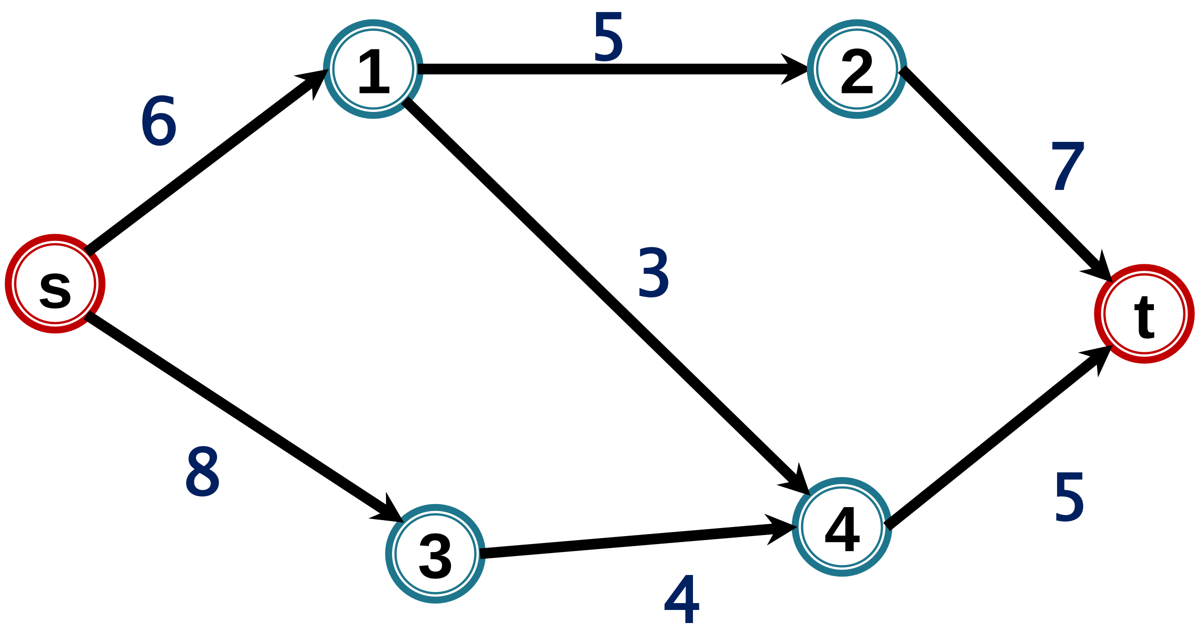
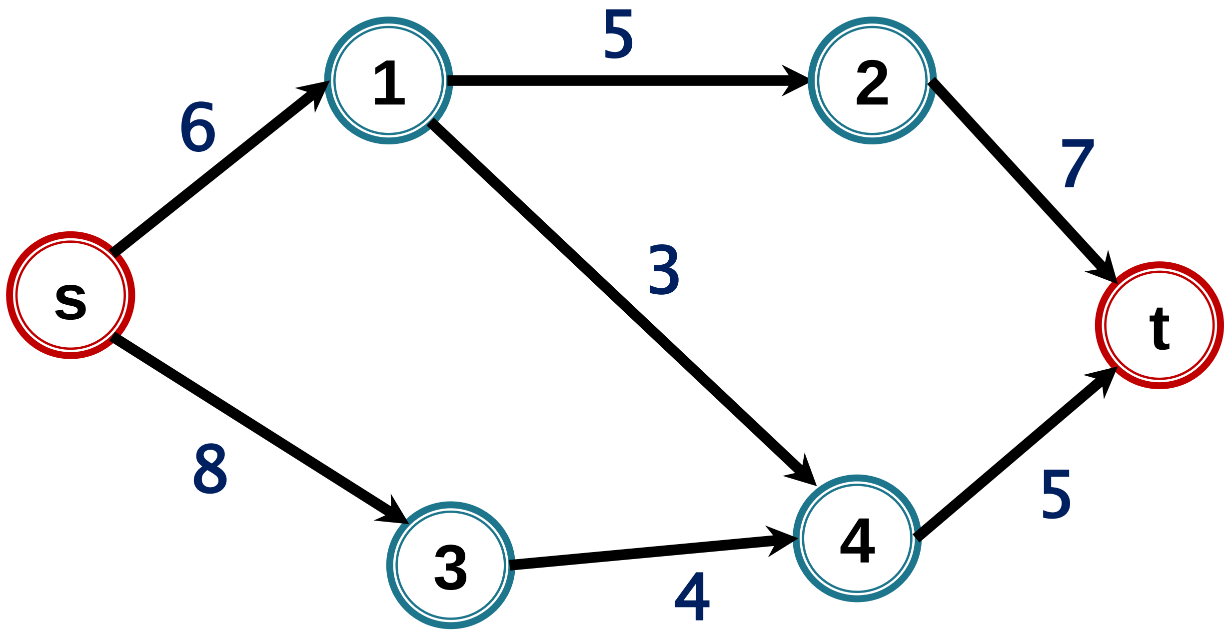
Fluxuri maxime în rețele de transport

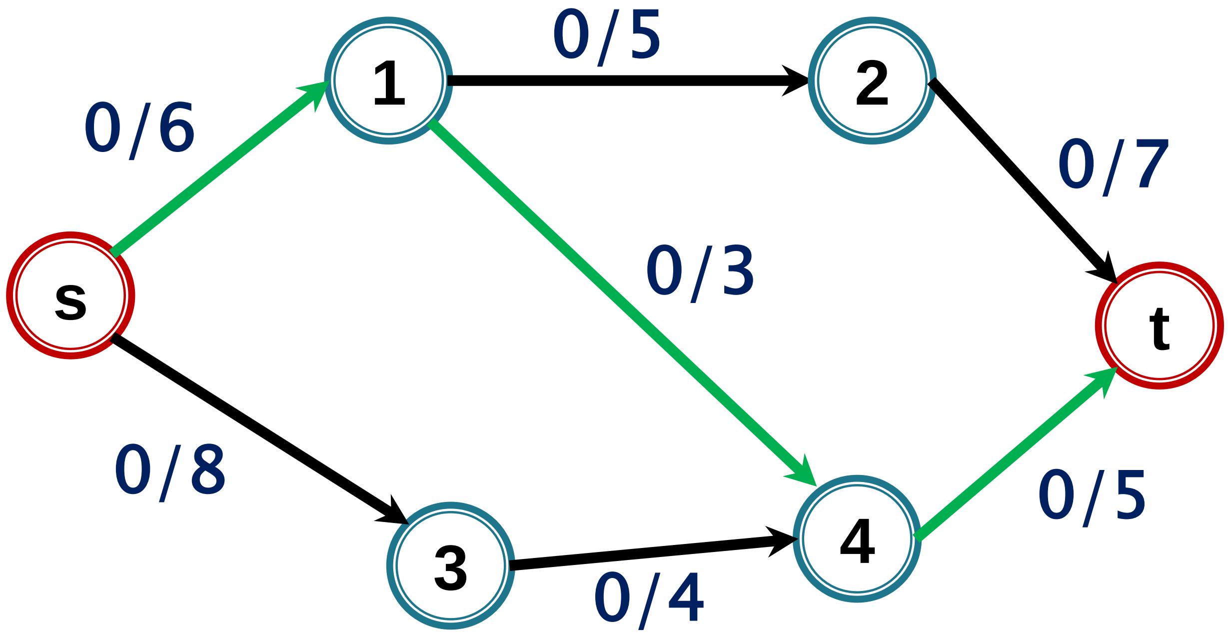
- Avem o reţea în care arcele au limitări de capacitate.

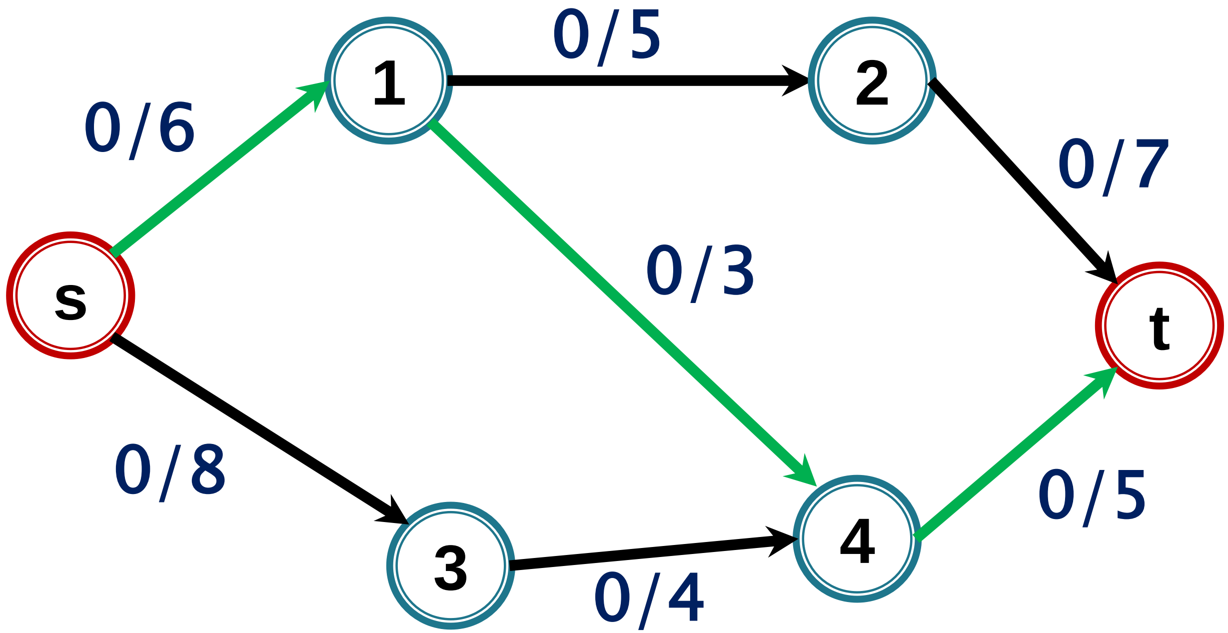
  Care este cantitatea maximă care poate fi transmisă prin reţea de la surse la destinaţii?



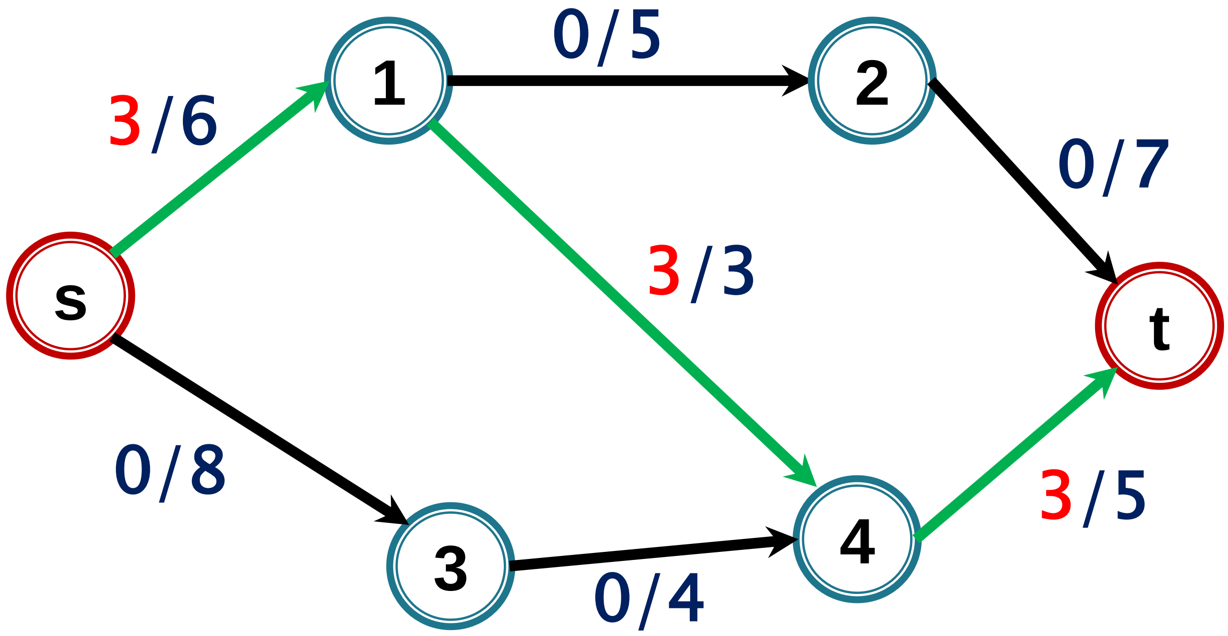


Încercăm să trimitem marfă de la vârful sursă la destinaţie

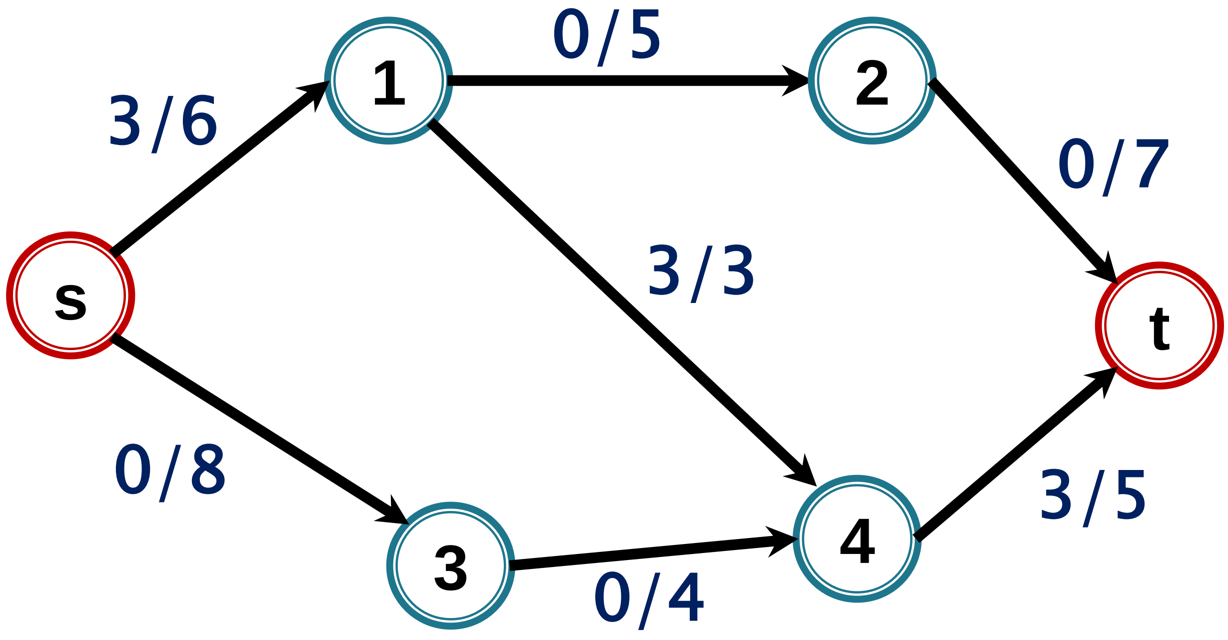

s
1
2
3
4
t
0/6
0/5
0/7
0/3
0/8
0/4
0/5



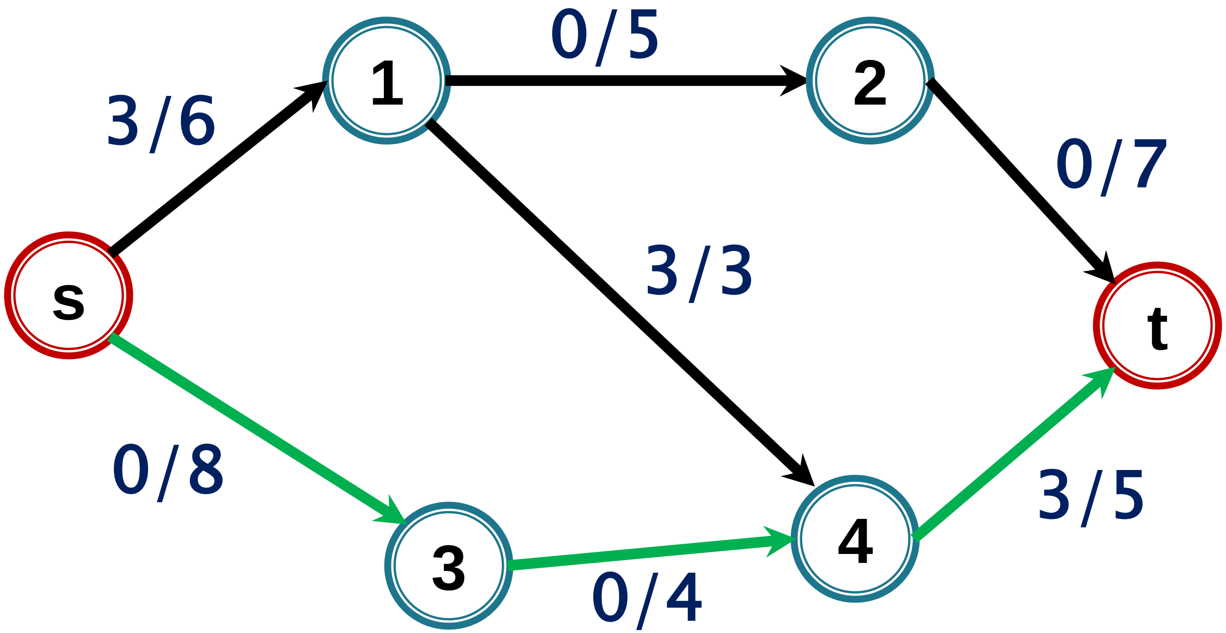
Putem trimite 3 unităţi de-a lungul întregului drum



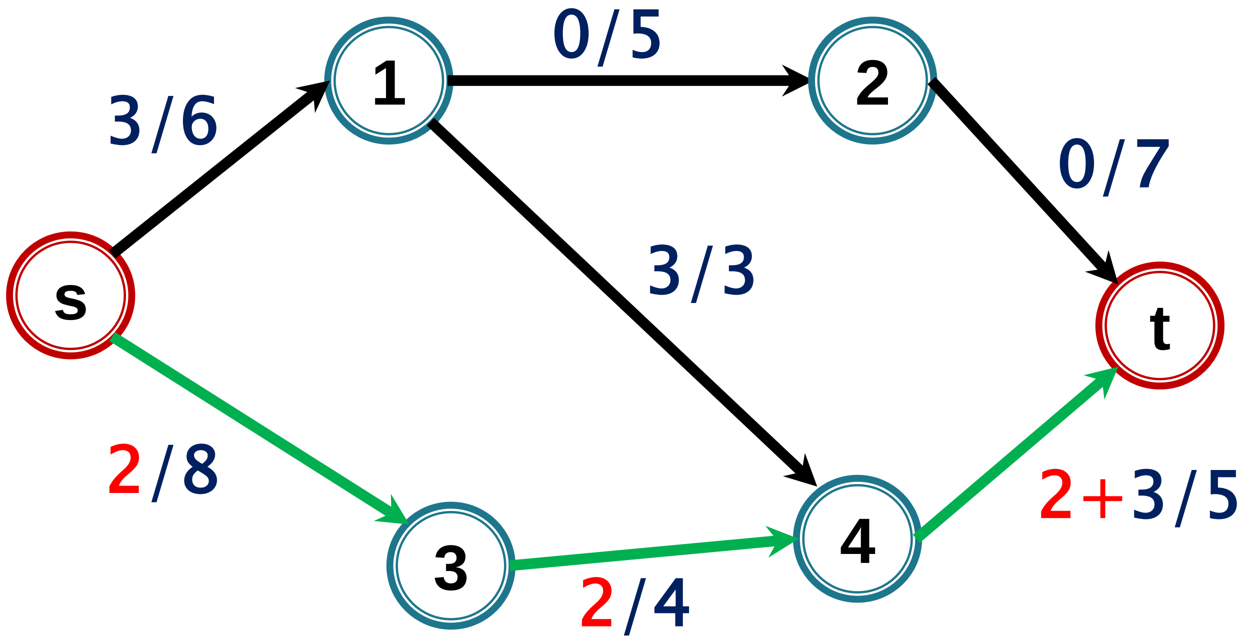
s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
0/8
0/4
3/5

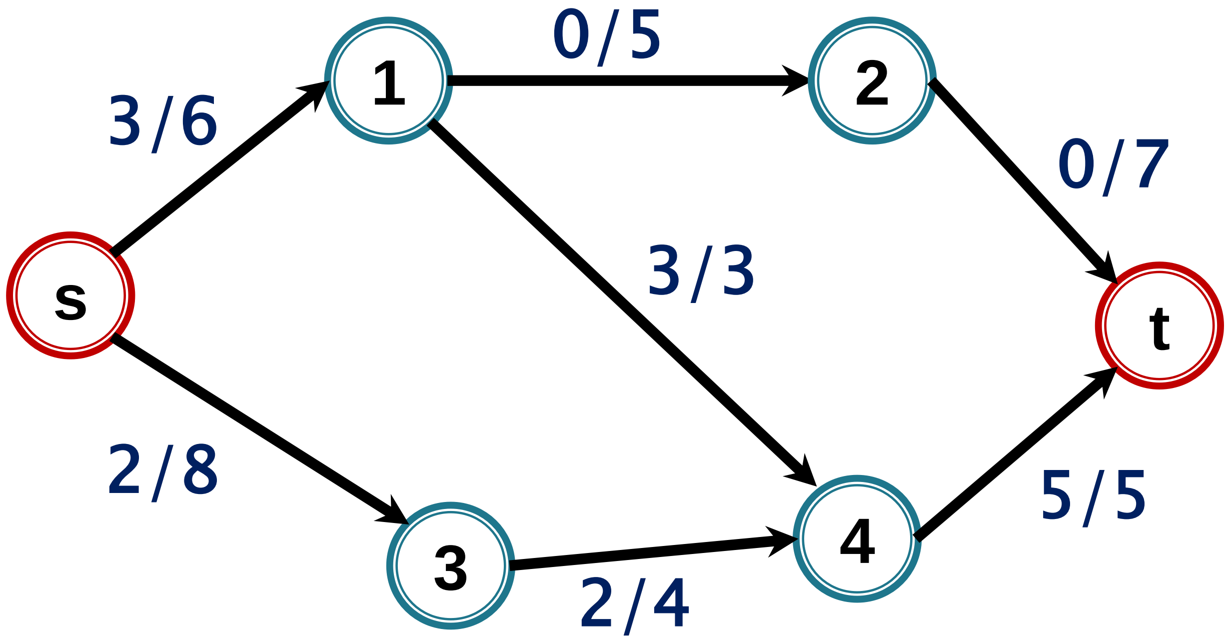


s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
0/8
0/4
3/5

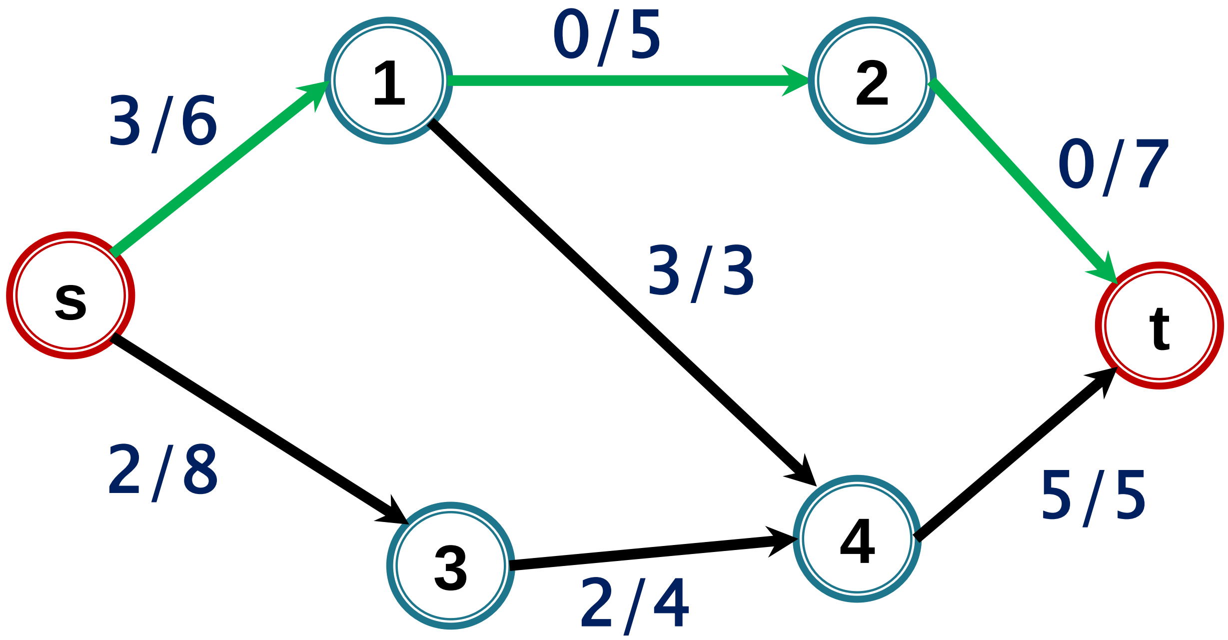


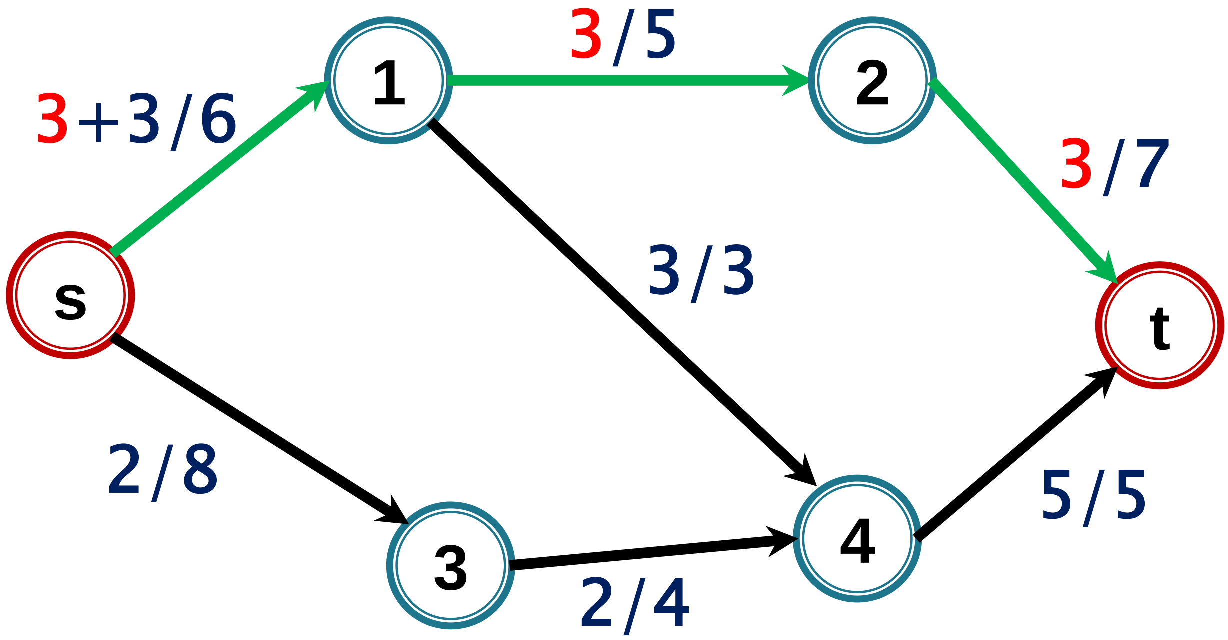
s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
0/8
0/4
3/5

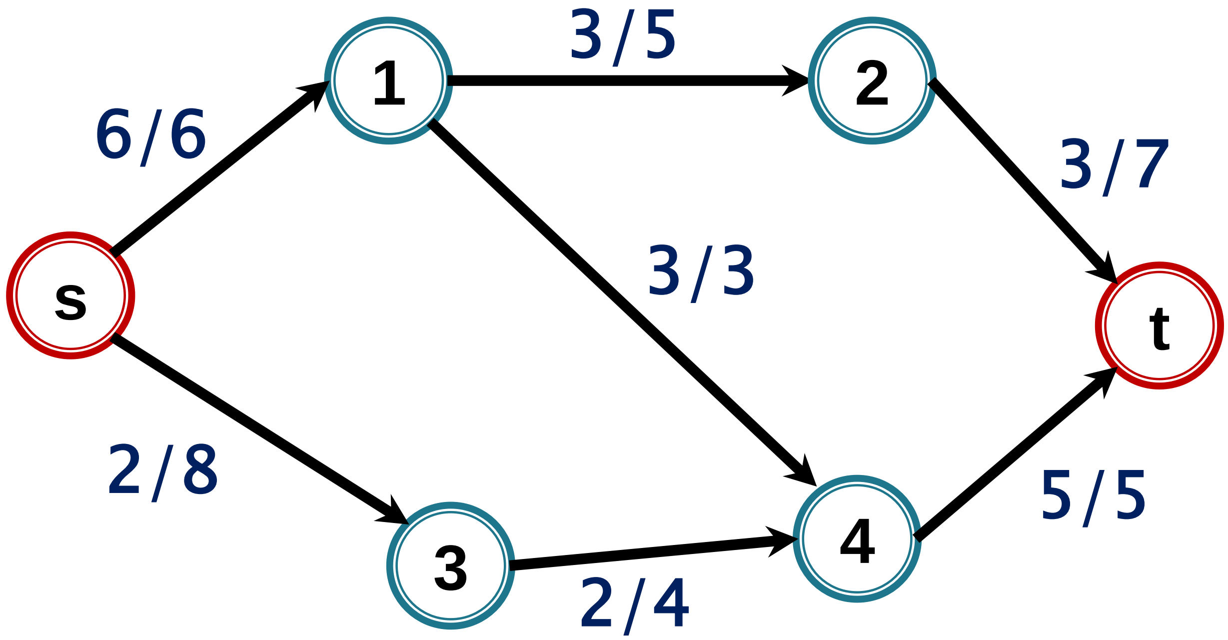

0/5
3/6
1
2
0/7
3/3
s
t
2/8
2+3/5
3
4
2/4



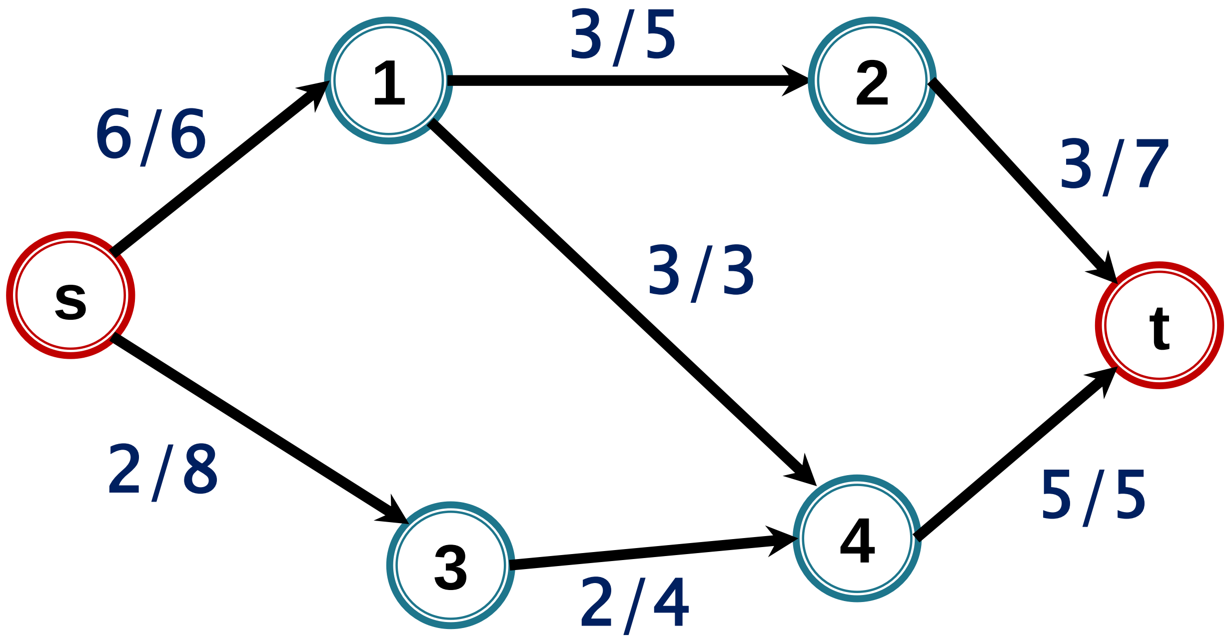
s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
2/4
5/5

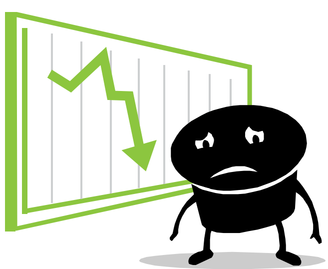

s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
2/4
5/5


3/5
3+3/6
3/7
3/3
2/8
5/5
2/4
s
1
2
3
4
t

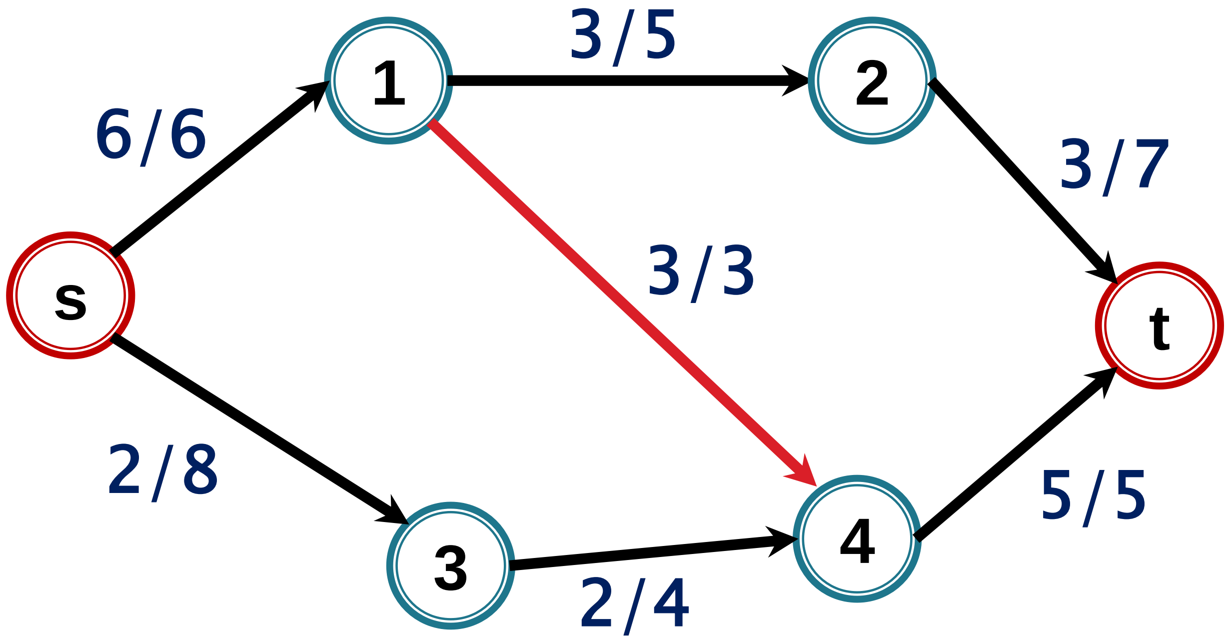


Nu mai putem trimite marfă de la s la t

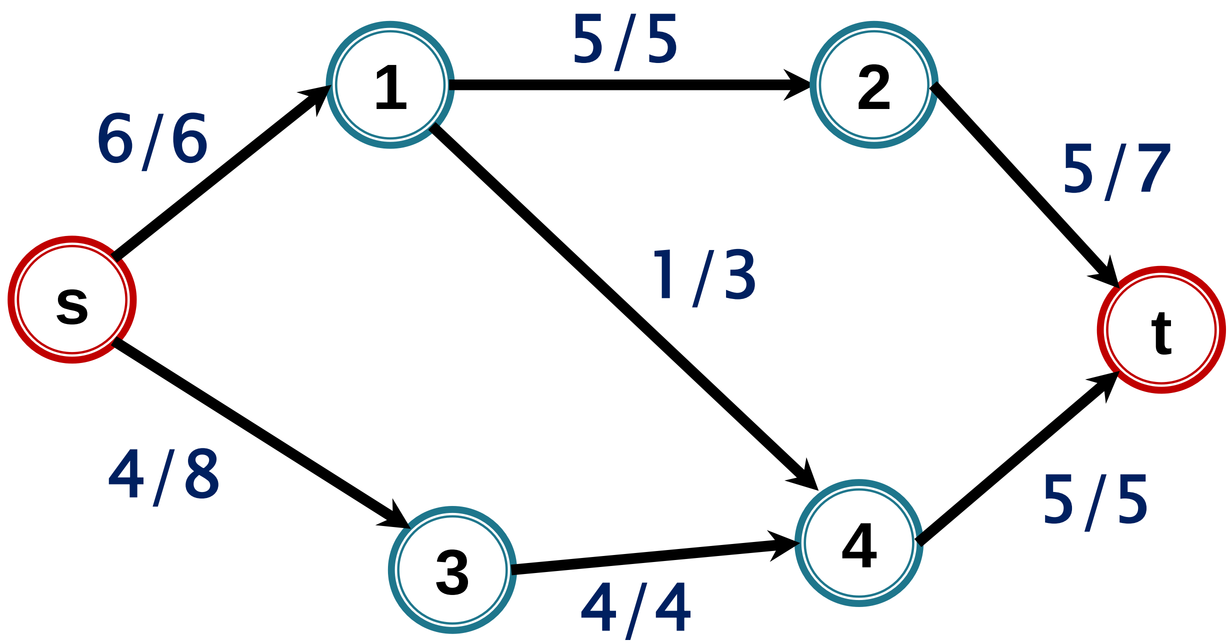




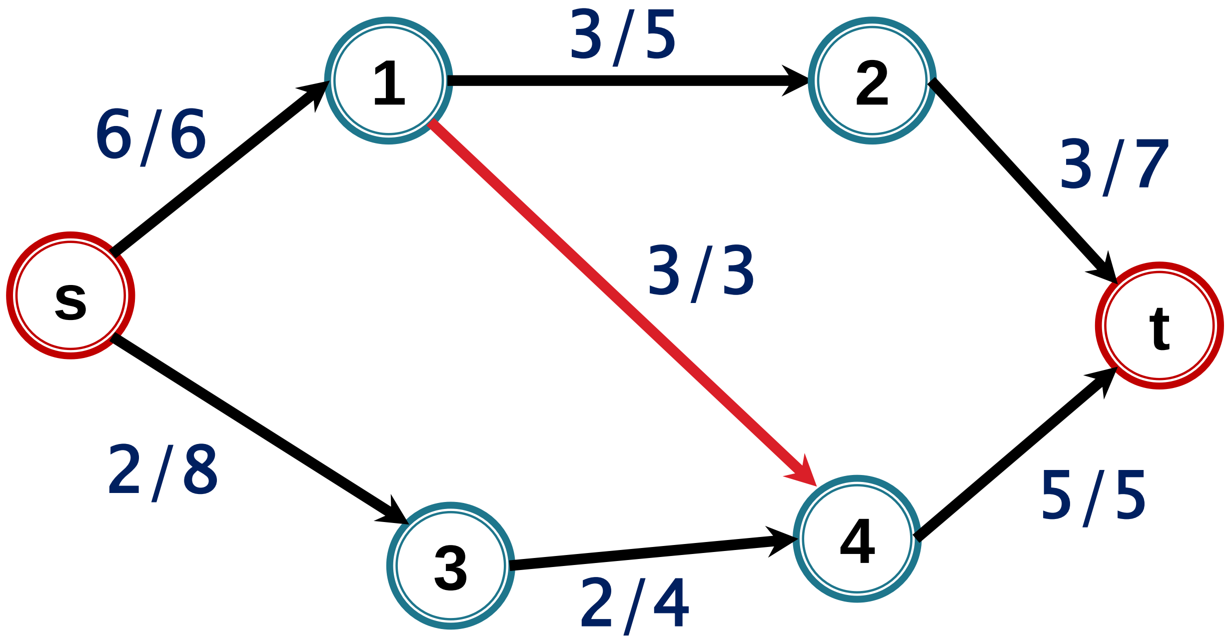
Nu este cantitatea maximă pe care o putem trimite, am trimis greşit pe arcul (1,4)

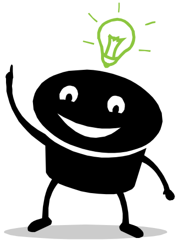


6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
5/5
2/4
1
2
s
t
3
4

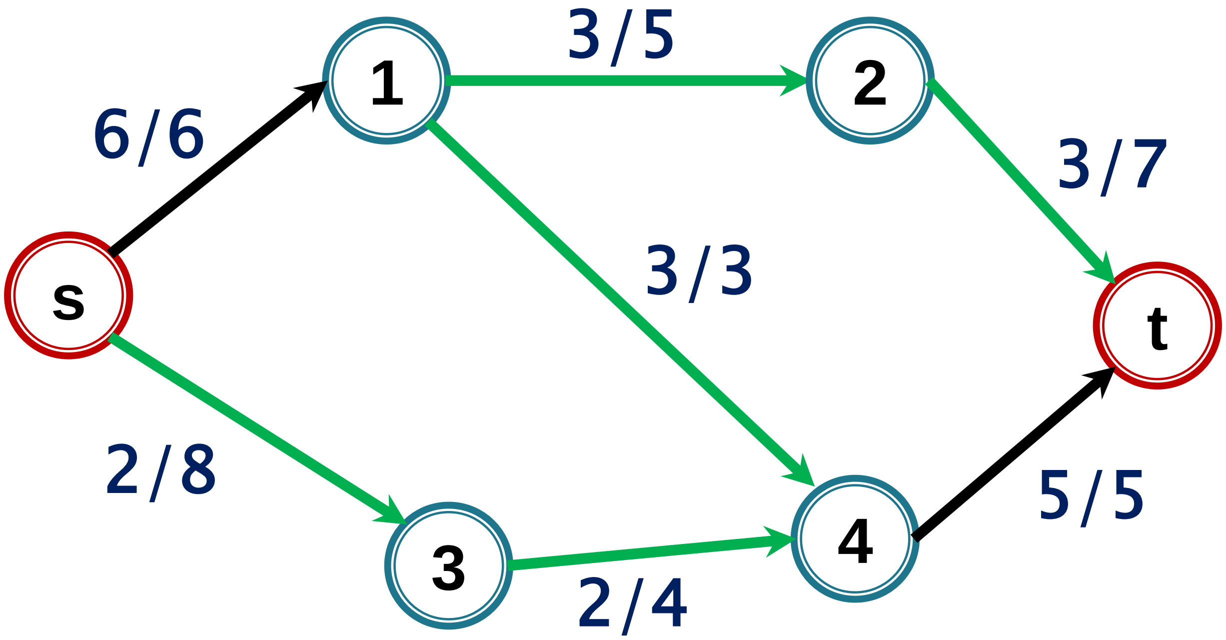


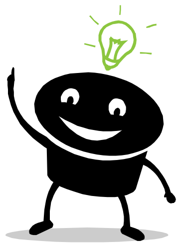
6/6
5/5
5/7
1/3
4/8
5/5
4/4
1
2
s
t
3
4



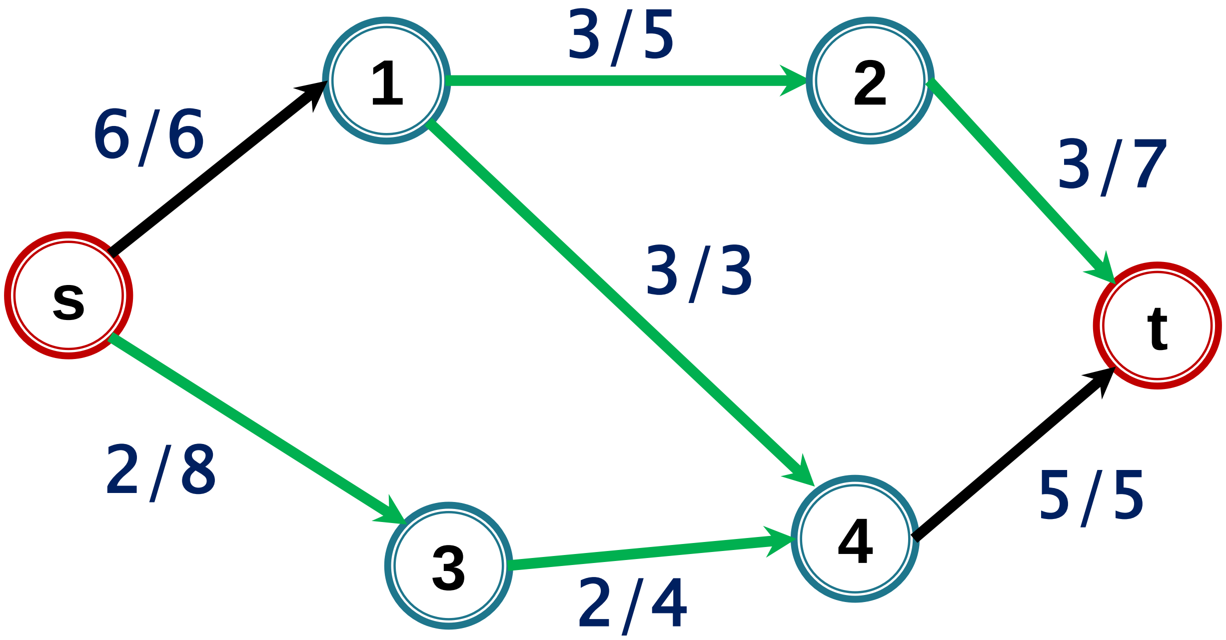


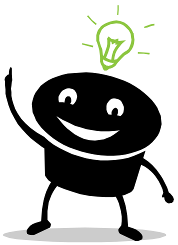
Trebuie să putem corecta (să trimitem marfă înapoi, pentru a fi direcţionată pe alte drumuri)



