Logică matematică și computațională
Cursul XII

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

- **Logica matematică** este o ramură a matematicii care se ocupă cu exprimarea formalizată (i. e. formală, simbolică) a legilor gândirii și studierea acestora cu mijloace matematice.
- Ne propunem să studiem **logica clasică**, în două forme ale ei: **logica propozițiilor** și **logica predicatelor** sau a **propozițiilor cu variabile**. Vom face deosebirea dintre aceste două tipuri de logică clasică mai târziu. Ambele sunt **logici bivalente**, adică operează cu doar două **valori de adevăr**: **fals** și **adevărat**.
- În acest curs vom începe studiul **sistemului formal al calculului propozițional clasic**.

- Vom studia **sistemul formal al calculului propozițional clasic** sub trei aspecte fundamentale:
  1. **sintaxa**, care se ocupă de limbajul formal al calculului propozițional clasic, i. e. de cadrul formal, de exprimarea în simboluri a obiectelor matematice cu care vom lucra;
  2. **algebra**, care asociază o structură algebrică sistemului formal descris în partea de sintaxă și folosește această asociere pentru a transfera proprietățile algebrice ale acelei structuri în proprietăți logice, și invers;
  3. **semantica**, aceasta fiind partea în care, pe baza structurii algebrice atașate logicii, se calculează efectiv **valorile de adevăr** ale enunțurilor (**fals** sau **adevărat**).
- Există și alte aspecte sub care poate fi studiat un sistem logic, denumite adesea *dimensiuni ale sistemului logic*, cum ar fi: aspectul **topologic**, cel **probabilist** etc., dar studierea lor depășeste cadrul și scopul acestui curs.

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiții și notații

Următoarele **simboluri** formează **alfabetul** sistemului formal al calculului propozițional clasic:

1. *variabilele propoziționale*, notate, de obicei, u, v, w etc., uneori cu indici, care formează o mulțime infinită; vom nota cu V mulțimea variabilelor propoziționale;
2. *conectorii logici primitivi*:
   $\neg$: *negația* (se citește: "non" sau "not");
   $\rightarrow$: *implicația* (se citește: "implică");
3. parantezele: (,), [, și].

Simbolurile enumerate mai sus se numesc *simboluri primitive* și sunt presupuse a fi două câte două distincte (de exemplu $\neg \notin V$ etc.).

La acestea se adaugă *conectorii logici derivați*, care se definesc pe baza conectorilor logici primitivi, și care vor fi prezentați mai jos.

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Șirurile finite și nevide de simboluri primitive se numesc *cuvinte*.

Exemplu

$u \rightarrow \neg\, v$, $\neg\,(u \rightarrow \neg\, v) \rightarrow w$, $\rightarrow u \rightarrow\rightarrow uv\neg\,)$ sunt **cuvinte**.

Observație

Intuiția ne determină să conferim "înțeles" simbolurilor primitive, și ne spune că primele două cuvinte din exemplul anterior "au sens", în timp ce al treilea "nu are sens". Dintre cuvintele peste alfabetul definit mai sus, le vom selecta pe cele care "au sens", și le vom numi *enunțuri*. Definiția lor riguroasă succede această observație.

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Un *enunț* este un cuvânt φ care satisface una dintre condițiile următoare:

- (E_1) φ este o variabilă propozițională;
- (E_2) există un enunț ψ a. î. $\varphi = \neg\psi$;
- (E_3) există două enunțuri ψ și χ a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$.

Definiție

Variabilele propoziționale se numesc *enunțuri atomice* sau *enunțuri elementare*.

Notație

Vom nota cu E mulțimea tuturor enunțurilor.

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Observație

În definiția de mai sus a enunțurilor, se subînțelege faptul că parantezele au rolul obișnuit: aici, parantezele pot încadra enunțuri, și se folosesc pentru a încadra enunțuri compuse în interiorul altor enunțuri compuse, indicând ordinea în care se aplică regulile (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea unui enunț compus (impropriu spus, ordinea "aplicării conectorilor logici primitivi" pentru obținerea acelui enunț). O *parantezare corectă* a unui enunț este o dispunere a parantezelor în interiorul acelui enunț astfel încât fiecare pereche de paranteze să încadreze un (alt) enunț, și, desigur, astfel încât ordinea aplicării regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea enunțului respectiv să fie indicată corect de acea parantezare.

