Curs 11

Cuprins

Deducție și rescriere modulo axiome (*)

Exemplu în Maude

```
fmod MYNAT is
  sort MyNat .
  op 0 : -> MyNat .
  op s : MyNat -> MyNat .
  op _+_ : MyNat MyNat -> MyNat [assoc] .
  op n : -> MyNat .
  vars  X Y : MyNat .
  eq X + 0 = X .
  eq X + s(Y) = s(X + Y) .
endfm
reduce in MYNAT : n + (0 + n) .
result MyNat: n + n
```

Termenii sunt unificați modulo asociativitate.

Deducție din E modulo F

- (S, Σ) signatură multisortată
- E mulțime de ecuații
- F mulțime de ecuații necondiționate (axiome)

Exemplu

```
fmod MYNAT is
   ...
endfm
```

- $E = \{(\forall\{x\})x + 0 \doteq_{MyNat} x, (\forall\{x, y\})x + s(y) \doteq_{MyNat} s(x + y)\}$
- $F = \{(\forall\{x, y, z\})(x + y) + z \doteq_{MyNat} x + (y + z)\}$

- Pentru un modul în Maude, F este mulțimea ecuațiilor declarate ca atribute.

Echivalența semantică

- (S, Σ) signatură multisortată
- F mulțime de ecuații necondiționate (axiome)

- Dacă X este o mulțime de variabile, definim echivalența semantică:
$$\equiv_F := \bigcap\{Ker(h) \mid h : T_\Sigma(X) \to \mathcal{M} \models F\}$$

- Pentru $t \in T_\Sigma(X)_s$ notăm clasa de echivalență a lui t:
$$[t]_F := [t]_{\equiv_F}$$

- $T_{\Sigma,F}(X) := T_\Sigma(X)/_{\equiv_F}$

F-algebra liber generată

Propoziție (1)

$T_{\Sigma,F}(X)$ este F-algebra liber generată de X,
i.e. or. $\mathcal{B} \models F$, or. $e : X \to B$ funcție, există un unic morfism $\bar{e} : T_{\Sigma,F}(X) \to \mathcal{B}$ cu $\bar{e}([x]_F) = e(x)$, or. $x \in X$, și anume

$$\bar{e}([t]_F) = \tilde{e}(t), \text{ or. } t \in T_\Sigma X.$$

Demonstrație [schiță]

Se aplică proprietatea de universalitate a algebrei cât:

$$\begin{tikzcd}
T_\Sigma(X) \arrow[r, "{[\cdot]_F}"] \arrow[d, "\tilde{e}"'] & T_{\Sigma,F(X)} \arrow[dl, dotted, "\bar{e}"] \\
\mathcal{B} &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Ecuații și satisfacere modulo F

- (S, Σ) signatură multisortată
- E mulțime de ecuații și
- F mulțime de ecuații necondiționate (axiome)

- O ecuație modulo F are forma $(\forall X)[t]_F \doteq_s [t']_F$, pt. $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$.
- Pentru $\mathcal{B}$ o F-algebră definim satisfacerea modulo F:

$$\mathcal{B} \models_F (\forall X)[t]_F \doteq_s [t']_F \Leftrightarrow \bar{e}([t]_F) = \bar{e}([t']_F), \text{ or. } e : X \to B.$$

  Vom nota $\mathcal{B} \models_F (\forall X)[t]_F \doteq_s [t']_F$.
- Notăm $E \models_F (\forall X)[t]_F \doteq_s [t']_F$ dacă pt. or. F-algebră $\mathcal{B}$ avem:

$$\mathcal{B} \models_F (\forall Y)[t_1]_F \doteq_{s'} [t_2]_F, \text{ or. } (\forall Y)t_1 \doteq_{s'} t_2 \in E, \text{ implică}$$
$$\mathcal{B} \models_F (\forall X)[t]_F \doteq_s [t']_F.$$

Deducție din E modulo F

Propoziție (2)

Dacă $\mathcal{B} \models F$, atunci sunt echivalente:

1. $\mathcal{B} \models (\forall X) t \doteq_s t'$,
2. $\mathcal{B} \models_F (\forall X)[t]_F \doteq_s [t']_F$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ astfel încât $\mathcal{B} \models F$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Dacă $e : X \to B$, atunci $\tilde{e}(t) = \tilde{e}(t')$ din ipoteză. Avem

$$\bar{e}([t]_F) = \tilde{e}(t) = \tilde{e}(t') = \bar{e}([t']_F).$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Dacă $e : X \to B$, atunci $\bar{e}([t]_F) = \bar{e}([t']_F)$ din ipoteză. Avem

$$\tilde{e}(t) = \bar{e}([t]_F) = \bar{e}([t']_F) = \tilde{e}(t').$$

□

Deducție din E modulo F

- (S, Σ) signatură multisortată,
- E mulțime de ecuații și F mulțime de axiome.

