Logică matematică și computațională
Cursul XI

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

Algebre Boole

- În acest curs vom continua studiul **algebrelor Boole** (caz particular de latici).

Definiția unei algebre Boole

Amintim că: o **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ compusă din:

- o mulțime B,
- o relație de ordine parțială $\leq$ pe B,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe B, notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operație unară $\bar{\cdot}$ pe B,

iar aceste componente au proprietățile:

- $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este o **latice**, i. e.:
    - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(B, \leq)$;
    - $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
    - $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;
    - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
    - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
    - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;

Definiția unei algebre Boole

- laticea $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este **distributivă**, i. e.:
  - $\vee$ este **distributivă** față de $\wedge$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
  - $\wedge$ este **distributivă** față de $\vee$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
  - 0 este **minimul** posetului $(B, \leq)$;
  - 1 este **maximul** posetului $(B, \leq)$;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** și satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivității**, iar $\bar{\cdot}$ este operația de **complementare**:
  - pentru orice $x \in B$, $\overline{x}$ este **unicul complement** al lui x, adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{și} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc următoarele **operații binare derivate**:

- **implicația (booleană)**, $\rightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalența (booleană)**, $\leftrightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

O temă pentru seminar și o notație

Propoziție (temă pentru seminar)

Mulțimea elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite este o algebră Boole (cu operațiile induse, la care se adaugă operația de complementare).

Notație

Pentru orice mulțime M, vom nota cu $|M| < \infty$ faptul că M este finită.

Echivalența algebre Boole – inele Boole

Observație

Pentru toate definițiile legate de acest paragraf al cursului de față și pentru demonstrațiile rezultatelor enunțate aici, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, dar și celelalte cărți din acea listă bibliografică.
Pentru un exemplu de aplicație la teorema următoare, a se vedea referatul despre ecuații booleene din seria de materiale didactice pe care le–am trimis pe mail.
Demonstrațiile omise aici nu fac parte din materia pentru examen.

În definiția și rezultatele de mai jos, notăm $x^2 := x \cdot x$ și $x \cdot y := xy$.

Definiție

Se numește *inel Boole* un inel unitar $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in B$.

Lemă

În orice inel Boole B*, au loc: pentru orice elemente* $x, y \in B$, $xy = yx$ *și* $x + x = 0$ *(cu alte cuvinte, orice inel Boole este comutativ și orice element nenul al unui inel Boole are ordinul* 2 *în grupul aditiv subiacent inelului; sigur că ordinul lui* 0 *este* 1, 0 *fiind elementul neutru al acestui grup aditiv:* $0 = 0$*).*

Echivalența algebre Boole – inele Boole

Teoremă (echivalența algebră Boole $\Leftrightarrow$ inel Boole)

Orice algebră Boole poate fi organizată ca un inel Boole, și invers. Mai precis:

- *Fie* $\mathcal{B} := (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *un inel Boole. Definim operațiile* $\vee$, $\wedge$ *și* $\bar{\cdot}$ *pe* B *prin: pentru orice* $x, y \in B$*:*

$$\begin{cases} x \vee y := x + y + xy \\ x \wedge y := xy \\ \overline{x} := x + 1 \end{cases}$$

  Atunci $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ *este o algebră Boole, pe care o vom nota cu* $\mathcal{A}(\mathcal{B})$*.*

- *Fie* $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ *o algebră Boole. Definim operațiile* $+$ *și* $\cdot$ *pe* B *prin: pentru orice* $x, y \in B$*:*

$$\begin{cases} x + y := (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \\ xy := x \wedge y \end{cases}$$

  Atunci $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *este un inel Boole, pe care îl vom nota cu* $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ *(unde am notat cu* $-$ *operația de inversare a grupului aditiv subiacent inelului).*

- *Aplicațiile* $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{I}$ *sunt "inverse una alteia", în sensul că, pentru orice inel Boole* $\mathcal{B}$, $\mathcal{I}(\mathcal{A}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$*, și, pentru orice algebră Boole* $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}(\mathcal{I}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$*.*

Legea de reziduație

Amintim:

Lemă

Fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ *o latice și* $a, b, x, y \in L$.
Dacă $a \leq b$ *și* $x \leq y$, *atunci:* $a \vee x \leq b \vee y$ *și* $a \wedge x \leq b \wedge y$.
În particular, dacă $a \leq b$, *atunci* $a \vee x \leq b \vee x$ *și* $a \wedge x \leq b \wedge x$.

- Pentru restul acestei prezentări, fixăm o algebră Boole arbitrară $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$.

Propoziție (legea de reziduație)

Pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, *are loc echivalența:*

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \text{ ddacă } \alpha \wedge \beta \leq \gamma$$

.

Demonstrație: Vom demonstra echivalența din enunț prin dublă implicație.

