Diverse exerciţii tip examen
SEMINAR DE PROGRAMARE LOGICĂ

LECTOR *Claudia MUREŞAN*

Semestrul II, 2013–2014

1 Mic mnemonic de notaţii şi definiţii

In textul de mai jos, vom folosi prescurtarea uzuala **i. e.** ("id est"), semnificand "adica". Pentru orice multime A, vom nota cu $id_A : A \to A$ functia sa identica: $id_A(a) = a$, pentru fiecare $a \in A$.

A se vedea CURSUL de PROGRAMARE LOGICĂ pentru notiunile si rezultatele teoretice folosite in cele ce urmeaza.

Amintim pe scurt cateva dintre ele.

O multime de sorturi trebuie sa fie nevida, dar nu neaparat finita.

Data o multime nevida S, monoidul liber generat de S este multimea cuvintelor finite peste S (se noteaza cu S^* si este monoid cu operatia de concatenare, avand drept element neutru cuvantul vid): $S^* = \{s_1 s_2 \ldots s_n \mid n \in \mathbb{N}, s_1, s_2, \ldots, s_n \in S\} = \{\lambda\} \cup \{s_1 s_2 \ldots s_n \mid n \in \mathbb{N}^*, s_1, s_2, \ldots, s_n \in S\}$, unde λ este cuvantul vid.

Fie S o multime de sorturi.

Daca X este o multime S–sortata (i. e. familie de multimi $X = (X_s)_{s \in S}$), atunci se noteaza $|X| = \bigcup\limits_{s \in S} X_s$.

Daca (S, Σ) este o signatura S–sortata (notatie alternativa: simplu, Σ) (i. e. Σ este o familie de multimi $\Sigma = (\Sigma_{w,s})_{\substack{w \in S^*,\\ s \in S}}$ doua cate doua disjuncte), atunci se noteaza $|\Sigma| = \bigcup\limits_{\substack{w \in S^*,\\ s \in S}} \Sigma_{w,s}$. Elementele lui $|\Sigma|$ se numesc *simboluri de operatii.* Daca $w \in S^*$, $s \in S$ si $\sigma \in |\Sigma|$, atunci faptul ca $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ se noteaza si sub forma: $\sigma : w \to s$. In cazul particular in care $w = \lambda$, atunci faptul ca $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$, i. e., cu notatia alternativa, $\sigma : \lambda \to s$, se mai noteaza, simplu: $\sigma :\to s$.

Pentru simplitate, uneori notam $|\Sigma|$ cu Σ, si spunem ca Σ este multimea simbolurilor de operatie a signaturii (S, Σ).

X este o *multime S–sortata de variabile raportat la signatura* Σ ddaca multimile X_s, $s \in S$, sunt doua cate doua disjuncte si $|X| \cap |\Sigma| = \emptyset$.

Notaţia 1.1. Pentru orice functii $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, se va nota compunerea in sensul sagetilor: $f; g = g \circ f : A \to C$. In cazul functiilor multisortate: daca S este o multime de sorturi, $A = (A_s)_{s \in S}$, $B = (B_s)_{s \in S}$ si $C = (C_s)_{s \in S}$ sunt multimi S–sortate, iar $f = (f_s)_{s \in S}$ si $g = (g_s)_{s \in S}$ sunt functii S–sortate, cu $A_s \xrightarrow{f_s} B_s \xrightarrow{g_s} C_s$, pentru fiecare $s \in S$, atunci $f; g = ((f; g)_s)_{s \in S} = (f_s; g_s)_{s \in S}$, unde, pentru orice $s \in S$, $f_s; g_s = g_s \circ f_s : A_s \to C_s$.

Definiţia 1.1. Fie (S, Σ) o signatura multisortata (cu multimea de sorturi S si multimea de simboluri de operatie Σ). Consideram doua Σ–algebre (denumire alternativa: (S, Σ)–algebre) $\mathcal{A} = (A = (A_s)_{s\in S}, (A_\sigma)_{\sigma\in|\Sigma|})$ si $\mathcal{B} = (B = (B_s)_{s\in S}, (B_\sigma)_{\sigma\in|\Sigma|})$.

Se numeste Σ*–morfism (sau morfism de* Σ*–algebre, sau* (S, Σ)*–morfism, sau morfism de* (S, Σ)*–algebre) de la* $\mathcal{A}$ *la* $\mathcal{B}$ o functie S–sortata $h : A \to B$, $h = (h_s)_{s\in S}$, $h_s : A_s \to B_s$ pentru orice $s \in S$, care comuta cu operatiile corespunzatoare simbolurilor de operatii din Σ, i. e.:

- pentru orice simbol de operatie zeroara $\sigma \in |\Sigma|$, $\sigma :\to s$, cu $s \in S$, are loc: $h_s(A_\sigma) = B_\sigma$; (amintim ca operatiile din cele doua algebre multisortate corespunzatoare lui σ sunt, in acest caz, constante $A_\sigma \in A_s$ si $B_\sigma \in B_s$);

- pentru orice n natural nenul, orice sorturi $s_1, s_2, \ldots, s_n, s \in S$ si orice simbol de operatie $\sigma \in |\Sigma|$, $\sigma : s_1 s_2 \ldots s_n \to s$, are loc: $A_\sigma; h_s = (h_{s_1}, h_{s_2}, \ldots, h_{s_n}); B_\sigma$, i. e.: oricare ar fi $a_1 \in A_{s_1}, a_2 \in A_{s_2}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$, $h_s(A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)) = B_\sigma(h_{s_1}(a_1), h_{s_2}(a_2), \ldots, h_{s_n}(a_n))$; (amintim ca operatiile din cele doua algebre multisortate corespunzatoare lui σ sunt, in acest caz, functii $A_\sigma : A_{s_1} \times A_{s_2} \times \ldots \times A_{s_n} \to A_s$ si $B_\sigma : B_{s_1} \times B_{s_2} \times \ldots \times B_{s_n} \to B_s$; de fapt, si primul caz, al operatiilor zeroare, poate fi tratat unitar cu acesta, intrucat produsul direct al familiei vide de multimi este un singleton, si, prin urmare, o operatie zeroara este o functie definita pe acest singleton, putand fi, asadar, identificata cu unica valoare din imaginea ei, i. e. identificata cu o constanta din codomeniul ei *(amintim ca un* singleton *este o multime cu un singur element; mai amintim ca reuniunea familiei vide de multimi este multimea vida, prin urmare produsul direct al familiei vide de multimi este singletonul al carui unic element este unica functie de la multimea vida la multimea vida; a se revedea cursul de logica matematica din anul I)*).

Uneori, se noteaza: $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, pentru a specifica structurile de Σ–algebre în raport cu care h este Σ–morfism.

Teorema 1.2 (proprietatea de universalitate a Σ–algebrei libere generate de o multime de variabile). *Fie* (S, Σ) *o signatura multisortata si* $X = (X_s)_{s\in S}$ *o multime* S*–sortata de variabile raportat la signatura* (S, Σ).

