Mecanică Generală

III. Cinematica punctului material - 1

Liviu Marin[1,†]

[1]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, România

[†]E-mail: marin.liviu@gmail.com

22 octombrie 2013

In Mecanică, se concep şi varietăţi ideale:

I. Punctul material: un corp ale cărui dimensiuni sunt mici în raport cu dimensiunile ce intervin în problema considerată.

Exemple:
- o planetă în raport cu dimensiunile cosmice;
- un corp a cărui mişcare de rotaţie nu prezintă interes;
- mişcarea electronilor în atom.

II. Curba materială (mediu continuu unidimensional): un corp care are două dimensiuni neglijabile în raport cu cea de-a treia.

Exemplu:
- un fir subţire.

III. Suprafaţa materială (mediu continuu bidimensional): un corp care are una dintre dimensiuni neglijabilă în raport cu celelalte două.

Exemplu:
- o placă subţire a cărei grosime este nu este esenţială.

I. Punct material/Sistem de puncte materiale

- Punctul $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ căruia i se asociază o masă, $m > 0$, se numeşte punct material şi se notează cu $\mathbf{P}(m)$.
- Fie sistemul de puncte materiale $\left\{\mathbf{P}_i(m_i)\right\}_{i\in I} \subset \mathcal{E}$, $m_i > 0$, $i \in I$.

  Masa sistemului de puncte materiale $\left\{\mathbf{P}_i(m_i)\right\}_{i\in I}$ este dată de:

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{I} m_i} \tag{1}$$

- Fie $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ fixat. Pentru orice $i \in I$, notăm cu $\vec{\mathbf{r}}_i = \overrightarrow{\mathbf{OP}_i} \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}}$.

  Definim vectorul

$$\boxed{\vec{\rho} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{I} m_i\,\vec{\mathbf{r}}_i \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}}} \tag{2}$$

  Se numeşte centrul de masă al sistemului de puncte materiale $\left\{\mathbf{P}_i(m_i)\right\}_{i\in I}$ unicul punct $\mathbf{G} \in \mathcal{E}$ a.i. $\vec{\rho} = \overrightarrow{\mathbf{OG}}$.

II. Curbă materială

- Fie curba materială $k(\mathcal{C}) = \left\{\mathbf{x}(\lambda) \in \mathcal{E} \;\middle|\; \lambda \in I\right\}$.

  Atunci masa curbei materiale $k(\mathcal{C})$ este dată de:

$$\boxed{M = \int_{k(\mathcal{C})} \rho(\mathbf{x})\mathrm{d}s(\mathbf{x})} \tag{3}$$

- Fie $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ fixat. Pentru orice $\mathbf{x} \in k(\mathcal{C})$, notăm cu $\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \overrightarrow{\mathbf{Ox}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}}$.

  Definim vectorul

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\rho} &= \frac{1}{M}\int_{k(\mathcal{C})} \rho(\mathbf{x})\,\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{M}\int_I \rho\big(\mathbf{x}(\lambda)\big)\,\vec{\mathbf{r}}\big(\mathbf{x}(\lambda)\big)\,\frac{\mathrm{d}s(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}}\end{aligned}} \tag{4}$$

  Se numeşte centrul de masă al curbei materiale $k(\mathcal{C})$ unicul punct $\mathbf{G} \in \mathcal{E}$ a.i. $\vec{\rho} = \overrightarrow{\mathbf{OG}}$

III. Suprafaţă materială

- Fie suprafaţa materială $k(\Sigma) = \left\{ \mathbf{x}(u,v) \in \mathcal{E} \;\middle|\; (u,v) \in I \times J \right\}$.
  Atunci masa suprafeţei materiale $k(\Sigma)$ este dată de:

$$\boxed{M = \int_{k(\Sigma)} \rho(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x})} \tag{5}$$

- Fie $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ fixat. Pentru orice $\mathbf{x} \in k(\Sigma)$, notăm cu $\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \overrightarrow{\mathbf{Ox}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}}$.
  $d\vec{\mathbf{r}}/du$ $\left[d\vec{\mathbf{r}}/dv\right]$ – vectorul tangent la curba $v = \text{const}$ $\left[u = \text{const}\right]$.
  $(d\vec{\mathbf{r}}/du) \times (d\vec{\mathbf{r}}/dv)$ – vectorul normalei la suprafaţa Σ.