Legea de reziduație

"$\Leftarrow$": Dacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând supremumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și $\overline{\beta}$, obținem: $(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\beta} \leq \gamma \vee \overline{\beta}$. În această inegalitate aplicăm distributivitatea unei algebre Boole și definiția implicației într-o algebră Boole, și obținem inegalitatea echivalentă: $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge (\beta \vee \overline{\beta}) \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge 1 \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $\alpha \vee \overline{\beta} \leq \beta \rightarrow \gamma$, de unde, întrucât $\alpha \leq \sup\{\alpha, \overline{\beta}\} = \alpha \vee \overline{\beta}$ și aplicând tranzitivitatea unei relații de ordine, rezultă: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$.

"$\Rightarrow$": Dacă $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică, explicitând definiția implicației într-o algebră Boole, $\alpha \leq \overline{\beta} \vee \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând infimumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și β, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \vee \gamma) \wedge \beta$, adică, aplicând distributivitatea unei algebre Boole, $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq 0 \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq \gamma \wedge \beta$. Aplicând în această ultimă inegalitate faptul că $\gamma \wedge \beta = \inf\{\gamma, \beta\} \leq \gamma$ și tranzitivitatea unei relații de ordine, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Filtre ale unei algebre Boole – mnemonic și rezultate noi

Definiție

O submulțime nevidă F a lui B se numește *filtru al lui* $\mathcal{B}$ ddacă, pentru orice $x, y \in B$, sunt îndeplinite următoarele condiții:

(F_1) dacă $x, y \in F$, atunci $x \wedge y \in F$;

(F_2) dacă $x \in F$ și $x \leq y$, atunci $y \in F$.

Dată o submulțime oarecare $X \subseteq B$, există cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include pe X (cel mai mic în raport cu incluziunea), anume intersecția tuturor filtrelor lui $\mathcal{B}$ care includ pe X, și acest filtru se numește *filtrul generat de* X și se notează cu $[X)$ sau cu $< X >$.
Filtrul generat de o mulțime cu un singur element, $X := \{x\}$, cu $x \in B$, se numește *filtrul principal generat de* x și se notează cu $[x)$ sau cu $< x >$.

Remarcă

Este imediat, din definiția unui filtru generat de o mulțime, că, oricare ar fi un filtru F al lui $\mathcal{B}$, are loc egalitatea: $[F) = F$.

Remarcă

$[\emptyset) = \{1\}$.

Filtre ale unei algebre Boole – mnemonic și rezultate noi

Propoziție

Pentru orice $x \in B$, $[x) = \{y \in B \mid x \leq y\}$ *(filtrul principal generat de* x *este egal cu mulțimea majoranților lui* x *din* B*).*

Propoziție

Pentru orice submulțime nevidă X *a lui* B,
$[X) = \{a \in B \mid (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)(\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X)\, x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a\}$.

Propoziție

Orice filtru finit generat (i. e. generat de o mulțime finită) este principal.

Demonstrație: $[\emptyset) = \{1\} = [1)$.
Rămâne de analizat cazul filtrelor generate de mulțimi finite și **nevide**.
Fie $X := \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq B$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, și $F := [X)$ (filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X).
Vom demonstra că $F = [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$ (i. e. că F este filtrul principal generat de conjuncția tuturor elementelor lui X).

Filtre ale unei algebre Boole – mnemonic și rezultate noi

$F = [X)$, așadar $X \subseteq F$, adică $x_1, \ldots, x_n \in F$. O lemă din Cursul X spune că orice filtru conține toate conjuncțiile finite între elemente ale sale. Rezultă că $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$.
Deci F este un filtru care conține elementul $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$. Pe de altă parte, filtrul principal $[x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$ este, prin definiție, cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include singletonul $\{x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n\}$, adică este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care conține elementul $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$. Rezultă că $[x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) \subseteq F$.
Dar $F = [X)$, deci, conform propoziției anterioare,
$F = \{a \in B \mid (\exists\, k \in \mathbb{N}^*)(\exists\, y_1, y_2, \ldots, y_k \in X)\, y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k \leq a\}$.
Fie $a \in F$, arbitrar, fixat. Atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ și există $y_1, y_2, \ldots, y_k \in X$, a. î. $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k \leq a$. Dar $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, deci $y_1, y_2, \ldots y_k \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, așadar $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k$, datorită idempotenței conjuncției. Am obținut că $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k \leq a$, prin urmare $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a$, ceea ce înseamnă că $a \in [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$ (a se vedea mai sus forma unui filtru principal).
Deci are loc și cealaltă incluziune: $F \subseteq [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$.
Așadar, $F = [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$.

Filtre ale unei algebre Boole – mnemonic și rezultate noi

Corolar

Orice filtru finit este principal.