Teorema (3)

Sunt echivalente:

1. $E \cup F \models (\forall X)t \doteq_s t'$
2. $E \models_F (\forall X)[t]_F \doteq_s [t']_F$

Demonstrație

Consecință directă a Propoziției 2.

Rescriere modulo axiome

- (S, Σ) signatură multisortată,
- R sistem de rescriere
- F mulțime de axiome.

Dacă t, $t' \in T_\Sigma(X)_s$ definim relația $[t]_F \rightarrow_{R/F} [t']_F$ astfel:

$$
\boxed{
\begin{array}{lcl}
[t]_F \rightarrow_{R/F} [t']_F & \Leftrightarrow & t \equiv_F c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și} \\
 & & t' = c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde} \\
 & & c \in T_\Sigma(X \cup \{z\}),\ z \notin X,\ nr_z(c) = 1 \\
 & & l \rightarrow r \in R \text{ cu } Var(l) = Y, \\
 & & \theta : Y \rightarrow T_\Sigma(X) \text{ este o substituție.}
\end{array}
}
$$

$$[t]_F \rightarrow_{R/F} [t']_F \Leftrightarrow \text{ex. } t_0 \ (\ t \equiv_F t_0 \text{ și } t_0 \rightarrow_R t')$$

Exemplu

Exemplu

```
fmod MYNAT is
  sort MyNat .
  op 0 : -> MyNat .
  op s : MyNat -> MyNat .
  op _+_ : MyNat MyNat -> MyNat [assoc] .
  vars  X Y : MyNat .
  eq X + 0 = X .
  eq X + s(Y) = s(X + Y) .
endfm
```

- $R := \{x + 0 \to x,\ x + s(y) \to s(x + y)\}$
- $F := \{\forall\{x, y, z\}(x + y) + z \doteq_{MyNat} x + (y + z)\}$

$$s(0) + (0 + s(0)) \equiv_F (s(0) + 0) + s(0) \to_R s(0) + s(0) \to_R s(s(0))$$

Rescriere modulo axiome

- (S, Σ) signatură multisortată, F mulțime de axiome,
- E mulțime de ecuații, R_E sistemul de rescriere asociat,
- Notăm $\rightarrow_{E/F} := \rightarrow_{R_E/F}$

Teorema (4)

Sunt echivalente:

1. $E \models_F (\forall X)[t]_F \doteq_s [t']_F$
2. $t \overset{*}{\leftrightarrow}_{E \cup F} t'$
3. $[t] \overset{*}{\leftrightarrow}_{E/F} [t']_F$

Rescriere modulo axiome

Observații:

- $(T_{\Sigma,F}(X)_s, \rightarrow_{E/F})$ este un sistem de rescriere abstract
- pentru care proprietățile de confluență, terminare și completare se definesc uzual.
- Algoritmul de completare necesită unificare modulo ecuații

Logica ecuațională locală (*)

Punct de vedere local

- O ecuație $(\forall X)t \doteq_s t'$, cu $t, t' \in T_\Sigma(X)$.
- O ecuație modulo F $(\forall X)[t]_F \doteq_s [t']_F$, cu $[t]_F, [t]'_F \in T_\Sigma(X)/_{\equiv_F}$.
- Punct de vedere local al logicii ecuaționale:
  - Putem înlocui termenii cu elemente dintr-o algebră fixată $\mathcal{A}$.
  - O ecuație (propoziție) din $\mathcal{A}$ are forma $a \doteq_s c$, unde $a, c \in A_s$.
  - V.E. Căzănescu, **Note de curs**.

Ecuațiile (propozițiile) din A

clasic	$(\forall X)t \doteq_s t'$	$t,\ t' \in T_\Sigma(X)_s$
local	$a \doteq_s c$	$a,\ c \in A_s$, $\mathcal{A}$ fixată
	$(\forall \mathcal{A})a \doteq_s c$	

În cele ce urmează

- $\mathcal{A}$ va fi o (S, Σ)-algebră fixată.
- $Sen(\mathcal{A}) := \{a \doteq_s c \mid a, c \in A_s, s \in S\}$ propozițiile din $\mathcal{A}$

Vom defini sintaxa și semantica logicii ecuaționale locale asociate lui $\mathcal{A}$.

