Logică matematică și computațională
Cursul X

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

1 Algebre Boole

Algebre Boole

- În acest curs vom continua studiul **algebrelor Boole** (caz particular de latici).

Definiția unei algebre Boole

Amintim că: o **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ compusă din:

- o mulțime B,
- o relație de ordine parțială $\leq$ pe B,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe B, notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operație unară $\bar{\cdot}$ pe B,

iar aceste componente au proprietățile:

- $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este o **latice**, i. e.:
  - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(B, \leq)$;
  - $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
  - $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;

Definiția unei algebre Boole

- laticea $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este **distributivă**, i. e.:
  - $\vee$ este **distributivă** față de $\wedge$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
  - $\wedge$ este **distributivă** față de $\vee$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
  - 0 este **minimul** posetului $(B, \leq)$;
  - 1 este **maximul** posetului $(B, \leq)$;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** și satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivității**, iar $\bar{\cdot}$ este operația de **complementare**:
  - pentru orice $x \in B$, $\overline{x}$ este **unicul complement** al lui x, adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{și} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc următoarele **operații binare derivate**:

- **implicația (booleană)**, $\rightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalența (booleană)**, $\leftrightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

Filtre ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, arbitrară.
- Vom nota $\geq := \leq^{-1}$.

Definiție

O submulțime nevidă F a lui B se numește *filtru* al algebrei Boole $\mathcal{B}$ ddacă, pentru orice $x, y \in B$, următoarele condiții sunt satisfăcute:

(F_1) dacă $x, y \in F$, atunci $x \wedge y \in F$;

(F_2) dacă $x \in F$ și $x \leq y$, atunci $y \in F$.

Notație

Mulțimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathcal{F}(\mathcal{B})$.

Remarcă

Orice filtru al lui $\mathcal{B}$ îl conține pe 1. Într–adevăr, dacă F este un filtru al lui $\mathcal{B}$, atunci F este nevid prin definiție, deci există un element $x \in F$; dar, ca orice element al lui B, x satisface $x \leq 1$, prin urmare $1 \in F$, conform condiției (F_2) din definiția unui filtru.

Filtre ale unei algebre Boole

Remarcă

Este imediat că $\{1\}$ și B sunt filtre ale lui $\mathcal{B}$, iar aceste filtre sunt respectiv minimul (a se vedea remarca anterioară) și maximul posetului $(\mathcal{F}(\mathcal{B}), \subseteq)$.

Definiție

$\{1\}$ se numește *filtrul trivial* al lui $\mathcal{B}$, iar B se numește *filtrul impropriu* al lui $\mathcal{B}$. Orice filtru $F \neq \{1\}$ se numește *filtru netrivial*, și orice filtru $F \neq B$ se numește *filtru propriu* al lui $\mathcal{B}$.

Remarcă

Intersecția tuturor filtrelor lui $\mathcal{B}$ este $\{1\}$ (filtrul trivial). Acest lucru rezultă imediat din faptul că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ în sensul incluziunii.

Filtre proprii

Remarcă

Un filtru al lui $\mathcal{B}$ este propriu ddacă nu îl conține pe 0.
Într–adevăr, un filtru este egal cu B ddacă îl conține pe 0, pentru că B conține pe 0, iar, dacă un filtru F îl conține pe 0, atunci F conține toate elementele lui B, conform condiției (F_2).

Lemă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci: $F = B$ ddacă există un element $a \in B$ a. î. $a \in F$ și $\overline{a} \in F$.

Demonstrație: Dacă $F = B$, atunci $0 \in F$ și $\overline{0} = 1 \in F$.
Reciproc, dacă există un element $a \in B$ a. î. $a \in F$ și $\overline{a} \in F$, atunci, conform condiției (F_1) din definiția unui filtru, rezultă că $0 = a \wedge \overline{a} \in F$, prin urmare $F = B$, conform remarcii anterioare.

Orice filtru conține toate conjuncțiile finite între elemente ale sale

Lemă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x_1, \ldots, x_n \in F$, rezultă că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$.

Demonstrație: Pentru $n = 0$, ne amintim de la sfârșitul Cursului VII că $\inf(\emptyset) = \max(B) = 1 \in F$, pentru că orice filtru îl conține pe 1, așa cum am arătat într–o remarcă de mai sus.
Pentru $n \neq 0$, demonstrăm afirmația prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.
Pentru $n = 1$, afirmația este trivială.
Presupunem afirmația adevărată pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat. Considerăm $n + 1$ elemente $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in F$. Conform ipotezei de inducție, rezultă că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$. Acum, condiția (F_1) din definiția unui filtru arată că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n+1} = (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \wedge x_{n+1} \in F$.
Rezultă că afirmația este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Așadar, afirmația este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Filtre generate de o mulțime

Propoziție

Intersecția oricărei familii nevide de filtre ale lui $\mathcal{B}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.