Atunci: pentru orice Σ*–algebra* $\mathcal{A} = (A = (A_s)_{s\in S}, (A_\sigma)_{\sigma\in|\Sigma|})$ *si orice functie* S*–sortata* $f : X \to A$*, exista un unic morfism de* Σ*–algebre* $\tilde{f} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ *cu proprietatea ca* $\tilde{f}\mid_X = f$*, i. e. exista un unic morfism de* Σ*–algebre* $\tilde{f}$ *care face urmatoarea diagrama comutativa:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & T_\Sigma(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Stim ca de la multimea vida la o multime M fixata exista o unica functie (anume $(\emptyset, \emptyset, M)$, in notatia functiilor (monosortate) ca triplete). Acest fapt si teorema anterioara, particularizata la cazul $X = (\emptyset)_{s\in S}$ (care este o multime de variabile raportat la orice signatura S–sortata), arata ca:

Corolarul 1.3 (proprietatea de universalitate a Σ–algebrei libere fara variabile). *Fie* (S, Σ) *o signatura multisortata.*

Atunci: pentru orice Σ*–algebra* $\mathcal{A} = (A = (A_s)_{s\in S}, (A_\sigma)_{\sigma\in|\Sigma|})$*, exista un unic morfism de* Σ*–algebre* $\tilde{f} : T_\Sigma \to \mathcal{A}$.

Cu alte cuvinte, T_Σ este obiect initial in categoria Σ–algebrelor (denumire echivalenta: Σ–algebra initiala).

Un alt corolar imediat al Teoremei 1.2 este urmatorul:

Corolarul 1.4. *Fie (S, Σ) o signatura multisortata si $X = (X_s)_{s \in S}$ o multime S–sortata de variabile raportat la signatura (S, Σ), iar $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ si $h : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ doua morfisme de Σ–algebre care coincid pe X, i. e. cu proprietatea ca $g_s(x) = h_s(x)$ pentru orice $s \in S$ si orice $x \in X_s$.*

Atunci $g = h$.

2 Exerciţii

Exerciţiul 2.1. Consideram **specificatia lui Lawvere**, constand din signatura de mai jos, si fara ecuatii:

- multimea de sorturi S contine un singur sort, numit Nat:
$$S = \{Nat\};$$
- multimea Σ a simbolurilor de operatii contine doar un simbol de operatie zeroara (i. e. operatie de aritate 0, operatie fara argumente, constanta), o, si unul de operatie unara (i. e. operatie de aritate 1, operatie cu un singur argument), s, pe unicul sort:
$$\Sigma = \{o :\to Nat, s : Nat \to Nat\}.$$

In Maude, specificatia de mai sus poate fi implementata prin urmatorul modul:

```
fmod MY–NAT is
  sort Nat .
  op o : –> Nat .
  op s : Nat –> Nat .
endfm
```

Sa se demonstreze ca algebra $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, succ)$, unde $\mathbb{N}$ este multimea numerelor naturale, 0 este primul numar natural, iar $succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $succ(n) = n + 1$, este model initial al acestei specificatii.

Rezolvare: Prin definitie, un model al specificatiei anterioare este o Σ–algebra, iar modelul initial al acestei specificatii este Σ–algebra initiala, adica obiectul initial in categoria Σ–algebrelor, adica acea Σ–algebra $\mathcal{I}$ cu proprietatea ca, oricare ar fi o Σ–algebra $\mathcal{A}$, exista un unic Σ–morfism de la $\mathcal{I}$ la $\mathcal{A}$. Sunt corecte exprimarile "o Σ–algebra initiala", "un model initial al specificatiei", dar sunt corecte si exprimarile "Σ–algebra initiala", "modelul initial al specificatiei", pentru ca Σ–algebra initiala este unica pana la un Σ–izomorfism, i. e. oricare doua Σ–algebre initiale sunt Σ–izomorfe.

Sa demonstram ca $\mathcal{N}$ este model initial pentru specificatia de mai sus, adica este Σ–algebra initiala, adica este obiect initial in categoria Σ–algebrelor, adica specificatia anterioara este adecvata pentru $\mathcal{N}$, sau, mai complet scris, specificatia anterioara este adecvata pentru a descrie pe $\mathcal{N}$ ca model initial.

In primul rand, observam ca $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, succ)$ este o Σ–algebra (deci este model al specificatiei lui Lawvere, satisface aceasta specificatie), avand:

- multimea suport: $N_{Nat} = \mathbb{N}$;
- operatia zeroara (operatia de aritate 0, operatia fara argumente, constanta): $N_o = 0 \in \mathbb{N}$;
- operatia unara (operatia de aritate 1, operatia de un singur argument): $N_s = succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $succ(n) = n + 1$.

Fie $\mathcal{A} = (A_{Nat}, A_o, A_s)$ un model arbitrar pentru specificatia lui Lawvere, adica o Σ–algebra arbitrara. Pentru simplificarea scrierii, intrucat aici lucram cu algebre monosortate ($\{Nat\}$–sortate; avem unicul sort Nat), vom nota $A = A_{Nat}$. Atunci $\mathcal{A} = (A, A_o, A_s)$, cu $A_o \in A$, iar $A_s : A \to A$.

Avem de demonstrat ca exista un unic Σ–morfism $h : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$. Un Σ–morfism h intre $\mathcal{N}$ si $\mathcal{A}$ este o functie monosortata ($\{Nat\}$–sortata) $h = h_{Nat} : N_{Nat} \to A_{Nat}$, care comuta cu operatiile Σ–algebrelor $\mathcal{N}$ si $\mathcal{A}$, adica:

- $h_{Nat}(N_o) = A_o$ si
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $h_{Nat}(N_s(n)) = A_s(h_{Nat}(n))$.

Cu notatiile stabilite mai sus, un Σ–morfism $h : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ este o functie $h = h_{Nat} : \mathbb{N} \to A$, care satisface comutarile:

- $h(0) = A_o$ si
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $h(succ(n)) = A_s(h(n))$.

Sa demonstram, asadar, existenta si unicitatea Σ–morfismului $h : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$.

Unicitatea: Fie $h = h_{Nat}, g = g_{Nat} : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ doua Σ–morfisme. Atunci $h, g : \mathbb{N} \to A$. Pentru a arata egalitatea lui h cu g, avem de demonstrat ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $h(n) = g(n)$. Demonstram acest fapt prin inductie matematica dupa $n \in \mathbb{N}$.

Pasul de verificare: h si g sunt Σ–morfisme, prin urmare comuta cu operatiile zeroare corespunzatoare simbolului de operatie o, deci $h(0) = A_o = g(0)$.

Pasul de inductie: Presupunem ca $h(n) = g(n)$ pentru un n natural, arbitrar, fixat.

Folosind definitia operatiei *succ* din $\mathcal{N}$, comutarea oricarui Σ–morfism cu operatiile corespunzatoare simbolului de operatie s si ipoteza de inductie, rezulta: $h(n+1) = h(succ(n)) = A_s(h(n)) = A_s(g(n)) = g(succ(n)) = g(n+1)$.

Conform principiului inductiei matematice rezulta ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $h(n) = g(n)$, prin urmare $h = g$, si deci unicitatea Σ–morfismului este demonstrata.

In continuare, pentru a nu incarca exprimarea, pentru orice simbol de operatie σ din signatura Σ si orice Σ–morfism f, vom spune: "f comuta cu σ" in loc de "f comuta cu operatiile corespunzatoare simbolului de operatie σ".

Existenta: Fie functia $\{Nat\}$–sortata $h = h_{Nat} : \mathbb{N} \to A$, definita prin:

$$\begin{cases} h(0) = A_o; \\ (\forall n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\})\ h(n) = (\underbrace{A_s; \ldots; A_s}_{\text{de } n \text{ ori } A_s})(A_o). \end{cases}$$

Vom arata ca h este un Σ–morfism de la $\mathcal{N}$ la $\mathcal{A}$, adica h comuta cu o si cu s.

