Laborator 3 - solutii

Exercitiul 1

Dati exemplu de 2 v.a X si Y cu aceeasi distributie dar $P(X = Y) = 0$.
Solutie:
Fie $X : \Omega \longrightarrow \{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2, \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$;
Fie $Y : \Omega \longrightarrow \{-1, 1\}$, Y = -X; $\mathbb{P}(Y = 1) = 1/2, \mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$
$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X = 0) = 0$;

Exercitiul 2

Fie $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ si $\lambda > 0$. Definim $X = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(U)$. Atunci $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.
Solutie:
$P(X \in (a, b)) = P(\ln(U) \in (-\lambda \cdot b, -\lambda \cdot a)) = P(U \in (e^{-\lambda \cdot b}, e^{-\lambda \cdot a})) = e^{-\lambda \cdot a} - e^{-\lambda \cdot b} = \int_a^b \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\, dx$.

Exercitiul 3

Fie $X \sim \exp(\lambda)$. Aratati ca $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$.

Solutie:
$X \sim \exp(\lambda) \Leftrightarrow X \sim p \cdot dx,\ p(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$. Deci, $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot p(x)\, dx = \int_0^\infty \lambda x \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty x \cdot (-e^{-\lambda x})'\, dx = -\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-\lambda x} + 0 \cdot e^0 + \int_0^\infty e^{-\lambda \cdot x}\, dx = -\lim_{x\to\infty} -1/\lambda \cdot e^{-\lambda x} + \int_0^\infty e^{-\lambda \cdot x}\, dx$ (aplicam L'Hospital). Deci, $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty 1/\lambda \cdot (-e^{-\lambda \cdot x})'\, dx = 1/\lambda \cdot (-\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} + 1) = 1/\lambda$.

Exercitiul 4

In medie, o masina sufera prima avarie la motor in 5 ani. Care e probabilitatea ca o masina sa aiba prima defectiune la motor:

- In primii 2 ani?
- In mai putin de 2 ani stiind ca in primii 5 ani nu a avut nicio defectiune?

Solutie:

- Timpul de asteptare pana apare prima defectiune este modelat de o variabila aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}_+^*$ Exponentiala de parametru λ. Stim ca media este 5 deci $\lambda = 1/5$.

Vrem sa calculam $\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X \in (0,2)) = \int_0^2 \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\, dx = \int_0^2 (-e^{-\lambda \cdot x})'\, dx = 1 - e^{-2\lambda} = 1 - e^{-2/5}$.

- $\mathbb{P}(X < 7 | X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X > 7 | X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X > 2) = \mathbb{P}(X < 2) = 1 - e^{-2/5}$.

Exercitiul 5

Probabilitatea sa asteptam mai mult de 10 minute la o coada este de 1/2. Stiind ca am asteptat deja 15,3 minute, care este probabilitatea sa mai asteptam cel putin inca 1 minut?

Solutie:
Timpul de asteptare (in minute) pana suntem serviti este modelat de o variabila aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}_+^*$ Exponentiala de parametru λ. Stim ca $\mathbb{P}(X > 10) = 1/2 = \int_{10}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\, dx = \int_{10}^{\infty} (-e^{-\lambda \cdot x})'\, dx = 0 + e^{-\lambda \cdot 10}$. Deci, $\lambda = \ln(2)/10$.
Calculam $\mathbb{P}(X > 16,3 | X > 15,3) = \mathbb{P}(X > 1) = \int_1^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\, dx = \int_1^{\infty} (-e^{-\lambda \cdot x})'\, dx = 0 + e^{-\lambda} = e^{-ln(2^{1/10})} = 2^{-1/10}$.

Exercitiul 6

$X \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow [X] + 1 \sim \text{geom}(1 - e^{-\lambda})$, unde $[x]$ denota partea intreaga a lui x.

Solutie:
Notam $Y : \Omega \to \mathbb{N}^*, Y(\omega) = [X(\omega)] + 1$. Pentru ca Y este o v.a. discreta, determinarea distributiei sale consta in calculul $\mathbb{P}(Y = k)$, pentru $k \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}([X] + 1 = k) = \mathbb{P}(k - 1 \leq X < k) = \int_{k-1}^{k} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\, dx = \int_{k-1}^{k} (-e^{-\lambda \cdot x})'\, dx = e^{-\lambda \cdot (k-1)} - e^{-\lambda \cdot k} = e^{-\lambda \cdot (k-1)} \cdot (1 - e^{-\lambda})$.
Asadar, Y este o v.a. geometrica de parametru $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Exercitiul 7

Daca $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ si $\alpha > 0$, ce distributie are $Y = \alpha \cdot X$?

Solutie:
Pentru a determina distributia unei v.a. cu valori pe $\mathbb{R}$, este suficient sa calculam functia sa de repartitie, intrucat aceasta determina in mod unic functia de distributie $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1], \mu(M) = \mathbb{P}(Y \in M)$, pentru orice $\mu \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, unde $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ reprezinta $\sigma-$algebra boreliana.
Determinam $\mathbb{P}(Y < x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Avem 2 cazuri:

- $x < 0$. Atunci $\mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}(\alpha \cdot X < x) = \mathbb{P}(X < x/\alpha) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$. Stim ca $p(t) = 0$, pentru $t < 0$, asadar $\mathbb{P}(Y < x) = 0$.

