Geometrie

Victor Vuletescu

Cuprins

CAPITOLUL 1

Spaţii afine

1. Spaţii afine.Definiţie, exemple

Definiţie 1. *Se numeşte* spaţiu afin *un triplet* $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ *unde:*
- $\mathcal{A}$ *este o mulţime nevidă;*
- V *este un spaţiu vectorial peste un corp (comutativ)* K*;*
- $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ *este o funcţie ce satisface următoarele proprietăţi:*

i) pentru orice $A, B, C \in \mathcal{A}$ *are loc*

$$\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C) \tag{1}$$

ii) există un punct $O \in \mathcal{A}$ *astfel încât apliqtia* $\varphi_O : \mathcal{A} \to V$ *dată prin* $\varphi_O(A) = \varphi(O, A)$ *este bijectivă.*

Terminologie. Elementele lui A se vor numi *puncte*. Spaţiul vectorial V se va numi *spaţiul director* sau *direcţia* lui $\mathcal{A}$. Elementele lui V se vor numi şi *vectori liberi*. Funcţia φ se numi *structură afină* şi vom utiliza notaţia

$$\vec{AB} = \varphi(A, B).$$

Vectorul $\vec{AB}$ se va numi uneori şi *vectorul legat* generat de A şi B. De asemeni, vom mai utiliza notaţia

$$r_O(A) = \vec{OA}$$

şi vom numi $r_O(A)$ *vectorul de poziţie al lui* A *în raport cu* O.

Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin ; vom defini *dimensiunea* lui $\mathcal{A}$ ca fiind dimensiunea lui V.

Exemplu. *(Structura afină canonică a unui spaţiu vectorial.)* Fie V un spaţiu vectorial. Fie $\mathcal{A} = V$ şi $\varphi : V \times V \to V$ definită prin

$$\varphi(u, v) = v - u.$$

Se verifică imediat că φ satisface cele două proprietăţi din enunţ.

Proprietăţi elementare.

Propoziţie 1. *Fie* $\mathcal{A}$ *un spaţiu afin; atunci*

a) $\vec{AA} = 0_V$ *pentru orice* $A \in A$;

b) $\vec{AB} = -\vec{BA}$ *pentru orice* $A, B \in \mathcal{A}$.

c) proprietatea ii) din definiţia de mai sus rămâne adevărată pentru orice $O \in \mathcal{A}$.

Observaţie. Remarcăm că proprietatea ii) din definiţie se poate citi şi aşa:

" Pentru orice $v \in V$ *şi orice punct* $O \in \mathcal{A}$ *există şi este unic un punct* $A \in \mathcal{A}$ *astfel încât* $\vec{OA} = v$*."*

2. Combinaţii afine. Repere afine şi carteziene

În general, pe un spaţiu afin dat, nu putem defini o structură algebrică "familiară"; grup, etc. Putem totuşi defini o operaţie ce suplineşte această deficienţă, numită *combinaţie afină,* după cum urmează.

PROPOZIŢIE 2. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ arbitrar, $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ arbitrare. Fie $O \in \mathcal{A}$ arbitrar. Dacă*

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1}$$

atunci punctul P, unic definit de relaţia

$$\vec{OP} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{OP_i}$$

nu depinde de alegerea lui O. El va fi notat

$$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i.$$

Demonstraţie. Fie $O' \in \mathcal{A}$ arbitrar, şi fie P' definit de

$$\vec{O'P'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{O'P_i}.$$

Atunci

$$\vec{OP'} = \vec{OO'} + \vec{O'P} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{OO'} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{O'P_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\vec{OO'} + \vec{O'P_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{OP_i} = \vec{OP}$$

Deci $\vec{OP'} = \vec{OP}$ deci $P' = P$.

Observaţie. Deşi pentru combinaţiile afine nu are sens punerea problemei asociativităţii, are loc o proprietate similară, care se deduce imediat din definiţie

OBSERVAŢIE 1. *Fie*

$$a, b, \alpha_1 \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in K$$

şi punctele $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_m \in \mathcal{A}$ arbitrare. Dacă

$$a + b = 1\ , \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$$

atunci

$$a(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i) + b(\sum_{i=1}^{m} \beta_i Q_i) = a\alpha_1 P_1 + \cdots + a\alpha_n P_n + b\beta_1 Q_1 + \cdots + b\beta_m Q_m.$$

Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi fie $X \subset \mathcal{A}$. Numim *acoperirea afină* a lui X mulţimea $Af(X)$ a tuturor punctelor lui $\mathcal{A}$ ce se pot obţine ca şi combinaţii afine de elemente din X, i.e.

$$Af(X) = \{P \in \mathcal{A} | \exists n \in \mathbb{N}, \exists \{\alpha_i\}_{i=1,..,n} \in K, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \exists \{P_i\}_{i=1..n} \in \mathcal{A}, P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i\}$$

DEFINIŢIE 2. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi fie $S \subset \mathcal{A}$. Spunem că mulţimea de puncte S este un:*

-sistem afin independent *dacă pentru orice $P \in S$ avem că*

$$P \notin Af(S \setminus \{P\});$$

-sistem afin de generatori *dacă*

$$\mathcal{A} = Af(S);$$

-reper afin *dacă S este atât sistem afin independent cât şi sistem afin de generatori.*

De asemeni, vom spune că un spaţiu afin este *finit generat* dacă are un sistem afin de generatori care este mulţime finită.

Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi fie $S \subset \mathcal{A}$; fixăm $O \in S$ arbitrar şi notăm $S_O \subset V$ sistemul de vectori definit prin

$$S_O \stackrel{def}{=} \{\vec{OA} | A \in S \setminus \{O\}\}.$$

Are loc

TEOREMA 1. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi $S \subset \mathcal{A}$. Fie $O \in S$ arbitrar; atunci*

a) S este sistem afin independent dacă şi numai dacă $S_O \subset V$ este sistem liniar independent;

b) S este sistem afin de generatori dacă şi numai dacă $S_O \subset V$ este sistem de generatori.

Demonstraţie.

a)" $\Rightarrow$ ". Presupunem că S_O nu este liniar independent; atunci există un vector din S_O care este combinaţie liniară de alţi vectori din S_O, i.e există $A, A_1 \ldots, A_n \in S$ distincte şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât

$$\vec{OA} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{OA_i}$$

Atunci

$$\vec{OA} = (1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i)\vec{OO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{OA_i}$$

deci

$$A = (1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i)O + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i.$$

Deducem $A \in Af(S \setminus \{A\})$, contradicţie.

b)" $\Rightarrow$ ". Fie $v \in V$ arbitrar; atunci există $A \in \mathcal{A}$ astfel încât $\vec{OA} = v$. Cum $Af(S) = \mathcal{A}$, există $A_1, \ldots, A_n \in S \setminus \{O\}$ astfel încât

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i + (1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i) O.$$

Atunci $\vec{OA} = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA_i}$

Corolar 1. *Fie $S \subset \mathcal{A}$; atunci S este sistem afin independent, dacă şi numai dacă pentru orice puncte $A_1, \ldots, A_n \in S$ şi orice $\alpha_1 \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in K$, relaţia*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i A_i$$

implică $\alpha_i = \beta_i, \forall i = 1, \ldots, n$.