Demonstrație: Fie I o mulțime nevidă și $(F_i)_{i \in I}$ o familie de filtre ale lui $\mathcal{B}$. Să notăm cu F intersecția acestei familii de filtre: $F := \bigcap_{i \in I} F_i$. Conform unei remarci de mai sus, pentru fiecare $i \in I$, $1 \in F_i$, așadar $1 \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$, deci $F \neq \emptyset$.

Demonstrăm că F satisface condiția (F_1). Fie $x, y \in F = \bigcap_{i \in I} F_i$, așadar, pentru orice $i \in I$, $x, y \in F_i$, deci, pentru orice $i \in I$, $x \wedge y \in F_i$, conform condiției (F_1) aplicate filtrelor F_i. Urmează că $x \wedge y \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$. Acum să demonstrăm că F satisface condiția (F_2). Fie $x \in F = \bigcap_{i \in I} F_i$, ceea ce înseamnă că, pentru orice $i \in I$, $x \in F_i$. Acum, fie $y \in B$, a. î. $x \leq y$. Rezultă că, pentru orice $i \in I$, $y \in F_i$, conform condiției (F_2) aplicate filtrelor F_i. Așadar, $y \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$.

Am demonstrat că $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.

Filtre generate de o mulțime

Corolar

Pentru orice submulțime X a lui B, există un cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include pe X, anume intersecția tuturor filtrelor lui $\mathcal{B}$ care includ pe X.

Demonstrație: Fie X o submulțime arbitrară a lui B. Familia filtrelor lui $\mathcal{B}$ care includ pe X, fie aceasta $\mathcal{F}$, este nevidă, pentru că această familie conține filtrul impropriu, B. Conform propoziției anterioare, rezultă că intersecția familiei $\mathcal{F}$ este un filtru, care, evident, include pe X, fie acesta F. Înseamnă că $F \in \mathcal{F}$, conform definiției familiei $\mathcal{F}$. Dar $F = \bigcap\limits_{G \in \mathcal{F}} G$, așadar F este inclus în fiecare $G \in \mathcal{F}$. Prin urmare, F este minimul posetului $(\mathcal{F}, \subseteq)$, i. e. F este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include pe X.

Definiție

Pentru orice submulțime X a lui B, cel mai mic filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$ care include pe X se notează cu $[X)$ sau $< X >$ și se numește *filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X*.

Pentru orice element $x \in B$, filtrul generat de singletonul $\{x\}$ se notează cu $[x)$ sau $< x >$ și se numește *filtrul principal al lui $\mathcal{B}$ generat de x*.

Elementele filtrelor generate

Remarcă (caracterizarea filtrelor generate)

Definiția unui filtru generat arată că, pentru orice $X \subseteq B$, $F = [X)$ ddacă mulțimea F satisface următoarele trei condiții:

1. F este un filtru al lui $\mathcal{B}$;
2. $X \subseteq F$;
3. pentru orice filtru G al lui $\mathcal{B}$, dacă $X \subseteq G$, atunci $F \subseteq G$.

Ultima dintre aceste trei condiții afirmă că, dacă un filtru G al lui $\mathcal{B}$ include o submulțime X a lui B, atunci G include filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X.

Remarcă

Conform remarcii care arată că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$, urmează că $[\emptyset) = \{1\}$.

Elementele filtrelor generate

Propoziție

Pentru orice submulțime nevidă X a lui B,
$[X) = \{a \in B \mid (\exists n \in \mathbb{N}^*)(\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in X) x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a\}$.

Demonstrație: Fie
$F := \{a \in B \mid (\exists n \in \mathbb{N}^*)(\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in X) x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a\}$. Demonstrăm că $F = [X)$, folosind remarca de mai sus privind caracterizarea filtrelor generate.
Pentru început, să arătăm că F este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
Fie $x, y \in F$. Atunci, conform definiției mulțimii F, există $n, m \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$ a. î. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x$ și $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_m \leq y$. Conform unei propoziții din Cursul VI, rezultă că $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_m \leq x \wedge y$, așadar $x \wedge y \in F$.
Acum, fie $x \in F$ și $y \in B$, a. î. $x \leq y$. Faptul că $x \in F$ înseamnă că există $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ a. î. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x$, iar de aici, din relația $x \leq y$ și din tranzitivitatea lui $\leq$, obținem $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y$, ceea ce arată că $y \in F$.
Am demonstrat că F este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
Pentru orice $x \in X$, are loc $x \leq x$, așadar $x \in F$. Prin urmare, $X \subseteq F$.