De ce definim pe h astfel? Pentru ca trebuie sa avem comutarea lui h cu o si cu s, prin urmare trebuie sa avem: $h(0) = A_o$ si, pentru orice n natural nenul, $h(n) = h((\underbrace{succ; \ldots ; succ}_{\text{de } n \text{ ori } succ})(0)) = (\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n \text{ ori } A_s})(h(0)) = (\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n \text{ ori } A_s})(A_o)$. Am aplicat aici faptul ca, in conformitate cu definitia o-pe-ra-ti-ei $succ$ din $\mathcal{N}$, $n = 0 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ de } 1} = (\underbrace{succ; \ldots ; succ}_{\text{de } n \text{ ori } succ})(0)$, apoi am aplicat de n ori comutarea unui Σ–morfism h cu s.

Conform definitiei sale, h comuta cu 0: $h(0) = A_o$.

Demonstram ca h comuta cu s.

Aplicand definitia lui h de mai sus, obtinem ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $h(succ(n)) = h(n+1) = (\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n+1 \text{ ori } A_s})(A_o) = A_s((\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n \text{ ori } A_s})(A_o)) = A_s(h(n))$. Asadar, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $h(succ(n)) = A_s(h(n))$, i. e. $succ; h = h; A_s$, deci h comuta cu s.

Prin urmare, $h : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ este Σ–morfism, deci exista un Σ–morfism de la $\mathcal{N}$ la $\mathcal{A}$.

Am demonstrat ca exista un unic Σ–morfism $h : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$, prin urmare $\mathcal{N}$ este Σ–algebra initiala, adica obiect initial in categoria Σ–algebrelor, adica model initial pentru specificatia lui Lawvere.

Exemplul 2.2. Alte exemple de modele initiale pentru specificatii fara ecuatii:

- oricare ar fi signatura (S, Σ), $T_\Sigma = \emptyset$ ddaca Σ nu contine simboluri de operatii zeroare (constante) (in acest caz, nu se poate forma niciun termen fara variabile; daca, in schimb, Σ contine macar un simbol de constanta $\sigma :\to s$, cu $s \in S$, atunci $\sigma \in (T_\Sigma)_s$);
- daca $S = \{s, t, u\}$ (s, t, u doua cate doua distincte), iar $\Sigma = \{\alpha :\to s, \beta :\to t, f : st \to u\}$, atunci $T_\Sigma = ((T_\Sigma)_s, (T_\Sigma)_t, (T_\Sigma)_u)$, cu $(T_\Sigma)_s = \{\alpha\}$, $(T_\Sigma)_t = \{\beta\}$, iar $(T_\Sigma)_u = \{f(\alpha, \beta)\}$;
- daca $S = \{s, t\}$ ($s \neq t$), iar $\Sigma = \{\alpha :\to s, \beta :\to s, f : ss \to t\}$, atunci $T_\Sigma = ((T_\Sigma)_s, (T_\Sigma)_t)$, cu $(T_\Sigma)_s = \{\alpha, \beta\}$ si $(T_\Sigma)_t = \{f(\alpha, \alpha), f(\alpha, \beta), f(\beta, \alpha), f(\beta, \beta)\}$;
- daca $S = \{s\}$, iar $\Sigma = \{\sigma :\to s, f : ss \to s\}$, atunci $T_\Sigma = ((T_\Sigma)_s)$, cu $(T_\Sigma)_s = \{\sigma, f(\sigma, \sigma), f(\sigma, f(\sigma, \sigma)), f(f(\sigma, \sigma), \sigma), f(f(\sigma, \sigma), f(\sigma, \sigma)), \ldots\}$ ($(T_\Sigma)_s$ este in bijectie cu multimea arborilor binari stricti neetichetati, i. e. arborii binari in care orice nod care nu e frunza are doi fii, si fara alta informatie in noduri decat subarborele stang si subarborele drept).

Exerciţiul 2.3. Fie (S, Σ) o signatura multisortata si X si Y doua multimi S– sortate de variabile raportat la signatura (S, Σ). Sa se demonstreze ca, daca multimile X si Y sunt in bijectie, atunci Σ–algebrele de termeni cu variabile din X si respectiv Y sunt Σ–izomorfe.

Scris formal: daca $X \cong Y$, atunci $T_\Sigma(X) \cong T_\Sigma(Y)$.

Rezolvare: Presupunem ca X si Y sunt in bijectie, i. e. exista o bijectie S–sortata $\varphi = (\varphi_s)_{s \in S} : X \to Y$, adica, pentru fiecare $s \in S$, $\varphi_s : X_s \to Y_s$ este o bijectie. Atunci avem si bijectia S–sortata $\varphi^{-1} = (\varphi_s^{-1})_{s \in S} : Y \to X$.

Conform Teoremei 1.2 (partea privind existenta), rezulta ca exista un Σ–morfism $\tilde{\varphi} : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(Y)$ cu proprietatea ca $\tilde{\varphi}\mid_X = \varphi$, si exista un Σ–morfism $\widetilde{\varphi^{-1}} : T_\Sigma(Y) \to T_\Sigma(X)$ cu proprietatea ca $\widetilde{\varphi^{-1}}\mid_Y = \varphi^{-1}$.

Atunci $\tilde{\varphi}; \widetilde{\varphi^{-1}} : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(X)$ si $\widetilde{\varphi^{-1}}; \tilde{\varphi} : T_\Sigma(Y) \to T_\Sigma(Y)$ sunt Σ–morfisme si satisfac proprietatile: $(\tilde{\varphi}; \widetilde{\varphi^{-1}})\mid_X = id_X$ si $(\widetilde{\varphi^{-1}}; \tilde{\varphi})\mid_Y = id_Y$. Intr–adevar, pentru orice $s \in S$, orice $x \in X_s$ si orice $y \in Y_s$, au loc egalitatile: $(\tilde{\varphi}; \widetilde{\varphi^{-1}})_s(x) = (\tilde{\varphi}_s; (\widetilde{\varphi^{-1}})_s)(x) = (\widetilde{\varphi^{-1}})_s(\tilde{\varphi}_s(x)) = (\widetilde{\varphi^{-1}})_s(\varphi_s(x)) = (\varphi^{-1})_s(\varphi_s(x)) = (\varphi_s; (\varphi^{-1})_s)(x) = (\varphi_s; \varphi_s^{-1})(x) = id_{X_s}(x) = x$, pentru ca $\varphi_s(x) \in Y_s$, si, analog, $(\widetilde{\varphi^{-1}}; \tilde{\varphi})_s(y) = y$.

Dar Σ–morfismele $id_{T_\Sigma(X)} : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(X)$ si $id_{T_\Sigma(Y)} : T_\Sigma(Y) \to T_\Sigma(Y)$ satisfac aceleasi proprietati: $id_{T_\Sigma(X)} |_X = id_X$ si $id_{T_\Sigma(Y)} |_Y = id_Y$.

Conform unicitatii din Teorema 1.2, rezulta ca $\tilde{\varphi}; \widetilde{\varphi^{-1}} = id_{T_\Sigma(X)}$ si $\widetilde{\varphi^{-1}}; \tilde{\varphi} = id_{T_\Sigma(Y)}$, prin urmare Σ–morfismele $\tilde{\varphi}$ si $\widetilde{\varphi^{-1}}$ sunt inverse unul altuia, asadar sunt Σ–izomorfisme, deci Σ–algebrele $T_\Sigma(X)$ si $T_\Sigma(Y)$ sunt Σ–izomorfe.

Ca observatie, pentru a demonstra ca, in cele de mai sus, compunerile acelor morfisme dau morfismele identitate, am fi putut folosi Corolarul 1.4.

