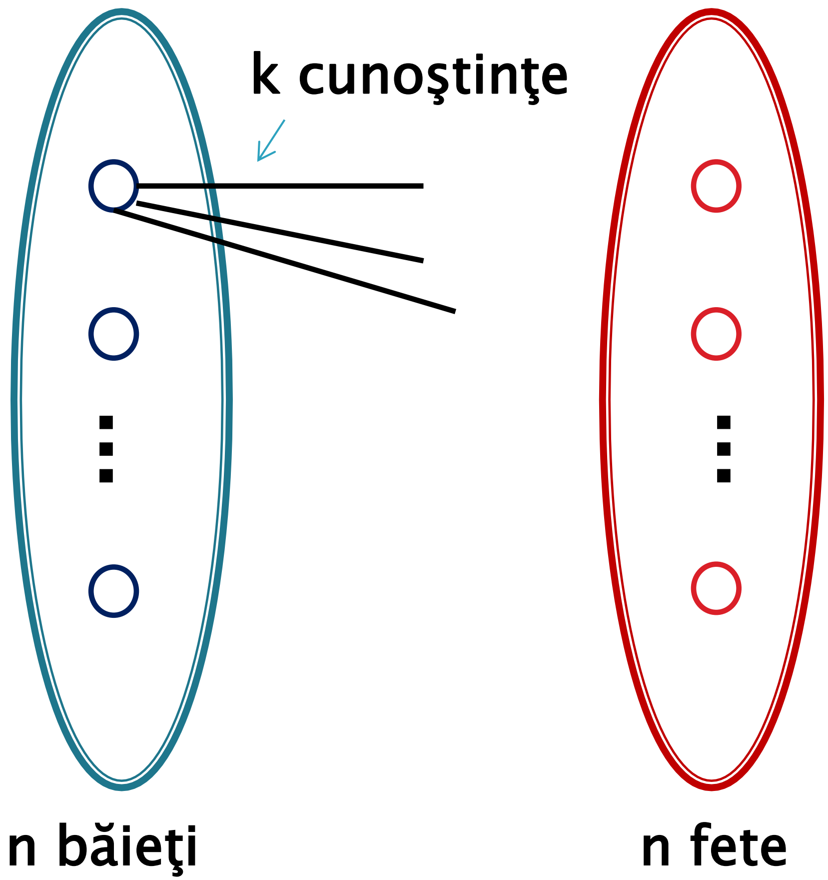
Cuplaje

Repere istorice. Aplicaţii

- **Problema seratei (perechilor)** – sec XIX
  - n băieţi, n fete
  - Un băiat cunoaşte exact k fete
  - O fată cunoaşte exact k băieţi

Repere istorice. Aplicaţii

- **Problema seratei (perechilor)**



Repere istorice. Aplicaţii

- **Problema seratei (perechilor)** – sec XIX
  - Se poate organiza o repriză de dans astfel încât fiecare participant să danseze cu o cunoştinţă a sa?

Repere istorice. Aplicaţii

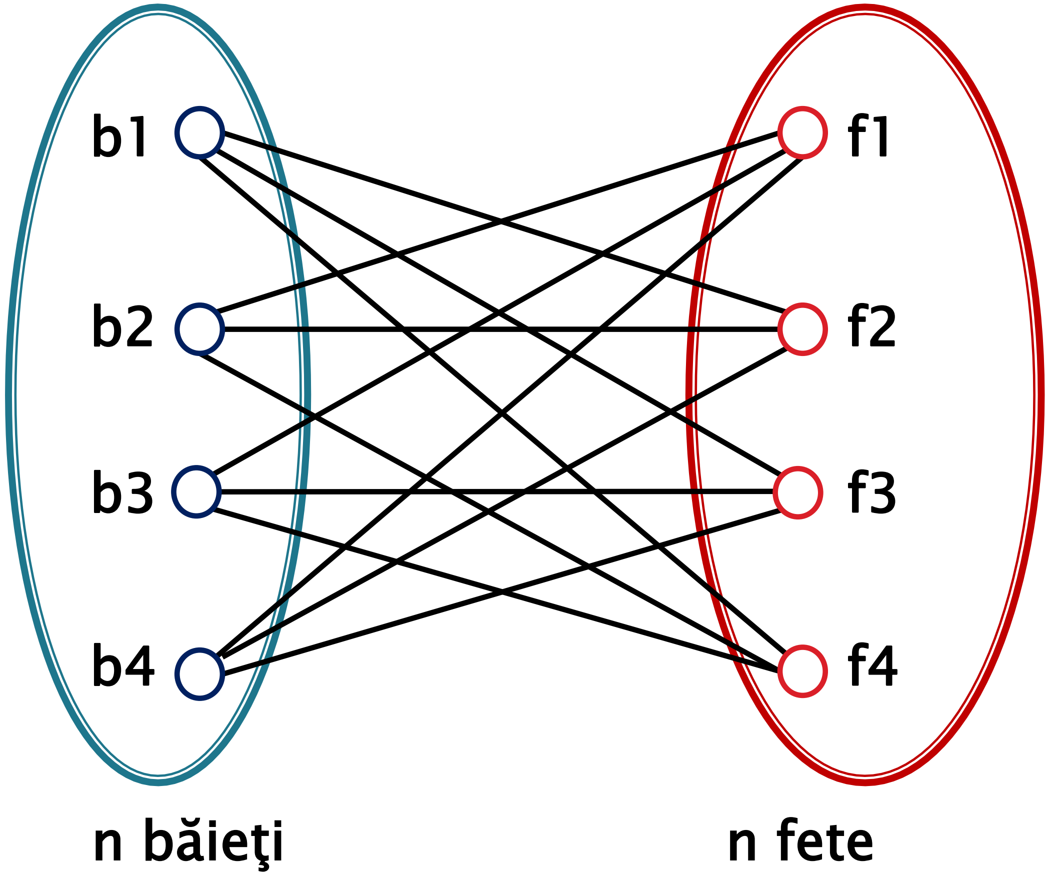
- **Problema seratei (perechilor)** – sec XIX
  - Se poate organiza o repriză de dans astfel încât fiecare participant să danseze cu o cunoştinţă a sa?
  - Se pot organiza k reprize de dans în care fiecare participant să danseze câte un dans cu fiecare cunoştinţă a sa?