Definiţie 3. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin de direcţie spaţiul vectorial V. Vom numi* reper cartezian *al lui $\mathcal{A}$ un cuplu $(O, \mathcal{B})$ unde $O \in \mathcal{A}$ iar $\mathcal{B} \subset V$ este o bază a lui V.*

Observaţie 2. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin de direcţie spaţiul vectorial V şi fie $S \subset \mathcal{A}$. Atunci S este un reper afin dacă şi numai dacă (O, S_O) este un reper cartezian.*

Definiţie 4. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin fixat şi $P \in \mathcal{A}$ arbitrar.*

a) Dacă $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ este un reper cartezian atunci coordonatele vectorului $\vec{OP}$ in baza $\mathcal{B}$ se vor numi coordonatele carteziene *ale lui P (în raport cu $\mathcal{R}$);*

b) Dacă S este un reper afin, şi P se reprezintă sub forma (unică!)

$$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$$

cu $A_i \in S$ pentru orice i, atunci $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se numesc coordonatele afine *sau* coordonatele baricentrice *ale lui P în raport cu S.*

Observaţie 3. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin finit generat de dimensiune n. Atunci*

a) orice reper afin al lui $\mathcal{A}$ are $n + 1$ puncte.

b) pentru orice reper afin $\mathcal{R}_{af} = \{O, A_1, \ldots, A_n\}$ şi orice punct $P \in \mathcal{A}$ avem

$$P = (1 - \sum_{i=1}^{n}) \alpha_i O + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$$

unde $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sunt coordonatele carteziene ale lui P în raport cu reperul cartezian

$$\mathcal{R} = (O, \{\vec{OA}_1, \ldots, \vec{OA}_n\}).$$

CAPITOLUL 2

Subspaţii afine.

1. Definiţii, caracterizare intrinsecă.

DEFINIŢIE 5. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin de direcţie spaţiul vectorial V. Se numeşte* subspaţiu afin *o submulţime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ pentru care există un subspaţiu vectorial $V' \subset V$ şi există $O \in \mathcal{A}'$ astfel încât*

$$V' = \{\vec{OA} | A \in \mathcal{A}'\}.$$

De asemeni, mulţimea vidă este considerată subspaţiu afin de dimensiune

$$dim(\emptyset) = -1.$$

Remarcă. Dacă $\mathcal{A}'$ este un subspaţiu afin, atunci $\mathcal{A}'$ are o structură de spaţiu afin de direcţie V'.

Exemple. Evident, $\mathcal{A}$ este un subspaţiu afin al său. De asemeni, pentru orice $A \in \mathcal{A}$, mulţimea $\{A\}$ este un subspaţiu afin, de direcţie subspaţiul nul $\{0_V\} \subset V$.

TEOREMA 2. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin de direcţie spaţiul vectorial V peste corpul K. O submulţime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este subspaţiu afin dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ şi orice $A_1, \ldots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{A}'$ avem că $\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \in \mathcal{A}'$.*

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ ". Fie $n \in \mathbb{N}$, orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ şi $A_1, \ldots, \mathcal{A}_n \in \mathcal{A}'$ arbitrare. Avem $\vec{OA_i} \in V'$ pentru orice i şi, cum V' este subspaţiu vectorial, deducem

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i} \in V';$$

din definiţia lui V' vedem că există $A \in \mathcal{A}'$ astfel încât

$$\vec{OA} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{OA_i};$$

dar atunci $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$ deci $\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i \in \mathcal{A}'$.

" $\Leftarrow$ " Fie $O \in \mathcal{A}$" arbitrar; arătăm că $V' = \{\vec{OA} | A \in \mathcal{A}'\}$ este subspaţiu vectorial. Fie $v_1, v_2 \in V'$ şi $a, b \in K$ arbitrare. Avem $v_1 = \vec{OA_1}, v_2 = \vec{OA_2}$ cu $A_1, A_2 \in \mathcal{A}'$. Din ipoteză, $(1-a-b)O + aA_1 + bA_2 \in \mathcal{A}'$, deci $(1-a-b)\vec{OO} + a\vec{OA_1} + b\vec{OA_2} \in V'$. Deci $av_1 + bv_2 \in V$", i.e. V' este subspaţiu vectorial.

2. Operaţii cu subspaţii afine

PROPOZIŢIE 3. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ subspaţii afine. Atunci $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ este un subspaţiu afin, iar dacă $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$ atunci*

$$dir(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = dir(\mathcal{A}_1) \cap dir(\mathcal{A}_2).$$

Demonstraţie. Faptul că $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ este subspaţiu afin rezultă din teorema de caracterizare anterioară. Privitor la direcţia intersecţiei, dacă $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$, nimic de demonstrat. Fie deci $O \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Avem că un vector v aparţine lui $dir(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$ dacă şi numai dacă $v = \vec{OP}$ cu $P \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Dar atunci $v \in dir(\mathcal{A}_1) \cap dir(\mathcal{A}_2)$, deci $dir(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1) \cap dir(\mathcal{A}_2)$. pentru incluziunea inversă, observăm că dacu $v \in dir(\mathcal{A}_1) \cap dir(\mathcal{A}_2)$ atunci $v = \vec{OP_1}$, respectiv $v = \vec{OP_2}$ cu $P_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2$. Dar din unicitatea scrierii lui v ca vector din direcţia lui $\mathcal{A}$ deducem $P_1 = P_2$ deci $v \in dir(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$, Q.E.D.

Analogul noţiunii de sumă a subspaţiilor vectoriale o constituie următoarea

DEFINIŢIE 6. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ două subspaţii afine. Definim* uniunea *$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ ca fiind subspaţiul generat de $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.*

Remarcă. Am observat deja, în teorema de caracterizare a subspaţiilor afine, că, prin contrast cu cazul subspaţiilor vectoriale, nu mai este suficient să testăm închiderea unei submulţimi doar în raport cu combinaţiile afine de câte două puncte. Similar, in definiţia uniunii **nu este adevărat** că

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \{a_1P_1 + a_2P_2 | a_1, a_2 \in K, a_1 + a_2 = 1, P_1 \in \mathcal{A}_1, P_2 \in \mathcal{A}_2\}.$$

De exemplu, dacă luăm $\mathcal{A}$ =planul afin (de exemplu, peste $\mathbb{R}$) $\mathcal{A}_1$ = o dreaptă arbitrară, $\mathcal{A}_2 = \{P\}$ unde $P \notin \mathcal{A}_1$ atunci

$$\{a_1P_1 + a_2P_2 | a_1, a_2 \in K, a_1 + a_2 = 1, P_1 \in \mathcal{A}_1, P_2 \in \mathcal{A}_2\}.$$

este planul din care lipsesc semidreptele deschise determinate pe paralela dusă prin P la $\mathcal{A}_1$, care nu este un subspaţiu afin.

