# Tema nr. 1

1. Să se găsească cel mai mic număr pozitiv $u > 0$, de forma $u = 10^{-m}$, astfel ca:
$$1.0 +_c u \neq 1.0$$
unde prin $+_c$ am notat operaţia de adunare efectuată de calculator. Numărul $u$ poartă numele de *precizia maşină*.

2. Operaţia $+_c$ este *neasociativă*: fie numerele reale $a = 1.0$, $b = u/10$, $c = u/10$, unde $u$ este precizia maşină calculată anterior. Să se verifice că operaţia de adunare efectuată de calculator nu este asociativă, i.e.:
$$(a +_c b) +_c c \neq a +_c (b +_c c).$$
Găsiţi un exemplu pentru care operaţia $\times_c$ este neasociativă.

3. **Aproximarea funcţiei** tan **folosind fracţiile continue**

O fracţie continuă are următoarea formă:
$$f = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \cfrac{a_5}{b_5 + \cdots}}}}}$$
sau, pentru economie de spaţiu, se preferă notaţia:
$$f = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\ \frac{a_2}{b_2 +}\ \frac{a_3}{b_3 +}\ \frac{a_4}{b_4 +}\ \frac{a_5}{b_5 +}\ \cdots$$
În formulele de mai sus şirurile $a_n$ şi $b_n$ pot fi funcţii de $x$.

Funcţia tan poate fi reprezentată ca fracţie contiună astfel:
$$\tan x = \frac{x}{1 -}\ \frac{x^2}{3 -}\ \frac{x^2}{5 -}\ \frac{x^2}{7 -} \cdots$$
Cum se aproximează o fracţie continuă?
$$f \approx f_n = \frac{A_n}{B_n}$$

unde $A_n$ şi $B_n$ se calculează după recurenţele:

$$\begin{array}{l} A_{-1} = 1 \quad , \quad A_0 = b_0 \\ A_j = b_j A_{j-1} + a_j A_{j-2} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} B_{-1} = 0 \quad , \quad B_0 = 1 \\ B_j = b_j B_{j-1} + a_j B_{j-2} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Cea mai bună metodă de a evalua fracţii continue pare să fie *metoda lui Lentz modificată.* Fie:

$$C_j = \frac{A_j}{A_{j-1}} \quad , \quad D_j = \frac{B_{j-1}}{B_j}$$

vom calcula $f_j$ folosind formula:

$$f_j = C_j D_j f_{j-1}.$$

Pentru $C_j$ şi $D_j$ avem următoarele recurenţe:

$$C_j = b_j + \frac{a_j}{C_{j-1}} \quad ,$$

$$D_j = \frac{1}{b_j + a_j D_{j-1}} \quad .$$

Valorile iniţiale de la care pornesc recurenţele de mai sus sunt:

$$C_0 = b_0 \quad , \quad D_0 = 0 \quad , \quad f_0 = b_0.$$

Pentru a evita împărţirile cu 0 în calculele de mai sus, numărătorii care sunt 0 vor fi înlocuiţi cu o valoare foarte mică ($mic = 10^{-30}$). Vom calcula $f_j$ atâta timp cât diferenţa între doi termeni consecutivi ai şirului $f$ este, în valoare absolută, mai mare decât un $\epsilon = 10^{-p}$ dat. Constanta $\epsilon$ reprezintă precizia cu care vrem să aproximăm funcţia tan şi este un număr citit de la tastatură şi/sau este parametru de intrare al funcţiei tan :

double tan(double $x$, double $\epsilon$).

Cu aceste precizări, *algoritmul lui Lentz modificat* are următoarea structură:

$$
\begin{array}{l}
f_0 = b_0 \ ; \ mic = 10^{-20} \ ; \\
\textbf{if } (f_0 = 0) \textbf{ then } f_0 = mic \ ; \\
C_0 = f_0 \ ; \\
D_0 = 0 \ ; \\
j = 1 \ ; \\
\textbf{do} \\
\quad D_j = b_j + a_j D_{j-1} \ ; \\
\quad \textbf{if } (D_j = 0) \textbf{ then } D_j = mic \ ; \\
\quad C_j = b_j + \dfrac{a_j}{C_{j-1}} \ ; \\
\quad \textbf{if } (C_j = 0) \textbf{ then } C_j = mic \ ; \\
\quad D_j = \dfrac{1}{D_j} \ ; \\
\quad \Delta_j = C_j \, D_j \ ; \\
\quad f_j = \Delta_j \, f_{j-1} \ ; \\
\quad j = j + 1 \ ; \\
\textbf{while } (|\Delta_j - 1| \geq \epsilon) \ ;
\end{array}
$$

În algoritmul de mai sus, pentru calculul recurenţelor pentru $C_j$, $D_j$ $\Delta_j$ şi $f_j$ nu este necesară alocarea unor vectori ci doar a unei singure variabile pentru fiecare şir în parte ($C$, $D$, $\Delta$, $f$), variabilă care este actualizată la fiecare pas.

Să se aplice algoritmul lui Lentz modificat pentru aproximarea funcţiei tan, pentru argumente $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pentru valori ale lui $x$ care nu sunt în intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se foloseşte periodicitatea funcţiei tangenta (se face o împărţire cu rest) şi antisimetria, $\tan(x) = -\tan(-x)$. Valorile lui $x$ multiplu de $\frac{\pi}{2}$ trebuie tratate separat.

Să se compare valoarea funcţiei tangenta obţinută prin procedura de mai sus cu valoarea furnizată de tangenta implementată în biblioteca matematică a limbajului de programare pe care îl folosiţi.

4. Proceduri de citire a vectorilor şi a matricilor de la tastatură, din fişier şi automat (folosind funcţia *rand*) şi proceduri de afişare a vectorilor şi a matricilor.