Logică matematică și computațională
Cursul VI

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

- În acest curs vom studia **laticile**, care sunt un caz particular de poseturi, i. e. poseturi cu anumite proprietăți specifice.

Amintim:

Definiție

Se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* ("partially ordered set") o pereche $(L, \leq)$ formată dintr–o mulțime L și o **relație de ordine** $\leq$ pe L, i. e.:

- $\leq$ este o **relație binară** pe L: $\leq \subseteq L^2 := L \times L$
- $\leq$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in L$, $x \leq x$
- $\leq$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in L$, $x \leq y$ și $y \leq z$ implică $x \leq z$
- $\leq$ este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ și $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relația de ordine $\leq$ este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci $(L, \leq)$ se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Latici

- La fel ca în cazul structurilor algebrice studiate în liceu, cu notațiile din definiția de mai sus, spunem că L este *mulțimea subiacentă* sau *mulțimea suport a* structurii $(L, \leq)$.
- Aceste denumiri sunt valabile și pentru latici și algebre Boole, structuri pe care le vom studia în cele ce urmează.
- Adesea, poseturile, laticile, algebrele Boole etc. vor fi referite prin mulțimile lor subiacente, fără a le mai preciza întreaga structură algebrică, cu menționarea relației de ordine și/sau a operațiilor.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

Fie $(L, \leq)$ un poset și $X \subseteq L$. Următoarele noțiuni se definesc relativ la posetul $(L, \leq)$, i. e. în posetul $(L, \leq)$.

- Un element $m \in L$ se numește *minorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $m \leq x$.
- Un element $M \in L$ se numește *majorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $x \leq M$.
- Un element al lui X se numește *minimul lui* X, și se notează cu $\min(X)$, ddacă este minorant pentru X.
- Un element al lui X se numește *maximul lui* X, și se notează cu $\max(X)$, ddacă este majorant pentru X.
- $(L, \leq)$ se numește *poset mărginit* ddacă L are minim și maxim.
- *Infimumul lui* X este cel mai mare minorant al lui X, adică maximul mulțimii minoranților lui X, și se notează cu $\inf(X)$.
- *Supremumul lui* X este cel mai mic majorant al lui X, adică minimul mulțimii majoranților lui X, și se notează cu $\sup(X)$.

Elemente distinse într–un poset

Remarcă

O submulțime a unui poset poate să nu aibă niciun minorant sau să aibă mai mulți minoranți. La fel pentru majoranți.
Minimul unei submulțimi a unui poset nu există întotdeauna, dar, dacă există, atunci este unic. La fel pentru maxim, infimum și supremum.

- Unicitatea minimului, a maximului, a infimumului și a supremumului, cu alte cuvinte faptul că aceste noțiuni, aplicate unei submulțimi X a unui poset considerat **fixat**, sunt unic determinate de X, justifică notațiile lor: $\min(X)$, $\max(X)$, $\inf(X)$ și $\sup(X)$.

Elemente distinse într–un poset

Remarcă

Din definiția infimumului și a supremumului, rezultă următoarele caracterizări, unde $(L, \leq)$ este un poset și $X \subseteq L$:

- există $\inf(X) = m \in L$ ddacă:
    - pentru orice $x \in X$, $m \leq x$ și
    - oricare ar fi $a \in L$ a. î., pentru orice $x \in X$, $a \leq x$, rezultă că $a \leq m$
- există $\sup(X) = M \in L$ ddacă:
    - pentru orice $x \in X$, $x \leq M$ și
    - oricare ar fi $a \in L$ a. î., pentru orice $x \in X$, $x \leq a$, rezultă că $M \leq a$

Remarcă

Din definițiile noțiunilor de maxim, minim, supremum și infimum se deduc imediat afirmațiile următoare, valabile pentru orice poset $(L, \leq)$ și orice $X \subseteq L$:

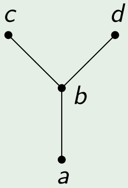
- există $\sup(X) \in X$ ddacă există $\max(X)$ în L, și în acest caz $\sup(X) = \max(X)$
- există $\inf(X) \in X$ ddacă există $\min(X)$ în L, și în acest caz $\inf(X) = \min(X)$