TEOREMA 3. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ două subspaţii afine de direcţii V_1 respectiv V_2. Atunci*

$$dim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) = \begin{cases} dim(\mathcal{A}_1) + dim(\mathcal{A}_2) - dim(V_1 \cap V_2) + 1, & dacă\ \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset \\ dim(\mathcal{A}_1) + dim(\mathcal{A}_2) - dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2), & dacă\ \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset \end{cases}$$

Pentru demonstrarea teoremei este suficient să demonstrăm

LEMA 1. *Cu notaţiile de mai sus, fie $O_1 \in \mathcal{A}_1, O_2 \in \mathcal{A}_2$ arbitrare. Atunci*

$$dir(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) = dir(\mathcal{A}_1) + dir(\mathcal{A}_2) + < \vec{O_1O_2} >$$

Demonstraţia lemei. Pentru " $\subset$ ", fie $v \in dir(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$; atunci $v = \vec{A_1A_2}$ cu $A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2$ Dar atunci

$$v = \vec{A_1A_2} = \vec{A_1O_1} + \vec{O_1O_2} + \vec{O_2A_2}$$

deci incluziunea este demonstrată.

Pentru " $\supset$ " este suficient să observăm că, direct din definiţii avem că fiecare dintre $dir(\mathcal{A}_1), dir(\mathcal{A}_2)$ şi $< \vec{O_1O_2} >$ sunt subspaţii ale lui $dir(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$, deci şi suma lor este subspaţiu al lui $dir(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$. Q.E.D. Lema.

Terecem acum la

Demonstraţia teoremei. Cazul $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$ rezultă banal luând $O_1 = O_2$. Pentru celălalt caz, este suficient să observăm că

$$< \vec{O_1 O_2} > \cap (dir(\mathcal{A}_1) + dir(\mathcal{A}_2)) = \{0\}.$$

Într-adevăr, în caz contrar am avea $O_1 O_2 \in dir(\mathcal{A}_1) + dir(\mathcal{A}_2)$ deci ar exista $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ astfel încât

$$\vec{O_1 O_2} = \vec{O_1 A_1} - \vec{O_2 A_2}$$

Dar aceasta ar implica $\vec{O_1 A_2} = \vec{O_1 A_1}$ deci $A_1 = A_2$, absurd.

3. Paralelism afin

DEFINIŢIE 7. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ subspaţii afine ale sale. Spunem că $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sunt paralele (notat $\mathcal{A}_1 || \mathcal{A}_2$) dacă $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau $dir(\mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1)$.*

Remarcă. Dacă $dim(\mathcal{A}_1) = dim(\mathcal{A}_2)$ atunci condiţia $\mathcal{A}_1 || \mathcal{A}_2$ este echivalentă cu $dir(\mathcal{A}_1) = dir(\mathcal{A}_2)$. În particular, *pe mulţimea subspaţiilor afine de o aceeaşi dimensiune* relaţia de paralelism este relaţie de echivalenţă.

Exercţiu. Arătaţi că relaţia de paralelism nu este relaţie de echivalenţă pe mulţimea tuturor subspaţiilor afine ale unui spaţiu afin dat.

Are loc

TEOREMA 4. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi fie $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ un subspaţiu afin al său şi $O \in A$ arbitrar fixat. Atunci există şi este unic un subspaţiu afin $\mathcal{A}'$ astfel încât*

$$dim(\mathcal{A}') = dim(\mathcal{A}_1), \mathcal{A}' || \mathcal{A}_1, P \in \mathcal{A}'.$$

Demonstraţie. *Existenţa.* Definim

$$\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} | \vec{OP} \in dir(\mathcal{A}_1)\}.$$

Din chiar definiţia subspaţiilor afine rezultă $\mathcal{A}'$ subspaţiu afin, $dir(\mathcal{A}') = dir(\mathcal{A}_1)$ (în particular $dim(\mathcal{A}') = dim(\mathcal{A}_1)$ şi $O \in \mathcal{A}'$ (pentru ca $\vec{PP} = \vec{0} \in dir(\mathcal{A}_1)$).

Unicitatea. Fi $\mathcal{A}$" un subspaţiu afin ce satisface proprietăţile cerute. Din $dim(\mathcal{A}") = dim(\mathcal{A}_1)$ rezultă $dir(\mathcal{A}") = dir(\mathcal{A}_1)$; cum $O \in \mathcal{A}"$ rezultă atunci că

$$\mathcal{A}" = \{P \in \mathcal{A} | \vec{OP} \in dir(\mathcal{A}_1)\}$$

deci $\mathcal{A}" = \mathcal{A}'$.

4. Ecuaţii ale subspaţiilor afine

TEOREMA 5. *(Ecuaţii carteziene ale subspaţiilor afine.) Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin de dimensiune n şi fie $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un reper cartezian fixat al lui $\mathcal{A}$. Atunci o submulţime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este subspaţiu afin dacă şi numai dacă coordonatele carteziene ale punctelor din $\mathcal{A}'$ formează mulţimea soluţiilor unui sistem liniar, i.e. există $m \geq 0$ şi matricele $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ şi $B \in \mathcal{M}_{m,1}$ astfel încât*

$$\mathcal{A}' = \{P(x_1, , \ldots, x_n) | A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = B\}.$$

În acest caz, $dim(\mathcal{A}') = n - rang(A)$.

Demonstraţie. Fie $O \in \mathcal{A}'$ un punct arbitrar de coordonate $(x_1^O, \ldots, x_n^O)$. Reamintim că $\mathcal{A}'$ este subspaţiu afin dacă şi numai dacă mulţimea vectorilor din $\mathcal{A}"_O = \{\vec{OP} | P \in \mathcal{A}'\}$ formează un subspaţiu vectorial al lui $dir(\mathcal{A})$. Observăm că $\mathcal{A}'_O$ este formată cu vectorii din $\mathcal{A}'_O$ au coordonatele de forma $(x_1 - x_1^O, \ldots, x_n - x_n^O)$, unde $P(x_1, \ldots, x_n)$ sunt coordonatele unui punct arbitrar din $\mathcal{A}'$. Ca atare, $\mathcal{A}'$ este subspaţiu afin dacă şi numai dacă există o matrice A astfel încât

$$\mathcal{A}'_O = \{A \begin{pmatrix} x_1 - x_1^O \\ x_2 - x_2^O \\ . \\ . \\ x_n - x_n^O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Dacă notăm $B = A \begin{pmatrix} x_1^O \\ x_2^O \\ . \\ . \\ x_n^O \end{pmatrix}$ vedem că

$$\mathcal{A}'_O = \{A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = B\}.$$

În fine, cum $dim(dir(\mathcal{A}')) = n - rang(A)$ rezultă $dim(\mathcal{A}') = n - rg(A)$.

Remarcă. *Merită subliniat că din teorema de mai sus rezultă că dacă $AX = B$ reprezintă ecuaţiile carteziene ale unui subspaţiu afin $\mathcal{A}$" atunci ecuaţiile carteziene ale lui $dir(\mathcal{A}')$ sunt $AX = 0$.*

5. Ecuaţii ale unor cazuri particulare de subspaţii afine.

5.1. Ecuaţii ale dreptelor. Reamintim că dreptele unui spaţiu afin sunt subspaţiile afine de dimensiune 1. În funcţie de modul în care le determinăm şi de tipul de ecuaţii pe care ni-l dorim (cartezian sau parametric) distingem mai multe situaţii.