Repere istorice. Aplicaţii

- **Problema seratei (perechilor)**

n=4

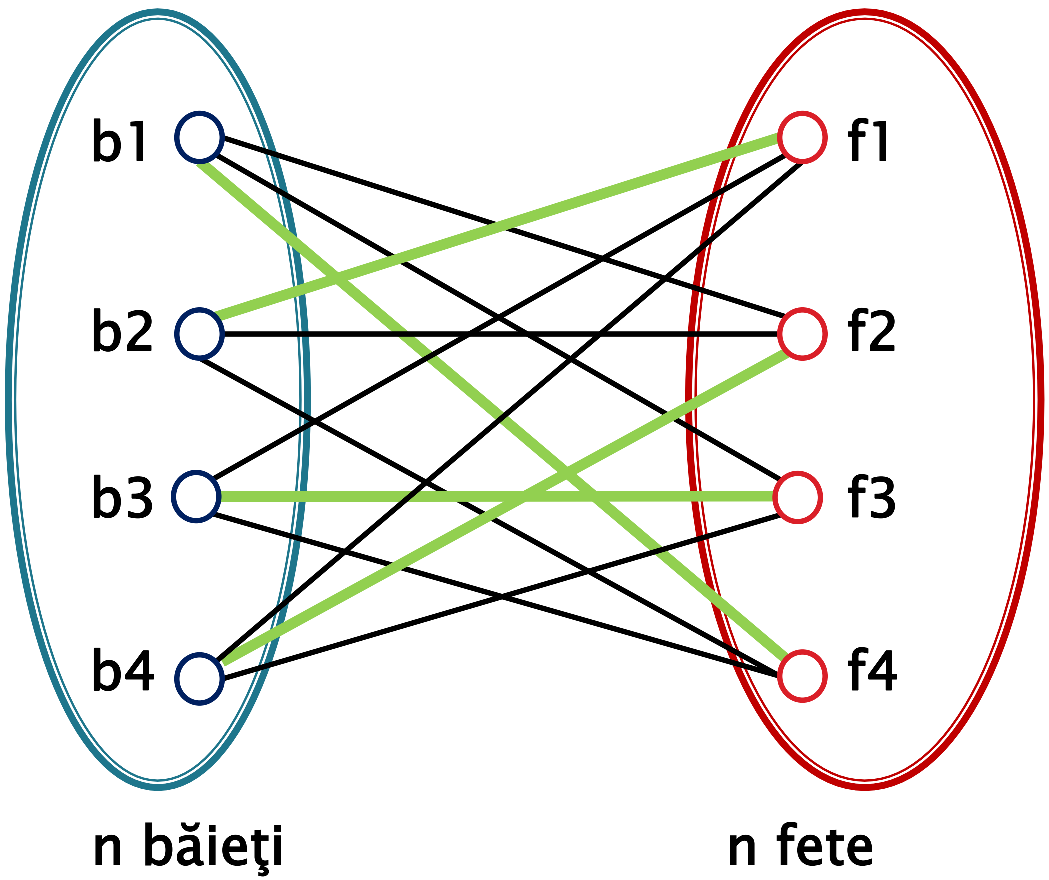
k=3



Repere istorice. Aplicaţii

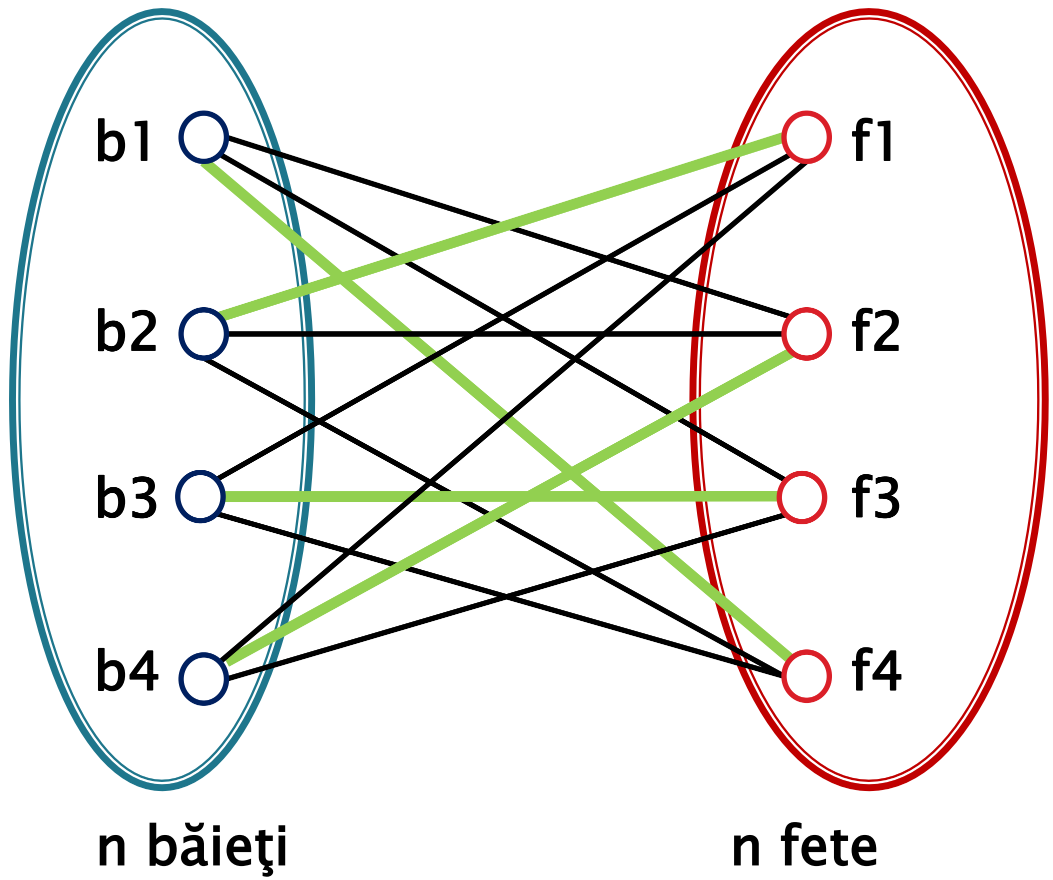
- O repriză de dans

b1,f4
b2,f1
b3,f3
b4,f2



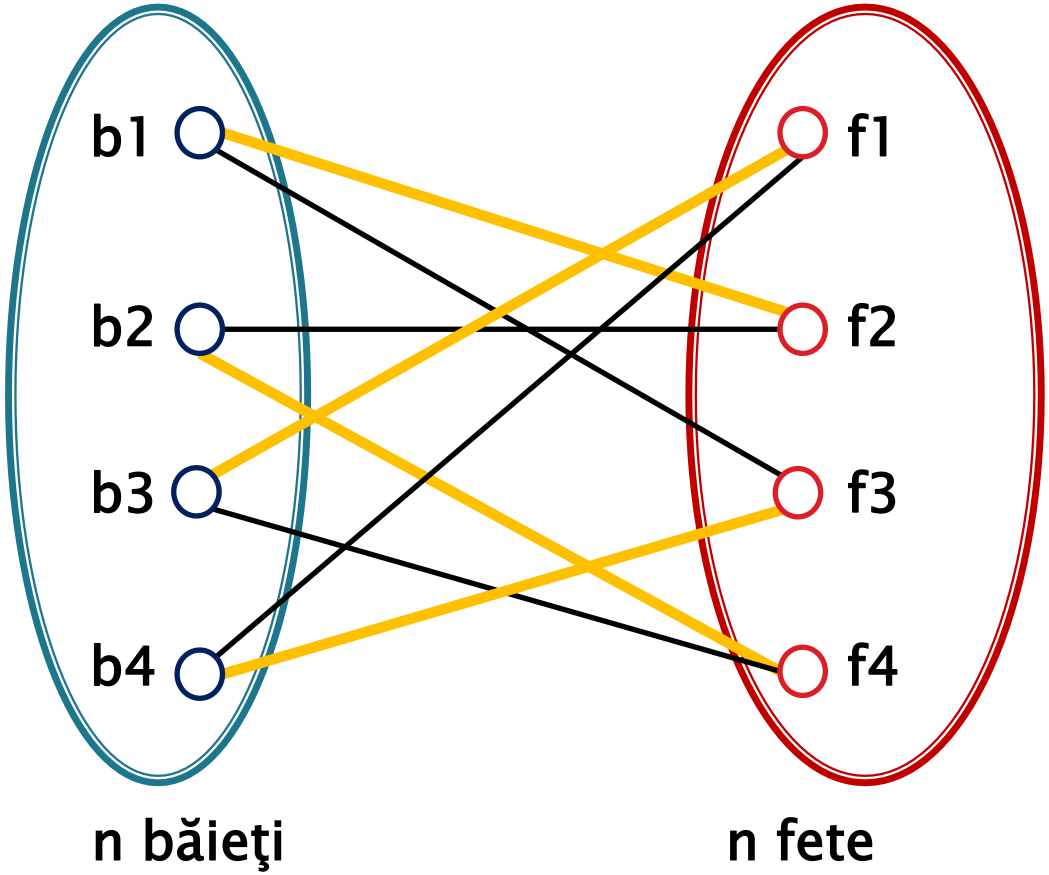
Repere istorice. Aplicaţii

- A doua repriză de dans



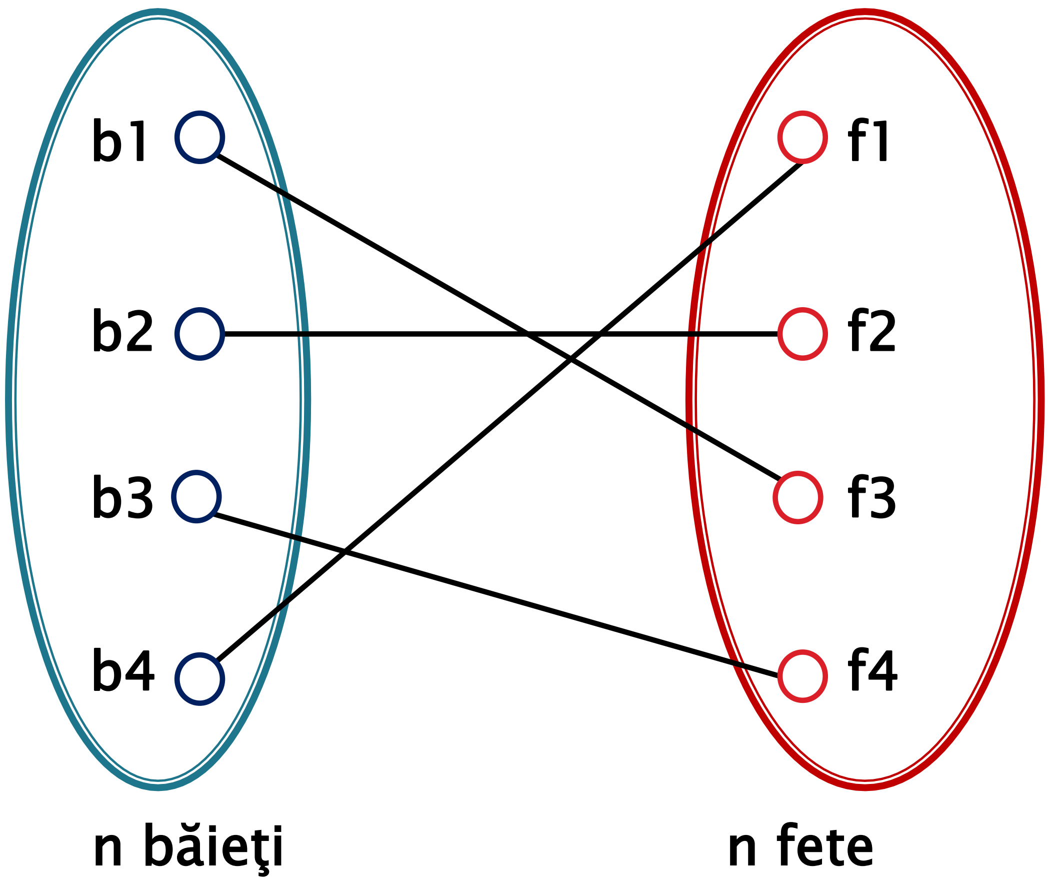
Repere istorice. Aplicaţii

- A doua repriză de dans



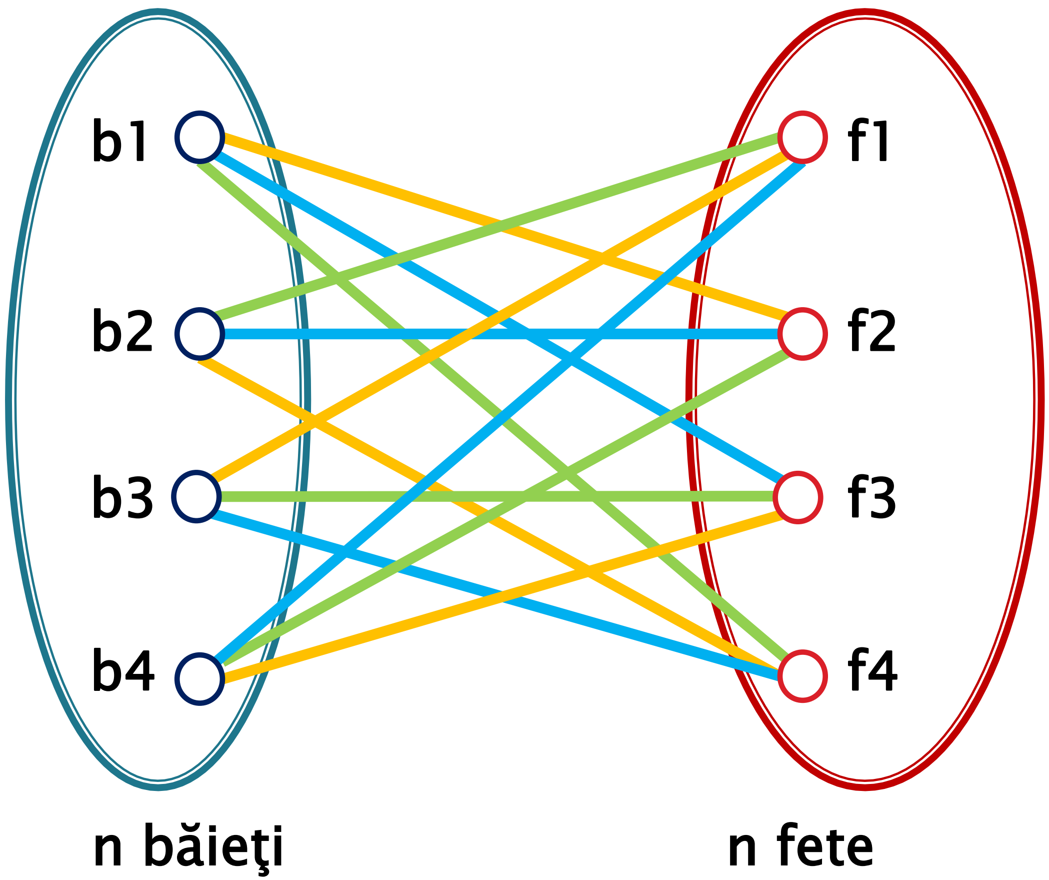
Repere istorice. Aplicaţii

- A treia repriză de dans



Repere istorice. Aplicaţii

Descompunere în cuplaje = colorări proprii de muchii



Repere istorice. Aplicaţii

- **Organizarea meciurilor unui turneu**
  - Două echipe cu câte n jucători