Elementele filtrelor generate

Fie G un filtru al lui $\mathcal{B}$ a. î. $X \subseteq G$, și fie $x \in F$. Arătăm că rezultă $x \in G$. Faptul că $x \in F$ arată că există $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ a. î. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x$. Dar $X \subseteq G$, așadar $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$, prin urmare $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in G$, conform lemei anterioare, și deci $x \in G$ conform proprietății (F_2) din definiția unui filtru.
Așadar, $F \subseteq G$.
Conform remarcii de mai sus privind caracterizarea filtrelor generate, am demonstrat că $F = [X)$.

Corolar

Pentru orice $x \in B$, $[x) = \{a \in B \mid x \leq a\}$.

Demonstrație: Se aplică propoziția anterioară și idempotența lui $\wedge$, din care, prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$, se demonstrează imediat că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\bigwedge_{i=1}^{n} x = x$.

Elementele filtrelor generate

Corolar

Pentru orice filtru F al lui $\mathcal{B}$ și orice element $x \in B$,
$[F \cup \{x\}) = \{a \in B \mid (\exists f \in F) f \wedge x \leq a\}$.

Demonstrație: Fie $G := \{a \in B \mid (\exists f \in F) f \wedge x \leq a\}$.
Fie $a \in [F \cup \{x\})$. Conform propoziției privind forma filtrului generat de o mulțime, aceasta înseamnă că există $n \in \mathbb{N}^*$ și există $x_1, \ldots, x_n \in F \cup \{x\}$, a. î. $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a$.
Asociativitatea și comutativitatea lui $\wedge$ ne asigură de faptul că putem presupune că $x_1, \ldots, x_k \in F$ și $x_{k+1} = \ldots = x_n = x$, pentru un $k \in \overline{0, n}$, unde $k = 0$ înseamnă că $x_1 = \ldots = x_n = x$, iar $k = n$ înseamnă că $x_1, \ldots, x_n \in F$.
Idempotența lui $\wedge$ arată că $x_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_n = x \wedge \ldots \wedge x = x$, atunci când $k < n$.
Fie $f := x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$, cu $f := 1$ atunci când $k = 0$. Conform unei leme de mai sus, are loc $f \in F$.

Am obținut că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \begin{cases} f, & k = n, \\ f \wedge x, & k < n. \end{cases}$

Elementele filtrelor generate

Dar $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a$, așadar, dacă are loc $k < n$, atunci $f \wedge x \leq a$, iar, dacă are loc $k = n$, atunci $f \wedge x = \inf\{f, x\} \leq f \leq a$, prin urmare, și în acest caz, $f \wedge x \leq a$ (datorită tranzitivității lui $\leq$).
Am obținut că $a \in G$, deci $[F \cup \{x\}) \subseteq G$.
Acum fie $a \in G$, adică există $f \in F$ a. î. $f \wedge x \leq a$.
$f \in F$, așadar $f, x \in F \cup \{x\} \subseteq [F \cup \{x\})$, deci $f, x \in [F \cup \{x\})$, iar $[F \cup \{x\})$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, prin urmare $f \wedge x \in [F \cup \{x\})$, conform condiției (F_1), și deci $a \in [F \cup \{x\})$, conform condiției (F_2) din definiția unui filtru.
Am obținut și $G \subseteq [F \cup \{x\})$.
Așadar, $[F \cup \{x\}) = G = \{a \in B \mid (\exists f \in F) f \wedge x \leq a\}$.

Altă demonstrație: Se putea urma și această cale în demonstrația acestui corolar: este ușor de arătat că mulțimea G definită mai sus este un filtru și că $F \cup \{x\} \subseteq G$; acum, ultimul punct din remarca privind caracterizarea filtrelor generate arată că $[F \cup \{x\}) \subseteq G$; apoi, ca mai sus, se demonstrează cealaltă incluziune.

Ultrafiltre ale unei algebre Boole

Definiție

Un filtru propriu P al lui $\mathcal{B}$ se numește *filtru prim* ddacă, pentru orice $a, b \in B$, $a \vee b \in P$ implică $a \in P$ sau $b \in P$.