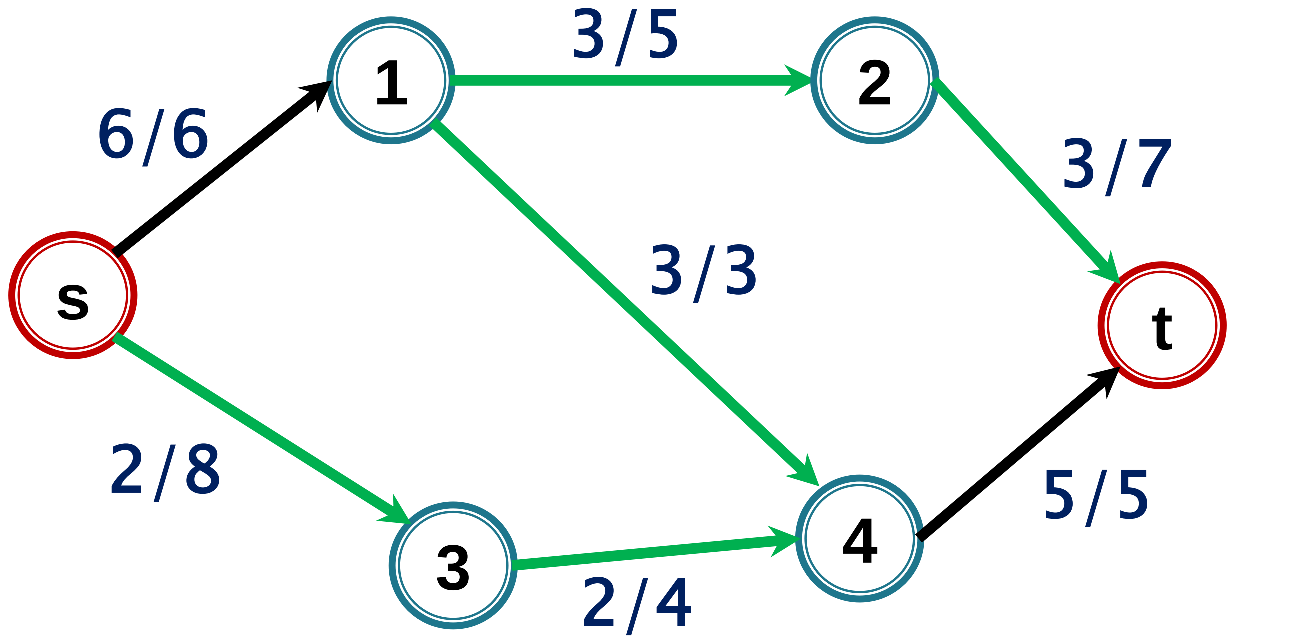


- Trimitem 2 unităţi înapoi pe arcul (1,4)

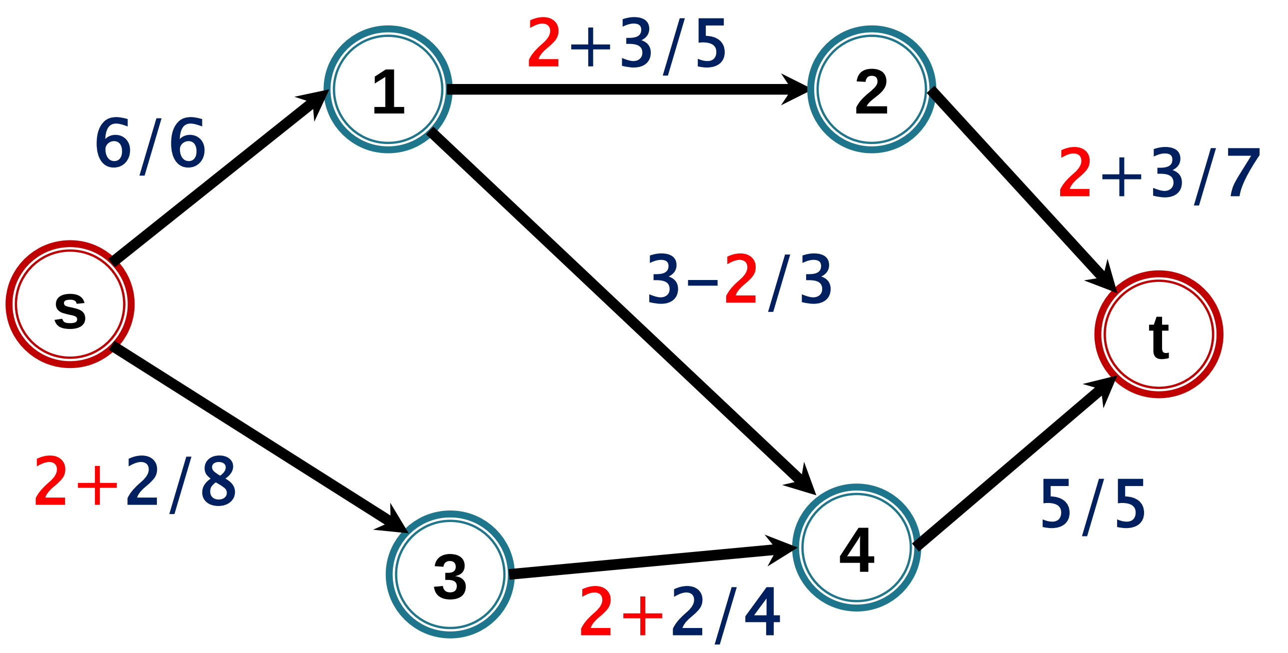




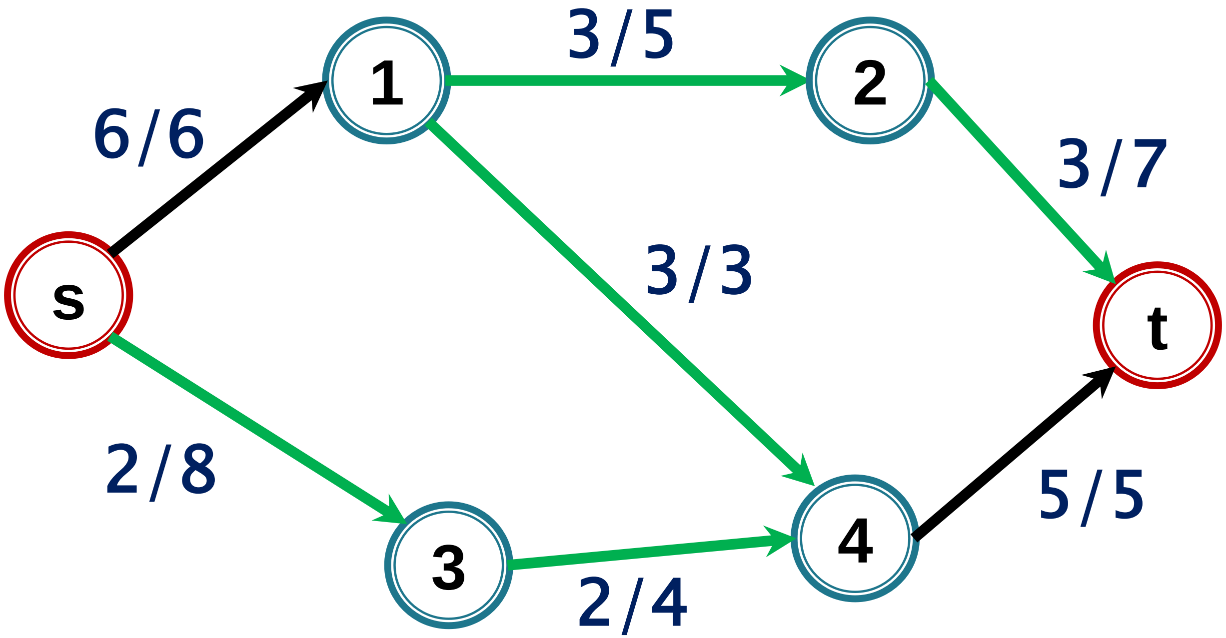
- Trimitem 2 unităţi înapoi pe arcul (1,4)
- Corecţia trebuie făcută pe un lanţ de la s la t, nu doar pe un arc, altfel marfa va rămâne într-un vârf intermediar



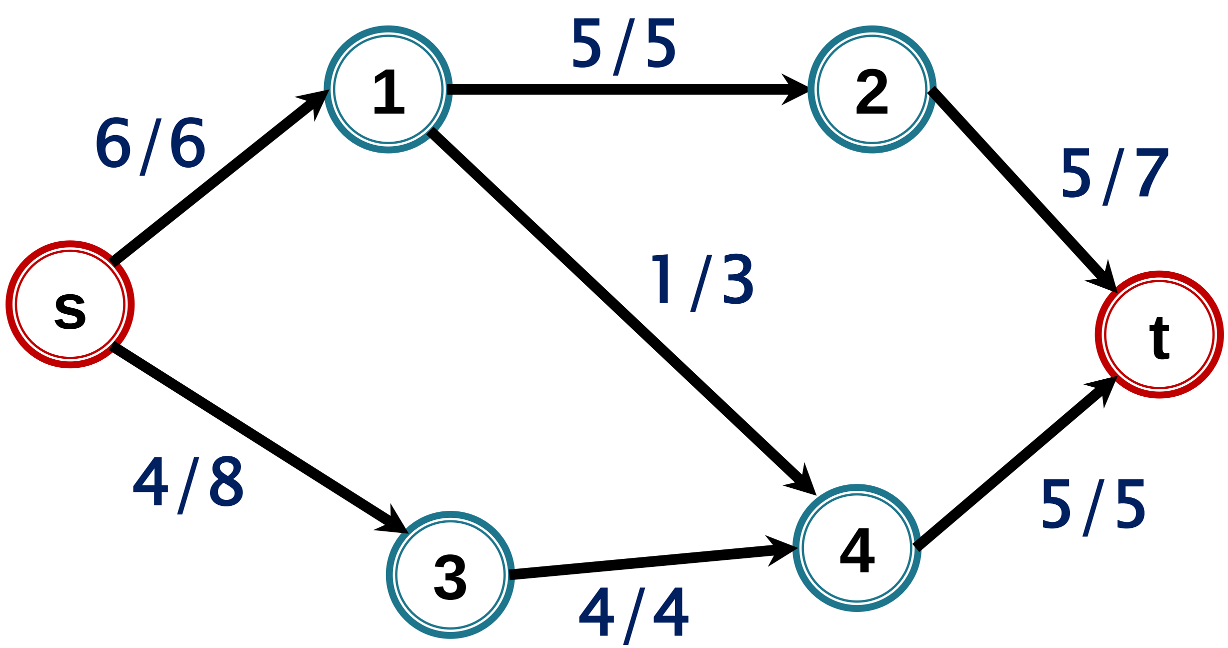
s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5



s
1
2
3
4
t
6/6
2+3/5
2+3/7
3−2/3
2+2/8
2+2/4
5/5



s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5



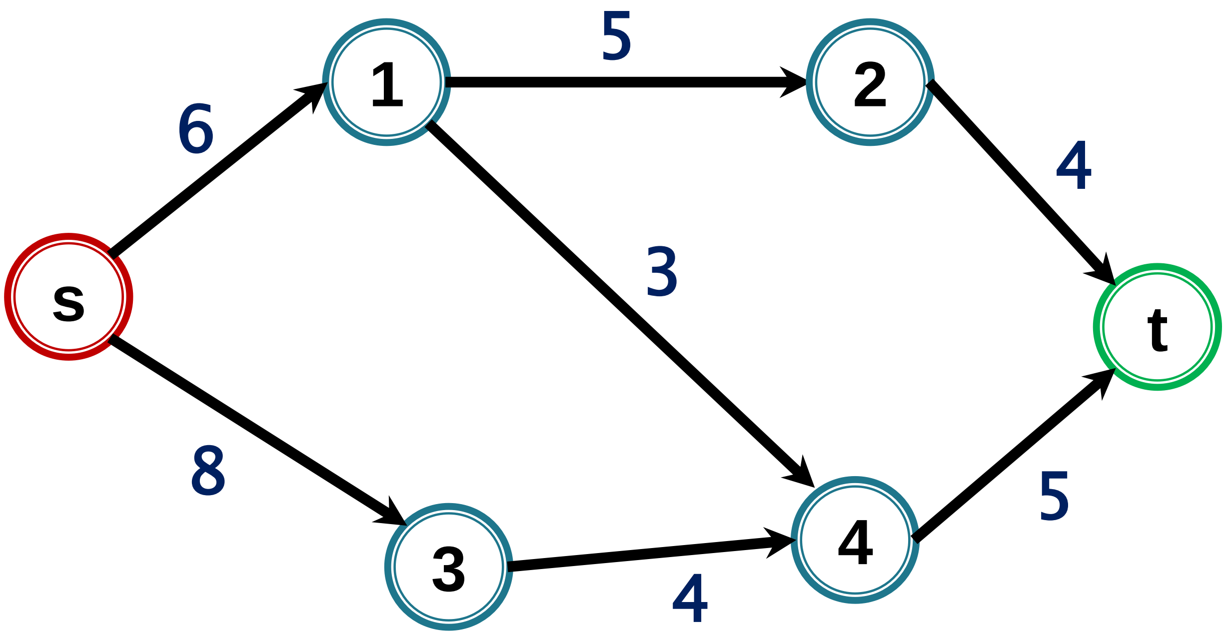
s
1
2
3
4
t
6/6
5/5
5/7
1/3
4/8
4/4
5/5

Definiţii

- **Reţea de transport** $N = (G, S, T, I, c)$ unde
  - $G = (V, E)$ – graf orientat cu
    - E nu conţine bucle şi arce multiple
    - $V = \mathbf{S} \cup \mathbf{I} \cup \mathbf{T}$

- **Reţea de transport** $N = (G, S, T, I, c)$ unde
  - $G = (V, E)$ – graf orientat cu
    - E nu conţine bucle şi arce multiple
    - $V = \mathbf{S} \cup \mathbf{I} \cup \mathbf{T}$
    - S, I , T disjuncte, nevide
    - S – **mulţimea surselor (intrărilor)**
    - T – **mulţimea destinaţiilor (ieşiri)**
    - I – **mulţimea vârfurilor intermediare**

- **Reţea de transport** $N = (G, S, T, I, c)$ unde
  - $G = (V, E)$ – graf orientat cu
    - E nu conţine bucle şi arce multiple
    - $V = \mathbf{S} \cup \mathbf{I} \cup \mathbf{T}$
    - S, I , T disjuncte, nevide
    - S – **mulţimea surselor (intrărilor)**
    - T – **mulţimea destinaţiilor (ieşiri)**
    - I – **mulţimea vârfurilor intermediare**
  - $c : E \rightarrow \mathbb{N}$ funcţia **capacitate** (cantitatea maximă care poate fi transportată prin fiecare arc)



s
1
2
3
4
t
6
8
5
3
4
4
5

- Un **flux** într-o reţea de transport $N = (G, S, T, I, c)$ este o funcţie $f : E \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile
  1) $0 \leq f(e) \leq c(e), \forall\ e \in E(G)$ *condiţia de **mărginire***

- Un **flux** într-o reţea de transport N = (G, S, T, I, c) este o funcţie f : E $\to \mathbb{N}$ cu proprietăţile

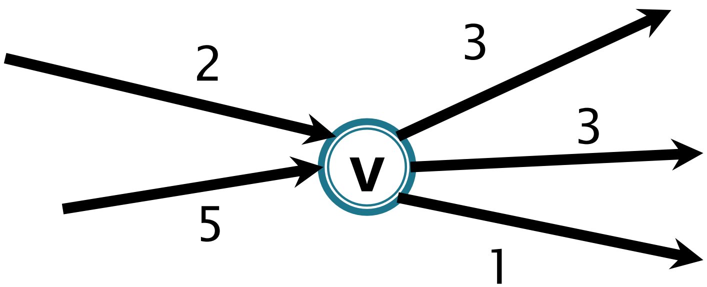
  1) $0 \leq f(e) \leq c(e), \forall\ e \in E(G)$ *condiţia de **mărginire***

  2) Pentru orice vârf **intermediar** $v \in I$

$$\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$

(fluxul total care intră în v = fluxul total care iese din v)

*condiţia de **conservare a fluxului***



- Notaţie

$$f^{+}(v) = \sum_{vu \in E} f(vu) \quad = \text{fluxul care iese din v}$$

$$f^{-}(v) = \sum_{uv \in E} f(uv) \quad = \text{fluxul care intră în v}$$

- Notaţie

$$f^{+}(v) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$ = fluxul care iese din v

$$f^{-}(v) = \sum_{uv \in E} f(uv)$$ = fluxul care intră în v

- Condiţia de **conservare a fluxului** devine:

$$f^{-}(v) = f^{+}(v), \forall v \in I$$

- **Valoarea fluxui** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = \sum_{s \in S} \left[f^{+}(s) - f^{-}(s) \right]$$

- **Valoarea fluxui** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = \sum_{s \in S} \left[f^{+}(s) - f^{-}(s) \right]$$

- Are loc relaţia

$$val(f) = \sum_{s \in S} \left[f^{+}(s) - f^{-}(s) \right] = \sum_{t \in T} \left[f^{-}(t) - f^{+}(t) \right]$$

(rezultă din condiţia de conservare a fluxului)

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Un flux f* se numeşte **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \text{ este flux în N}\}$$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Un flux f* se numeşte **flux maxim în N** dacă

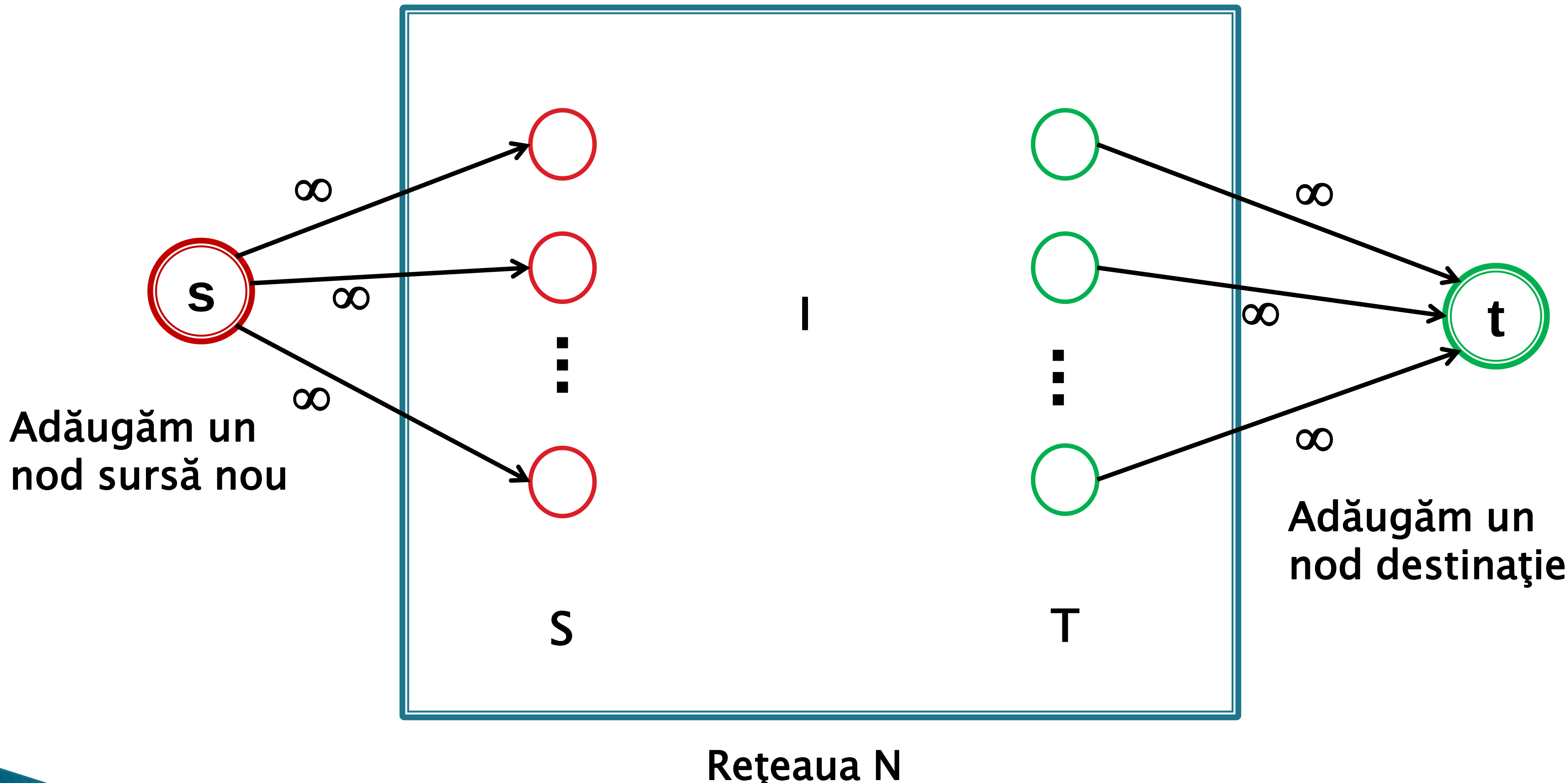
$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \text{ este flux în N}\}$$

- **Observaţie**: Orice reţea admite cel puţin un flux, spre exemplu fluxul vid:

  $f(e) = 0, \forall e \in E$

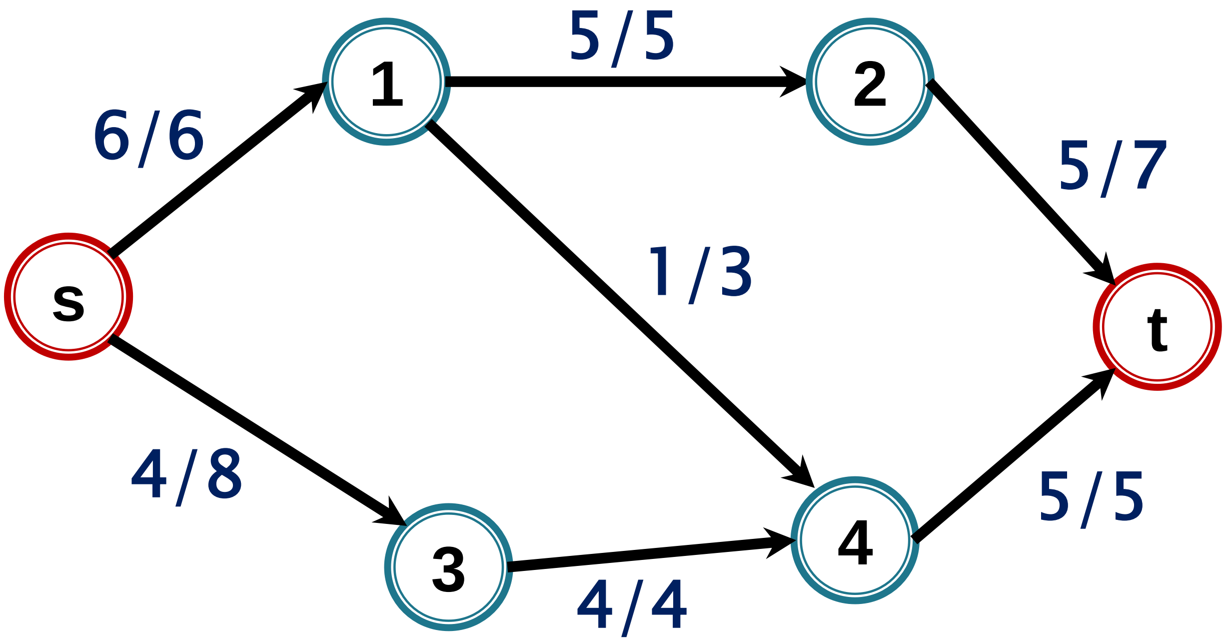
- **Ipoteze pentru reţeaua N**
  - O singură sursă **S = {s}**
  - O singură destinaţie **T = {t}**
  - $\mathbf{d^-(s) = 0}$ – în sursă nu intră arce
  - $\mathbf{d^+(t) = 0}$ – din destinaţie nu ies arce

- **Ipotezele nu sunt restrictive**, orice reţea poate fi transformată într-o reţea echivalentă de acest tip



- **Ipoteze pentru reţeaua N**
  - O singură sursă **S = {s}**
  - O singură destinaţie **T = {t}**
  - **$d^-(s) = 0$** – în sursă nu intră arce
  - **$d^+(t) = 0$** – din destinaţie nu ies arce
- În acest caz avem

$$val(f) = f^+(s) = f^-(t)$$



val(f) = 6 + 4 = 5 + 5 =10

- Fie N = (G, {s}, {t}, l, c) o reţea şi

$$P = [s=v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k=t]$$

un s-t **lanţ** în **graful neorientat suport** asociat lui G.

- Fie N = (G, {s}, {t}, I, c) o reţea şi

  $P = [s=v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k=t]$

un s-t **lanţ** în graful neorientat suport asociat lui G.

Dacă

- $e_i = v_{i-1}v_i \in E(G)$, e_i s.n **arc direct** (**înainte**) în P
- $e_i = v_iv_{i-1} \in E(G)$, e_i s.n **arc invers** (**înapoi**) în P

- Fie N = (G, {s}, {t}, l, c) o reţea şi

  $P = [s=v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k=t]$

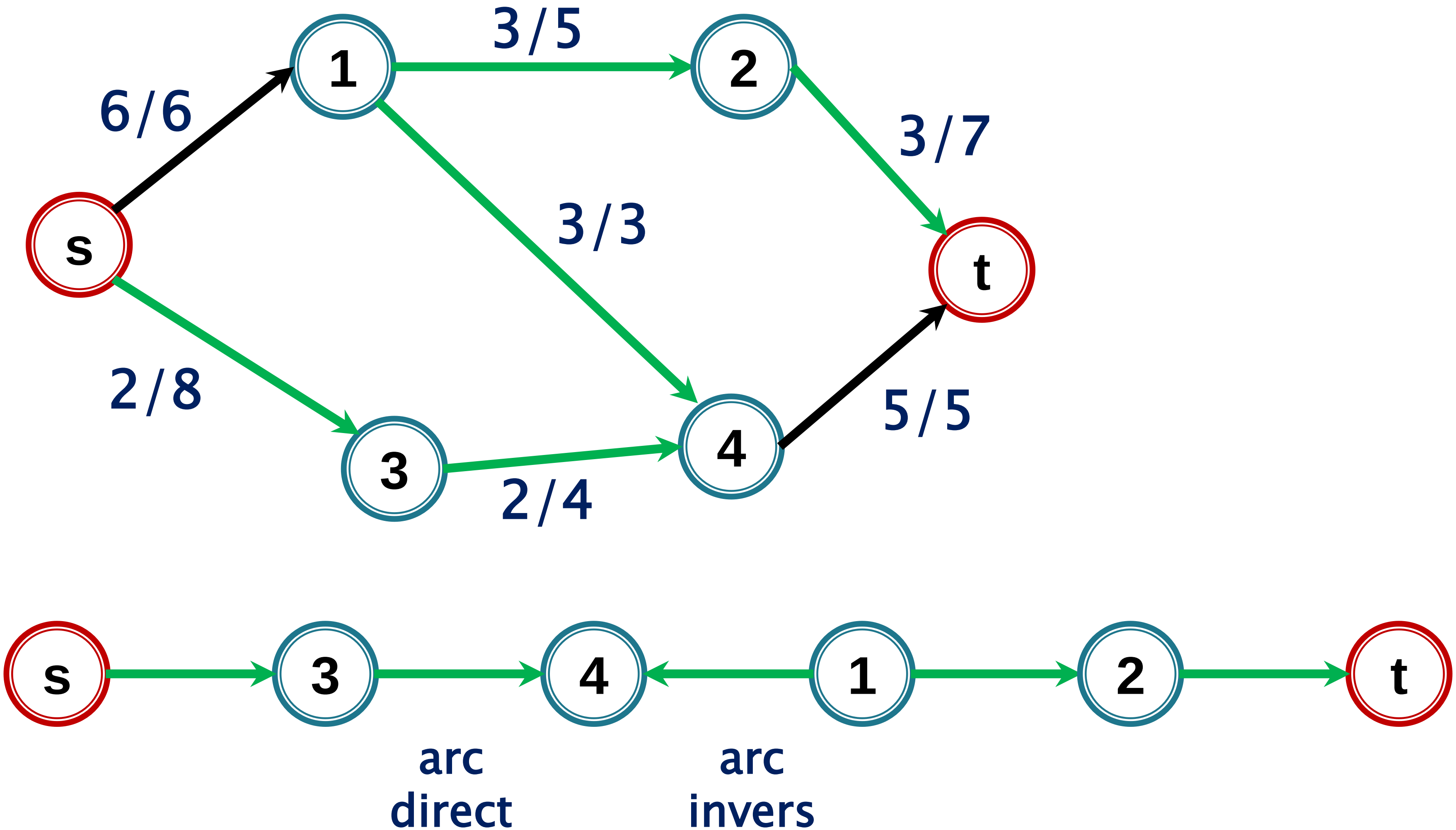
un s-t **lanţ** în graful neorientat suport asociat lui G.

Dacă

- $e_i = v_{i-1}v_i \in E(G)$, e_i s.n **arc direct** (**înainte**) în P
- $e_i = v_iv_{i-1} \in E(G)$, e_i s.n **arc invers** (**înapoi**) în P

- **Dacă nu există confuzii vom omite arcele în descrierea lanţului P**

  $P = [s=v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k=t]$

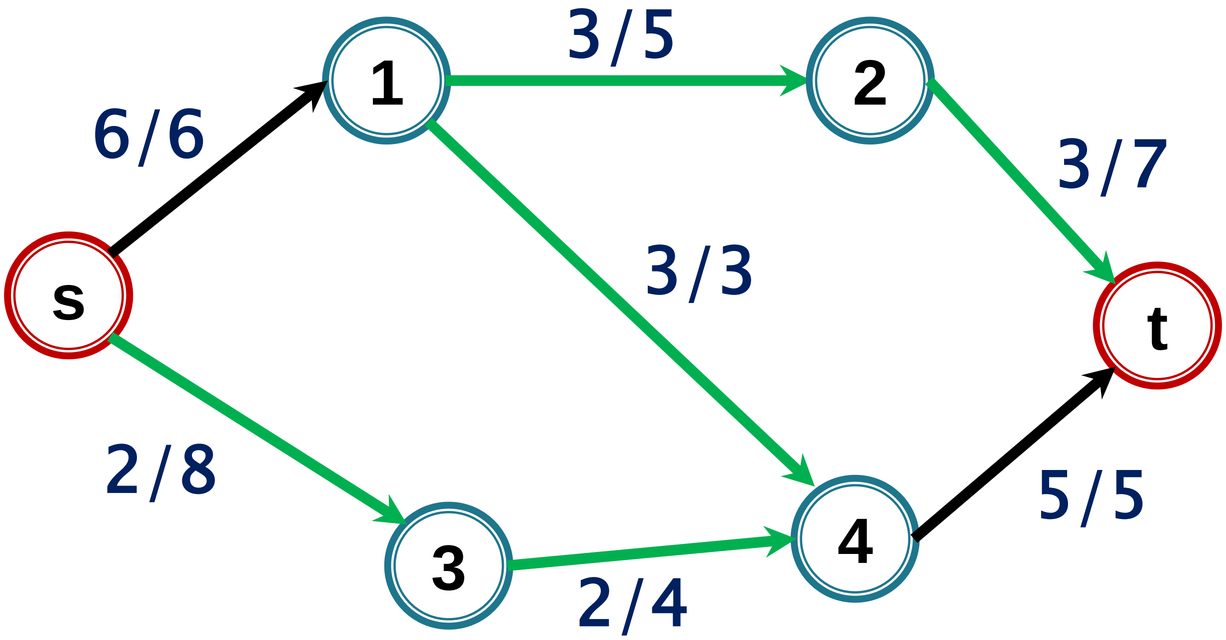

6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
5/5
2/4
s
1
2
3
4
t
arc
direct
arc
invers

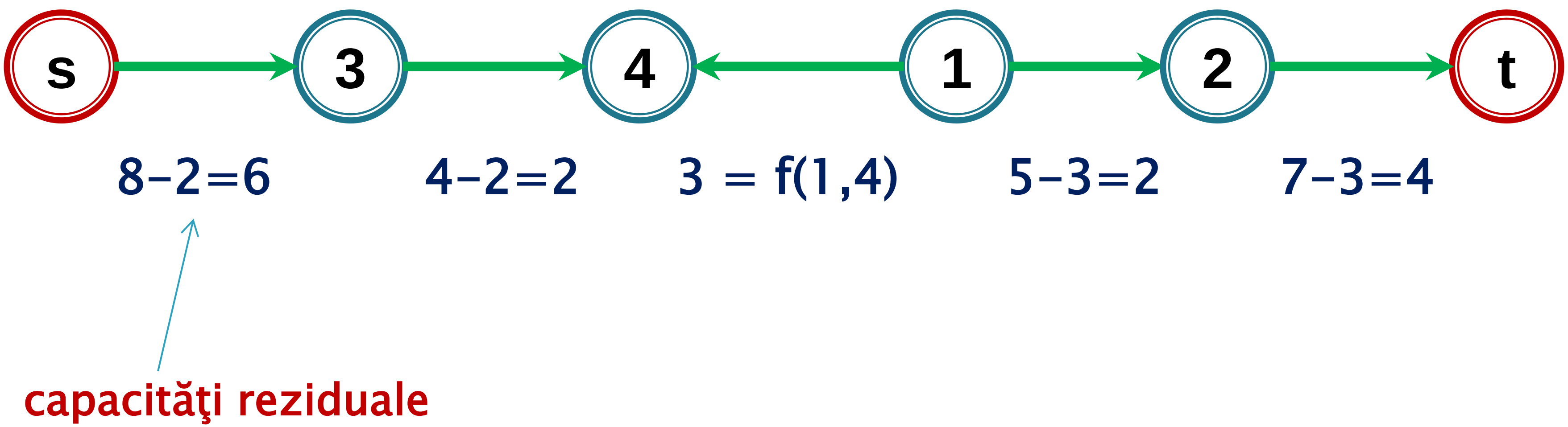
- Fie N reţea, f flux în N, P un s-t lanţ
- Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P:

- Fie N reţea, f flux în N, P un s-t lanţ
- Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P:

$$i_P(e) = \begin{cases} c(e) - f(e), & \textbf{dacă } e \textbf{ este arc direct în } P \\ f(e), & \textbf{dacă } e \textbf{ este arc invers în } P \end{cases}$$

= cu cât mai poate fi modificat fluxul pe arcul e, de-a lungul lanţului P


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5


s
3
4
1
2
t
8−2=6
4−2=2
3 = f(1,4)
5−3=2
7−3=4
capacităţi reziduale

- **Capacitatea reziduală** a lanţui P este

$$i(P) = \min\{i_P(e) \mid e \in E(P)\}$$

= cu cât mai poate fi modificat fluxul de-a lungul lanţului P

i(P) = 2

- **Capacitatea reziduală** a lanţui P este

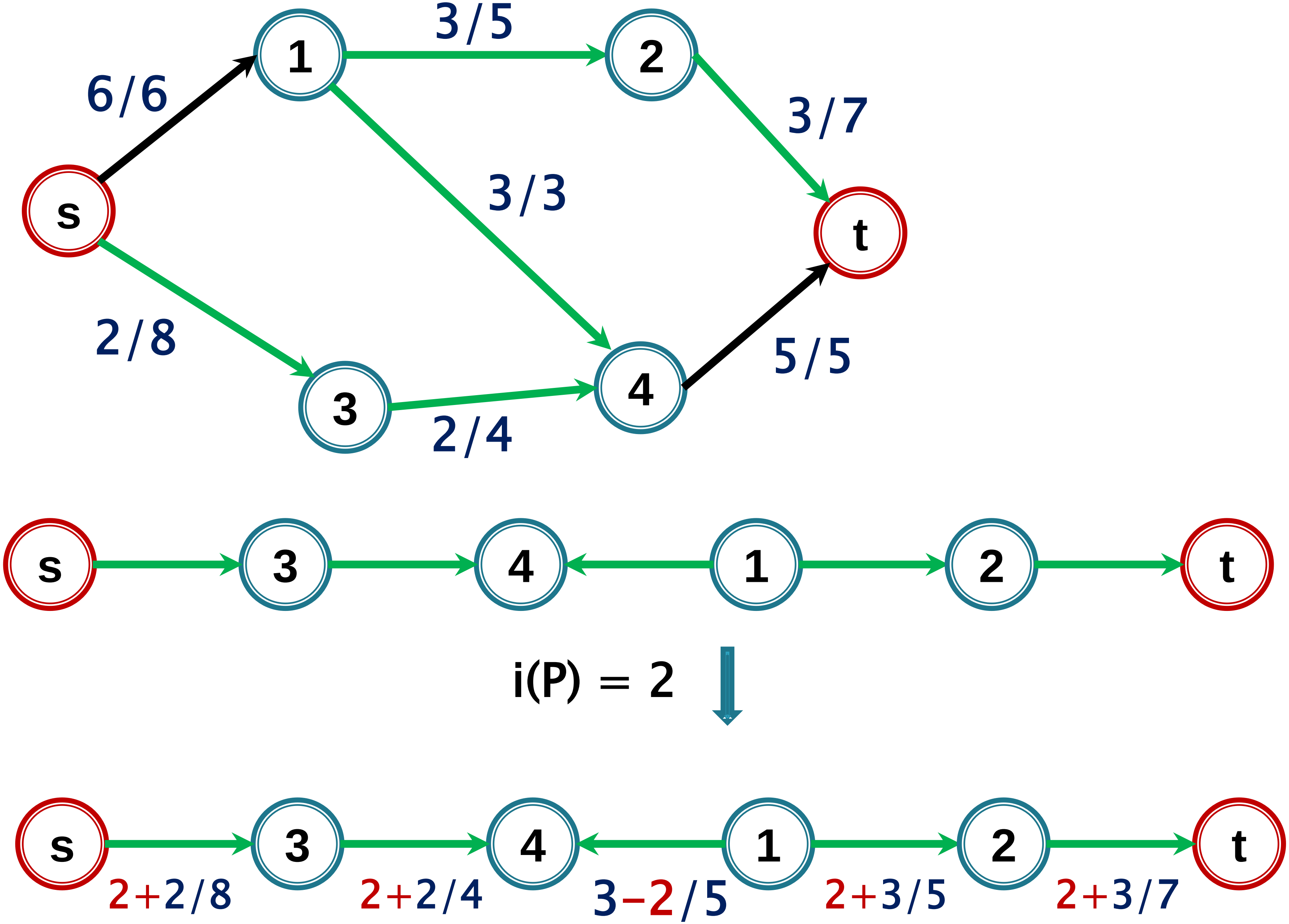
$$i(P) = \min\{i_P(e) \mid e \in E(P)\}$$

= cu cât mai poate fi modificat fluxul de-a lungul lanţului P

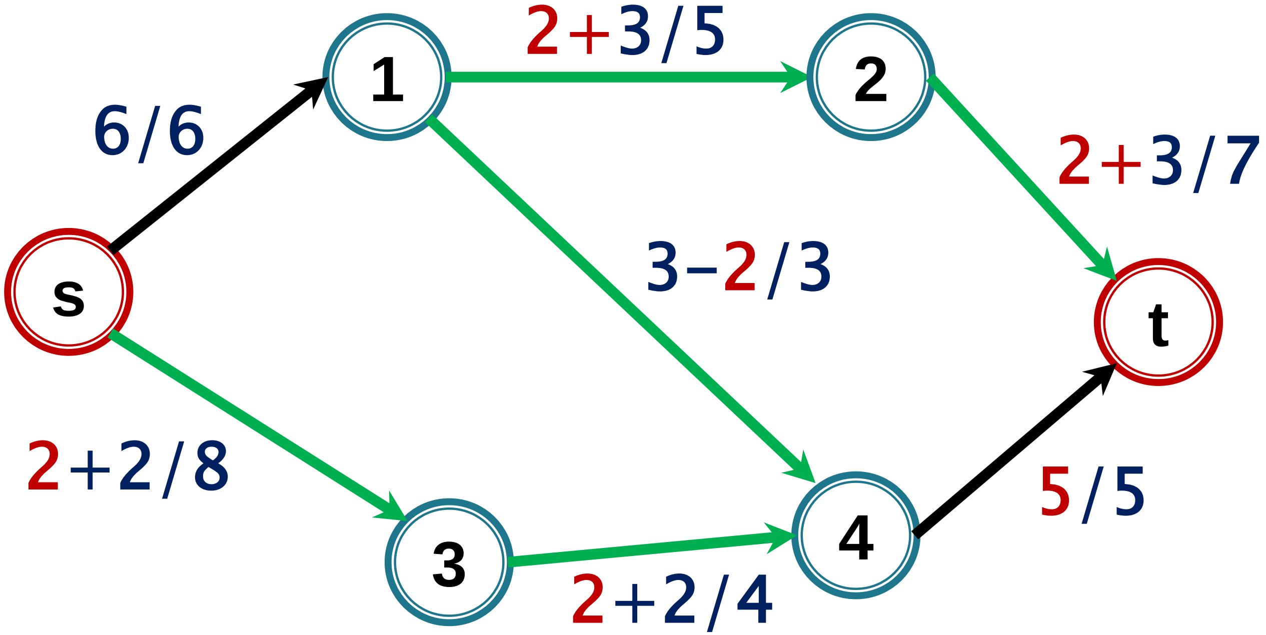
- P se numeşte
  - **f-saturat** dacă i(P) = 0
  - **f-nesaturat** dacă i(P) ≠ 0

- Fie P un s-t lanţ f-nesaturat.
- **Fluxul revizuit de-a lungul lanţului P** se defineşte ca fiind f' : E $\rightarrow \mathbb{N}$,

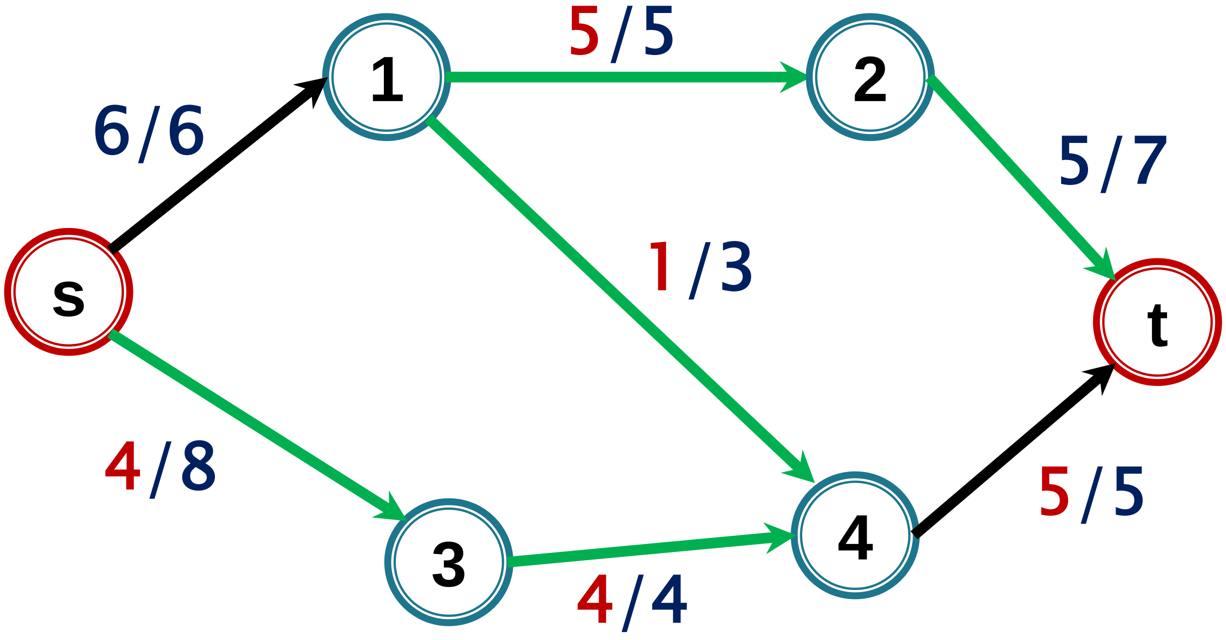
$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + i(P), & \textbf{dacă } e \textbf{ este arc direct în } P \\ f(e) - i(P), & \textbf{dacă } e \textbf{ este arc invers în } P \\ f(e), & \textbf{altfel} \end{cases}$$



s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5
i(P) = 2
2+2/8
2+2/4
3−2/5
2+3/5
2+3/7



s
1
2
3
4
t
6/6
2+3/5
2+3/7
3−2/3
2+2/8
2+2/4
5/5



Fluxul după revizuirea de-a lungul lanţului P

- Fie P un s-t lanţ f-nesaturat.
- **Fluxul revizuit de-a lungul lanţului P** se defineşte ca fiind f' : E $\rightarrow \mathbb{N}$,

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + i(P), & \textbf{dacă } e \textbf{ este arc direct în } P \\ f(e) - i(P), & \textbf{dacă } e \textbf{ este arc invers în } P \\ f(e), & \textbf{altfel} \end{cases}$$

- Are loc relaţia

$$val(f') = val(f) + i(P) \geq val(f) + 1$$

Teoremă

Fie N o reţea şi f un flux în N. Avem echivalenţa:

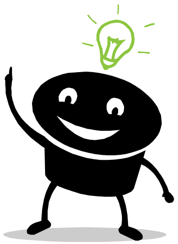
f este **flux maxim** în N $\Leftrightarrow$

nu există niciun s-t lanţ **f-nesaturat** în N

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim – algoritmul FORD – FULKERSON

- Fie $f \equiv 0$ fluxul vid
- Cât timp **există un lanţ f-nesaturat P în G**
  - determină un astfel de lanţ P
  - revizuieşte fluxul f de-a lungul lanţului P
- Afişează f

Cum determinăm un lanţ f-nesaturat?