Diagrama Hasse a unui poset

- Amintim că orice poset finit poate fi reprezentat printr–o **diagramă Hasse**, care este un graf neorientat având drept noduri elementele posetului, în care elementele "mai mari" sunt reprezentate "mai sus" față de cele "mai mici", și în care există muchie între două noduri ddacă unul dintre elementele posetului reprezentate de cele două noduri este "strict mai mic" decât celălalt și "între cele două elemente" nu este "cuprins strict" niciun alt element.
- Relația de ordine (parțială) reprezentată de o diagramă Hasse este formată din perechile corespunzătoare muchiilor din diagrama Hasse, la care se adaugă buclele și muchiile obținute "prin tranzitivitate".

Exemplu

Posetul dat de diagrama Hasse:



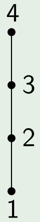
este: $(L, \leq)$, cu:

- $L = \{a, b, c, d\}$ și
- $\leq = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (d, d)\}$.

Diagrama Hasse a unui poset

Exemplu

Posetul dat de diagrama Hasse:



este lanțul cu 4 elemente: $(\mathcal{L}_4, \leq)$, cu:

- $\mathcal{L}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ și
- $\leq = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2,), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$.

Amintim că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanțul cu n elemente, a cărui relație de ordine este unic determinată modulo o permutare a celor n elemente ale sale.

Latice Ore

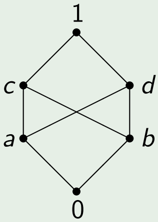
- O latice este simultan un poset și o structură algebrică înzestrată cu două operații binare, fiecare dintre acestea cu anumite proprietăți specifice. Vom defini mai jos două tipuri de latici, anume *laticile Ore* și *laticile Dedekind*, și apoi vom demonstra că orice latice Ore poate fi organizată ca o latice Dedekind, și orice latice Dedekind poate fi organizată ca o latice Ore; așadar, vom arăta că, de fapt, există un singur fel de latice, care este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.

Definiție

O *latice Ore* este un poset $(L, \leq)$ cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\} \in L$ și $\sup\{x, y\} \in L$.

Poset finit și mărginit care nu este latice Ore

Exemplu

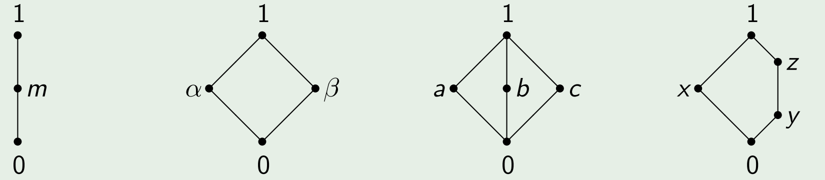


În acest poset mărginit, submulțimea $\{a, b\}$ nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților săi este $\{c, d, 1\}$, care nu are minim ($c \leq 1$, $d \leq 1$ și c și d sunt *incomparabile*, i. e. $c \nleq d$ și $d \nleq c$).
În mod similar, submulțimea $\{c, d\}$ nu are infimum, pentru că mulțimea minoranților săi este $\{0, a, b\}$, care nu are maxim ($0 \leq a$, $0 \leq b$ și a și b sunt incomparabile).
Așadar, acest poset nu este o latice Ore, cu toate că este mărginit, așa cum vom vedea că sunt toate laticile finite.

Latice Ore

Exemplu

Următoarele poseturi sunt latici Ore, după cum se poate verifica direct:



$\mathcal{L}_3$ *rombul* *diamantul* *pentagonul*

Latice Dedekind

Definiție

O *latice Dedekind* este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$, unde L este o mulțime, iar $\vee$ și $\wedge$ sunt două operații binare pe L (notate infixat și numite respectiv *sau* și *și*, sau *disjuncție* și *conjuncție*, sau *reuniune* și *intersecție*) care satisfac următoarele proprietăți:

- **idempotență:** pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$ și $x \wedge x = x$;
- **comutativitate:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ și $x \wedge y = y \wedge x$;
- **asociativitate:** pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ și $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- **absorbție:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$.

Exemplu

Pentru orice mulțime T, se verifică ușor că $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este o latice Dedekind.