Demonstrație: Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$, cu $|F| < \infty$. Conform unei remarci de mai sus, $F = [F)$. Așadar F este un filtru finit generat, prin urmare F este un filtru principal, conform propoziției anterioare.

Corolar

Orice filtru al unei algebre Boole finite este principal.

Demonstrație: Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$, prin urmare $F \subseteq B$. Dacă $|B| < \infty$, atunci $|F| \leq |B| < \infty$, deci F este un filtru finit. Conform corolarului anterior, rezultă că F este un filtru principal.

Remarcă

Demonstrația propoziției anterioare arată că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$,

$$[\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n),$$

fapt valabil și pentru $n = 0$, întrucât $\inf(\emptyset) = 1$ (a se vedea sfârșitul Cursului VII).

Congruențe ale unei algebre Boole

Știm că o relație de echivalență pe o mulțime este o relație binară reflexivă, simetrică și tranzitivă (adică o preordine simetrică) pe acea mulțime.

Definiție

Se numește *congruență a algebrei Boole* $\mathcal{B}$ o relație de echivalență $\sim$ pe B care este compatibilă cu operațiile algebrei Boole $\mathcal{B}$, adică, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

1. dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$;
2. dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$;
3. dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$.

Remarcă

Dacă, în definiția anterioară, veți generaliza cele trei relații dând compatibilitatea lui $\sim$ cu operațiile binare $\vee$ și $\wedge$ și operația unară $\bar{\cdot}$, pentru a obține relația care dă compatibilitatea unei relații de echivalență cu o operație de aritate oarecare, atunci veți observa că: compatibilitatea cu operațiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$, i. e. constantele 0 și 1, se scrie astfel: $0 \sim 0$ și $1 \sim 1$. Deci compatibilitatea cu operațiile zeroare este satisfăcută de orice relație binară reflexivă pe B, în particular de orice relație de echivalență pe B. De aceea, compatibilitatea cu 0 și 1 nu a apărut ca o cerință în definiția de mai sus.

Congruențe ale unei algebre Boole

Propoziție

În definiția de mai sus, a unei congruențe pe o algebră Boole, fiecare dintre condițiile (1) *și* (2) *este implicată de celelalte două condiții.*

Demonstrație: $(1) \Leftarrow (2), (3)$: Fie $\sim$ o relație de echivalență pe B compatibilă cu $\wedge$ și cu $\bar{\cdot}$, și fie $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x \sim x'$ și $y \sim y'$. Atunci

$$\overline{x} \sim \overline{x'} \text{ și } \overline{y} \sim \overline{y'},$$

deci

$$\overline{x} \wedge \overline{y} \sim \overline{x'} \wedge \overline{y'},$$

prin urmare

$$\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \sim \overline{\overline{x'} \wedge \overline{y'}},$$

adică

$$x \vee y \sim x' \vee y',$$

conform **legilor lui de Morgan**.
$(2) \Leftarrow (1), (3)$: Analog, sau prin dualitate, din implicația "$(1) \Leftarrow (2), (3)$".

Congruențe ale unei algebre Boole

Propoziție

Orice congruență a unei algebre Boole este compatibilă cu implicația și echivalența booleană.
I. e., pentru orice congruență $\sim$ *a lui* $\mathcal{B}$ *și orice* $x, y, x', y' \in B$, *avem:*

- *dacă* $x \sim x'$ *și* $y \sim y'$, *atunci* $x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y'$;
- *dacă* $x \sim x'$ *și* $y \sim y'$, *atunci* $x \leftrightarrow y \sim x' \leftrightarrow y'$.

Demonstrație: Fie $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x \sim x'$ și $y \sim y'$. Aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\bar{\cdot}$ și cu $\vee$, precum și definiția implicației booleene, obținem:

$$\overline{x} \sim \overline{x'} \text{ și } y \sim y',$$

deci

$$\overline{x} \vee y \sim \overline{x'} \vee y',$$

adică

$$x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y'.$$

Congruențe ale unei algebre Boole

Acum, aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\rightarrow$, pe care tocmai am demonstrat–o, compatibilitatea lui $\sim$ cu $\wedge$ și definiția echivalenței booleene, din $x \sim x'$ și $y \sim y'$ obținem:

$$x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y' \text{ și } y \rightarrow x \sim y' \rightarrow x',$$

așadar

$$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \sim (x' \rightarrow y') \wedge (y' \rightarrow x'),$$

adică

$$x \leftrightarrow y \sim x' \leftrightarrow y'.$$

- În secțiunea care urmează în acest curs, vom stabili o bijecție între mulțimea congruențelor unei algebre Boole și mulțimea filtrelor sale. Pentru acest lucru, ne va folosi remarca următoare.