Prin parcurgerea grafului pornind din vârful s şi considerând doar arce cu capacitatea reziduală pozitivă (în raport cu lanţurile construite prin parcurgere, memorate cu vectorul tata)

Implementarea algoritmului FORD-FULKERSON

(Algoritmul EDMONDS-KARP)

Algoritmul Ford-Fulkerson

Schema:

Algoritmul Ford-Fulkerson

<u>Schema</u>:

initializeaza_flux_nul()

Algoritmul Ford-Fulkerson

Schema:

initializeaza_flux_nul()

cat timp (**construieste_s-t_lant_nesat**()=true) executa

Algoritmul Ford-Fulkerson

Schema:

initializeaza_flux_nul()

cat timp (**construieste_s-t_lant_nesat**()=true) executa

    revizuieste_flux_lant()

Algoritmul Ford-Fulkerson

<u>Schema</u>:

initializeaza_flux_nul()

cat timp (**construieste_s-t_lant_nesat**()=true) executa

    revizuieste_flux_lant()

afiseaza_flux()

Implementare. Algoritmul Edmonds-Karp

construieste_s-t_lant_nesat()

Implementare. Algoritmul Edmonds-Karp

construieste_s-t_lant_nesat() – folosind parcurgerea BF din s

Implementare. Algoritmul Edmonds-Karp

construieste_s-t_lant_nesat() - folosind parcurgerea BF din s

- sunt considerate în parcurgere **doar arce pe care se poate modifica fluxul**, adică având capacitate reziduală pozitivă

revizuieste_flux_lant

revizuieste_flux_lant

- fie P s-t lanțul găsit cu BF

revizuieste_flux_lant

- fie P s-t lanțul găsit cu BF
- calculăm i(P)
-
  -
  -

revizuieste_flux_lant

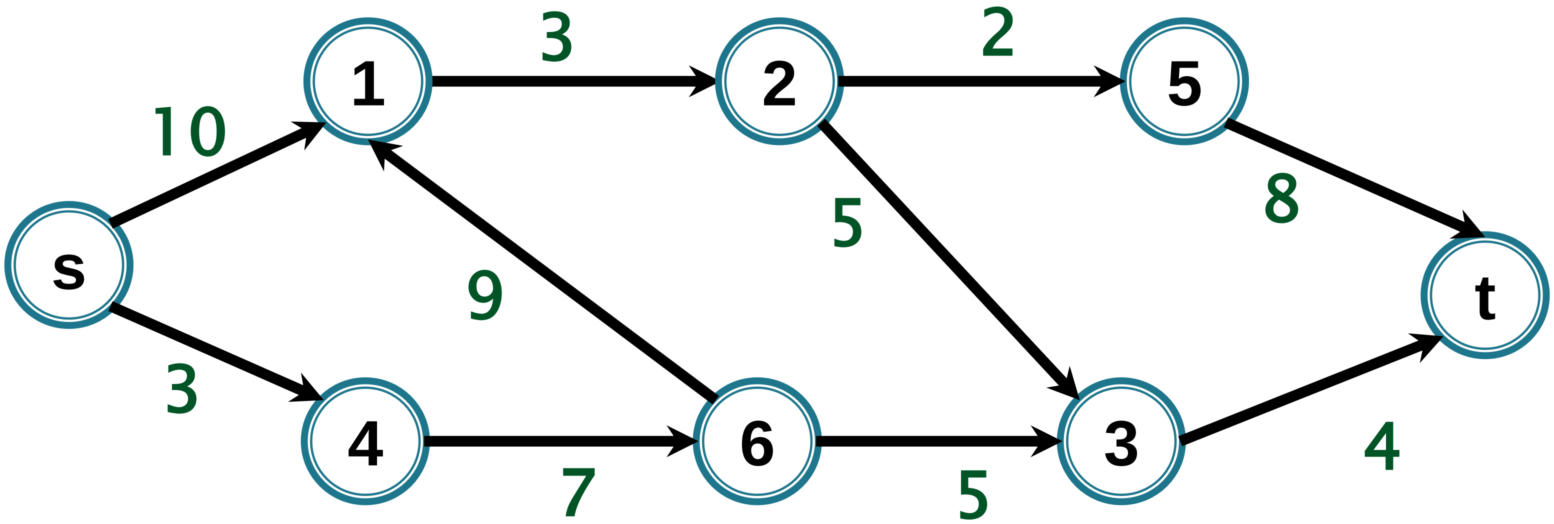
- fie P s-t lanțul găsit cu BF
- calculăm i(P)
- pentru fiecare arc *e* al lanțului P
    -
    -

revizuieste_flux_lant

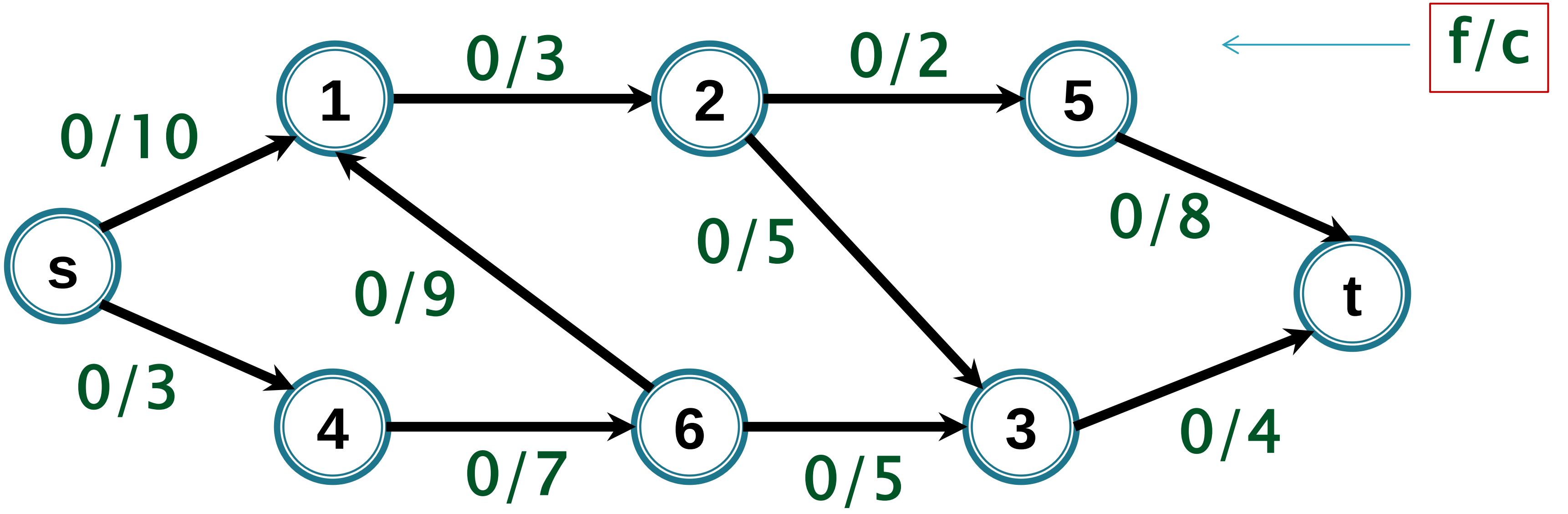
- fie P s-t lanțul găsit cu BF
- calculăm i(P)
- pentru fiecare arc *e* al lanțului P
  - creștem cu i(P) fluxul pe *e* dacă este arc direct
  -

revizuieste_flux_lant

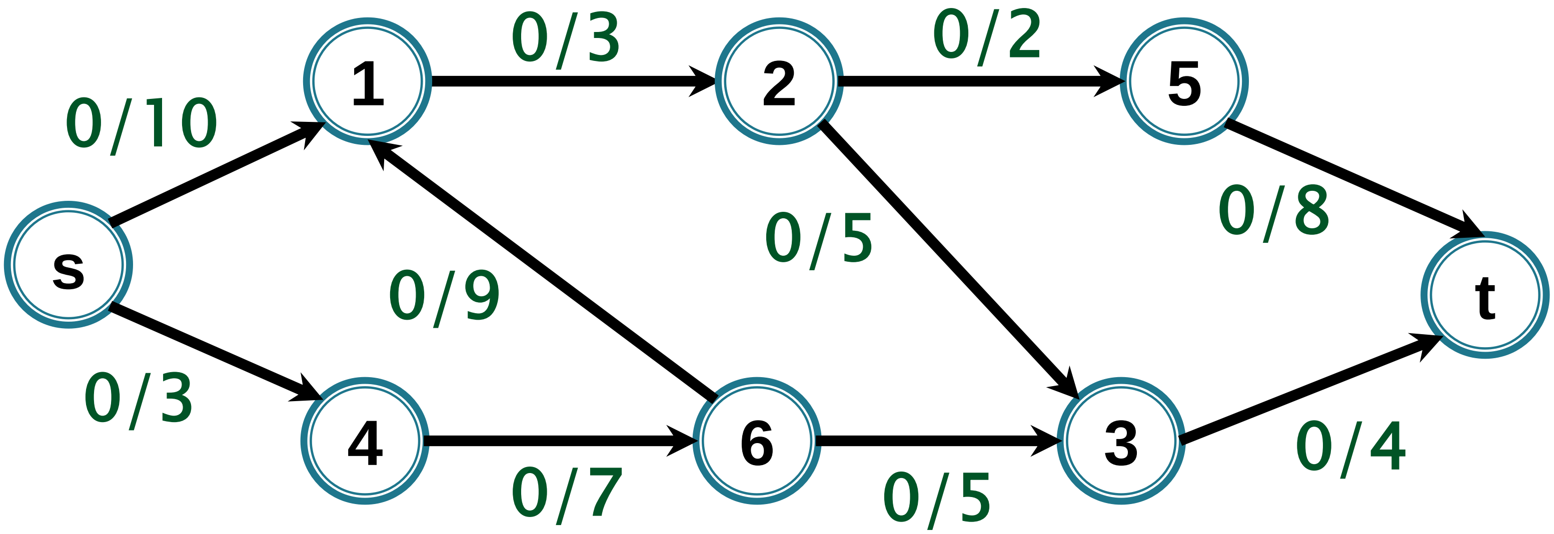
- **fie P s-t lanțul găsit cu BF**
- **calculăm i(P)**
- **pentru fiecare arc *e* al lanțului P**
  - creștem cu i(P) fluxul pe *e* dacă este arc direct
  - scădem cu i(P) fluxul pe *e* dacă este arc invers


s
1
2
5
t
4
6
3
10
3
2
8
5
9
3
7
5
4

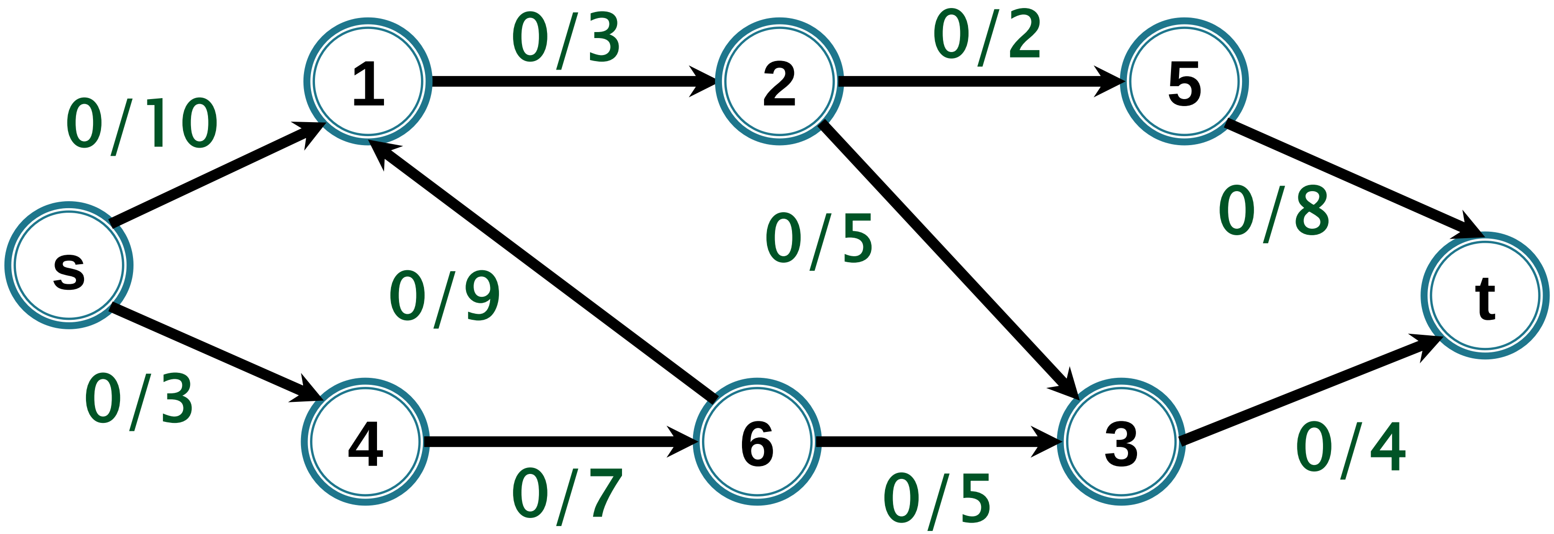
initializeaza_flux_nul


f/c
s
1
2
3
4
5
6
t
0/10
0/3
0/3
0/2
0/8
0/5
0/9
0/7
0/5
0/4

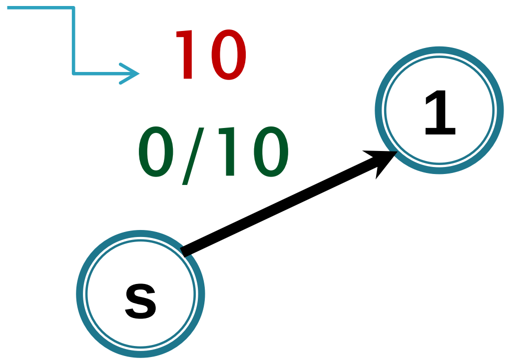
construieste_s-t_lant_nesat folosind parcurgerea BF din s

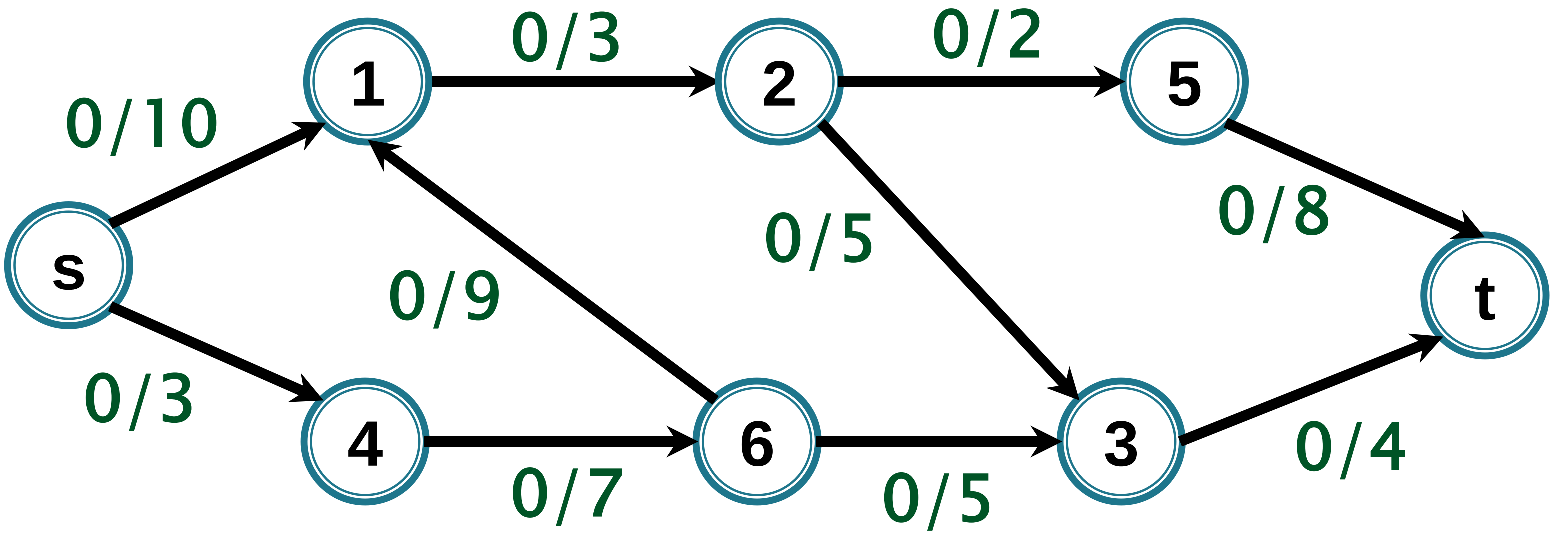

0/3
0/2
0/10
1
2
5
0/8
0/5
s
0/9
t
0/3
4
6
3
0/4
0/7
0/5

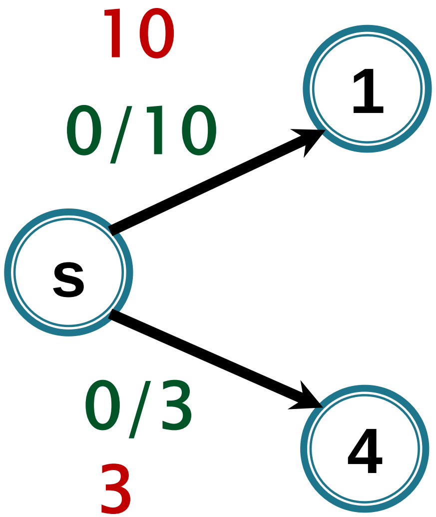

s

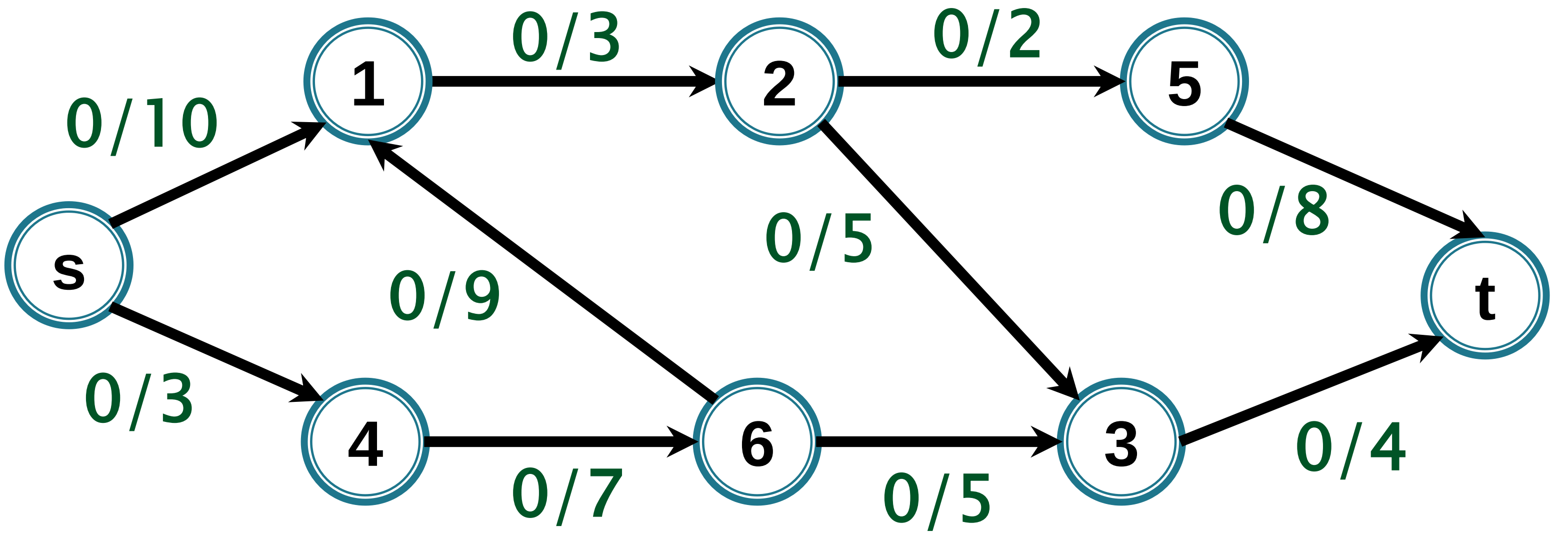


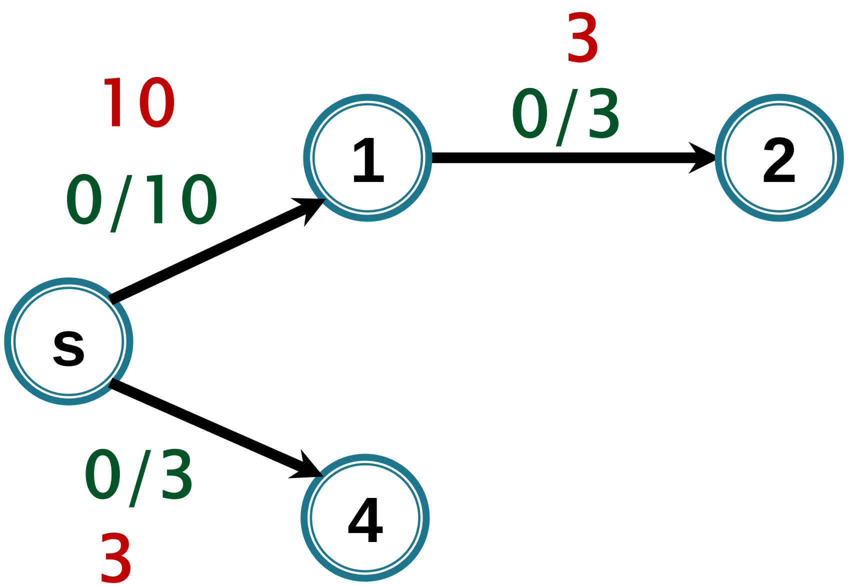
Capacitatea reziduală

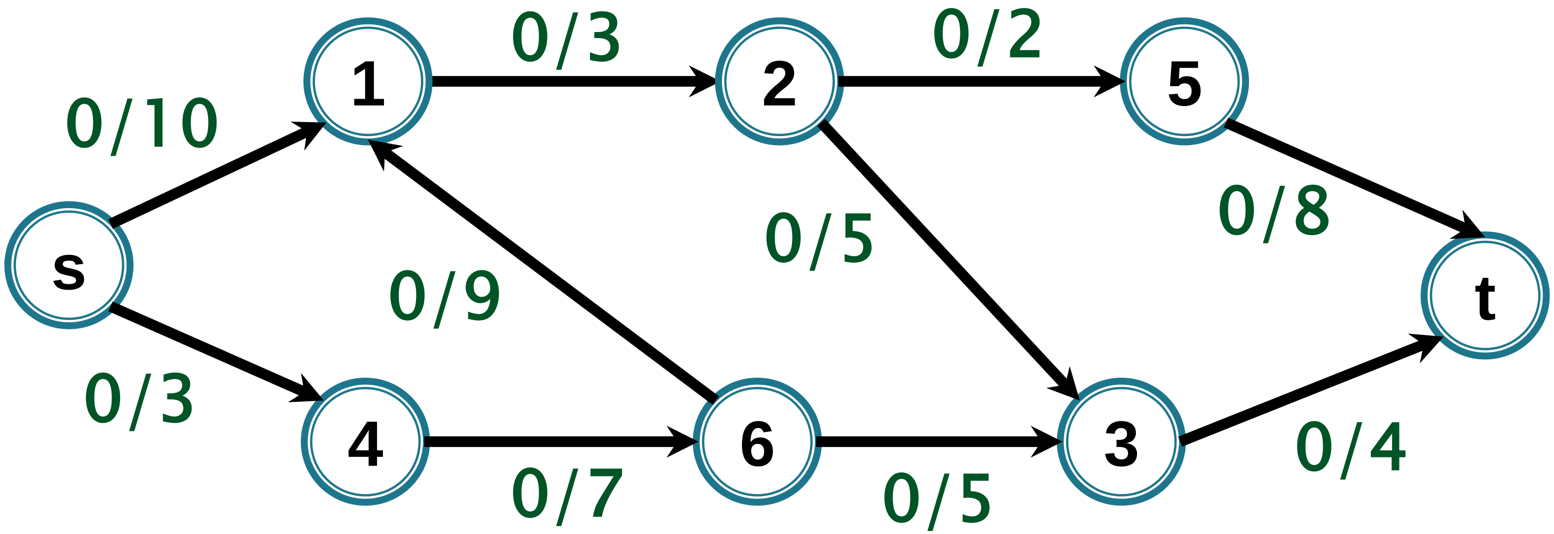


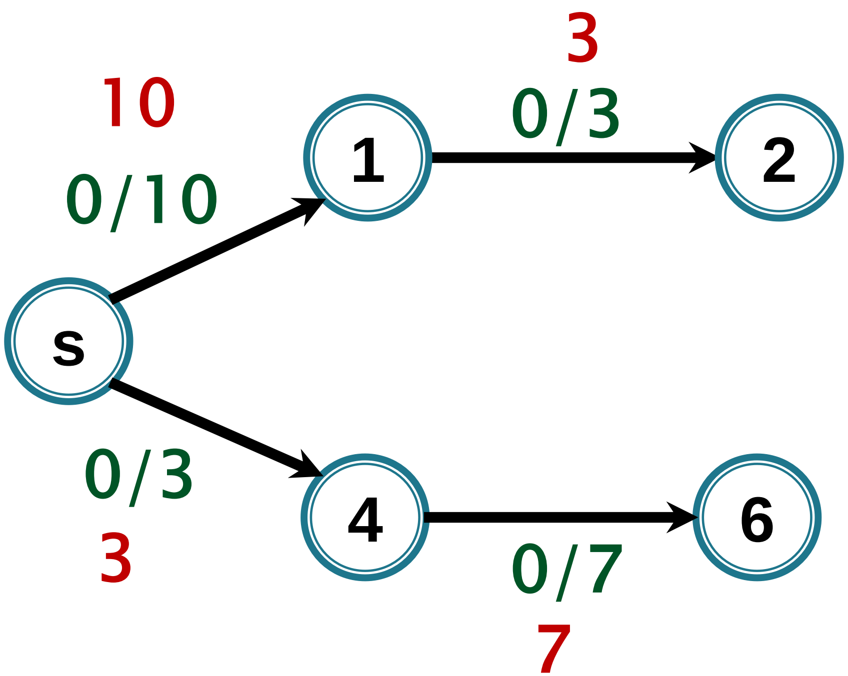

0/3
0/2
0/10
1
2
5
s
0/8
0/5
t
0/9
0/3
4
6
3
0/4
0/7
0/5

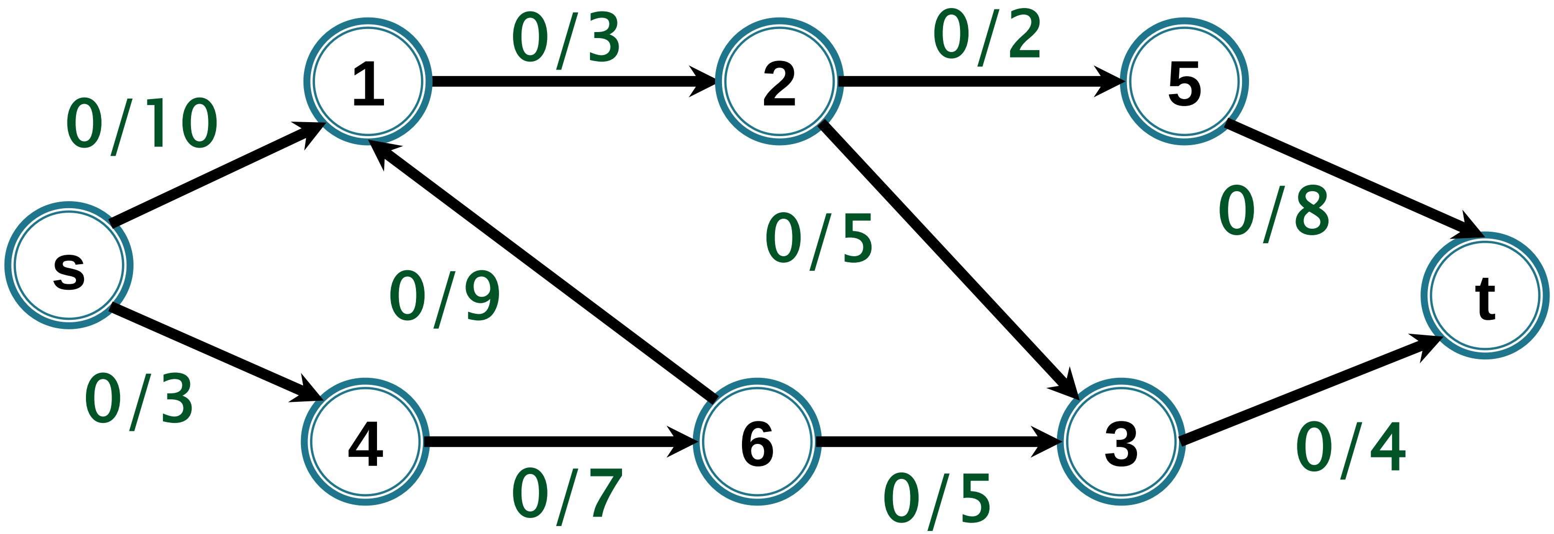

10
0/10
1
s
0/3
4
3


0/10
0/3
0/3
0/2
0/5
0/8
0/9
0/7
0/5
0/4
s
1
2
5
t
4
6
3

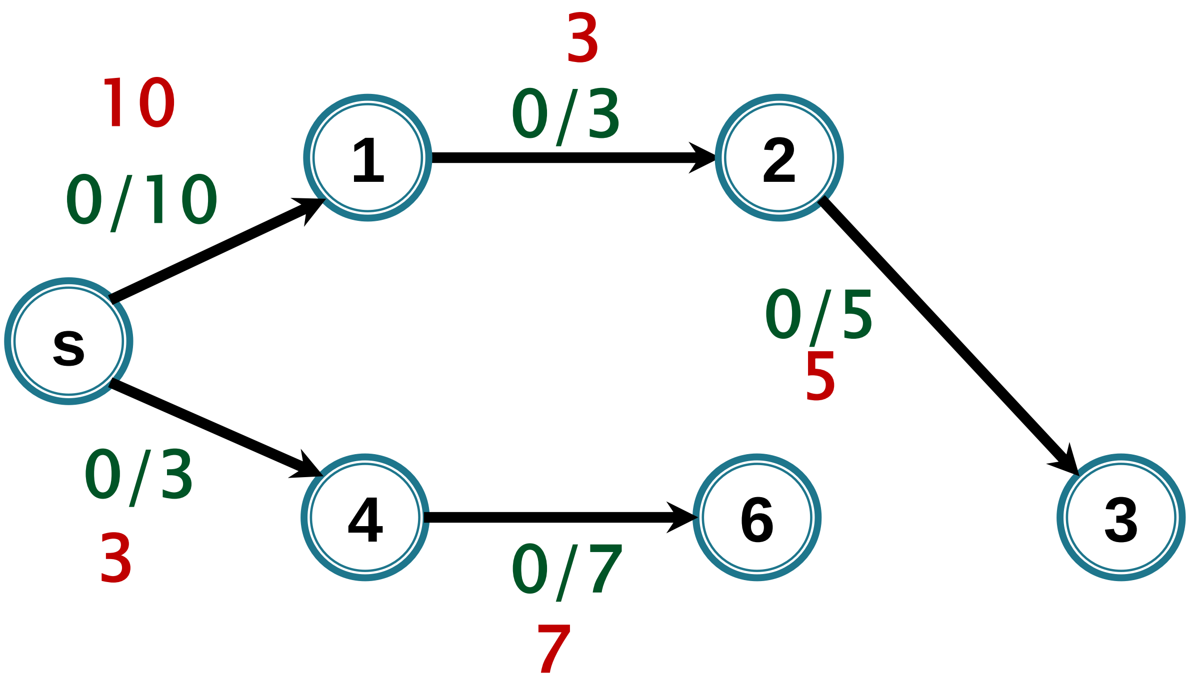

10
0/10
3
0/3
0/3
3
s
1
2
4


0/10
0/3
0/2
1
2
5
s
0/5
0/8
0/9
t
0/3
4
6
3
0/4
0/7
0/5

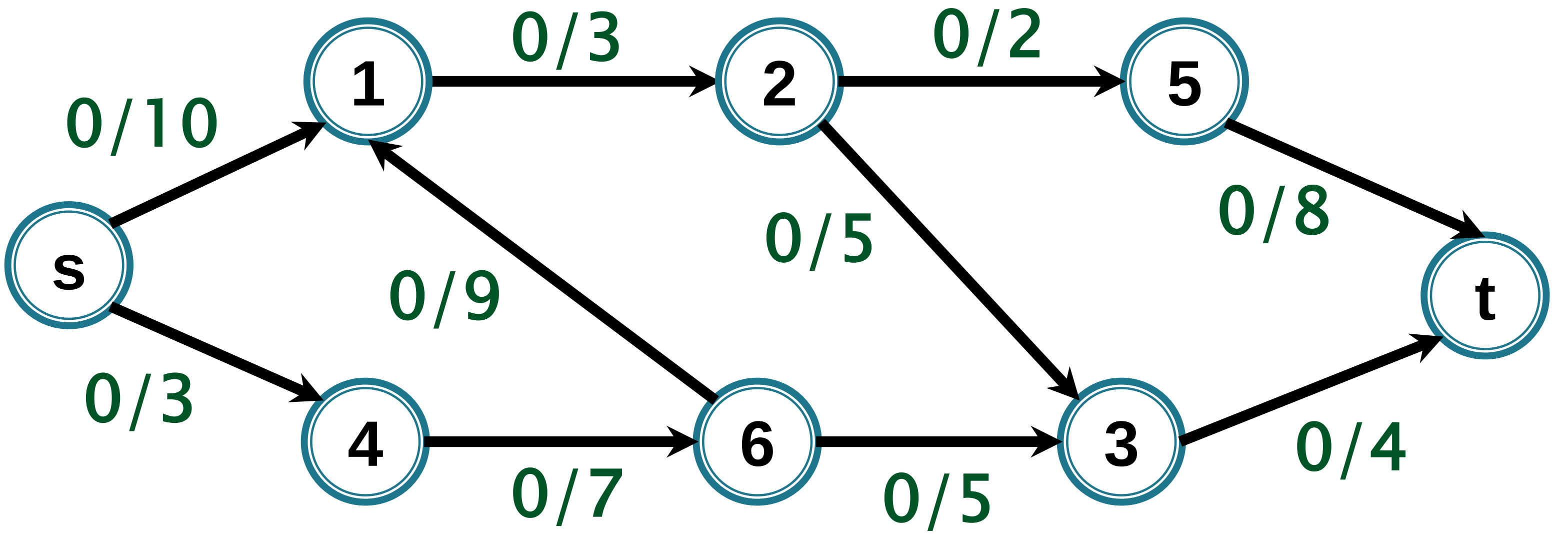

3
10
0/3
1
2
0/10
s
0/3
4
6
3
0/7
7

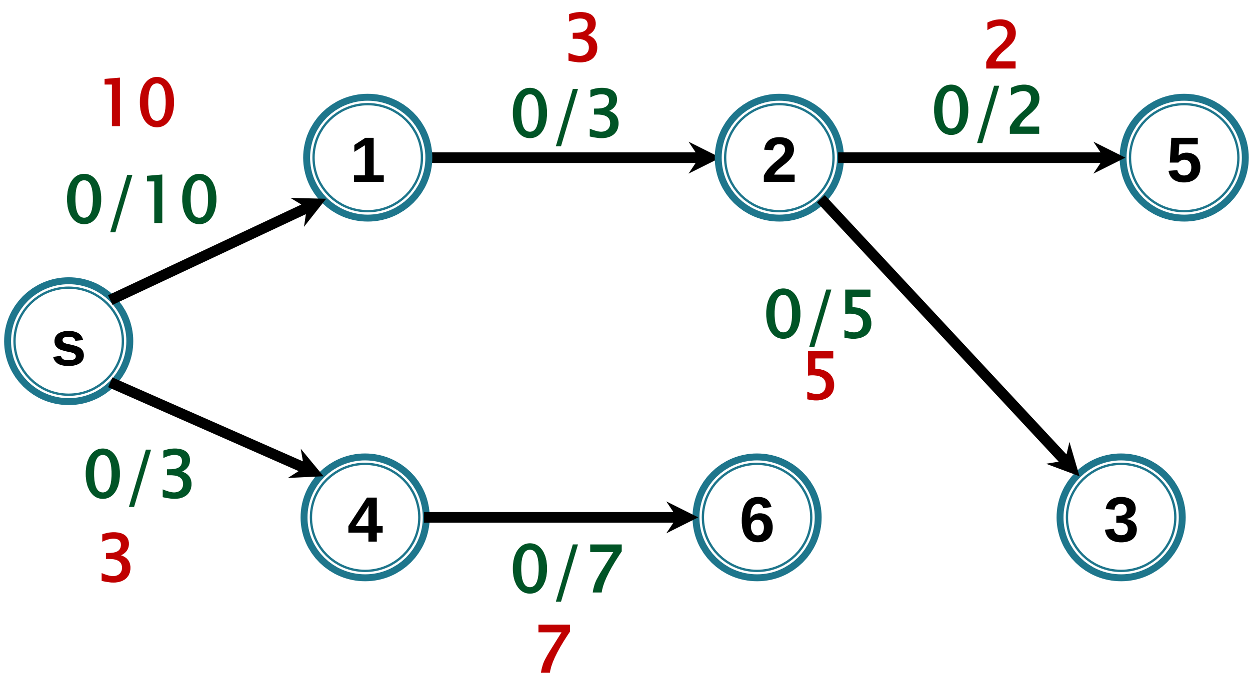


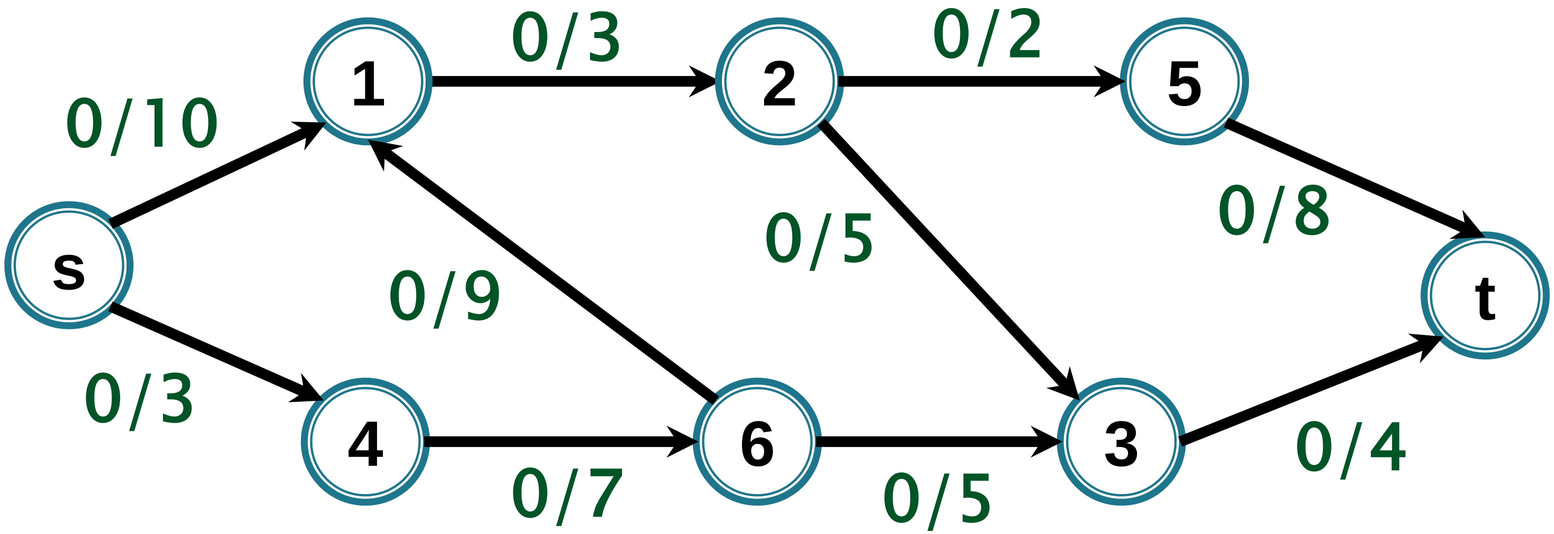
s
1
2
5
t
4
6
3
0/10
0/3
0/2
0/8
0/5
0/9
0/3
0/7
0/5
0/4

