Curs 10

Cuprins

Sisteme de rescriere abstracte

- Terminarea unui sistem de rescriere este nedecidabilă.
  - echivalentă cu oprirea mașinilor Turing
- Pentru sisteme de rescriere particulare putem decide asupra terminării.
  - diverse metode
- Pentru sisteme de rescriere care se termină, confluența este decidabilă.
  - algoritmul Knuth-Bendix

Sisteme de rescriere

TRS - Term Rewriting System

Fie (S, Σ) signatură și Y mulțime de variabile.

- O regulă de rescriere (peste Y) este formată din $l, r \in T_\Sigma(Y)_s$ a. î.:
  1. l nu este variabilă,
  2. $Var(r) \subseteq Var(l) = Y$.

TRS - Term Rewriting System

Fie (S, Σ) signatură și Y mulțime de variabile.

- O regulă de rescriere (peste Y) este formată din $l, r \in T_\Sigma(Y)_s$ a. î.:
  1. l nu este variabilă,
  2. $Var(r) \subseteq Var(l) = Y$.
- Un sistem de rescriere (TRS) este o mulțime finită de reguli de rescriere.

TRS - Term Rewriting System

Fie (S, Σ) signatură și Y mulțime de variabile.

- O regulă de rescriere (peste Y) este formată din $l, r \in T_{\Sigma}(Y)_s$ a. î.:
  1. l nu este variabilă,
  2. $Var(r) \subseteq Var(l) = Y$.
- Un sistem de rescriere (TRS) este o mulțime finită de reguli de rescriere.
- Un TRS este noetherian (se termină) dacă nu există reduceri infinite $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \ldots$.

TRS - Term Rewriting System

Fie (S, Σ) signatură și Y mulțime de variabile.

- O regulă de rescriere (peste Y) este formată din $l, r \in T_\Sigma(Y)_s$ a. î.:
  1. l nu este variabilă,
  2. $Var(r) \subseteq Var(l) = Y$.
- Un sistem de rescriere (TRS) este o mulțime finită de reguli de rescriere.
- Un TRS este noetherian (se termină) dacă nu există reduceri infinite $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \ldots$.

Exemplu

- $S = \{Nat\}$ și $\Sigma = \{0 :\to Nat,\ s : Nat \to Nat,\ + : Nat\ Nat \to Nat\}$
- $Y = \{x, y\}$
- Sistemul de rescriere: $R = \{x + 0 \to x,\ x + s(y) \to s(x + y)\}$

Rescrierea termenilor

$$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} t \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(l)] \text{ și} \\ t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(r)], \text{ unde} \\ c \in T_\Sigma(X \cup \{z\}) \text{ context}, \\ l \to_s r \in R \text{ cu } Var(l) = Y, \\ \theta : Y \to T_\Sigma(X) \text{ substituție} \end{array}$$

Terminare

Terminare

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Propoziție (1)

Dacă fiecărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $t \mapsto \mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$t \to_R t' \Rightarrow \mu(t) > \mu(t')$$

oricare t și t', atunci R este noetherian.

Terminare

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Propoziție (1)

Dacă fiecărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $t \mapsto \mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$t \rightarrow_R t' \Rightarrow \mu(t) > \mu(t')$$

oricare t și t', atunci R este noetherian.

Demonstratie

$\mathbb{N}$ nu conține lanțuri infinite $n_1 > n_2 > \cdots > n_k > \cdots$. $\square$

Terminare

Exemplu

- $R = \{x - 0 \to x, s(x) - s(y) \to x - y\}$ este noetherian
  - $\mu(t) :=$ lungimea lui t
  - Prin lungimea unui termen t vom înțelege numărul de simboluri din scrierea lui t în forma prefixă.

Terminare

Exemplu

- $R = \{x - 0 \to x, s(x) - s(y) \to x - y\}$ este noetherian
  - $\mu(t) :=$ lungimea lui t
  - Prin lungimea unui termen t vom înțelege numărul de simboluri din scrierea lui t în forma prefixă.
- $R = \{f(g(x), y) \to f(y, y)\}$ nu este noetherian
  - $f(g(x), g(x)) \to_R f(g(x), g(x)) \to_R \cdots$

Arborele de reducere

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

- Arborele de reducere al termenului t este definit astfel:
  - rădăcina arborelui are eticheta t,
  - descendenții nodului cu eticheta u sunt etichetați cu termenii u' care verifică $u \to_R u'$.