  - Sistem "**fiecare cu fiecare**" (fiecare jucător dintr-o echipă trebuie să joace cu fiecare din cealaltă echipă)

Repere istorice. Aplicaţii

- **Organizarea meciurilor unui turneu**
  - Două echipe cu câte n jucători
  - Sistem "**fiecare cu fiecare**" (fiecare jucător dintr-o echipă trebuie să joace cu fiecare din cealaltă echipă)

- Graf bipartit complet

Repere istorice. Aplicaţii

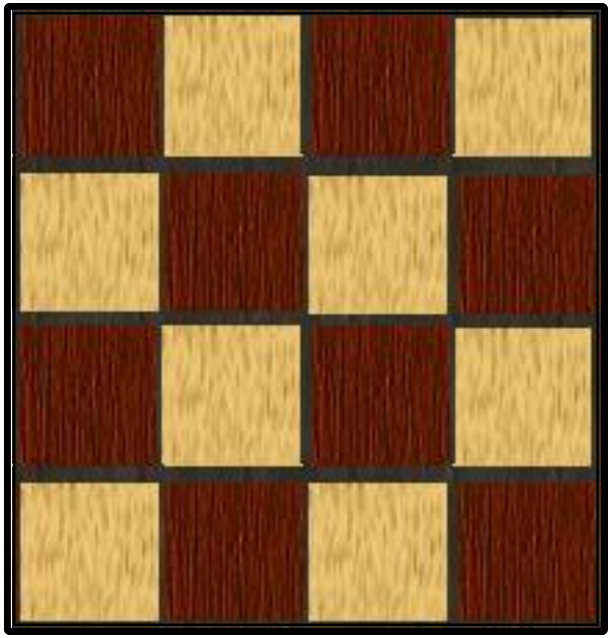
- **Probleme de repartiţie**
  - lucrători – locuri de muncă
  - profesori – examene /conferinţe

Repere istorice. Aplicaţii

- **Probleme de repartiţie**
  - lucrători – locuri de muncă
  - profesori – examene /conferinţe
    - Programarea examenelor în sesiune astfel încât numărul zilelor de sesiune să fie cât mai mic + examene repartizate cât mai uniform
    - **Problema orarului**