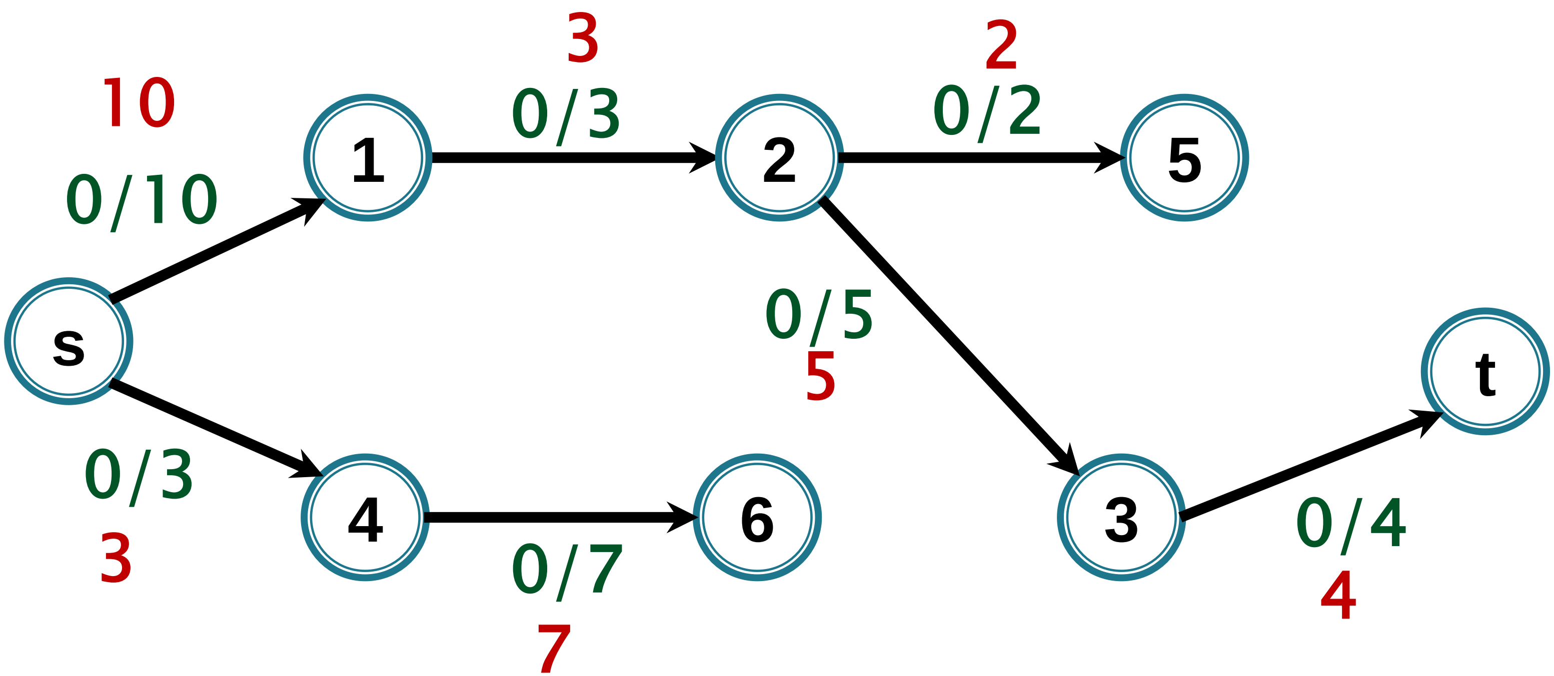


s
1
2
4
6
3
3
0/3
10
0/10
0/5
5
0/3
3
0/7
7

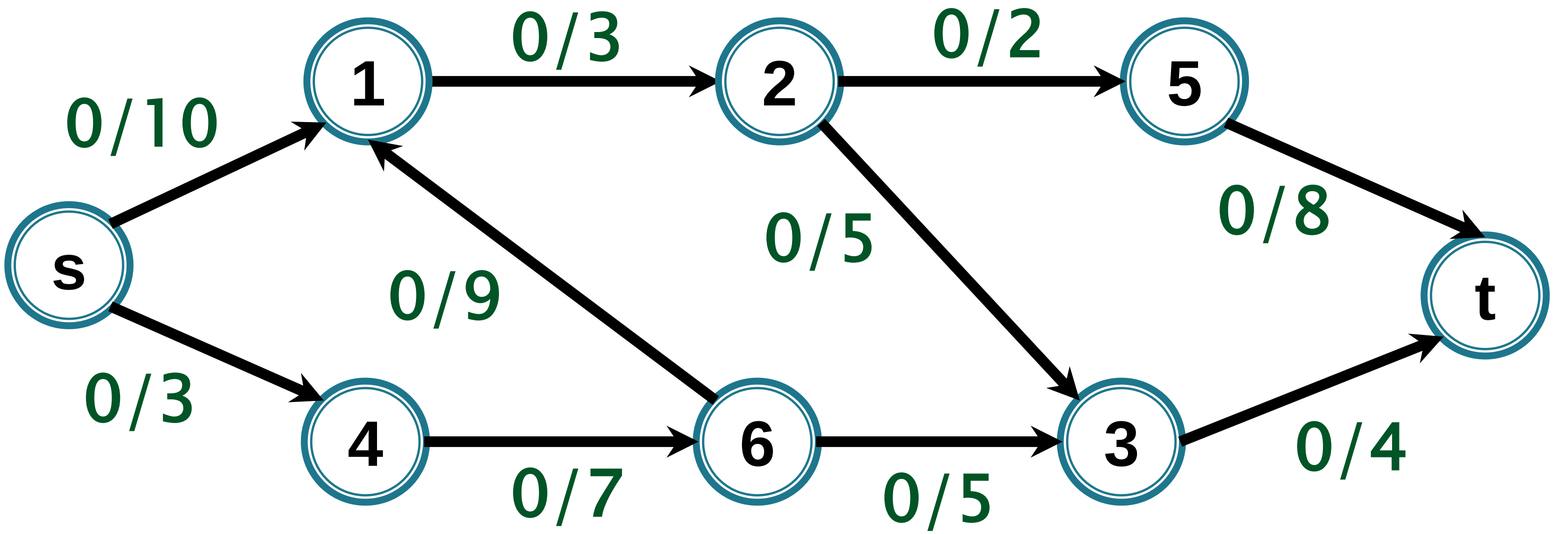

s
1
2
5
t
4
6
3
0/10
0/3
0/2
0/8
0/5
0/9
0/3
0/7
0/5
0/4

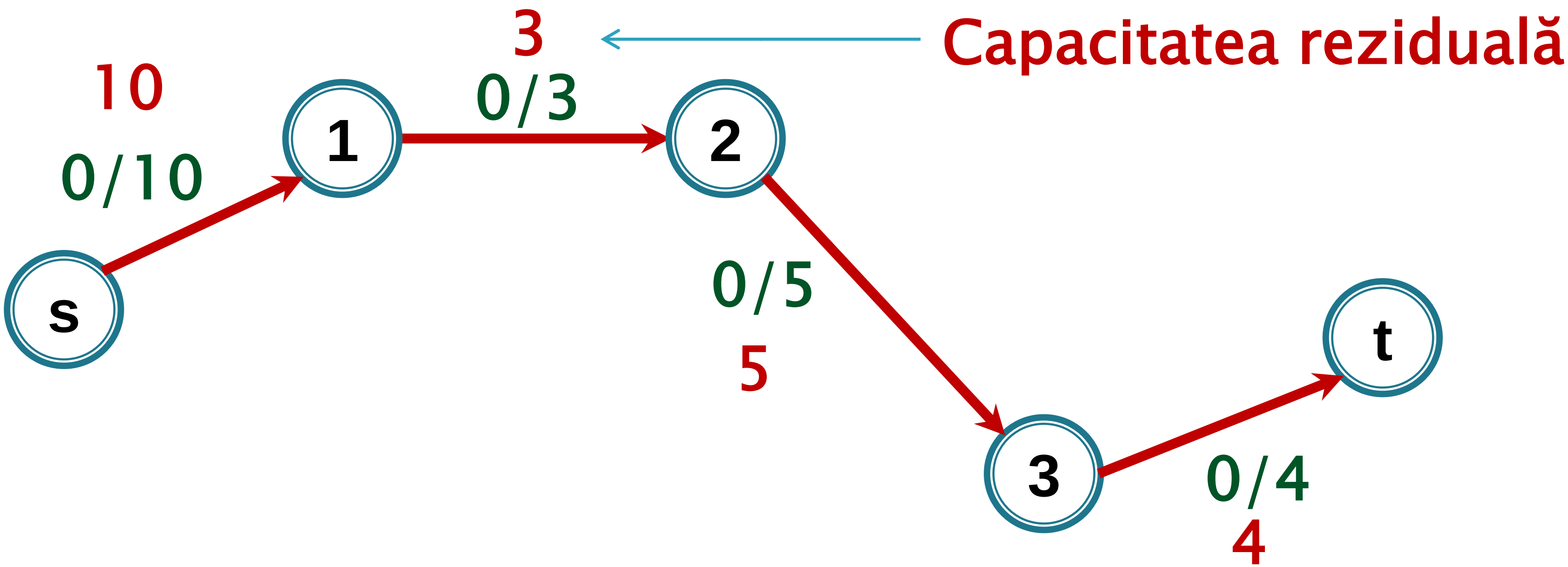

s
1
2
5
4
6
3
10
0/10
3
0/3
2
0/2
0/5
5
0/3
3
0/7
7

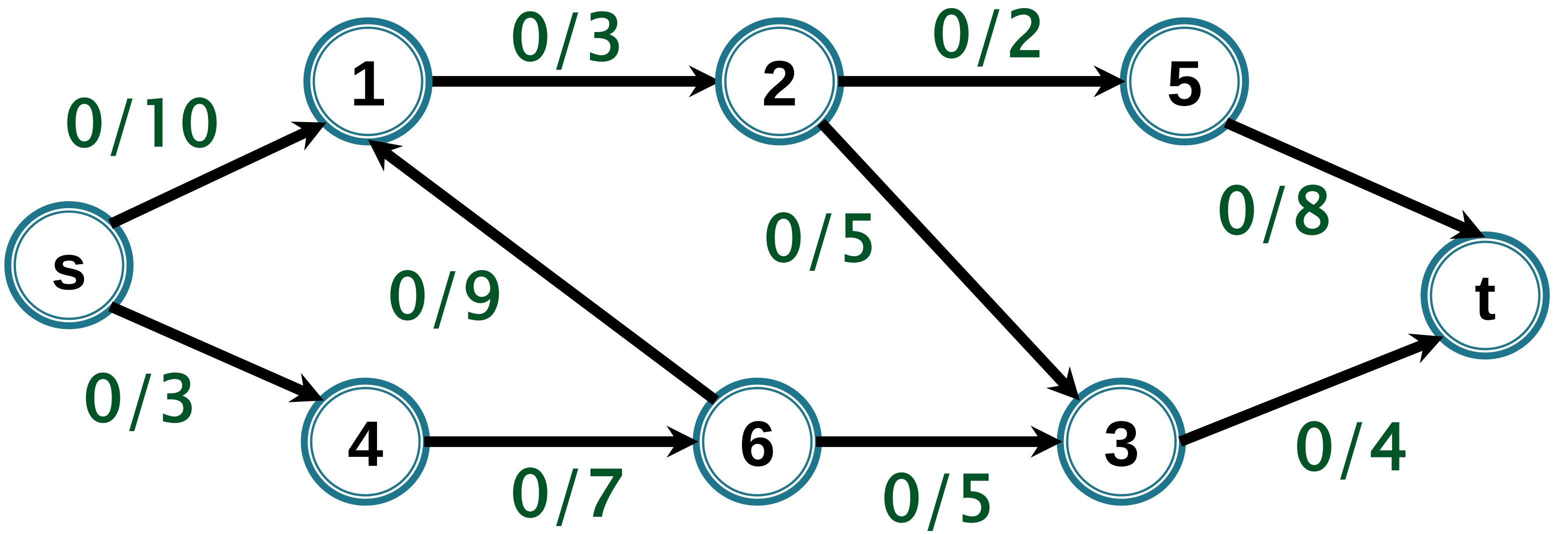

0/3
0/2
0/10
1
2
5
0/8
0/5
s
0/9
t
0/3
4
6
3
0/4
0/7
0/5

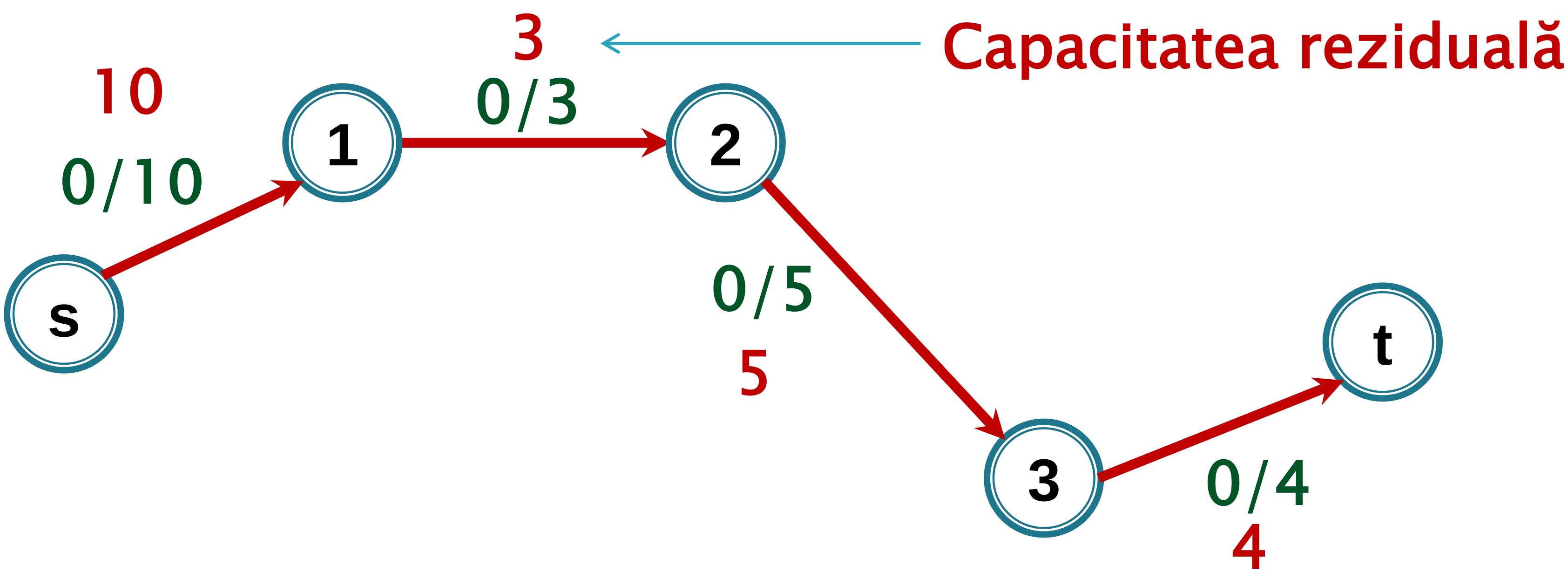

3
2
10
0/3
0/2
0/10
1
2
5
0/5
s
5
t
0/3
4
6
3
0/4
3
0/7
4
7

revizuieste_flux_lant

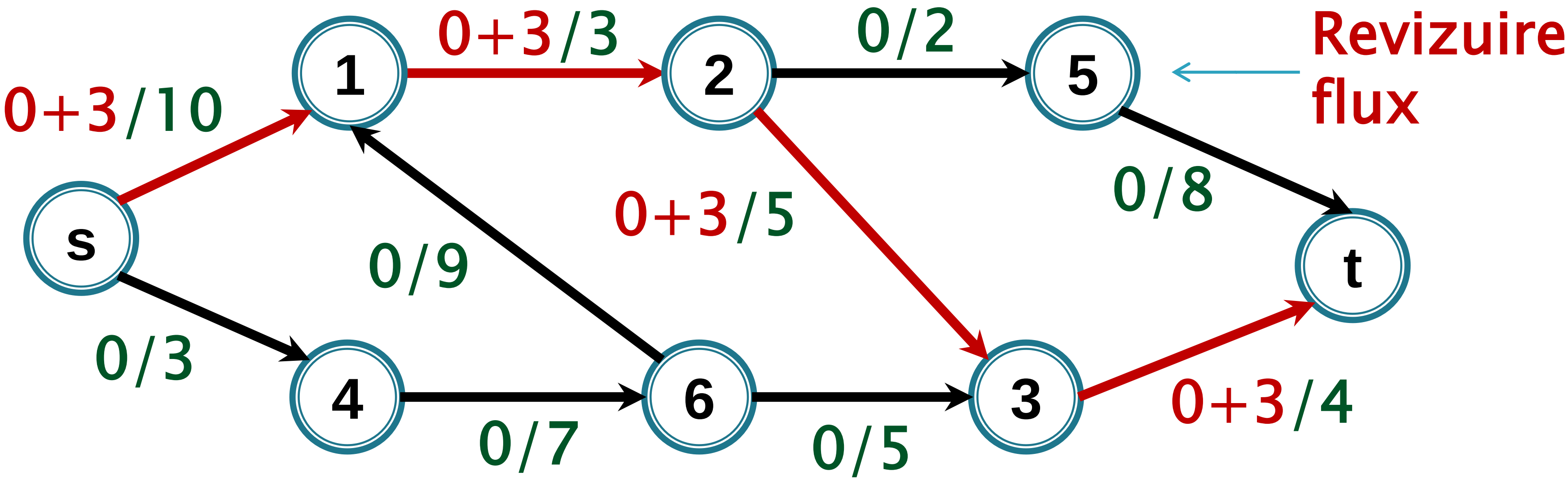

s
1
2
5
t
4
6
3
0/10
0/3
0/2
0/8
0/5
0/9
0/3
0/7
0/5
0/4

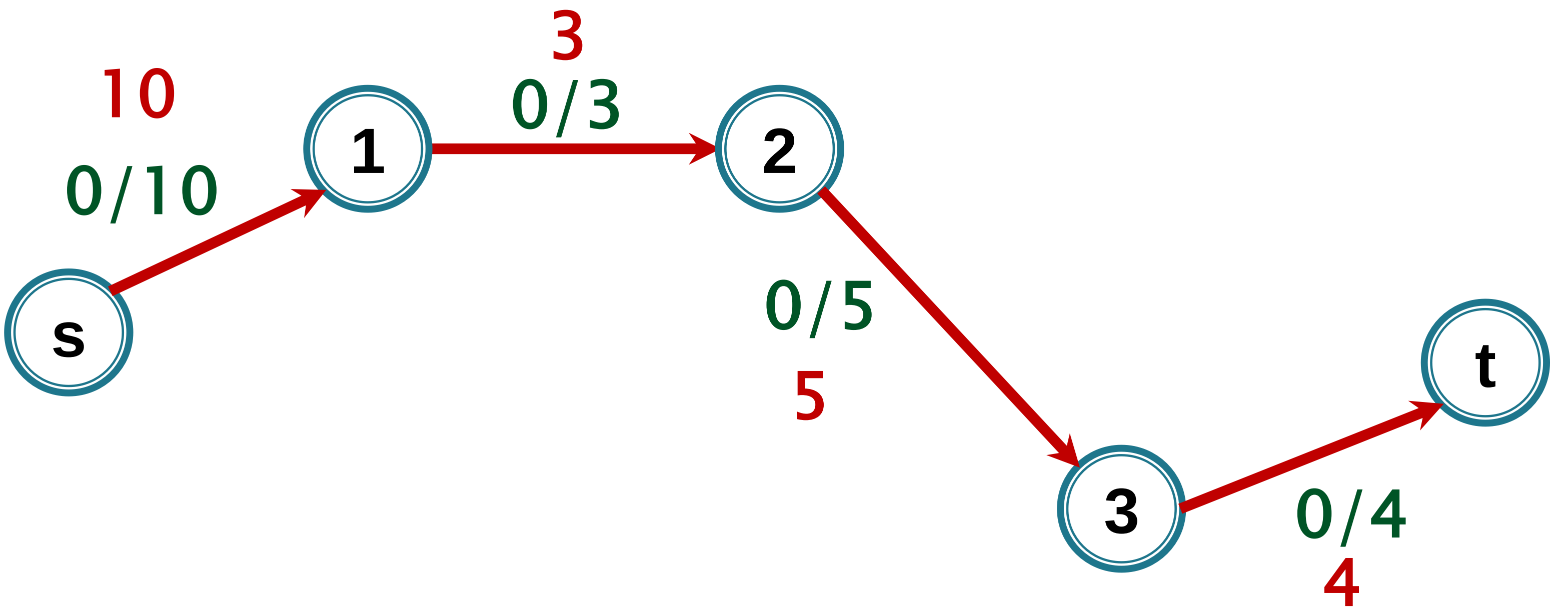

3
Capacitatea reziduală
10
0/10
0/3
0/5
5
0/4
4
s
1
2
3
t



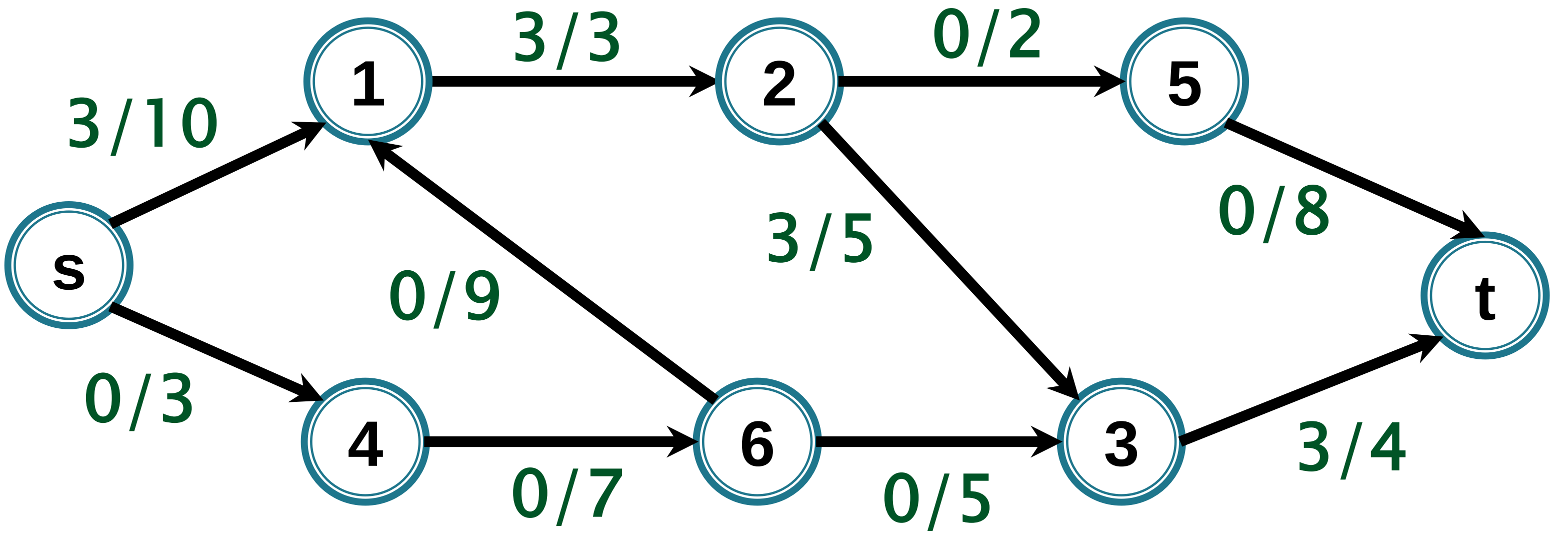


$$i(P) = \min\{10, 3, 5, 4\} = 3$$



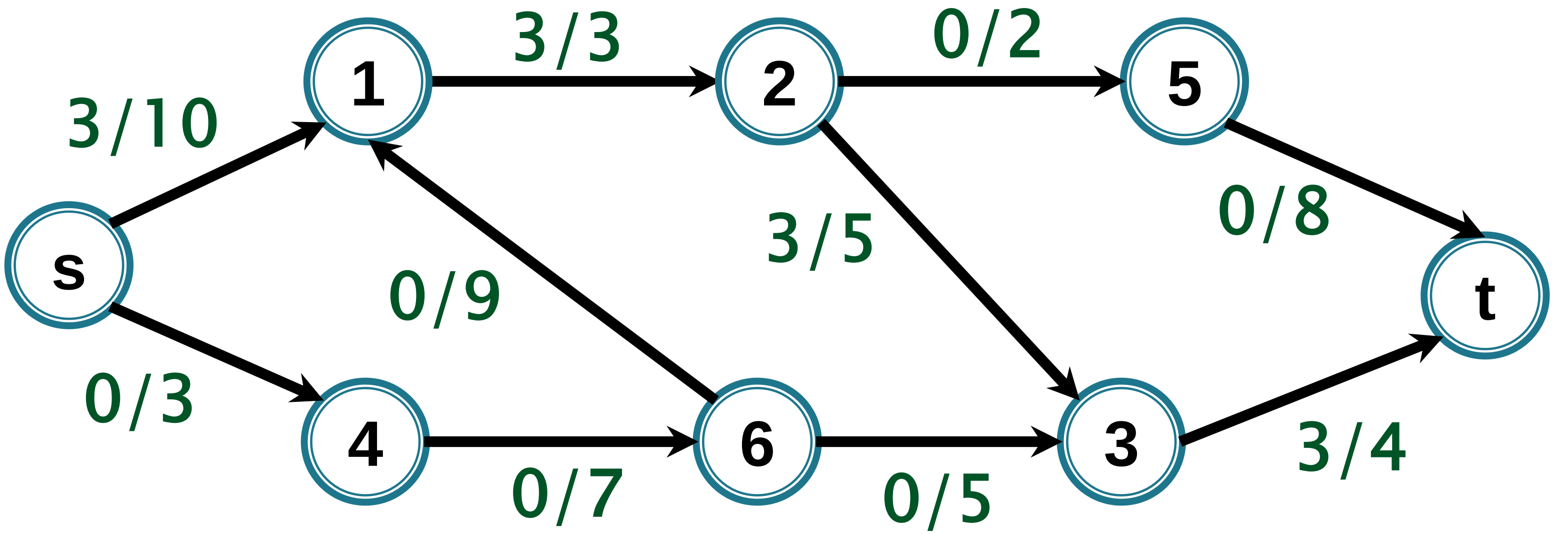


$$i(P) = \min\{10, 3, 5, 4\} = 3$$

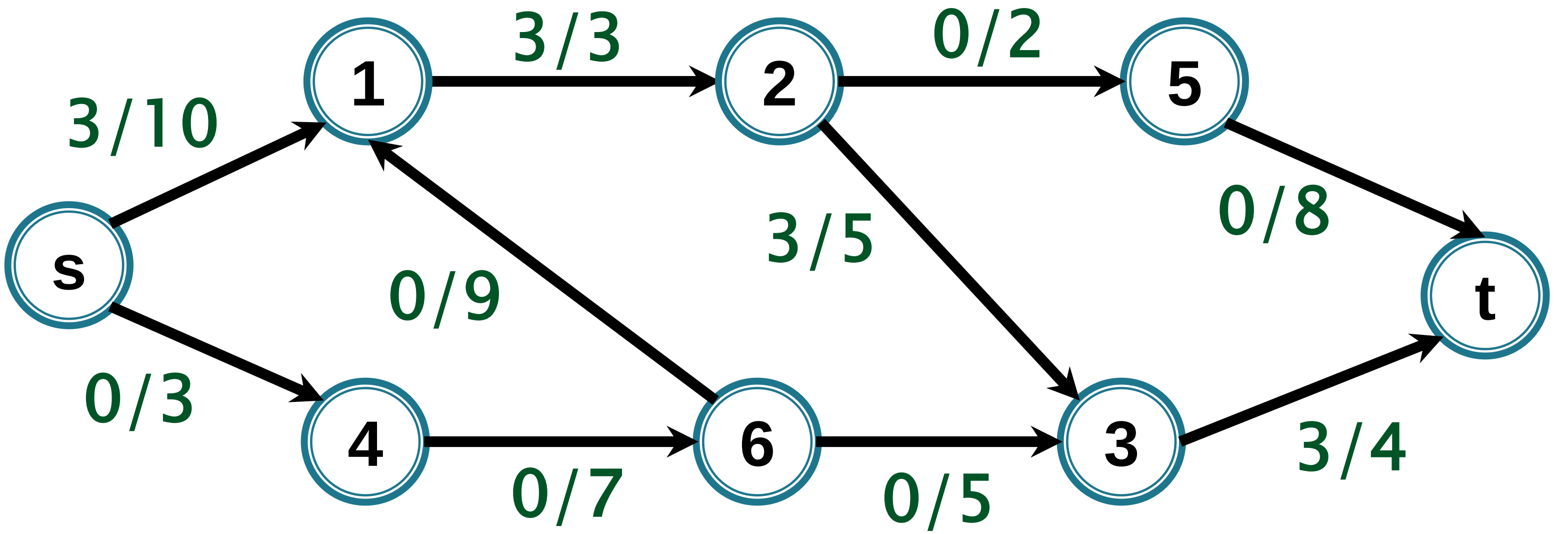


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
0/3
0/9
3/5
0/7
0/5
3/4

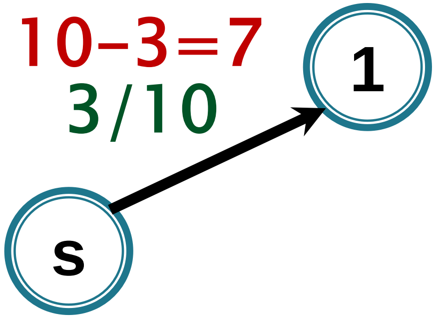
construieste_s-t_lant_nesat


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
0/3
0/9
3/5
0/7
0/5
3/4

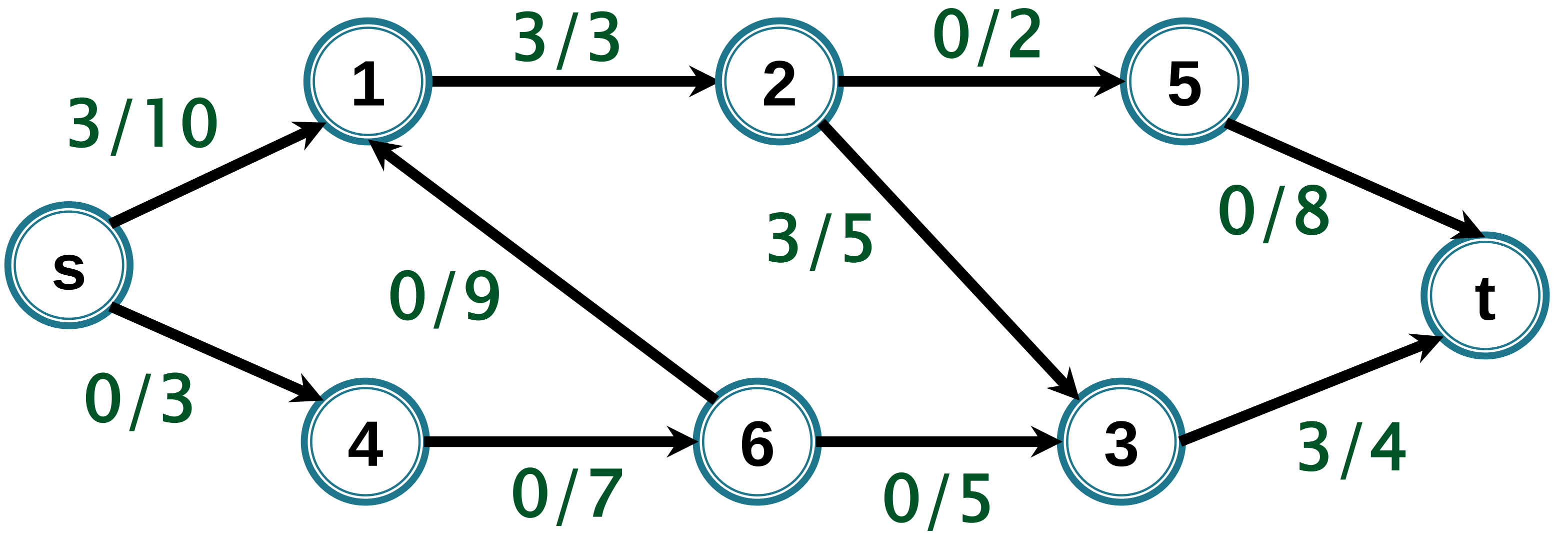

s

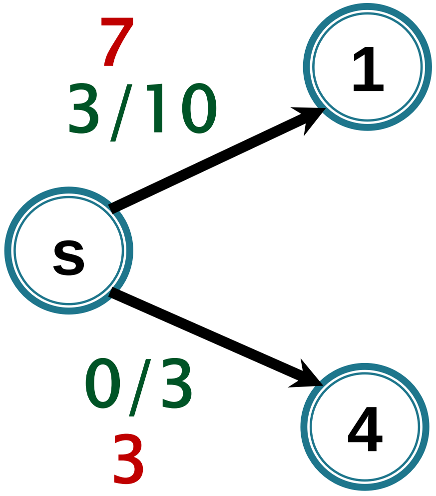


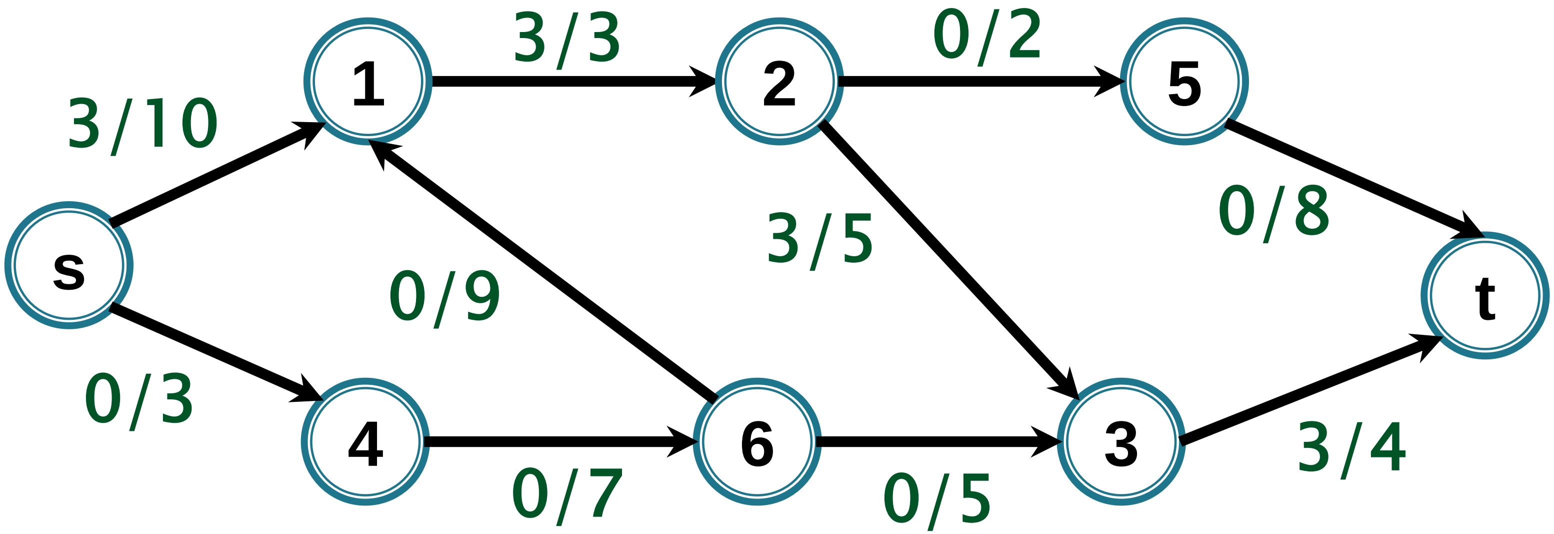
3/10
0/3
3/3
0/9
0/7
0/2
3/5
0/5
0/8
3/4
s
1
2
5
4
6
3
t



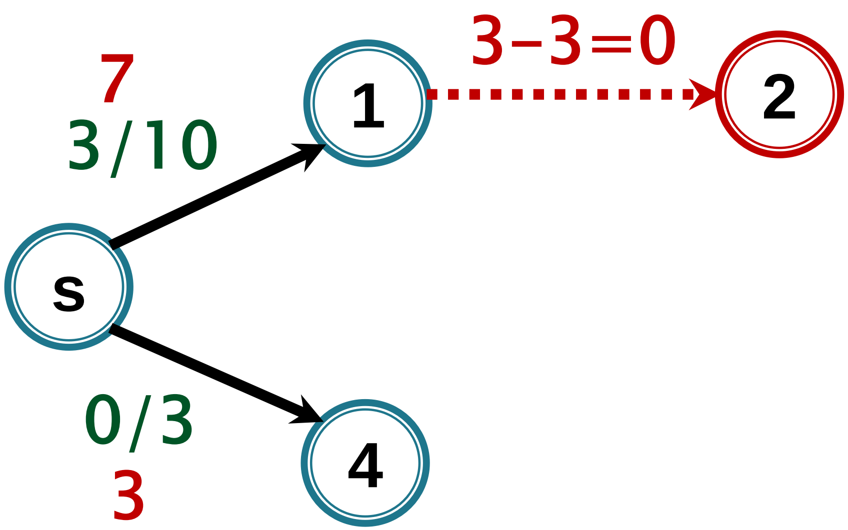
10−3=7
3/10
s
1


3/3
0/2
3/10
1
2
5
0/8
3/5
s
0/9
t
0/3
4
6
3
3/4
0/7
0/5

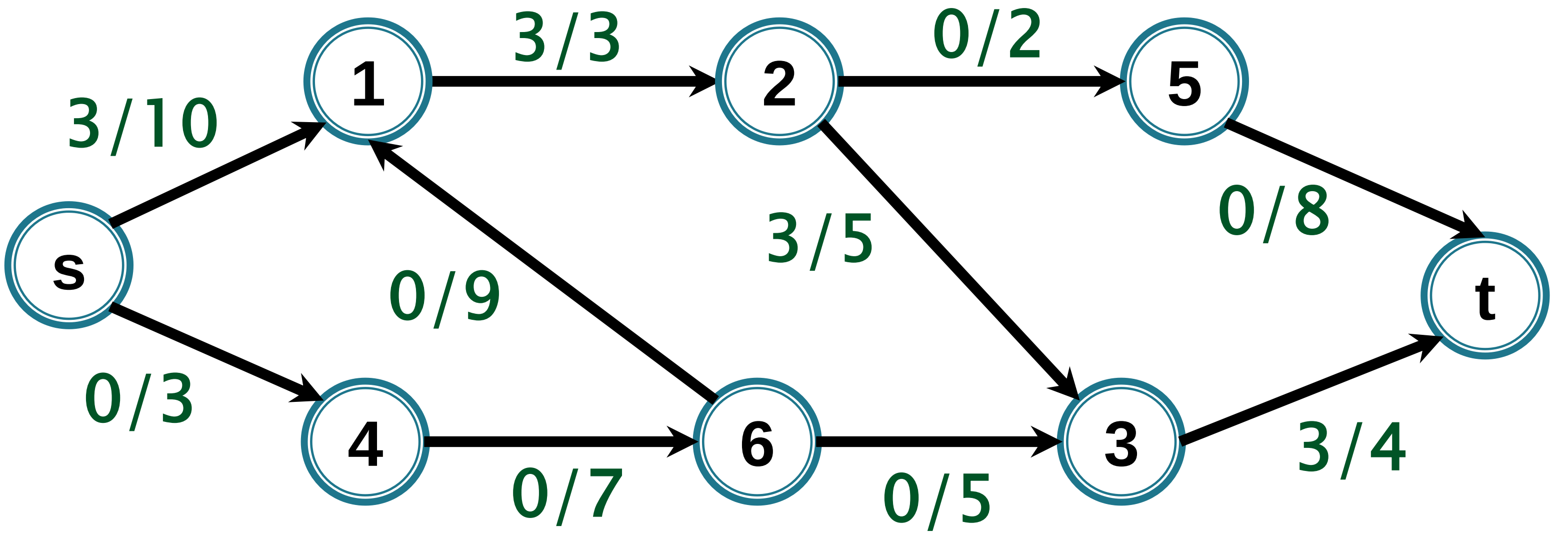

7
3/10
1
s
0/3
4
3



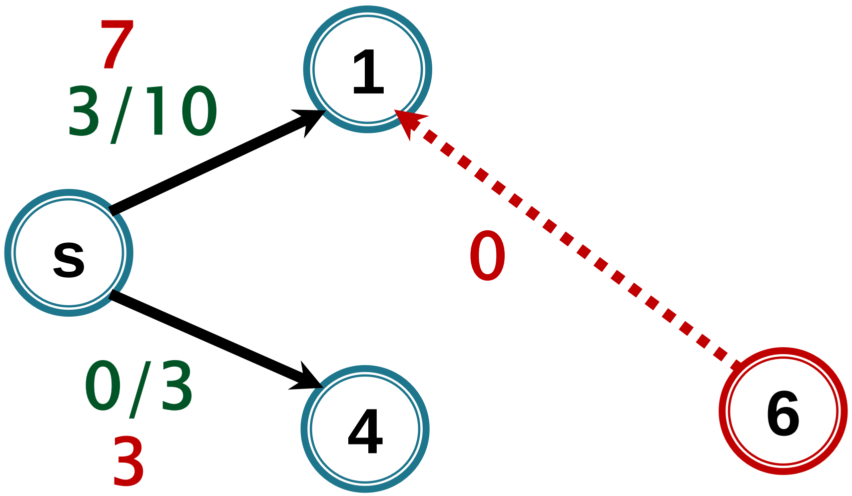
s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
0/3
0/7
0/5
3/4