A: Dreapta determinată printr-un punct şi un vector nenul din direcţia sa. Presupunem deci date: un punct $O(x_1^O, \dots, x_n^O)$ şi un vector nenul $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$. Vrem să determinăm ecuaţii ale dreptei d ce trece prin O şi are direcţia generată de $\vec{v}$.

Pornim de la definiţie; un punct $P(x_1, \dots, x_n) \in d$ dacă şi numai dacă $\vec{OP} \in dir(d)$, i.e. există $t \in K$ astfel încât $\vec{OP} = tv$. Deducem *ecuaţiile parametrice:*

$$\begin{cases} x_1 - x_1^O = tv_1 \\ x_2 - x_2^O = tv_2 \\ . \\ . \\ x_n - x_n^O = tv_n \end{cases}$$

Eliminând parametrul t găsim *ecuaţiile carteziene:*

$$\frac{x_1 - x_1^O}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^O}{v_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^O}{v_n}.$$

Remarcă. Ecuaţiile carteziene de mai sus au sens, strict vorbind, doar în cazul când toţi $v_i, i = 1, 2, \dots, n$ sunt nenuli. În practică, se utilizează aceeaşi notaţie ca mai sus în toate cazurile, cu convenţia că dacă $v_i = 0$ pentru un i atunci fracţia $\frac{x_i - x_i^O}{0}$ semnifică, riguros vorbind, $x_i - x_i^O = 0$.

B: Dreapta determinată de două puncte distincte. Presupunem deci date două puncte distincte $A = (x_1^A, \ldots, x_n^A)$ şi $B(x_1^B, \ldots, x_n^B)$. Pentru determinarea ecuaţiilor dreptei AB utilizăm cazul anterior, în care $\vec{v} = \vec{AB}$ şi $O = A$. Deducem:

Ecuqtii parametrice:

$$\begin{cases} x_1 - x_1^A = t(x_1^B - x_1^A) \\ x_2 - x_2^A = t(x_2^B - x_2^A) \\ \quad . \\ \quad . \\ x_n - x_n^A = t(x_n^B - x_n^A) \end{cases}$$

Ecuaţii carteziene:

$$\frac{x_1 - x_1^A}{x_1^B - x_1^A} = \frac{x_2 - x_2^A}{x_2^B - x_2^A} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{x_n^B - x_n^A}.$$

C: Dreapta ce trece printr-un punct dat şi este paralelă la o dreaptă dată. Presupune deci date punctul $A(x_1^A, \ldots, x_n^A)$ şi o dreaptă d'. Vrem să determinăm ecuaţiile paralelei dusă prin O la d'.

Dacă, de exemplu, dreapta d' este dată parametric prin ecuaţiile

$$(d') \quad \begin{cases} x_1 - x_1^O = tv_1 \\ x_2 - x_2^O = tv_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ x_n - x_n^O = tv_n \end{cases}$$

atunci, cum d este paraleă cu d', deci are aceeaşi direcţie găsim ecuaţiile parametrice ale lui d :

$$(d) \quad \begin{cases} x_1 - x_1^A = tv_1 \\ x_2 - x_2^A = tv_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ x_n - x_n^A = tv_n \end{cases}$$

Similar, dacă d' este dată prin ecuaţiile carteziene

$$(d') : \quad \frac{x_1 - x_1^O}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^O}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^O}{v_n}$$

atunci d va avea ecuaţiile

$$(d) : \quad \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$$

CAPITOLUL 3

Transformări afine

1. Definiţii, teoreme de caracterizare

Definiţie 8. *Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ două spaţii afine astfel încât direcţiile lor sunt spaţii vectoriale peste un acelaşi corp K. O funcţie $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numeşte* transformare afină *sau* morfism afin *dacă există un punct $O \in \mathcal{A}_1$ astfel încât aplicaţia*

$$T_O : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2,\ T_O(\vec{OA}) = \tau(O)\vec{\tau}(A)$$

este liniară.

Remarcă. 1. La fel ca în toate definiţiile de până cum, se poate verifica (exerciţiu!) că dacă τ este transformare afină, atunci aplicaţia τ_O definită mai sus nu depinde de alegerea lui $O \in \mathcal{A}_1$. Ea se numeşte şi *urma vectorială* a lui τ şi se mai notează şi T_τ sau $Tr(\tau)$.

Observaţie 4. *O transformare $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este injectivă (resp. surjectivă) dacă şi numai dacă urma sa T_τ este injectivă(resp. surjectivă).*

Demonstraţie. *Injectivitatea.* Presupunem τ injectivă; dacă T_τ nu ar fi injectivă atunci ar exista $v \neq 0$ astfel încât $T_\tau(v) = 0$ Dar atunci $v = \vec{AB} \neq 0$ implică $A \neq B$ pe când din $\tau(A)\vec{\tau}(B) = 0$ deducem $\tau(A) = \tau(B)$, contradicţie cu injectivitatea lui τ. Reciproca este similară.

Surjectivitatea. Presupunem τ surjectivă. Fie $u \in dir(\mathcal{A}_2)$ arbitrar; atunci $u = A_2\vec{B}_2$ cu $A_2, B_2 \in \mathcal{A}_2$ Cum τ este surjectivă, există $A_1, B_1 \in \mathcal{A}_1$ astfel încât $A_2 = \tau(A_1), B_2 = \tau(B_1)$. Fie $v \in dir(\mathcal{A}_1)$ definit prin $v = A_1\vec{B}_1$; din definiţia urmei rezultă imediat $T_\tau(v) = u$ deci T_τ este surjectivă. Reciproca este de asemenea similară, şi constituie un exerciţiu.

Utilizând definiţia putem da următoarea teoremă de caracterizare a transformărilor afine utilizând sistemele de coordonate. Ne vom rezuma la cazul sistemelor de coordonate carteziene, cazul coordonatelor afine fiind similar.

Teorema 6. *Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ două spaţii afine de dimensiuni n respectiv m definite peste un acelaşi corp K. Fie $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{R}_2 = (O_2, \mathcal{B}_2)$ repere carteziene arbitrare fixate pentru $\mathcal{A}_1$, respectiv $\mathcal{A}_2$. O funcţie $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este transformare afină dacă şi numai dacă are expresia în coordonate*

$$\tau(X) = AX + B$$

unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), B \in \mathcal{M}_{m,1}(K)$ sunt matrici arbitrare.

Demonstraţie. Fie $P \in \mathcal{A}_1$ un punct arbitrar de coordonate

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

în raport cu reperul $\mathcal{R}_1$ şi fie

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$$

coordonatele în raport cu $\mathcal{R}_2$ ale lui $\tau(P)$. Fie de asmenea

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

coordonatele lui $\tau(O_1)$. Vecorul $\vec{O_1P} =$ va avea coordonatele X în raport cu baza $\mathcal{B}_1$ iar vectorul $\tau(O_1)\vec{\tau}(P)$ va avea coordonatele $B - Y$ în raport cu baza $\mathcal{B}_2$, deoarece $\tau(O_1)\vec{\tau}(P) = O_2\vec{\tau}(P) - O_2\vec{\tau}(O_1)$. Cum τ este afină, urma sa T_τ este liniară: fie $A =$ matricea lui T_τ în raport cu bazele $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Cum $T_\tau(\vec{O_1P}) = \tau(O_1)\vec{\tau}(P)$ vedem că are loc relaţia $AX = Y - B$, Q.E.D.

