Logică matematică și computațională
Cursul XIV

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

Subiectul cursului: calculul cu predicate clasic

- În acest curs vom studia **logica clasică a predicatelor**.
- **Predicatele** se mai numesc **propoziții cu variabile**.
- **Exemplu de predicat:** "x este un număr prim" $\longrightarrow$ predicat cu variabila x.
- Variabilei x i se indică un domeniu al valorilor posibile, de exemplu $\mathbb{N}$. Se dorește ca, prin înlocuirea lui x din acest predicat cu o valoare arbitrară din acest domeniu, să se obțină o propoziție adevărată sau falsă.
- Înlocuind în acest predicat pe $x := 2$, se obține propoziția adevărată "2 este un număr prim", iar înlocuind $x := 4$, se obține propoziția falsă "4 este un număr prim".
- Pentru a descrie sistemul formal al calculului cu predicate clasic, vom avea nevoie de noțiunea de **structură de ordinul I**.
- Intuitiv, **structurile de ordinul I** sunt structuri algebrice care posedă o mulțime suport și operații, relații și constante (operații zeroare) pe această mulțime suport, i. e. operații și relații care acționează asupra elementelor mulțimii suport.
- Când, într–o structură algebrică, există operații sau relații care acționează asupra submulțimilor mulțimii suport, i. e. asupra unor mulțimi de elemente din mulțimea suport, atunci spunem că structura respectivă este o **structură de ordinul II**. În același mod pot fi definite **structurile de ordinul III, IV etc.**.

Definiție

O *structură de ordinul I* este o structură de forma

$$\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J}, (c_k)_{k \in K}),$$

unde:

- A este o mulțime nevidă, numită *universul structurii* $\mathcal{A}$
- I, J, K sunt mulțimi oarecare de indici (care pot fi și vide)
- pentru fiecare $i \in I$, există $n_i \in \mathbb{N}^*$, a. î. $f_i : A^{n_i} \to A$ (f_i este o operație n_i–ară pe A)
- pentru fiecare $j \in J$, există $m_j \in \mathbb{N}^*$, a. î. $R_j \subseteq A^{m_j}$ (R_j este o relație m_j–ară pe A)
- pentru fiecare $k \in K$, $c_k \in A$ (c_k este o constantă din A)

În general, operațiilor și relațiilor din componența lui $\mathcal{A}$ li se atașează indicele $\mathcal{A}$, pentru a le deosebi de simbolurile de operații și relații din limbajul pe care îl vom construi în continuare; astfel, structura de ordinul I de mai sus se notează, de regulă, sub forma: $\mathcal{A} = (A, (f_i^{\mathcal{A}})_{i \in I}, (R_j^{\mathcal{A}})_{j \in J}, (c_k^{\mathcal{A}})_{k \in K})$.

Definiție

Tipul sau *signatura* structurii de ordinul I $\mathcal{A}$ din definiția anterioară este tripletul de familii de numere naturale: $\tau := ((n_i)_{i \in I}; (m_j)_{j \in J}; (0)_{k \in K})$.
Orice structură de forma lui $\mathcal{A}$ de mai sus se numește *structură de ordinul I de tipul (sau signatura)* τ.

Exemplu

- Orice poset este o structură de ordinul I de forma $\mathcal{P} = (P, \leq)$, de tipul (signatura) $\tau_1 = (\emptyset; 2; \emptyset)$ ($\leq$ este o relație binară).
- Orice latice este o structură de ordinul I de forma $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$, de tipul (signatura) $\tau_2 = (2, 2; 2; \emptyset)$ ($\vee$ și $\wedge$ sunt operații binare (i. e. de aritate 2, i. e. cu câte două argumente), iar $\leq$ este o relație binară).
- Orice algebră Boole este o structură de ordinul I de forma $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, \leq, 0, 1)$, de tipul (signatura) $\tau_3 = (2, 2, 1; 2; 0, 0)$ ($\vee$ și $\wedge$ sunt operații binare, $\bar{\cdot}$ este o operație unară, $\leq$ este o relație binară, iar 0 și 1 sunt constante (operații zeroare, i. e. de aritate zero, i. e. fără argumente)).