Definiție

Un element maximal al mulțimii filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$ (raportat la incluziune) se numește *filtru maximal* sau *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$.
Cu alte cuvinte, un *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$ este un filtru propriu U a. î., pentru orice filtru propriu F, $U \subseteq F$ implică $U = F$.
Altfel formulat, un *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$ este un filtru propriu U cu proprietatea că, pentru orice filtru F, $U \subseteq F$ implică $U = F$ sau $F = B$.

Notație

Mulțimea ultrafiltrelor (filtrelor maximale ale) lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Max}(\mathcal{B})$.

Filtre prime ale unei algebre Boole

Lemă

Fie P un filtru al lui $\mathcal{B}$ și $a, b \in B$. Atunci:

1. *$a \wedge b \in P$ ddacă $a \in P$ și $b \in P$;*
2. *dacă P este un filtru prim, atunci: $a \vee b \in P$ ddacă $a \in P$ sau $b \in P$.*

Demonstrație: (1) Implicația directă se obține din condiția (F_2) din definiția unui filtru și faptul că $a \wedge b = \inf\{a, b\} \leq a$ și $a \wedge b = \inf\{a, b\} \leq b$. Implicația reciprocă rezultă din condiția (F_1) din definiția unui filtru.
(2) Implicația directă se obține din definiția unui filtru prim. Implicația reciprocă rezultă din condiția (F_2) din definiția unui filtru și faptul că $a \leq \sup\{a, b\} = a \vee b$ și $b \leq \sup\{a, b\} = a \vee b$.

Ultrafiltrele coincid cu filtrele prime

Propoziție (caracterizare a ultrafiltrelor)

Fie U un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$;*
2. *U este un filtru prim al lui $\mathcal{B}$;*
3. *orice element $a \in B$ satisface: $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$.*

Demonstrație: (1) $\Rightarrow$ (2): Ipoteza acestei implicații spune că U este ultrafiltru. Presupunem prin absurd că U nu este filtru prim, i. e. există $a, b \in B$ a. î. $a \vee b \in U$, $a \notin U$ și $b \notin U$.
Dar $a \in U \cup \{a\} \subseteq [U \cup \{a\})$ și $U \subseteq [U \cup \{a\})$, iar $b \in U \cup \{b\} \subseteq [U \cup \{b\})$ și $U \subseteq [U \cup \{b\})$.
Prin urmare, $U \subseteq [U \cup \{a\})$, iar $a \in [U \cup \{a\})$ și $a \notin U$, și, de asemenea, $U \subseteq [U \cup \{b\})$, iar $b \in [U \cup \{b\})$ și $b \notin U$.
Rezultă că $U \subsetneq [U \cup \{a\})$ și $U \subsetneq [U \cup \{b\})$, prin urmare $[U \cup \{a\}) = [U \cup \{b\}) = B$, întrucât U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$. Acest fapt este echivalent cu $0 \in [U \cup \{a\})$ și $0 \in [U \cup \{b\})$, în conformitate cu o caracterizare de mai sus a filtrelor proprii.

Ultrafiltrele coincid cu filtrele prime

Conform unui corolar anterior, $[U \cup \{a\}) = \{x \in B \mid (\exists\, e \in U)\, e \wedge a \leq x\}$ și $[U \cup \{b\}) = \{x \in B \mid (\exists\, f \in U)\, f \wedge b \leq x\}$.
Prin urmare, există $e, f \in U$ a. î. $a \wedge e = b \wedge f = 0$.
Aplicând distributivitatea lui $\mathcal{B}$, obținem:
$0 = (a \wedge e) \vee (b \wedge f) = (a \vee b) \wedge (a \vee f) \wedge (e \vee b) \wedge (e \vee f) \in U$, pentru că $a \vee b \in U$, $a \vee f = \sup\{a, f\} \geq f \in U$, $e \vee b = \sup\{e, b\} \geq e \in U$, $e \vee f = \sup\{e, f\} \geq f \in U$, și datorită condițiilor (F_2) și (F_1) din definiția unui filtru. Dar acest lucru înseamnă că $U = B$, conform aceleiași caracterizări a filtrelor proprii la care am apelat și mai înainte. Dar U este un ultrafiltru, deci, în particular, U este un filtru propriu. Am obținut o contradicție.
Prin urmare, U este un filtru prim al lui $\mathcal{B}$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Ipoteza acestei implicații spune că U este filtru prim. Pentru orice $a \in B$, $a \vee \overline{a} = 1 \in U$, pentru că orice filtru conține pe 1, iar acum definiția unui filtru prim arată că $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ a. î. $U \subsetneq F$, așadar există un element $a \in F \setminus U$. Conform ipotezei acestei implicații, faptul că $a \notin U$ implică $\overline{a} \in U \subset F$, prin urmare $a \in F$ și $\overline{a} \in F$, deci $F = B$ conform unei caracterizări a filtrelor proprii dintr–o lemă de mai sus. Dar acest lucru înseamnă că U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$, datorită chiar definiției ultrafiltrelor.