- $x > 0$. Avem $\mathbb{P}(Y < x) = \mathbb{P}(X < x/\alpha) = \mathbb{P}(X \in (0, x/\alpha)) = \int_0^{x/\alpha} p(t)\,dt = \int_0^{x/\alpha} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}\,dt = \int_0^{x/\alpha} (-e^{-\lambda \cdot t})'\,dt = 1 - e^{-\lambda \cdot (x/\alpha)}$.

In concluzie, Y este o v.a. Exponentiala de parametru λ/α.

Exercitiul 8

Timpul de asteptare pana apare un autobuz este in medie de 5 minute si pentru un tramvai este de 10 minute. Care este distributia timpului de asteptare pana apare un autobuz sau tramvai stiind ca cele 2 circula independent unul fata de celalalt?

Solutie:
Timpul de asteptare in minute pana apare un mijloc de transport este modelat de cate o v.a. Exponentiala.
Notam timpul de asteptare pana vine autobuzul cu v.a. X_1 si tramvaiul cu X_2. Stim ca $\mathbb{E}[X_1] = 1/\lambda_1 = 5$ si $\mathbb{E}[X_2] = 1/\lambda_2 = 10$. Asadar, $\lambda_1 = 1/5, \lambda_2 = 1/10$.
Timpul de asteptare pana apare primul mijloc de transport este reprezentat de v.a.
$Y : \Omega \to \mathbb{R}_+^*, Y(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega))$. Stim ca este o v.a. deoarece este o compunere de 2 functii masurabile: $Y = S \circ T$, unde $T : \Omega \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, S : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, T(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega)), S(\omega_1, \omega_2) = \min(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 + \omega_2 - |\omega_1 - \omega_2|)/2$ (functia modul este continua).
Calculam $\mathbb{P}(Y < x)$, pentru un $x \in \mathbb{R}$ oarecare. $\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) < x) =$
$= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x) = 1 - \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 > x])$.
Stim ca X_1 si X_2 sunt 2 v.a. independente, deci $\mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 > x]) =$
$= \mathbb{P}(X_1 > x) \cdot \mathbb{P}(X_2 > x)$.
Asadar, $\mathbb{P}(Y < x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x) \cdot \mathbb{P}(X_2 > x) = 1 - \int_x^{\infty} p_1(t)\,dt \cdot \int_x^{\infty} p_2(t)\,dt$.

- Daca $x < 0$, atunci $p_1(t) = p_2(t) = 0$ pentru orice $t < x$.

- $1 - \int_x^{\infty} \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t}\,dt \cdot \int_x^{\infty} \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t}\,dt = 1 - e^{\lambda_1 \cdot x} \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} = 1 - e^{(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x}$.

In concluzie, Y este o v.a. Exponentiala de parametru $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exercitiul 9

Fie $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Calculati $\mathrm{Var}(X)$.

Solutie:
$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.
Stim (Exercitiul 3) ca $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$. Calculam $\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot p(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,dx = \int_0^\infty x^2 \cdot (-e^{-\lambda \cdot x})'\,dx = -\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-\lambda \cdot x} + 0 + 2\int_0^\infty x \cdot e^{-\lambda \cdot x}\,dx = 2/\lambda^2$ (stim cat este integrala deoarece este exact $\mathbb{E}[X]$).
Deci, $\mathrm{Var}(X) = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2$.

Exercitiul 10

Care este distributia lui $Z = X^2$ daca $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Solutie:
Determinam functia de repartitie: $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z < x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{P}(Z < x) = \mathbb{P}(X^2 < x)$. Daca $x < 0$, atunci $\mathbb{P}(Z < x) = 0$, iar daca $x \geq 0$, avem $\mathbb{P}(Z < x) = \mathbb{P}(X \in (-\sqrt{x}, \sqrt{x})) = \mathbb{P}(X \in (-\sqrt{x}, 0]) + \mathbb{P}(X \in (0, \sqrt{x})) = \mathbb{P}(X \in (0, \sqrt{x}))$ (pentru ca stim ca $\mathbb{P}(X < 0) = 0$ daca X este Exponentiala).
Asadar, $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z < x) = \int_0^{\sqrt{x}} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}$,pentru $x > 0$ si 0 in rest deci densitatea este $p(x) = F'(x) = \lambda \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\lambda\sqrt{x}}$, pentru $x > 0$, 0 in rest.

Exercitiul 11

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \beta \cdot X \sim N(\beta \cdot \mu, \sigma^2 \cdot \beta^2)$.

Solutie:

Determinam functia de repartitie: $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z < x), \forall x \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{P}(Z < x) = \mathbb{P}(\beta X < x) = \mathbb{P}(X < x/\beta) = \int_{-\infty}^{x/\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$.
Facem schimbarea de variabila $s = t/\beta, ds = dt/\beta$.
Avem $\mathbb{P}(Z < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(s/\beta-\mu)^2}{2\sigma^2}} 1/\beta ds = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\beta^2}} \cdot e^{-\frac{(s-\beta\mu)^2}{2\sigma^2\beta^2}}\,ds$. Deci, $Z = \beta X \sim N(\beta\mu, \sigma^2\beta^2)$.