Arborele de reducere

Exemplu

- $R = \{x + 0 \to x, x + s(y) \to s(x + y)\}$
- Arborele de reducere al termenului $s(0) + s(0 + 0)$:

$$
\begin{tikzcd}
& s(0) + s(0 + 0) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
s(0) + s(0) \arrow[d] & & s(s(0) + (0 + 0)) \arrow[d] \\
s(s(0) + 0) \arrow[d] & & s(s(0) + 0) \arrow[d] \\
s(s(0)) & & s(s(0))
\end{tikzcd}
$$

Arborele de reducere

- Orice nod al unui arbore de reducere are un număr finit de descendenți deoarece R este o mulțime finită.

Arborele de reducere

- Orice nod al unui arbore de reducere are un număr finit de descendenți deoarece R este o mulțime finită.

- Dacă R se termină atunci

$$\mu(t) := \text{înălțimea arborelui de reducere asociat lui } t.$$
$$t \to_R t' \Rightarrow \mu(t) > \mu(t')$$

Terminare

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Propoziție (2^*)

Sunt echivalente:

1. R este noetherian,
2. oricărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $\mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât $t \to_R t'$ implică $\mu(t) > \mu(t')$.

Demonstrație

$(2 \Rightarrow 1)$ Rezultă din Propoziția 1.

$(1 \Rightarrow 2)$ Într-un sistem de rescriere noetherian orice termen are un arbore de reducere finit și definim

$$\mu(t) = \text{adâncimea arborelui asociat lui } t.$$

$\square$

Terminare

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Propoziție (3*)

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră astfel încât:

- $A_s = \mathbb{N}$ or. $s \in S$,
- or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$, dacă $k_i > k_i'$ atunci
$$A_\sigma(k_1, \ldots, k_i, \ldots k_n) > A_\sigma(k_1, \ldots, k_i', \ldots k_n),$$
- $\tilde{\mathbf{e}}(l) > \tilde{\mathbf{e}}(r)$, or. $l \to r \in R$ și or. $\mathbf{e} : Var(l) \to A$.

Atunci R este noetherian.

Terminare

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Propoziție (3^*)

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră astfel încât:

- $A_s = \mathbb{N}$ or. $s \in S$,
- or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$, dacă $k_i > k_i'$ atunci
$$A_\sigma(k_1, \ldots, k_i, \ldots k_n) > A_\sigma(k_1, \ldots, k_i', \ldots k_n),$$
- $\tilde{\mathbf{e}}(l) > \tilde{\mathbf{e}}(r)$, or. $l \to r \in R$ și or. $\mathbf{e} : Var(l) \to A$.

Atunci R este noetherian.

Demonstratie

- Pentru orice termen t definim $\mu(t) = \tilde{\mathbf{e}_0}(t)$, unde $\mathbf{e}_0(x) = 0$, or. $x \in Var(t)$.
- Se demonstrează că $t \to_R t'$ implică $\mu(t) > \mu(t')$.

□

Exemplu

Exemplu

- $R = \{x + 0 \to x, x + s(y) \to s(x + y)\}$
- $A_0 := 1$, $A_s(k) := k + 1$, $A_+(k, m) := k + 2 * m$, or. k, $m \in \mathbb{N}$

Exemplu

Exemplu

- $R = \{x + 0 \to x, x + s(y) \to s(x + y)\}$
- $A_0 := 1$, $A_s(k) := k + 1$, $A_+(k, m) := k + 2 * m$, or. k, $m \in \mathbb{N}$
- $\mathbf{e}(x) := n$, $\mathbf{e}(y) := m$

Exemplu

Exemplu

- $R = \{x + 0 \to x, x + s(y) \to s(x + y)\}$
- $A_0 := 1$, $A_s(k) := k + 1$, $A_+(k, m) := k + 2 * m$, or. k, $m \in \mathbb{N}$
- $\mathbf{e}(x) := n$, $\mathbf{e}(y) := m$
- $\tilde{\mathbf{e}}(x + 0) = A_+(n, A_0) = n + 2 * A_0 = n + 2 > n = \tilde{\mathbf{e}}(x)$