Remarcă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ și $x, y \in B$. Atunci are loc echivalența: $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $x \rightarrow y \in F$ și $y \rightarrow x \in F$.
Într–adevăr, știm, dintr–o lemă din Cursul X, că, pentru orice $a, b \in B$, are loc echivalența: $a \wedge b \in F$ ddacă $a \in F$ și $b \in F$. Aplicând acest rezultat elementelor $a := x \rightarrow y$ și $b := y \rightarrow x$, obținem echivalența de mai sus.

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Notație

Notăm cu:
$\mathcal{F}(\mathcal{B})$ mulțimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ (**notație consacrată**),
$\mathcal{C}(\mathcal{B})$ mulțimea congruențelor lui $\mathcal{B}$ (**notație neconsacrată**).

Propoziție

Mulțimea congruențelor unei algebre Boole este în bijecție cu mulțimea filtrelor sale.

Existența unei bijecții se demonstrează construind două funcții între cele două mulțimi, în sensuri opuse, și arătând că sunt inverse una celeilalte, așadar sunt inversabile, deci sunt bijecții.
Iată definițiile celor două funcții pentru o algebră Boole oarecare $\mathcal{B}$:

- funcția de la mulțimea filtrelor la mulțimea congruențelor: oricărui filtru F îi asociem congruența $\sim_F$, definită prin: pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$;
- funcția de la mulțimea congruențelor la mulțimea filtrelor: oricărei congruențe $\sim$ îi asociem filtrul $F^{\sim}$, definit prin: $F^{\sim} := \{x \in B \mid x \sim 1\}$ ($F^{\sim}$ este clasa de echivalență a lui 1 raportat la $\sim$).

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Așadar, definim funcțiile:

- $\varphi : \mathcal{F}(\mathcal{B}) \to \mathcal{C}(\mathcal{B})$, pentru orice $F \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$, $\varphi(F) \overset{\text{notație}}{=} \sim_F \subseteq B^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$;
- $\psi : \mathcal{C}(\mathcal{B}) \to \mathcal{F}(\mathcal{B})$, pentru orice $\sim \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$, $\psi(\sim) \overset{\text{notație}}{=} F^{\sim} \subseteq B$, definit prin: $F^{\sim} := \{x \in B \mid x \sim 1\}$.

Pentru început, să demonstrăm că φ și ψ sunt corect definite, i. e.:

- pentru orice $F \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$, are loc $\sim_F \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$;
- pentru orice $\sim \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$, are loc $F^{\sim} \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$.

Să considerăm, așadar, un filtru F al lui $\mathcal{B}$, și să demonstrăm că relația binară $\sim_F$ pe B definită mai sus este o congruență a lui $\mathcal{B}$.

Pentru orice $x \in B$, $x = x$, deci $x \leftrightarrow x = 1 \in F$, așadar $x \sim_F x$, deci $\sim_F$ este reflexivă.

Pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$, așadar $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $y \leftrightarrow x \in F$, deci $x \sim_F y$ ddacă $y \sim_F x$, așadar $\sim_F$ este simetrică.

Pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $x \to y \in F$ și $y \to x \in F$, conform unei remarci de mai sus.

Fie $x, y, z \in B$, a. î. $x \sim_F y$ și $y \sim_F z$, i. e. $x \to y, y \to x, y \to z, z \to y \in F$.

Demonstrăm că $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$.

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

$(x \to y) \wedge (y \to z) = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee z) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge x) \vee (y \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge z) =$ $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee 0 \vee 0 \vee (y \wedge z) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge z) \leq \overline{x} \vee z = x \to z$ (pentru că $\overline{x} \wedge \overline{y} \leq \overline{x}$ și $y \wedge z \leq z$, și aplicând o lemă amintită la începutul cursului), așadar $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$.

Dar $x \to y, y \to z \in F$, așadar $(x \to y) \wedge (y \to z) \in F$, deci $x \to z \in F$, conform condițiilor (F_1) și (F_2) aplicate filtrului F.

Analog, rezultă că $z \to x \in F$.

Am obținut: $x \to z, z \to x \in F$, deci $x \sim_F z$.

Așadar $\sim_F$ este tranzitivă.

Prin urmare, $\sim_F$ este o relație de echivalență.

Fie $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x \sim_F x'$ și $y \sim_F y'$, deci $x \to x', x' \to x, y \to y', y' \to y \in F$.

Să demonstrăm că $\sim_F$ este compatibilă cu $\vee$.

$(x \to x') \wedge (y \to y') = (\overline{x} \vee x') \wedge (\overline{y} \vee y') \leq (\overline{x} \vee x' \vee y') \wedge (\overline{y} \vee x' \vee y') =$ $(\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee x' \vee y' = \overline{x \vee y} \vee x' \vee y' = (x \vee y) \to (x' \vee y')$. Am folosit faptul că $\overline{x} \vee x' \leq \overline{x} \vee x' \vee y'$, $\overline{y} \vee y' \leq \overline{y} \vee x' \vee y'$, din nou lema la care am apelat și mai sus, și **legile lui de Morgan**. Deci $(x \to x') \wedge (y \to y') \leq (x \vee y) \to (x' \vee y')$.