Ultrafiltre ale unei algebre Boole

Corolar (caracterizare a ultrafiltrelor)

Fie U un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$;*
2. *oricare ar fi $a \in B$,* **exact** *unul dintre elementele a și $\overline{a}$ se află în U;*
3. *oricare ar fi $a \in B$, are loc echivalența: $a \in U$ ddacă $\overline{a} \notin U$.*

Demonstrație: $(1) \Rightarrow (2)$: Fie $a \in B$, arbitrar, fixat. Dacă U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$, atunci, conform propoziției anterioare, $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$, și, în plus, U este un filtru prim, așadar nu putem avea simultan $a \in U$ și $\overline{a} \in U$, cum arată o caracterizare a filtrelor proprii dintr–o lemă de mai sus. Înseamnă că **exact** unul dintre elementele a și $\overline{a}$ aparține lui U.
$(2) \Rightarrow (1)$: Ipoteza acestei implicații arată că nu există $a \in B$, a. î. $a \in U$ și $\overline{a} \in U$, prin urmare U este un filtru propriu, conform aceleiași caraterizări a filtrelor proprii dintr–o lemă de mai sus. Deci U este un filtru propriu și, conform ipotezei acestei implicații, oricare ar fi $a \in B$, avem $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$, ceea ce înseamnă că U este un ultrafiltru, după cum arată propoziția anterioară.
$(2) \Leftrightarrow (3)$: Afirmația (3) este o simplă transcriere a lui (2), dacă ținem seama de idempotența operației de complementare ($\overline{\overline{a}} = a$, pentru orice $a \in B$).

Mulțimi inductiv ordonate

- În continuare, vom face o serie de preparative pentru demonstrarea celei mai importante teoreme din teoria algebrelor Boole, anume **Teorema de reprezentare a lui Stone**.
- Pentru definițiile elementelor distinse ale unui poset cu care vom lucra în continuare (majorant, element maximal), a se vedea Cursul V.

Definiție

O *mulțime inductiv ordonată* este un poset cu proprietatea că orice parte total ordonată a sa are (cel puțin) un majorant.

- În definiția anterioară, **parte total ordonată** a unui poset $(P, \leq)$ înseamnă submulțime S a lui P care este lanț cu ordinea indusă (**ordinea indusă** este $\leq \cap S^2$), i. e. submulțime $S \subseteq P$ cu proprietatea că oricare două elemente ale submulțimii S sunt comparabile în posetul $(P, \leq)$.

Remarcă

Orice mulțime inductiv ordonată este nevidă, pentru că ea conține măcar un element, anume un majorant al submulțimii $\emptyset$ a ei.

Remarcă

După cum am demonstrat la sfârșitul Cursului VII, orice element al unui poset nevid este majorant pentru $\emptyset$.

Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn

Remarcă

Cele două remarci anterioare arată că, pentru a demonstra că un poset este mulțime inductiv ordonată, este suficient să demonstrăm că:

- posetul este nevid;
- orice parte total ordonată **nevidă** a sa are (cel puțin) un majorant.

Lemă (Lema lui Zorn)

Orice mulțime inductiv ordonată are (cel puțin) un element maximal.

- Pentru demonstrația **Lemei lui Zorn**, a se consulta cărțile din bibliografia din Cursul I. De asemenea, numeroase cărți de noțiuni de bază de algebră superioară conțin demonstrația acestei leme.
- Acest enunț este uneori întâlnit sub numele de **Axioma lui Zorn**. Motivul este că enunțul acesta este echivalent cu **Axioma alegerii**, și unii autori îl includ în sistemul axiomatic al teoriei mulțimilor în locul **Axiomei alegerii**, care, în acest caz, devine **Lema alegerii**.

Teorema de existență a ultrafiltrului

Cunoaștem aceste definiții:

- *algebra Boole trivială* este algebra Boole cu un singur element, i. e. algebra Boole cu $0 = 1$;
- *o algebră Boole netrivială* este o algebră Boole care nu este trivială, i. e. o algebră Boole cu cel puțin două elemente, i. e. o algebră Boole cu $0 \neq 1$.