Observaţie

Observăm că, în scrierea enunţurilor, dată de definiţia de mai sus, conectorii logici primitivi apar scrişi la fel ca nişte operatori:

- $\neg$ apare scris la fel ca un operator unar;
- $\rightarrow$ apare scris la fel ca un operator binar.

Pentru a evita încărcarea scrierii cu prea multe paranteze, se face următoarea **convenţie**: se acordă prioritate mai mare conectorului logic "unar" $\neg$ şi prioritate mai mică celui "binar", $\rightarrow$.
Noţiunea de **prioritate** are aici semnificaţia obişnuită, de determinare a ordinii "aplicării conectorilor logici", corect spus de determinare a ordinii aplicării regulilor (E_1), (E_2) şi (E_3) pentru construirea unui enunţ.
Conectorul cu prioritate mai mare "se va aplica" primul, de fapt regula (E_2) se va aplica înaintea regulii (E_3), i. e., pentru orice enunţuri α şi β, scrierea $\neg\alpha \rightarrow \beta$ va semnifica $(\neg\alpha) \rightarrow \beta$.

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Observație

Egalitatea între enunțuri care apare în scrierea regulilor (E_2) și (E_3) este egalitatea obișnuită între cuvinte peste un alfabet, între șiruri de simboluri, anume **literal identitatea**, adică egalitatea simbol cu simbol, i. e. egalitatea lungimilor și identitatea (coincidența) simbolurilor de pe aceeași poziție în fiecare cuvânt (ca la șiruri de caractere: identitatea literă cu literă, caracter cu caracter), desigur, modulo parantezarea aleasă.
Adică: două enunțuri **scrise numai cu simboluri primitive** (vom vedea ce sunt simbolurile derivate) sunt *egale* ddacă există câte o parantezare corectă pentru fiecare astfel încât, cu acele parantezări, enunțurile respective să fie literal identice (ca și cuvinte peste alfabetul prezentat mai sus, format din simbolurile primitive).

Remarcă

Dacă recitim observația anterioară, vom remarca faptul că orice enunț se află în **exact una** (i. e. **una și numai una**) dintre cele 3 situații prezentate de regulile (E_1), (E_2) și (E_3).

Remarcă

Noțiunea de enunț este definită recursiv: se pornește de la variabilele propoziționale și se aplică recursia dată de regulile (E_2) și (E_3).
Din faptul că enunțurile sunt șiruri **finite** de simboluri primitive și observația că, prin aplicarea oricăreia dintre regulile (E_1), (E_2) și (E_3), lungimea enunțului format până la momentul curent crește cu cel puțin câte o unitate, deducem faptul că orice enunț se obține prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) de un număr finit de ori, i. e. printr–un număr finit de aplicări ale regulilor (E_1), (E_2) și (E_3), i. e., pornind de la variabilele propoziționale (evident, de la un număr finit de variabile propoziționale), într–un număr finit de pași, fiecare pas constând în aplicarea unei reguli de recursie: (E_2) sau (E_3).

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Notație

Pentru orice enunțuri $\varphi, \psi \in E$, introducem notațiile (abrevierile):

$\varphi \vee \psi := \neg\, \varphi \rightarrow \psi$ (*disjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ "sau" ψ)

$\varphi \wedge \psi := \neg\,(\varphi \rightarrow \neg\, \psi)$ (*conjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ "și" ψ)

$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ (*echivalența logică* dintre φ și ψ; se citește: φ "echivalent cu" ψ)

Definiție

Simbolurile $\vee$, $\wedge$ și $\leftrightarrow$ se numesc *conectorii logici derivați*.