Exerciţiul 2.4. Determinati modelul initial al specificatiei urmatoare, si demonstrati ca este model initial:

- signatura (Σ):
  - multimea de sorturi este formata din doua sorturi, notate Nat si $Bool$;
  - simbolurile de operatii sunt:
    - $0\ :\to\ Nat$;
    - $true,\ false\ :\to Bool$;
    - $s,\ f\ :\ Nat\ \to\ Nat$;
    - $<:\ Nat\ Nat\ \to\ Bool$;
- multimea Γ a $\Sigma-$ecuatiilor este formata din urmatoarele $\Sigma-$ecuatii:
  - $(\forall X : Nat)\, 0 < s(X) \doteq_{Bool} true$;
  - $(\forall X : Nat)\, s(X) < 0 \doteq_{Bool} false$;
  - $(\forall X, Y : Nat)\, s(X) < s(Y) \doteq_{Bool} X < Y$;
  - $(\forall X : Nat)\, X < X \doteq_{Bool} false$;
  - $f(0) \doteq_{Nat} s(0)$;
  - $(\forall X : Nat)\, f(X) \doteq_{Nat} s(s(X))$ if $0 < X$.

Rezolvare: Am adoptat notatia infixata pentru $<$. Notam aceasta specificatie, cum este uzual, Γ, la fel ca pe multimea de ecuatii din cadrul ei. Prin definitie, un model al specificatiei Γ este o $\Gamma-$algebra. Prin definitie, modelul initial al specificatiei Γ este $\Gamma-$algebra initiala, adica obiectul initial in categoria $\Gamma-$algebrelor, adica acea $\Gamma-$al-ge-bra $\mathcal{I}$ cu proprietatea ca, oricare ar fi o $\Gamma-$algebra $\mathcal{A}$, exista un unic $\Gamma-$morfism de la $\mathcal{I}$ la $\mathcal{A}$. Este corecta exprimarea "o $\Gamma-$algebra initiala", dar este corecta si exprimarea "$\Gamma-$algebra initiala", pentru ca $\Gamma-$algebra initiala este unica pana la un $\Gamma-$izomorfism.

Observand fragmentul din specificatia Γ de mai sus dat de specificatia lui Lawvere (0 si s), cu siguranta banuiti ca, in modelul initial al specificatiei Γ, multimea suport de sort Nat este $\mathbb{N}$, multimea numerelor naturale. Intr–adevar, vom demonstra ca acest fapt este adevarat. Observand acest lucru, imediat se observa si faptul ca ultima ecuatie din specificatia Γ, anume acea ecuatie conditionata, poate fi inlocuita cu ecuatia neconditionata echivalenta:

$$(\forall X : Nat)\, f(s(X)) \doteq_{Nat} s(s(s(X))).$$

Aceste ecuatii sunt echivalente in specificatia Γ, adica inlocuirea uneia cu cealalta in aceasta specificatie nu duce la schimbarea modelului initial al acestei specificatii; indiferent pe care dintre aceste doua ecuatii o alegem ca ultima ecuatie a specificatiei Γ, modelul initial al specificatiei ramane acelasi. Desigur, ar fi mai simplu sa folosim ecuatia neconditionata de mai sus in locul celei conditionate, dar am ales sa scriem acea ecuatie conditionata pentru a ilustra tratarea ecuatiilor conditionate in demonstratii de tipul celei de mai jos.

De asemenea, ecuatia $(\forall X : Nat)\, X < X \doteq_{Bool} false$ din specificatia Γ putea fi inlocuita cu ecuatia $0 < 0 \doteq_{Bool} false$, care trateaza cazul complementar cazurilor tratate in primele 3 ecuatii din definitia lui $<$, si care ar putea inlocui ecuatia $(\forall X : Nat)\, X < X \doteq_{Bool} false$ fara a schimba modelul initial al specificatiei Γ. Alegerea ecuatiei $(\forall X : Nat)\, X < X \doteq_{Bool} false$ in locul celei mai simple $0 < 0 \doteq_{Bool} false$ ne ajuta in demonstratia de mai jos, permitandu–ne sa tratam cazul 3 de la finalul demonstratiei in acea maniera directa si fara a face o demonstratie prin inductie, pe care ar fi fost necesar s–o scriem daca foloseam ecuatia $0 < 0 \doteq_{Bool} false$.

In Maude, specificatia Γ de mai sus poate fi implementata prin urmatorul modul:

```
fmod NATF is
    sort Nat .

    op 0 : -> Nat .
    ops s f : Nat -> Nat .
    op _<_ : Nat Nat -> Bool .

    vars X Y : Nat .

    eq 0 < s(X) = true .
    eq s(X) < 0 = false .
    eq s(X) < s(Y) = X < Y .
    eq X < X = false .

    eq f(0) = s(0) .
    ceq f(X) = s(s(X)) if 0 < X .
endfm
```

Desigur, ultima ecuatie din modulul de mai sus putea fi scrisa ca ecuatie neconditionata sub forma:

```
eq f(s(X)) = s(s(s(X))) .
```

si modelul initial al specificatiei descrise nu s–ar schimba, precum am observat si mai sus.

De asemenea, aici poate e mai usor de observat ca puteam scrie:

```
eq 0 < 0 = false .
```

in loc de:

```
eq X < X = false .
```

si obtineam acelasi model initial, dar alegerea pe care am facut–o intre aceste doua ecuatii poate ajuta la rapiditatea rescrierii.

Ca o paranteza, trebuie sa remarcam faptul ca, intr–o implementare a unei specificatii in Maude, cum este cea de mai sus, ecuatiile dau un sistem de rescriere, deci se aplica numai de la stanga la dreapta, pe cand, in orice model al specificatiei Γ definite anterior, ecuatiile se aplica, desigur, in oricare dintre sensuri. De asemenea, modulul NATF scris mai sus, ca orice modul pe care il scriem in Maude, importa automat (in modul protecting) modulul predefinit BOOL, care contine nu numai sortul Bool si valorile de adevar true si false, ci si operatiile booleene not, and, or, xor, implies etc., cu tot cu definitiile lor prin ecuatii, spre deosebire de specificatia Γ descrisa mai sus, care nu contine pe sortul Bool decat simbolurile de operatii zeroare true si false. Intr–adevar, pentru a putea trata ecuatia conditionata pe care o contine, modulul NATF apeleaza numai la sortul boolean, Bool, si la valorile de adevar, adica operatiile zeroare true si false, de sort rezultat Bool. Restul continutului modulului predefinit BOOL este, intr–o exprimare nu foarte precisa, distinct de sistemul de rescriere dat de specificatia NATF, adica restul continutului modulului BOOL nu intervine in aceasta rescriere.

Fie algebra $\{Nat, Bool\}-$sortata $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \{true, false\}, 0, true, false, s, f, <)$, unde:

- multimile suport ale lui $\mathcal{N}$ sunt: $N_{Nat} = \mathbb{N}$, $N_{Bool} = \{true, false\}$;
- 0 este primul numar natural;
- $<$ este relatia de ordine stricta uzuala pe $\mathbb{N}$, definita, ca orice relatie, sub forma unei operatii de sort rezultat sortul boolean: $< : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{true, false\}$, care ia va-loa-rea *true* exact pe perechile de numere naturale aflate in aceasta relatie;
- operatiile unare $s, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sunt definite prin: pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

  (i) $s(n) = n + 1$ (s este operatia succesor pe $\mathbb{N}$),

  (ii) $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{daca } n = 0, \\ n + 2, & \text{daca } n > 0. \end{cases}$

Vom demonstra ca $\mathcal{N}$ este model initial pentru specificatia Γ de mai sus, adica este $\Gamma-$algebra initiala, adica este obiect initial in categoria $\Gamma-$algebrelor, adica specificatia Γ este adecvata pentru $\mathcal{N}$, sau, mai complet scris, specificatia Γ este adecvata pentru a descrie pe $\mathcal{N}$ ca model initial.