Exemplu

Exemplu

- $R = \{x + 0 \to x, x + s(y) \to s(x + y)\}$
- $A_0 := 1$, $A_s(k) := k + 1$, $A_+(k, m) := k + 2 * m$, or. k, $m \in \mathbb{N}$
- $\mathbf{e}(x) := n$, $\mathbf{e}(y) := m$
- $\tilde{\mathbf{e}}(x + 0) = A_+(n, A_0) = n + 2 * A_0 = n + 2 > n = \tilde{\mathbf{e}}(x)$
- $\tilde{\mathbf{e}}(x + s(y)) = A_+(n, A_s(m)) = n + 2 * (m + 1) = n + 2 * m + 2 >$ $n + 2 * m + 1 = A_s(A_+(n, m)) = \tilde{\mathbf{e}}(succ(x + y))$

Exemplu

Exemplu

- $R = \{x + 0 \to x, x + s(y) \to s(x + y)\}$
- $A_0 := 1$, $A_s(k) := k + 1$, $A_+(k, m) := k + 2 * m$, or. k, $m \in \mathbb{N}$
- $\mathbf{e}(x) := n$, $\mathbf{e}(y) := m$
- $\tilde{\mathbf{e}}(x + 0) = A_+(n, A_0) = n + 2 * A_0 = n + 2 > n = \tilde{\mathbf{e}}(x)$
- $\tilde{\mathbf{e}}(x + s(y)) = A_+(n, A_s(m)) = n + 2 * (m + 1) = n + 2 * m + 2 > n + 2 * m + 1 = A_s(A_+(n, m)) = \tilde{\mathbf{e}}(succ(x + y))$
- În concluzie, R este noetherian.

Confluență. Perechi critice.

Perechi critice

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Definitie

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

Perechi critice

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Definitie

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

1. $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,

Perechi critice

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Definitie

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

1. $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
2. există un subtermen t al lui l_1 care nu este variabilă
   ($l_1 = c[z \leftarrow t]$, unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă)

Perechi critice

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Definitie

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

1. $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
2. există un subtermen t al lui l_1 care nu este variabilă
   ($l_1 = c[z \leftarrow t]$, unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă)
3. există θ c.g.u pentru t și l_2 (i.e. $\theta(t) = \theta(l_2)$).

Perechi critice

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Definitie

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

1. $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
2. există un subtermen t al lui l_1 care nu este variabilă
   ($l_1 = c[z \leftarrow t]$, unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă)
3. există θ c.g.u pentru t și l_2 (i.e. $\theta(t) = \theta(l_2)$).

Perechea $(\theta(r_1), \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)])$ se numește pereche critică.

$$\begin{tikzcd}
 & \theta(l_1) \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\
\theta(r_1) & & \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)]
\end{tikzcd}$$

Exemplu

Exemplu

$R = \{f(f(x,y),u) \to f(x,f(y,u)),\ f(i(x_1),x_1) \to e\}$

Cele două reguli dau naștere unei perechi critice:

1. $Var(f(f(x,y),u)) = \{x,y,u\}$ și $Var(f(i(x_1),x_1)) = \{x_1\}$
2. Luăm subtermenul $t = f(x,y)$ al lui $l_1 = f(f(x,y),u)$
   - $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pt. contextul $c = f(z,u)$
3. $\theta = \{x \mapsto i(x_1),\ y \mapsto x_1\}$ c.g.u. pt. t și $l_2 = f(i(x_1),x_1)$.

$$\begin{tikzcd}
 & f(f(i(x_1),x_1),u) \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\
f(i(x_1),f(x_1,u)) & & f(e,u)
\end{tikzcd}$$

Pereche critică: $(f(i(x_1),f(x_1,u)), f(e,u))$

Confluență și perechi critice

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

$$\begin{tikzcd} & \theta(l_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \theta(r_1) & & \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] \end{tikzcd}$$

$l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$,
$Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
$l_1 = c[z \to t]$,
$\theta(t) = \theta(l_2)$ c.g.u

Teorema (Teorema Perechilor Critice *)

Dacă R este noetherian, atunci sunt echivalente:

1. *R este confluent,*
2. *$t_1 \downarrow_R t_2$ pentru orice pereche critică (t_1, t_2).*

Consecință

Corolar

Confluența unui TRS noetherian este decidabilă.

