Mecanică Generală

IV. Dinamica punctului material - 4

Liviu Marin[1,†]

[1]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, România

[†]E-mail: marin.liviu@gmail.com

10 decembrie 2013

2. Momentul cinetic. Teorema momentului cinetic

- Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{P}\}$ configuraţia corespunzătoare punctului material $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ de masă m şi vector de poziţie $\vec{\mathbf{x}}(t) \equiv \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$.

Definiţie

Se numeşte momentul cinetic al punctului material **P** în raport cu polul $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ mărimea

$$\boxed{\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \vec{\mathbf{x}}(t) \times \vec{\mathbf{H}}(t) = \vec{\mathbf{x}}(t) \times m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \vec{\mathbf{x}}(t) \times m\,\vec{\mathbf{v}}(t)} \qquad (1)$$

- Fie $\{\mathbf{P}_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset \mathcal{E}$ un sistem de puncte materiale $\mathbf{P_i}$, de mase m_i şi vectori de poziţie $\vec{\mathbf{x}}_i(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Definiţie

Se numeşte momentul cinetic al sistemului de puncte materiale $\{\mathbf{P}_i\}_{i=\overline{1,n}}$ în raport cu polul $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ mărimea

$$\boxed{\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{x}}_i(t) \times m_i\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{x}}_i(t) \times m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i(t)} \qquad (2)$$

- Fie $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ un corp continuu cu densitatea de masă ρ.

Definiţie

Se numeşte momentul cinetic al corpului continuu $\mathcal{B}$ în raport cu polul $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ mărimea

$$\boxed{\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \int_{\mathcal{B}_t \equiv k_t(\mathcal{B})} \vec{\mathbf{x}}(t) \times \rho(t,\vec{\mathbf{x}})\,\vec{\mathbf{v}}(t,\vec{\mathbf{x}})\,\mathrm{d}V(\vec{\mathbf{x}})} \qquad (3)$$

Teorema momentului cinetic

Mişcarea punctului material se face a.i., la orice moment de timp t, derivata momentului cinetic în raport cu $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ este egală cu momentul rezultant în raport cu **O** al forţelor ce acţionează asupra punctului material, i.e.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}\big(\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}})\big)} \qquad (4)$$

Demonstraţie:

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}\big(\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}})\big) \overset{\text{def}}{=} \vec{\mathbf{x}}(t) \times \vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) \overset{\text{Legea a II-a}}{=} \vec{\mathbf{x}}(t) \times m\,\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t)$$

$$= \vec{\mathbf{x}}(t) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t)\big] + \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \times m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\vec{\mathbf{x}}(t) \times m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t)\big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) \;\square$$

Corolar (integrale prime ale mişcării)

(i) Dacă $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}$, $\forall\, t \geq t_0$, atunci $\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t_0)$, $\forall\, t \geq t_0$, reprezintă trei integrale prime ale mişcării.

(ii) Dacă $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) \neq \vec{\mathbf{0}}$ şi $\exists\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ direcţie fixă a.i. $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}(\vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$, $\forall\, t \geq t_0$, atunci $\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t_0) \cdot \vec{\mathbf{u}}$, $\forall\, t \geq t_0$, este o integrală primă a mişcării.

Demonstraţie:

(i) $$\vec{\mathbf{x}}(t) \times \vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}\,,\ \forall\, t \geq t_0 \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}(\vec{\mathbf{F}}) = \vec{\mathbf{0}}\,,\ \forall\, t \geq t_0 \overset{\text{Teor. momentului}}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \vec{\mathbf{0}}\,,\ \forall\, t \geq t_0 \Longrightarrow \vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t_0)\,,\ \forall\, t \geq t_0$$

(ii) $$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}(\vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0\,,\ \forall\, t \geq t_0 \overset{\text{Teor. momentului}}{\Longrightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0\,,\ \forall\, t \geq t_0 \Longrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{\mathbf{u}}\big) = 0\,,\ \forall\, t \geq t_0 \Longrightarrow \vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t_0) \cdot \vec{\mathbf{u}}\,,\ \forall\, t \geq t_0 \quad \square$$

Corolar

Dacă poziția $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ și viteza inițiale $\dot{\vec{x}}(t_0) = \vec{v}_0$ ale unui punct material nu sunt doi vectori coliniari, atunci mișcarea imprimată de o forță centrală asupra acelui punct material este plană (în planul lui $\vec{x}_0$ și $\vec{v}_0$).