Regulile deducției ecuaționale în $\mathcal{A}$

Γ o mulțime de (S, Σ) ecuații (condiționate) și a, b, c, a_i, $b_i \in A$.

R $$\frac{}{a \doteq_s a}$$

S $$\frac{a \doteq_s b}{b \doteq_s a}$$

T $$\frac{a \doteq_s b, \;\; b \doteq_s c}{a \doteq_s c}$$

C_Σ $$\frac{a_1 \doteq_{s_1} b_1, \ldots, a_n \doteq_{s_n} b_n}{A_\sigma(a_1, \ldots, a_n) \doteq_s A_\sigma(b_1, \ldots, b_n)} \qquad \sigma : s_1 \cdots s_n \to s$$

Sub_Γ $$\frac{\{h_{s'}(u) \doteq_{s'} h_{s'}(v) \mid u \doteq_{s'} v \in H\}}{h_s(t) \doteq_s h_s(t')} \qquad \begin{array}{l} h : T_\Sigma(Y) \to A, \\ (\forall Y) t \doteq_s t' \textit{ if } H \in \Gamma \end{array}$$

Teorema de completitudine

- $a \sim_{\Gamma}^{\mathcal{A}} a' \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathcal{A}} a \doteq_s a'$ (echivalența sintactică)
- $a \equiv_{\Gamma}^{\mathcal{A}} a' \Leftrightarrow \Gamma \models_{\mathcal{A}} a \doteq_s a'$ (echivalența semantică)
- Corectitudinea deducției locale: $\sim_{\Gamma}^{\mathcal{A}} \subseteq \equiv_{\Gamma}^{\mathcal{A}}$
- Completitudinea deducției locale: $\equiv_{\Gamma}^{\mathcal{A}} \subseteq \sim_{\Gamma}^{\mathcal{A}}$

Teorema (Teorema de completitudine)

$$\equiv_{\Gamma}^{\mathcal{A}} = \sim_{\Gamma}^{\mathcal{A}}$$

Rescrierea locală

- Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră
- Definim $\mathcal{A}[z] := T_\Sigma(A \cup \{z\}),\ z \notin A$
- Un context este un termen $c \in A[z]$ cu $nr_z(c) = 1$, iar $c[a] := c[z \leftarrow a]$
- Pentru $Q \subseteq A \times A$ definim:
  - $\rightarrow_Q := \{(c[a], c[a']) \mid (a, a') \in Q, c \in A[z] \text{ context}\}$
  - $\xrightarrow{*}_Q$ închiderea reflexivă și tranzitivă
  - $\downarrow_Q := \{(a, a') \mid \text{ ex. } b \in A \text{ a.î. } a \xrightarrow{*}_Q b \text{ și } a' \xrightarrow{*}_Q b\}$

Rescrierea locală

- $\mathcal{A}$ este (S, Σ)-algebra fixată și Γ mulțime de ecuații condiționate
- Definim $(Q_n)_n$:
  - $Q_n \subseteq A \times A$, or. n,
  - $Q_0 := \emptyset$,
  - $$Q_{n+1} := \Big\{(h_s(l), h_s(r)) \mid \begin{array}{l}(\forall Y) l \doteq_s r \ \mathit{if} \ H \in \Gamma, \\ h : T_\Sigma(Y) \to A \ \mathit{morfism}, \\ h_{s'}(u) \downarrow_{Q_n} h_{s'}(v) \ \mathit{or.}\ u \doteq_{s'} v \in H\end{array}\Big\}$$
- $Q := \bigcup_n Q_n$
- Notăm
  - $\Rightarrow_{\Gamma, A} := \rightarrow_Q$,
  - $\Downarrow_{\Gamma, A} := \downarrow_Q$

Rescrierea locală

Fie $\mathcal{A}$ o (S,Σ)-algebră fixată și Γ mulțime de ecuații condiționate.