Amintim din cursul anterior:

Lemă

Fie $(L, \leq)$ *un poset. Atunci, pentru orice* $x, y \in L$, *următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $x \leq y$
2. *există în* L $\inf\{x, y\} = x$
3. *există în* L $\sup\{x, y\} = y$

Lemă

Fie $(L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $x \wedge y = x$
2. $x \vee y = y$

Demonstrație: Fie $x, y \in L$.
$(1) \Rightarrow (2)$: În următorul șir de egalități, mai întâi scriem x în concordanță cu ipoteza (1), apoi aplicăm comutativitatea lui $\vee$ și cea a lui $\wedge$, și, în final, absorbția: $x \wedge y = x$ implică $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y \vee (x \wedge y) = y \vee (y \wedge x) = y$.
$(2) \Rightarrow (1)$: Urmărim pașii demonstrației implicației anterioare, sărind peste aplicarea comutativității, pentru că aici nu este necesară: $x \vee y = y$ implică $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Teoremă

Cele două definiții ale noțiunii de latice sunt echivalente. Mai precis, au loc următoarele fapte.

1. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \leq)$ *o latice Ore. Definim* $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$*, unde* $\vee$ *și* $\wedge$ *sunt operații binare pe mulțimea* L*, definite prin: pentru orice* $x, y \in L$*,* $x \vee y := \sup\{x, y\}$ *și* $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ *în laticea Ore* $\mathcal{L}$*. Atunci* $\Phi(\mathcal{L})$ *este o latice Dedekind.*
2. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ *o latice Dedekind. Definim* $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$*, unde* $\leq$ *este o relație binară pe mulțimea* L*, definită prin: pentru orice* $x, y \in L$*,* $x \leq y$ *ddacă* $x \vee y = y$ *(ceea ce este echivalent cu* $x \wedge y = x$*, după cum ne asigură o lemă de mai sus). Atunci* $\Psi(\mathcal{L})$ *este o latice Ore, în care, pentru orice* $x, y \in L$*,* $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ *și* $\sup\{x, y\} = x \vee y$*.*
3. *Aplicațiile* Φ *și* Ψ *sunt inverse una alteia, adică: pentru orice latice Ore* $\mathcal{L}$*,* $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$*, și, pentru orice latice Dedekind* $\mathcal{L}$*,* $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$*.*