Remarcă

În această prezentare a sistemului formal al logicii propoziționale clasice, am considerat negația și implicația ca și conectori logici primitivi, iar disjuncția, conjuncția și echivalența ca și conectori logici derivați, introduși prin notațiile de mai sus, pe baza celor primitivi.
Există prezentări ale sistemului formal al logicii propoziționale clasice care sunt echivalente cu cea din acest curs și care folosesc alți conectori logici primitivi.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

- Am definit limbajul cu care vom lucra. Acum vom defini, tot la acest nivel, formal, sintactic, noțiunea de "adevăr" în logica pe care o construim. "Adevărurile sintactice" vor fi "teoremele" acestei logici, iar, pentru a le obține, vom da un set de axiome și vom defini o modalitate prin care, din adevăruri sintactice stabilite până la un moment dat, se deduc alte adevăruri sintactice. Acea modalitate o vom numi **regula de deducție modus ponens**.

Definiție

O *axiomă* a sistemului formal al logicii propoziționale clasice este un enunț de oricare dintre următoarele trei forme, unde $\varphi, \psi, \chi \in E$ sunt enunțuri arbitrare:

$$\begin{array}{ll} (A_1) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (A_2) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ (A_3) & (\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \end{array}$$

Fiecare dintre scrierile (A_1), (A_2) și (A_3) este o *schemă de axiome*, adică o regulă pentru generarea unui număr infinit de axiome.

Axiomele logicii propoziționale clasice se obțin prin înlocuirea, în aceste scheme de axiome, a enunțurilor generice (arbitrare) φ, ψ, χ cu enunțuri precizate (date), adică axiomele sunt enunțuri de una dintre formele (A_1), (A_2) și (A_3), cu φ, ψ și χ enunțuri date.

Prin extensie, vom numi uneori schemele de axiome (A_1), (A_2) și (A_3), simplu, **axiome**.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

- Așa cum am anunțat, acum vom defini **deducția sintactică** (**inferența sintactică**), adică modalitatea prin care, din aceste axiome, se obțin toate **teoremele** (**adevărurile sintactice**) în acest sistem logic.

Remarcă

Se poate demonstra că schemele de axiome de mai sus sunt **independente**, i. e. niciuna dintre ele nu poate fi dedusă din celelalte două prin modalitatea de deducție sintactică pe care o vom defini.
Acest fapt arată și că, între aceste trei scheme de axiome, nu există două din care să se deducă sintactic **toate** adevărurile sintactice (teoremele) acestui sistem logic, care se deduc din toate cele trei scheme de axiome.
Se pot, însă, defini alte seturi echivalente de scheme de axiome (adică seturi de scheme de axiome din care se deduc sintactic aceleași teoreme), cu aceiași sau cu alți conectori logici primitivi.

Notație

Notația uzuală pentru reguli de deducție ale unui sistem logic, pe care o vom folosi în cele ce urmează, este aceasta: $\dfrac{\text{condiția } C_1}{\text{consecința } C_2}$, cu semnificația că: dacă este satisfăcută condiția C_1, atunci este satisfăcută consecința C_2.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Teoremele formale (numite și, simplu, *teoreme*, sau *adevăruri sintactice*) ale logicii propoziționale clasice sunt enunțurile definite prin următoarele trei reguli:

- (T_1) orice axiomă este o teoremă formală;
- (T_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ sunt teoreme formale, atunci φ este o teoremă formală;
- (T_3) orice teoremă formală a logicii propoziționale clasice poate fi obținută prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2) de un număr finit de ori.

Notație

Mulțimea tuturor teoremelor formale va fi notată cu T.

Notație

Faptul că un enunț φ este teoremă formală se notează: $\vdash \varphi$.

Definiție

Regula (T_2) se numește *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică:
$$\frac{\vdash \psi, \ \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\vdash \varphi}.$$

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Fie φ un enunț. O *demonstrație formală pentru* φ este un șir finit (și nevid) de enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

1. φ_i este o axiomă;
2. există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea* demonstrației formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarcă

În scrierea definiției de mai sus, am folosit convenția: $\overline{1, 0} = \emptyset$. Cu această subliniere, este clar că, într–o demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă.

Remarcă

Este imediat că, dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o demonstrație formală.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Remarcă

Este ușor de observat că regulile (1) și (2) din definiția unei demonstrații formale exprimă exact regulile (T_1) și (T_2), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o teoremă formală ddacă există o demonstrație formală pentru φ.