Demonstrație:

Cf. corolarului anterior, are loc conservarea momentului cinetic:

$$\vec{K}_O(t) = \vec{K}_O(t_0)\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \Longrightarrow$$

$$\vec{x}(t) \times \vec{v}(t) = \vec{x}(t_0) \times \vec{v}(t_0) \equiv \vec{x}_0 \times \vec{v}_0\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{5}$$

Inmulțim scalar cu $\vec{x}(t)$ ecuația (5):

$$\vec{x}(t) \cdot \big(\vec{x}(t) \times \vec{v}(t)\big) = \vec{x}(t) \cdot (\vec{x}_0 \times \vec{v}_0)\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \Longrightarrow$$

$$\vec{x}(t) \cdot (\vec{x}_0 \times \vec{v}_0) = 0\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{6}$$

Avem:

$$\vec{x}_0 \nparallel \vec{v}_0 \Longrightarrow \vec{x}_0 \times \vec{v}_0 \neq \vec{0} \tag{7}$$

Din ecuațiile (6) și (7), rezultă:

$$\vec{x}(t) \in \mathrm{span}\big(\vec{x}_0, \vec{v}_0\big)\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \qquad \square$$

Corolar

Mișcarea imprimată de o forță centrală este rectilinie dacă la un moment dat t_0 poziția $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ și viteza $\dot{\vec{x}}(t_0) = \dot{\vec{x}}_0 \equiv \vec{v}_0$ sunt doi vectori coliniari, sensul mișcării fiind dat de $\vec{v}_0$.

Demonstrație:

Fie $t_0 \geq 0$ a.i. $\vec{x}_0 \parallel \vec{v}_0$, unde $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ și $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$.

Atunci, are loc relația:

$$\vec{x}_0 \times \vec{v}_0 = \vec{0} \tag{8}$$

Cf. corolarului (integrale prime ale mișcării), are loc conservarea momentului cinetic:

$$\vec{K}_O(t) = \vec{K}_O(t_0)\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \Longrightarrow$$

$$\vec{x}(t) \times \vec{v}(t) = \vec{x}_0 \times \vec{v}_0 = \vec{0}\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{9}$$

Din (9), rezultă că are loc una din următoarele situații:

$$\vec{v}(t) = \vec{0}\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{10a}$$

$$\vec{x}(t) \parallel \vec{v}(t)\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{10b}$$

Dacă are loc (10a), atunci $\vec{x}(t)$, $t \geq t_0$, este soluția următoarei probleme Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{0}\,, & \forall\ t > t_0 \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{x}_0\,, \quad \forall\ t \geq t_0} \tag{11}$$

Dacă are loc (10b), atunci $\vec{x}(t)$, $t \geq t_0$, este soluția următoarei probleme Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda(t)\,\vec{x}(t)\,, & \forall\ t > t_0 \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{x}_0\,\exp \int_{t_0}^{t} \lambda(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad \forall\ t \geq t_0} \tag{12}$$

Soluțiile date de (11) și (12) corespund unor traiectorii rectilinii. $\square$

Viteza areolară

Considerăm o mișcare plană, $t \longmapsto \vec{x}(t)$, $t \geq t_0$, a unui punct material $\mathbf{P}$ în planul $x_1\mathbf{O}x_2$.

Fie $\mathbf{P}_0(t_0)$ poziția punctului material considerat la momentul inițial t_0, $\mathbf{P}(t)$ poziția acestuia la un moment dat t și $\mathbf{P}'(t')$ poziția la un moment $t' = t + \Delta t$ ulterior lui t, unde $\Delta t > 0$ este suficient de mic.