Echivalența celor două definiții ale laticii

Demonstrație: **(1)** Ca în enunț, să considerăm o latice Ore $\mathcal{L} := (L, \leq)$, și să definim $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, unde $\vee$ și $\wedge$ sunt operații binare pe mulțimea L, definite prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ în laticea Ore $\mathcal{L}$. Trebuie să demonstrăm că $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind.
A se observa că identitățile stabilite mai jos sunt valabile în orice poset în care există infimumurile și supremumurile care apar în aceste identități.
Este evident, din definiția maximului și a minimului și din reflexivitatea unei relații de ordine, că orice submulțime a lui L cu un singur element are maxim și minim, ambele egale cu unicul său element. Așadar, pentru orice $x \in L$,
$x \vee x = \sup\{x, x\} = \sup\{x\} = \max\{x\} = x$ și
$x \wedge x = \inf\{x, x\} = \inf\{x\} = \min\{x\} = x$, ceea ce înseamnă că operațiile $\vee$ și $\wedge$ sunt idempotente.
Pentru orice $x, y \in L$, avem egalitatea de mulțimi $\{x, y\} = \{y, x\}$, prin urmare $x \vee y = \sup\{x, y\} = \sup\{y, x\} = y \vee x$ și $x \wedge y = \inf\{x, y\} = \inf\{y, x\} = y \wedge x$, deci $\vee$ și $\wedge$ sunt comutative.
Fie $x, y, z \in L$. Vom demonstra că există în L $\sup\{x, y, z\}$ și $\sup\{x, y, z\} = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$ (știm că în L există supremumurile mulțimilor de 1 sau 2 elemente, deci $\sup\{x, \sup\{y, z\}\}$ există în L).
Să notăm $t := \sup\{y, z\}$ și $u := \sup\{x, t\}$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Egalitatea $t = \sup\{y, z\}$ și definiția supremumului arată că $y \leq t$ și $z \leq t$.
Similar, faptul că $u = \sup\{x, t\}$ implică $t \leq u$.
$y \leq t$ și $t \leq u$, deci $y \leq u$ conform tranzitivității lui $\leq$. Analog, $z \leq t$ și $t \leq u$ implică $z \leq u$ conform tranzitivității lui $\leq$.
$u = \sup\{x, t\}$, prin urmare $x \leq u$.
Deci $x \leq u$, $y \leq u$, $z \leq u$, așadar u este un majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$. Deci mulțimea $\{x, y, z\}$ are cel puțin un majorant. Vom demonstra că u este cel mai mic majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$, adică este supremumul acestei mulțimi.
Fie $s \in L$ un majorant arbitrar (dar fixat) al mulțimii $\{x, y, z\}$.
Întrucât s este majorant pentru $\{x, y, z\}$, avem $y \leq s$ și $z \leq s$, de unde, ținând seama de faptul că $t = \sup\{y, z\}$, obținem $t \leq s$ conform caracterizării supremumului.
Dar faptul că s este majorant pentru $\{x, y, z\}$ implică și $x \leq s$.
Deci $x \leq s$, $t \leq s$ și $u = \sup\{x, t\}$, de unde obținem $u \leq s$ conform caracterizării supremumului.
Am arătat că $u \leq s$ pentru orice majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$, ceea ce înseamnă că $\sup\{x, y, z\}$ există în L și $\sup\{x, y, z\} = u = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$.
Dar această egalitate ne dă și
$\sup\{x, y, z\} = \sup\{z, x, y\} = \sup\{z, \sup\{x, y\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Prin urmare, $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{x, y, z\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$, deci $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$, așadar $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.
(A se observa că, la fel ca mai sus, se poate demonstra, "din aproape în aproape" sau prin inducție matematică, faptul că în L există supremumul oricărei mulțimi finite nevide, și, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi $x_1, \ldots, x_n \in L$,
$\sup\{x_1, \ldots, x_n\} = \begin{cases} x_1, & n = 1, \\ \sup\{\sup\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, x_n\}, & n > 1. \end{cases}$)
Principiul dualității pentru poseturi și identitatea $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$ arată că avem și $\inf\{x, \inf\{y, z\}\} = \inf\{\inf\{x, y\}, z\}$, adică $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
Am demonstrat că $\vee$ și $\wedge$ sunt asociative.
Pentru a demonstra absorbția, să considerăm $x, y \in L$. Avem de arătat că $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$. Să notăm așadar $s := \sup\{x, y\}$ și $i := \inf\{x, s\}$.
$s = \sup\{x, y\}$, deci $x \leq s$, prin urmare $i = \inf\{x, s\} = \min\{x, s\} = x$, conform unei proprietăți a poseturilor demonstrate mai sus.
Deci $i = x$, ceea ce înseamnă că $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$, adică $x \wedge (x \vee y) = x$.
Faptul că $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$ și **Principiul dualității pentru poseturi** arată că avem și $\sup\{x, \inf\{x, y\}\} = x$, adică $x \vee (x \wedge y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Prin urmare, $\vee$ și $\wedge$ satisfac și absorbția, ceea ce încheie demonstrația punctului (1): $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind.
(2) Ca în enunț, să considerăm o latice Dedekind $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ și să definim $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, unde $\leq$ este o relație binară pe mulțimea L, definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ (ddacă $x \wedge y = x$, conform unei leme de mai sus). Trebuie să demonstrăm că $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore, în care, pentru orice $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ și $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
Din idempotența lui $\vee$, avem că, pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$, deci $x \leq x$, adică $\leq$ este reflexivă.
Fie $x, y, z \in L$ astfel încât $x \leq y$ și $y \leq z$, i. e. $x \vee y = y$ și $y \vee z = z$, prin urmare, folosind aceste două egalități și asociativitatea lui $\vee$, obținem: $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$, deci $x \vee z = z$, ceea ce înseamnă că $x \leq z$. Așadar $\leq$ este tranzitivă.
Acum fie $x, y \in L$ a. î. $x \leq y$ și $y \leq x$, adică $x \vee y = y$ și $y \vee x = x$. Dar $x \vee y = y \vee x$ din comutativitatea lui $\vee$, deci $x = y$. Așadar $\leq$ este antisimetrică.
Am demonstrat că $\leq$ este o relație de ordine.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Fie $x, y \in L$, arbitrare, fixate. Trebuie să demonstrăm că există în $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ infimumul și supremumul mulțimii $\{x, y\}$ și că acestea sunt egale cu $x \wedge y$ și respectiv $x \vee y$.
Din asociativitatea și idempotența lui $\vee$, avem că $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$, deci $x \leq x \vee y$. Din comutativitatea, asociativitatea și idempotența lui $\vee$, obținem $y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y) = x \vee y$, deci $y \leq x \vee y$.
Fie $l \in L$, a. î. $x \leq l$ și $y \leq l$, adică $x \vee l = l$ și $y \vee l = l$. Atunci, conform asociativității lui $\vee$, $(x \vee y) \vee l = x \vee (y \vee l) = x \vee l = l$, deci $x \vee y \leq l$.
Caracterizarea supremumului ne dă acum: $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
Din comutativitatea, asociativitatea și idempotența lui $\wedge$, obținem: $(x \wedge y) \wedge x = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq x$.
Din asociativitatea și idempotența lui $\wedge$, avem: $(x \wedge y) \wedge y = x \wedge (y \wedge y) = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq y$.
Fie $l \in L$, a. î. $l \leq x$ și $l \leq y$, adică $l \wedge y = l$ și $l \wedge y = l$. Atunci, conform asociativității lui $\wedge$, $l \wedge (x \wedge y) = (l \wedge x) \wedge y = l \wedge y = l$, așadar $l \leq x \wedge y$.
Caracterizarea infimumului ne dă acum: $\inf\{x, y\} = x \wedge y$, ceea ce încheie demonstrația punctului (2): $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore.

