Logică matematică și computațională
Cursul V

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

1. Relații de ordine

Relații de ordine

- În acest curs vom studia relațiile de ordine pe o mulțime.

Amintim:

Definiție

Fie A o mulțime. Se numește *relație binară pe A* o submulțime R a produsului cartezian $A \times A$. Pentru orice $a, b \in A$, faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează cu aRb și se citește: *a este în relația R cu b*.

Notație

Pentru orice mulțime A, produsul cartezian $A \times A$ se mai notează cu A^2.

- Așadar, o relație binară pe o mulțime A este orice $R \subseteq A^2$.
- Relațiile binare pe o mulțime sunt mulțimi, așadar li se pot aplica operațiile obișnuite cu mulțimi: reuniunea, intersecția, diferența etc., pot fi puse în relațiile $\subseteq$, $\subsetneq$ etc..

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Amintim:

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie A o mulțime și $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se zice:

- *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa
- *tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc, atunci aRc
- *antisimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb și bRa, atunci $a = b$
- *(relație de) preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă
- *(relație de) ordine (parțială)* ddacă e o preodine antisimetrică, i. e. o relație reflexivă, tranzitivă și antisimetrică
- *(relație de) ordine totală (sau (relație de) ordine liniară)* ddacă e relație de ordine și, pentru orice $a, b \in A$, are loc aRb sau bRa
- *ireflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, $(a, a) \notin R$
- *asimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci $(b, a) \notin R$
- *(relație de) ordine strictă* ddacă este tranzitivă și asimetrică (prin urmare și ireflexivă, pentru că se arată foarte ușor că asimetria implică ireflexivitatea – **temă pentru acasă**)

Ordine versus ordine strictă

Amintim:

Definiție

Pentru orice mulțime A, se definește *diagonala lui A*: $\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A^2$.

Remarcă

Pentru orice mulțime A, Δ_A este relația de egalitate pe A, i. e., oricare ar fi $a, b \in A$, $a\Delta_A b$ ddacă $a = b$.

Remarcă

Pentru orice mulțime A și orice $R \subseteq A^2$:

- R este **reflexivă** ddacă $\Delta_A \subseteq R$
- R este **ireflexivă** ddacă $\Delta_A \cap R = \emptyset$

Prin urmare, dacă $A \neq \emptyset$, atunci $\Delta_A \neq \emptyset$, și deci nu există nicio relație binară pe A care să fie și reflexivă, și ireflexivă.
În consecință, dacă A e nevidă, atunci nu există nicio relație binară pe A care să fie și relație de ordine, și relație de ordine strictă.

Ordine versus ordine strictă

Exercițiu (temă)

Fie A o mulțime, O mulțimea relațiilor de ordine pe A și S mulțimea relațiilor de ordine strictă pe A.
Să se demonstreze că aplicațiile $\varphi : O \rightarrow S$ și $\psi : S \rightarrow O$, definite prin:

- pentru orice $\leq \in O$, $\varphi(\leq) = \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$,
- pentru orice $< \in S$, $\psi(<) = < \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$,

sunt:

- corect definite, i. e. într-adevăr $Im(\varphi) \subseteq S$ și $Im(\psi) \subseteq O$, i. e.:
    - scăzând din orice relație de ordine pe A diagonala lui A, se obține o relație de ordine strictă pe A
    - reunind orice relație de ordine strictă pe A cu diagonala lui A, se obține o relație de ordine pe A
- inverse una alteia, i. e. $\psi \circ \varphi = id_O$ și $\varphi \circ \psi = id_S$ (acest din urmă fapt poate fi verificat foarte ușor pornind de la observația că orice relație de ordine pe A include Δ_A și orice relație de ordine strictă pe A este disjunctă de Δ_A, și văzând cum se comportă și proprietățile de tranzitivitate, antisimetrie și asimetrie vizavi de operațiile de scădere a diagonalei mulțimii, respectiv reuniune cu diagonala mulțimii), ceea ce înseamnă că φ și ψ sunt bijecții între O și S

Ordine versus ordine strictă

Definiție

Fie A o mulțime, $\leq$ o relație de ordine pe A și $<$ o relație de ordine strictă pe A. Atunci:

- $\leq \setminus \Delta_A = \{(x,y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$ se numește *relația de ordine strictă asociată lui* $\leq$;
- $< \cup \Delta_A = \{(x,y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$ se numește *relația de ordine asociată lui* $<$.