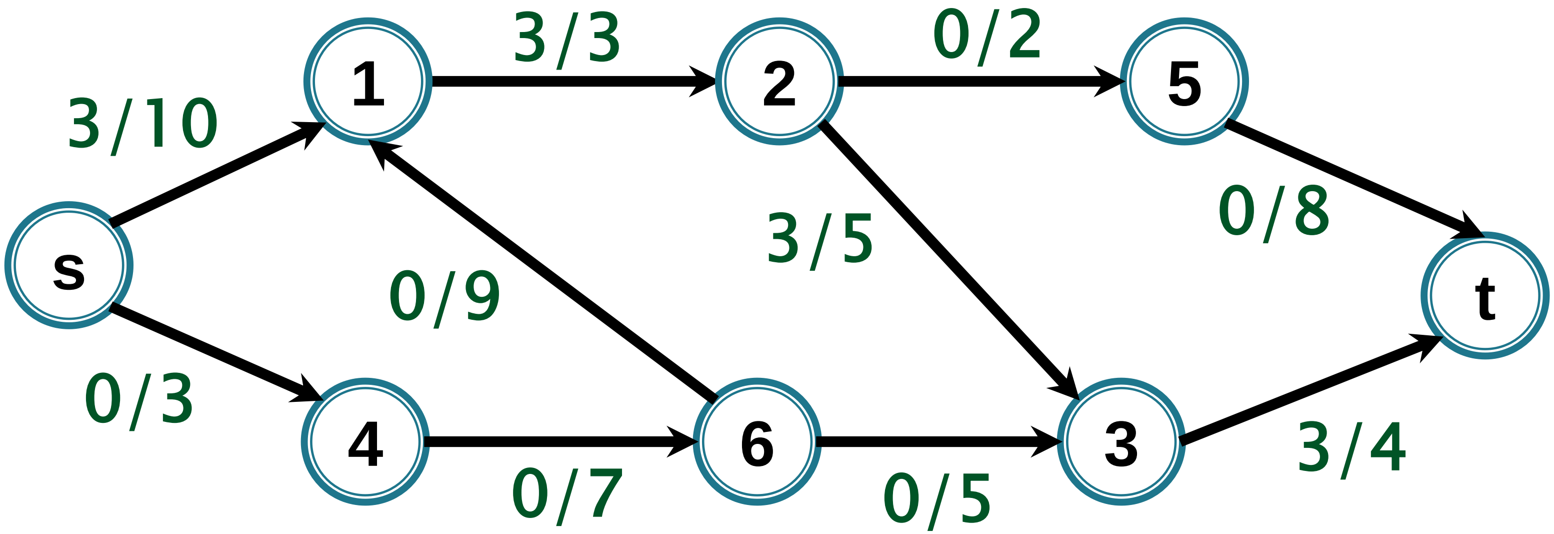
7
3/10
3-3=0
1
2
s
0/3
3
4



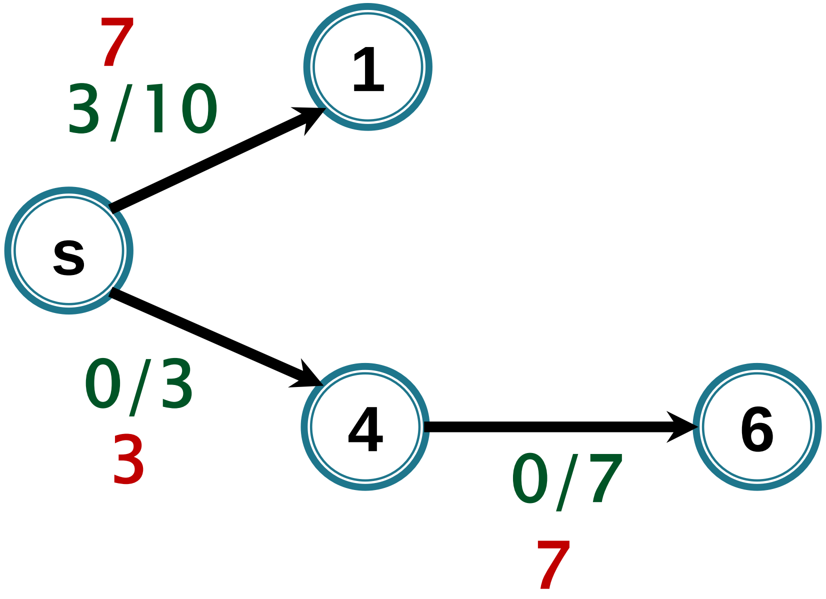
3/10
3/3
0/2
s
1
2
5
0/8
3/5
t
0/9
0/3
4
6
3
3/4
0/7
0/5



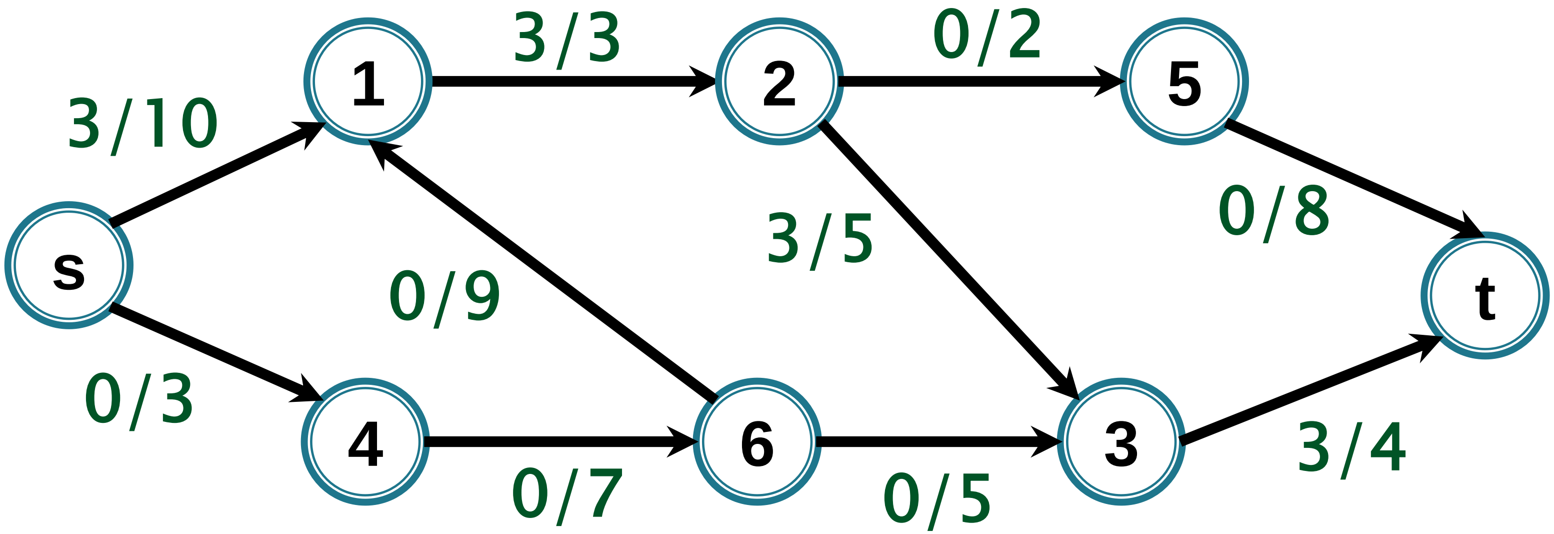
7
3/10
1
s
0
0/3
6
4
3

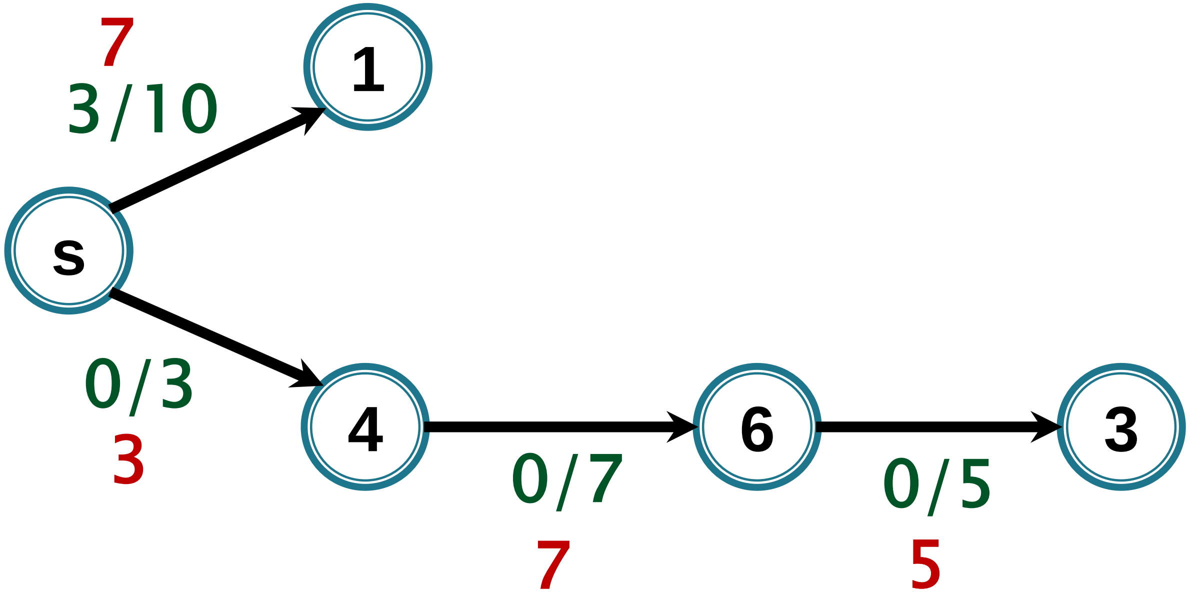


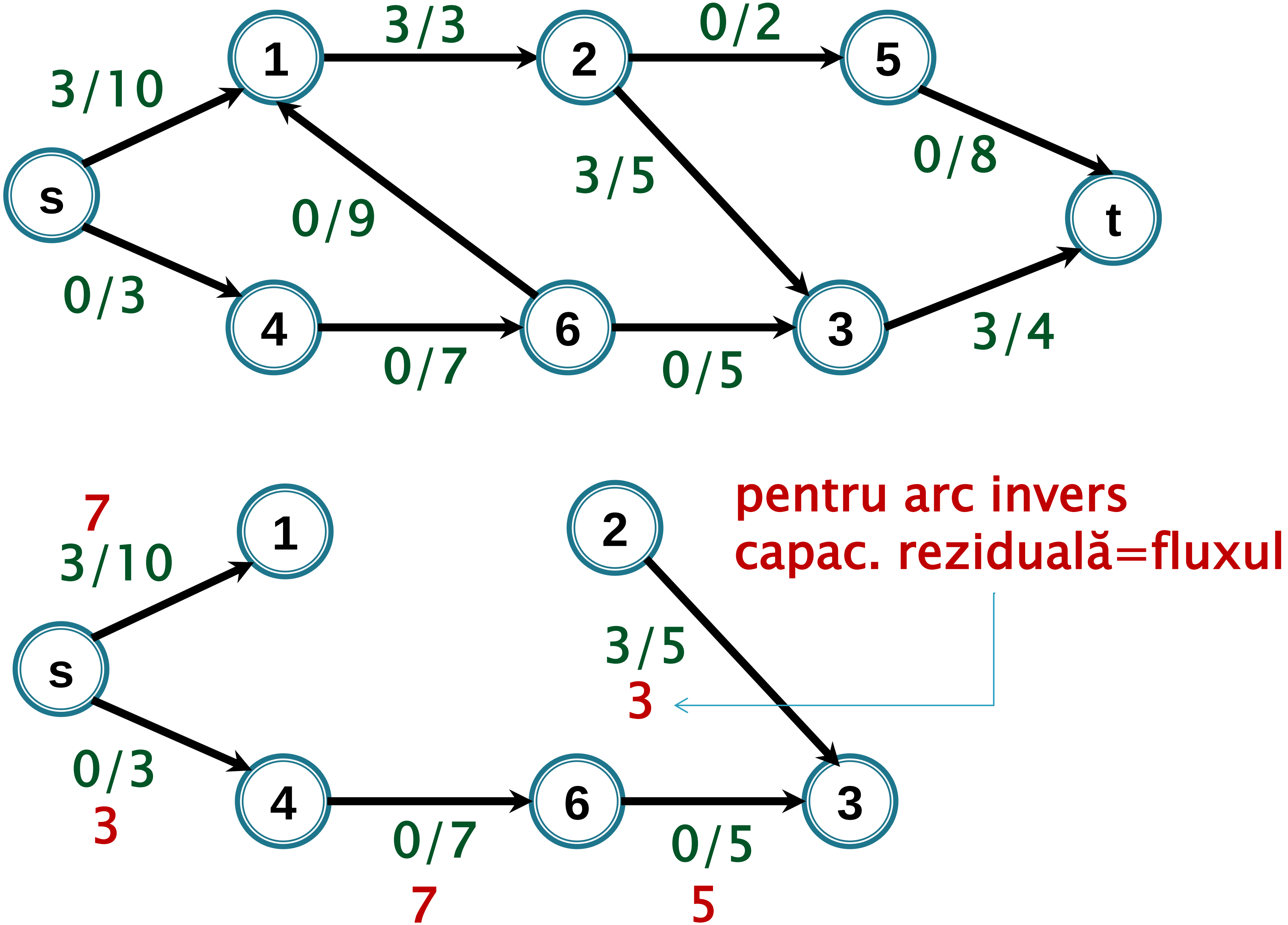
s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
0/3
0/7
0/5
3/4

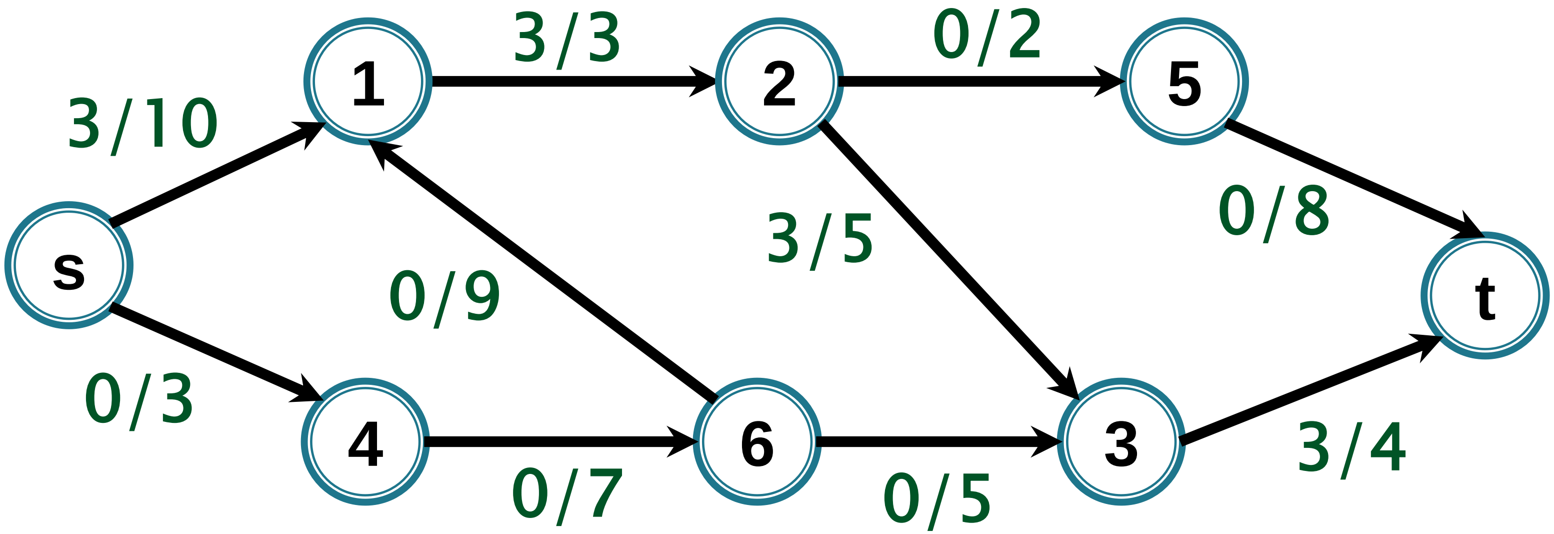


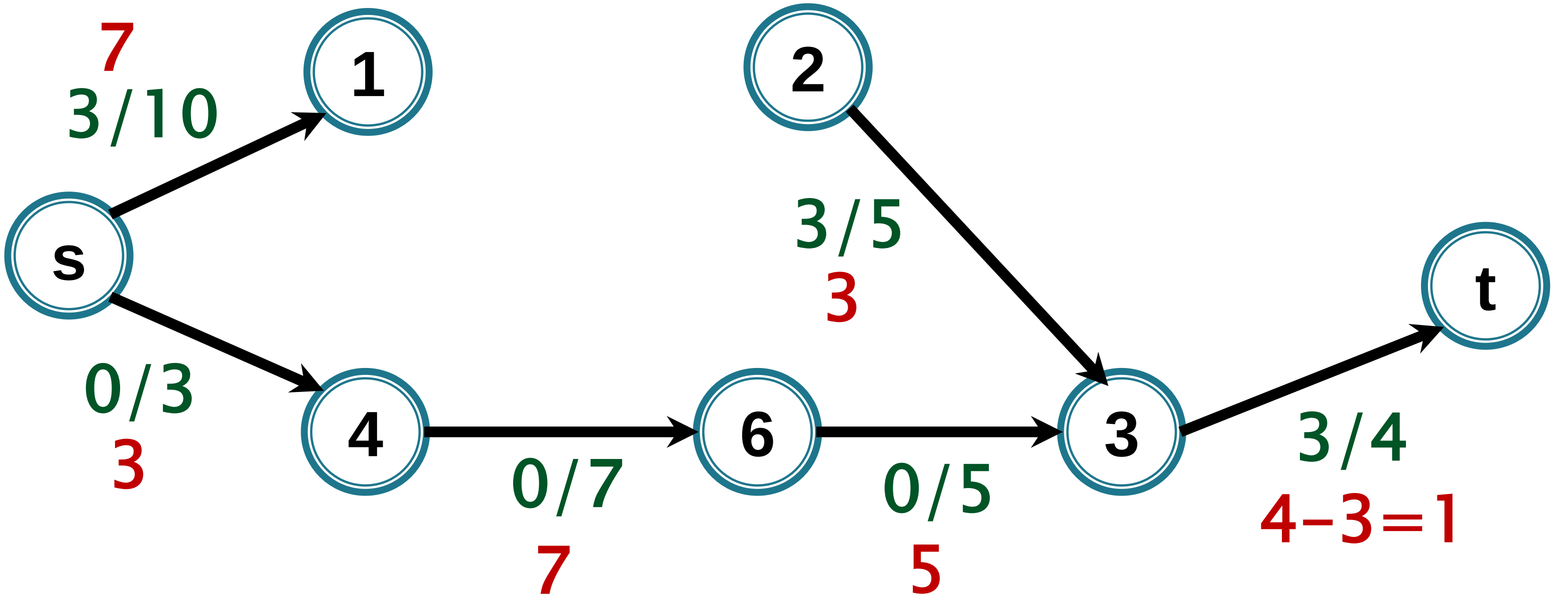
7
3/10
1
s
0/3
3
4
6
0/7
7


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
0/9
3/5
0/3
0/7
0/5
3/4

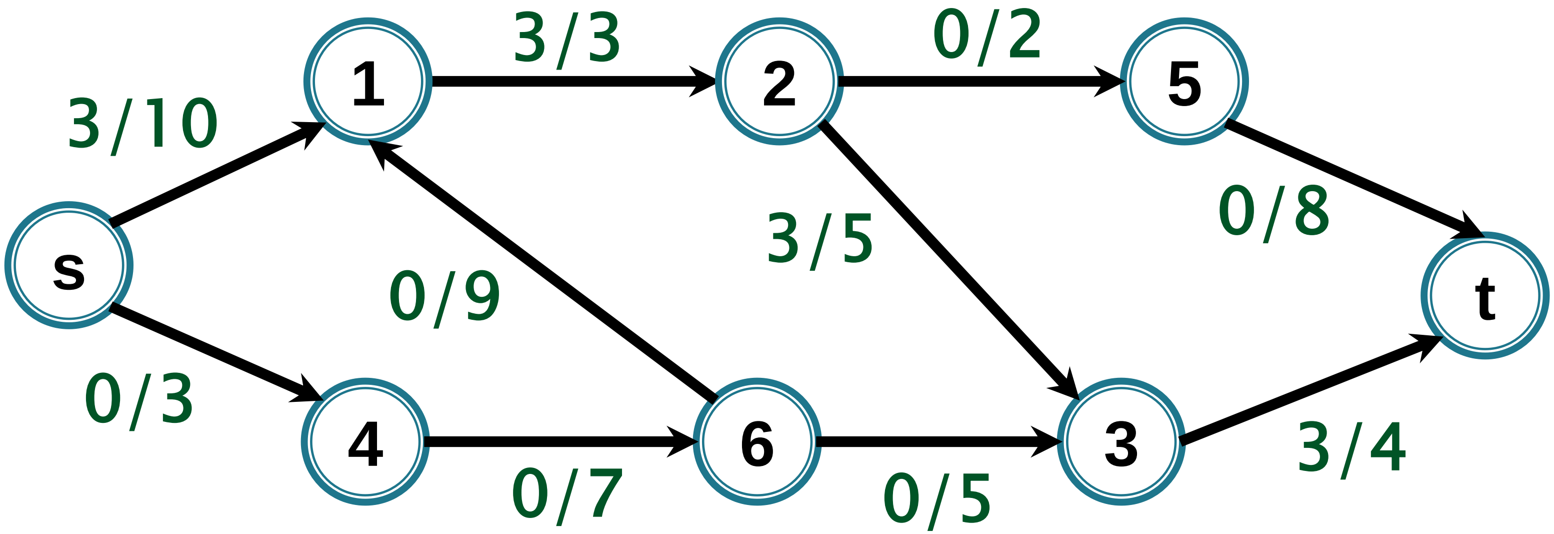

7
3/10
1
s
0/3
3
4
6
3
0/7
7
0/5
5


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
0/3
0/7
0/5
3/4
s
1
2
3
4
6
7
3/10
3/5
3
0/3
3
0/7
7
0/5
5
pentru arc invers
capac. reziduală=fluxul

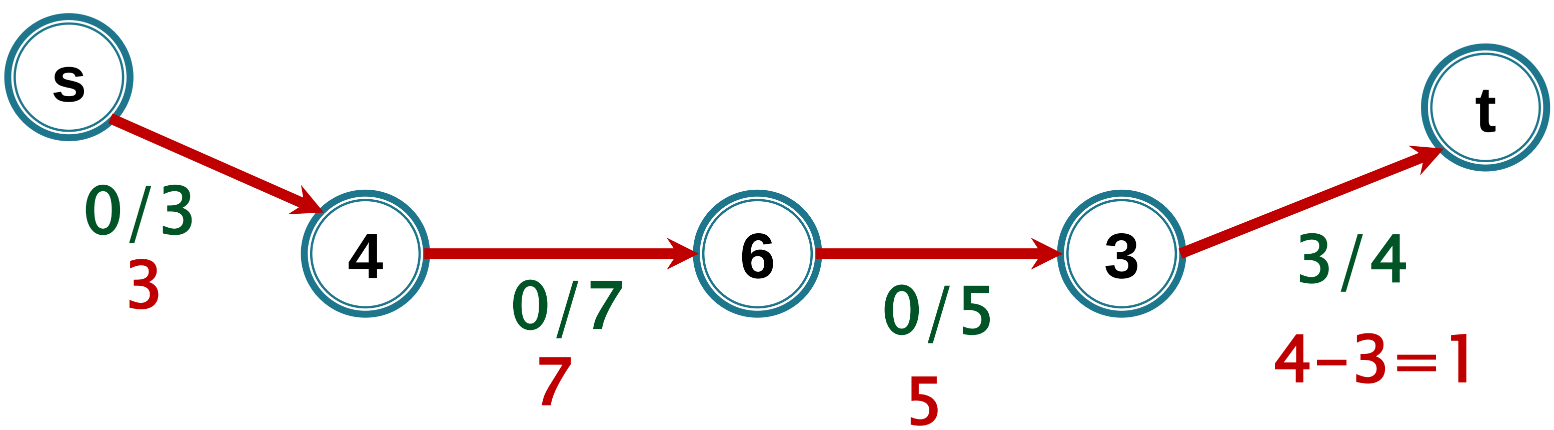

s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
0/3
0/7
0/5
3/4


s
1
2
t
4
6
3
7
3/10
3/5
3
0/3
3
0/7
7
0/5
5
3/4
4−3=1

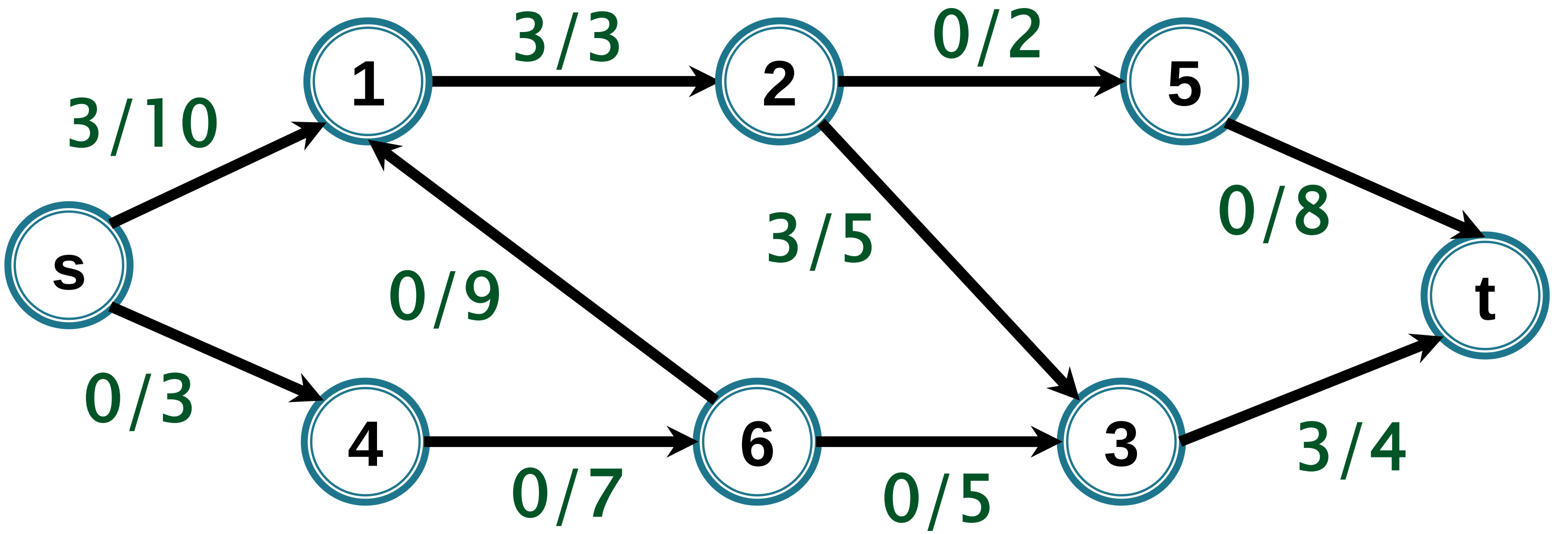
revizuieste_flux_lant

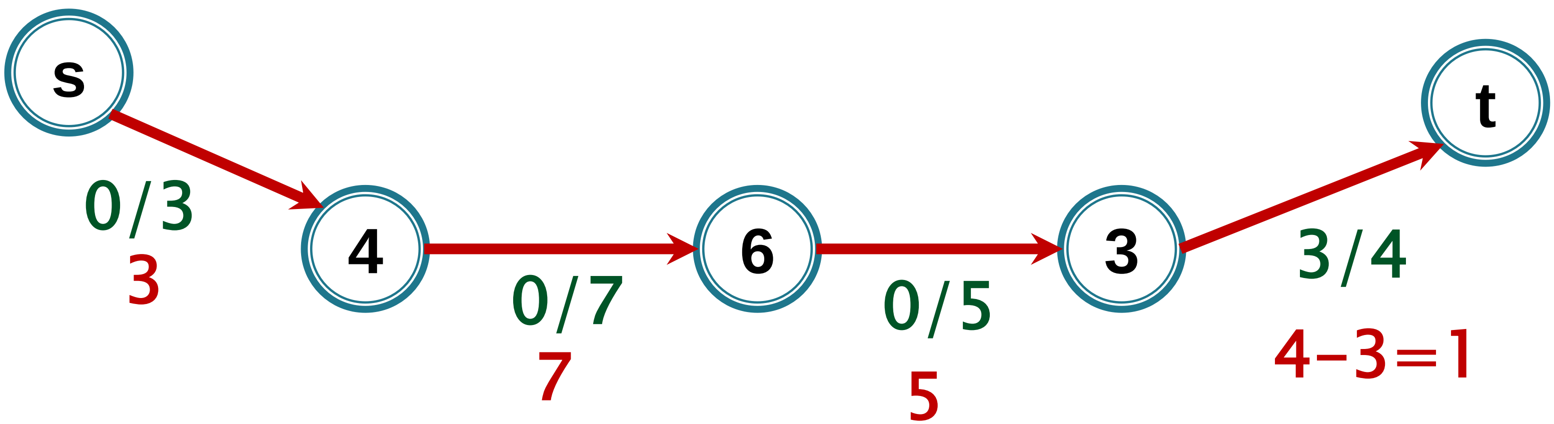


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
0/3
0/7
0/5
3/4

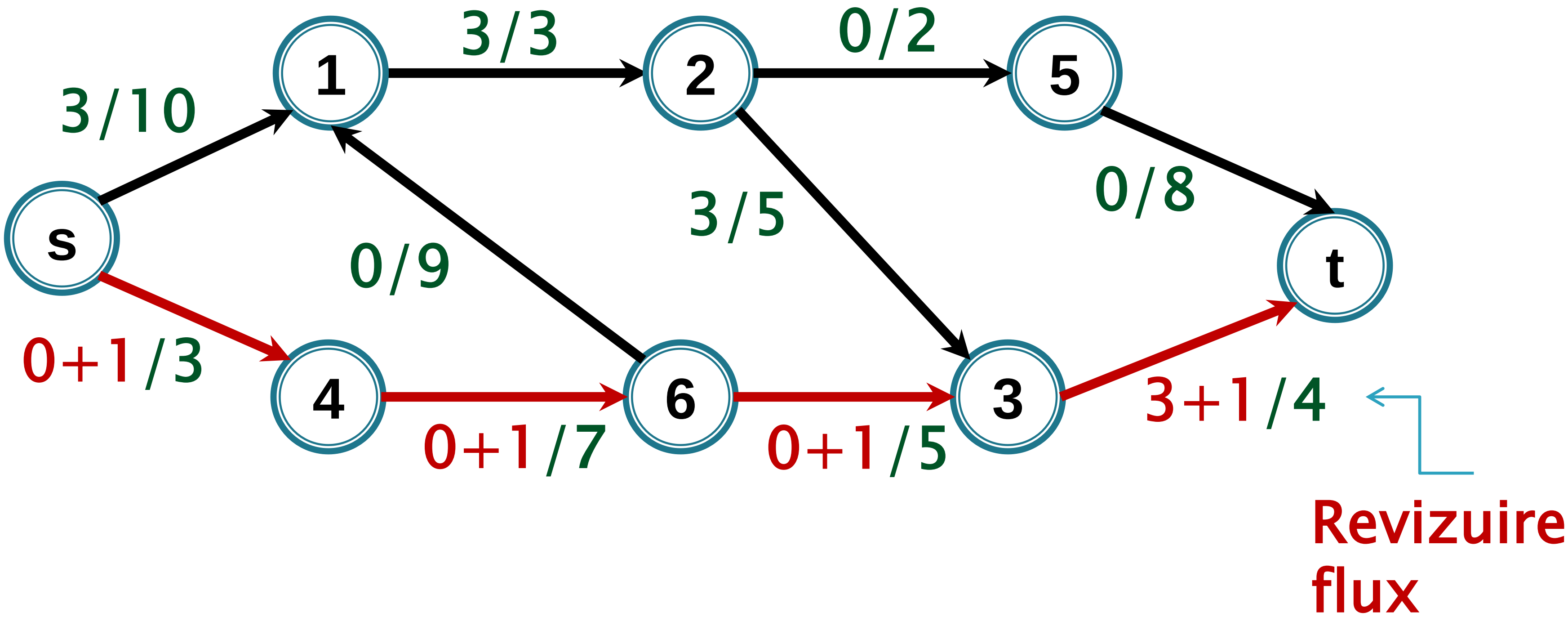


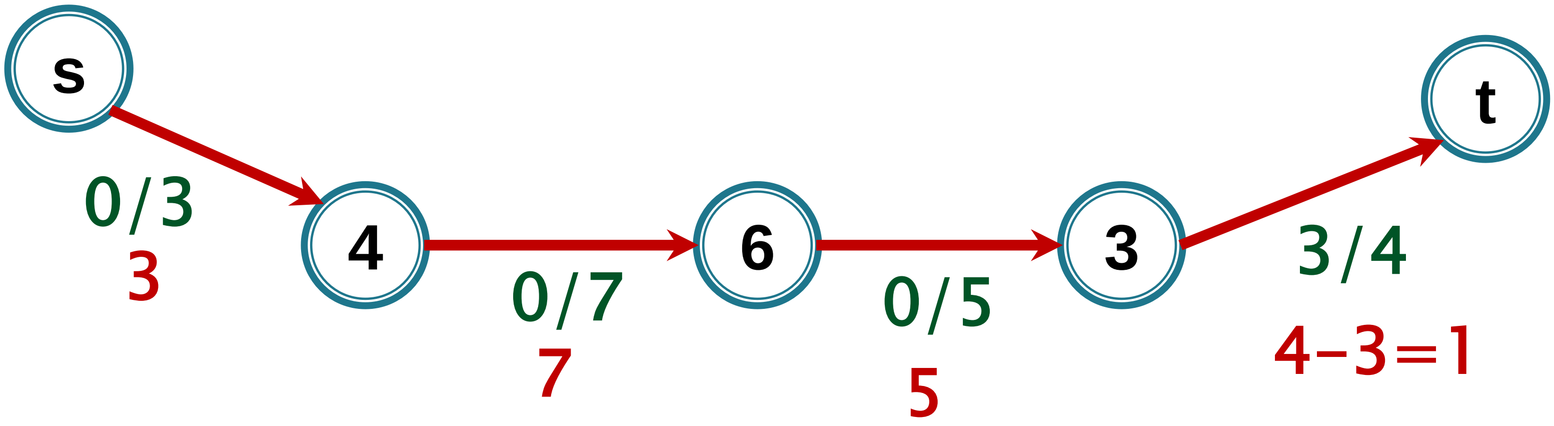
s
4
6
3
t
0/3
3
0/7
7
0/5
5
3/4
4−3=1



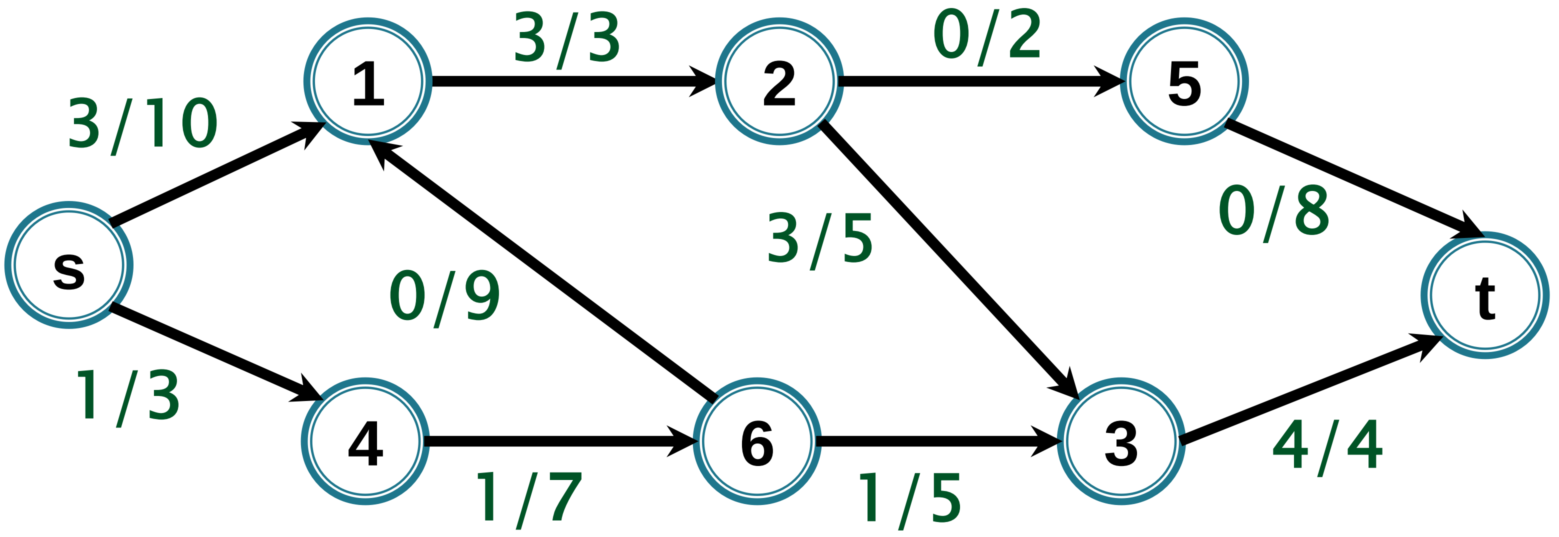


$$i(P) = \min\{3, 7, 5, 1\} = 1$$


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
0+1/3
0+1/7
0+1/5
3+1/4
Revizuire flux

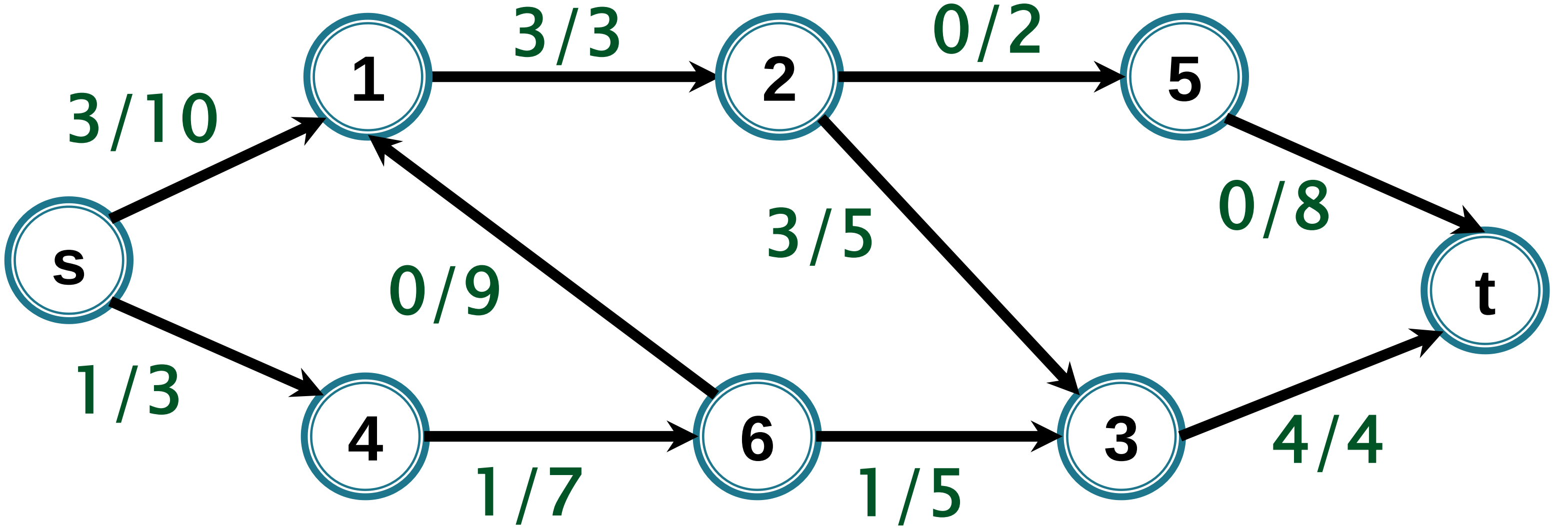

s
4
6
3
t
0/3
3
0/7
7
0/5
5
3/4
4−3=1

$$i(P) = \min\{ 3, 7, 5, 1\} = 1$$

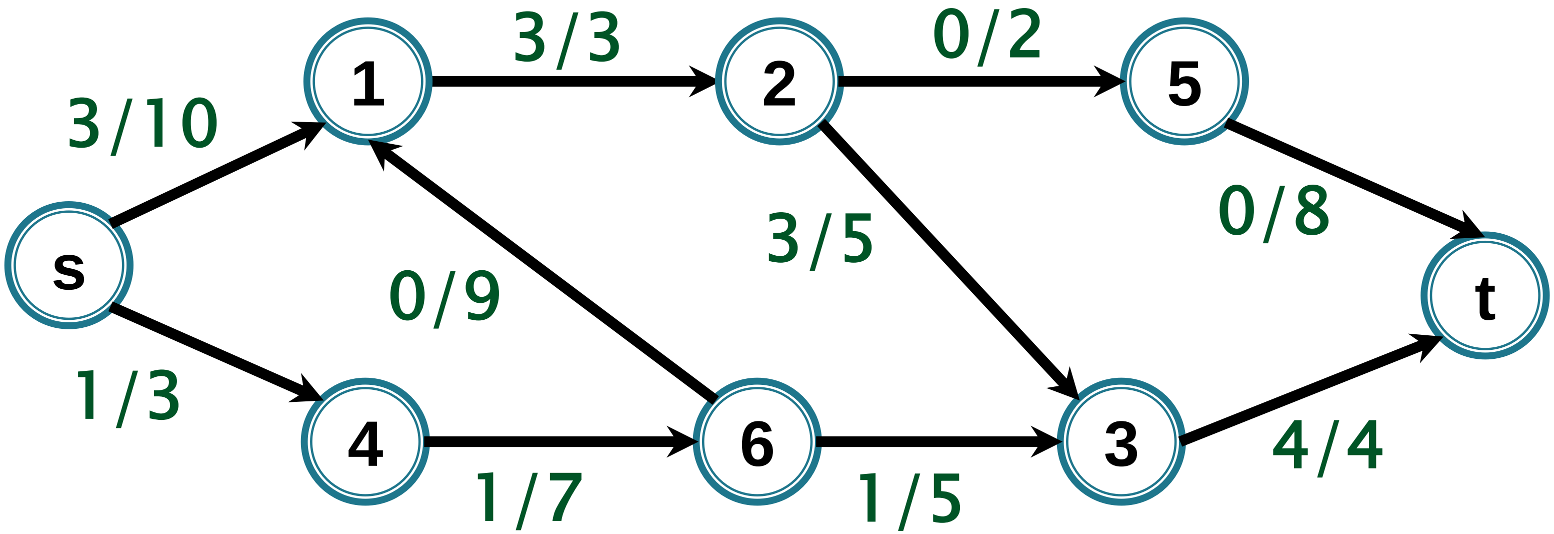


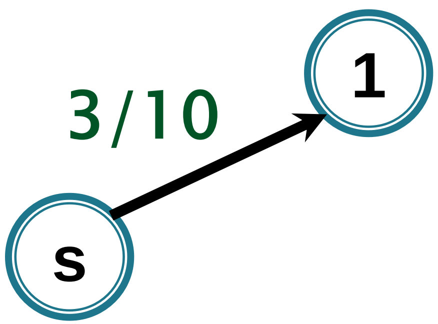
s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
1/3
1/7
1/5
4/4