(3) Fie $\mathcal{L} = (L, \leq)$ o latice Ore. Atunci $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind, unde, pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ în $\mathcal{L} = (L, \leq)$. Fie $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = (L, \sqsubseteq)$. Atunci $(L, \sqsubseteq)$ este o latice Ore, cu $\sqsubseteq$ definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă în $\mathcal{L} = (L, \leq)$ avem $\sup\{x, y\} = y \in \{x, y\}$ ddacă în $\mathcal{L} = (L, \leq)$ avem $\max\{x, y\} = \sup\{x, y\} = y$ (a se vedea o proprietate de mai sus) ddacă $x \leq y$. Așadar $\sqsubseteq = \leq$, deci $(L, \sqsubseteq) = (L, \leq)$, adică $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.
Acum fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Atunci $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore, unde relația de ordine $\leq$ este definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$, sau, echivalent, $x \leq y$ ddacă $x \wedge y = x$, iar supremumurile și infimumurile sunt date de: pentru orice $x, y \in L$, $\sup\{x, y\} = x \vee y$ și $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.
Atunci $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = (L, \sqcup, \sqcap)$ este o latice Dedekind, cu $\sqcup$ și $\sqcap$ definite după cum urmează, în funcție de supremumurile și infimumurile din laticea Ore $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$: pentru orice $x, y \in L$, $x \sqcup y = \sup\{x, y\} = x \vee y$ și $x \sqcap y = \inf\{x, y\} = x \wedge y$, deci $\sqcup = \vee$ și $\sqcap = \wedge$, așadar $(L, \sqcup, \sqcap) = (L, \vee, \wedge)$, ceea ce înseamnă că $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.
Demonstrația teoremei este încheiată.

Notații alternative pentru latici

De acum încolo, vom numi orice latice Ore și orice latice Dedekind, simplu, *latice*. Conform teoremei anterioare, orice latice este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.
Ori de câte ori va fi dată o latice, vom lucra cu ordinea ei parțială (care o face latice Ore) și cu operațiile ei binare (disjuncția și conjuncția, care o fac latice Dedekind) fără a specifica la care dintre cele două definiții echivalente ale unei latici ne vom referi într–un anumit moment.
Pentru orice latice L, vom folosi oricare dintre notațiile: $(L, \leq)$, $(L, \vee, \wedge)$ și $(L, \vee, \wedge, \leq)$, în funcție de ce trebuie specificat despre structura de latice a lui L: ordinea ei parțială $\leq$, operațiile ei binare $\vee$ și $\wedge$, sau toate acestea.