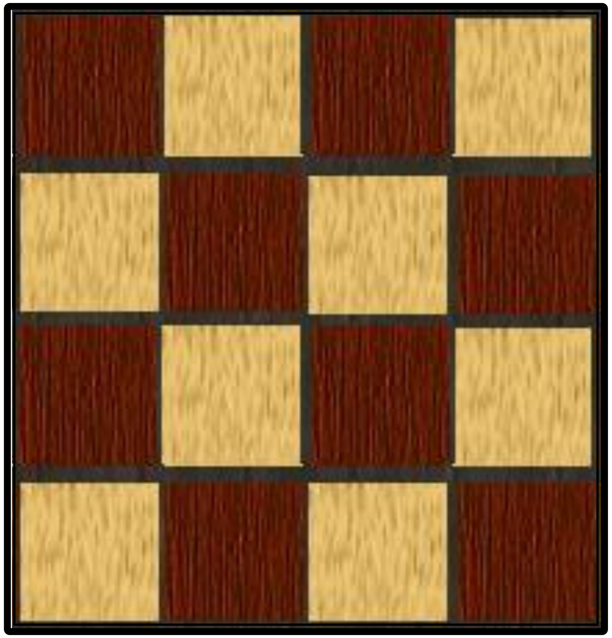
Repere istorice. Aplicaţii

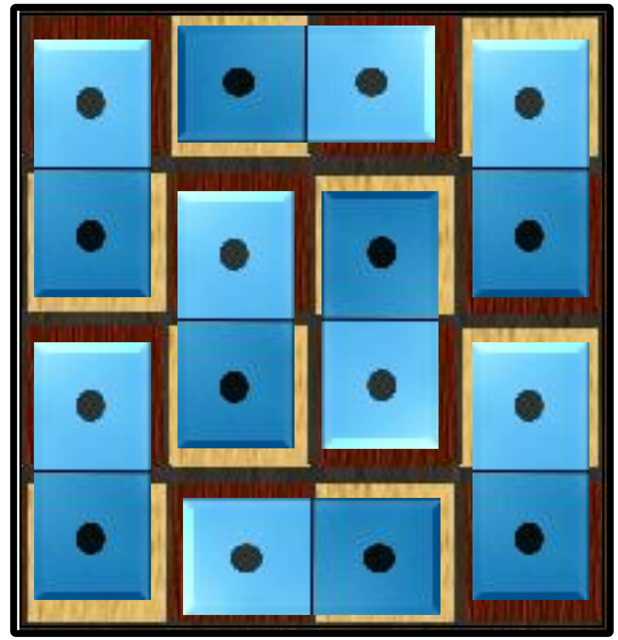
- **Acoperirea unei table cu piese de domino**



Repere istorice. Aplicaţii

- **Acoperirea unei table cu piese de domino**

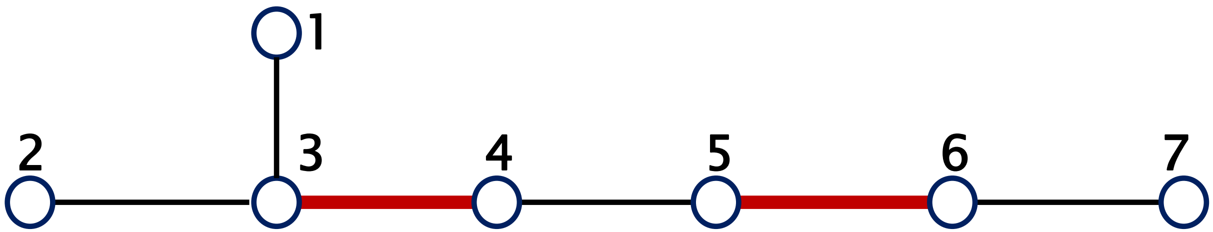




Definiţii

Fie G = (V, E) un graf simplu şi **M** ⊆ **E**.

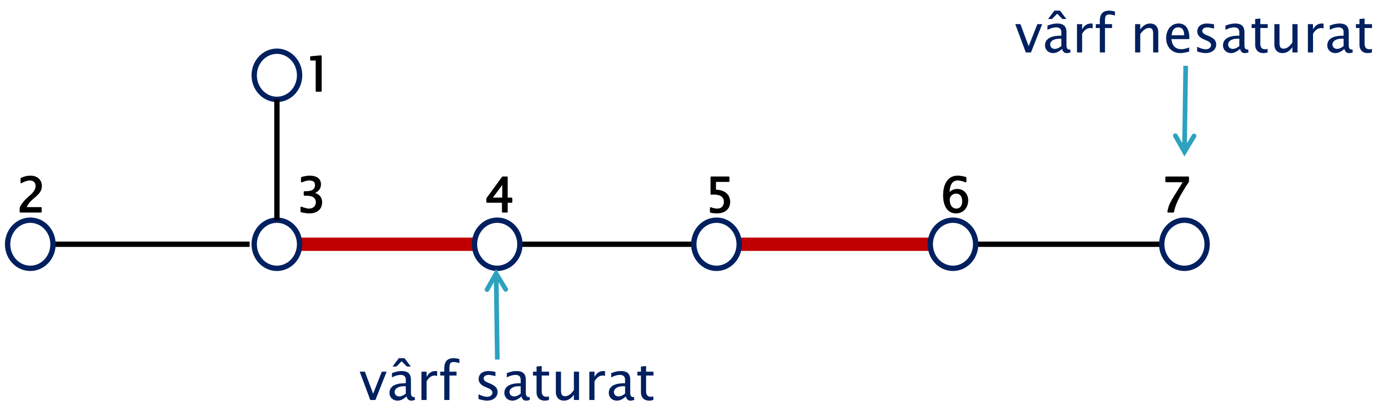
- M s.n **cuplaj** dacă orice două muchii din M sunt neadiacente



cuplaj M={ {3,4}, {5,6} }

Fie $G = (V, E)$ un graf simplu şi $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{E}$.

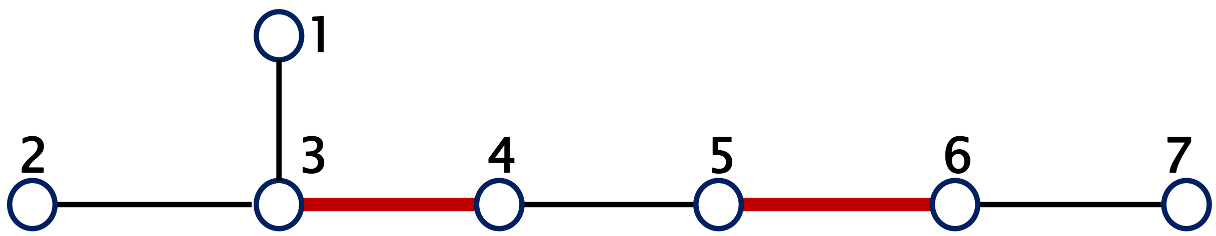
- M s.n **cuplaj** dacă orice două muchii din M sunt neadiacente
- $V(M)$ = mulţimea vârfurilor **M-saturate**
- $V(G) - V(M)$ = mulţimea vârfurilor **M-nesaturate**



Fie G = (V, E) un graf simplu şi **M** ⊆ **E**.

- Notăm [M] = **graful indus de mulţimea de muchii M**

  = **(V(M), M)**



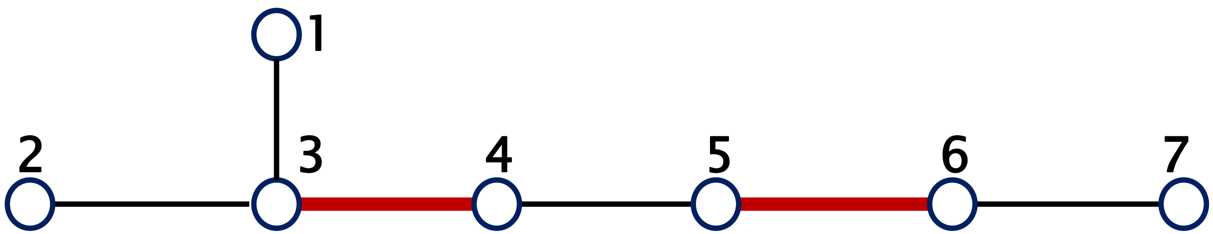
[M]:

- Un cuplaj M^* s.n **cuplaj de cardinal maxim** (**cuplaj maxim**):

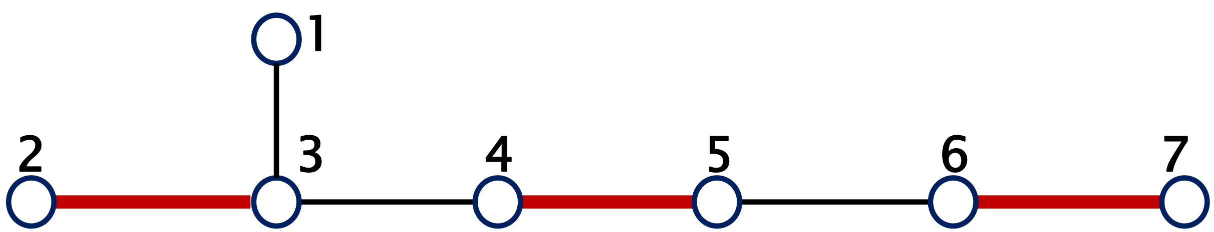
$$|M^*| \geq |M|, \forall M \subseteq E \text{ cuplaj}$$

- Un cuplaj M^* s.n **cuplaj de cardinal maxim** (**cuplaj maxim**):