- t : $\mathbf{P}(t)$, $\vec{x}(t)$, $\theta(t)$;
- $t' = t + \Delta t$: $\mathbf{P}'(t')$, $\vec{x}(t') = \vec{x}(t) + \Delta\vec{x}$, $\theta(t') = \theta(t) + \Delta\theta$;

Fie $\mathcal{A}(t)$ aria măturată de raza vectoare $\vec{x}(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$ de la momentul inițial t_0 la un moment dat t, i.e. $\mathcal{A}(t) = \mathrm{Aria}\big(\mathbf{OP}_0(t_0)\mathbf{P}(t)\mathbf{O}\big)$.

Definiție

Se numește viteză areolară $A(t)$ a punctului material $\mathbf{P}(t)$ față de polul $\mathbf{O}$ derivata în raport cu timpul a ariei $\mathcal{A}(t)$ măturate de raza vectoare $\vec{x}(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$ de la momentul inițial t_0 la un moment dat t

$$\boxed{A(t) := \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathcal{A}(t + \Delta t) - \mathcal{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathcal{A}}{\Delta t}} \tag{13}$$

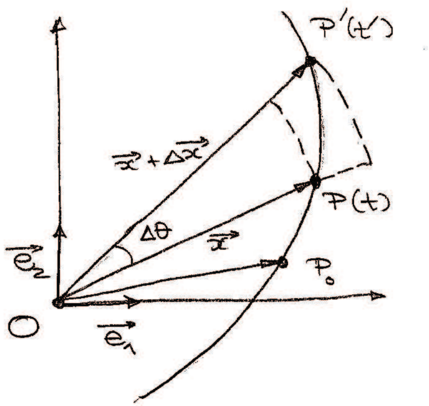

Figure : Aria $\mathcal{A}(t)$ măturată de raza vectoare $\vec{\mathbf{x}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$ de la momentul inițial t_0 la un moment dat t.

Fie $\Delta\mathcal{A} = \mathcal{A}(t') - \mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t+\Delta t) - \mathcal{A}(t)$ aria măturată de raza vectoare $\vec{\mathbf{x}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$ în $\Delta t = t' - t$.

Atunci:

$$\frac{\|\vec{\mathbf{x}}(t)\|^2\,\Delta\theta}{2} \leq \Delta\mathcal{A} \leq \frac{\|\vec{\mathbf{x}}(t)+\Delta\vec{\mathbf{x}}\|^2\,\Delta\theta}{2} \tag{14}$$

Impărțim ecuația (14) la Δt și trecem la limită după $\Delta t \to 0$:

$$\frac{\|\vec{\mathbf{x}}(t)\|^2}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \leq \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta t} \leq \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\|\vec{\mathbf{x}}(t)+\Delta\vec{\mathbf{x}}\|^2}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

i.e.

$$\frac{\rho^2(t)\,\dot\theta(t)}{2} \leq \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta t} \leq \frac{\rho^2(t)\,\dot\theta(t)}{2} \tag{15}$$

unde $\rho(t) := \|\vec{\mathbf{x}}(t)\|$

Din relația (15), obținem expresia vitezei areolare în coordonate polare:

$$\boxed{A(t) := \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2(t)\,\dot\theta(t)} \tag{16}$$

Au loc relațiile:

$$\mathcal{A}(t) = \text{Aria}(\mathbf{OP_0PO}) = \iint_{\mathbf{OP_0PO}} dA = \frac{1}{2}\oint_{\mathbf{OP_0PO}} (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathbf{OP_0}} (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)}_{=0} + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{P_0P}} (x_1 v dx_2 - x_2\,dx_1) +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathbf{PO}} (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)}_{=0} = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{P_0P}} (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(x_1\frac{dx_2}{ds} - x_2\frac{dx_1}{ds}\right)ds = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(x_1\,\dot x_2 - x_2\,\dot x_1)\,ds$$

Obținem expresia vitezei areolare în coordonate carteziene:

$$\boxed{A(t) := \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\left[x_1(t)\,\dot x_2(t) - x_2(t)\,\dot x_1(t)\right]} \tag{17}$$

