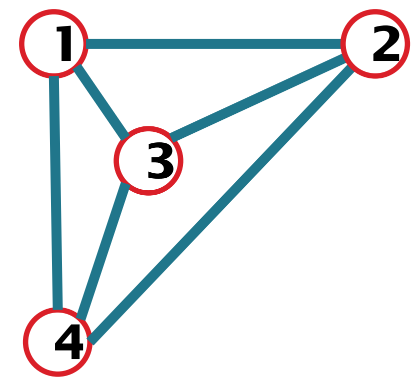
Graf planar

- G = (V, E) graf neorientat s.n. **planar** ⇔ admite o reprezentare în plan a.î. **muchiilor** le corespund segmente de curbe continue care **nu se intersectează în interior** unele pe altele

- O astfel de reprezentare s.n **hartă** a lui G







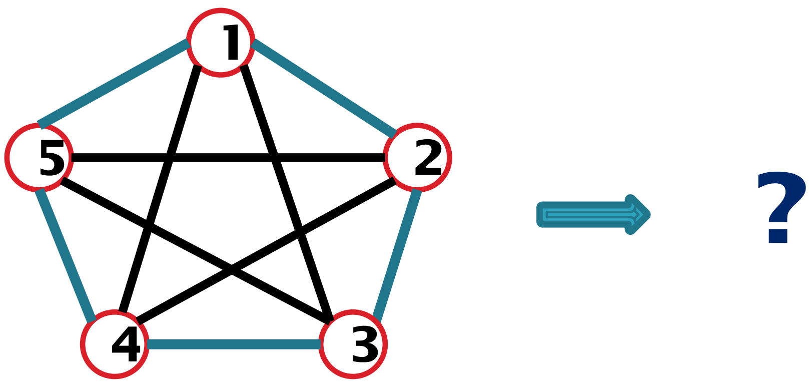
G ~ K_4

hărți

Graf planar

- G = (V, E) graf neorientat s.n. **planar** ⇔ admite o reprezentare în plan a.î. **muchiilor** le corespund segmente de curbe continue care **nu se intersectează în interior** unele pe altele

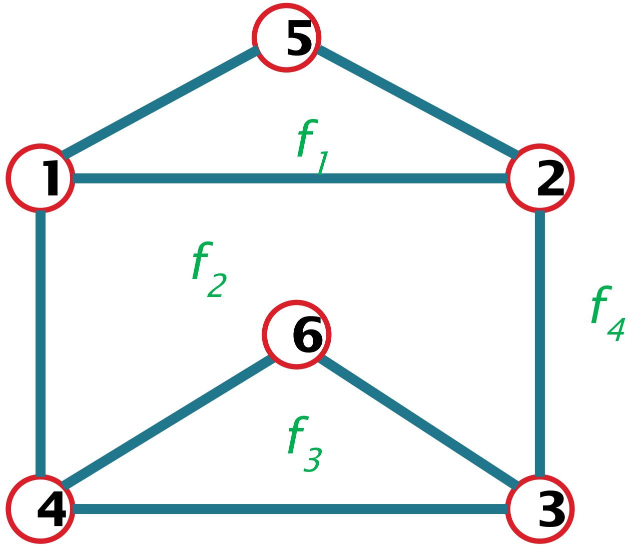
- O astfel de reprezentare s.n **hartă** a lui G



G ~ K_5

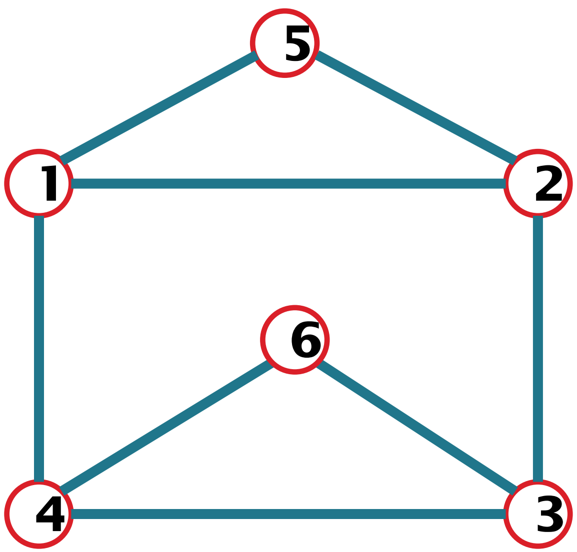
Graf planar

- Fie G = (V, E) graf planar, M o hartă a sa
- M induce o împărțire a planului într-o mulțime **F** de părți convexe numite **fețe**
- Una dintre acestea este **fața infinită (exterioară)**