Am notat operatiile din algebra $\mathcal{N}$ la fel ca simbolurile de operatie din specificatia Γ, considerand ca nu exista pericol de confuzie, si intrucat aceste notatii sunt uzuale pentru aceste operatii pe $\mathbb{N}$ si pe multimea valorilor de adevar $\{true, false\}$.

Evident, $\mathcal{N}$ satisface specificatia Γ, adica este o $\Gamma-$algebra. Intr–adevar, $\mathcal{N}$ are doua sorturi, Nat si $Bool$, si cate o operatie corespunzatoare fiecarui simbol de operatie din signatura Σ, iar faptul ca $\mathcal{N}$, cu aceste operatii, satisface ecuatiile din specificatia Γ este imediat.

Fie $\mathcal{A} = (A_{Nat}, A_{Bool}, A_0, A_{true}, A_{false}, A_s, A_f, A_<)$ un alt model pentru aceasta specificatie, adica o alta $\Gamma-$algebra.

Ramane de demonstrat ca exista un unic $\Gamma-$morfism $h : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$. Un $\Gamma-$morfism h intre $\mathcal{N}$ si $\mathcal{A}$ este o functie $\{Nat, Bool\}-$sortata $h = (h_{Nat}, h_{Bool})$, cu $h_{Nat} : \mathbb{N} \to A_{Nat}$ si $h_{Bool} : \{true, false\} \to A_{Bool}$, care comuta cu operatiile acestor $\Gamma-$algebre. Ca o paranteza, definitia unui $\Gamma-$morfism nu depinde de multimea Γ de $\Sigma-$ecuatii; un $\Gamma-$morfism este un $\Sigma-$morfism intre doua $\Gamma-$algebre. Asadar, un $\Gamma-$morfism intre $\mathcal{N}$ si $\mathcal{A}$ nu este nimic altceva decat un $\Sigma-$mor-fism intre $\mathcal{N}$ si $\mathcal{A}$.

Si acum sa demonstram existenta si unicitatea $\Gamma-$morfismului $h : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$.

Unicitatea:

Fie $h, g : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ doua $\Gamma-$morfisme. Din comutarea acestor morfisme cu operatiile zeroare rezulta: $h_{Nat}(0) = A_0 = g_{Nat}(0)$, $h_{Bool}(true) = A_{true} = g_{Bool}(true)$ si $h_{Bool}(false) = A_{false} = g_{Bool}(false)$. Pentru a arata egalitatea lui h cu g, ramane de demonstrat ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{Nat}(n) = g_{Nat}(n)$.

Demonstram prin inductie matematica dupa n ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $h_{Nat}(n) = g_{Nat}(n)$.

Pasul de verificare: Conform celor de mai sus, $h_{Nat}(0) = g_{Nat}(0) = A_0$.

Pasul de inductie: Presupunem ca $h_{Nat}(n) = g_{Nat}(n)$ pentru un anumit n natural, arbitrar, fixat.

Folosind definitia operatiei s din $\mathcal{N}$, comutarea oricarui $\Sigma-$morfism cu operatiile corespunzatoare simbolului de operatie s (asigurata de definitia unui $\Sigma-$morfism) si ipoteza de inductie, rezulta: $h_{Nat}(n+1) = h_{Nat}(s(n)) = A_s(h_{Nat}(n)) = A_s(g_{Nat}(n)) = g_{Nat}(s(n)) = g_{Nat}(n+1)$.

Conform principiului inductiei matematice rezulta ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $h_{Nat}(n) = g_{Nat}(n)$, deci $h_{Nat} = g_{Nat}$.

Conform egalitatilor de mai sus ale valorilor celor doua morfisme pe operatiile zeroare de sort $Bool$, avem $h_{Bool} = g_{Bool}$.

Prin urmare, $h = g$ si deci unicitatea este demonstrata.

In continuare, pentru a nu incarca exprimarea, pentru orice simbol de operatie σ din signatura Σ si orice $\Sigma-$morfism j, vom spune: "j comuta cu σ" in loc de "j comuta cu operatiile corespunzatoare simbolului de operatie σ". De exemplu, vom inlocui exprimarea de acest gen de mai sus cu: "h comuta cu s".

Existenta:

Fie functia $\{Nat, Bool\}-$sortata $h = (h_{Nat}, h_{Bool}) : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$, definita prin:

$$\begin{cases} h_{Bool}(true) = A_{true}; \\ h_{Bool}(false) = A_{false}; \\ h_{Nat}(0) = A_0; \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\, h_{Nat}(n) = (\underbrace{A_s; \ldots; A_s}_{\text{de } n \text{ ori } A_s})(A_0). \end{cases}$$

Vom arata ca h este un $\Gamma-$morfism de la $\mathcal{N}$ la $\mathcal{A}$, adica un $\Sigma-$morfism de la $\mathcal{N}$ la $\mathcal{A}$, adica h comuta cu 0, $true$, $false$, s, $<$ si f.

De ce definim pe $h_{Nat}(n)$ astfel? Pentru ca trebuie sa avem comutarea lui h cu 0 si cu s, prin urmare trebuie sa avem: pentru orice n natural nenul, $h_{Nat}(n) = h_{Nat}((\underbrace{s; \ldots; s}_{\text{de } n \text{ ori } s})(0)) = (\underbrace{A_s; \ldots; A_s}_{\text{de } n \text{ ori } A_s})(h_{Nat}(0)) = (\underbrace{A_s; \ldots; A_s}_{\text{de } n \text{ ori } A_s})(A_0)$. Am aplicat aici faptul ca, in conformitate cu definitia operatiei s din $\mathcal{N}$, $n = 0 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ de } 1} = (\underbrace{s; \ldots; s}_{\text{de } n \text{ ori } s})(0)$, apoi am aplicat de n ori comutarea unui $\Sigma-$morfism h cu s.

Conform definitiei sale, h comuta cu 0, $true$ si $false$.

Demonstram ca h comuta cu s.

Aplicand definitia lui h de mai sus, obtinem ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $h_{Nat}(s(n)) = h_{Nat}(n+1) = (\underbrace{A_s; \ldots; A_s}_{\text{de } n+1 \text{ ori } A_s})(A_0) = A_s((\underbrace{A_s; \ldots; A_s}_{\text{de } n \text{ ori } A_s})(A_0)) = A_s(h_{Nat}(n))$. Asadar, $h_{Nat}; s = A_s; h_{Nat}$, deci h comuta cu s.

Demonstram ca h comuta cu $<$. Avem de aratat ca, pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$, $h_{Bool}(n < k) = h_{Nat}(n)\ A_<\ h_{Nat}(k)$. Fie, asadar, $n, k \in \mathbb{N}$, arbitrare, fixate. Avem de analizat cazurile: $n < k$, $k < n$ si $n = k$.