Dacă a, $a' \in A_s$ definim relația $a \rightarrow_{\Gamma,\mathcal{A}} a'$ astfel:

$$
\begin{array}{lcl}
a \rightarrow_{\Gamma,A} a' & \Leftrightarrow & \text{ex. } c \in A[z],\ nr_z(c) = 1 \\
 & & a \text{ este } c[z \leftarrow h_s(l)] \text{ și } a' \text{ este } c[z \leftarrow h_s(r)], \\
 & & (\forall Y) l \doteq_s r \ \mathit{if}\ H \in \Gamma, \\
 & & h : T_\Sigma(Y) \rightarrow A \text{ este un morfism}, \\
 & & h_{s'}(u) \Downarrow_{\Gamma,A} h_{s'}(v) \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H
\end{array}
$$

Teorema

$$\stackrel{*}{\rightarrow}_{\Gamma,A} \; = \; \stackrel{*}{\Rightarrow}_{\Gamma,A} \; \subseteq \; \equiv^A_\Gamma$$

Rescriere locală

- O relația $\succ$ pe $A \times A$ este cofluentă dacă or. $a, b, c \in A$

$$a \succ b \text{ și } a \succ c \Rightarrow \text{ex. } d \in A \text{ a.î. } c \succ d \text{ și } b \succ d$$

Teorema

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate a.î. $\stackrel{*}{\rightarrow}_\Gamma$ este confluentă. Atunci $\downarrow_\Gamma = \equiv_\Gamma^{\mathcal{A}}$, i.e.

$$a \equiv_\Gamma^{\mathcal{A}} a' \Leftrightarrow a \downarrow_\Gamma a'$$

Programare logică. Teoremele lui Herbrand.

Ce am studiat până acum

- (S, Σ) signatură multisortată și Γ mulțime de ecuații condiționate
- G o mulțime de ecuații de forma $(\forall X)t \doteq_s t'$, $t, t' \in T_\Sigma(X)$.

- În cursurile anterioare am răspuns la problema

$$\Gamma \models (\forall X)G.$$

  - $\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t'$ if H:
    pt. or. morfism $h : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$,
    $h_{s'}(u) = h_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow h_s(t) = h_s(t')$
  - $\mathcal{A} \models \Gamma$:
    $\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t'$ if H, or. $(\forall X)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$
  - $\Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$:
    or. $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \models \Gamma$, $\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t'$
  - $\Gamma \models (\forall X)G$:
    or. $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \models \Gamma$, $\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t'$, or. $(\forall X)t \doteq_s t' \in G$

Problema programării logice (ecuaționale)

- (S, Σ) signatură multisortată și Γ mulțime de ecuații condiționate
- G o mulțime de ecuații de forma $(\forall X)t \stackrel{.}{=}_s t'$, $t, t' \in T_\Sigma(X)$.

- Problema programării logice ecuaționale:

$$\Gamma \models (\exists X)G.$$

- $\Gamma \models (\exists X)G$:
  or. $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \models \Gamma$, $\mathcal{A} \models (\exists X)G$.

- $\mathcal{A} \models (\exists X)G$:
  există un morfim $h : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ a.î. $h_s(t) = h_s(t')$, or. $(\forall X)t \stackrel{.}{=}_s t' \in G$.

Amintiri

- T_Σ este (S,Σ)-algebra inițială.
  - pt. or. (S,Σ)-algebră $\mathcal{A}$, există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{A}$.

- $\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}} := \bigcap\{Ker(h) \mid h : \mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \models \Gamma\}$.
- $\equiv_{\Gamma,T_\Sigma} := \bigcap\{Ker(h) \mid h : T_\Sigma \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \models \Gamma\}$

- $T_{\Sigma,\Gamma} := T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}}$ este Γ-algebra inițială.
  - pt. or. Γ-algebră $\mathcal{B}$, există un unic morfism $f : T_{\Sigma,\Gamma} \to \mathcal{B}$.

Propoziție *(vezi Curs 4)*

Fie $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un (S,Σ)-morfism surjectiv și X o mulțime de variabile. Pentru orice (S,Σ)-morfism $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$, există un (S,Σ)-morfism $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ astfel încât $g;h = f$.

Teoremele lui Herbrand

- Fundamentale pentru demonstrarea automată.
- Reduce problema satisfacerii în toate modelele, doar la satisfacerea în modelul inițial.

Teorema

Fie G o mulțime de ecuații de forma $(\forall X)t \doteq_s t'$, $t, t' \in T_\Sigma(X)$. Sunt echivalente:

1. $\Gamma \models (\exists X)G$,
2. $T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)G$,
3. *există un morfism* $\psi : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$ *a.î.* $\Gamma \models (\forall\emptyset)\psi(G)$.