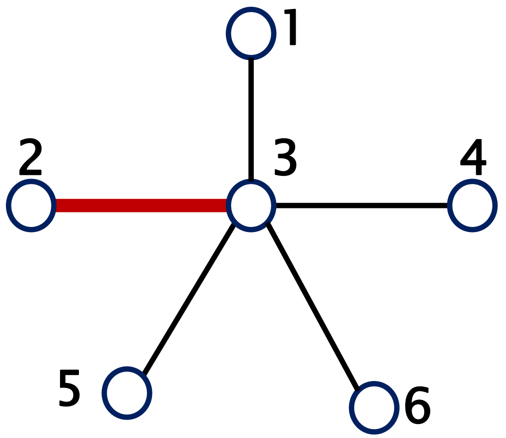
$$| M^*| \geq |M|, \forall M \subseteq E \text{ cuplaj}$$



cuplaj

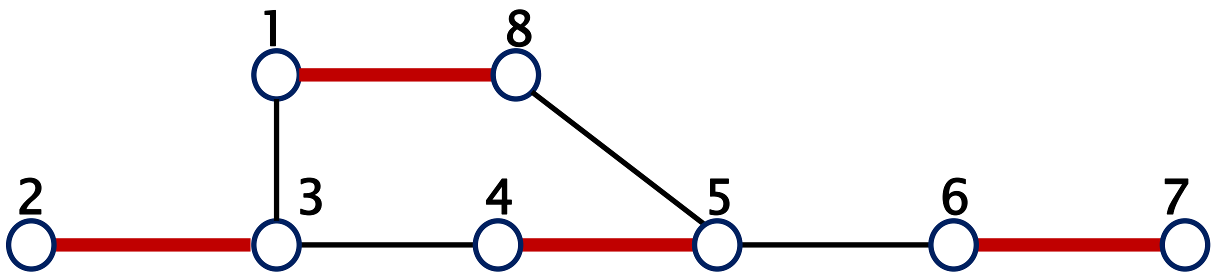


cuplaj de cardinal maxim



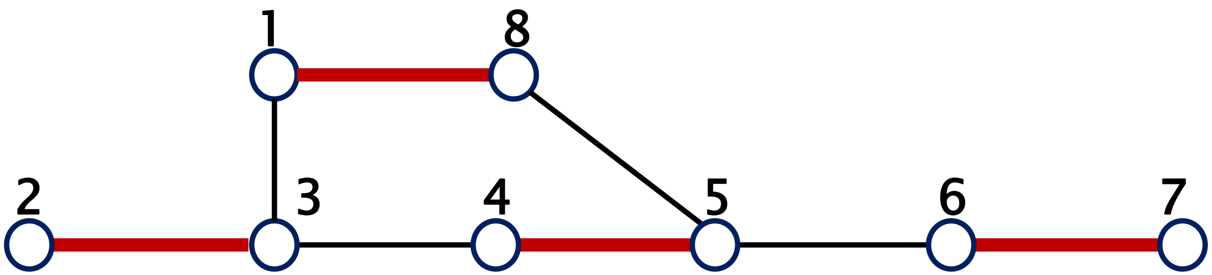
cuplaj de cardinal maxim

- Un cuplaj M s.n **cuplaj perfect** dacă orice vârf este M-saturat



cuplaj perfect

- Un cuplaj M s.n **cuplaj perfect** dacă orice vârf este M-saturat

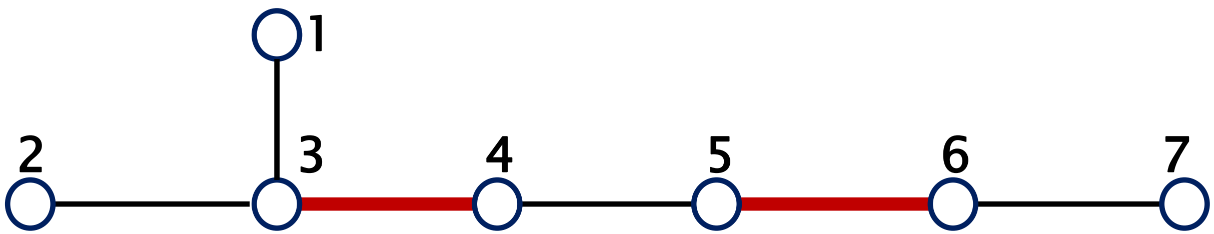


cuplaj perfect

- **Nu orice graf admite un cuplaj perfect**

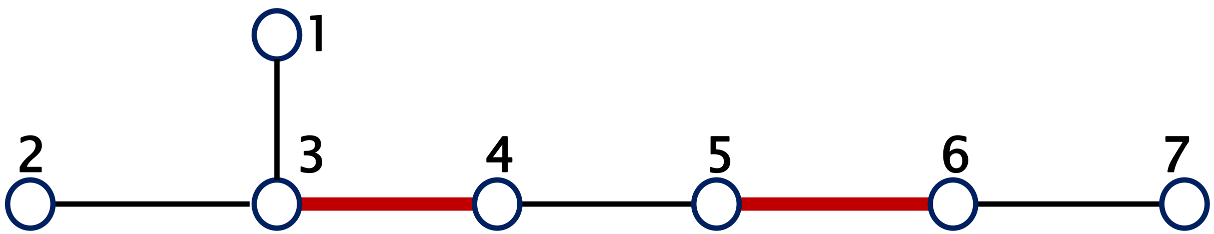
Fie **M** ⊆ **E** cuplaj.

- Un lanţ elementar P s.n. **lanţ M-alternant** dacă muchiile sale aparţin alternativ lui M şi E – M



Fie **M** ⊆ **E** cuplaj.

- Un lanţ elementar P s.n. **lanţ M-alternant** dacă muchiile sale aparţin alternativ lui M şi E – M



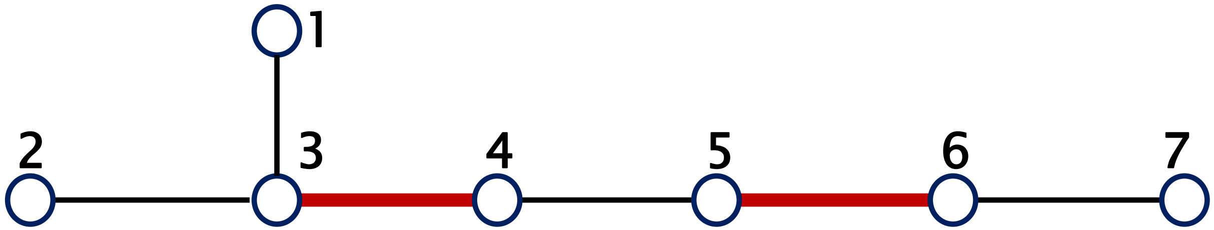
P = [4, 3, 2]

P = [3, 4, 5, 6, 7]

P = [1, 3, 4, 5, 6, 7]

Fie **M** ⊆ **E** cuplaj.

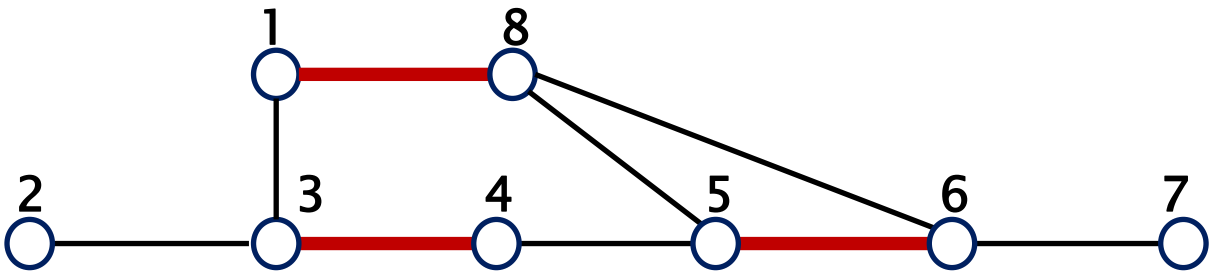
- Un lanţ M-alternant P s.n. **lanţ M-alternant deschis** dacă extremităţile sale sunt M-nesaturate



P = [1, 3, 4, 5, 6, 7]

P = [2, 3, 4, 5, 6, 7]