Cum $x \to x', y \to y' \in F$, rezultă că $(x \to x') \wedge (y \to y') \in F$, deci $(x \vee y) \to (x' \vee y') \in F$, prin aplicarea condițiilor (F_1) și (F_2).

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Analog, se obține faptul că $(x' \vee y') \to (x \vee y) \in F$.
Rezultă că $x \vee y \sim_F x' \vee y'$, deci $\sim_F$ este compatibilă cu $\vee$.
Să demonstrăm că $\sim_F$ este compatibilă cu $\overline{\cdot}$.
$\overline{x} \leftrightarrow \overline{x'} = (\overline{x} \to \overline{x'}) \wedge (\overline{x'} \to \overline{x}) = (\overline{\overline{x}} \vee \overline{x'}) \wedge (\overline{\overline{x'}} \vee \overline{x}) = (x \vee \overline{x'}) \wedge (x' \vee \overline{x}) = (\overline{x} \vee x') \wedge (\overline{x'} \vee x) = (x \to x') \wedge (x' \to x) = x \leftrightarrow x' \in F$, prin urmare $\overline{x} \leftrightarrow \overline{x'} \in F$, deci $\overline{x} \sim_F \overline{x'}$.
Așadar $\sim_F$ este compatibilă și cu $\overline{\cdot}$.
Conform propoziției care succede definiția unei congruențe, rezultă că $\sim_F$ este compatibilă și cu $\wedge$.
Deci $\sim_F$ este o congruență a lui $\mathcal{B}$, i. e. $\varphi(F) = \sim_F \in \mathcal{C}(\mathcal{B})$, așadar φ este corect definită.
Acum să considerăm o congruență $\sim$ a lui $\mathcal{B}$, și să demonstrăm că submulțimea $F^{\sim}$ a lui B definită mai sus este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
$\sim$ este reflexivă, prin urmare $1 \sim 1$, deci $1 \in F^{\sim}$, așadar $F^{\sim} \neq \emptyset$.
Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
Să demonstrăm că $F^{\sim}$ satisface condiția (F_1).
Dacă $x, y \in F^{\sim}$, i. e. $x \sim 1$ și $y \sim 1$, atunci, aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\wedge$, rezultă că $x \wedge y \sim 1 \wedge 1 = 1$, deci $x \wedge y \in F^{\sim}$. Așadar $F^{\sim}$ satisface condiția (F_1).
Acum să demonstrăm că $F^{\sim}$ îndeplinește condiția (F_2).

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Dacă $x \in F^{\sim}$ și $x \leq y$, atunci $x \sim 1$ și $x \vee y = y$, deci, folosind faptul că $y \sim y$, datorită reflexivității lui $\sim$, și aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\vee$, rezultă că $y = y \vee x \sim y \vee 1 = 1$, deci $y \in F^{\sim}$. Așadar $F^{\sim}$ satisface și condiția (F_2).
Am demonstrat că $F^{\sim}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, i. e. $\psi(\sim) = F^{\sim} \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$, așadar ψ este corect definită.
În fine, să demonstrăm că funcțiile φ și ψ sunt inverse una celeilalte.
Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Demonstrăm că $F^{\sim_F} = F$.
Pentru orice $x \in B$, avem: $x \leftrightarrow 1 = (x \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow x) = 1 \wedge (\bar{1} \vee x) = 0 \vee x = x$, așadar $F^{\sim_F} = \{x \in B \mid x \sim_F 1\} = \{x \in B \mid x \leftrightarrow 1 \in F\} = \{x \in B \mid x \in F\} = F$.
Deci $\psi(\varphi(F)) = F^{\sim_F} = F$.
Fie $\sim$ o congruență a lui $\mathcal{B}$. Demonstrăm că $\sim_{F^{\sim}} = \sim$, prin dublă incluziune.
Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
Dacă $(x, y) \in \sim$, i. e. $x \sim y$, atunci, din compatibilitatea lui $\sim$ cu $\leftrightarrow$, obținem: $x \leftrightarrow y \sim y \leftrightarrow y = 1 \in F^{\sim}$, prin urmare $x \sim_{F^{\sim}} y$, i. e. $(x, y) \in \sim_{F^{\sim}}$. Așadar $\sim \subseteq \sim_{F^{\sim}}$.
Calculăm: $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge (\overline{x} \vee y) = (x \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y$.
Dacă $(x, y) \in \sim_{F^{\sim}}$, i. e. $x \sim_{F^{\sim}} y$, ceea ce este echivalent (vedeți mai sus) cu $x \rightarrow y \in F^{\sim}$ și $y \rightarrow x \in F^{\sim}$, i. e. $x \rightarrow y \sim 1$ și $y \rightarrow x \sim 1$, atunci, conform calculului din paragraful anterior și compatibilității lui $\sim$ cu $\wedge$, avem:

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

$x \wedge y = x \wedge (x \rightarrow y) \sim x \wedge 1 = x$, deci $x \wedge y \sim x$. Analog, rezultă că și $x \wedge y \sim y$. Deci $x \sim x \wedge y \sim y$, prin urmare $x \sim y$, i. e. $(x, y) \in \sim$. Așadar $\sim_{F_\sim} \subseteq \sim$.
Deci $\varphi(\psi(\sim)) = \sim_{F_\sim} = \sim$.
Am demonstrat că $\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{F}(\mathcal{B})}$ și $\varphi \circ \psi = id_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}$, ceea ce înseamnă că funcțiile φ și ψ sunt inverse una celeilalte, deci sunt inversabile, așadar sunt bijective, prin urmare mulțimile $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ și $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ sunt în bijecție.

Propoziție

Fie $a, b, x \in B$ și F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci, cu notațiile de mai sus, au loc:

1. *$a \sim_{[x)} b$ ddacă $a \wedge x = b \wedge x$;*
2. *$a \sim_F b$ ddacă există un element $f \in F$ astfel încât $a \wedge f = b \wedge f$.*

Demonstrație: A se vedea corespondența dintre filtre și congruențe, forma unui filtru principal, și legea de reziduație pentru echivalențele care urmează.

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

(1) $a \sim_{[x)} b$ ddacă $a \leftrightarrow b \in [x)$ ddacă $x \leq a \leftrightarrow b$ ddacă $x \leq (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ ddacă $\begin{cases} x \leq a \rightarrow b \text{ și} \\ x \leq b \rightarrow a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} x \wedge a \leq b \text{ și} \\ x \wedge b \leq a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} a \wedge x \leq b \text{ și} \\ b \wedge x \leq a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} a \wedge x \leq b \wedge x \text{ și} \\ b \wedge x \leq a \wedge x \end{cases}$ ddacă $a \wedge x = b \wedge x$.

(2) "$\Rightarrow$": $a \sim_F b$ ddacă $a \leftrightarrow b \in F$ ddacă există un $f \in F$ astfel încât $a \leftrightarrow b = f$, ceea ce implică $f \leq a \leftrightarrow b$, adică $a \leftrightarrow b \in [f)$, ceea ce este echivalent cu $a \sim_{[f)} b$, ceea ce este echivalent cu $a \wedge f = b \wedge f$, conform lui (1).

"$\Leftarrow$": Conform punctului (1), dacă există $f \in F$ astfel încât $a \wedge f = b \wedge f$, atunci $a \sim_{[f)} b$, adică $a \leftrightarrow b \in [f)$. Dar $f \in F$, deci $[f) \subseteq F$ (pentru că F este filtru, deci faptul că îl conține pe f implică faptul că include cel mai mic filtru care îl conține pe f, adică filtrul generat de f), așadar $a \leftrightarrow b \in F$, adică $a \sim_F b$.

Algebre Boole factor

Propoziție

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ și $\sim_F$ congruența asociată lui F.
Pentru fiecare $x \in B$, se notează cu $x/F := \{y \in B \mid x \sim_F y\}$ clasa de echivalență a lui x raportat la $\sim_F$.
Mulțimea factor $B/_{\sim_F} = \{x/F \mid x \in B\}$ (i. e. mulțimea claselor de echivalență ale elementelor lui B raportat la $\sim_F$) se mai notează cu B/F.
Atunci: B/F se poate organiza ca algebră Boole cu următoarele operații, pe care le vom nota la fel ca pe acelea ale lui $\mathcal{B}$:

- *pentru orice $x, y \in B$, $x/F \vee y/F := (x \vee y)/F$*
- *pentru orice $x, y \in B$, $x/F \wedge y/F := (x \wedge y)/F$*
- *pentru orice $x \in B$, $\overline{x/F} := \overline{x}/F$*
- $0 := 0/F$ *și* $1 := 1/F$

Faptul că $\sim_F$ este congruență pe $\mathcal{B}$, i. e. echivalență care comută cu operațiile lui $\mathcal{B}$, arată că operațiile lui B/F sunt **bine definite**. Într–adevăr, să considerăm $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x/F = x'/F$ și $y/F = y'/F$, i. e. $x \sim_F x'$ și $y \sim_F y'$. Cum $\sim_F$ este o congruență a lui $\mathcal{B}$, rezultă că:

Algebre Boole factor

- $x \vee y \sim_F x' \vee y'$, i. e. $(x \vee y)/F = (x' \vee y')/F$, ceea ce arată buna definire a lui $\vee$ pe B/F;
- $x \wedge y \sim_F x' \wedge y'$, i. e. $(x \wedge y)/F = (x' \wedge y')/F$, ceea ce arată buna definire a lui $\wedge$ pe B/F;
- $\overline{x} \sim_F \overline{x'}$, i. e. $\overline{x}/F = \overline{x'}/F$, ceea ce arată buna definire a lui $\bar{\cdot}$ pe B/F.