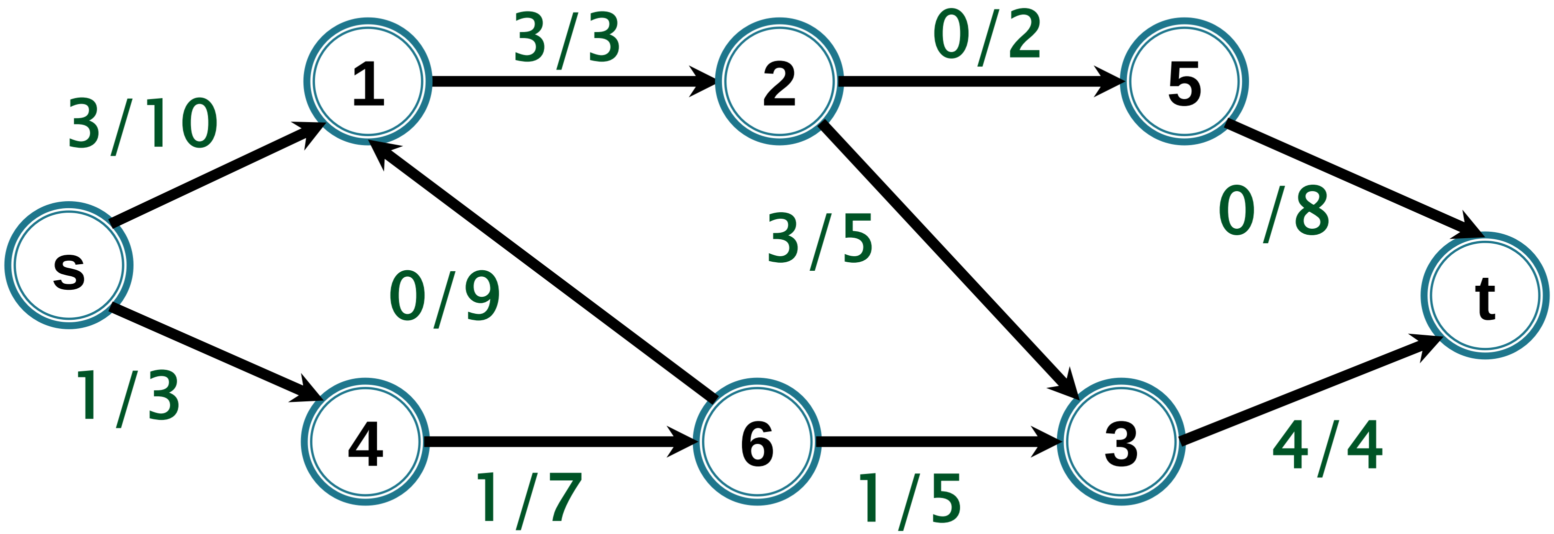
construieste_s-t_lant_nesat

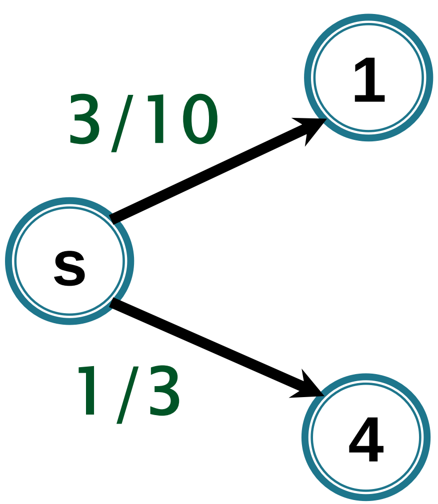

3/10
1
3/3
2
0/2
5
s
3/5
0/8
t
0/9
1/3
4
6
3
4/4
1/7
1/5

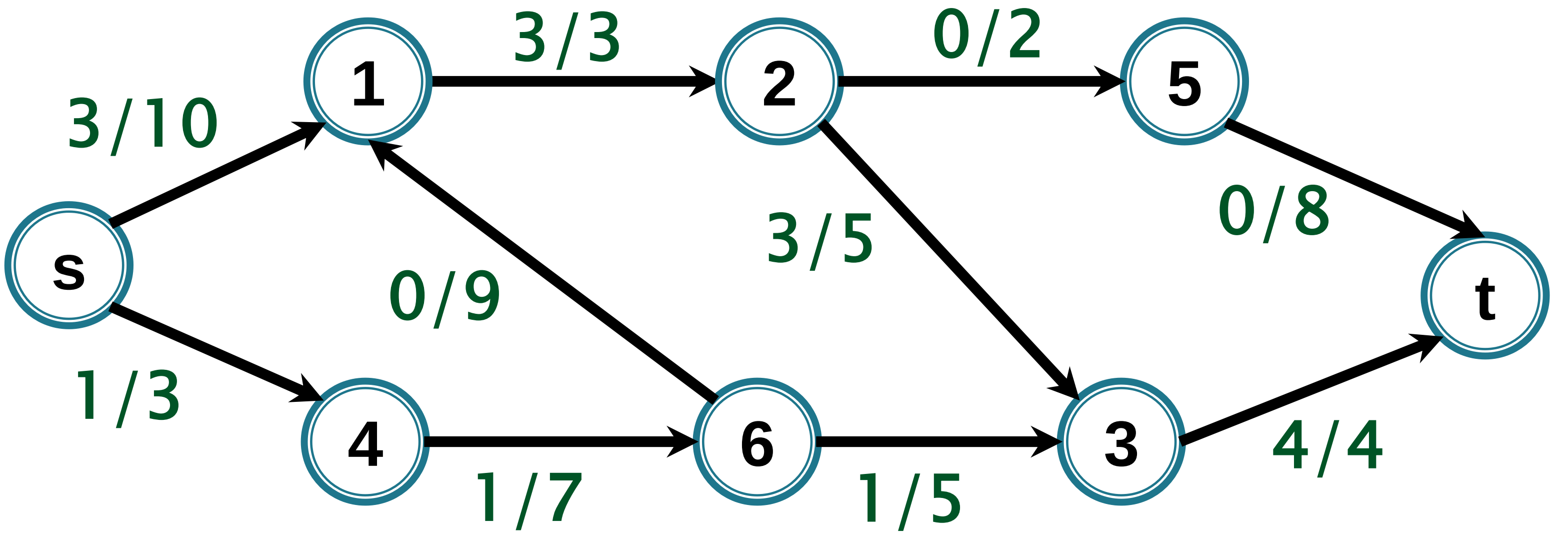

s

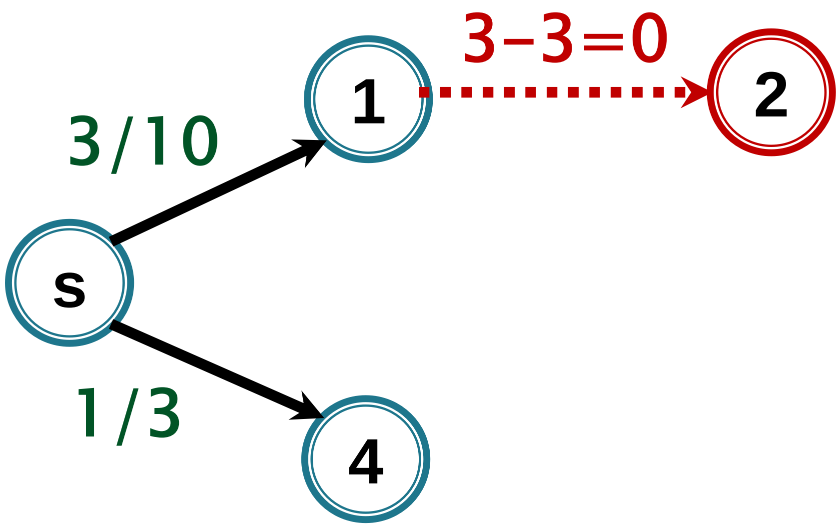

3/3
0/2
3/10
1
2
5
0/8
3/5
s
0/9
t
1/3
4
6
3
4/4
1/7
1/5

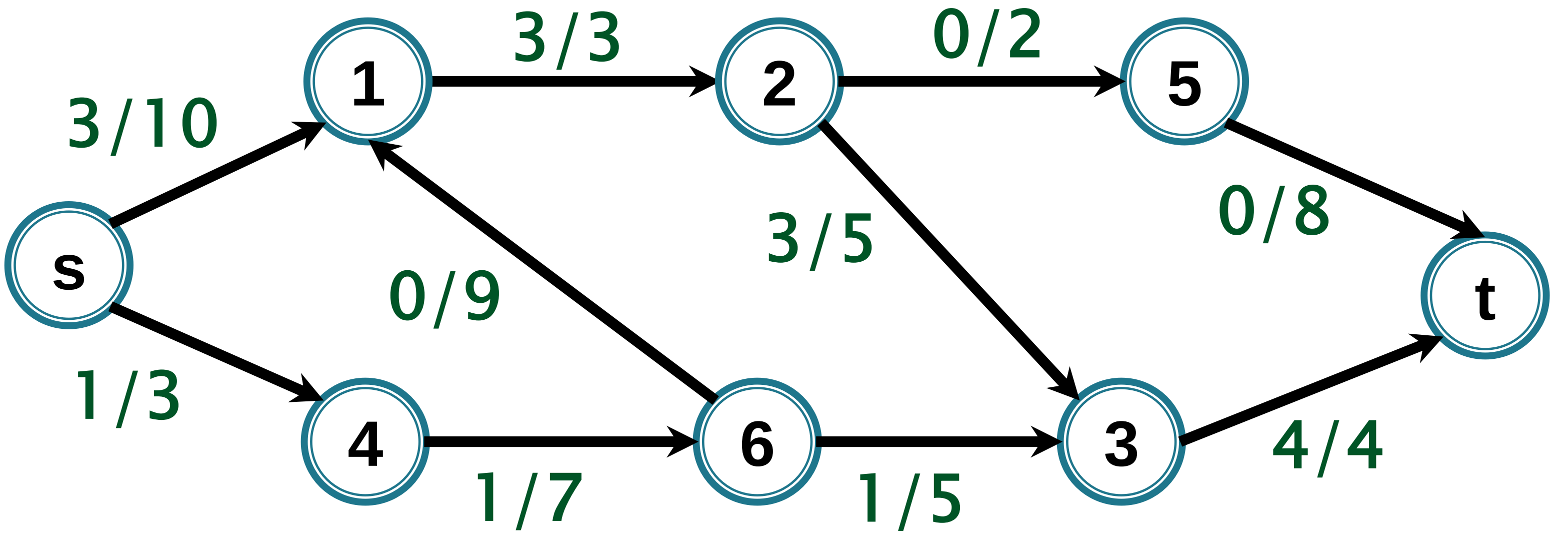

3/10
1
s

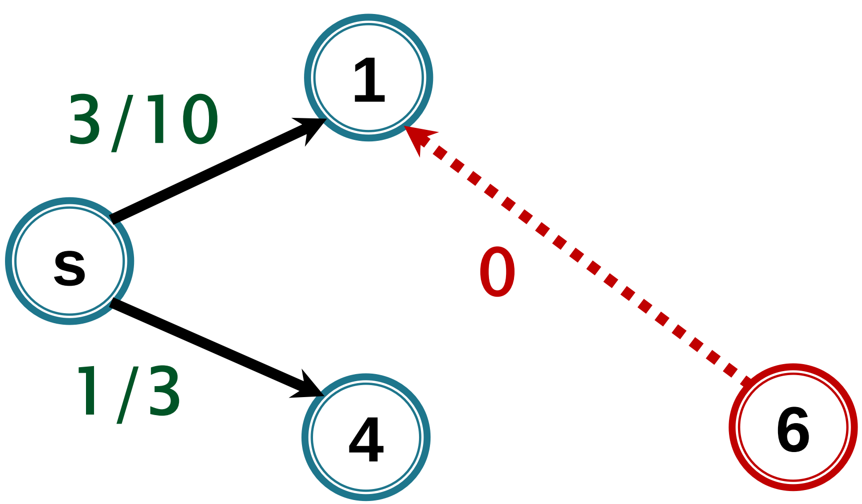

3/3
0/2
1
2
5
3/10
3/5
0/8
s
t
0/9
1/3
4
6
3
4/4
1/7
1/5

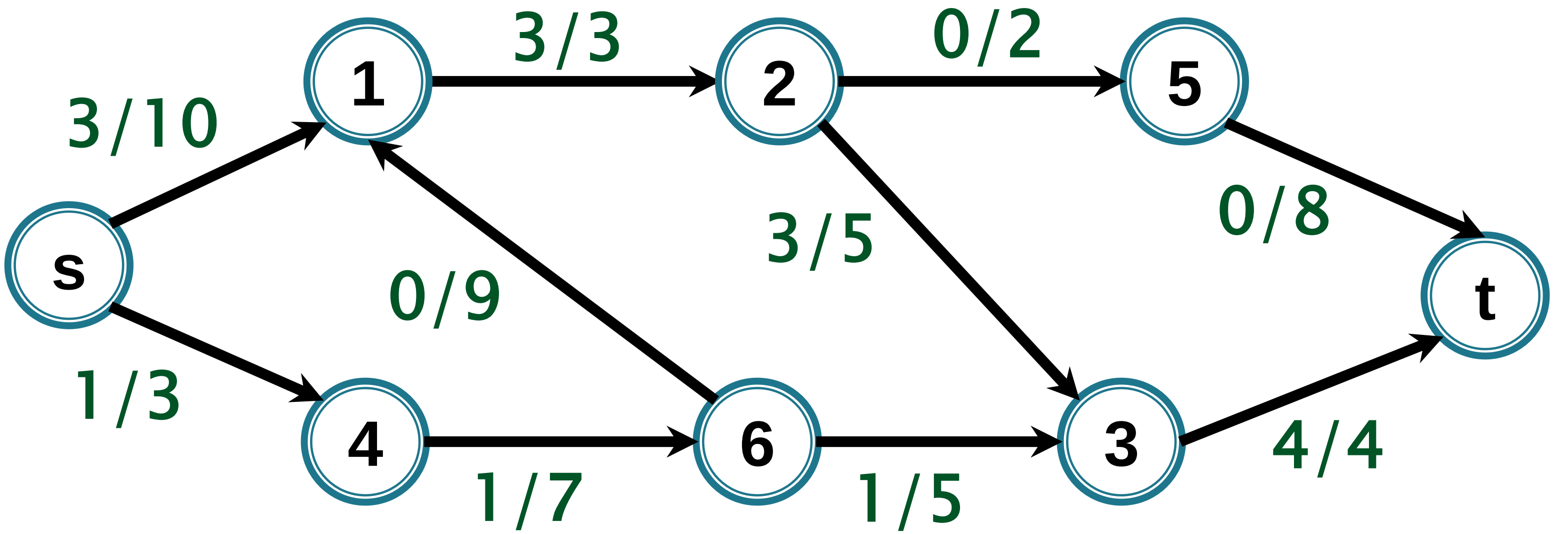

1
3/10
s
1/3
4

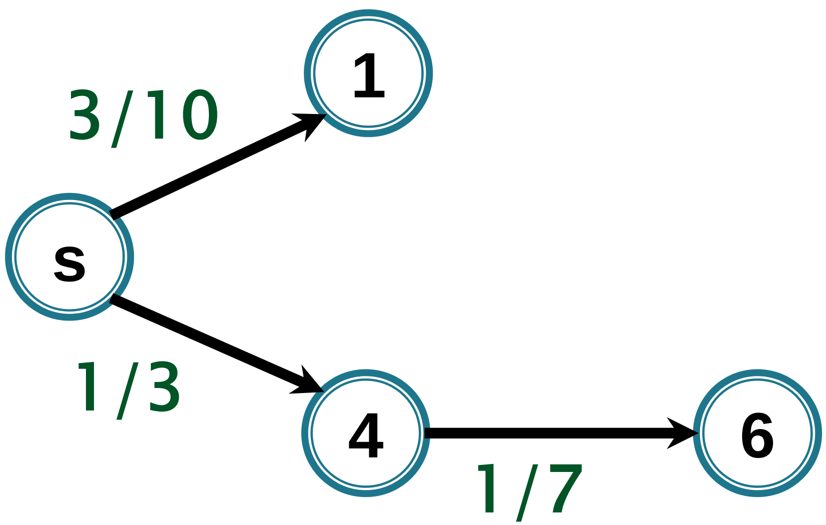

s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
1/3
1/7
1/5
4/4

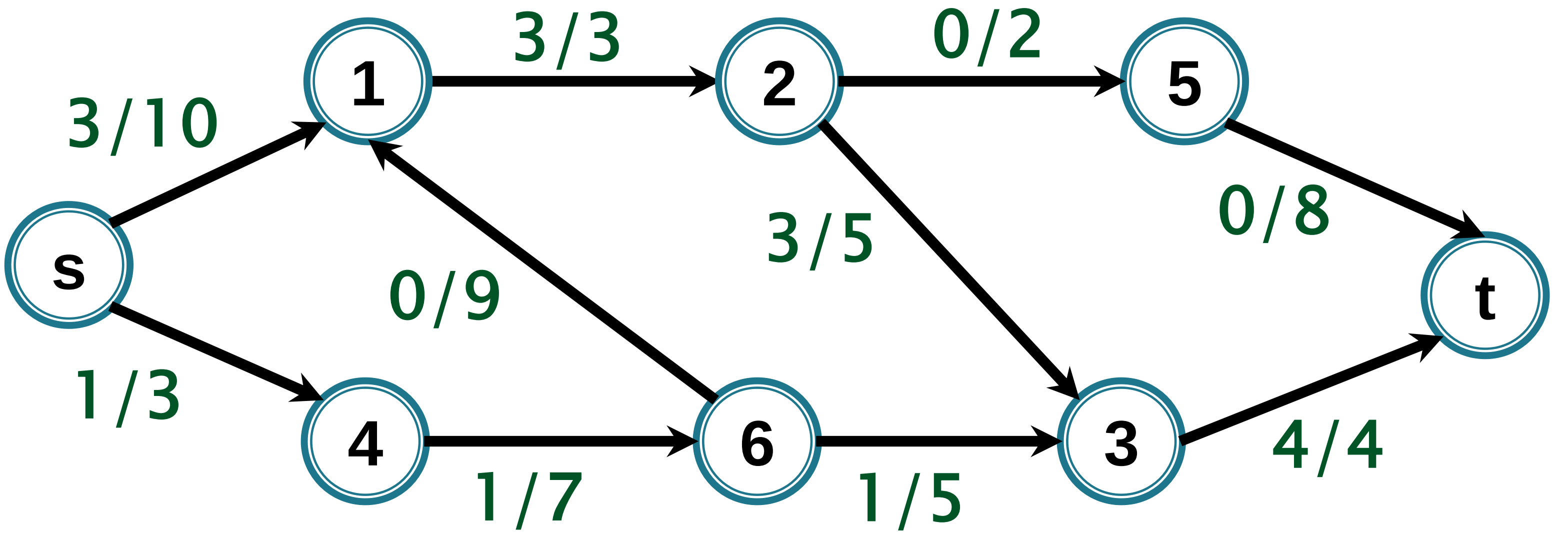

s
1
2
4
3/10
3-3=0
1/3


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
1/3
3/3
0/2
0/9
3/5
0/8
1/7
1/5
4/4

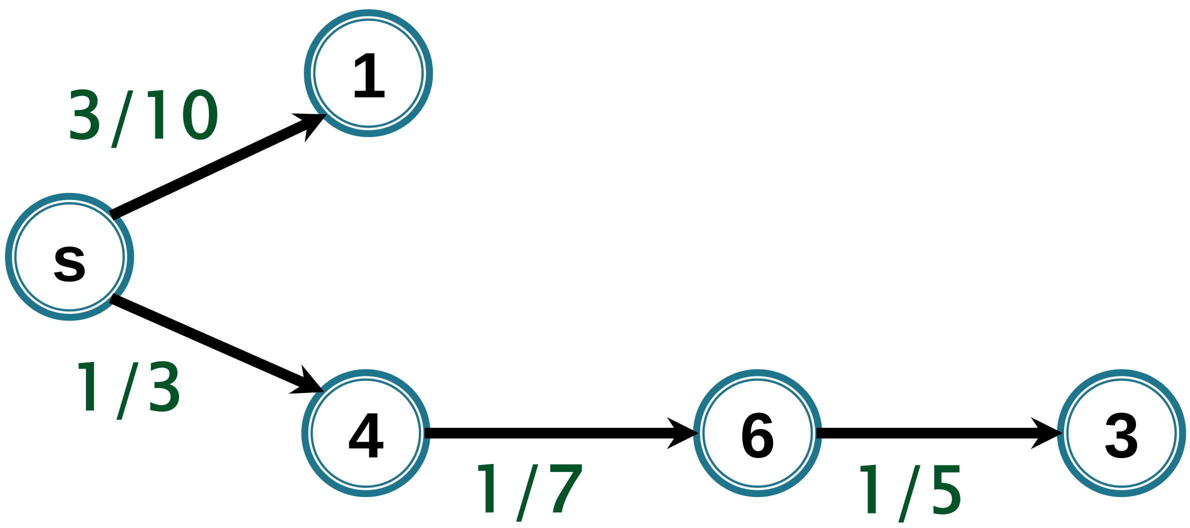

s
1
4
6
3/10
1/3
0


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
1/3
1/7
1/5
4/4

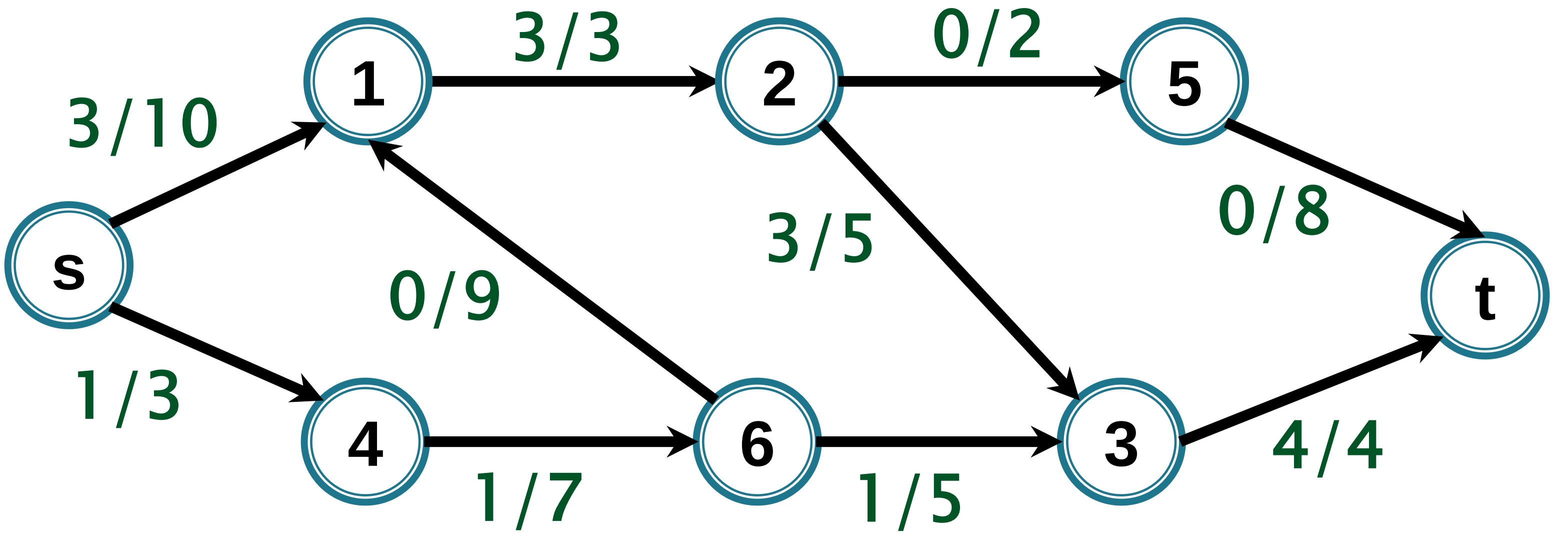

s
1
4
6
3/10
1/3
1/7

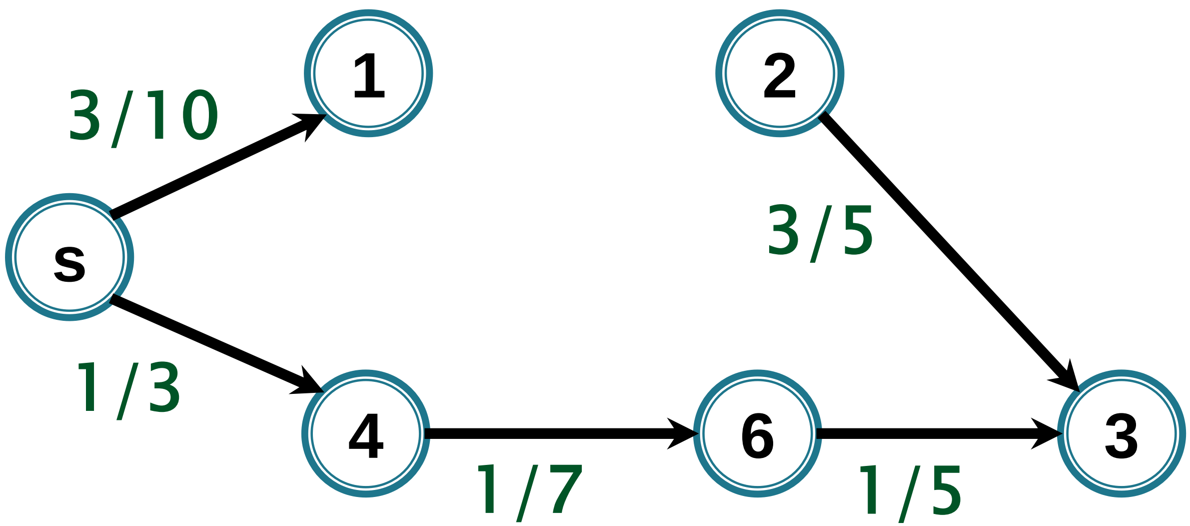


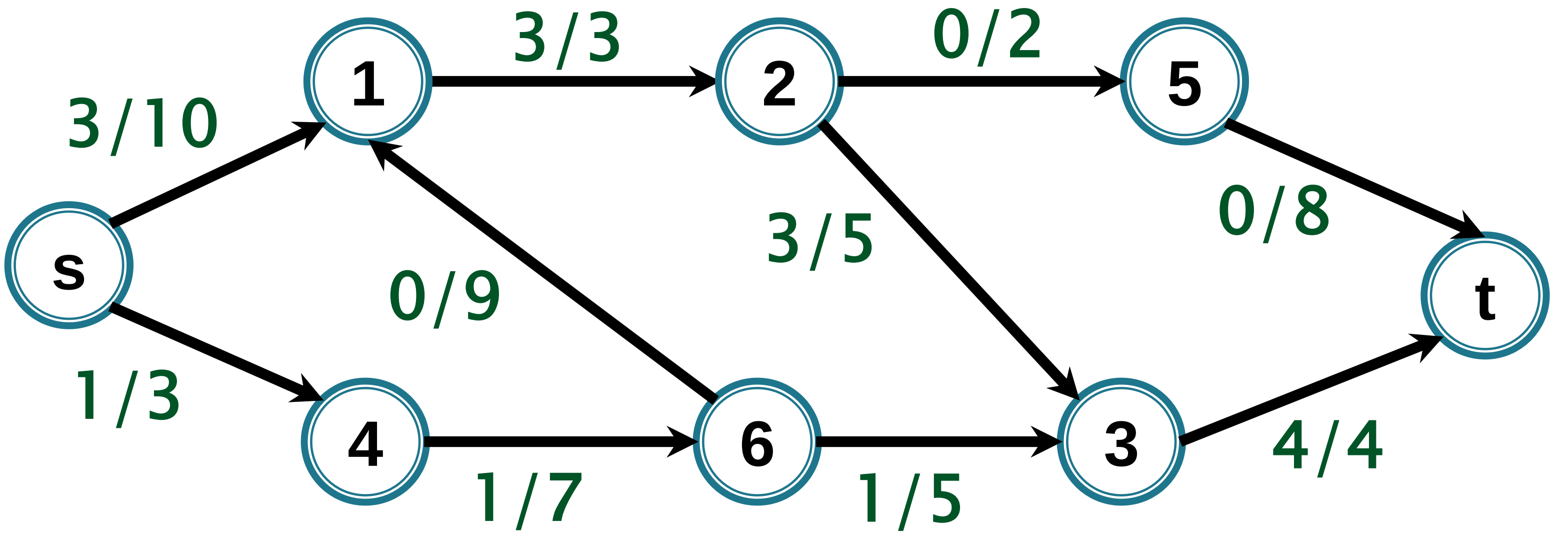
s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
1/3
1/7
1/5
4/4

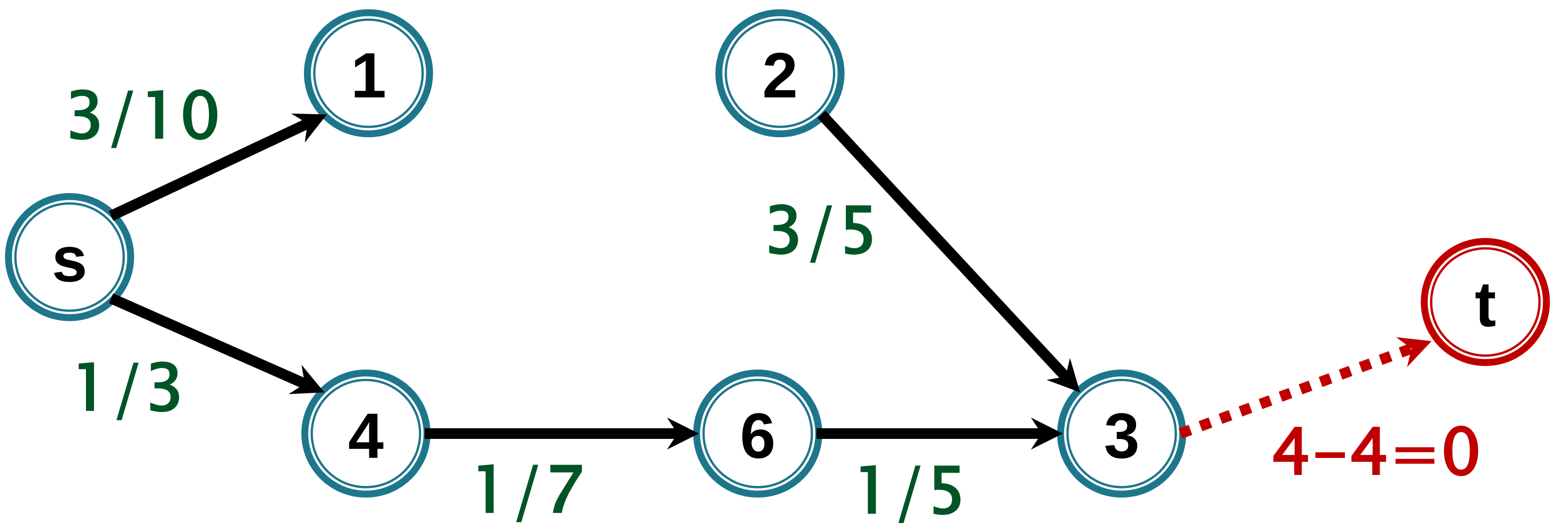


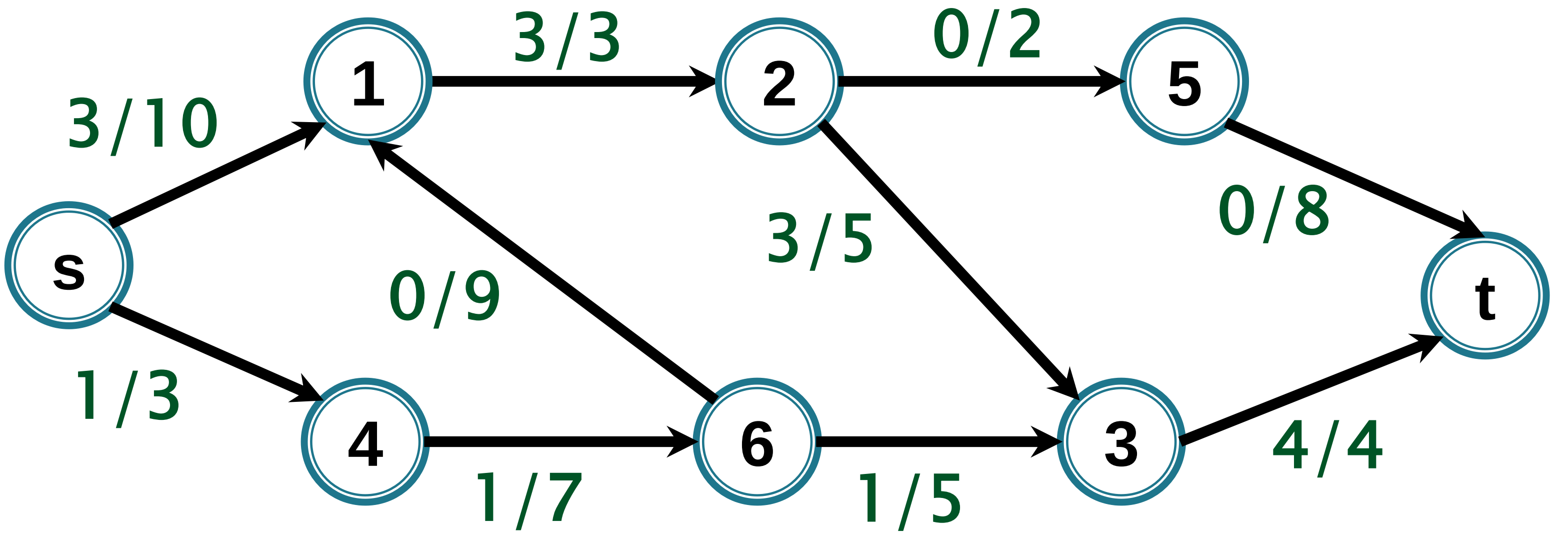
s
1
4
6
3
3/10
1/3
1/7
1/5

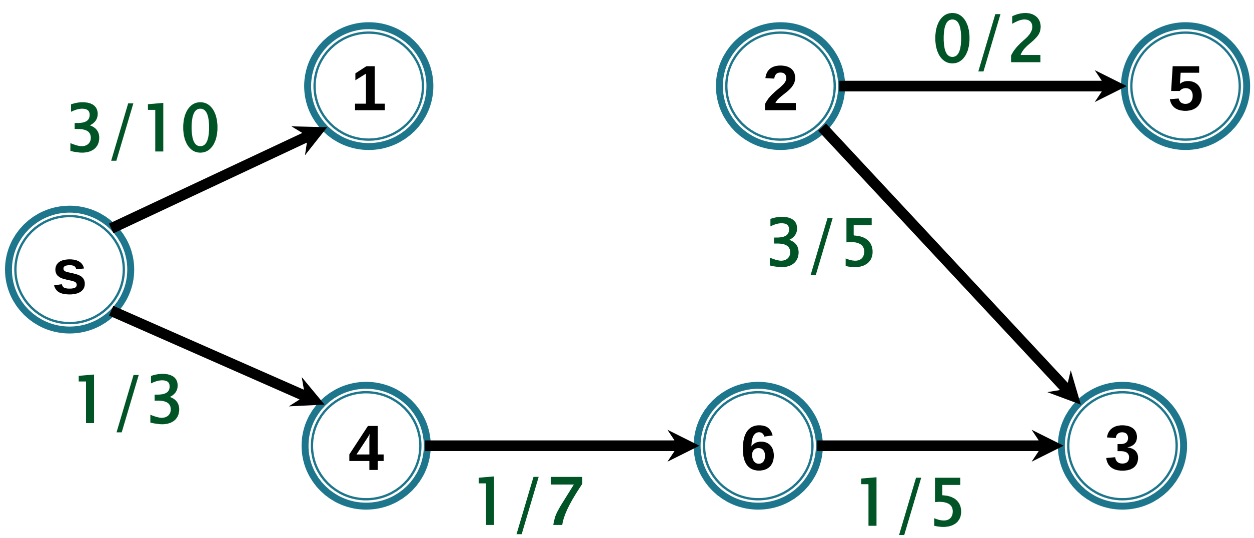

s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
1/3
0/9
3/5
0/8
1/7
1/5
4/4

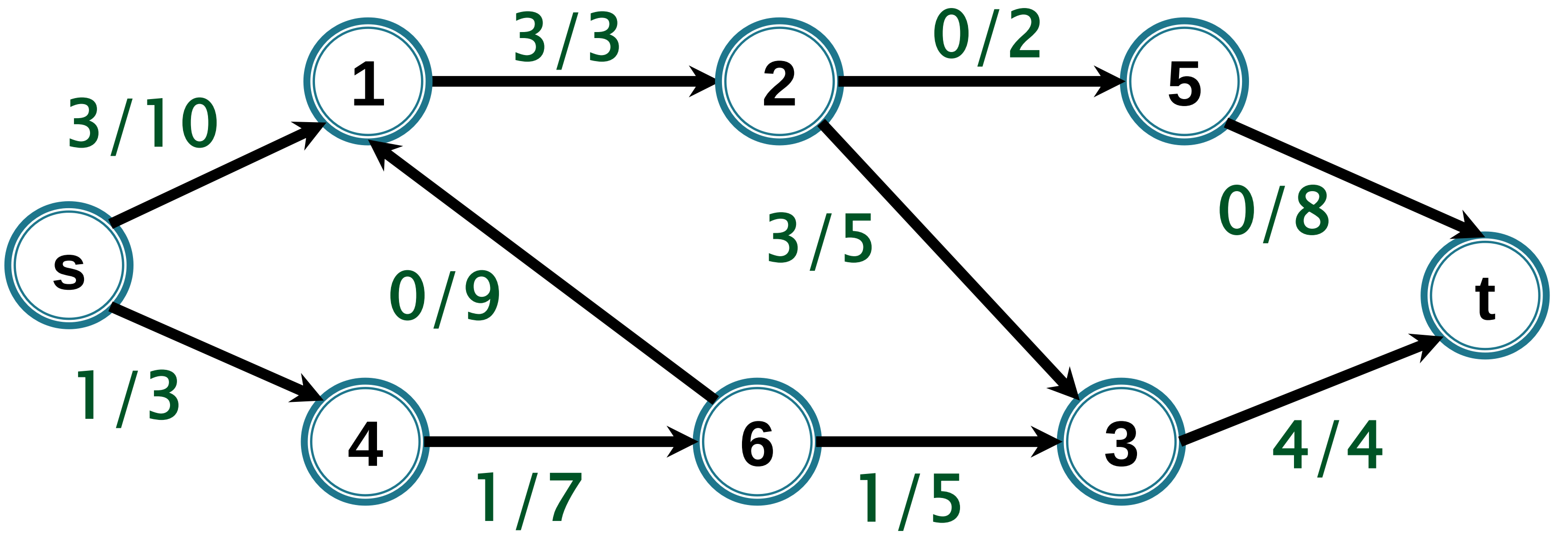

s
1
2
4
6
3
3/10
3/5
1/3
1/7
1/5


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
1/3
1/7
1/5
4/4

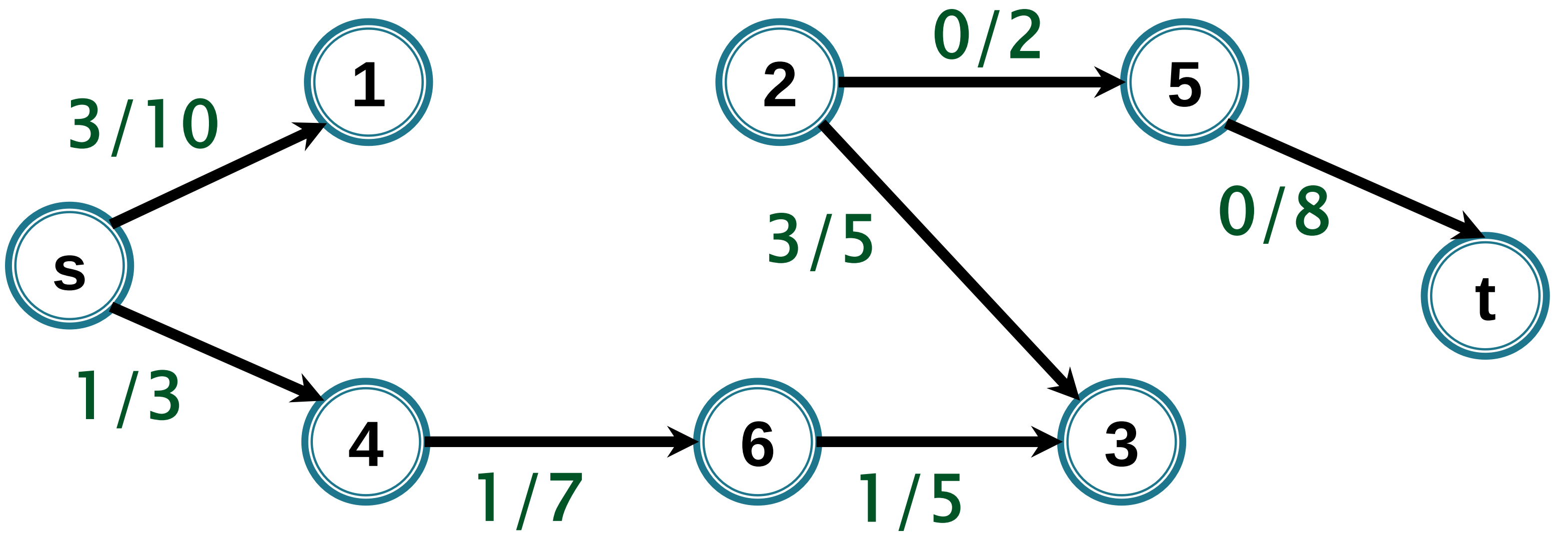

s
1
2
t
4
6
3
3/10
3/5
1/3
1/7
1/5
4−4=0


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
0/9
3/5
1/3
1/7
1/5
4/4


s
1
2
5
4
6
3
3/10
0/2
3/5
1/3
1/7
1/5

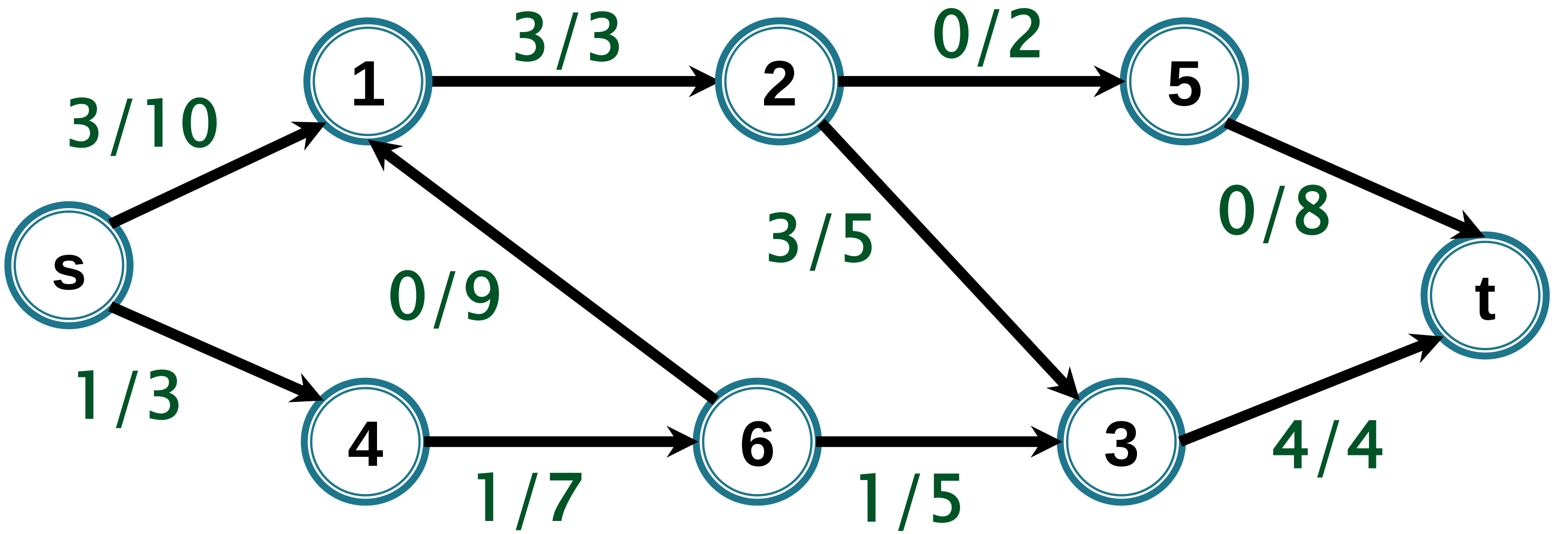


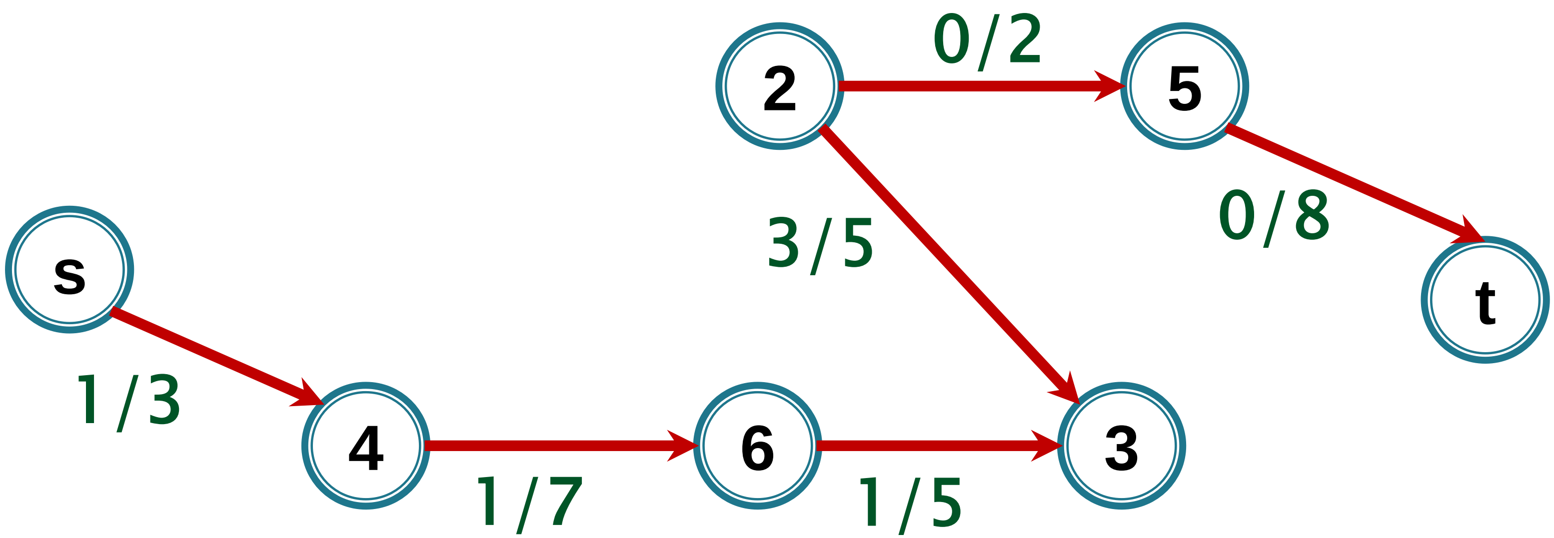
s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
0/2
0/8
3/5
0/9
1/3
1/7
1/5
4/4