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

- Fiecărei signaturi τ a unei structuri de ordinul I (fiecărei clase de structuri de ordinul I de o anumită signatură τ) i se asociază un limbaj, numit **limbaj de ordinul I** și notat, de obicei, cu $\mathcal{L}_\tau$, în care pot fi exprimate proprietățile algebrice ale structurilor de ordinul I de signatura τ (**v. exemple în seminar**).
- Să considerăm o signatură $\tau := ((n_i)_{i\in I}; (m_j)_{j\in J}; (0)_{k\in K})$, pe care o fixăm.
- **Alfabetul limbajului de ordinul I** $\mathcal{L}_\tau$ este format din următoarele **simboluri primitive**:
  1. o mulțime infinită de **variabile**: $V = \{x, y, z, u, v, \dots\}$
  2. **simboluri de operații**: $(f_i)_{i\in I}$; pentru fiecare $i \in I$, numărul natural nenul n_i se numește *ordinul* sau *aritatea* lui f_i
  3. **simboluri de relații**: $(R_j)_{j\in J}$; pentru fiecare $j \in J$, numărul natural nenul m_j se numește *ordinul* sau *aritatea* lui R_j
  4. **simboluri de constante**: $(c_k)_{k\in K}$
  5. **simbolul de egalitate**: $\boldsymbol{=}$ (un semn egal îngroșat) (*a nu se confunda cu egalul simplu!*)
  6. **conectorii logici primitivi**: $\neg$ (*negația*), $\rightarrow$ (*implicația*)
  7. **cuantificatorul universal**: $\forall$ (*oricare ar fi*)
  8. paranteze: $(,), [,]$
- Pentru comoditate, vom spune uneori: "operații", "relații" și "constante" în loc de "simboluri de operații", " simboluri de relații" și " simboluri de constante", respectiv.

Definiție

Termenii limbajului $\mathcal{L}_\tau$ se definesc, recursiv, astfel:

1. variabilele și simbolurile de constante sunt termeni;
2. dacă f este un simbol de operație n–ară și $t_1, \dots, t_n$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \dots, t_n)$ este un termen;
3. orice termen se obține prin aplicarea regulilor (1) și (2) de un număr finit de ori.

Definiție

Formulele atomice ale limbajului $\mathcal{L}_\tau$ se definesc, recursiv, astfel:

1. dacă t_1 și t_2 sunt termeni, atunci $t_1 = t_2$ este o formulă atomică;
2. dacă R este un simbol de relație m–ară și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni, atunci $R(t_1, \dots, t_m)$ este o formulă atomică;
3. orice formulă atomică se obține prin aplicarea regulilor (1) și (2) de un număr finit de ori.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Definiție

Formulele limbajului $\mathcal{L}_\tau$ se definesc, recursiv, astfel:

1. formulele atomice sunt formule;
2. dacă φ este o formulă, atunci $\neg\varphi$ este o formulă;
3. dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\varphi \rightarrow \psi$ este o formulă;
4. dacă φ este o formulă și x este o variabilă, atunci $\forall x\varphi$ este o formulă;
5. orice formulă se obține prin aplicarea regulilor (1), (2), (3) și (4) de un număr finit de ori.

Notație

Se notează cu $Form(\mathcal{L}_\tau)$ mulțimea formulelor limbajului $\mathcal{L}_\tau$.

Observație

Și aici ne vom întâlni cu **inducția după un concept**, care va fi, ca și până acum, inducția obișnuită după un număr natural (dat de numărul de pași necesari pentru a obține acel concept printr–o recursie).
De exemplu, inducția după termeni sau formule ne asigură de faptul că mulțimile variabilelor sunt definite pentru toți termenii, respectiv toate formulele, prin recursiile de mai jos.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Notație

Introducem abrevierile: pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x:

- **conectorii logici derivați** $\vee$ (*disjuncția*), $\wedge$ (*conjuncția*) și $\leftrightarrow$ (*echivalența*) se definesc astfel:
  $\varphi \vee \psi := \neg \varphi \rightarrow \psi$
  $\varphi \wedge \psi := \neg (\varphi \rightarrow \neg \psi)$
  $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
- **cuantificatorul existențial** $\exists$ (*există*) se definește astfel:
  $\exists x \varphi := \neg \forall x \neg \varphi$

Convenție privind scrierea conectorilor logici, a cuantificatorilor și a simbolului de egalitate:

- $\neg, \forall, \exists$ vor avea prioritate mai mare
- $\rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow, =$ vor avea prioritate mai mică

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Mulțimile din următoarea notație vor fi definite recursiv mai jos.