Remarcă

Este evident, din faptul că filtrul trivial $\{1\}$ este inclus în orice filtru al lui $\mathcal{B}$, că au loc echivalențele: $\mathcal{B}$ are filtre proprii ddacă $\{1\}$ este filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ ddacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole netrivială.

Teoremă (Teorema de existență a ultrafiltrului)

Orice filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ este inclus într–un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$.
Cu alte cuvinte, pentru orice filtru propriu F al lui $\mathcal{B}$, există un ultrafiltru U al lui $\mathcal{B}$, a. î. $F \subseteq U$.

Demonstrație: Fie F un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$.

Teorema de existență a ultrafiltrului

Notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$ care îl includ pe F:
$\mathcal{P} := \{G \mid G \in \mathcal{F}(\mathcal{B}), G \neq B, G \supseteq F\}$.
Demonstrăm că $(\mathcal{P}, \subseteq)$ este o mulțime inductiv ordonată.
Evident, $F \in \mathcal{P}$, așadar $\mathcal{P} \neq \emptyset$.
Fie $\mathcal{T}$ o parte total ordonată nevidă a lui $\mathcal{P}$ (i. e. $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$, și, oricare ar fi $G, H \in \mathcal{T}$, avem: $G \subseteq H$ sau $H \subseteq G$).
Notăm cu $M := \bigcup\limits_{G \in \mathcal{T}} G$. Demonstrăm că M este un majorant al lui $\mathcal{T}$ în $(\mathcal{P}, \subseteq)$.
Evident, pentru orice $G \in \mathcal{T}$, $M \supseteq G$, deci M este un majorant al lui $\mathcal{T}$ în mulțimea părților lui $\mathcal{B}$, ordonată cu $\subseteq$. Mai avem de demonstrat că $M \in \mathcal{P}$, i. e. că M este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ care îl include pe F.
Să nu uităm că $\mathcal{T} \neq \emptyset$.
Fiecare element al lui $\mathcal{P}$ îl include pe F, prin urmare fiecare $G \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$ satisface $G \supseteq F$, așadar $M = \bigcup\limits_{G \in \mathcal{T}} G \supseteq F$.
Acum să demonstrăm că M este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
$M \supseteq F \neq \emptyset$ (pentru că F este filtru), deci $M \neq \emptyset$.

Teorema de existență a ultrafiltrului

Să demonstrăm că M satisface condiția (F_1) din definiția unui filtru. Fie $x, y \in M = \bigcup_{G \in \mathcal{T}} G$, așadar există $G, H \in \mathcal{T}$, a. î. $x \in G$ și $y \in H$. Dar $(\mathcal{T}, \subseteq)$ este total ordonată, deci $G \subseteq H$ sau $H \subseteq G$. Dacă, de exemplu, $G \subseteq H$, atunci rezultă că $x, y \in H$, iar H este un filtru al lui $\mathcal{B}$, deci satisface condiția (F_1), așadar $x \wedge y \in H \subseteq M$, prin urmare $x \wedge y \in M$. Cazul $H \subseteq G$ se tratează analog. Deci M satisface condiția (F_1).

Acum să demonstrăm că M satisface condiția (F_2) din definiția unui filtru. Fie $x \in M$ și $y \in B$, cu $x \leq y$. $x \in M = \bigcup_{G \in \mathcal{T}} G$, așadar există $G \in \mathcal{T}$ a. î. $x \in G$. Dar G este un filtru al lui $\mathcal{B}$, deci satisface condiția (F_2), iar $x \leq y$, așadar $y \in G \subseteq M$, prin urmare $y \in M$. Deci M satisface condiția (F_2).

Am demonstrat că M este un filtru al lui $\mathcal{B}$.

Fiecare $G \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$ este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$, deci $0 \notin G$, conform unei caracterizări a filtrelor proprii. Rezultă că $0 \notin \bigcup_{G \in \mathcal{T}} G = M$, deci M este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$, conform aceleiași caracterizări a filtrelor proprii.

Prin urmare, $M \in \mathcal{P}$, deci M este un majorant al lui $\mathcal{T}$ în posetul $(\mathcal{P}, \subseteq)$.

Am demonstrat că $(\mathcal{P}, \subseteq)$ este o mulțime inductiv ordonată.