Exemple de latici

Exemplu

Cu ultima dintre notațiile de mai sus, următoarele structuri sunt latici:

- $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$, pentru orice mulțime T
- $(\mathbb{N}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$
- $(D_n, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, și D_n este mulțimea divizorilor naturali ai lui n
- orice lanț $(L, \max, \min, \leq)$, de exemplu: $(\mathcal{L}_n, \max, \min, \leq)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, $(\mathbb{R}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{N}, \max, \min, \leq)$

Propoziție

Pentru orice elemente x, y, a, b ale unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$, dacă $x \leq a$ și $y \leq b$, atunci $x \wedge y \leq a \wedge b$ și $x \vee y \leq a \vee b$.

Demonstrație: $x \leq a$ înseamnă că $x \wedge a = x$ și $x \vee a = a$.
$y \leq b$ înseamnă că $y \wedge b = y$ și $y \vee b = b$.
Atunci $(x \wedge y) \wedge (a \wedge b) = x \wedge y \wedge a \wedge b = (x \wedge a) \wedge (y \wedge b) = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq a \wedge b$.
Și $(x \vee y) \vee (a \vee b) = x \vee y \vee a \vee b = (x \vee a) \vee (y \vee b) = a \vee b$, deci $x \vee y \leq a \vee b$.
Am folosit comutativitatea și asociativitatea lui $\vee$ și $\wedge$. (Asociativitatea acestor operații ne–a permis scrierile fără paranteze de mai sus.)

Principiul dualității pentru latici

În concordanță cu **Principiul dualității pentru poseturi**, următoarele noțiuni legate de definiția unei latici sunt duale unele față de celelalte: $\vee$ și $\wedge$, $\leq$ și $\geq$, respectiv, unde, ca și la enunțarea **Principiului dualității pentru poseturi** (în Cursul V), am notat $\geq := \leq^{-1}$.
Pentru a exprima acest fapt mai precis, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este o latice, atunci este imediat, din definiția unei latici și **principiul dualității pentru poseturi**, că $(L, \wedge, \vee, \geq)$ este, de asemenea, o latice, iar această latice se numește *duala* laticii $(L, \vee, \wedge, \leq)$.
Este evident că duala dualei unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este chiar $(L, \vee, \wedge, \leq)$.
Aceste fapte ne conduc la **Principiul dualității pentru latici**: *orice rezultat privind o latice arbitrară* $(L, \vee, \wedge, \leq)$ *rămâne valabil dacă în el interschimbăm* $\vee$ *cu* $\wedge$ *și* $\leq$ *cu* $\geq$.
Ca și la **Principiul dualității pentru poseturi**, este esențial ca laticea să fie **arbitrară**, adică acest principiu se referă **în mod strict** la rezultate valabile în **toate** laticile.
De acum încolo, ori de câte ori vom apela la **Principiul dualității pentru latici**, vom scrie, simplu, "prin dualitate".

Latici distributive

Propoziție

În orice latice $(L, \vee, \wedge)$*, următoarele două afirmații, numite* legile de distributivitate*, sunt echivalente:*
(d_1) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$*;*
(d_2) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$*.*

Demonstrație: $(d_1) \Rightarrow (d_2)$: Din (d_1), comutativitatea lui $\wedge$ aplicată de două ori, absorbția, din nou (d_1), asociativitatea lui $\vee$, din nou comutativitatea lui $\wedge$, apoi absorbția, și, în final, încă o dată comutativitatea lui $\wedge$, avem: pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) =$ $(x \wedge (x \vee y)) \vee (z \wedge (x \vee y)) = x \vee (z \wedge (x \vee y)) = x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) =$ $(x \vee (z \wedge x)) \vee (z \wedge y) = (x \vee (x \wedge z)) \vee (z \wedge y) = x \vee (z \wedge y) = x \vee (y \wedge z)$, deci $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$.
$(d_2) \Rightarrow (d_1)$: Prin dualitate, din implicația precedentă.

Definiție

O latice se zice *distributivă* ddacă satisface una (și deci pe amândouă) dintre condițiile (d_1) și (d_2) din propoziția precedentă.