Cazul 1*:* $n < k$. In acest caz, $k - n - 1 \in \mathbb{N} = N_{Nat}$, deci este definit $h_{Nat}(k - n - 1)$. Din definitia lui h si din faptul ca $\mathcal{A}$ verifica ecuatiile din specificatia Γ rezulta ca:

$$h_{Bool}(n < k) = h_{Bool}(true) = A_{true} =$$

$$A_0\ A_<\ A_s(h_{Nat}(k - n - 1)) =$$

$$A_0 \; A_< \; A_s((\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } k-n-1 \text{ ori } A_s})(A_0)) =$$

$$A_0 \; A_< \; (\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } k-n \text{ ori } A_s})(A_0) =$$

$$A_s(A_0) \; A_< \; A_s((\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } k-n \text{ ori } A_s})(A_0)) =$$

$$A_s(A_0) \; A_< \; (\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } k-n+1 \text{ ori } A_s})(A_0) =$$

$$A_s(A_s(A_0)) \; A_< \; A_s((\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } k-n+1 \text{ ori } A_s})(A_0)) =$$

$$(A_s; A_s)(A_0) \; A_< \; (\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } k-n+2 \text{ ori } A_s})(A_0) = \ldots =$$

$$(\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n \text{ ori } A_s})(A_0) \; A_< \; (\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } k \text{ ori } A_s})(A_0) = h_{Nat}(n) \; A_< \; h_{Nat}(k).$$

In calculul de mai sus, am aplicat unor termeni din $\mathcal{A}$: o data ecuatia $(\forall X : Nat)\, 0 < s(X) \doteq_{Bool} true$, si de n ori ecuatia $(\forall X, Y : Nat)\, s(X) < s(Y) \doteq_{Bool} X < Y$, ambele citite de la dreapta la stanga. (A nu se trage concluzii eronate asupra sensului in care se aplica ecuatiile in Maude!)

Cazul 2: $k < n$. In acest caz, $n-k-1 \in \mathbb{N} = N_{Nat}$, deci este definit $h_{Nat}(n-k-1)$. Dupa modelul cazului 1, dar folosind aici ecuatia $(\forall X : Nat)\, s(X) < 0 \doteq_{Bool} false$ in locul ecuatiei $(\forall X : Nat)\, 0 < s(X) \doteq_{Bool} true$ aplicate in cazul 1, si aplicand ecuatia $(\forall X, Y : Nat)\, s(X) < s(Y) \doteq_{Bool} X < Y$ de k ori de aceasta data, calculam:

$$h_{Bool}(n < k) = h_{Bool}(false) = A_{false} =$$

$$A_s(h_{Nat}(n-k-1)) \; A_< \; A_0 =$$

$$A_s((\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n-k-1 \text{ ori } A_s})(A_0)) \; A_< \; A_0 =$$

$$(\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n-k \text{ ori } A_s})(A_0) \; A_< \; A_0 =$$

$$A_s((\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n-k \text{ ori } A_s})(A_0)) \; A_< \; A_s(A_0) =$$

$$(\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n-k+1 \text{ ori } A_s})(A_0) \; A_< \; A_s(A_0) =$$

$$A_s((\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n-k+1 \text{ ori } A_s})(A_0)) \; A_< \; A_s(A_s(A_0)) =$$

$$(\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n-k+2 \text{ ori } A_s})(A_0) \; A_< \; (A_s; A_s)(A_0) = \ldots =$$

$$(\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } n \text{ ori } A_s})(A_0) \; A_< \; (\underbrace{A_s; \ldots ; A_s}_{\text{de } k \text{ ori } A_s})(A_0) = h_{Nat}(n) \; A_< \; h_{Nat}(k).$$

Cazul 3: $n = k$. Atunci: $h_{Bool}(n < k) = h_{Bool}(n < n) = h_{Bool}(false) = A_{false} = h_{Nat}(n)\ A_< \ h_{Nat}(n) = h_{Nat}(n)\ A_< \ h_{Nat}(k)$. Am folosit faptul ca $\mathcal{A}$ verifica ecuatia $(\forall X : Nat)\, X < X \doteq_{Bool} false$.

Asadar, h comuta si cu $<$.

Ramane de demonstrat ca h comuta cu f. Adica avem de demonstrat ca $h_{Nat}; f = A_f; h_{Nat}$, i. e., pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $h_{Nat}(f(n)) = A_f(h_{Nat}(n))$.

$h_{Nat}(f(0)) = h_{Nat}(s(0)) = A_s(h_{Nat}(0)) = A_s(A_0) = A_f(A_0) = A_f(h_{Nat}(0))$, conform definitiei lui f in 0, comutarii lui h cu s, demonstrate anterior, definitiei lui h in 0 si faptului ca $\mathcal{A}$ verifica ecuatia $f(0) \doteq_{Nat} s(0)$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Vom demonstra ca $h_{Nat}(f(n)) = A_f(h_{Nat}(n))$, facand apel la ecuatia conditionata $(\forall X : Nat)\, f(X) \doteq_{Nat} s(s(X))$ if $0 < X$ din specificatia Γ.

Sa ne amintim din curs faptul ca $\mathcal{A}$ satisface ecuatia $(\forall X : Nat)\, f(X) \doteq_{Nat} s(s(X))$ if $0 < X$ daca si numai daca, pentru orice $x \in A_{Nat}$, daca $A_0\ A_<\ x = A_{true}$, atunci $A_f(x) = A_s(A_s(x))$ (observati ca acest fapt este echivalent cu definitia cu $\Sigma-$morfismul de la $\Sigma-$algebra libera generata de $\{X\}$ la $\mathcal{A}$, pentru ca un astfel de morfism duce pe 0 din $\Sigma-$algebra libera generata de $\{X\}$ in A_0 si comuta cu $<$; mai precis, conform definitiei, $\mathcal{A}$ satisface ecuatia $(\forall X : Nat)\, f(X) \doteq_{Nat} s(s(X))$ if $0 < X$ daca si numai daca, oricare ar fi $\Sigma-$morfismul $\alpha : T_\Sigma(\{X\}) \to \mathcal{A}$, daca $\alpha_{Bool}(0 < X) = A_{true}$, atunci $\alpha_{Nat}(f(X)) = \alpha_{Nat}(s(s(X)))$, adica, oricare ar fi $\Sigma-$morfismul $\alpha : T_\Sigma f(\{X\}) \to \mathcal{A}$, daca $A_0\ A_<\ \alpha_{Nat}(X) = A_{true}$, atunci $A_f(\alpha_{Nat}(X)) = A_s(A_s(\alpha_{Nat}(X)))$, si acum notam $x = \alpha_{Nat}(X) \in A_{Nat}$, iar acest x poate lua orice valoare din A_{Nat}).

Avem ca $0 < n$, prin urmare, datorita definitiei lui h in 0 si *true* si comutarii lui h cu $<$, care a fost deja demonstrata, au loc egalitatile: $A_0\ A_<\ h_{Nat}(n) = h_{Nat}(0)\ A_<\ h_{Nat}(n) = h_{Bool}(0 < n) = h_{Bool}(true) = A_{true}$, deci $h_{Nat}(n)$ satisface conditia: $A_0\ A_<\ h_{Nat}(n)$. Acum aplicam faptul ca $\mathcal{A}$ satisface ecuatia conditionata $(\forall X : Nat)\, f(X) \doteq_{Nat} s(s(X))$ if $0 < X$, si, inlocuind in aceasta ecuatie pe X cu $h_{Nat}(n)$ si aplicand succesiv de doua ori comutarea anterior demonstrata a lui h cu s, obtinem: $A_f(h_{Nat}(n)) = A_s(A_s(h_{Nat}(n)))$, asadar: $h_{Nat}(f(n)) = h_{Nat}(s(s(n))) = A_s(A_s(h_{Nat}(n))) = A_f(h_{Nat}(n))$.

Deci $h_{Nat}(f(n)) = A_f(h_{Nat}(n))$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, asadar $h_{Nat}; f = A_f; h_{Nat}$, adica h comuta si cu f.