Teorema de existență a ultrafiltrului

Conform **Lemei lui Zorn**, rezultă că $(\mathcal{P}, \subseteq)$ are (cel puțin) un element maximal. Fie U un element maximal al lui $(\mathcal{P}, \subseteq)$.
Atunci $U \in \mathcal{P}$, deci U este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ și $U \supseteq F$.
Fie P un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ a. î. $U \subseteq P$. Cum $F \subseteq U$, rezultă că $F \subseteq P$.
Așadar P este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ care îl include pe F, adică $P \in \mathcal{P}$. Dar U este un element maximal al lui $(\mathcal{P}, \subseteq)$, iar $P \in \mathcal{P}$ și $U \subseteq P$. Conform definiției unui element maximal al unui poset, rezultă că $U = P$.
Așadar, U este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ și, pentru orice filtru propriu P al lui $\mathcal{B}$ cu $U \subseteq P$, rezultă că $U = P$. Deci U este un element maximal al mulțimii filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$, adică U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$.
Am demonstrat că U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$ și $F \subseteq U$.

Corolar

Orice algebră Boole netrivială are (cel puțin) un ultrafiltru.

Demonstrație: Conform remarcii care precedă **Teorema de existență a ultrafiltrului**, dacă algebra Boole $\mathcal{B}$ este netrivială, atunci $\mathcal{B}$ are cel puțin un filtru propriu, de exemplu filtrul trivial $\{1\}$. Aplicând **Teorema de existență a ultrafiltrului**, rezultă că $\mathcal{B}$ are (cel puțin) un ultrafiltru care include acest filtru propriu.

Caracterizare a injectivității morfismelor booleene

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm încă o algebră Boole $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, arbitrară.

Remarcă

Pentru orice morfism boolean $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, au loc:

- $f(0) = 0$, deci $0 \in f^{-1}(\{0\})$, adică $\{0\} \subseteq f^{-1}(\{0\})$;
- $f(1) = 1$, deci $1 \in f^{-1}(\{1\})$, adică $\{1\} \subseteq f^{-1}(\{1\})$.

Propoziție

Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism boolean. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *f este injectiv;*
2. $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$;
3. $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$.

Demonstrație: $(1) \Rightarrow (3)$: Fie $x \in f^{-1}(\{1\})$, ceea ce este echivalent cu $f(x) \in \{1\}$, i. e. $f(x) = 1$. Dar $f(1) = 1$, așadar faptul că f e injectivă implică $x = 1$, i. e. $x \in \{1\}$. Deci $f^{-1}(\{1\}) \subseteq \{1\}$, iar cealaltă incluziune are loc pentru orice morfism boolean, prin urmare $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$.

Caracterizare a injectivității morfismelor booleene

$(3) \Rightarrow (1)$: Fie $x, y \in A$, a. î. $f(x) = f(y)$, ceea ce este echivalent cu $f(x) \leftrightarrow f(y) = 1$, conform unei proprietăți aritmetice a algebrelor Boole demonstrate la sfârșitul Cursului IX. Dar orice morfism boolean comută cu echivalența booleană, prin urmare $f(x) \leftrightarrow f(y) = f(x \leftrightarrow y)$. Am obținut: $f(x \leftrightarrow y) = 1$, i. e. $x \leftrightarrow y \in f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$, deci $x \leftrightarrow y = 1$, ceea ce este echivalent cu $x = y$, conform aceleiași proprietăți aritmetice la care am făcut apel și mai sus. Am demonstrat că f este injectivă.
Echivalența $(1) \Leftrightarrow (2)$ rezultă, prin dualitate, din echivalența $(1) \Leftrightarrow (3)$, pe care tocmai am demonstrat–o.
Un alt mod de a încheia demonstrația acestei propoziții este demonstrarea echivalenței $(2) \Leftrightarrow (3)$, care poate fi efectuată astfel: pentru orice $x \in A$, au loc echivalențele: $x \in f^{-1}(\{0\})$ ddacă $f(x) = 0$ ddacă $\overline{f(x)} = \overline{0}$ (a se vedea, din nou, sfârșitul Cursului IX) ddacă $f(\overline{x}) = 1$ ddacă $\overline{x} \in f^{-1}(\{1\})$. Așadar, dacă $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, atunci, pentru orice $x \in A$, avem: $x = \overline{\overline{x}} \in f^{-1}(\{1\})$ ddacă $\overline{x} \in f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ddacă $\overline{x} = 0$ ddacă $x = \overline{\overline{x}} = \overline{0} = 1$ ddacă $x \in \{1\}$; deci $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$. Reciproc, dacă $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$, atunci, pentru orice $x \in A$, avem: $x \in f^{-1}(\{0\})$ ddacă $\overline{x} \in f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ ddacă $\overline{x} = 1$ ddacă $x = \overline{\overline{x}} = \overline{1} = 0$ ddacă $x \in \{0\}$; deci $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Teorema de reprezentare a lui Stone