De asemenea, putem da o teoremă de caracterizare utilizând noţiunea de combinaţie afină.

Teorema 7. *Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ două spaţii afine peste un acelaşi corp K.*

a) O funcţie $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este transformare afină dacă şi numai dacă pentru orice $n \geq 1$, orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ şi orice $A_1 \ldots, A_n \in \mathcal{A}_1$ avem

$$\tau(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n) = \alpha_1 \tau(A_1) + \cdots + \alpha_n \tau(A_n).$$

b) Dacă $char(K) \neq 2$, atunci τ este transformare afină dacă şi numai dacă pentru orice $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ şi orice $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_1$ avem

$$\tau(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1 \tau(A_1) + \alpha_2 \tau(\mathcal{A}_2). \tag{2}$$

Demonstraţie. Vom arăta doar b), lăsând punctul a) ca şi exerciţiu.

" $\Rightarrow$ ". Prespunem τ afină, şi fie $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ şi $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_1$ arbitrare. Să notăm $A_3 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, B_i = \tau(A_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ şi $B = \tau(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)$. Fie de asemeni $O \in \mathcal{A}_1$ arbitrar fixat si fie $O' = \tau(O)$. Relaţia (2) este echivalentă cu

$$\vec{O'B} = \alpha_1 \vec{O'B_1} + \alpha_2 \vec{O'B_2},$$

deci urma lui τ în raport cu O este liniară.

"$\Leftarrow$" Vom arăta mai întâi că urma lui τ în raport cu un punct arbitrar fixat $O \in \mathcal{A}_1$ satisface proprietăţile:

1) este omogenă, i.e. pentru orice $v \in dir(\mathcal{A}_1)$ şi orice $\alpha \in K$ avem

$$T(\alpha v) = \alpha T(v);$$

2) este "semi-aditivă", i.e. pentru orice doi vectori $v_1, v_2 \in dir(\mathcal{A}_1)$ avem

$$T(\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2) = \frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{2}T(v_2).$$

Pentru 1) fie $v = \vec{OP}$ şi fie $Q \in \mathcal{A}_1$, $Q = \alpha P + (1-\alpha)O$; cum $\vec{OO} = \vec{0}$ avem

$$\vec{OQ} = \alpha v.$$

Fie $Q' = \tau(Q)$; din ipoteză, $Q' = \alpha\tau(P) + (1-\alpha)O'$ (unde $O' = \tau(O)$) deci

$$\vec{O'Q'} = \alpha \vec{O'\tau(P)}. \tag{3}$$

Dar

$$\vec{O'Q'} = \vec{\tau(O)\tau(Q)} = T_O(\vec{OQ}) = T_O(\alpha v)$$

iar

$$\vec{O'\tau(P)} = \vec{\tau(O)\tau(P)} = T_O(\vec{OP}) = T_O(v).$$

Din relaţia (3) rezultă $T_O(\alpha v) = \alpha T_O(v)$, Q.E.D.1).

Pentru 2) fie $v_1 = \vec{OA_1}, v_2\vec{OA_2}$ şi fie $O' = \tau(O), A_1' = \tau(A_1), A_2' = \tau(A_2)$. Considerăm punctul A_3 definit de

$$A_3 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2$$

(deci $\vec{OA_3} = \frac{1}{2}\vec{OA_1} + \frac{1}{2}\vec{OA_2} = v_1 + v_2$) şi fie $A_3' = \tau(A_3)$. Din ipoteză rezultă că

$$A_3' = \frac{1}{2}A_1' + \frac{1}{2}A_2'$$

deci

$$\vec{O'A_3'} = \frac{1}{2}\vec{O'A_1'} + \frac{1}{2}\vec{O'A_2'}$$

Dar $\vec{O'A_i'} = T_O(\vec{OA_i}),\ i = 1, 2, 3$ deci

$$T_O(\vec{OA_3}) = \frac{1}{2}T_O(\vec{OA_1}) + \frac{1}{2}T_O(\vec{OA_2})$$

adică $T_O(\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2) = \frac{1}{2}T_O(v_1) + \frac{1}{2}T_O(v_2)$, Q.E.D.2).

Pentru a încheia demonstraţia, trebuie să arătăm că T_O este aditivă. Dacă $v_1, v_2 \in dir(\mathcal{A}_1)$ sunt arbitrari, atunci din 1) avem

$$T(v_1 + v_2) = T(2(\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2)) = 2T(\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2)$$

care, dacă ţinem cont de 2), este mai departe egală cu

$$2(\frac{1}{2}T(v_1) + \frac{1}{2}T(v_2)) = T(v_1) + T(v_2)$$

Q.E.D.

COROLAR 2. *("Proprietatea de universalitate a reperelor afine") Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spaţii afine peste un acelaşi corp K. Fie $\mathcal{R}_{af} = \{P_0, \dots, P_n\}$ un reper afin fixat al lui $\mathcal{A}_1$. Atunci pentru orice funcţie $f : \mathcal{R}_{af} \to \mathcal{A}_2$ există şi este unică o transformare afină $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ astfel încât $\tau(P) = f(P), \forall P \in \mathcal{R}_{af}$.*

Demonstraţie. Raţionăm similar cu demonstraţia proprietăţii de universalitate a bazelor în spaţii vectoriale. Dacă $P \in \mathcal{A}_1$ este un punct arbitrar, atunci el se scrie în mod unic ca şi o combinaţie afină de punctele reperului,

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i.$$

Definim

$$\tau(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(P_i)$$

Din teorema de mai sus se vede imediat că τ este transfomare afină. Unicitatea este imediată.

Corolar 3. *("Proprietatea de universalitate a reperelor carteziene") Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spaţii afine peste un acelaşi corp K. Fie $\mathcal{R} = (O_1, \mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1,\ldots,n})$ un reper cartezian fixat al lui $\mathcal{A}_1$. Atunci pentru orice funcţie*

$$f : \mathcal{B} \to dir(\mathcal{A}_2)$$

şi orice $O_2 \in \mathcal{A}_2$ există şi este unică o transformare afină $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ astfel încât $\tau(O_1) = O_2, T_\tau(\vec{v}) = f(\vec{v}), \forall \vec{v} \in \mathcal{B}$.

Demonstraţie. Formăm reperul afin $\mathcal{R}_{af} = \{O, P_1, \ldots, P_n\}$ prin cerinţa

$$\vec{OP_i} = e_i, i = 1, \ldots, n.$$

Fie $Q_i \in \mathcal{A}_2$ unic definite de

$$\vec{O_2Q_i} = f(e_i),\ i = 1, \ldots, n.$$

Fie acum $g : \mathcal{R}_{af} \to \mathcal{A}_2$ definită prin

$$g(O_1) = O_2, g(P_i) = Q_i, i = 1, \ldots, n.$$

Aplicăm corolarul anterior reperului afin $\mathcal{R}_{af}$ şi funcţiei g.