Rezulta ca h este $\Sigma-$morfism intre $\Gamma-$algebrele $\mathcal{N}$ si $\mathcal{A}$, adica h este $\Gamma-$morfism intre $\mathcal{N}$ si $\mathcal{A}$.

Am demonstrat ca exista un unic $\Gamma-$morfism $h : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$, prin urmare $\mathcal{N}$ este $\Gamma-$algebra initiala, adica obiect initial in categoria $\Gamma-$algebrelor, adica model initial pentru specificatia Γ.

Exerciţiul 2.5. Determinati signatura corespunzatoare urmatoarei gramatici independente de context:

- multimea neterminalelor este: $\mathcal{N} = \{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{E}, \mathbf{P}\}$;
- multimea terminalelor este: $\mathcal{T} = \{\text{true}, \leq, ||, !, +, --, =, \{, \}, \text{if}, \text{while}, ;\} \cup \{reg\ n | n \in \{1, 2, 3\}\} \cup \{i | i \in \overline{0, 9}\}$;
- productiile (vom nota multimea lor cu $\mathcal{P}$, iar fiecare dintre productii este notata prin litera greceasca intre paranteze patrate care o preceda) sunt:

$$
\begin{array}{rl}
[\tau_{1,2}] & \mathbf{T} \to \text{true} \mid \mathbf{V} \leq \mathbf{V} \\
[\beta_{1,2,3}] & \mathbf{B} \to \mathbf{T} \mid \mathbf{B} \mid\mid \mathbf{B} \mid \,!\, \mathbf{B} \\
[\nu_i] & \mathbf{N} \to i, \quad i \in \overline{0,9} \\
[\mu_i] & \mathbf{N} \to i\ \mathbf{N}, \quad i \in \overline{0,9} \\
[\rho_n] & \mathbf{R} \to reg\ n, \quad n \in \{1,2,3\} \\
[\gamma_{1,2,3,4}] & \mathbf{V} \to \mathbf{N} \mid \mathbf{R} \mid \mathbf{V} + \mathbf{V} \mid \mathbf{V} - -\mathbf{V} \\
[\epsilon_{1,2,3,4}] & \mathbf{E} \to \mathbf{R}\ =\ \mathbf{V} \mid \{\ \mathbf{P}\ \} \mid \text{if } \mathbf{B}\ \mathbf{E} \mid \text{while } \mathbf{B}\ \mathbf{E} \\
[\pi_{1,2}] & \mathbf{P} \to \mathbf{E} \mid \mathbf{E}\ ;\ \mathbf{P}
\end{array}
$$

In scrierea productiilor am folosit conventia pentru scrierea mai multor productii pe un singur rand, de exemplu:

$[\alpha_{1,2,3}] \quad Neterminal \to Sir_1|Sir_2|Sir_3$

este o scriere concentrata pentru urmatoarele 3 productii:

$[\alpha_1] \quad Neterminal \to Sir_1$

$[\alpha_2] \quad Neterminal \to Sir_2$

$[\alpha_3] \quad Neterminal \to Sir_3$

De asemenea, scrierea:

$[\alpha_k] \quad Neterminal \to k, \quad k \in \{1,2,3,4\}$

semnifica, desigur, urmatoarele 4 productii:

$[\alpha_1] \quad Neterminal \to 1$

$[\alpha_2] \quad Neterminal \to 2$

$[\alpha_3] \quad Neterminal \to 3$

$[\alpha_4] \quad Neterminal \to 4$

Rezolvare: Acestei gramatici i se asociaza signatura (S, Σ), unde multimea de sorturi este egala cu multimea neterminalelor: $S = \mathcal{N}$, iar multimea simbolurilor de operatie este egala cu multimea productiilor: $\Sigma = \mathcal{P} = \{\tau_t, \beta_b, \nu_i, \mu_i, \rho_n, \gamma_v, \epsilon_e, \pi_p | t \in \{1,2\}, b \in \{1,2,3\}, i \in \overline{0,9}, n \in \{1,2,3\}, v \in \{1,2,3,4\}, e \in \{1,2,3,4\}, p \in \{1,2\}\}$, cu urmatoarele aritati si sorturi rezultat:

- $\tau_1 :\to \mathbf{T}$ (adica $\tau_1 \in \Sigma_{\lambda,\mathbf{T}}$, unde λ este cuvantul vid)
- $\tau_2 : \mathbf{V}\ \mathbf{V} \to \mathbf{T}$
- $\beta_1 : \mathbf{T}\ \to \mathbf{B}$
- $\beta_2 : \mathbf{B}\ \mathbf{B}\ \to \mathbf{B}$
- $\beta_3 : \mathbf{B}\ \to \mathbf{B}$
- pentru fiecare $i \in \overline{0,9}$, $\nu_i :\to \mathbf{N}$
- pentru fiecare $i \in \overline{0,9}$, $\mu_i : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
- pentru fiecare $n \in \{1,2,3\}$, $\rho_n :\to \mathbf{R}$
- $\gamma_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{V}$
- $\gamma_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{V}$
- $\gamma_3 : \mathbf{V}\ \mathbf{V} \to \mathbf{V}$

- $\gamma_4 : \mathbf{V}\ \mathbf{V} \to \mathbf{V}$
- $\epsilon_1 : \mathbf{R}\ \mathbf{V} \to \mathbf{E}$
- $\epsilon_2 : \mathbf{P} \to \mathbf{E}$
- $\epsilon_3 : \mathbf{B}\ \mathbf{E} \to \mathbf{E}$
- $\epsilon_4 : \mathbf{B}\ \mathbf{E} \to \mathbf{E}$
- $\pi_1 : \mathbf{E} \to \mathbf{P}$
- $\pi_2 : \mathbf{E}\ \mathbf{P} \to \mathbf{P}$

Exerciţiul 2.6. Fie (S, Σ) o signatura, $\mathcal{K}$ o clasa de $(S, \Sigma)-$algebre, $\mathcal{I}$ o algebra initiala in $\mathcal{K}$, $s \in S$ un sort si $l, r \in (T_\Sigma)_s$ doi termeni de sort s din $(S, \Sigma)-$algebra termenilor fara variabile $T_\Sigma = T_\Sigma(\emptyset)$. Sa se demonstreze ca, daca $\mathcal{I} \vDash (\forall\, \emptyset)\, l \doteq_s r$, atunci $\mathcal{A} \vDash (\forall\, \emptyset)\, l \doteq_s r$ oricare ar fi $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$.

Rezolvare: Fie $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$.

Stim ca T_Σ este algebra initiala in clasa tuturor $(S, \Sigma)-$algebrelor, prin urmare, conform definitiei, exista un unic $(S, \Sigma)-$morfism $y : T_\Sigma \to \mathcal{I}$ si exista un unic $(S, \Sigma)-$morfism $\alpha : T_\Sigma \to \mathcal{A}$.

Pe de alta parte, conform ipotezei, $\mathcal{I}$ este algebra initiala in $\mathcal{K}$, iar $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, asadar exista un unic $(S, \Sigma)-$morfism $h : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} T_\Sigma \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{I} \arrow[d, "h"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Dar compunerea dintre $(S, \Sigma)-$morfismele y si h este un $(S, \Sigma)-$morfism de la T_Σ la $\mathcal{A}$, prin urmare unicitatea lui α ne asigura de faptul ca aceasta compunere coincide cu α: $y; h = \alpha$.