Notație

Pentru orice termen t și orice formulă φ, notăm:

- $V(t) :=$ mulțimea variabilelor termenului t
- $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor *libere* ale formulei φ

Definiție

Pentru orice termen t:

- dacă $t = x$, unde x este o variabilă, atunci $V(t) := \{x\}$
- dacă $t = c$, unde c este o constantă, atunci $V(t) := \emptyset$
- dacă $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, unde f este un simbol de operație n–ară și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $V(t) := \bigcup_{i=1}^{n} V(t_i)$

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Definiție

Pentru orice formulă φ:

- dacă $\varphi = (t_1 = t_2)$, unde t_1 și t_2 sunt termeni, atunci $FV(\varphi) := V(t_1) \cup V(t_2)$
- dacă $\varphi = R(t_1, \dots, t_m)$, unde R este un simbol de relație m–ară și $t_1, \dots, t_m$ sunt termeni, atunci $FV(\varphi) := \bigcup_{i=1}^{m} V(t_i)$
- dacă $\varphi = \neg\,\psi$, pentru o formulă ψ, atunci $FV(\varphi) := FV(\psi)$
- dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, pentru două formule ψ, χ, atunci $FV(\varphi) := FV(\psi) \cup FV(\chi)$
- dacă $\varphi = \forall x \psi$, pentru o formulă ψ și o variabilă x, atunci $FV(\varphi) := FV(\psi) \setminus \{x\}$

Remarcă

Este imediat, din definiția anterioară și definiția conectorilor logici derivați și a cuantificatorului existențial, că, pentru orice formule ψ, χ și orice variabilă x:

- $FV(\psi \vee \chi) = FV(\psi \wedge \chi) = FV(\psi \leftrightarrow \chi) = FV(\psi) \cup FV(\chi)$
- $FV(\exists x \psi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$

Definiție

Pentru orice variabilă x și orice formulă φ:

- dacă $x \in FV(\varphi)$, atunci x se numește *variabilă liberă a lui* φ;
- dacă $x \notin FV(\varphi)$, atunci x se numește *variabilă legată a lui* φ;
- dacă $FV(\varphi) = \emptyset$ (i. e. φ nu are variabile libere), atunci φ se numește *enunț*.

Exemplu

- În formula $\exists x(x^2 = x)$, x este variabilă legată. Această formulă este un enunț.
- În formula $\forall y \forall z(z \cdot x \leq y \cdot z)$, x este variabilă liberă.

Notație

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, \ldots, x_n$ variabile.
Dacă t este un termen cu $V(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, atunci vom nota $t(x_1, \ldots, x_n)$.
Dacă φ este o formulă cu $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, atunci vom nota $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Definiție

Fie x o variabilă, $\varphi(x)$ o formulă și t un termen.
Formula obținută din φ prin *substituția lui* x *cu* t se notează cu $\varphi(t)$ și se definește astfel:

- fiecare $y \in V(t)$ se înlocuiește cu o variabilă $v \notin V(t)$ care nu apare în $\varphi(x)$, în toate aparițiile *legate* ale lui y în $\varphi(x)$;
- apoi se înlocuiește x cu t.

Exemplu

Fie variabilele x, y, z, formula $\varphi(x) := \exists y(x < y)$ și termenul $t := y + z$.
Atunci $\varphi(t)$ se obține astfel:

- $\varphi(x) = \exists y(x < y)$ se înlocuiește cu $\exists v(x < v)$;
- prin urmare, $\varphi(t) = \exists v(y + z < v)$.

