Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

Examen de licenţă – Sesiunea iunie 2014
Subiecte teoretice – discipline fundamentale.

T.Al. 1. Relaţii de echivalenţă determinate de un subgrup într-un grup. Teorema lui Lagrange.

T.Al. 2. Inel factor: construcţie şi exemple. Teorema fundamentală de izomorfism pentru inele: enunţ şi demonstraţie.

T.An. 1. Să se enunţe şi să se demonstreze teorema lui Rolle.

T.An. 2. Să se demonstreze teorema: *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie monotonă. Să se arate că f este integrabilă pe* $[a, b]$.

T.Ge. 1. Enunţaţi şi demonstraţi algoritmul de aducere al unei baze la o bază ortonormată (algoritmul Gram-Schmidt), precizând noţiunile folosite (produs scalar, bază, bază ortonormată).

T.Ge. 2. Subspaţii afine: definiţie, exemple, caracterizare utilizând combinaţii afine, ecuaţii carteziene ale subspaţiilor afine.

Probleme – discipline fundamentale.

P.Al. 1. (1) Să se construiască funcţii bijective $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$ şi $h : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$.
(2) Să se arate că funcţia $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, definită prin

$$f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, este bijectivă.

P.Al. 2. Să se descompună polinoamele

$$f(X) = X^4 + X^2 + 1, \quad g(X) = X^6 + 1 \quad \text{şi} \quad h(X) = X^4 + 1$$

în produs de factori ireductibili în fiecare din inelele $\mathbf{R}[X]$ şi $\mathbf{Q}[X]$.

P.An. 1. Să se studieze natura seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}$, unde a este un număr real strict pozitiv.

P.An. 2. Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \geq 1$, converge uniform la o funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dar $f'(1) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f_n'(1)$.

P.Ge. 1. Fie $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mulţimea matricilor pătratice de ordin 2 cu coeficienţi reali şi fie $T : V \to V$ aplicaţia dată de $T(X) = X^t$, unde X^t este transpusa matricei X.

(1) Arătaţi că V are o structură canonică de spaţiu vectorial real de dimensiune 4.
(2) Arătaţi că T este un izomorfism de spaţii vectoriale.
(3) Arătaţi că valorile proprii ale lui T sunt ± 1 şi decideţi dacă T este sau nu diagonalizabilă.

P.Ge. 2. În spaţiul afin euclidian $\mathbb{R}^3$ cu structura euclidiană canonică fie dreapta d şi planul π :

$$(d) : \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 1}{2} = \frac{x_3 - 1}{\alpha}, (\alpha \in \mathbb{R}); \quad (\pi) : x_1 + 2x_2 + x_3 = 2.$$

(1) Determinaţi α astfel încât $d \parallel \pi$ şi, în acest caz, determinaţi planul π' cu $\pi' \parallel \pi, d \subset \pi'$.
(2) Determinaţi α astfel încât $d \perp \pi$ şi, în acest caz, aflaţi distanţa de la d la punctul $P(0, 1, 0)$.

Subiecte – discipline de specialitate

S.Al. 1. Corpuri algebric închise: definiţie, caracterizări şi exemple. Arătaţi că dacă F este corp finit, atunci F nu este algebric închis.

S.Al. 2. Mica teoremă a lui Fermat şi teorema lui Euler asupra congruenţelor modulo n.

S.An. 1. Teorema graficului închis.

S.An. 2. Teorema maximului modulului.

S.Ge. Curbura Gauss a unei suprafeţe regulate din spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$, definiţie, exemple (cel puţin 3), interpretare geometrică (fără demonstraţie). Teorema Egregium (enunţ, demonstraţie).

S.As. Problema celor două corpuri.

S.ED. Prelungirea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale. Soluţii maximale.

S.EDP. (1) Fie $I = (0, 1)$. Pentru o funcţie $f \in L^2(I)$ definiţi conceptul de derivată distribuţională a acesteia.

(2) Daţi exemplu de o funcţie $f \in L^2(I)$ a cărei derivată distribuţională se găseşte în $L^2(I)$. Justificaţi răspunsul.

(3) Daţi exemplu de o funcţie $f \in L^2(I)$ a cărei derivată distribuţională nu se găseşte în $L^2(I)$. Justificaţi răspunsul.

(4) Definiţi spaţiul Sobolev $H^1(I)$ şi scrieţi ce normă avem pe acesta.

(5) Definiţi spaţiul $H_0^1(I)$. Enunţaţi inegalitatea Poincaré. Introduceţi două norme echivalente pe spaţiul $H_0^1(I)$.

(6) Enunţaţi lema Lax-Milgram.

(7) Considerăm problema la limita:

$$\begin{cases} -u''(x) + (3 + \cos x)u(x) = 1, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

şi definim soluţia slabă $u \in H_0^1((0, 1))$ a ecuaţiei (1) în felul următor:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 (3 + \cos x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx, \ \forall v \in H_0^1((0, 1)). \tag{2}$$

Arătaţi cât mai detaliat că orice soluţie clasică $u \in C^2([0, 1])$ a ecuaţiei (1) este soluţie slabă, adică satisface (2).

(8) Arătaţi cât mai detaliat că există o unică soluţie slabă a ecuaţiei (1).

(9) Arătaţi că dacă $u \in C^2([0, 1])$ este soluţie slabă atunci u este soluţie clasică.

S.Me. Teoremele generale. Consecinţe. Teoreme de conservare.

S.MMC. Mişcare şi deformare. Tensorul de deformare. Teorema de descompunere polară.

S.Pr. (1) Variabile aleatoare independente şi identic repartizate: definiţie.

(2) Enunţaţi legea tare a numerelor mari.

(3) Enunţaţi formula de transport.

(4) Noţiunea de convoluţie. Definiţie, formule de calcul.

(5) Definiţi noţiunea de repartiţie uniformă.

(6) Folosind noţiunile de mai sus calculaţi limita aproape sigură a şirului

$$s_n = \frac{[X_1 + Y_1] + [X_2 + Y_2] + ... + [X_n + Y_n]}{n},$$

unde $[X_i + Y_i]$ reprezintă partea întreagă a lui $X_i + Y_i$, iar variabilele aleatoare $(X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_n, Y_n)$ sunt i.i.d. uniform repartizate.

S.St. Descrieţi metoda verosimilităţii maxime. Exemplificaţi rezultatele în cazul repartiţiei normale.

S.CO. (1) Să se enunţe teorema fundamentală a optimizării liniare şi teorema fundamentală a dualităţii (fără demonstraţii).

(2) Să se enunţe şi să se demonstreze teorema de optim infinit de la algoritmul simplex primal.

Observaţie: la ambele cerinţe se prezinta problemele şi notaţiile folosite.

Notă: timp de lucru 3 ore.