Algoritm:

- pt. or. pereche de reguli de rescriere $l_1 \to r_1$ și $l_2 \to r_2$
- se încearcă generarea perechilor critice (t_1, t_2)
- pt. or. pereche critica (t_1, t_2), se arată că $t_1 \downarrow_R t_2$

Exemplu

Exemplu

$R = \{f(f(x)) \to x\}$ este confluent.

Exemplu

Exemplu

$R = \{f(f(x)) \to x\}$ este confluent.

- R este noetherian.

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$.

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$. Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ și $f(x)$.

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$.
    Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ și $f(x)$.
    - $t := f(f(x))$, $c = z$, $\theta := \{x \leftarrow y\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = y$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y$

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$. Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ și $f(x)$.
    - $t := f(f(x))$, $c = z$, $\theta := \{x \leftarrow y\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = y$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y$
    - $t := f(x)$, $c = f(z)$, $\theta := \{x \leftarrow f(y)\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = f(y)$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = f(y)$

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$. Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ și $f(x)$.
    - $t := f(f(x))$, $c = z$, $\theta := \{x \leftarrow y\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = y$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y$
    - $t := f(x)$, $c = f(z)$, $\theta := \{x \leftarrow f(y)\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = f(y)$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = f(y)$
- Perechile critice sunt (y, y) și $(f(y), f(y))$.

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$.
    Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ și $f(x)$.
    - $t := f(f(x))$, $c = z$, $\theta := \{x \leftarrow y\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = y$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y$
    - $t := f(x)$, $c = f(z)$, $\theta := \{x \leftarrow f(y)\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = f(y)$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = f(y)$
- Perechile critice sunt (y, y) și $(f(y), f(y))$.
- Deoarece $y \downarrow y$ și $f(y) \downarrow f(y)$, sistemul de rescriere R este confluent.

Algoritmul Knuth-Bendix

Algoritmul Knuth-Bendix

- Procedură pentru a completa un TRS noetherian.

- Intrare: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- Ieșire:
  - T un sistem de rescriere (TRS) = completarea lui R.
  - eșec

Terminare

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Propoziție (2*)

Sunt echivalente:

1. R este noetherian,
2. oricărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $\mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât $t \to_R t'$ implică $\mu(t) > \mu(t')$.

- Ordine de reducere: $t > t'$ dacă $\mu(t) > \mu(t')$
- Relația $>$ se numește ordine de reducere pentru R.

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T $:=$ R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
  1. CP $:=$ CP(T) $= \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și > ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
  1. CP := CP(T) $= \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$
  2. Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP *(T completarea lui R)*.

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
  1. CP := CP(T) $= \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$
  2. Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP *(T completetarea lui R)*.
  3. Dacă $(t_1, t_2) \in CP$, $t_1 \not\downarrow t_2$ atunci:
     - dacă $fn(t_1) > fn(t_2)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_1) \to fn(t_2)\}$,
     - dacă $fn(t_2) > fn(t_1)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_2) \to fn(t_1)\}$,
     - altfel, STOP *(completare eșuată)*.

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
  1. CP := CP(T) $= \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$
  2. Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP *(T completarea lui R)*.
  3. Dacă $(t_1, t_2) \in CP$, $t_1 \not\downarrow t_2$ atunci:
     - dacă $fn(t_1) > fn(t_2)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_1) \to fn(t_2)\}$,
     - dacă $fn(t_2) > fn(t_1)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_2) \to fn(t_1)\}$,
     - altfel, STOP *(completare eșuată)*.
- IEȘIRE: T completarea lui R sau eșec.

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
  1. CP := CP(T) $= \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$
  2. Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP *(T completarea lui R)*.
  3. Dacă $(t_1, t_2) \in CP$, $t_1 \not\downarrow t_2$ atunci:
     - dacă $fn(t_1) > fn(t_2)$ atunci $\mathrm{T} := \mathrm{T} \cup \{fn(t_1) \to fn(t_2)\}$,
     - dacă $fn(t_2) > fn(t_1)$ atunci $\mathrm{T} := \mathrm{T} \cup \{fn(t_2) \to fn(t_1)\}$,
     - altfel, STOP *(completare eșuată)*.
- IEȘIRE: T completarea lui R sau eșec.

Atenție! Succesul completării depinde de relația $<$.