Latici distributive

Remarcă

A se observa că egalitățile din legile de distributivitate **nu** sunt echivalente pentru orice $x, y, z \in L$, ci este necesar ca fiecare dintre aceste egalități să fie satisfăcută **pentru orice** $x, y, z \in L$ pentru a rezulta că și cealaltă este satisfăcută (de asemenea, pentru orice $x, y, z \in L$).

Remarcă

Pentru orice mulțime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este distributivă. Acest fapt este cunoscut de la seminar.

Remarcă (temă)

Diamantul și pentagonul nu sunt latici distributive. Acest fapt se poate verifica prin considerarea, în fiecare dintre aceste latici, a celor trei elemente diferite de maximul și minimul laticii respective ca poset, și așezarea lor într–o anumită ordine într–o lege de distributivitate, astfel încât acea lege să nu fie satisfăcută.

Latici distributive

Remarcă

Orice lanț este o latice distributivă.
Într–adevăr, dacă $(L, \leq)$ este un lanț (i. e. o mulțime total ordonată), atunci știm că $(L, \leq)$ este o latice în care, pentru orice $x, y \in L$, $x \wedge y = \inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $x \vee y = \sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.
Atunci, considerând trei elemente arbitrare $x, y, z \in L$, faptul că $(L, \leq)$ este lanț ne asigură de existența unei ordonări între aceste elemente, de exemplu $x \leq y \leq z$; în acest caz, din definițiile lui $\vee$ and $\wedge$ de mai sus ($\vee = \max$ și $\wedge = \min$), obținem: $x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = x = x \vee x = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Celelalte cazuri, privind alte ordonări posibile între x, y and z, se tratează similar, și, din analiza tuturor acestor cazuri, rezultă că laticea $(L, \leq)$ este distributivă.

Remarcă

Remarca anterioară arată că, de exemplu, $\mathcal{L}_n$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat), $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ sunt latici distributive.

Corolar

$(\mathbb{N}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$ *este o latice distributivă.*

Demonstrație: Acest fapt rezultă din distributivitatea lanțului $(\mathbb{N}, \leq)$.
Într–adevăr, dacă notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea numerelor prime naturale, observăm că fiecare număr natural nenul n se scrie sub forma: $n = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{e_p(n)}$, unde $e_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k | n\} \in \mathbb{N}$ pentru fiecare $p \in \mathcal{P}$, iar produsul anterior este finit, i. e. familia $(e_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$ este *de suport finit*, adică doar un număr finit de elemente din această familie sunt nenule.
Se mai observă că, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$,
$\mathrm{cmmmc}\{m, n\} = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{e_p(m), e_p(n)\}}$ și
$\mathrm{cmmdc}\{m, n\} = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{e_p(m), e_p(n)\}}$.

Distributivitatea lanțului $(\mathbb{N}, \max, \min, \leq)$ ne asigură de faptul că, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ și orice $p \in \mathcal{P}$, $\min\{e_p(x), \max\{e_p(y), e_p(z)\}\} = \max\{\min\{e_p(x), e_p(y)\}, \min\{e_p(x), e_p(z)\}\}$, de unde rezultă că: $\prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{e_p(x), \max\{e_p(y), e_p(z)\}\}} =$
$\prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{\min\{e_p(x), e_p(y)\}, \min\{e_p(x), e_p(z)\}\}}$, adică:
$\mathrm{cmmdc}\{x, \mathrm{cmmmc}\{y, z\}\} = \mathrm{cmmmc}\{\mathrm{cmmdc}\{x, y\}, \mathrm{cmmdc}\{x, z\}\}$, iar această egalitate este exact prima lege de distributivitate aplicată numerelor naturale nenule x, y, z.
(Dacă nu sunteți obișnuiți cu acest gen de scriere, puteți efectua produsele de mai sus numai după numerele naturale prime p care divid măcar unul dintre numerele naturale nenule x, y, z.)
A rămas de demonstrat faptul că, atunci când numărul 0 apare în prima lege de distributivitate, egalitatea obținută este satisfăcută, fapt ce poate fi arătat foarte ușor, ținând seama de identitățile: $\mathrm{cmmmc}\{0, n\} = 0$ și $\mathrm{cmmdc}\{0, n\} = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ (inclusiv pentru $n = 0$).