Remarcă

Algebra Boole trivială este izomorfă cu $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ și cu $\mathcal{L}_2^{\emptyset} = \{f \mid f : \emptyset \to \mathcal{L}_2\} = \{(\emptyset, \emptyset, \mathcal{L}_2)\}$ (acest triplet este, după cum știm, unica funcție de la $\emptyset$ la $\mathcal{L}_2$).

- Pentru o formulare clară a următoarelor două rezultate, vom renunța, în cele ce urmează, la fixarea algebrei Boole $\mathcal{B}$.

Teoremă (Teorema de reprezentare a lui Stone)

Pentru orice algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, X)$.

Demonstrație: Fie $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o algebră Boole netrivială și $X := \mathrm{Max}(\mathcal{B})$ (X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$).
Conform corolarului **Teoremei de existență a ultrafiltrului**, $X \neq \emptyset$.
Să definim o funcție $d : B \to \mathcal{P}(X)$, prin: pentru orice $a \in B$, $d(a) := \{U \in X \mid a \in U\}$.

Teorema de reprezentare a lui Stone

Fie $a, b \in B$ și $U \in X$, toate arbitrare și fixate. Din lema care succede definiția ultrafiltrelor și faptul că ultrafiltrele coincid cu filtrele prime, cunoscut din propoziția privind caracterizarea ultrafiltrelor, obținem:

$$\begin{array}{rll} U \in d(a \wedge b) & \text{ddacă} & a \wedge b \in U \\ & \text{ddacă} & a \in U \text{ și } b \in U \\ & \text{ddacă} & U \in d(a) \text{ și } U \in d(b) \\ & \text{ddacă} & U \in d(a) \cap d(b) \end{array}$$

și

$$\begin{array}{rll} U \in d(a \vee b) & \text{ddacă} & a \vee b \in U \\ & \text{ddacă} & a \in P \text{ sau } b \in P \\ & \text{ddacă} & P \in d(a) \text{ sau } P \in d(b) \\ & \text{ddacă} & P \in d(a) \cup d(b). \end{array}$$

Am obținut: $d(a \wedge b) = d(a) \cap d(b)$ și $d(a \vee b) = d(a) \cup d(b)$, pentru orice $a, b \in B$.

Cum orice filtru îl conține pe 1, are loc: $d(1) = X$. Întrucât orice ultrafiltru este filtru propriu, iar niciun filtru propriu nu îl conține pe 0, are loc: $d(0) = \emptyset$.

Conform unei propoziții din Cursul IX, rezultă că d comută și cu operația de complementare (fapt care putea fi demonstrat și folosind corolarul privind caracterizarea ultrafiltrelor), așadar d este un morfism boolean.

Teorema de reprezentare a lui Stone

Pentru încheierea demonstrației, a rămas de arătat că d este injectiv.
Fie $a \in d^{-1}(\{\emptyset\})$, ceea ce este echivalent cu: $d(a) = \emptyset$. Presupunem prin absurd că $a \neq 0$. Atunci filtrul principal $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ nu îl conține pe 0, prin urmare $[a)$ este un filtru propriu, conform unei caracterizări a filtrelor proprii. Din **Teorema de existență a ultrafiltrului**, rezultă că există un ultrafiltru U cu $[a) \subseteq U$. Dar $a \in [a)$, prin urmare $a \in U$, adică $U \in d(a) = \emptyset$; am obținut o contradicție. Așadar, $a = 0$, adică $d^{-1}(\{\emptyset\}) \subseteq \{0\}$, deci $d^{-1}(\{\emptyset\}) = \{0\}$, întrucât cealaltă incluziune este satisfăcută de orice morfism boolean de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{P}(X)$. Această egalitate arată că morfismul boolean d este injectiv, conform propoziției anterioare.

Corolar (reformulare a Teoremei de reprezentare a lui Stone)

Pentru orice algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2^X$.

Demonstrație: Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole netrivială. Conform **Teoremei de reprezentare a lui Stone**, există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(X)$. Conform propoziției care încheie Cursul VIII, există un izomorfism boolean $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{L}_2^X$. Prin urmare, compunerea $\varphi \circ d : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2^X$ este un morfism boolean injectiv.