- **Ciclu M-alternant**



- Fie P un lanţ M-alternant **deschis**

- **Operaţie de transfer** de-a lungul lanţului P = obţinerea unui nou cuplaj M' din M astfel:

$$M' = M \Delta E(P) = (M - E(P)) \cup (E(P) - M)$$

- Fie P un lanţ M-alternant **deschis**

- **Operaţie de transfer** de-a lungul lanţului P = obţinerea unui nou cuplaj M' din M astfel:

$$M' = M \,\Delta\, E(P) = (M - E(P)) \cup (E(P) - M)$$

- Fie P un lanţ M-alternant **deschis**

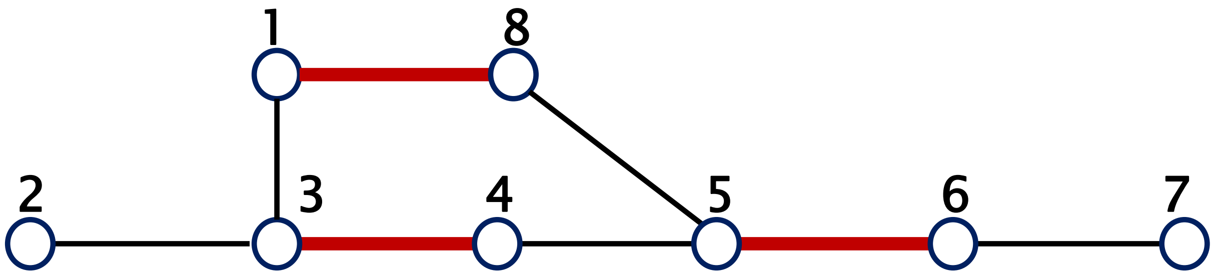
- **Operaţie de transfer** de-a lungul lanţului P = obţinerea unui nou cuplaj M' din M astfel:

$$\mathbf{M' = M \,\Delta\, E(P) = (M - E(P)) \cup (E(P) - M)}$$

- **Observaţie**

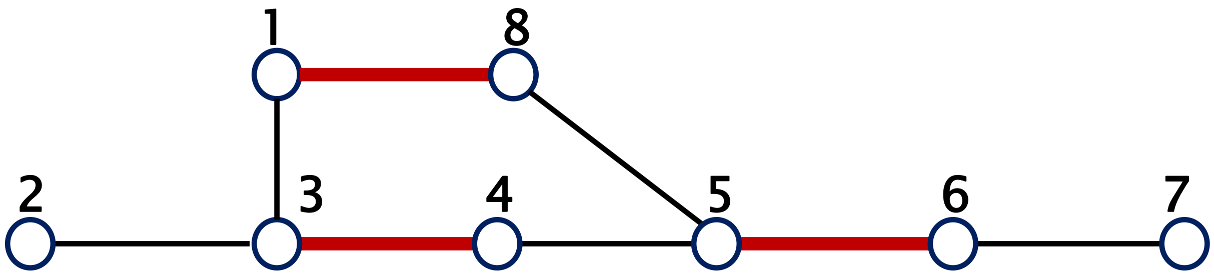
$$|\mathbf{M'}| = |\mathbf{M}| - \left\lfloor \frac{|\mathbf{E(P)}|}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{|\mathbf{E(P)}|}{2} \right\rceil = |\mathbf{M}| + 1$$

M:



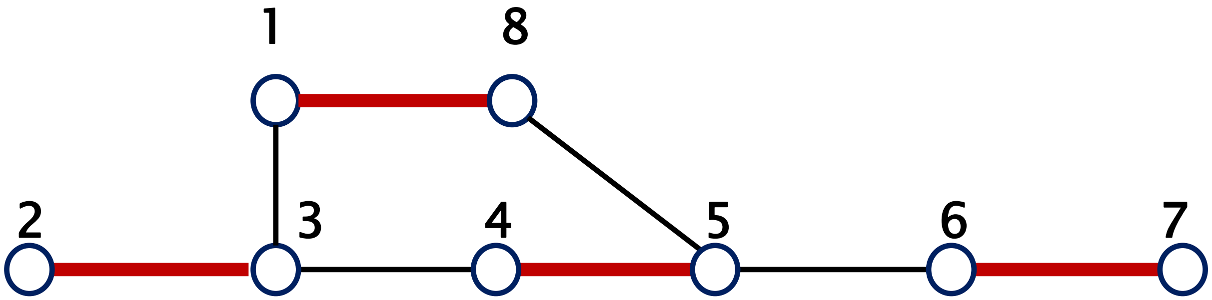
$$P = [2, 3, 4, 5, 6, 7]$$

M:



P = [2, 3, 4, 5, 6, 7]

M':



- Condiţii necesare şi suficiente ca un cuplaj să fie de cardinal maxim
- Algoritmi de determinare a unui cuplaj maxim / cuplaj perfect

Condiţii necesare şi suficiente ca un cuplaj să fie de cardinal maxim

Teorema lui BERGE

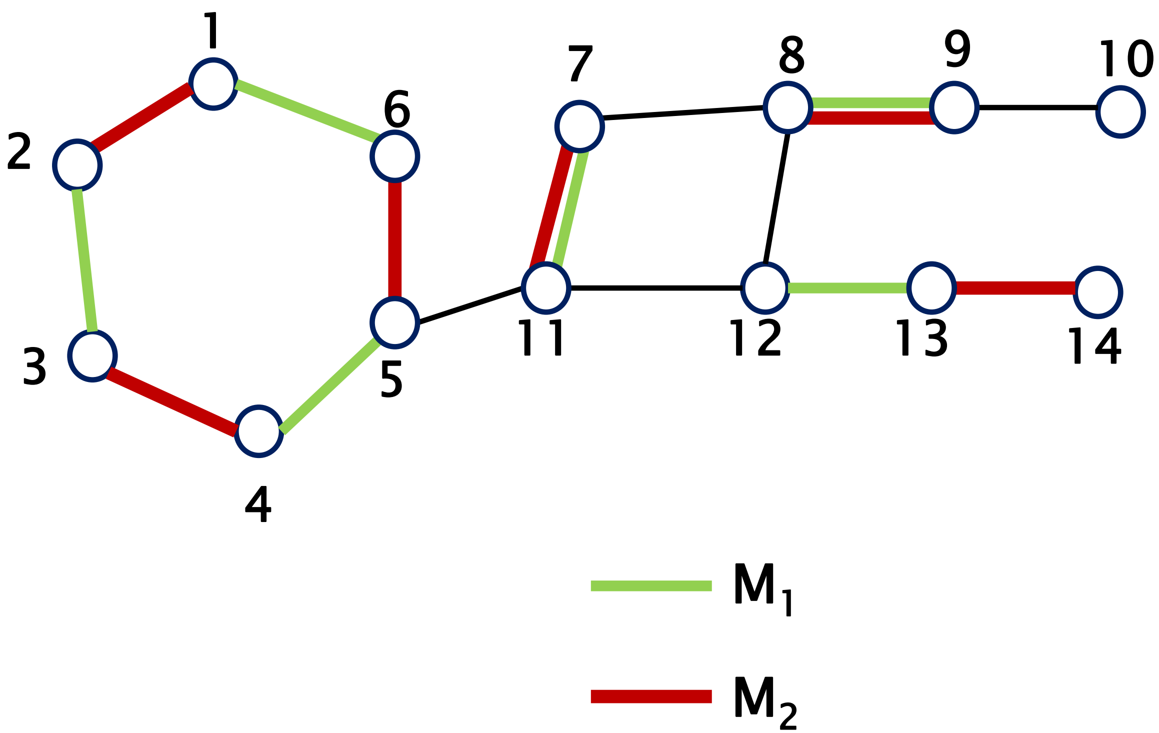
Fie $G=(V, E)$ un graf simplu cu $E \neq \emptyset$, şi $M \subseteq E$ un cuplaj. Avem echivalenţa:

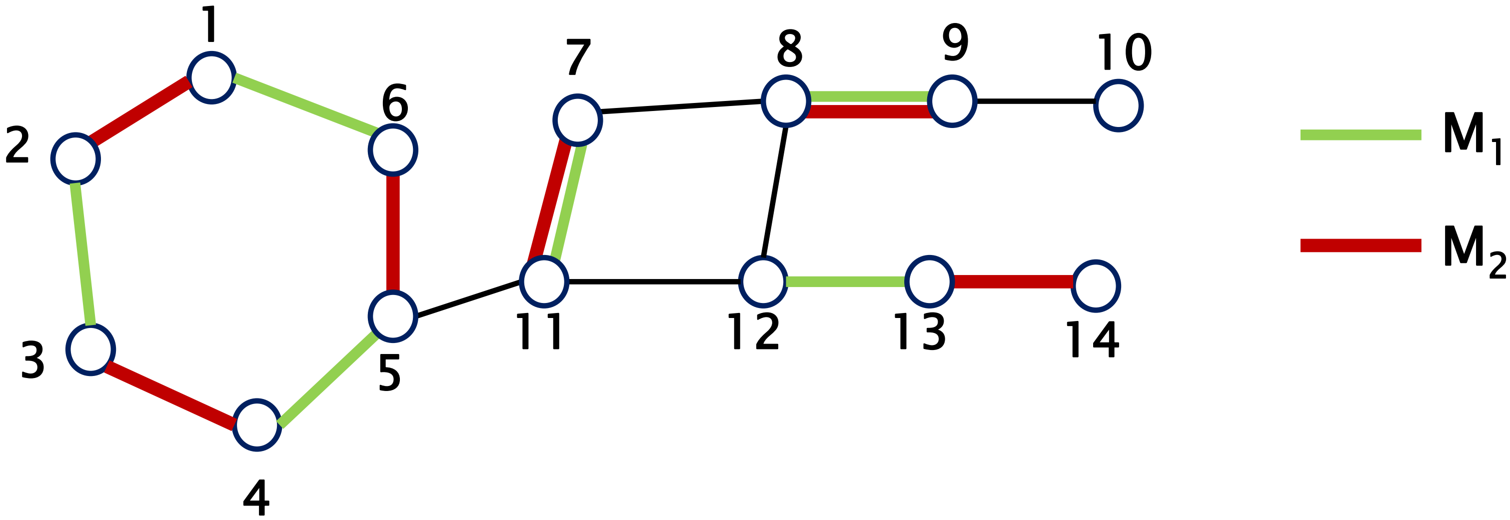
M este **cuplaj de cardinal maxim** în G $\Leftrightarrow$

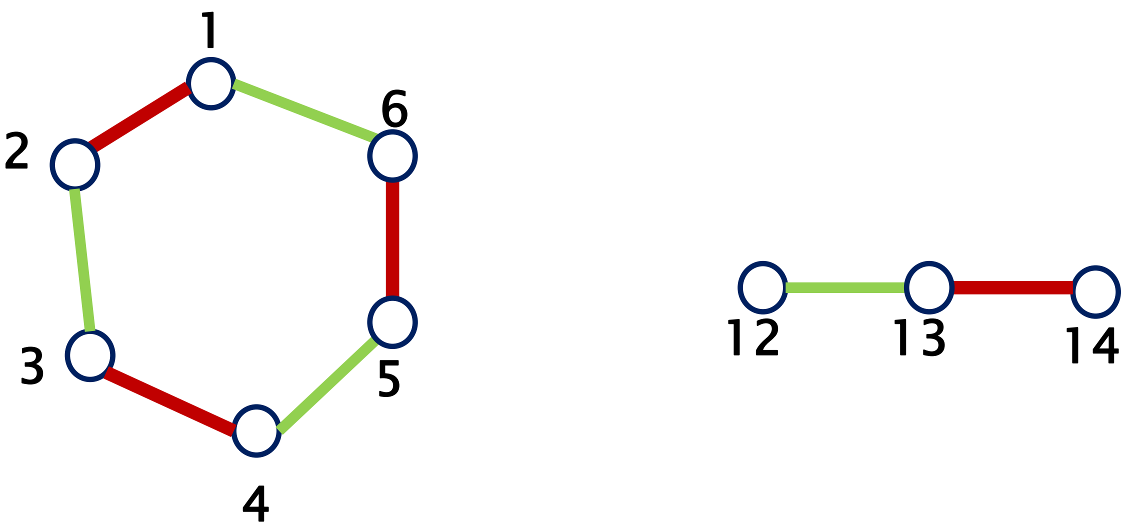
nu există nici un lanţ M−alternant **deschis** în G

Fie G = (V, E) un graf simplu şi $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2} \subseteq$ **E cuplaje**.

- Considerăm $[M_1 \,\Delta\, M_2]$ graful indus de diferenţa simetrică a celor două cuplaje







$[M_1 \Delta M_2]$

Proprietăţi

Fie $G = (V, E)$ un graf simplu şi $\mathbf{M_1}, \mathbf{M_2} \subseteq \mathbf{E}$ cuplaje.

Proprietăţi

Fie $G = (V, E)$ un graf simplu şi $\mathbf{M_1}, \mathbf{M_2} \subseteq \mathbf{E}$ cuplaje.

- $\mathrm{d}_{[M_1 \Delta M_2]}(\mathrm{v}) \leq \mathrm{d}_{[M_1]}(\mathrm{v}) + \mathrm{d}_{[M_2]}(\mathrm{v}) \leq \mathbf{2}, \forall \mathrm{v} \in \mathrm{V}$

Proprietăţi

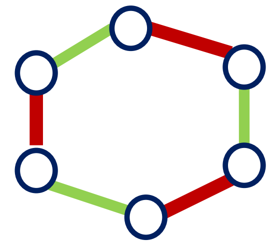
Fie G = (V, E) un graf simplu şi $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2} \subseteq \mathbf{E}$ cuplaje.

- $d_{[M_1 \Delta M_2]}(v) \leq d_{[M_1]}(v) + d_{[M_2]}(v) \leq 2, \forall v \in V$
- $[M_1 \Delta M_2]$ are 4 tipuri de **componente conexe:**