Corolar 4. *Două spaţii afine sunt izomorfe dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune.*

Corolar 5. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin. Mulţimea transformărilor afine bijective $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ formează un grup, numit* grupul afin, *şi notat $Iso(\mathcal{A})$.*

Demonstraţie. Singurul lucru ce trebuie demonstrat este că inversa unei transformări afine este tot transformare afină, ceea ce rezultă imediat din teorema de mai sus.

Corolar 6. *Fie $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o transformare afină. Atunci*
a) oricare ar fi $\mathcal{A}_1' \subset \mathcal{A}_1$ avem $\tau(\mathcal{A}_1') \subset \mathcal{A}_2$ subspaţiu afin;
b) oricare ar fi $\mathcal{A}_2' \subset \mathcal{A}_2$ avem $\tau^{-1}(\mathcal{A}_2') \subset \mathcal{A}_1$ subspaţiu afin.

Exerciţiu 1. *Dacă $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este transformare afină şi $P \subset \mathcal{A}_2$ este un punct, arătaţi că*

$$dir(\tau^{-1}(\{P\}) = Ker(T_\tau).$$

2. Exemple de transformări afine.

Pe parcursul acestei secţiuni, fixăm un spaţiu afin afin $\mathcal{A}$.

2.1. Translaţii.

Definiţie 9. *O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numeşte* translaţie *dacă $T_\tau = id_{dir\mathcal{A}}$.*

Propoziţie 4. *O transformare afină $\tau : A \to \mathcal{A}$ este translaţie dacă şi numai dacă există $v \in dir(\mathcal{A})$ astfel încât $\vec{P\tau(P)} = \vec{v}$ pentru orice $P \in \mathcal{A}$, şi reciproc, pentru orice vector $v \in dir(\mathcal{A})$ există o unică translaţie $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ astfel încât $\vec{P\tau(P)} = v$ pentru orice $P \in \mathcal{A}$.*

Demonstraţie. Fie τ o translaţie. Arătăm că vectorul v definit de relaţia $v = \vec{P\tau(P)}$ nu depinde de alegerea lui P. Fie R un alt punct; din faptul că τ este translaţie avem $\vec{PR} = \vec{\tau(P)\tau(R)}$ de unde rezultă, calculând în două moduri pe $\vec{P\tau(R)}$ că $\vec{P\tau(P)} = \vec{R\tau(R)}$.

Pentru reciprocă, fie deci $v \in V$ arbitrar. Cu acelaşi raţionament se vede că aplicaţia τ definită prin

$$\vec{P\tau(P)} = v, \forall P \in \mathcal{A}$$

are urma $id_{dir(\mathcal{A})}$, deci este translaţie Q.E.D.

Corolar 7. *Mulţimea $Trans(\mathcal{A})$ a translaţiilor formează un subgrup normal a lui $Iso(\mathcal{A})$, subgrup izomorf cu $(dir(\mathcal{A}), +)$. Avem un izomorfism canonic*

$$Iso(\mathcal{A})/Trans(\mathcal{A}) \to Gl(dir(\mathcal{A})).$$

2.2. Omotetii.

Definiţie 10. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin, $O \in \mathcal{A}$ şi $\lambda \in K^*$ arbitrare, fixate. Definim o funcţie $h_{O,\lambda} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ astfel. Fie $P \in \mathcal{A}$ arbitrar; definim $h_{O,\lambda}(P) = P'$ prin*

$$\vec{OP'} = \lambda\vec{OP}.$$

Funcţia $h_{O,\lambda}$ se numeşte omotetia de centru O şi raport λ.

Propoziţie 5. *Aplicaţia $h_{O,\lambda}$ definită mai sus este corect definită şi este transformare afină.*

Demonstraţie. Din definiţie rezultă $h(O) = O$. Fie $v \in dir(\mathcal{A})$ arbitrar şi $P \in \mathcal{A}$ astfel încât $\vec{v} = \vec{OP}$. Vedem atunci că $T_O(\vec{v}) = \vec{h(O)h(P)} = \lambda\vec{v}$ deci h este transformare afină.

Corolar 8. *O transfomare afină τ este omotetie dacă şi numai dacă există $\lambda \in K^*$ astfel încât $T_\tau = \lambda_i d_{dir(\mathcal{A})}$. În particular, într-un sistem de coordonate carteziene fixat, o funcţie τ este omotetie dacă şi numai dacă este de forma*

$$\tau(X) = \lambda X + B.$$

Propoziţie 6. *a) Mulţimea $\mathcal{H}_O = \{h_{O,\lambda} | \lambda \in K^*\}$ este un grup, izomorf cu $(K^*, \cdot)$;*

b) Compunerea a două omotetii de centre arbitrare $h_{O_1,\lambda_1}, h_{O_2,\lambda_2}$ este fie o omotetie (daca $\lambda_1\lambda_1 \neq 1$), fie o translaţie (în cazul $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$) .

Demonstraţie. a) Se vede imediat că $h_{O,\lambda} \circ h_{O,\mu} = h_{O,\lambda\mu}$ deci $\mathcal{H}_O$ este închisă la compunerea funcţiilor. Cum $h_{O,\lambda}^{-1} = h_{O,\lambda^{-1}}$ vedem că $\mathcal{H}_O$ este un grup. în fine, evident aplicaţia $f : \mathcal{H}_O \to K^*, f(h_{O,\lambda}) = \lambda$ este izomorfism.

b) Dacă h_{O_1,λ_1} şi h_{O_2,λ_2} sunt două omotetii arbitrare, atunci ele au expresia în coordonate

$$h_{O_1,\lambda_1}(X) = \lambda_1 X + B_1,$$
$$h_{O_2,\lambda_2}(X) = \lambda_2 X + B_2.$$

Deducem

$$h_{O_1,\lambda_1} \circ h_{O_2\lambda_2}(X) = \lambda_1\lambda_2 X + (\lambda_1 B_2 + B_1)$$

de unde decurge imediat afirmaţia.

CAPITOLUL 4

Spaţii afine euclidiene

1. Definiţii, proprietăţi elementare

DEFINIŢIE 11. *Se numeşte spaţiu afin euclidian un spaţiu afin $\mathcal{E}$ peste corpul $\mathbb{R}$ pe a cărui direcţie $dir(\mathcal{E})$ am fixat o structură de spaţiu vectorial euclidian, i.e. un produs scalar*

$$<,>: dir(\mathcal{E}) \times dir(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}.$$

PROPOZIŢIE 7. *Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu afin euclidian şi fie $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin*

$$d(A, B) = ||\vec{AB}||.$$

Atunci $(\mathcal{E}, d)$ este un spaţiu metric.

Demonstraţie. Trebuie să demonstrăm că d satisface proprietăţile
i) $d(A, B) \geq 0, \forall A, B \in \mathcal{E}$ şi $d(A, B) = 0$ dacă şi numai dacă $A = B$;
ii) $d(A, B) = d(B, A), \forall A, B \in \mathcal{E}$;
iii) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C), \forall A, B, C \in \mathcal{E}$.