(A se vedea exercițiul anterior.)

Mai târziu în acest curs, precum și în cursurile care vor urma, vom folosi această:

Notație

Pentru orice mulțime A, orice $R \subseteq A^2$ și orice $a_1, a_2, a_3, \ldots \in A$, vom nota faptul că $a_1 R a_2,\ a_2 R a_3, \ldots$ și prin: $a_1 R a_2 R a_3 \ldots$.

Exemple de relații de ordine

Exemplu

Se verifică ușor (**temă pentru acasă**) că:

- $\leq$ este o relație de ordine totală (i. e. liniară) pe fiecare dintre mulțimile: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, numită *relația de ordine naturală* pe aceste mulțimi (desigur, am notat cu $\leq$ relația de ordine "uzuală" pe fiecare dintre aceste mulțimi, care satisface: $x \leq y$ ddacă există un număr nenegativ a, a. î. $y = x + a$)
- fie relația binară pe $\mathbb{C}$ pe care o vom nota cu $\sqsubseteq$ și pe care o definim prin: pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a + b\mathbf{i} \sqsubseteq c + d\mathbf{i}$ ddacă $a \leq c$ și $b \leq d$, unde $\leq$ este ordinea naturală pe $\mathbb{R}$; atunci $\sqsubseteq$ este o relație de ordine pe $\mathbb{C}$ care nu este totală (pentru că, de exemplu, $(2 + 5\mathbf{i}, 5 + 2\mathbf{i}) \notin \sqsubseteq$ și $(5 + 2\mathbf{i}, 2 + 5\mathbf{i}) \notin \sqsubseteq$)
- $|$ (divizibilitatea) pe $\mathbb{N}$ este o relație de ordine care nu este totală (pentru că, de exemplu, 3 nu divide 7 și 7 nu divide 3)
- $|$ (divizibilitatea) pe $\mathbb{Z}$ este o preordine care nu este relație de ordine (pentru că, de exemplu, $5|(-5)$ și $(-5)|5$, dar $5 \neq -5$, prin urmare $|$ pe $\mathbb{Z}$ nu este antisimetrică)

Exemple de relații de ordine

Exemplu

Se verifică ușor (**temă pentru acasă**) că:

- pentru orice mulțime T, $\subseteq$ este o relație de ordine pe $\mathcal{P}(T)$, care este relație de ordine totală ddacă $|T| \leq 1$; într–adevăr:
  - dacă $T = \emptyset$, atunci $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, iar relația de ordine $\subseteq$ pe $\{\emptyset\}$ este totală (i. e. liniară), pentru că $\emptyset \subseteq \emptyset$
  - dacă $T = \{\star\}$ (*singleton*, i. e. mulțime cu un singur element, mulțime de cardinal 1), atunci $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(\{\star\}) = \{\emptyset, \{\star\}\}$, iar relația de ordine $\subseteq$ pe $\{\emptyset, \{\star\}\}$ este totală (i. e. liniară), pentru că: $\emptyset \subseteq \emptyset$, $\emptyset \subseteq \{\star\}$ și $\{\star\} \subseteq \{\star\}$
  - dacă $|T| \geq 2$, adică T are cel puțin două elemente distincte, atunci: alegând (la întâmplare, i. e. arbitrar) două elemente $a, b \in T$ cu $a \neq b$, rezultă că $\{a\} \in \mathcal{P}(T)$, $\{b\} \in \mathcal{P}(T)$, și $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ și $\{b\} \nsubseteq \{a\}$

Observație

Vom folosi adesea notația $\leq$ pentru relații de ordine, chiar dacă nu este vorba de relația de ordine uzuală pe o mulțime de numere.

Mulțimi ordonate

Definiție

- O mulțime A înzestrată cu o relație de ordine $\leq \subseteq A^2$ se notează $(A, \leq)$ și se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set").
- Dacă, în plus, $\leq$ este o relație de ordine totală, atunci $(A, \leq)$ se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Exemplu

- Posetul $(\mathbb{N}, \leq)$ este lanț (unde $\leq$ este relația de ordine naturală pe $\mathbb{N}$).
- Posetul $(\mathbb{N}, |)$ nu este lanț.