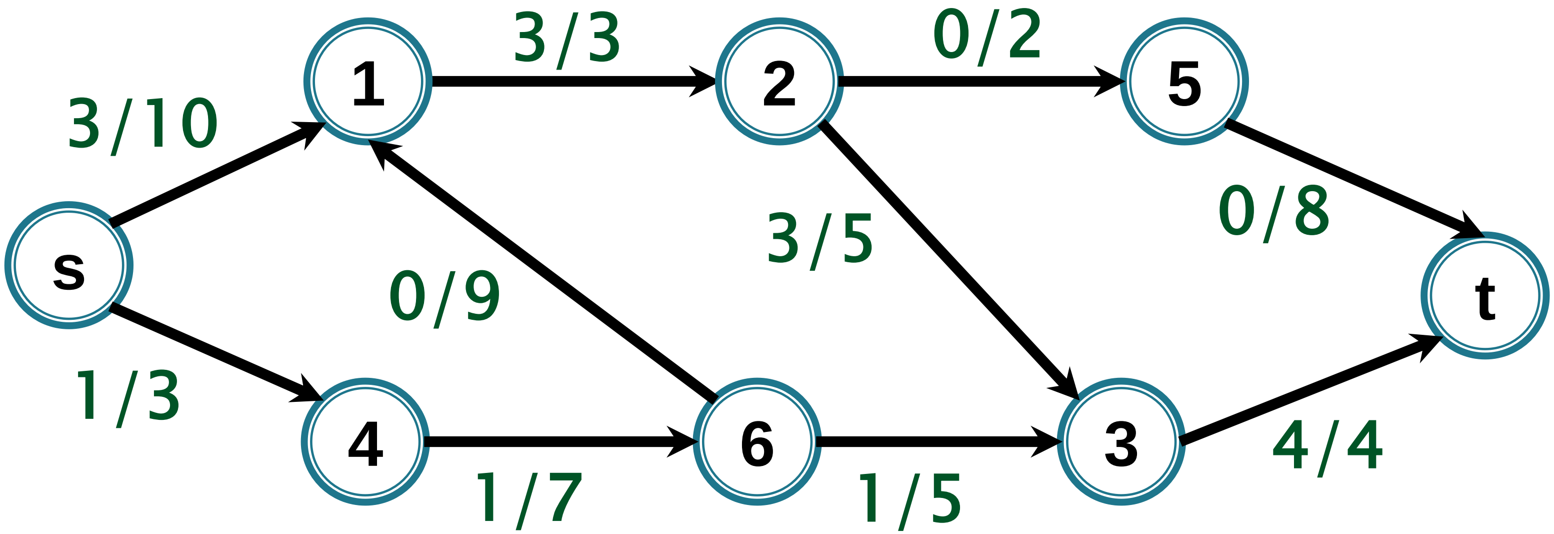


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
0/2
0/8
3/5
1/3
1/7
1/5

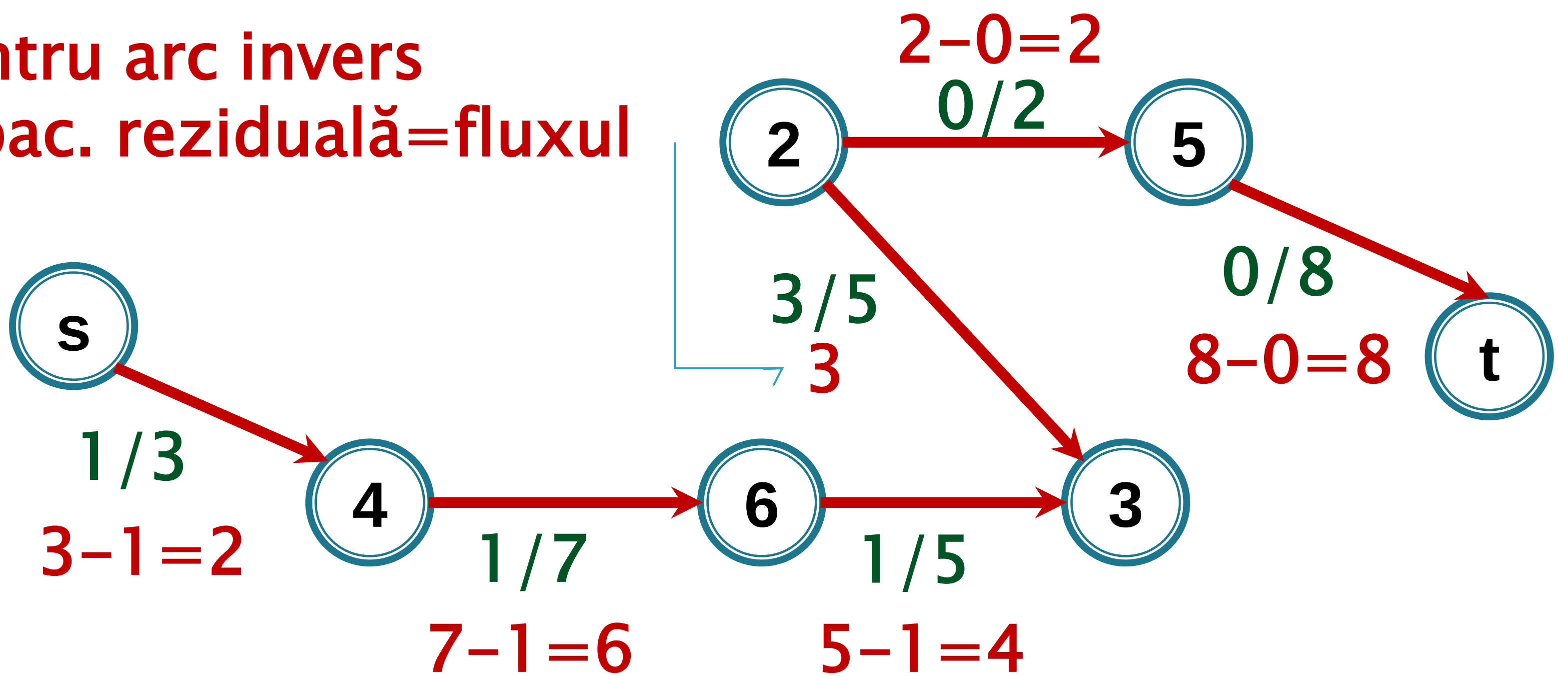
revizuieste_flux_lant

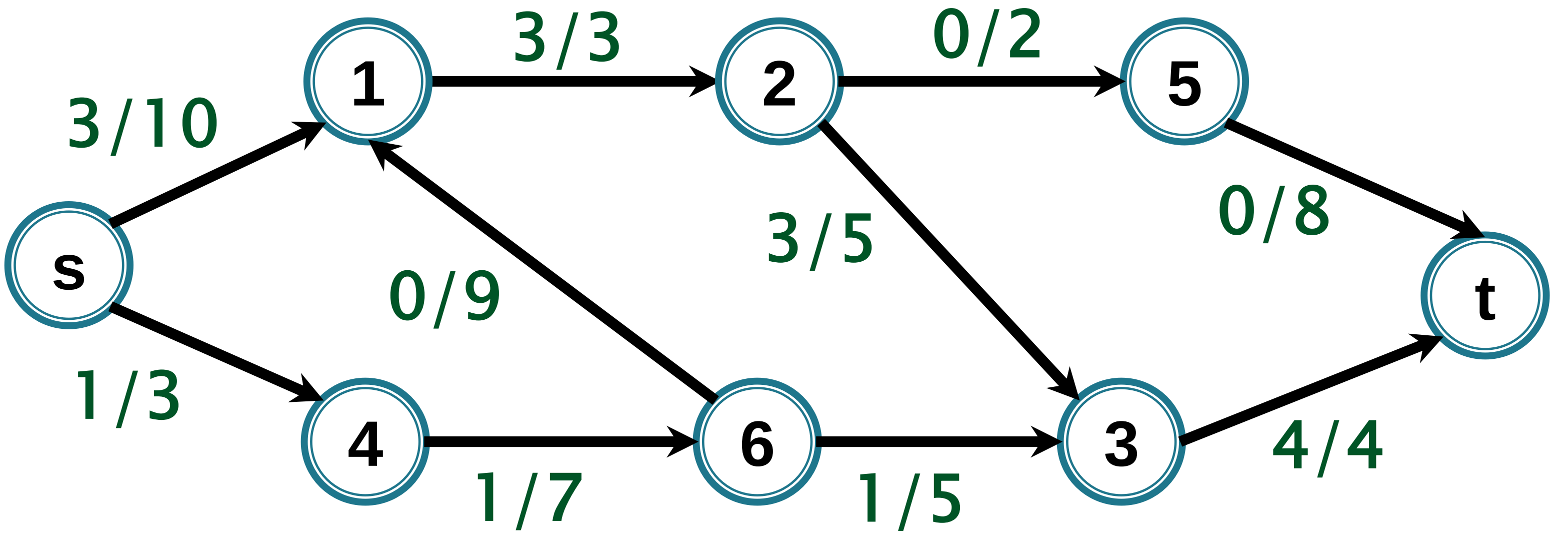

3/10
1
3/3
2
0/2
5
s
0/9
3/5
0/8
t
1/3
4
6
3
4/4
1/7
1/5

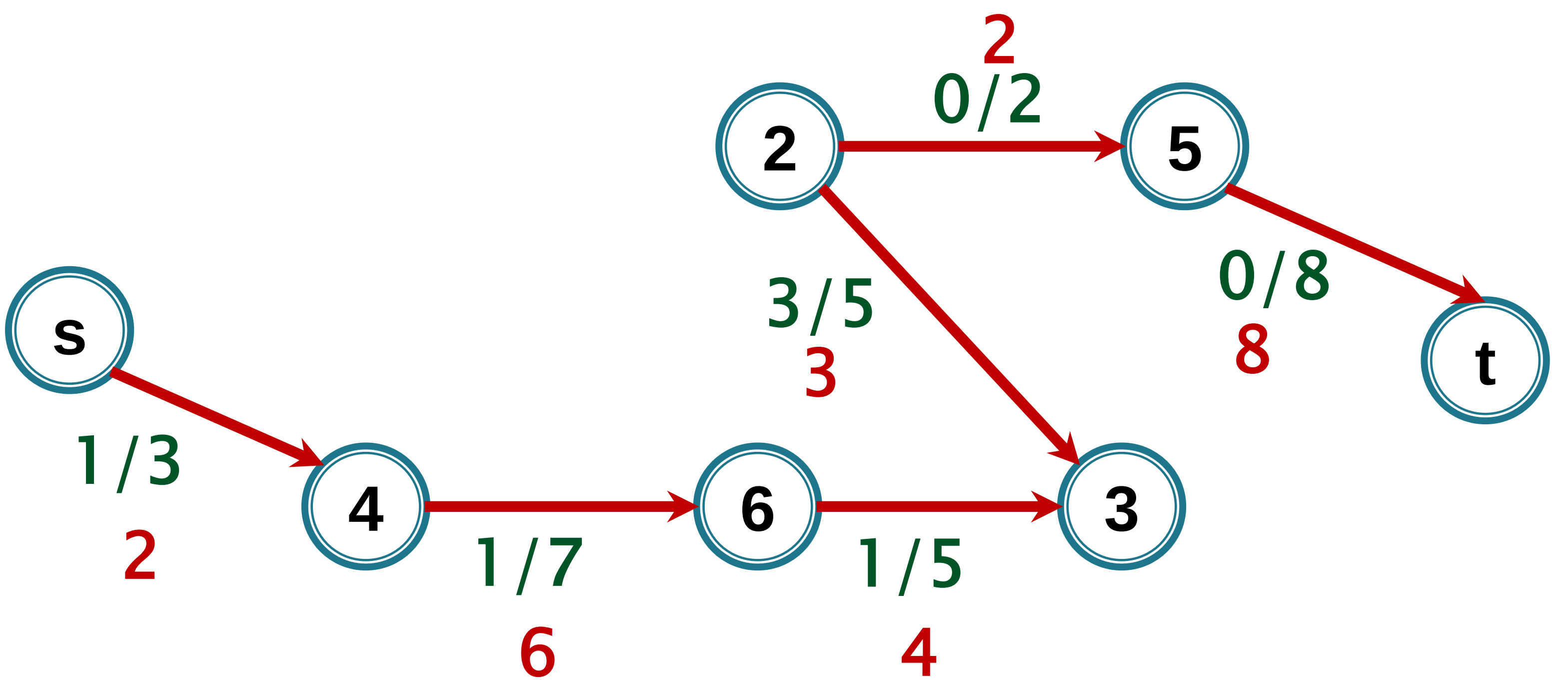

2
0/2
5
3/5
0/8
s
t
1/3
4
6
3
1/7
1/5



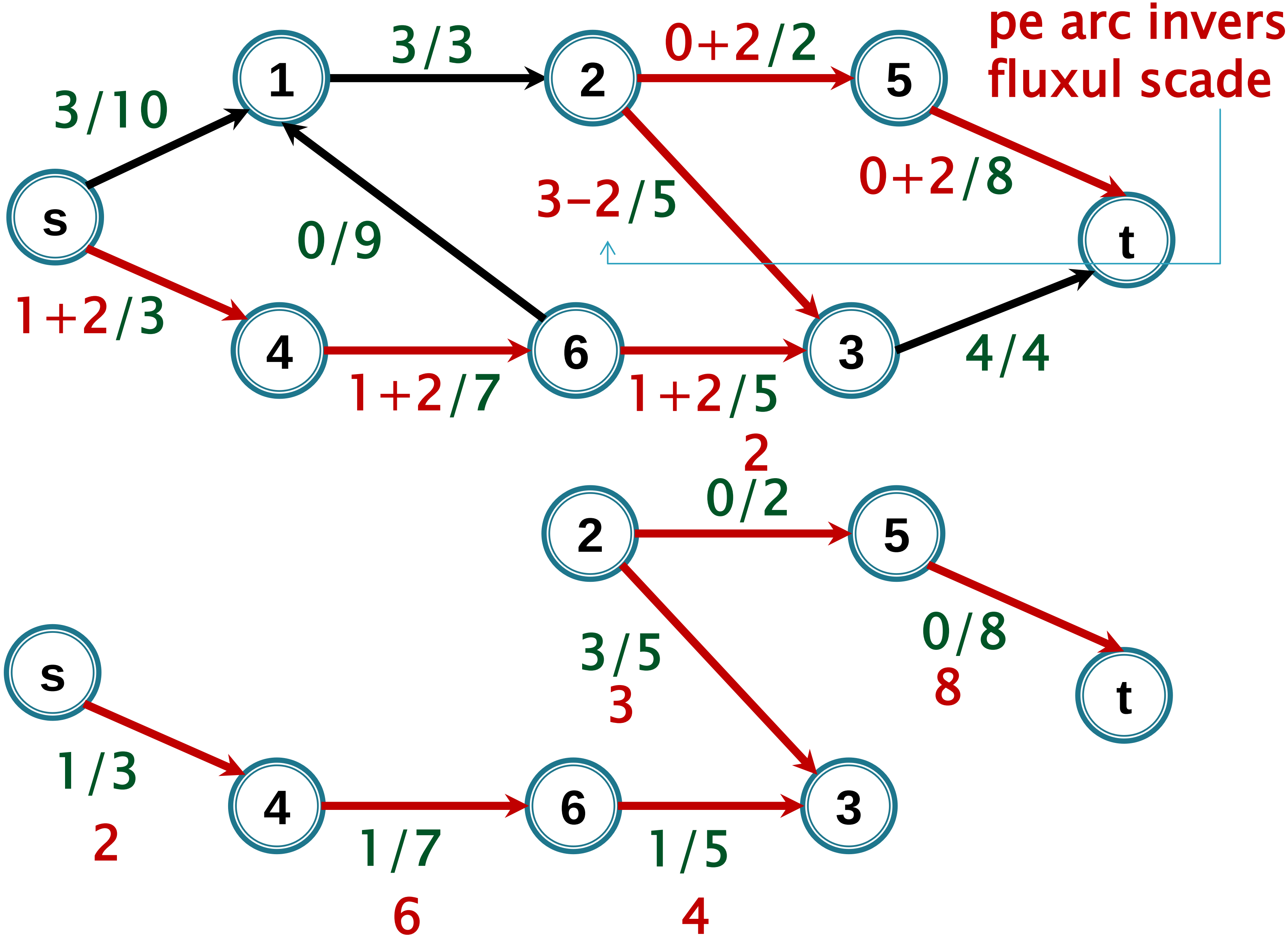
pentru arc invers
capac. reziduală=fluxul



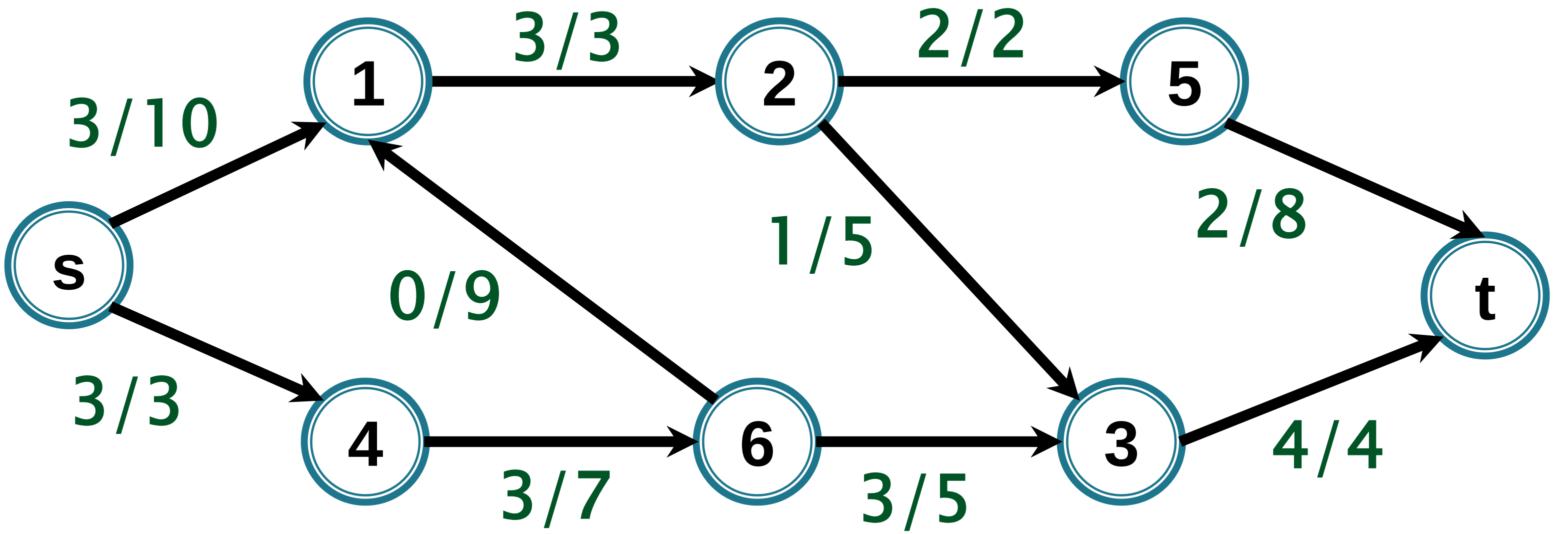




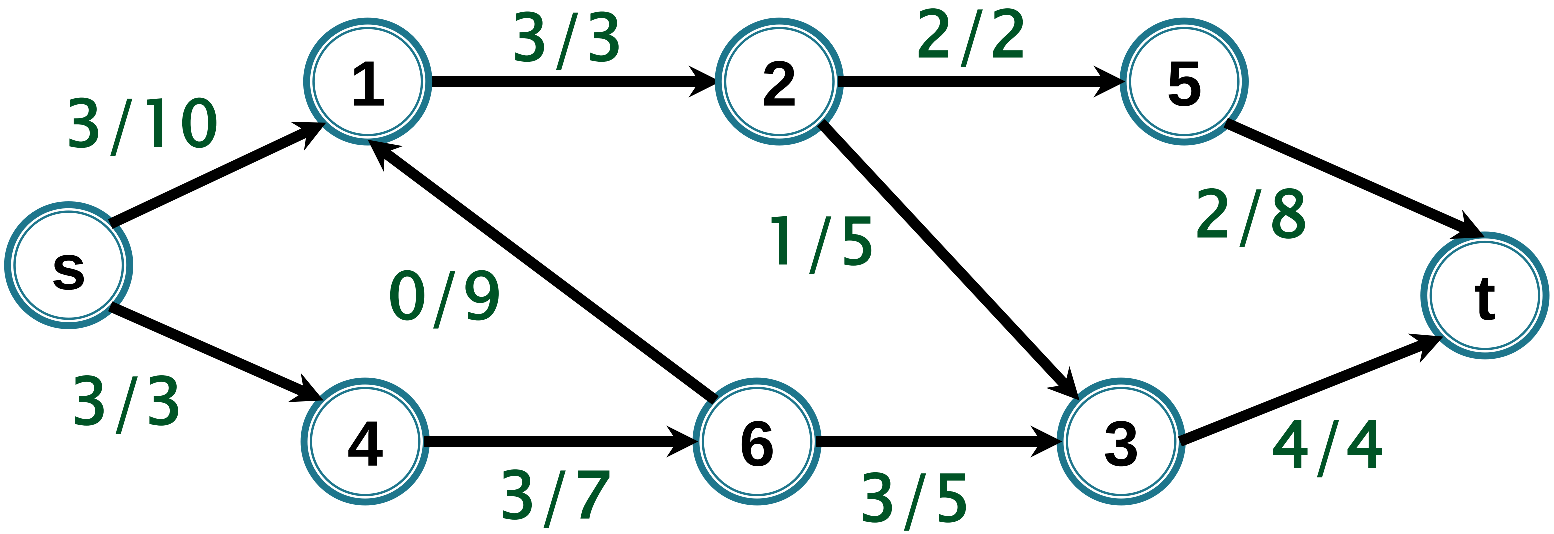
$$i(P) = \min\{2, 6, 4, 3, 2, 8\} = 2$$



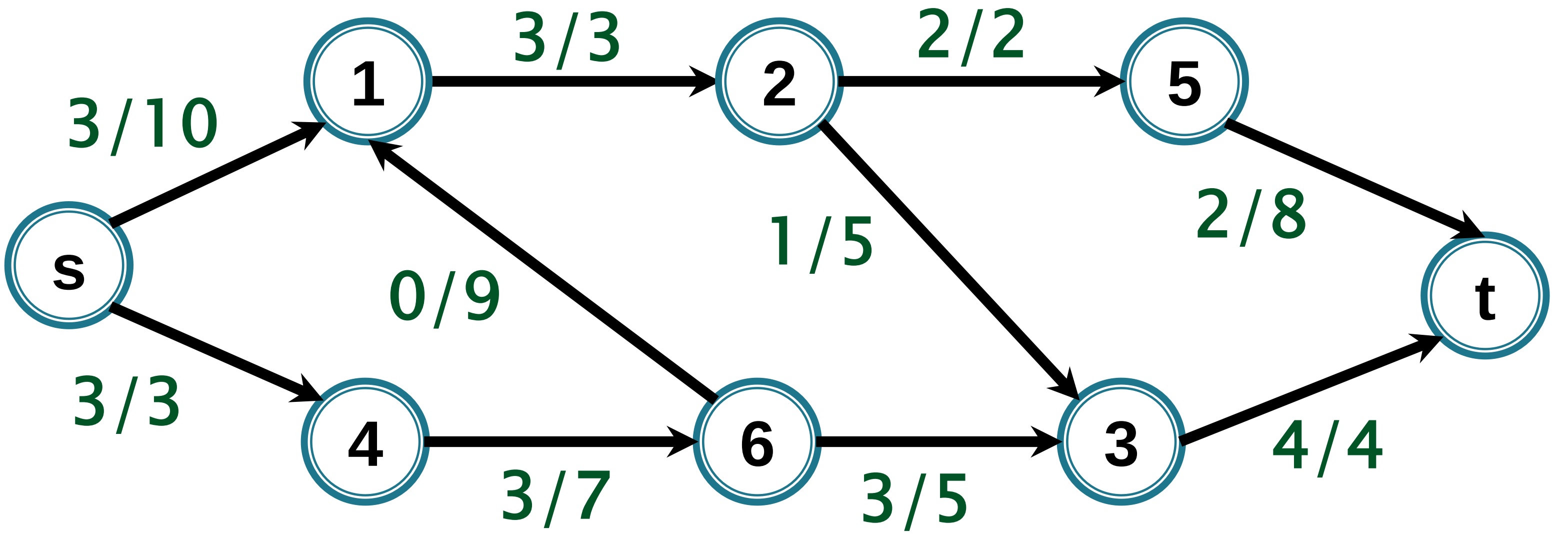
$$i(P) = \min\{\, 2, 6, 4, 3, 2, 8\} = 2$$

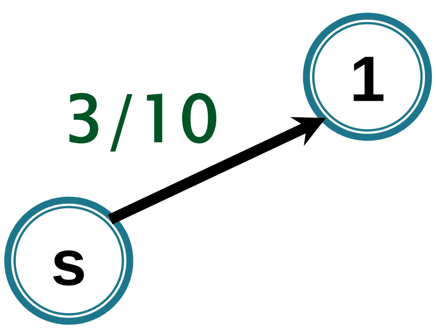

3/10
3/3
1
3/3
2
2/2
5
s
0/9
1/5
2/8
t
3/3
4
6
3
4/4
3/7
3/5

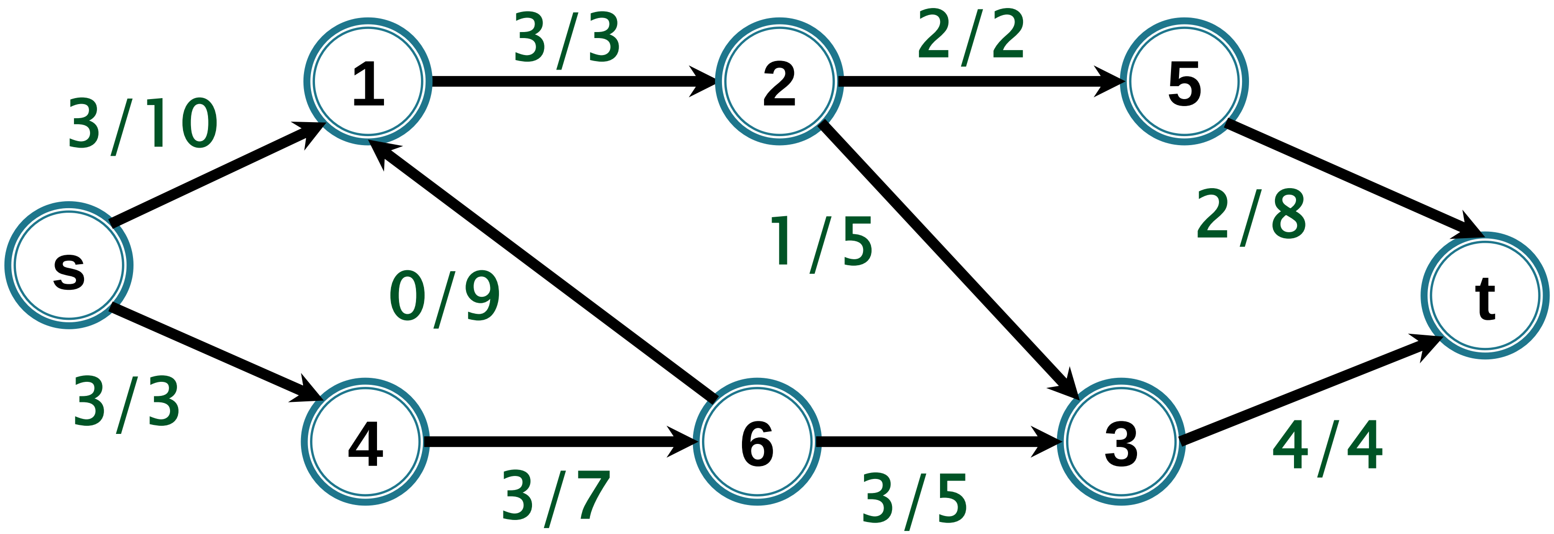
construieste_s-t_lant_nesat


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
2/2
2/8
1/5
0/9
3/3
3/7
3/5
4/4

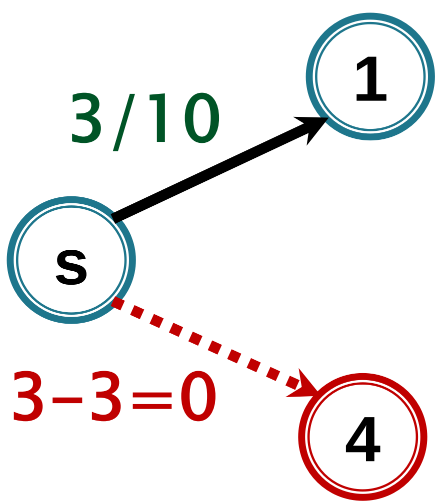

s


3/10
1
3/3
2
2/2
5
s
2/8
1/5
0/9
t
3/3
4
6
3
4/4
3/7
3/5

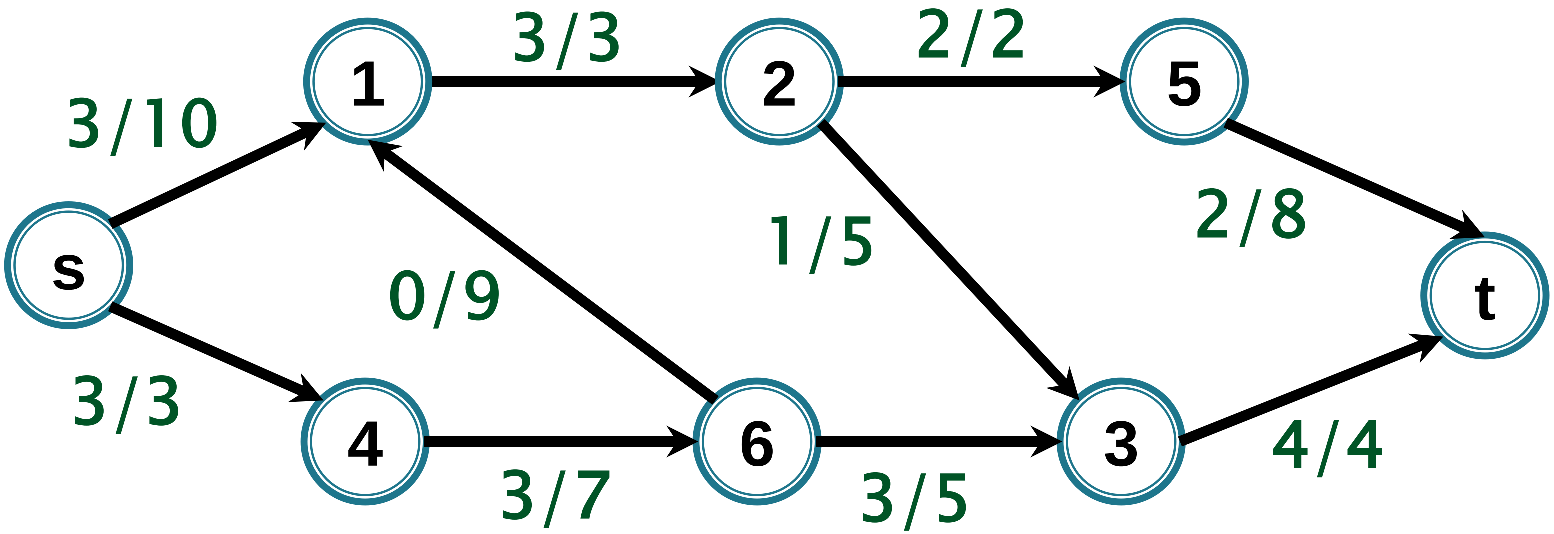

1
3/10
s

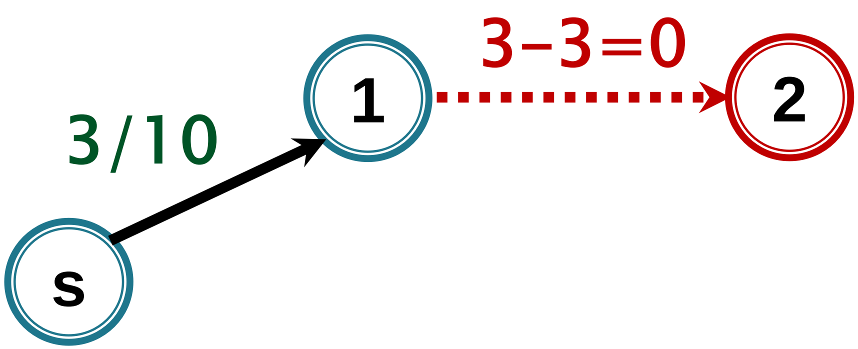


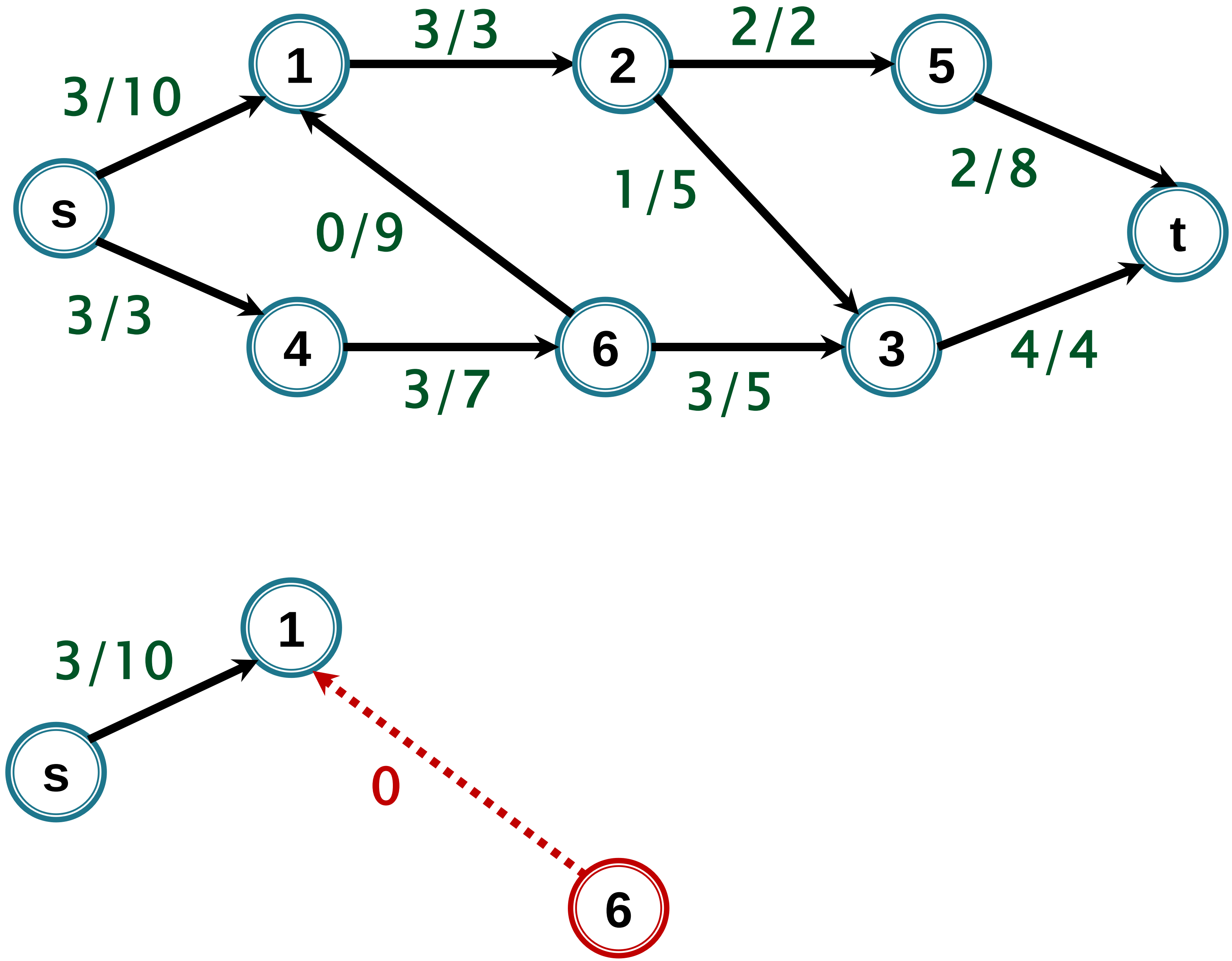
s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
2/2
2/8
1/5
0/9
3/3
3/7
3/5
4/4



s
1
4
3/10
3–3=0

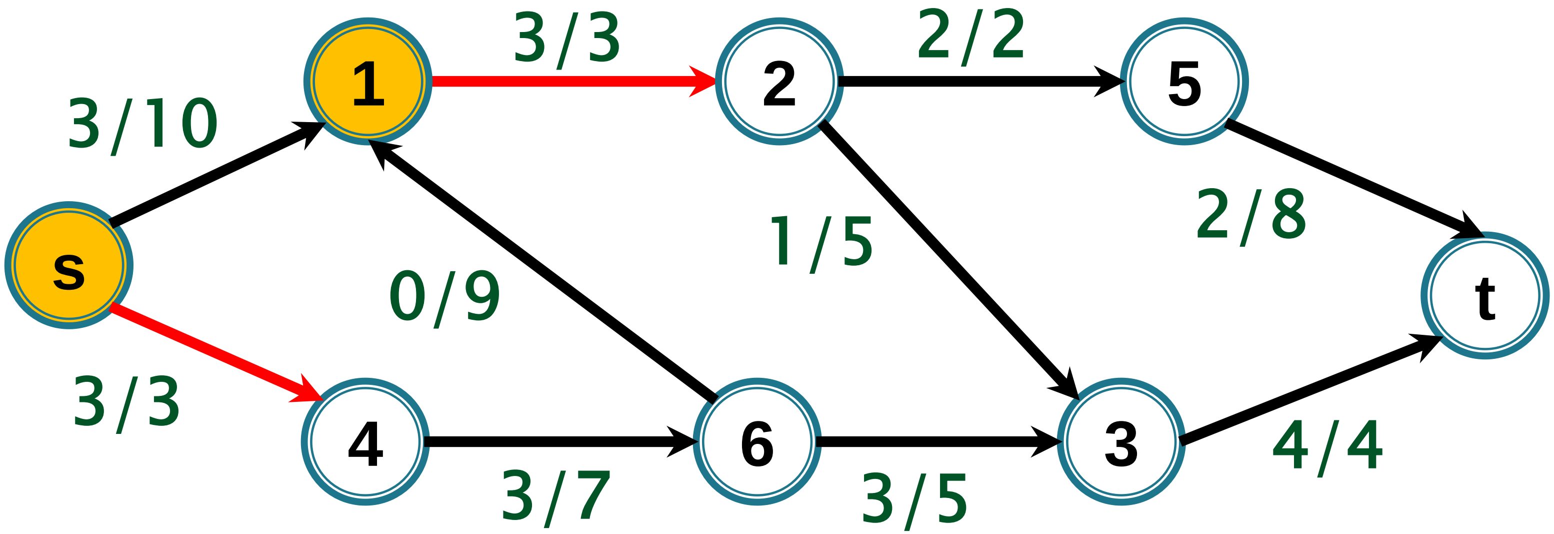

s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
2/2
2/8
1/5
0/9
3/3
3/7
3/5
4/4