Pentru i), $d(A, B) = ||\vec{AB}|| \geq 0$ şi dacă $||\vec{AB}|| = 0$ atunci $\vec{AB} = \vec{0}$ deci $A = B$.

Pentru ii) $d(B, A) = ||\vec{BA}|| = || - \vec{AB}|| = ||\vec{AB}|| = d(A, B)$.

În fine, observăm că inegalitatea de la iii) este echivalentă prin ridicare la pătrat cu

$$||\vec{AB}||^2 + ||\vec{BC}||^2 + 2||\vec{AB}|| \cdot ||\vec{BC}|| \geq ||\vec{AC}||^2$$

ceea ce, ţinând cont că $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ şi $||\vec{AC}||^2 =< \vec{AC}, \vec{AC} >$ este echivalent cu

$$||\vec{AB}|| \cdot ||\vec{BC}|| \geq < \vec{AB}, \vec{BC} >$$

ceea ce este adevărat ("inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz").

DEFINIŢIE 12. *Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu afin euclidian şi fie $\mathcal{E}', \mathcal{E}" \subset \mathcal{E}$ subspaţii afine. Spunem că $\mathcal{E}'$ este perpendicular pe $\mathcal{E}"$ (notat $\mathcal{E}' \perp \mathcal{E}"$) dacă*

$$dir(\mathcal{E}') \perp dir(\mathcal{E}"),$$

i.e. oricare ar fi $v' \in dir(\mathcal{E}"), v" \in dir(\mathcal{E}")$ avem $< v', v" >= 0$.

OBSERVAŢIE 5. *Cu notaţiile de mai sus, dacă $\mathcal{E}' \perp \mathcal{E}"$ atunci*

$$card(\mathcal{E}" \cap \mathcal{E}") \leq 1.$$

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}" = \emptyset$ sau vreunul dintre $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}"$ are dimensiune zero, nu avem ce demonstra. Presupunem deci că $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}" \neq \emptyset$ şi fie $O_1, O_2 \in \mathcal{E}' \cap \mathcal{E}"$. Avem deci pe de o parte $\vec{O_1O_2} \in dir(\mathcal{E}')$ dar şi $\vec{O_1O_2} \in dir(\mathcal{E}")$. Dar cum $\mathcal{E}' \perp \mathcal{E}"$ deducem $< \vec{O_1O_2}, \vec{O_1O_2} >= 0$, deci $O_1 = O_2$.

Teorema 8. *("Teorema cosinusului") Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu afin euclidian şi fie $A, B, C \in \mathcal{E}$ puncte necoliniare. Notăm*

$$a = d(B, C) = ||\vec{BC}||, b = d(A, C) = ||\vec{AC}||, c = d(A, B) = ||\vec{AB}||.$$

Atunci

$$cos(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{4}$$

Demonstraţie. Din definiţia unghiului între doi vectori într-un spaţiu vectorial euclidian avem:

$$cos(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \frac{< \vec{AB}, \vec{AC} >}{||\vec{AB}|| \cdot ||\vec{AC}||}$$

Pe de altă parte, avem

$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

de unde

$$||\vec{BC}||^2 =< \vec{AC} - \vec{AB}, \vec{AC} - \vec{AB} >= ||\vec{AC}||^2 + ||\vec{AB}||^2 - 2 < \vec{AB}, \vec{AC} > .$$

Deducem

$$2 < \vec{AB}, \vec{AC} >= a^2 + b^2 - c^2$$

ceea ce demonstrează egalitatea dorită.

Corolar 9. *("Teorema lui Pitagora") Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu afin euclidian şi fie $A, B, C \in \mathcal{E}$ puncte necoliniare. Atunci dreptele AB, BC sunt perpendiculare dacă şi numai dacă*

$$d^2(A, B) + d^2(B, C) = d^2(A, C).$$

Observaţie 6. *("Teorema celor trei perpendiculare") Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu afin euclidian , $\alpha \subset \mathcal{E}$ un plan, $d_1, d_2, d_3 \subset \mathcal{E}$ drepte şi $M \in d_1$. Dacă $d_1 \perp \alpha$, $d_2, d_3 \subset \alpha$ astfel încât $d_2 \perp d_3$ şi $\{O\} = d_1 \cap d_2 \cap \alpha, \{N\} = d_2 \cap d_3$ atunci*

$$NM \perp d_3.$$

Demonstraţie. Fie $v \neq 0$, $v \in dir(d_3)$; cum $d_3 \subset \alpha$ rezultă $v \in dir(\alpha)$. Din ipoteză, cum $d_1 \perp \alpha$ avem $\vec{OM} \perp v$, deci $< v, \vec{OM} >= 0$. Pe de altă parte, $d_3 \perp d_2$ implică $v \perp \vec{ON}$ deci şi $< v, \vec{ON} >= 0$. Dar atunci

$$< v, \vec{MN} >=< v, \vec{ON} - \vec{OM} >=< v, \vec{ON} > - < v, \vec{OM} >= 0.$$

2. Geometrie analitică euclidiană

Definiţie 13. *Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu afin euclidian; un reper cartezian $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ se numeşte* reper ortonormat *dacă $\mathcal{B}$ este bază ortonormată a lui $dir(\mathcal{E})$.*

Existenţa reperelor carteziene ortonormate este asigurată de existenţa bazelor ortonormate în spaţii vectoriale euclidiene.

Fie deci $\mathcal{E}$ un spaţiu afin euclidian şi $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1,\ldots,n})$ un reper cartezian ortonormat.

Dacă $A(x_1^A, \ldots, x_n^A)$ respectiv $B(x_1^B, \ldots, x_n^B)$ sunt două puncte arbitrare din $\mathcal{E}$ atunci

$$\vec{AB} = \sum_{i=1}^{n} (x_i^B - x_i^A) e_i$$

deci, cum $\mathcal{B}$ este ortonomată deducem:

$$d(A,B) = ||\vec{AB}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^B - x_i^A)^2}.$$

În continuare vom arăta cum putem deduce ecuaţii pentru câteva configuraţii geometrice într-un spaţiu afin euclidian $\mathcal{E}$.

Hiperplanul perpendicular pe o dreaptă dată într-un punct dat.

Fie $d \subset \mathcal{E}$ o dreaptă şi $O(x_1^O, \dots, x_n^O) \in d$ un punct fixat. Cum d este dreaptă, avem $dim(dir(d)) = 1$ deci există şi este unic un subspaţiu vectorial $dir(d)^\perp \subset dir(\mathcal{E})$ astfel încât

$$dir(d) \oplus dir(d)^\perp = dir(\mathcal{E}).$$

Ca atare, $dim(dir(d)^\perp) = dim(\mathcal{E}) - 1$ şi deci unicul subspaţiu afin ce trece prin O şi are direcţia $dir(d)^\perp$ va fi un hiperplan, evident perpendicular pe d.