A se vedea și celelalte exemple de relații de ordine de mai sus.

Mulțimi ordonate

Definiție

Fie $(A, \leq)$ un poset și $<:=\leq \setminus \Delta_A = \{(a,b) \in A^2 \mid a \leq b \text{ și } a \neq b\}$ relația de ordine strictă asociată lui $\leq$.
Relației de ordine $\leq$ pe A i se asociază *relația de succesiune* (numită și *relația de acoperire*), notată $\prec$ și definită astfel:
$\prec := \{(a,b) \in A^2 \mid a < b \text{ și nu există } x \in A \text{ a. î. } a < x < b\} \subseteq A^2$.
Pentru orice $a, b \in A$ cu $a \prec b$:

- b se numește *succesor al lui* a (se mai spune că b *acoperă pe* a)
- a se numește *predecesor al lui* b (sau se spune că a *este acoperit de* b)

Remarcă (temă pentru acasă)

Cu notațiile din definiția anterioară, $\prec$ e ireflexivă și asimetrică și nu e tranzitivă.

Mulțimi ordonate

Exemplu (temă pentru acasă)

- Relația de succesiune asociată ordinii naturale pe $\mathbb{N}$ este relația “sunt numere consecutive“, i. e. relația $\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Relația de succesiune asociată ordinii naturale pe $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ este $\emptyset$, pentru că, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Q}$ (sau $a, b \in \mathbb{R}$) cu $a < b$, există $x \in \mathbb{Q}$ (sau $x \in \mathbb{R}$), a. î. $a < x < b$.

- Proprietatea observată mai sus a mulțimilor ordonate $(\mathbb{Q}, \leq)$ și $(\mathbb{R}, \leq)$ se numește *densitate* și, de obicei, se enunță pentru mulțimi **total** ordonate, dar poate fi definită și în cazul general al poseturilor, astfel:

Definiție

Fie $(A, \leq)$ un poset și $<$ ordinea strictă asociată lui $\leq$. Spunem că mulțimea A este *densă raportat la ordinea* $\leq$, sau că $\leq$ este o *ordine densă pe* A ddacă, oricare ar fi $a, b \in A$ cu $a < b$, există $x \in A$ a. î. $a < x < b$.

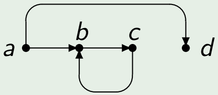
- Așadar, $\leq$ este o ordine densă pe $\mathbb{Q}$ și pe $\mathbb{R}$.

Reprezentare grafică pentru relațiile binare

- În general, reprezentările grafice ale relațiilor binare se efectuează pentru relații binare pe mulțimi finite.
- Dacă A este o mulțime finită și nevidă, iar $R \subseteq A^2$, atunci perechea (A, R) este un graf orientat, cu mulțimea vârfurilor egală cu A și mulțimea arcelor egală cu R (conform chiar definiției grafurilor orientate). De aceea, relația binară R pe A poate fi reprezentată așa cum este reprezentat, în mod uzual, graful orientat (A, R).

Exemplu

Relația binară $R = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, b)\}$ pe mulțimea cu 4 elemente $A = \{a, b, c, d\}$ poate fi reprezentată grafic astfel:



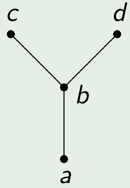
Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

- Relațiile de ordine, însă, beneficiază de o reprezentare grafică mai avantajoasă, minimală în sensul că ține seama de proprietățile de reflexivitate, tranzitivitate și antisimetrie ale unei relații de ordine pentru a elimina redundanțele create în reprezentarea grafică de aceste proprietăți. Această reprezentare grafică a unei relații de ordine se numește *diagramă Hasse*.
- Și această reprezentare grafică este, de obicei, folosită pentru relații (de ordine) pe mulțimi finite.
- Dacă $(A, \leq)$ este un poset finit și nevid (i. e. cu A finită și nevidă), atunci diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ este graful neorientat având mulțimea nodurilor egală cu A și mulțimea muchiilor egală cu relația de succesiune $\prec$ asociată lui $\leq$ și a cărui reprezentare grafică respectă regula:
  - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre succesorii săi** (i. e., pentru orice $a, b \in A$ a. î. $a \prec b$, a va fi reprezentat dedesubtul lui b),
- prin urmare:
  - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre nodurile cu care se găsește în relația de ordine strictă $<$ asociată lui $\leq$, i. e. nodurile "strict mai mari" decât el**.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Exemplu