Stim ca de la $\emptyset$ la orice multime M exista o unica functie f, anume $f = (\emptyset, \emptyset, M)$, cu notatia functiei prin tripletul (domeniu,grafic,codomeniu). Orice functie g de la o multime P la multimea M extinde functia f, pentru ca restrictia $g\,|_\emptyset$ este, desigur, unica functie de la $\emptyset$ la M, adica $g\,|_\emptyset = f$.

Avand in vedere observatiile din paragraful anterior, sa recitim definitia satisfacerii unei $(S, \Sigma)-$ecuatii si s–o particularizam la cazul in care multimea de variabile este vida: in acest caz obtinem: oricare ar fi o $(S, \Sigma)-$algebra $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \vDash (\forall\, \emptyset)\, l \doteq_s r$ daca si numai daca, oricare ar fi $(S, \Sigma)-$mor-fis-mul $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$, are loc egalitatea: $f_s(l) = f_s(r)$.

Ipoteza spune ca $\mathcal{I} \vDash (\forall\, \emptyset)\, l \doteq_s r$, prin urmare avem: $y_s(l) = y_s(r)$, de unde rezulta ca $h_s(y_s(l)) = h_s(y_s(r))$, ceea ce se scrie echivalent aplicand definitia compunerii de functii $S-$sortate sub forma: $(y; h)_s(l) = (y; h)_s(r)$, adica $\alpha_s(l) = \alpha_s(r)$. Dar α este unicul $(S, \Sigma)-$morfism de la T_Σ la $\mathcal{A}$, prin urmare $\mathcal{A} \vDash (\forall\, \emptyset)\, l \doteq_s r$ (a se vedea paragraful anterior).

Exerciţiul 2.7. Fie specificatia monosortata (S, Σ, E), cu:

- $S = \{bool\}$;
- $\Sigma = \{0 :\to bool, 1 :\to bool, succ : bool \to bool, fct : bool \to bool\}$;

- $E = \{(\forall\,\emptyset)\, succ(0) \doteq_{bool} 1, (\forall\,\emptyset)\, fct(0) \doteq_{bool} 0, (\forall\,\emptyset)\, fct(1) \doteq_{bool} 1, (\forall\,\{x\})\, fct(succ(x)) \doteq_{bool} fct(x)\}$.

Aratati ca $E \vdash (\forall\,\emptyset)\, 1 \doteq_{bool} 0$ printr–o demonstratie in logica ecuationala, in care sa indicati la fiecare pas regula de deductie folosita.

Rezolvare: Sa notam ecuatiile din E in felul urmator:
(EC1) $(\forall\,\emptyset)\, succ(0) \doteq_{bool} 1$
(EC2) $(\forall\,\emptyset)\, fct(0) \doteq_{bool} 0$
(EC3) $(\forall\,\emptyset)\, fct(1) \doteq_{bool} 1$
(EC4) $(\forall\,\{x\})\, fct(succ(x)) \doteq_{bool} fct(x)$
Ecuatia de demonstrat are urmatoarea demonstratie formala in logica ecuationala:

	Ecuatia curenta	Ecuatiile folosite	Regula de deductie folosita
(e1)	$(\forall\,\emptyset)\, fct(succ(0)) \doteq_{bool} fct(0)$	(EC4)	$\mathbf{Sub_E} : x \leftarrow 0$
(e2)	$(\forall\,\emptyset)\, fct(succ(0)) \doteq_{bool} 0$	(e1), (EC2)	**T**
(e3)	$(\forall\,\emptyset)\, fct(succ(0)) \doteq_{bool} fct(1)$	(EC1)	$\mathbf{C\Sigma}$
(e4)	$(\forall\,\emptyset)\, fct(succ(0)) \doteq_{bool} 1$	(e3), (EC3)	**T**
(e5)	$(\forall\,\emptyset)\, 1 \doteq_{bool} fct(succ(0))$	(e4)	**S**
(e6)	$(\forall\,\emptyset)\, 1 \doteq_{bool} 0$	(e5), (e2)	**T**

Exerciţiul 2.8. Fie signatura monosortata (S, Σ), cu $S = \{s\}$ si $\Sigma = \{0 :\to s, f : s \to s\}$. Aratati ca sistemul de rescriere $R = \{(\forall\,\{x\})\, f(f(x)) \to 0\}$ nu este confluent.

Rezolvare: Sa consideram termenul $f(f(f(0)))$.
Daca in unica regula de rescriere a sistemului R aplicam:

- substitutia $x \leftarrow f(0)$, obtinem rescrierea: $f(f(f(0))) \to 0$;
- substitutia $x \leftarrow 0$, obtinem rescrierea: $f(f(0)) \to 0$, iar daca in aceasta rescriere aplicam regula $\mathbf{C\Sigma}$ obtinem: $f(f(f(0))) \to f(0)$.

Niciunul dintre termenii 0 si $f(0)$ nu unifica cu membrul stang $f(f(x))$ al unicei reguli de rescriere a sistemului R, pentru ca, indiferent ce valoare ar primi x printr–o substitutie, $f(f(x))$ nu ar deveni literal identic nici cu 0, nici cu $f(0)$. Aceasta inseamna ca termenii 0 si $f(0)$ nu se pot rescrie, deci sunt forme normale ale sistemului de rescriere R. Acesti termeni sunt in mod clar diferiti, pentru ca nu sunt literal identici.

Prin urmare, termenul $f(f(f(0)))$ are doua forme normale diferite si, in concluzie, sistemul de rescriere R nu este confluent.

Exerciţiul 2.9. Fie (S, Σ) o signatura monosortata, cu: $S = \{s\}$ si $\Sigma = \{* : s\ s \to s, {}^{-1} : s \to s\}$. Vom nota infixat operatia $*$ si postfixat operatia ${}^{-1}$. Daca $X = \{x, y, z, u, v\}$ este o multime de variabile, gasiti o substitutie $\sigma : X \to T_\Sigma(X)$ astfel incat $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, unde $t_1 = (x * y) * z$ si $t_2 = v * (u * v)^{-1}$. Am notat unicul $(S, \Sigma)-$endomorfism al lui $T_\Sigma(X)$ la care se extinde σ tot cu σ, asa cum este uzual. Am renuntat la scrierea sortului, pentru ca este unic (ar fi trebuit sa scriem $\sigma_s(t_1) = \sigma_s(t_2)$, dar, avand o specificatie monosortata si deci functia $\sigma = \{\sigma_s\}$ fiind tot monosortata, renuntam la indicele s, notand σ_s tot cu σ).

Rezolvare: Notam $U = \{t_1 \doteq_s t_2\} = \{(x * y) * z \doteq_s v * (u * v)^{-1}\}$. Avem de rezolvat problema de unificare U. O rezolvam prin aplicarea algoritmului de unificare:

(i) *initializare:* $R = U$

(ii) *descompunere:* $R = \{x * y \doteq_s v, z \doteq_s (u * v)^{-1}\}$

(iii) *orientare:* $R = \{v \doteq_s x * y, z \doteq_s (u * v)^{-1}\}$

(iv) *eliminare:* $R = \{v \leftarrow x * y, z \doteq_s (u * (x * y))^{-1}\}$

(v) *eliminare:* $R = \{v \leftarrow x * y, z \leftarrow (u * (x * y))^{-1}\}$

O substitutie σ care verifica $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ este: $\sigma : \{v \leftarrow x * y, z \leftarrow (u * (x * y))^{-1}\}$, scrisa detaliat prin definitia ei pe fiecare variabila din X astfel:

a	$\sigma(a)$
x	x
y	y
z	$(u * (x * y))^{-1}$
u	u
v	$x * y$