Teoremele lui Herbrand

Demonstrație

$1 \Rightarrow 2$: $\Gamma \models (\exists X)G \Rightarrow T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)G$

- Știm $\Gamma \models (\exists X)G$: or. $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \models \Gamma$, $\mathcal{A} \models (\exists X)G$.
- Dar $T_{\Sigma,\Gamma}$ este Γ-algebră inițială, deci $T_{\Sigma,\Gamma} \models \Gamma$.
- În concluzie, $T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)G$.

Demonstrație (cont.)

$2 \Rightarrow 3$: $T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)G \Rightarrow$ ex. $\psi : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$ a.î. $\Gamma \models (\forall \emptyset)\psi(G)$

- Știm $T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)G$: ex. $h : T_\Sigma(X) \to T_{\Sigma,\Gamma}$ a.î. $h_s(t) = h_s(t')$, or. $(\forall X)t \doteq_s t' \in G$.
- $\eta : T_\Sigma \to T_{\Sigma,\Gamma} := T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}}$ morfism surjectiv.
- Aplicând o propoziție din Cursul 4, obținem că există $\psi : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$ a.î. $\psi;\eta = h$.
- Deci $\eta_s(\psi_s(t)) = \eta_s(\psi_s(t'))$, or. $(\forall X)t \doteq_s t' \in G$.

$$
\begin{tikzcd}
T_\Sigma \arrow[r, "\eta"] & T_{\Sigma,\Gamma} \\
 & T_\Sigma(X) \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, dotted, "\psi"]
\end{tikzcd}
$$

Teoremele lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

$2 \Rightarrow 3$: $T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)G \Rightarrow$ ex. $\psi : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$ a.î. $\Gamma \models (\forall\emptyset)\psi(G)$

- Cum $\eta : T_\Sigma \to T_{\Sigma,\Gamma}$ este morfismul de factorizare, obținem $\psi_s(t) \equiv_{\Gamma,T_\Sigma} \psi_s(t')$, or. $(\forall X)t \doteq_s t' \in G$.
  - Dar $\equiv_{\Gamma,T_\Sigma} := \bigcap\{Ker(g) \mid g : T_\Sigma \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \models \Gamma\}$
  - Deci $\psi_s(t) \equiv_{\Gamma,T_\Sigma} \psi_s(t')$ înseamnă $g_s(\psi_s(t)) = g(\psi_s(t'))$, or. $g : T_\Sigma \to \mathcal{B} \models \Gamma$.
  - Trebuia să arătăm $\Gamma \models (\forall\emptyset)\psi(G)$: or. $\mathcal{B} \models \Gamma$, or. $g : T_\Sigma \to \mathcal{B}$, $g_s(\psi_s(t)) = g(\psi_s(t'))$, or. $(\forall X)t \doteq_s t' \in G$.

Teoremele lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

$3 \Rightarrow 1$: ex. $\psi : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$ a.î. $\Gamma \models (\forall\emptyset)\psi(G) \Rightarrow \Gamma \models (\exists X)G$

- Fie $\mathcal{M}$ o Γ-algebră. Arătăm că $\mathcal{M} \models (\exists X)G$.
  - există $h : T_\Sigma(X) \to \mathcal{M}$ a.î. $h_s(t) = h_s(t')$, or. $(\forall X)t \doteq_s t' \in G$.
- Fie $\alpha_\mathcal{M} : T_\Sigma \to \mathcal{M}$ unicul morfism de la T_Σ la $\mathcal{M}$.
- Arătăm că pentru $\psi;\alpha_\mathcal{M} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{M}$,
  $(\psi;\alpha_\mathcal{M})_s(t) = (\psi;\alpha_\mathcal{M})_s(t')$, or. $(\forall X)t \doteq_s t' \in G$.
  - Deoarece $\mathcal{M} \models \Gamma$, din ipoteză obținem $\mathcal{M} \models (\forall\emptyset)\psi(G)$.
    - pt. or. $g : T_\Sigma \to \mathcal{M}$, $g_s(\psi_s(t)) = g_s(\psi_s(t'))$, or. $(\forall X)t \doteq_s t' \in G$.
  - Pentru morfism $\alpha_\mathcal{M} : T_\Sigma \to \mathcal{M}$ obțim
    $(\alpha_\mathcal{M})_s(\psi_s(t)) = (\alpha_\mathcal{M})_s(\psi_s(t'))$, or. $(\forall X)t \doteq_s t' \in G$.
- Deci $\mathcal{M} \models (\exists X)G$, or. $\mathcal{M}$ o Γ-algebră. În concluzie, $\Gamma \models (\exists X)G$.

$\square$

Pe săptămâna viitoare!