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\rho} = \frac{1}{M}\int_{k(\Sigma)} \rho(\mathbf{x})\,\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{x})\,d\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{M}\int_{I\times J} \rho(\mathbf{x}(u,v))\,\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{x}(u,v)) \\ \sqrt{(d\vec{\mathbf{r}}/du)^2\,(d\vec{\mathbf{r}}/dv)^2 - [(d\vec{\mathbf{r}}/du)\cdot(d\vec{\mathbf{r}}/dv)]^2}\,du\,dv \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}}\end{aligned}} \tag{6}$$

Se numeşte centrul de masă al suprafeţei materiale $k(\Sigma)$ unicul punct $\mathbf{G} \in \mathcal{E}$ a.i. $\vec{\rho} = \overrightarrow{\mathbf{OG}}$.

IV. Corp

- Fie corpul $k(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}$.
  Atunci masa corpului $k(\mathcal{B})$ este dată de:

$$\boxed{M = \int_{k(\mathcal{B})} \rho(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x})} \tag{7}$$

- Fie $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ fixat. Pentru orice $\mathbf{x} \in k(\mathcal{B})$, notăm cu $\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \overrightarrow{\mathbf{Ox}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}}$.
  Definim vectorul

$$\boxed{\vec{\rho} = \frac{1}{M}\int_{k(\mathcal{B})} \rho(\mathbf{x})\,\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{x})\,dV(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}}} \tag{8}$$

Se numeşte centrul de masă al corpului $k(\mathcal{B})$ unicul punct $\mathbf{G} \in \mathcal{E}$ a.i. $\vec{\rho} = \overrightarrow{\mathbf{OG}}$.

Exerciţii

1. Să se arate că poziţia centrului de masă al unui corp $\mathcal{B}_k = k(\mathcal{B})$ nu depinde de sistemul de referinţă.
2. Să se arate că centrul de masă al corpului $\mathcal{B}_k = k(\mathcal{B})$ se află în interiorul oricărei suprafeţe convexe care conţine corpul respectiv (în interiorul corpului).
   Indicaţie: Consideraţi un sistem de referinţă arbitrar şi arătaţi că semnul proiecţiei lui $\vec{\rho}$ pe una dintre direcţiile de coordonate este constant.
3. Dacă punctele unui sistem material, $\mathcal{S} = \left\{\mathbf{P}_i(m_i)\right\}_{i\in I}$, se află pe o dreaptă sau într-un plan, atunci centrul de masă al sistemului $\mathcal{S}$ se află pe acea dreaptă, respectiv în acel plan.
4. Fie sectorul circular, $S(r,\alpha)$, subîntins de un arc de cerc de rază r şi deschidere α. Presupunând că $\rho(\mathbf{x}) = \rho_0$, $\mathbf{x} \in S(r,\alpha)$, determinaţi poziţia centrului de masă, $\mathbf{G}$, al sectorului circular $S(r,\alpha)$.

Spaţiu

In Mecanica Clasică, spaţiul este:

(S$_1$) tridimensional:
Trei indicaţii sunt necesare şi suficiente pentru a repera un loc in spaţiu (din experienţă) $\Longrightarrow$
Spaţiul are proprietatea pe care i-o imprimă corpurile materiale ce sunt caracterizate prin lungime, lăţime şi înălţime (3 dimensiuni)

(S$_2$) absolut:
Consensul observatorilor asupra identificării locurilor în spaţiu

(S$_3$) independent de materie:
Spaţiul este acelaşi pentru orice corp material considerat

(S$_4$) nelimitat

(S$_5$) continuu:
Dacă două puncte aparţin spaţiului, atunci dreapta determinată de acestea aparţine spaţiului

Spațiul – cadrul la care se raportează mișcarea materiei:

(i) Locurile sunt reprezentate de puncte

(ii) Punctele sunt reprezentate de trei numere, i.e. coordonatele punctelor față de un sistem de referință (reper), $\left(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq 3}\right)$, ales în mod convenabil