Posetul $(A, \leq)$ dat de $A = \{a, b, c, d\}$ și
$\leq = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,c),(d,d)\}$ are următoarea diagramă Hasse:



După cum se observă, într–o diagramă Hasse, buclele sunt eliminate (orice ordine este reflexivă, deci nu e nevoie să se deseneze arce între un vârf și el însuși), și orice arc care rezultă prin tranzitivitate din altele este, de asemenea, eliminat. Mai mult, antisimetria unei ordini arată că nu există circuite în graful orientat asociat unei ordini (graf orientat asociat la fel ca în cazul relațiilor binare oarecare), iar acest fapt permite reprezentarea printr–un graf neorientat, cu acea convenție privind poziționarea nodurilor.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

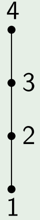
Diagrama Hasse a unei **mulțimi liniar ordonate** este "liniară".
Amintim că o **mulțime liniar ordonată** se mai numește **mulțime total ordonată** sau **lanț**.

Notație

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, vom nota **lanțul cu** k **elemente** prin $\mathcal{L}_k$ (este unic, modulo o permutare a elementelor, i. e. pe o mulțime cu k elemente se poate defini o unică ordine totală, modulo o permutare a elementelor).

Exemplu

Lanțul cu 4 elemente: $(\mathcal{L}_4, \leq)$, cu $\mathcal{L}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ și
$\leq = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2,), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$, are următoarea diagramă Hasse:



Elemente distinse într–un poset

- Până în momentul în care se va specifica altfel, fie $(A, \leq)$ un poset și $X \subseteq A$.

Remarcă

Este imediat faptul că relația binară pe X dată de mulțimea de perechi $\{(x, y) | x \in X, y \in X, x \leq y\}$ este o ordine pe X, și că, dacă ordinea $\leq$ pe A este totală, atunci această ordine pe X este, de asemenea, totală.

Definiție

Ordinea pe X din remarca anterioară se numește *ordinea indusă de $\leq$ pe X* și se notează tot cu $\leq$.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

Un element $a \in A$ se numește:

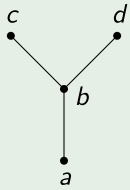
- *minorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $a \leq x$
- *majorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $x \leq a$

Remarcă

X poate avea mai mulți minoranți (majoranți), și poate să nu aibă niciun minorant (majorant).

Exemplu

În posetul dat de diagrama Hasse:



submulțimea $\{b, c, d\}$ are minoranții a și b și nu are niciun majorant.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

- Un minorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $m \in X$ cu $m \leq x$ pentru orice $x \in X$) se numește *minim al lui* X sau *prim element al lui* X sau *cel mai mic element al lui* X și se notează cu $\min(X)$ sau $\min(X, \leq)$.
- Un majorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $M \in X$ cu $x \leq M$ pentru orice $x \in X$) se numește *maxim al lui* X sau *ultim element al lui* X sau *cel mai mare element al lui* X și se notează cu $\max(X)$ sau $\max(X, \leq)$.

Remarcă

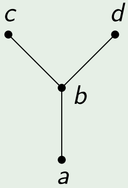
După cum arată primul exemplu de mai jos, minimul nu există întotdeauna. Dar antisimetria lui $\leq$ implică faptul că minimul (dacă există) este unic (ceea ce justifică notația de mai sus pentru minim, care indică faptul că minimul lui X este unic determinat de X (și $\leq$)).
La fel pentru maxim.

Definiție

Un poset cu minim și maxim se numește *poset mărginit*. (Minimul și maximul trebuie să fie ale întregului poset, deci trebuie luat $X := A$ în definiția anterioară.)

Exemplu

În posetul având diagrama Hasse:



submulțimea $\{b, c, d\}$ are minimul b și nu are maxim, iar întreaga mulțime $\{a, b, c, d\}$ (întregul poset) are minimul a și nu are maxim.