Axiomele calculului cu predicate clasic: pentru φ, ψ, χ formule arbitrare, t termen arbitrar, n, i numere naturale nenule arbitrare și $x, y, y_1, \ldots, y_n, v_1, \ldots, v_n$ variabile arbitrare:

- axiomele calculului propozițional:
  (G_1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  (G_2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
  (G_3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
- *regula* $(\to \forall)$:
  (G_4) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$, dacă $x \notin FV(\varphi)$
- o regulă privind substituțiile:
  (G_5) $\forall x \varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \to \varphi(t, y_1, \ldots, y_n)$
- *axiomele egalității*:
  (G_6) $x = x$
  (G_7)
  $(x = y) \to (t(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) = t(v_1, \ldots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \ldots, v_n))$
  (G_8)
  $(x = y) \to (\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n) = \varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \ldots, v_n))$

Sintaxa calculului cu predicate clasic

Notație

Faptul că o formulă φ este *teoremă (formală) (adevăr sintactic) a(l) lui* $\mathcal{L}_\tau$ se notează cu $\vdash \varphi$ și se definește, recursiv, ca mai jos.

Definiție

1. Orice axiomă e teoremă formală a lui $\mathcal{L}_\tau$.
2. Pentru orice formule φ, ψ, $\dfrac{\vdash \psi, \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\vdash \varphi}$ (regula de deducție *modus ponens* (MP)).
3. Pentru orice formulă φ și orice variabilă x, $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \forall x \varphi}$ (regula de deducție numită *principiul generalizării* (PG)).
4. Orice teoremă formală se obține prin aplicarea regulilor (1), (2) și (3) de un număr finit de ori.

Sintaxa calculului cu predicate clasic

Notație

Fie Σ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}_\tau$. Faptul că o formulă φ *se deduce (formal) din ipotezele* Σ (φ *este consecință sintactică a mulțimii de ipoteze* Σ) se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ și se definește, recursiv, ca mai jos.

Definiție

Fie Σ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}_\tau$.

1. Orice axiomă a lui $\mathcal{L}_\tau$ se deduce formal din Σ.
2. $\Sigma \vdash \varphi$, oricare ar fi $\varphi \in \Sigma$.
3. Pentru orice formule φ, ψ, $\dfrac{\Sigma \vdash \psi, \Sigma \vdash \psi \to \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$ (regula de deducție *modus ponens* (MP)).
4. Pentru orice formulă φ și orice variabilă x, $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \forall x \varphi}$ (regula de deducție numită *principiul generalizării* (PG)).
5. Orice consecință sintactică a lui Σ se obține prin aplicarea regulilor (1), (2), (3) și (4) de un număr finit de ori.

Remarcă

Pentru orice formulă φ, are loc echivalența:

$$\emptyset \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi.$$

Teoremă (Teorema deducției)

Pentru orice mulțime de formule Σ, orice enunț φ și orice formulă ψ, are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

1. Subiectul cursului: calculul cu predicate clasic
2. Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor
3. Sintaxa calculului cu predicate clasic
4. **Semantica logicii clasice a predicatelor**

Semantica logicii clasice a predicatelor

- Fie $\mathcal{A}$ o structură de ordinul I de signatură τ.
- Fixăm pe $\mathcal{A}$ pentru cele ce urmează.
- A va fi universul structurii $\mathcal{A}$ (mulțimea ei suport).
- Pentru fiecare simbol de operație f, fiecare simbol de relație R și fiecare simbol de constantă c din signatura τ, notăm cu $f^{\mathcal{A}}$, respectiv $R^{\mathcal{A}}$, respectiv $c^{\mathcal{A}}$ operația, respectiv relația, respectiv constanta corespunzătoare din $\mathcal{A}$.

Definiție

O *interpretare* (sau *evaluare*, sau *semantică*) a limbajului $\mathcal{L}_\tau$ în structura $\mathcal{A}$ este o funcție $s : V \to A$.
Fiecare variabilă $x \in V$ este "interpretată" prin elementul $s(x) \in A$.