(iii) (S_3), i.e. spațiul este independent de materie $\Longrightarrow$
Spațiul nu are structură (omogen & izotrop) $\Longrightarrow$
Spațiul euclidian punctual tridimensional $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$

(iv) Proprietatea fundamentală a lui $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall\ \mathbf{X}(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{E}, \quad \left(\vec{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{OX}} = x_1\,\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\,\vec{\mathbf{e}}_2 + x_3\,\vec{\mathbf{e}}_3\right), \\ \forall\ \mathbf{Y}(y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{E}, \quad \left(\vec{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{OY}} = y_1\,\vec{\mathbf{e}}_1 + y_2\,\vec{\mathbf{e}}_2 + y_3\,\vec{\mathbf{e}}_3\right): \\ \qquad d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sqrt{(\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}) \cdot (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}})} \end{array}}$$

(v) (S_2), i.e. spațiul este absolut $\Longrightarrow$ Distanțele sunt absolute

Unitatea de măsură a distanțelor (lungimilor): metrul (m)
$1m = 1/40.000.000$ din lungimea meridianului ce trece prin Paris

Timp

In Mecanica Clasică, se consideră că timpul este:

(T_1) universal:
Se presupune o sincronizare a scărilor temporale

(T_2) absolut:
Sincronizarea scărilor temporale depinde de modul de transmisie a semnalelor; se presupune a fi automată & instantanee $\Longrightarrow$
Timpul este absolut

(T_3) omogen:
Timpul este independent de sistemul de referință (reperul) considerat $\Longrightarrow$
Timpul este lipsit de structură, i.e. omogen (se scurge uniform)

(T_4) unidimensional:
Mulțimea evenimentelor obiective este o mulțime ordonată

(T_5) ireversibil

Observații:

(i) (T_4), i.e. mulțimea evenimentelor obiective este ordonată $\Longrightarrow$
Se poate stabili o corespondență bijectivă între mulțimea evenimentelor și $\mathbb{R}$

(ii) Această corespondență bijectivă dintre mulțimea evenimentelor și $\mathbb{R}$ este independentă de evenimente, cf. (T_1), și independentă de sistemul de referință (reperul) considerat, cf. (T_3)

(iii) Corespondența bijectivă menționată la (i) nu constituie încă o măsură a timpului, i.e. nu ne dă determinările cantitative necesare în Mecanică

Problema: Cum obținem o măsură a timpului universal?

Soluția: Raportăm scara timpului universal la o mișcare periodică pe care o postulăm a fi uniformă

- Fixăm originea de la care vrem să măsurăm timpul
- Considerăm perioada mișcării de referință, ω
- Evenimentele sunt ordonate, cf. (T_4) $\Longrightarrow$
  Unui eveniment îi corespunde un $t\,\omega \in \mathbb{R}$, unde $t \in \mathbb{R}$
- Numărul $t \in \mathbb{R}$, care exprimă raportul dintre timpul la care se petrece evenimentul considerat și perioada mișcării de referintă, ω, ne dă măsura timpului acelui eveniment

  Definirea timpului universal, prin care reperăm desfășurarea evenimentelor, se face raportând cursul evenimentelor la o mișcare standard

Obținerea timpului universal:

- Ziua solară: durata de timp între două treceri consecutive ale Soarelui la meridianul unui punct dat la suprafața Pământului (meridianul Greenwich)
- T_0 = valoarea medie a zilei solare
- Se definește secunda (s) ca unitate de măsură a timpului:

$$1s = (1/86.400)\,T_0$$

- Având precizată durata unei secunde, se construiesc mecanisme (ceasornice; orologii) în care se realizează o mișcare uniformă a unor arătătoare în fața unui cadran circular, secunda corespunzând intervalului de timp necesar ca arătătorul să parcurgă un anumit arc de cerc

Orologii atomice – atomii emit unde de frecvență constante

- T_0 = durata unui ciclu de oscilație a atomului de cesiu în vid
- Se definește secunda (s) ca unitate de măsură a timpului:

$$1s = 9.126.631.770\,T_0$$