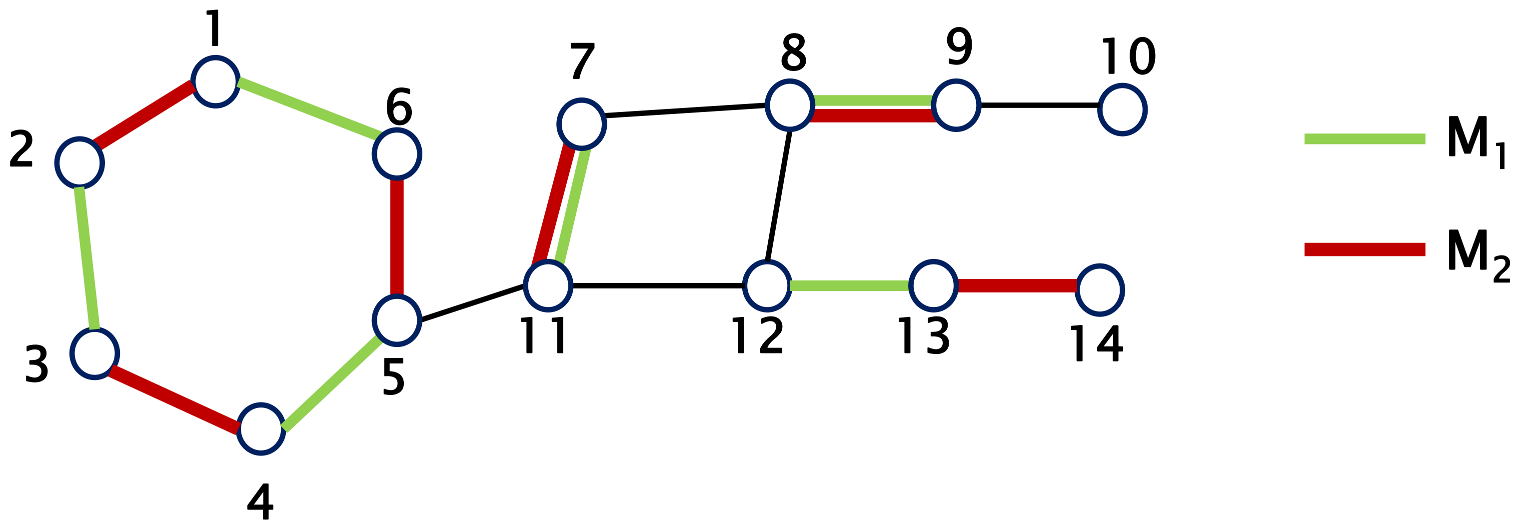
Proprietăţi

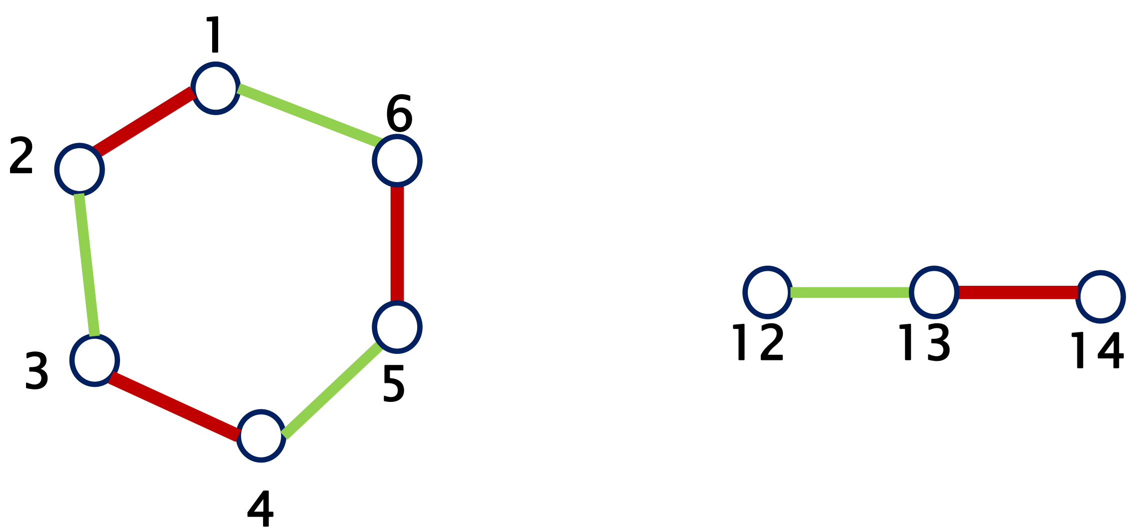
Fie G = (V, E) un graf simplu şi $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2} \subseteq \mathbf{E}$ cuplaje.

- $d_{[M_1 \Delta M_2]}(v) \leq d_{[M_1]}(v) + d_{[M_2]}(v) \leq 2, \forall v \in V$
- $[M_1 \Delta M_2]$ are 4 tipuri de **componente conexe:**
  - Cicluri M_1, M_2–alternante



  - Lanţuri M_1, M_2–alternante de tip:
    - (M_1, M_1) 
    - (M_1, M_2) 
    - (M_2, M_2) 





$[M_1 \Delta M_2]$

Propoziţie

Fie $G = (V, E)$ un graf simplu şi $\mathbf{M_1}, \mathbf{M_2} \subseteq \mathbf{E}$ cuplaje.

Avem:

$|\mathbf{M_1}| - |\mathbf{M_2}| =$

numărul de componente conexe ale grafului $[M_1 \Delta M_2]$ care sunt lanţuri de tip (M_1, M_1) –

numărul de componente conexe ale grafului $[M_1 \Delta M_2]$ care sunt lanţuri de tip (M_2, M_2)

Consecinţă

Fie $G = (V, E)$ un graf simplu şi $\mathbf{M_1}, \mathbf{M_2} \subseteq \mathbf{E}$ cuplaje.

Dacă $|\mathbf{M_1}| > |\mathbf{M_2}|$, atunci în graful $[M_1 \Delta M_2]$ există cel puţin o componentă conexă care este lanţ M_1, M_2–alternant de tip (M_1, M_1)

Teorema lui BERGE

Fie $G=(V, E)$ un graf simplu cu $E \neq \emptyset$, şi $M \subseteq E$ un cuplaj. Avem echivalenţa:

M este **cuplaj de cardinal maxim** în G $\Leftrightarrow$

nu există nici un lanţ M-alternant **deschis** în G

Demonstraţie

$\Rightarrow$ Reducere la absurd; folosim operaţia de transfer

Teorema lui BERGE

Fie $G=(V, E)$ un graf simplu cu $E \neq \emptyset$, şi $M \subseteq E$ un cuplaj. Avem echivalenţa:

M este **cuplaj de cardinal maxim** în G $\Leftrightarrow$

nu există nici un lanţ M-alternant **deschis** în G

Demonstraţie

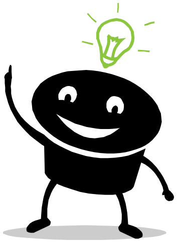
$\Rightarrow$ Reducere la absurd; folosim operaţia de transfer

$\Leftarrow$ Folosim consecinţa propoziţiei anterioare pentru a demonstra că $|M| = |M^*|$

Idee algoritm de determinare a unui cuplaj maxim

- **Fie** M un cuplaj arbitrar în G (exp. $\emptyset$)
- Cât timp **există un lanţ M–alternant deschis P în G**
  - determină un astfel de lanţ P
  - $M = M \,\Delta\, E(P)$

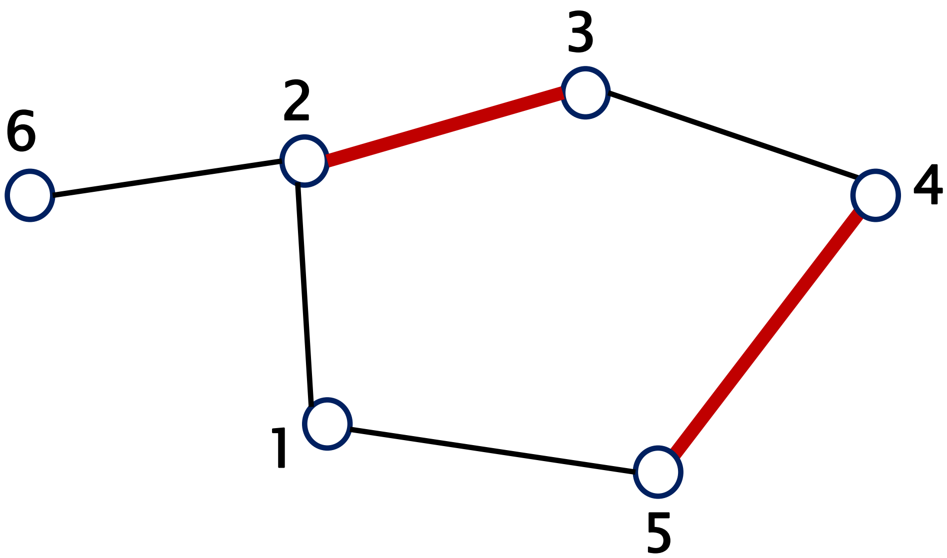
Cum determinăm un lanţ M-alternant deschis?



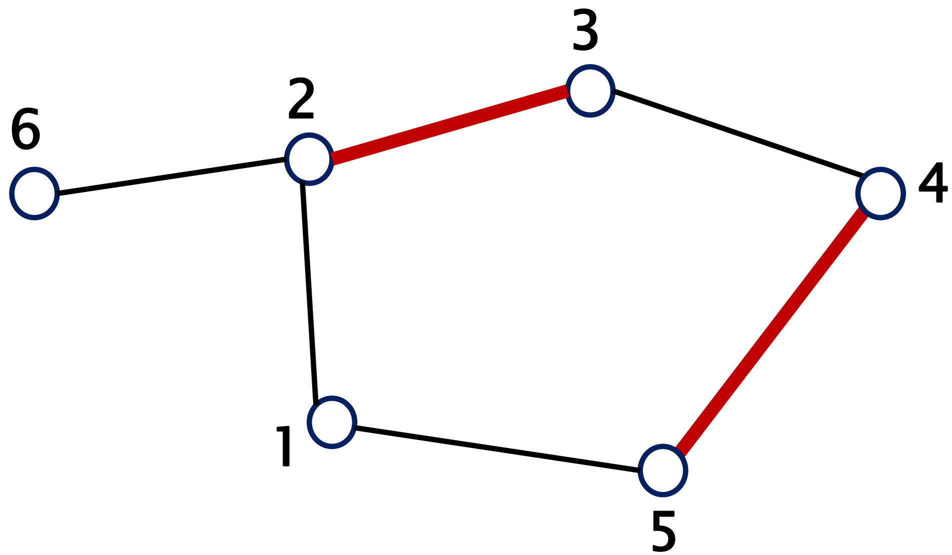
Prin parcurgerea grafului, vector tata…

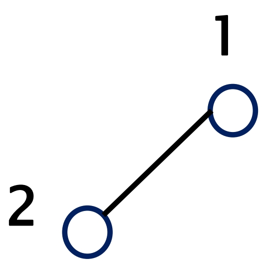
Prin parcurgere nu determinăm toate lanţurile elementare dintr-un graf.

Dacă există un lanţ M-alternant deschis, va fi sigur el găsit printr-o parcurgere?



3
2
6
4
1
5





Prin parcurgere (BF sau DF) din 1 nu găsim lanţul M-alternant deschis, deoarece 2 este deja vizitat ca fiu al lui 1

Prin parcurgere nu putem determina toate lanţurile elementare dintr-un graf.

Dacă există un lanţ M-alternant deschis, va fi sigur el găsit printr-o parcurgere?

- Grafuri bipartite