Definiție

Se numește vector viteză areolară $\vec{\mathbf{A}}(t)$ a punctului material $\mathbf{P}(t)$ vectorul

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}}(t) = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{x}}(t) \times \vec{\mathbf{v}}(t)} \tag{18}$$

Corolar (Interpretare geometrică a integralelor prime ale mișcării)

(i) Dacă un punct material se mișcă sub acțiunea unei forțe $\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}})$ a.i. $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}$, $\forall\ t \geq t_0$, (e.g. forțe centrale), atunci mișcarea se face cu viteză areolară constantă.

(ii) Teorema ariilor: Dacă un punct material se mișcă sub acțiunea unei forțe $\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}})$ a.i. $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) \neq \vec{\mathbf{0}}$ și $\exists\ \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ direcție fixă cu $\vec{\mathbf{M}}_O(\vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$, $\forall\ t \geq t_0$, atunci proiecția punctului material respectiv pe orice plan perpendicular pe direcția $\vec{\mathbf{u}}$ se mișcă cu viteză areolară constantă, i.e. descrie arii egale în intervale de timp egale.

Demonstrație:

(i) Cf. corolarului (integrale prime ale mișcării), are loc conservarea momentului cinetic:

$$\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t_0)\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{19}$$

i.e.

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}}(t) = \frac{1}{2}\,\vec{\mathbf{x}}(t) \times \vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{2}\,\vec{\mathbf{x}}(t_0) \times \vec{\mathbf{v}}(t_0) =: \vec{\mathbf{C}}\,, \quad \forall\ t \geq t_0} \tag{20}$$

(ii) Cf. corolarului (integrale prime ale mișcării), are loc relația:

$$\boxed{\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t_0) \cdot \vec{\mathbf{u}} =: C\,, \quad \forall\ t \geq t_0} \tag{21}$$

Fie reperul relativ $\mathcal{R}\big(\mathbf{O};\{\vec{\varepsilon}_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq 3}\big)$ a.i. $\vec{\varepsilon}_3 = \vec{\mathbf{u}}$.

Din relația (21) obținem:

$$C = \big[\vec{\mathbf{x}}(t) \times m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t)\big]\cdot\vec{\mathbf{u}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ m\,\dot{x}_1(t) & m\,\dot{x}_2(t) & m\,\dot{x}_3(t) \end{vmatrix}\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{22}$$

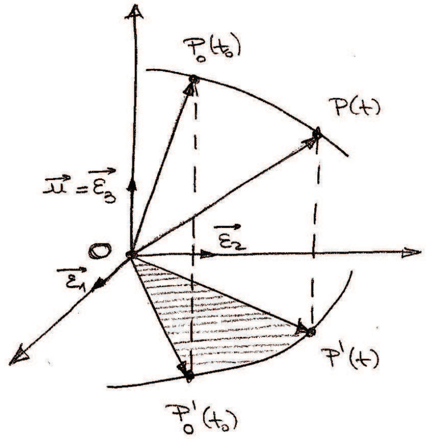

Figure : Mișcarea punctului material $\mathbf{P}(t)$ în raport cu reperul relativ $\mathcal{R}\big(\mathbf{O};\{\vec{\varepsilon}_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq 3}\big)$.

Din (22) rezultă:

$$x_2(t)\,\dot{x}_1(t) - x_1(t)\,\dot{x}_2(t) = \frac{C}{m}\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{23}$$

Obținem:

$$A(t) := \frac{\mathrm{d}\mathcal{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left[x_2(t)\,\dot{x}_1(t) - x_1(t)\,\dot{x}_2(t)\right] = \frac{C}{2m}\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{24}$$

Integrând relația (24) și folosind condiția inițială $\mathcal{A}(t_0) = 0$, obținem:

$$\boxed{\mathcal{A}(t) = \frac{C}{2m}\,(t - t_0)\,, \quad \forall\ t \geq t_0} \qquad \square \tag{25}$$