Exemplu

Lanțul cu 4 elemente este un poset mărginit (la fel ca orice lanț finit și nevid; a se vedea și: Sergiu Rudeanu, *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*).

Remarcă

O mulțime care are minim sau maxim are cel puțin un element (pentru că minimul unei mulțimi aparține acelei mulțimi și la fel și maximul), deci nu poate fi vidă.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

Un element $x \in X$ se numește:

- *element minimal al lui* X ddacă este minimul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $y \leq x$, rezultă $x = y$
- *element maximal al lui* X ddacă este maximul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $x \leq y$, rezultă $x = y$

Remarcă

Din definiția anterioară, rezultă imediat, pentru orice $x \in X$:

- x este simultan element minimal al lui X și minorant pentru X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element minimal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și majorant pentru X ddacă $x = \max(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \max(X)$

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

- Reprezentarea prin diagrame Hasse a poseturilor finite se bazează pe următoarele rezultate, care pot fi demonstrate simplu, prin reducere la absurd și inducție matematică, ajungându–se la contradicție cu finitudinea posetului (a se vedea și: Sergiu Rudeanu, *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*); a treia remarcă de mai jos arată că orice diagramă Hasse corespunde unui unic poset:

Remarcă (temă pentru acasă)

Orice poset finit și nevid are elemente maximale și elemente minimale, mai precis, pentru orice element $a \in A$ al unui poset finit și nevid $(A, \leq)$, există un element minimal e și un element maximal E în posetul $(A, \leq)$, cu proprietatea că $e \leq a \leq E$.

Remarcă (temă pentru acasă)

În orice poset finit și nevid, orice element care nu este element maximal are cel puțin un succesor, și orice element care nu este element minimal are cel puțin un predecesor.

Remarcă (temă pentru acasă)

În orice poset finit și nevid, închiderea tranzitivă a relației de succesiune este relația de ordine strictă, iar închiderea reflexiv–tranzitivă a relației de succesiune (i. e. preordinea generată de relația de succesiune) este relația de ordine.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

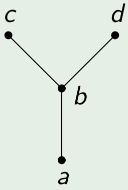
Infimumul lui X este cel mai mare minorant al lui X, adică maximul mulțimii minoranților lui X, și se notează cu $\inf(X)$ sau $\inf(X, \leq)$.
Supremumul lui X este cel mai mic majorant al lui X, adică minimul mulțimii majoranților lui X, și se notează cu $\sup(X)$ sau $\sup(X, \leq)$.

Remarcă

După cum arată exemplele de mai jos, infimumul nu există întotdeauna, nici măcar atunci când mulțimea minoranților este nevidă.
Dar, fiind maximul unei mulțimi, infimumul (dacă există) este unic (ceea ce îi justifică denumirea cu articol hotărât și notația, fiecare dintre acestea indicând faptul că infimumul este unic determinat de X (și $\leq$)).
La fel pentru supremum.

Exemplu

În posetul dat de diagrama Hasse:

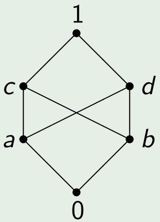


submulțimea $\{c, d\}$ are infimumul b și nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților lui $\{c, d\}$ este vidă și, deci, nu are minim.

Elemente distinse într–un poset

Exemplu

Notăm relația de ordine a posetului dat de următoarea diagramă Hasse cu $\leq$, iar relația de ordine strictă asociată ei cu $<$.



În acest poset mărginit, submulțimea $\{a, b\}$ nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților săi este $\{c, d, 1\}$, care nu are minim ($c < 1$, $d < 1$ și c și d sunt *incomparabile*, i. e. $c \nleq d$ și $d \nleq c$).
În mod similar, submulțimea $\{c, d\}$ nu are infimum, pentru că mulțimea minoranților săi este $\{0, a, b\}$, care nu are maxim ($0 < a$, $0 < b$ și a și b sunt incomparabile).

Elemente distinse într–un poset

Remarcă

Infimumul este un minorant, prin urmare infimumul aparține mulțimii ddacă este minimul mulțimii: $\exists \inf(X) \in X$ ddacă $\exists \min(X)$, și atunci $\min(X) = \inf(X)$. Analog, supremumul este un majorant, prin urmare supremumul aparține mulțimii ddacă este maximul mulțimii: $\exists \sup(X) \in X$ ddacă $\exists \max(X)$, și atunci $\sup(X) = \max(X)$.