Semantica logicii clasice a predicatelor

Definiție

Pentru orice interpretare s și orice termen t, definim recursiv elementul $t^{\mathcal{A}}(s) \in A$, ce reprezintă *interpretarea lui t în* $\mathcal{A}$:

- dacă $t = x$, cu x variabilă, atunci $t^{\mathcal{A}}(s) := s(x)$
- dacă $t = c$, cu c constantă, atunci $t^{\mathcal{A}}(s) := c^{\mathcal{A}}$
- dacă $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, unde f este un simbol de funcție n–ară, iar $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $t^{\mathcal{A}}(s) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(s), \ldots, t_n^{\mathcal{A}}(s))$

Notație

Pentru orice interpretare $s : V \to A$, orice variabilă x și orice element $a \in A$, notăm cu $s[{}^x_a] : V \to A$ interpretarea definită prin: oricare ar fi $v \in V$,

$$s[{}^x_a](v) := \begin{cases} a, & \text{dacă } v = x, \\ s(v), & \text{dacă } v \neq x. \end{cases}$$

Semantica logicii clasice a predicatelor

Definiție

Pentru orice interpretare s și orice formulă φ, *valoarea de adevăr a lui* φ *în interpretarea* s este un element din algebra Boole standard $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, notat cu $||\varphi(s)||_{\mathcal{A}}$ sau $||\varphi(s)||$, și definit recursiv astfel:

- dacă $\varphi = (t_1 = t_2)$, pentru doi termeni t_1, t_2, atunci
  $$||\varphi(s)|| := \begin{cases} 1, & \text{dacă } t_1^{\mathcal{A}}(s) = t_2^{\mathcal{A}}(s), \\ 0, & \text{dacă } t_1^{\mathcal{A}}(s) \neq t_2^{\mathcal{A}}(s) \end{cases}$$
- dacă $\varphi = R(t_1, \ldots, t_m)$, unde R este un simbol de relație m–ară, iar $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni, atunci
  $$||\varphi(s)|| := \begin{cases} 1, & \text{dacă } (t_1^{\mathcal{A}}(s), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(s)) \in R^{\mathcal{A}}, \\ 0, & \text{dacă } (t_1^{\mathcal{A}}(s), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(s)) \notin R^{\mathcal{A}} \end{cases}$$
- dacă $\varphi = \neg\,\psi$, pentru o formulă ψ, atunci $||\varphi(s)|| := \neg\,||\psi(s)||$ în $\mathcal{L}_2$
- dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, pentru două formule ψ, χ, atunci $||\varphi(s)|| := ||\psi(s)|| \rightarrow ||\chi(s)||$ în $\mathcal{L}_2$
- dacă $\varphi = \forall x \psi$, pentru o formulă ψ și o variabilă x, atunci
  $$||\varphi(s)|| := \bigwedge_{a \in A} ||\psi(s[{}^{x}_{a}])|| \text{ în } \mathcal{L}_2$$

Semantica logicii clasice a predicatelor

Remarcă

Este imediat că, pentru orice interpretare $s : V \to A$, orice formule ψ, χ și orice variabilă x, au loc egalitățile:

- $||(\psi \vee \chi)(s)|| = ||\psi(s)|| \vee ||\chi(s)||$ în $\mathcal{L}_2$
- $||(\psi \wedge \chi)(s)|| = ||\psi(s)|| \wedge ||\chi(s)||$ în $\mathcal{L}_2$
- $||(\psi \leftrightarrow \chi)(s)|| = ||\psi(s)|| \leftrightarrow ||\chi(s)||$ în $\mathcal{L}_2$
- $||(\exists x\psi)(s)|| = \bigvee\limits_{a \in A} ||\psi(s[{}^{x}_{a}])||$ în $\mathcal{L}_2$

Lemă

Fie $s_1, s_2 : V \to A$ două interpretări. Atunci, pentru orice termen t, are loc implicația: $s_1 \mid_{V(t)} = s_2 \mid_{V(t)} \Rightarrow t^{\mathcal{A}}(s_1) = t^{\mathcal{A}}(s_2)$.

Propoziție

Fie $s_1, s_2 : V \to A$ două interpretări. Atunci, pentru orice formulă φ, are loc implicația: $s_1 \mid_{FV(\varphi)} = s_2 \mid_{FV(\varphi)} \Rightarrow ||\varphi(s_1)|| = ||\varphi(s_2)||$.