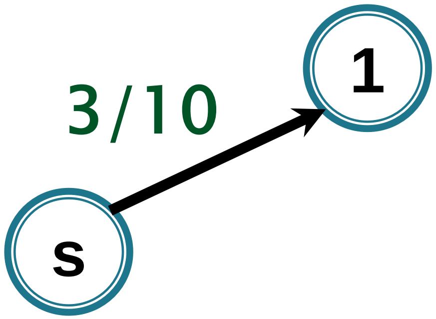

s
1
2
3/10
3–3=0


s
1
2
5
t
4
6
3
3/10
3/3
2/2
2/8
1/5
0/9
3/3
3/7
3/5
4/4
s
1
6
3/10
0

t nu este accesibil din s $\Rightarrow$ STOP t nu este accesibil din s $\Rightarrow$ STOP

- f este flux maxim


3/10
3/3
2/2
1
2
5
s
0/9
1/5
2/8
t
3/3
4
6
3
4/4
3/7
3/5


3/10
1
s

Implementare

- Memorăm lanțurile folosind vector **tata**(notat p)
- <u>**Convenție**</u> – pentru arcele inverse (i,j) ținem minte tatăl cu semnul minus, pentru a le distinge de cele directe:

  p[j] = -i

construieste_s-t_lant()

```
construieste_s-t_lant()
  pentru(v∈V) executa p[v] ←0; viz[v] ←0
```

```
construieste_s-t_lant()
  pentru(v∈V) executa p[v] ←0; viz[v] ←0
  coada C ← ∅
  adauga(s, C)
  viz[s]← 1
```

```
construieste_s-t_lant()
  pentru(v∈V) executa p[v] ←0; viz[v] ←0
  coada C ← ∅
  adauga(s, C)
  viz[s]← 1
  cat timp C ≠ ∅ executa
     i ←  extrage(C)
```

```
construieste_s-t_lant()
  pentru(v∈V) executa p[v] ←0; viz[v] ←0
  coada C ← ∅
  adauga(s, C)
  viz[s]← 1
  cat timp C ≠ ∅ executa
     i ←  extrage(C)
     pentru (ij ∈ E) executa   arc direct
         dacă (viz[j]=0 și c(ij)-f(ij)>0) atunci
```

```
construieste_s-t_lant()
  pentru(v∈V) executa p[v] ←0; viz[v] ←0
  coada C ← ∅
  adauga(s, C)
  viz[s]← 1
  cat timp C ≠ ∅ executa
     i ←  extrage(C)
     pentru (ij ∈ E) executa   arc direct
         dacă (viz[j]=0 și c(ij)-f(ij)>0) atunci
            adauga(j, C)
            viz[j] ← 1; p[j] ← i
```

```
construieste_s-t_lant()
  pentru(v∈V) executa p[v] ←0; viz[v] ←0
  coada C ← ∅
  adauga(s, C)
  viz[s]← 1
  cat timp C ≠ ∅ executa
     i ←  extrage(C)
     pentru (ij ∈ E) executa   arc direct
         dacă (viz[j]=0 și c(ij)-f(ij)>0) atunci
            adauga(j, C)
            viz[j] ← 1; p[j] ← i
            daca (j=t) atunci STOP și returnează true(1)
```

```
construieste_s-t_lant()
  pentru(v∈V) executa p[v] ←0; viz[v] ←0
  coada C ← ∅
  adauga(s, C)
  viz[s]← 1
  cat timp C ≠ ∅ executa
     i ←  extrage(C)
     pentru (ij ∈ E) executa   arc direct
         dacă (viz[j]=0 și c(ij)-f(ij)>0) atunci
            adauga(j, C)
            viz[j] ← 1; p[j] ← i
            daca (j=t) atunci STOP și returnează true(1)
     pentru (ji ∈ E) executa     arc invers
```

```
construieste_s-t_lant()
  pentru(v∈V) executa p[v] ←0; viz[v] ←0
  coada C ← ∅
  adauga(s, C)
  viz[s]← 1
  cat timp C ≠ ∅ executa
     i ←  extrage(C)
     pentru (ij ∈ E) executa    arc direct
         dacă (viz[j]=0 și c(ij)-f(ij)>0) atunci
            adauga(j, C)
            viz[j] ← 1; p[j] ← i
            daca (j=t) atunci STOP și returnează true(1)
     pentru (ji ∈ E) executa     arc invers
         daca (viz[j]=0 și f(ji)>0) atunci
```

```
construieste_s-t_lant()
  pentru(v∈V) executa p[v] ←0; viz[v] ←0
  coada C ← ∅
  adauga(s, C)
  viz[s]← 1
  cat timp C ≠ ∅ executa
     i ←  extrage(C)
     pentru (ij ∈ E) executa    arc direct
         dacă (viz[j]=0 și c(ij)-f(ij)>0) atunci
            adauga(j, C)
            viz[j] ← 1; p[j] ← i
            daca (j=t) atunci STOP și returnează true(1)
     pentru (ji ∈ E) executa      arc invers
         daca (viz[j]=0 și f(ji)>0) atunci
            adauga(j, C)
            viz[j] ← 1; p[j] ← -i
```

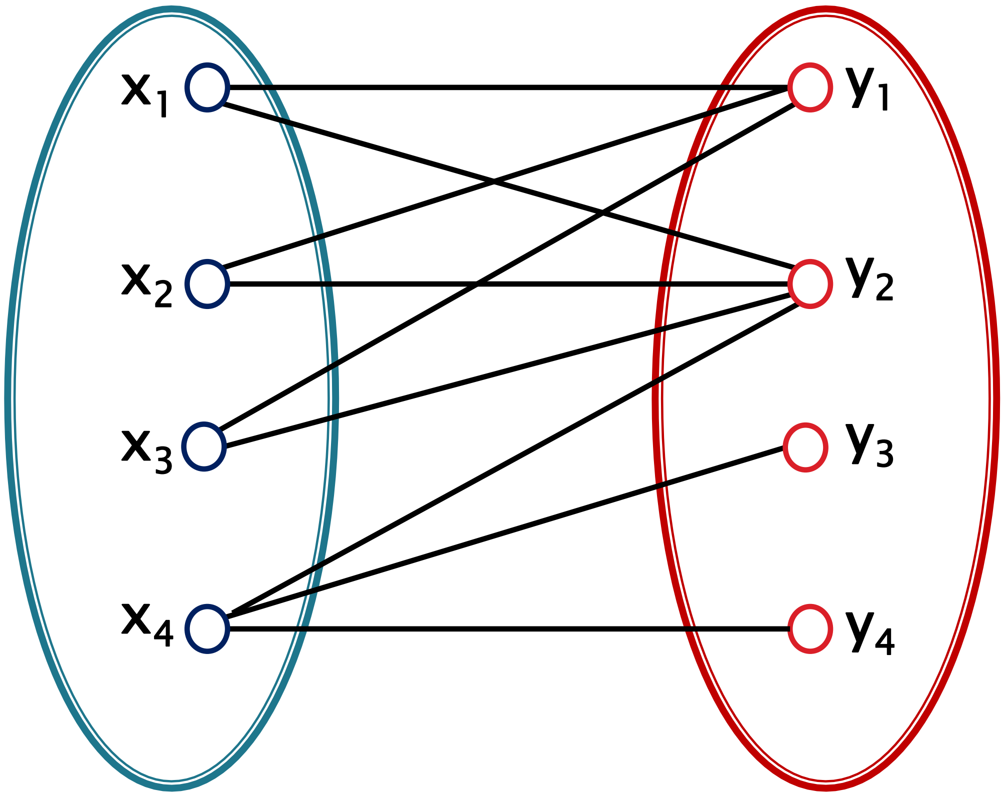
```
construieste_s-t_lant()
  pentru(v∈V) executa p[v] ←0; viz[v] ←0
  coada C ← ∅
  adauga(s, C)
  viz[s]← 1
  cat timp C ≠ ∅ executa
     i ←  extrage(C)
     pentru (ij ∈ E) executa   arc direct
         dacă (viz[j]=0 și c(ij)-f(ij)>0) atunci
            adauga(j, C)
            viz[j] ← 1; p[j] ← i
            daca (j=t) atunci STOP și returnează true
     pentru (ji ∈ E) executa      arc invers
         daca (viz[j]=0 și f(ji)>0) atunci
            adauga(j, C)
            viz[j] ← 1; p[j] ← -i
            daca (j=t) atunci STOP și returnează true
  returnează false
```

Aplicaţie

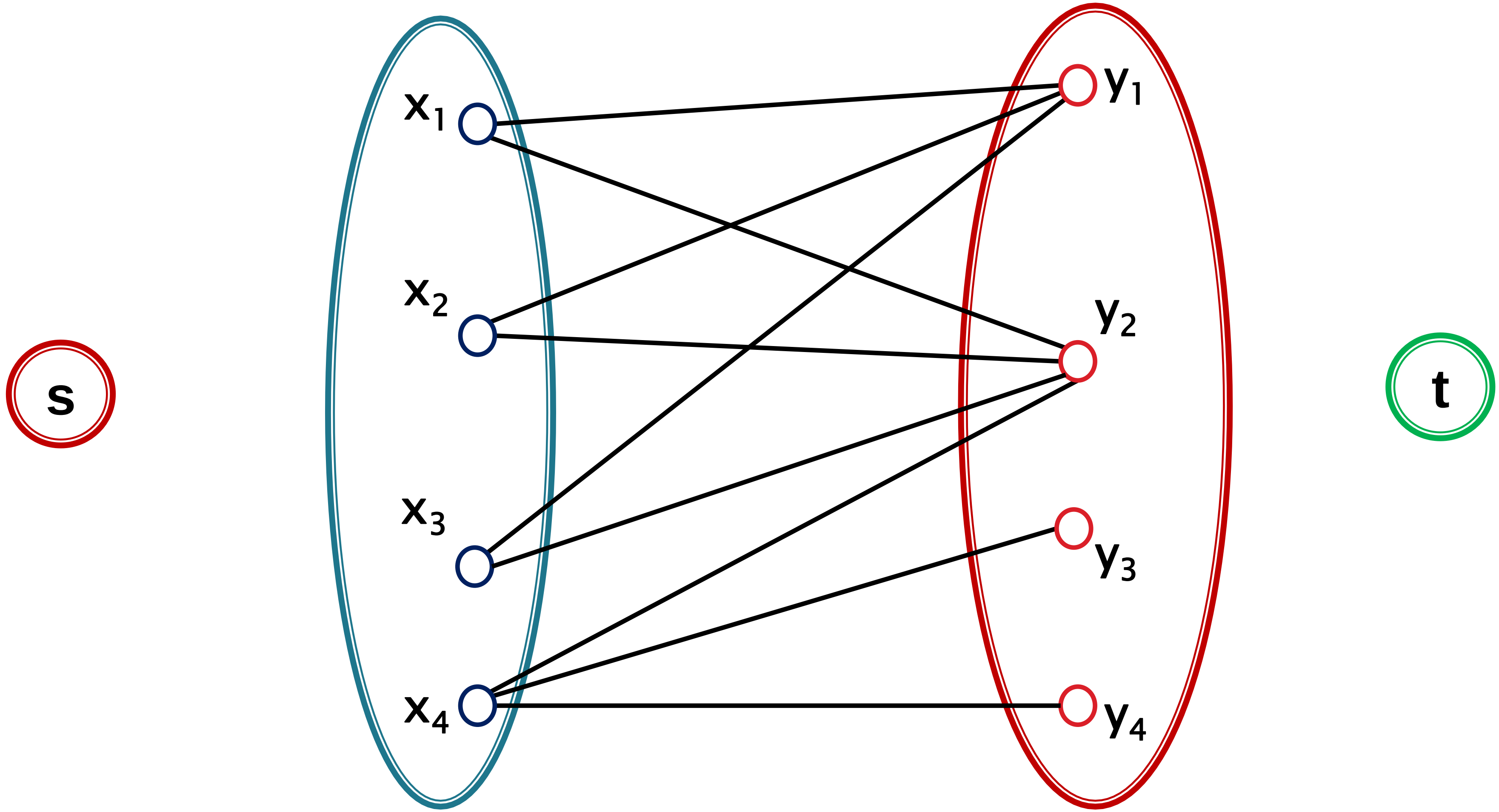
Flux maxim $\rightarrow$ cuplaj maxim

în grafuri bipartite

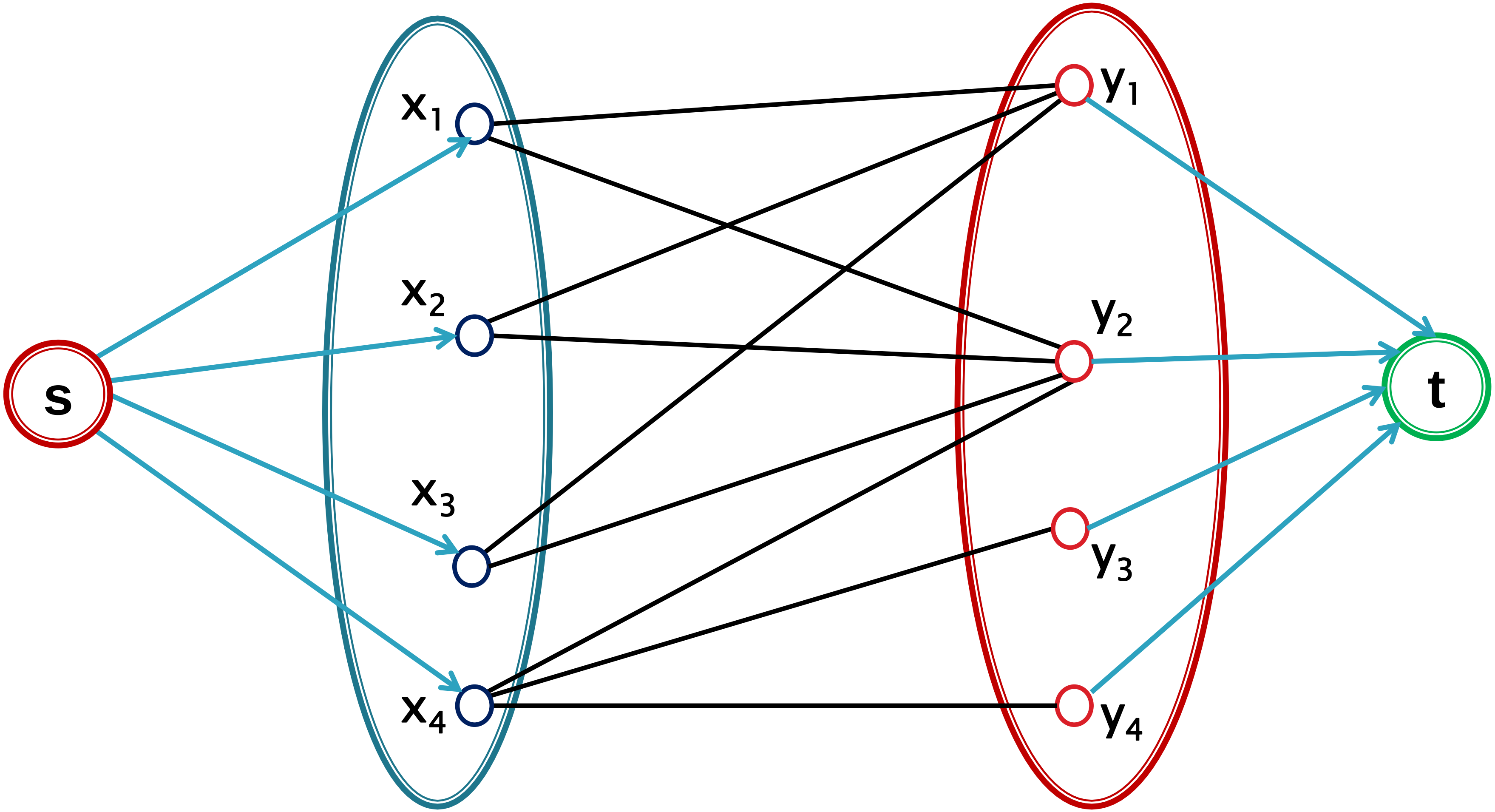
- Problema determinării unui cuplaj maxim într-un graf bipartit se poate reduce la problema determinării unui flux maxim în **reţeaua asociată grafului bipartit**, construită astfel:



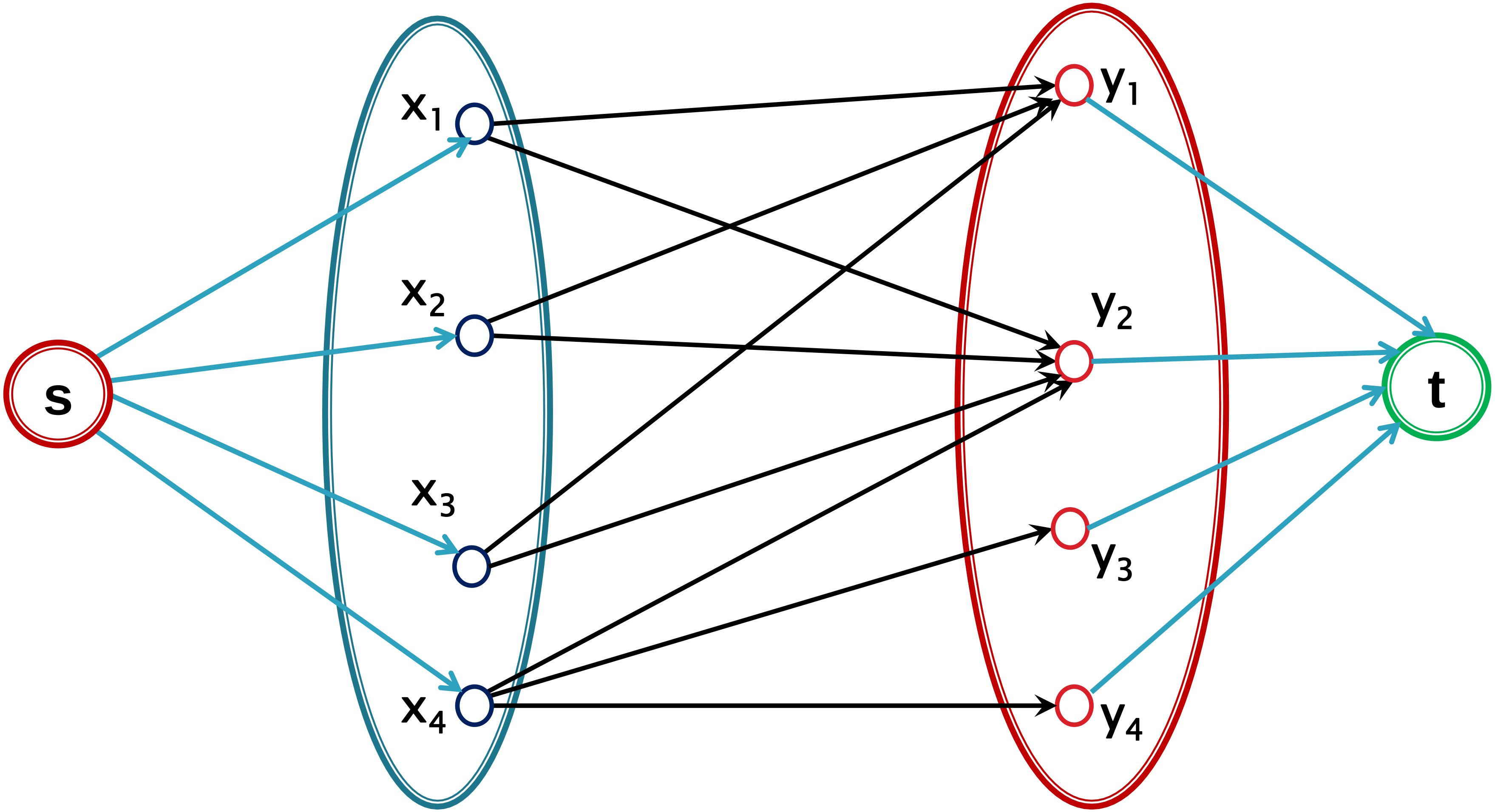
- Adăugăm două noduri noi s şi t



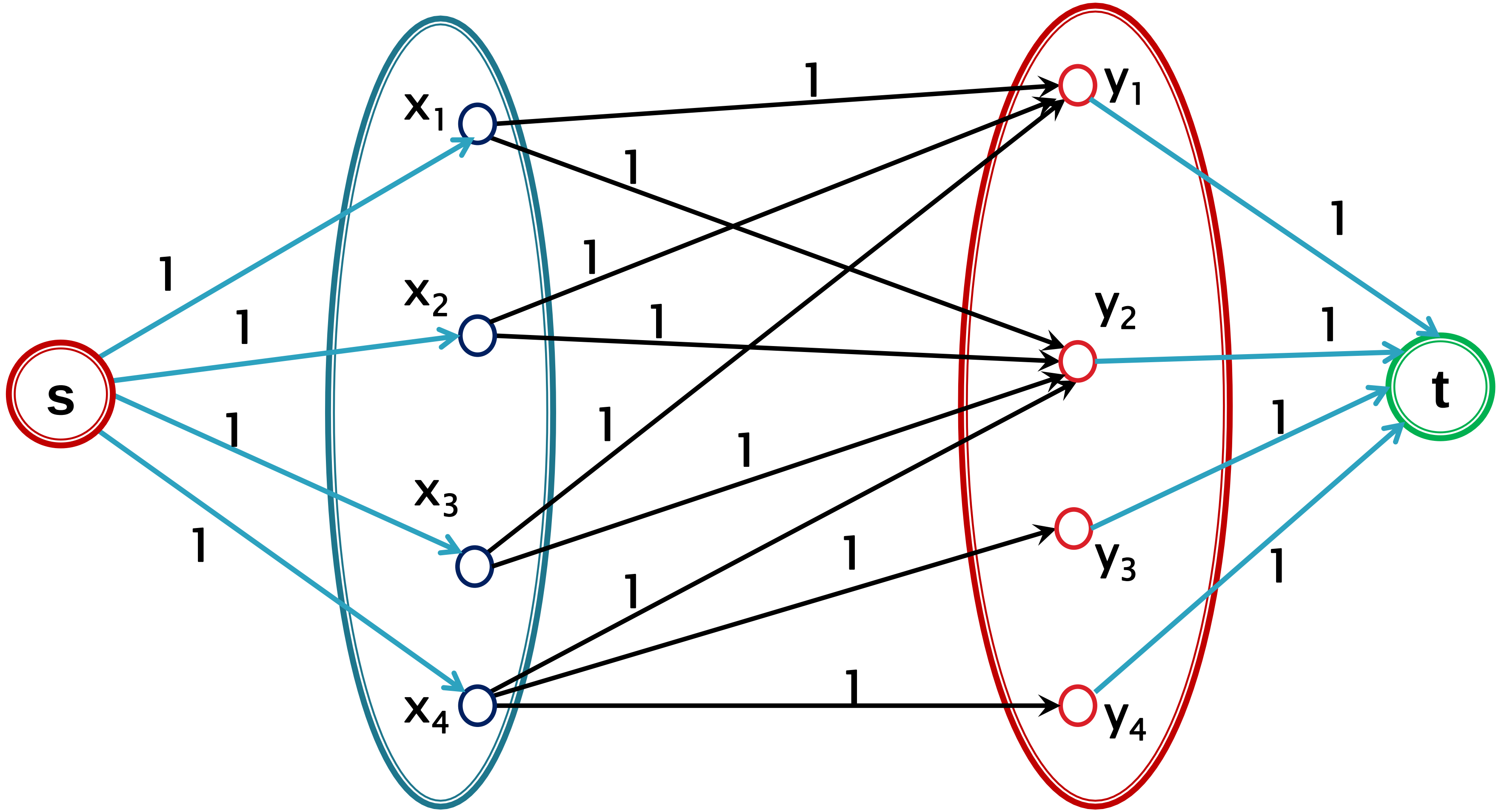
- Adăugăm arce (s,x_i), pentru $x_i \in X$ şi (y_j, t), $y_j \in Y$



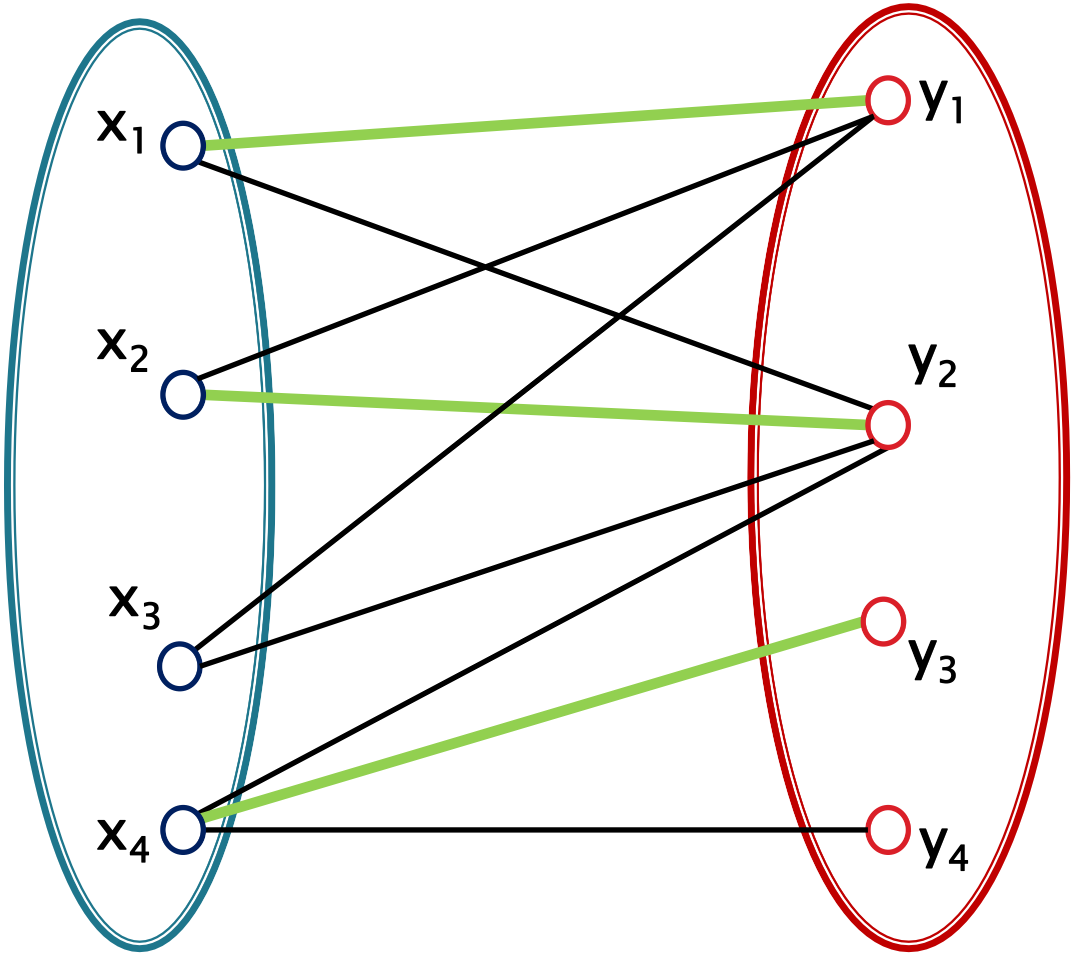
- Transformăm muchiile x_iy_j în arce (de la X la Y)



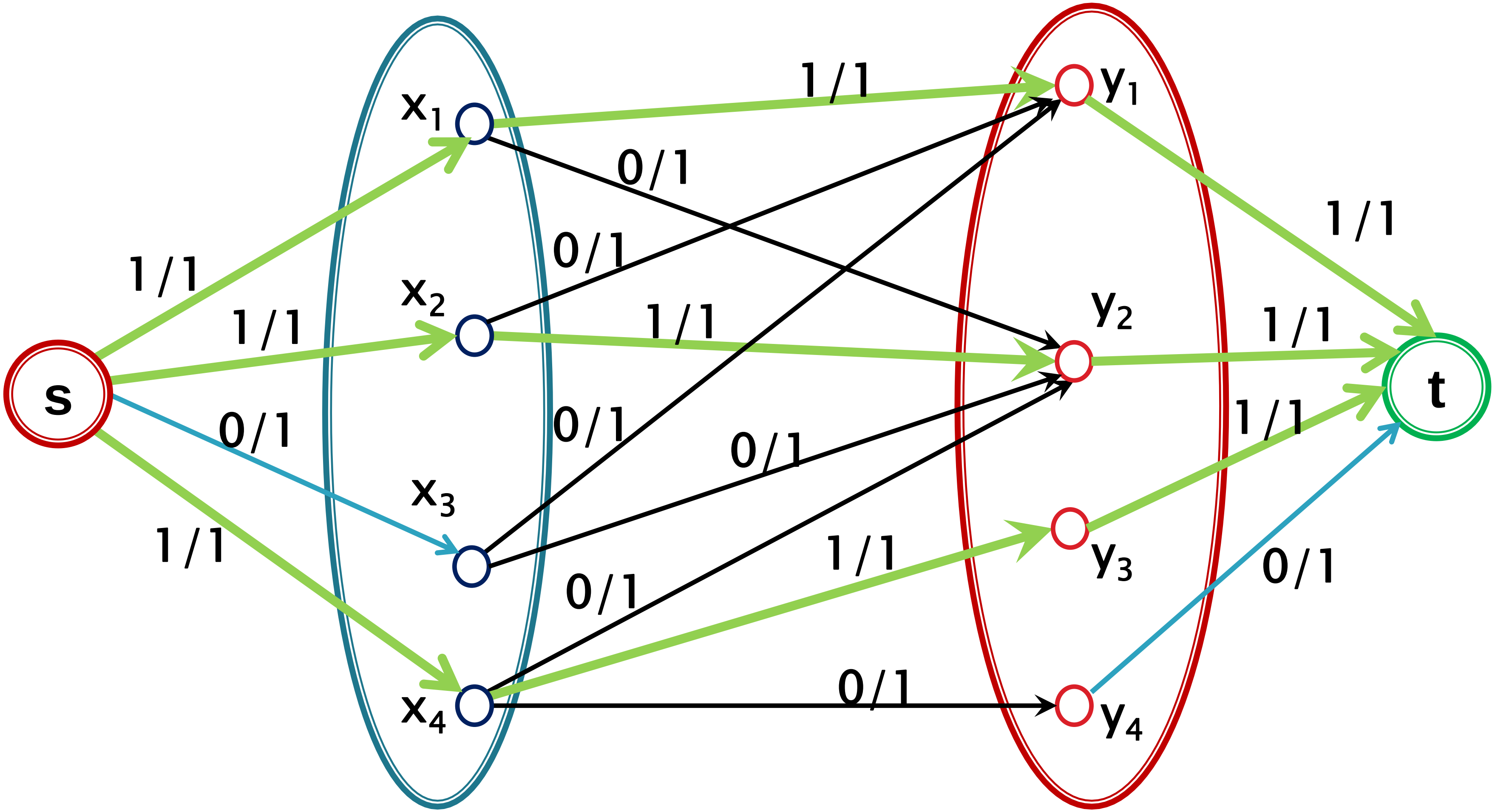
- Asociem fiecărui arc capacitatea 1



- Cuplaj în graf ↔ flux în reţea



- Cuplaj în graf $\leftrightarrow$ flux în reţea



- **Proprietatea 1**

Fie G un graf bipartit şi M un cuplaj în G. Atunci există un flux f în reţeaua asociată cu

$$val(f) = |M|$$

Proprietatea 1

Fie G un graf bipartit şi M un cuplaj în G. Atunci există un flux f în reţeaua asociată cu

$$\mathbf{val(f) = |M|}$$

Justificare

Definim:

- $f(sx) = f(xy) = f(yt) = 1$, pentru orice $xy \in M$
- $f(uv) = 0$, în rest

Proprietatea 2

Fie G un graf bipartit şi f un flux în reţeaua asociată. Atunci există M un cuplaj în G cu

$$\text{val}(f) = |M|$$

Proprietatea 2

Fie G un graf bipartit şi f un flux în reţeaua asociată. Atunci există M un cuplaj în G cu

$$\mathbf{val(f) = |M|}$$

<u>Justificare</u>

Avem $f(uv) \in \{0, 1\}$, pentru orice arc uv.

Definim $\mathbf{M = \{xy|\ f(xy)>0 \text{ şi } x \neq s, y \neq t\}}$

Proprietatea 2

Fie G un graf bipartit şi f un flux în reţeaua asociată. Atunci există M un cuplaj în G cu

$$\mathbf{val(f) = |M|}$$

<u>**Justificare**</u>

Avem $f(uv) \in \{0, 1\}$, pentru orice arc uv.

Definim $\mathbf{M = \{xy \mid f(xy)>0 \text{ şi } x \neq s, y \neq t\}}$

M este cuplaj cu $|M| = val(f)$ deoarece

- $c(sx)=1$, $c(yt)=1 \Rightarrow$ M conţine muchii neadiacente
- $f(xy)>0 \Rightarrow f(sx) = f(xy) = f(yt) = 1$

- **Consecinţă**

A determina un cuplaj maxim într-un graf bipartit $\Leftrightarrow$

A determina un flux maxim în reţeaua asciată

Aplicaţie
Construcţia unui graf orientat din secvenţele de grade

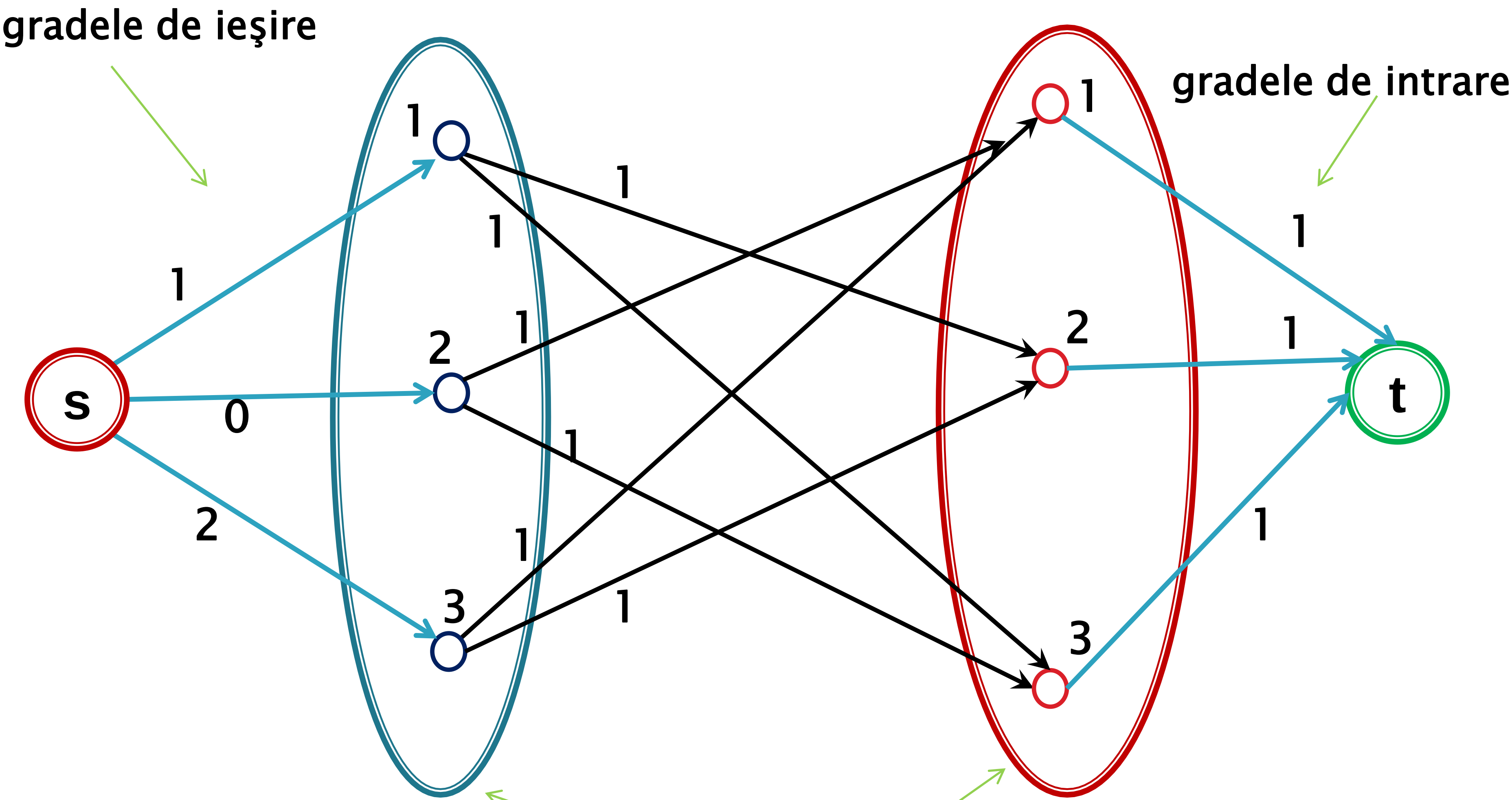
- Se dau secvenţele
  - $s_0^+ = \{d_1^+, \ldots, d_n^+\}$
  - $s_0^- = \{d_1^-, \ldots, d_n^-\}$

Să se construiască, dacă se poate, un graf orientat G cu $s^+(G) = s_0^+$ şi $s^-(G) = s_0^-$ (fără bucle şi arce multiple)

- Se dau secvenţele
  - $s_0^+ = \{d_1^+, \ldots, d_n^+\}$
  - $s_0^- = \{d_1^-, \ldots, d_n^-\}$

Să se construiască, dacă se poate, un graf orientat G cu $s^+(G) = s_0^+$ şi $s^-(G) = s_0^-$ (fără bucle şi arce multiple)

- **Exemplu**
  - $s_0^+ = \{1, 0, 2\}$
  - $s_0^- = \{1, 1, 1\}$



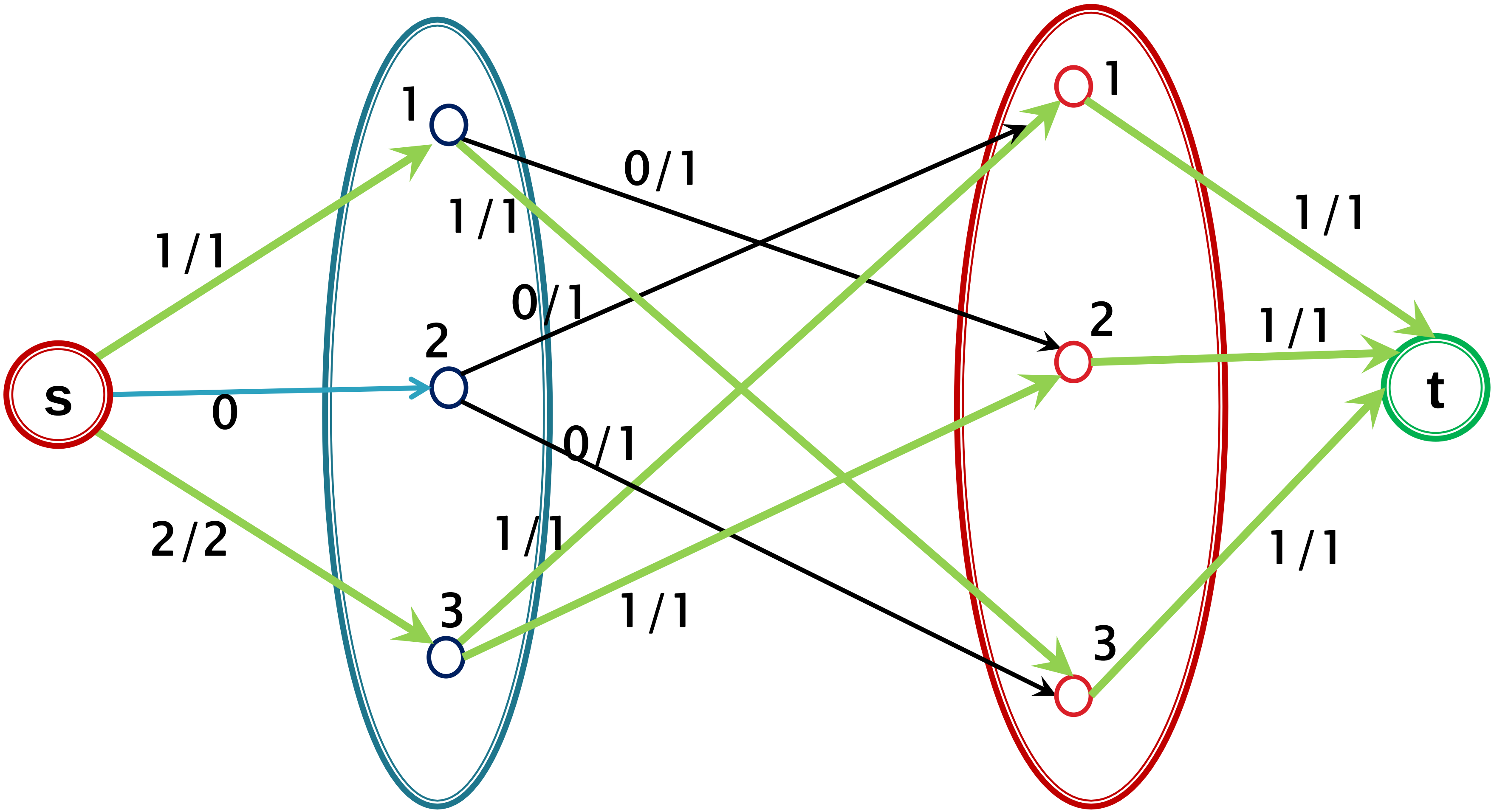
Vârfurile 1, 2,..., n se pun în ambele clase ale bipartiţiei (câte o copie)

- **Proprietate**

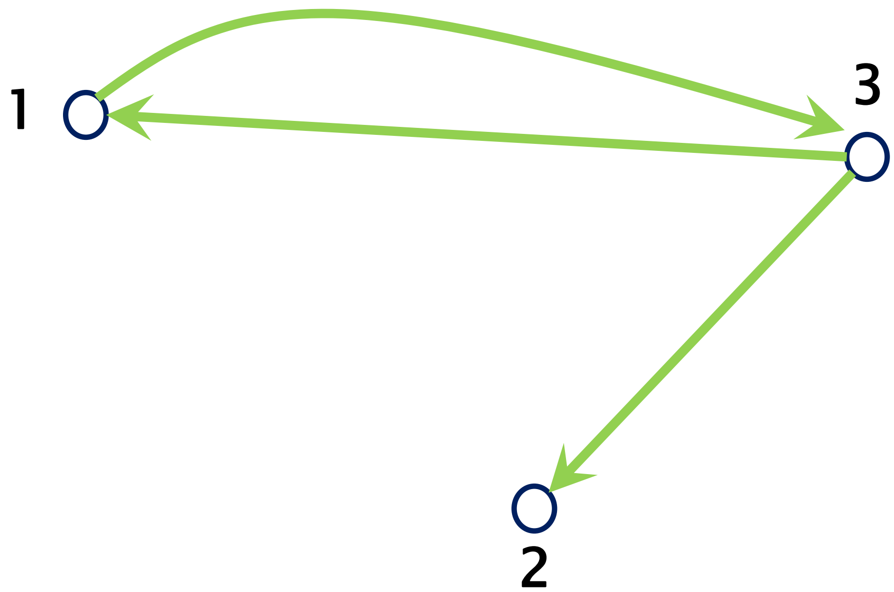
  Există graf cu secvenţele date $\Leftrightarrow$ în graful asociat fluxul de valoare maximă are

$$\text{val}(f) = d_1^+ + \ldots + d_n^+ = d_1^- + \ldots + d_n^-$$

  deci **saturează toate arcele cu o extremitate în s sau în t**



s
1/1
0
2/2
1
2
3
1/1
0/1
0/1
0/1
1/1
1/1
1
2
3
1/1
1/1
1/1
t


1
3
2

S-a terminat cursul!

Succes la examen!

©Marinescu - Ghemeci Ruxandra