Acum, dacă d are ecuaţiile

$$(d): \ \frac{x_1 - x_1^O}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^O}{v_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^O}{v_n}$$

avem că $dir(d)$ este generat de $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Deci, cum

$$dir(d)^\perp = \{u | < u, v >= 0\}$$

vedem că

$$dir(d)^\perp = \{\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) | v_1u_1 + v_2u_2 + \dots + v_nu_n = 0\}.$$

Avem deci ecuaţia direcţiei hiperplanului afin căutat, deci ecuaţia sa va fi:

$$v_1(x_1 - x_1^O) + v_2(x_2 - x_2^O) + \dots + v_n(x_n - x_n^O) = 0.$$

Perpendiculara pe un hiperplan dat ce trece printr-un punct dat.

Reciproc, să presupunem că avem un hiperplan afin $\mathcal{H}$ de ecuaţie

$$(\mathcal{H}): \ a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$$

şi un punct $O(x_1^O, x_2^O, \dots, x_n^O) \in \mathcal{E}$ arbitrar. Raţionând ca la punctul anterior, deducem că orice dreaptă de direcţie generată de vectorul $\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ este perpendiculară pe $\mathcal{H}$; dacă cerem şi ca acea dreaptă să treacă prin O găsim că ea are ecuaţiile:

$$(d): \ \frac{x_1 - x_1^O}{a_1} = \frac{x_2 - x_2^O}{a_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^O}{a_n}$$

Distanţa de la un punct la un hiperplan.

Ca mai sus, presupunem că avem date un hiperplan

$$(\mathcal{H}): \ a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$$

şi un punct $O(x_1^O, x_2^O, \dots, x_n^O) \in \mathcal{E}$ arbitrar. Atunci distanţa de la O la $\mathcal{H}$ este (prin definiţie) egală cu $d(O, O')$ unde O' este unicul punct de intersecţie dintre $\mathcal{H}$ şi dreapta perpendiculară pe $\mathcal{H}$ ce trece prin O. Pentru a determina coordonatele lui O' scriem mai întâi d sub formă parametrică:

$$(d) : \begin{cases} x_1 = ta_1 + x_1^O \\ x_2 = ta_2 + x_2^O \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ x_n = ta_n + x_n^O \end{cases}$$

Determinăm valoarea lui t corespunzătoare punctului de intersecţie O' din condiţia $O' \in d \cap \mathcal{H}$;

$$a_1(ta_1 + x_1^O) + a_2(ta_2 + x_2^O) + \cdots + a_n(ta_n + x_n^O) + b = 0$$

de unde găsim

$$t_0 = -\frac{a_1x_1^O + a_2x_2^O + \cdots + a_nx_n^O + b}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Deducem că $\vec{OO'}$ are coordonatele

$$\vec{OO'} = (t_0a_1, t_0a_2, \ldots, t_0a_n).$$

Deci

$$||\vec{OO'}|| = |t_0|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

de unde rezultă

$$d(O, \mathcal{H}) = \frac{|a_1x_1^O + a_2x_2^O + \cdots + a_nx_n^O + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

3. Izometrii, teorema fundamentală a geometriei euclidiene.

DEFINIŢIE 14. *Fie $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ două spaţii afine euclidiene, de direcţii respectiv spaţiile vectoriale euclidiene $(dir(\mathcal{E}_1), <,>)$, $(dir(\mathcal{E}_2), (\ ,\ ))$. O transformare afină τ se numeşte* trasnformare ortogonală*sau* izometrie *(pe imagine) dacă urma sa vectorială*

$$T_\tau : dir(\mathcal{E}_1) \to dir(\mathcal{E}_2)$$

este aplicaţie ortogonală, i.e.

$$(T_\tau(v_1), T_\tau(v_2)) =< v_1, v_2 >, \forall v_1, v_2 \in dir(\mathcal{E}_1).$$

Spre deosebire de transformările afine, transformările ortogonale satisfac o proprietate similară morfismelor de corpuri.

OBSERVAŢIE 7. *Orice transformare ortogonală este injectivă.*

Demonstraţie. Este suficient să ne reamintim că τ este injectivă dacă şi numai dacă T_τ este injectivă şi că orice aplicaţie liniară ortogonală este injectivă. Q.E.D.

Ca atare, ne vom restrânge la studiul automorfismelor ortogonale τ ale unui spaţiu euclidian, $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$.

Evident, are loc următoarea teoremă de caracterizare în raport cu sistemele de coordonate carteziene ortogonale.

TEOREMA 9. *Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu afin euclidian şi $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un reper cartezian ortonormat fixat. O funcţie $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ este izometrie dacă şi numai dacă τ are expresia în coordonate*

$$\tau(X) = AX + B$$

unde A este matrice ortogonală, i.e. $A \cdot A^t = \mathbb{I}_n$.

Demonstraţie. Este suficient să ne reamintim că A este matricea lui T_τ în raport cu baza (ortonormată) $\mathcal{B}$ şi că o aplicaţie liniară care are matricea A este ortogonală dacă şi numai dacă A satisface relaţia $A \cdot A^t = \mathbb{I}_n$. Q.E.D.

Avem nevoie în continuare de următoarea

LEMA 2. *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu vectorial euclidian şi $T : V \to V$ o funcţie. Dacă T păstrează atât normele cât şi unghiurile, i.e.*

$$||T(v)|| = ||v||, \forall v \in V$$

şi

$$\widehat{T(u), T(v)} = \widehat{u, v}, \forall u, v \in V^*$$

atunci T este izometrie.

Demonstraţie. Deoarece $< u, v >= ||u|| \cdot ||v|| \cdot cos(\widehat{u, v})$ rezultă că T păstrează produsul scalar, i.e.

$$< T(u), T(v) >=< u, v >, \forall u, v \in V.$$

Rămâne să arătăm că T este liniară. Fie $a, b, \in \mathbb{R}$,$u, v \in V$ arbitrari. Avem

$$||T(au + bv) - aT(u) - bT(v)||^2 =$$
$$< T(au + bv) - aT(u) - bT(v), T(au + bv) - aT(u) - bT(v) >=$$
$$=< T(au + bv), T(au + bv) > +a^2 < T(u), T(u) > +b^2 < T(v), T(v) > -$$
$$-2a < T(au + bv), T(u) > -2b < T(au + bv), T(v) > +2b < T(u), T(v) >=$$
$$=< (au + bv), (au + bv) > +a^2 < u, u > +b^2 < v, v > -$$
$$-2a < (au + bv), u > -2b < (au + bv), v > +2b < u, v >=$$
$$< (au + bv) - au - bv, (au + bv) - au - bv >= 0.$$

Deducem $T(au + bv) - aT(u) - bT(v) = 0$,Q.E.D.

Putem acum demonstra

TEOREMA 10. *Fie $\mathcal{E}$ un spaţiu afin euclidian şi $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ o funcţie. Dacă τ păstrează distanţele, i.e.*

$$d(\tau(A), \tau(B)) = d(A, B), \ \forall A, B \in \mathcal{E}$$

atunci τ este izometrie.

Demonstraţie. Trebuie să demonstrăm că urma lui τ în raport cu un punct fixat $A \in \mathcal{E}$ este ortogonală. Cum τ păstreaza distanţele, din teorema cosinusului, τ va păstra şi unghiurile. Ca atare, din lema anterioară rezultă T_τ izometrie, Q.E.D.