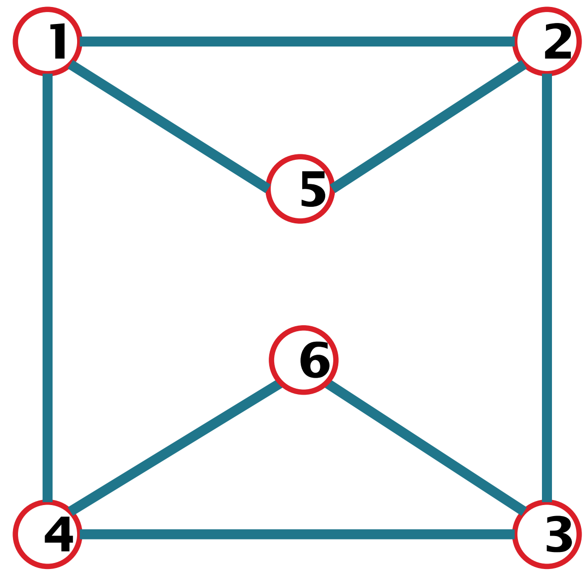


Graf planar

- M = (V, E, F) **hartă**
- Pentru o față f ∈ F definim
  - **d_M(f) = gradul feței f =** numărul muchiilor lanțului închis (**frontierei**) care delimitează f (*câte muchii sunt parcurse atunci când traversăm frontiera*)

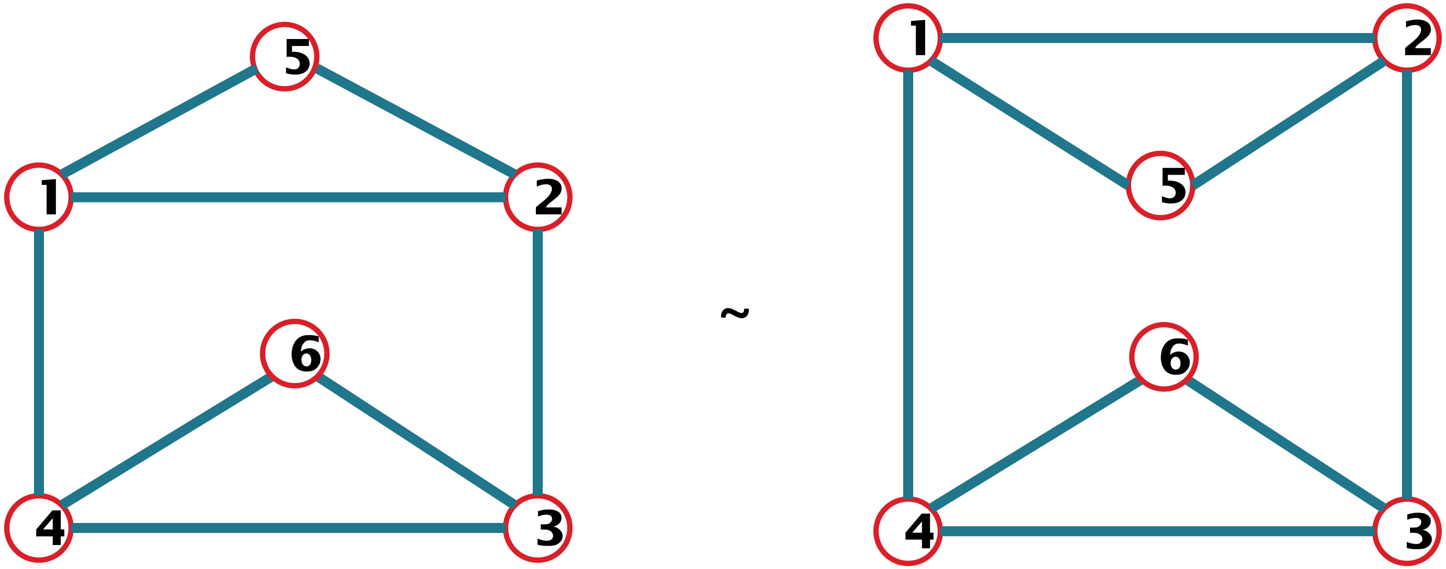


~



Graf planar

Observație: Hărți diferite ale aceluiași graf pot avea **secvența gradelor fețelor diferită**



Poate să difere și numărul de fețe (între 2 hărți ale aceluiași graf)?