Remarcă

Din definiția infimumului și a supremumului, rezultă următoarele caracterizări:

- există $\inf(X) = m$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $m \leq x$ și
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $a \leq x$, rezultă că $a \leq m$
- există $\sup(X) = M$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $x \leq M$ și
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $x \leq a$, rezultă că $M \leq a$

Lemă

Fie $(L, \leq)$ *un poset. Atunci, pentru orice* $x, y \in L$*, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $x \leq y$
2. *există în* L $\inf\{x, y\} = x$
3. *există în* L $\sup\{x, y\} = y$

Demonstrație: Vom folosi definițiile infimumului, supremumului, minimului și maximului unei submulțimi a unui poset, și le vom aplica acestui caz particular al submulțimilor cu 1 sau 2 elemente.

Fie $x, y \in L$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Dacă $x \leq y$, atunci $x = \min\{x, y\} = \inf\{x, y\}$ în L.

(1) $\Rightarrow$ (3): Dacă $x \leq y$, atunci $y = \max\{x, y\} = \sup\{x, y\}$ în L.

(2) $\Rightarrow$ (1): Dacă există în L $\inf\{x, y\}$, atunci $\inf\{x, y\} \leq y$, prin urmare, dacă, în plus, $\inf\{x, y\} = x$, atunci $x \leq y$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Dacă există în L $\sup\{x, y\}$, atunci $x \leq \sup\{x, y\}$, prin urmare, dacă, în plus, $\sup\{x, y\} = y$, atunci $x \leq y$.

Principiul dualității pentru poseturi

- **Principiul dualității pentru poseturi:** *Orice rezultat privind un poset* **arbitrar (fapt esențial)** $(A, \leq)$ *rămâne valabil dacă înlocuim* $\leq$ *cu* $\leq^{-1}$ *(notată* $\geq$*),* $<$ *cu* $<^{-1}$ *(notată* $>$*),* $\prec$ *cu* $\prec^{-1}$ *(notată* $\succ$*), toți minoranții cu majoranți (ca noțiuni) și vice–versa, toate elementele minimale cu elemente maximale și vice-versa, toate minimurile cu maximuri și vice-versa și toate infimumurile cu supremumuri și vice–versa.*
- Valabilitatea acestui principiu este ușor de observat din faptul că: pentru orice ordine $\leq$, $\geq$ este tot o ordine, cu ordinea strictă asociată $>$ si relația de succesiune $\succ$, $\leq$ este totală ddacă $\geq$ este totală, pentru orice $X \subseteq A$, minoranții lui $(X, \leq)$ sunt exact majoranții lui $(X, \geq)$ și vice–versa, elementele minimale ale lui $(X, \leq)$ sunt exact elementele maximale ale lui $(X, \geq)$ și vice–versa, $\min(X, \leq) = \max(X, \geq)$ și vice–versa (există simultan, i. e. $\min(X, \leq)$ există ddacă $\max(X, \geq)$ există, și, atunci când există, sunt egale; la fel vice–versa), $\inf(X, \leq) = \sup(X, \geq)$ și vice–versa (de asemenea, există simultan). Se spune că noțiunile de minorant și majorant sunt *duale una alteia*, și la fel pentru noțiunile de element minimal și element maximal, minim și maxim, infimum și supremum, respectiv.
- Posetul $(A, \geq)$ se numește *posetul dual* al posetului $(A, \leq)$.
- Este evident că dualul dualului unui poset $(A, \leq)$ este chiar $(A, \leq)$.

Principiul dualității pentru poseturi

- De acum încolo, ori de câte ori vom face apel la **Principiul dualității pentru poseturi** în demonstrații, vom scrie, simplu, "prin dualitate".

Exemplu

Se poate demonstra că orice submulțime finită și nevidă a unui lanț are un minim și un maxim, astfel: arătând prin inducție după cardinalul submulțimii existența minimului, iar existența maximului rezultă **prin dualitate**.

Observație

O consecință a remarcii din exemplul anterior este faptul că orice lanț finit și nevid este un poset mărginit (fapt menționat și mai sus).