Buna definire a operațiilor zeroare ale lui B/F este trivială, pentru că 0 din B/F este definit ca fiind constanta $0/F$, iar 1 din B/F este definit ca fiind constanta $1/F$.

Proprietățile acestor operații, care arată că ele determină pe B/F o structură de algebră Boole, se obțin imediat din proprietățile operațiilor algebrei Boole $\mathcal{B}$ și definițiile acestor operații pe B/F. Iată, de exemplu, demonstrația distributivității lui $\vee$ față de $\wedge$: fie $x, y, z \in B$; au loc egalitățile:

$$x/F \vee (y/F \wedge z/F) = x/F \vee (y \wedge z)/F = (x \vee (y \wedge z))/F =$$

$$((x \vee y) \wedge (x \vee z))/F = (x \vee y)/F \wedge (x \vee z)/F = (x/F \vee y/F) \wedge (x/F \vee z/F).$$

Definiție

Algebra Boole $(B/F, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0 = 0/F, 1 = 1/F)$ se numește *algebra Boole factor (sau algebra Boole cât) a lui $\mathcal{B}$ prin filtrul F.*

Algebre Boole factor

Propoziție

Pentru orice filtru F, surjecția canonică $p_F : B \to B/F$, definită prin: pentru orice $x \in B$, $p_F(x) := x/F$, este un morfism boolean surjectiv.

Demonstrație: Surjectivitatea funcției p_F este evidentă (și cunoscută de la mulțimi factor raportat la o relație de echivalență), iar comutarea lui p_F cu operațiile de algebră Boole rezultă din definiția operațiilor algebrei Boole B/F. Într–adevăr, pentru orice $x, y \in B$, avem:

$$p_F(x \vee y) = (x \vee y)/F = x/F \vee y/F = p_F(x) \vee p_F(y);$$

$$p_F(x \wedge y) = (x \wedge y)/F = x/F \wedge y/F = p_F(x) \wedge p_F(y);$$

$$p_F(\overline{x}) = \overline{x}/F = \overline{x/F} = \overline{p_F(x)};$$

$$p_F(0) = 0/F = 0; \; p_F(1) = 1/F = 1.$$

Lemă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci $F = 1/F$, așadar, pentru orice element $a \in B$, au loc echivalențele: $a \in F$ ddacă $a \sim_F 1$ ddacă $a/F = 1/F$.

Demonstrație: Din demonstrația propoziției privind corespondența bijectivă între filtre și congruențe, avem: $F = F^{\sim_F} = \{x \in B \mid x \sim_F 1\} = 1/F$.

Algebre Boole factor

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm încă o algebră Boole arbitrară $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$.

Propoziție (temă pentru seminar)

Fie $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism boolean, iar F un filtru al algebrei Boole $\mathcal{A}$ și G un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$. Atunci:

1. *$f^{-1}(G)$ este un filtru al lui $\mathcal{A}$;*
2. *dacă f e surjectiv, atunci $f(F)$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.*

Propoziție (temă pentru seminar)

Fie $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morfism boolean. Atunci $f(A)$ este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$, izomorfă cu algebra Boole factor $A/f^{-1}(\{1\})$.

Indicație: Se notează cu $F := f^{-1}(\{1\})$, care este un filtru al lui $\mathcal{A}$, fiind preimaginea printr–un morfism boolean a filtrului trivial al lui $\mathcal{B}$ (a se vedea propoziția precedentă), apoi se definește funcția $\varphi : A/F \rightarrow f(A)$ prin: oricare ar fi $x \in A$, $\varphi(x/F) := f(x)$.

Algebre Boole factor

Folosind definiția congruenței modulo filtrul F și faptul că $F = f^{-1}(\{1\})$, se arată că, pentru orice $x, y \in A$, $x/F = y/F$ ddacă $f(x) = f(y)$. În această echivalență, implicația directă arată că φ este bine definită (i. e. independentă de reprezentantul clasei care constituie argumentul său), iar implicația inversă arată că φ este injectivă. Surjectivitatea lui φ este evidentă. Folosind definiția operațiilor algebrei Boole factor A/F și faptul că f este morfism boolean, deci comută cu operațiile booleene, se arată că φ comută cu operațiile booleene, deci este morfism boolean. Așadar, φ este izomorfism boolean.