Corolar

Dacă φ este un enunț, atunci $||\varphi(s)||_{\mathcal{A}}$ nu depinde de interpretarea $s : V \to A$.

Notație

Corolarul anterior ne permite să notăm, pentru orice enunț φ și orice interpretare $s : V \to A$, $||\varphi(s)||_{\mathcal{A}}$ cu $||\varphi||_{\mathcal{A}}$ sau $||\varphi||$.

Definiție

Pentru orice enunț φ, notăm:

$$\mathcal{A} \vDash \varphi \text{ ddacă } ||\varphi||_{\mathcal{A}} = 1.$$

În acest caz, spunem că $\mathcal{A}$ *satisface* φ sau φ *este adevărat în* $\mathcal{A}$ sau $\mathcal{A}$ *este model pentru* φ.
Pentru orice mulțime Γ de enunțuri, spunem că $\mathcal{A}$ *satisface* Γ sau că $\mathcal{A}$ *este model pentru* Γ ddacă $\mathcal{A} \vDash \varphi$, pentru orice $\varphi \in \Gamma$. Notăm acest lucru cu $\mathcal{A} \vDash \Gamma$.

Semantica logicii clasice a predicatelor

Remarcă

Este imediat, din definiția mulțimii variabilelor libere ale unei formule, că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ și $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este o formulă, atunci $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este un enunț.

Definiție

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice variabile $x_1, \ldots, x_n$ și orice formulă $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, notăm:

$$\mathcal{A} \vDash \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ ddacă } \mathcal{A} \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

În acest caz, spunem că $\mathcal{A}$ *satisface* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sau $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *este adevărată în* $\mathcal{A}$ sau $\mathcal{A}$ *este model pentru* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.
Pentru orice mulțime Σ de formule, spunem că $\mathcal{A}$ *satisface* Σ sau că $\mathcal{A}$ *este model pentru* Σ ddacă $\mathcal{A}$ este model pentru fiecare formulă din Σ. Notăm acest lucru cu $\mathcal{A} \vDash \Sigma$.

Remarcă

$\mathcal{A} \vDash \emptyset$.

- Renunțăm la fixarea structurii $\mathcal{A}$ (**nu** și la fixarea signaturii τ).

Definiție

Dacă φ este un enunț, atunci spunem că φ este *universal adevărat (adevăr semantic, tautologie)* ddacă $\mathcal{A} \vDash \varphi$, oricare ar fi structura de ordinul I $\mathcal{A}$ de signatură τ. Notăm acest lucru cu $\vDash \varphi$.

Definiție

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ și $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este o formulă, atunci spunem că $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este *universal adevărată (adevăr semantic, tautologie)* ddacă enunțul $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este universal adevărat. Notăm acest lucru cu $\vDash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Definiție

Pentru orice mulțime Σ de formule și orice formulă φ, spunem că φ *se deduce semantic din ipotezele* Σ sau că φ *este consecință semantică a mulțimii de ipoteze* Σ ddacă φ este adevărată în orice model $\mathcal{A}$ al lui Σ, i. e., pentru orice structură de ordinul I $\mathcal{A}$ de signatură τ, are loc implicația: $\mathcal{A} \vDash \Sigma \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi$. Notăm acest lucru prin: $\Sigma \vDash \varphi$.

Remarcă

Pentru orice formulă φ, are loc echivalența:

$$\emptyset \vDash \varphi \Leftrightarrow \vDash \varphi.$$

Teoremă (Teorema deducției semantice)

Pentru orice mulțime de formule Σ, orice enunț φ și orice formulă ψ, are loc echivalența:

$$\Sigma \vDash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi.$$

Semantica logicii clasice a predicatelor

Teoremă (Teorema de completitudine tare (Teorema de completitudine extinsă))

Pentru orice formulă φ și orice mulțime de formule Σ, are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash \varphi.$$

În cazul particular în care $\Sigma = \emptyset$, din **Teorema de completitudine extinsă** obținem:

Corolar (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă φ, are loc echivalența:

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \vDash \varphi.$$

Observație

Acest curs nu face parte din materia pentru examen.