Graf planar

- M = (V, E, F) hartă

  - **Avem**

$$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2|E|$$

Graf planar

- **Teorema poliedrală a lui EULER**

Fie G=(V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Graf planar

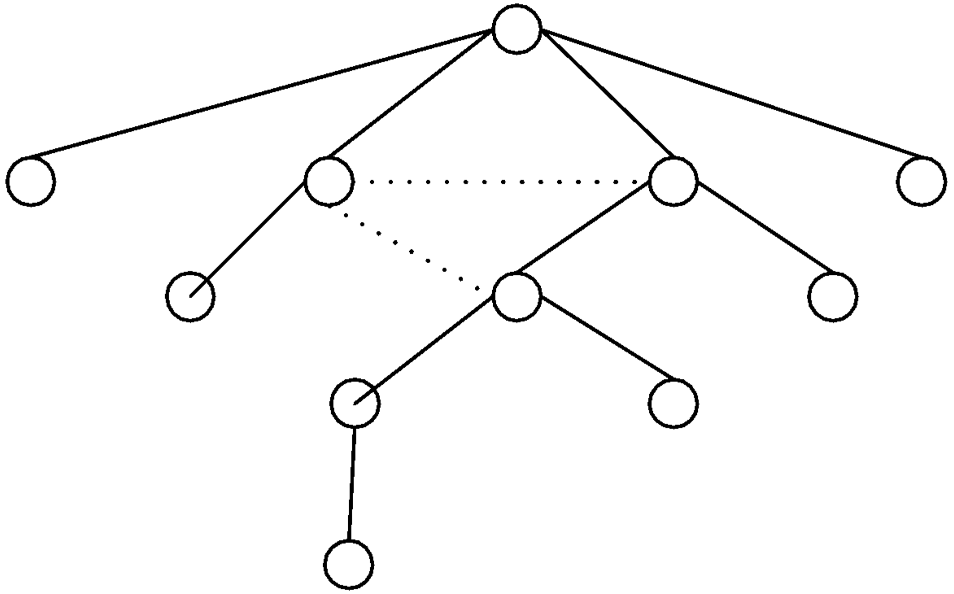
- **Teorema poliedrală a lui EULER**

Fie G=(V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Inducție

- Arbore parțial + muchii



Graf planar

- **Teorema poliedrală a lui EULER**

Fie G=(V, E) un graf planar **conex** și M = (V, E, F) o hartă a lui. Are loc relația

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

- **Consecință**

Orice hartă M a lui G are 2 - |V| + |E| fețe

Graf planar

- **Proprietăți**

Fie G=(V, E) un graf planar conex cu n=|V|>2 și m=|E|.

Atunci:

a) $\mathbf{m \le 3n - 6}$

b) $\mathbf{\exists\ x \in V}$ **cu** $\mathbf{d(x) \le 5}$**.**

Graf planar

- **Proprietăți**

Fie G=(V, E) un graf planar conex cu n=|V|>2 și m=|E|.

Atunci:

a) m ≤ 3n – 6

b) ∃ x ∈ V cu d(x) ≤ 5.

Demonstrație

$$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2|E|$$

$$d_M(f) \geq 3$$

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Graf planar

- **Proprietăți**

Fie G=(V, E) un graf planar conex cu n=|V|>2 și m=|E|.

Atunci:

a) m ≤ 3n – 6

b) ∃ x ∈ V cu d(x) ≤ 5.

Demonstrație

$$\sum_{f \in F} d_M(f) = 2|E|$$

$$d_M(f) \geq 3$$

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

|V| - |E| + |2E|/3 <= 2

3|V| - |E| <= 6 -> a

Graf planar

- **Proprietăți**

 Fie G=(V, E) un graf planar conex cu n=|V|>2 și m=|E|.

Atunci:

 a) $m \leq 3n - 6$

 b) $\exists\ x \in V$ cu $d(x) \leq 5$. (b ca exercitiu)

- **Consecință**

 K_5 nu este grafuri planar (exercitiu la seminar)

Graf planar

- **Proprietăți (temă)**

  Fie G=(V, E) un graf planar conex **bipartit** cu $n=|V|>2$ și $m=|E|$. Atunci:

  a) $m \le 2n - 4$

  b) $\exists\ x \in V$ cu $d(x) \le 3$.

- **Consecință**

  $K_{3,3}$ nu este grafuri planar

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 –colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

```
colorare(G)
    daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
culori distincte din {1,…,6}
```

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

```
colorare(G)
    daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
culori distincte din {1,…,6}
    altfel
        alege x cu d(x) ≤ 5
```

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

```
colorare(G)
    daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
culori distincte din {1,…,6}
    altfel
        alege x cu d(x) ≤ 5
        colorare(G-x)
```

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

```
 colorare(G)
     daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
culori distincte din {1,…,6}
     altfel
          alege x cu d(x) ≤ 5
          colorare(G-x)
                         colorează x cu o culoare din {1,…,6}
          diferită de culorile vecinilor
```

Graf planar

- **Teorema celor 6 culori**

  Orice graf planar conex este 6 -colorabil.

- **Algoritm de colorare a unui graf planar cu 6 culori**

```
colorare(G)
    daca |V(G)|≤ 6 atunci coloreaza varfurile cu
culori distincte din {1,…,6}
    altfel
        alege x cu d(x) ≤ 5
        colorare(G-x)
                  colorează x cu o culoare din {1,…,6}
        diferită de culorile vecinilor
```

  - **Sugestie implementare –** determinarea iterativă a ordinii în care sunt colorate vârfurile (similar parcurgere BF, sortare topologică)

Graf planar

- **Teorema celor 5 culori**

  Orice graf planar conex este 5 –colorabil.

- **Suplimentar – Temă (+ algoritm de 5-colorare)**