Exemplu

Exemplu

- $S := \{s\}$, $\Sigma := \{* : ss \to s\}$, $E := \{\forall\{x, y, v\}(x * y) * (y * v) \doteq y\}$
- INIȚIALIZARE:
  - $T = R_E := \{(x * y) * (y * v) \to y\}$,
  - $\mu(t) :=$ lungimea termenului t,
  - Ordine de reducere: $t > t'$ ddacă $\mu(t) > \mu(t')$.

Exemplu

Exemplu

- Determinăm perechile critice pentru

  $l_1 := (x * y) * (y * v),\ r_1 := y,\ l_2 := (x' * y') * (y' * v'),\ r_2 := y'$

Exemplu

Exemplu

- Determinăm perechile critice pentru

  $l_1 := (x * y) * (y * v),\ r_1 := y,\ l_2 := (x' * y') * (y' * v'),\ r_2 := y'$

  Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile:

  $$(x * y),\ (y * v),\ (x * y) * (y * v)\ .$$

Exemplu

Exemplu

- Determinăm perechile critice pentru

  $l_1 := (x * y) * (y * v)$, $r_1 := y$, $l_2 := (x' * y') * (y' * v')$, $r_2 := y'$

  Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile:

  $$(x * y),\ (y * v),\ (x * y) * (y * v)\ .$$

  - $t := x * y$, $c = z * (y * v)$, $\theta := \{x \leftarrow x' * y', y \leftarrow y' * v'\}$
    $\theta(r_1) = y' * v'$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y' * ((y' * v') * v)$
    Perechea critică: $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$.

Exemplu

Exemplu

- Determinăm perechile critice pentru

  $l_1 := (x * y) * (y * v),\ r_1 := y,\ l_2 := (x' * y') * (y' * v'),\ r_2 := y'$

  Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile:

  $$(x * y),\ (y * v),\ (x * y) * (y * v)\ .$$

  - $t := x * y,\ c = z * (y * v),\ \theta := \{x \leftarrow x' * y', y \leftarrow y' * v'\}$
    $\theta(r_1) = y' * v',\ \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y' * ((y' * v') * v)$
    Perechea critică: $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$.
  - $t := y * v,\ c = (x * y) * z,\ \theta := \{y \leftarrow x' * y', v \leftarrow y' * v'\}$
    $\theta(r_1) = x' * y',\ \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = (x * (x' * y')) * y'$
    Perechea critică: $(x' * y', (x * (x' * y')) * y')$.

Exemplu

Exemplu

- Determinăm perechile critice pentru

  $l_1 := (x * y) * (y * v),\ r_1 := y,\ l_2 := (x' * y') * (y' * v'),\ r_2 := y'$

  Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile:

  $$(x * y),\ (y * v),\ (x * y) * (y * v)\ .$$

  - $t := x * y,\ c = z * (y * v),\ \theta := \{x \leftarrow x' * y', y \leftarrow y' * v'\}$
    $\theta(r_1) = y' * v',\ \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y' * ((y' * v') * v)$
    Perechea critică: $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$.
  - $t := y * v,\ c = (x * y) * z,\ \theta := \{y \leftarrow x' * y', v \leftarrow y' * v'\}$
    $\theta(r_1) = x' * y',\ \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = (x * (x' * y')) * y'$
    Perechea critică: $(x' * y', (x * (x' * y')) * y')$.
  - $t := (x * y) * (y * v),\ c = z,\ \theta := \{x \leftarrow x', y \leftarrow y', v \leftarrow v'\}$
    $\theta(r_1) = y',\ \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y'$
    Perechea critică: (y', y').

Exemplu

Exemplu

- Perechile critice:
  1. $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$,
  2. $(x' * y', (x * (x' * y')) * y')$,
  3. (y', y').

Exemplu

Exemplu

- Perechile critice:
  1. $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$,
  2. $(x' * y', (x * (x' * y')) * y')$,
  3. (y', y').
- Avem
  - $y * ((y * x) * v) > y * x$
  - $(x * (v * y)) * y > v * y$

Exemplu

Exemplu

- Perechile critice:
  1. $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$,
  2. $(x' * y', (x * (x' * y')) * y')$,
  3. (y', y').
- Avem
  - $y * ((y * x) * v) > y * x$
  - $(x * (v * y)) * y > v * y$
- Considerăm
  $T := T \cup \{y * ((y * x) * v) \to y * x,\ (x * (v * y)) * y \to v * y\}$
- T este complet si este completarea lui R_E.

Pe săptămâna viitoare!