Propoziție (temă pentru seminar)

Fie U un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$. Atunci: U este ultrafiltru ddacă algebra Boole factor B/U este izomorfă cu $\mathcal{L}_2$.

Indicație: Se aplică lema anterioară (conform căreia un element $a \in B$ are $a/U = 1/U$ ddacă $a \in U$) și un corolar de caracterizare a ultrafiltrelor din Cursul X, care afirmă că un filtru U al algebrei Boole $\mathcal{B}$ este ultrafiltru ddacă, oricare ar fi $a \in B$, **exact** unul dintre elementele a și $\overline{a}$ aparține lui U.

Atomi ai unei algebre Boole

- Pentru demonstrațiile rezultatelor din această ultimă secțiune a cursului de față, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I.

Definiție

Un *atom* al algebrei Boole $\mathcal{B}$ este un succesor al lui 0 din $\mathcal{B}$ (i. e. din posetul $(B, \leq)$). Adică, un *atom* al lui $\mathcal{B}$ este un element $a \in B$ cu proprietățile:

- $a \neq 0$ și
- nu există niciun element $x \in B$ a. î. $0 < x < a$,

unde am notat cu $<:=\leq \setminus \Delta_B$, i. e. $<$ este relația de ordine strictă pe B corespunzătoare relației de ordine $\leq$ de pe B, adică, pentru orice $x, y \in B$,

$$x < y \text{ ddacă } \begin{cases} x \leq y \\ \text{și} \\ x \neq y. \end{cases}$$

Atomi ai unei algebre Boole

Remarcă

- Algebra Boole trivială nu are niciun atom (deci numărul atomilor săi coincide cu numărul ultrafiltrelor sale, anume 0; a se vedea Cursul X).
- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, algebra Boole $\mathcal{L}_2^n = \{(x_1, \ldots x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{L}_2 = \{0, 1\}\}$ are n atomi: atomii săi sunt elementele $e_1, \ldots, e_n$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, $e_i = \underbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)}_{\substack{\text{vector de lungime } n, \\ \text{cu 1 pe poziția } i \text{ și} \\ \text{0 pe celelalte poziții}}}$.
- Pentru orice mulțime nevidă X (nu neapărat finită), atomii algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ sunt submulțimile lui X cu câte un singur element: $\{a\}$, cu $a \in X$.

- Am văzut la începutul acestui curs că toate filtrele unei algebre Boole finite sunt principale, adică sunt generate de câte un singur element.

Remarcă

Ultrafiltrele unei algebre Boole finite sunt filtrele generate de câte un atom al acelei algebre Boole.

Structura algebrelor Boole finite

Remarcă

Remarca anterioară arată că, dacă algebra Boole $\mathcal{B}$ este finită, atunci există o bijecție între mulțimea atomilor lui $\mathcal{B}$ și mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$, care duce fiecare atom a al lui $\mathcal{B}$ în $[a)$ (filtrul principal generat de a).

Teoremă (Teorema de structură a algebrelor Boole finite)

Dacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole finită, atunci $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este numărul atomilor lui $\mathcal{B}$ (care este egal cu numărul ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$, conform remarcii anterioare).

Corolar

Orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2 (cu exponentul dat de numărul atomilor săi, care este egal cu numărul ultrafiltrelor sale).

Corolar

Două algebre Boole finite de același cardinal sunt izomorfe.

Structura algebrelor Boole finite

Remarcă

Pentru orice mulțime finită X, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, au loc următoarele izomorfisme între algebre Boole: $\mathcal{L}_2^n \cong \mathcal{L}_2^{\overline{1,n}} \cong \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X) \cong \mathcal{P}(\overline{1,n})$ ($\overline{1,0} = \emptyset$).

Remarcă

- **Teorema de reprezentare a lui Stone**, pe care am demonstrat–o în Cursul X, spune că, pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, există un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$. Cu alte cuvinte, orice algebră Boole $\mathcal{B}$ este izomorfă cu o subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$ (anume subalgebra $d(B)$ dată de imaginea morfismului boolean injectiv d). Ca o paranteză, un morfism injectiv se numește *scufundare* (morfismul injectiv nu trebuie neapărat să fie morfism boolean, ci poate fi orice morfism între două structuri algebrice de același tip). Cu această terminologie, **Teorema de reprezentare a lui Stone** se poate enunța astfel: orice algebră Boole $\mathcal{B}$ se scufundă în algebra Boole $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$.
- **Teorema de structură a algebrelor Boole finite** afirmă că, în cazul particular al algebrelor Boole finite, are loc proprietatea că orice algebră Boole finită este chiar **izomorfă** cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$ (a se vedea remarca anterioară).