Remarcă

Desigur, o teoremă formală poate avea mai multe demonstrații formale și poate avea demonstrații formale de lungimi diferite.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulțime de enunțuri. Enunțurile care *se deduc sintactic din ipotezele* Σ, numite și *consecințele sintactice ale lui* Σ, se definesc astfel:

- (CS_1) orice axiomă se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_2) orice enunț $\varphi \in \Sigma$ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_3) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ se deduc sintactic din ipotezele Σ, atunci φ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_4) orice enunț care se deduce sintactic din ipotezele Σ se poate obține prin aplicarea regulilor (CS_1), (CS_2) și (CS_3) de un număr finit de ori.

Notație

Vom nota faptul că un enunț φ se deduce sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ prin: $\Sigma \vdash \varphi$.

Definiție

Regula (CS_3) se numește tot *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia tot "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică: $\dfrac{\Sigma \vdash \psi, \ \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Fie φ un enunț și Σ o mulțime de enunțuri. O Σ–*demonstrație formală pentru* φ este un șir finit (și nevid) de enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

1. φ_i este o axiomă;
2. $\varphi_i \in \Sigma$;
3. există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea* Σ–demonstrației formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarcă

Amintindu–ne că $\overline{1, 0} = \emptyset$, este clar că, într–o Σ–demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă sau un element al lui Σ.

Remarcă

Este imediat că, dacă Σ este o mulțime de enunțuri și $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o Σ–demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o Σ–demonstrație formală.

Remarcă

Este ușor de observat că regulile (1), (2) și (3) din definiția unei Σ–demonstrații formale exprimă exact regulile (CS_1), (CS_2) și (CS_3), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o consecință sintactică a lui Σ ddacă există o Σ–demonstrație formală pentru φ.

Remarcă

Desigur, o consecință sintactică a lui Σ poate avea mai multe Σ–demonstrații formale și poate avea Σ–demonstrații formale de lungimi diferite.

Inducția după un concept

Observație

Noțiunile de **teoremă formală** și **consecință sintactică a unei mulțimi de ipoteze** au fost definite recursiv, la fel ca aceea de enunț.

Observație

O tehnică importantă de demonstrație la care vom apela în acest capitol al cursului este ceea ce vom numi *inducție după un concept*, pe care o vom întâlni în trei forme:

1. *inducție după enunțuri*
2. *inducție după teoreme formale*
3. *inducție după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*

Acest tip de inducție poate fi privit atât ca **inducție structurală**, cât și ca **inducția obișnuită după un număr natural**.
Într–adevăr, să descriem această metodă de demonstrație, în fiecare dintre cele trei forme în care poate să apară într–un raționament matematic în această teorie, și s–o analizăm, atât ca inducție structurală, cât și ca inducție după un număr natural.

Inducția după enunțuri

Remarcă

Descriem aici *inducția după enunțuri*.
Fie P o proprietate asupra cuvintelor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice variabilă propozițională satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă un enunț ψ satisface proprietatea P, atunci enunțul $\neg\psi$ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri ψ și χ satisfac proprietatea P, atunci enunțul $\psi \rightarrow \chi$ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după enunțuri* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Inducția după enunțuri

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după enunțuri, privită ca inducție structurală)

Se poate demonstra că mulțimea enunțurilor este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de cuvinte care include mulțimea variabilelor propoziționale și care este închisă la regulile (E_2) și (E_3) din definiția enunțurilor, i. e. mulțimea E a enunțurilor este cea mai mică mulțime M de cuvinte care satisface proprietățile:

- $V \subseteq M$;
- *închiderea la* (E_2): dacă $\psi \in M$, atunci $\neg\psi \in M$;
- *închiderea la* (E_3): dacă $\psi, \chi \in M$, atunci $\psi \to \chi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei trei pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a cuvintelor care satisfac proprietatea P include pe V și este închisă la regulile (E_2) și (E_3), rezultă că $M_P \supseteq E$, i. e. toate enunțurile sunt printre cuvintele care satisfac proprietatea P.

Inducția după enunțuri

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după enunțuri, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după enunțuri poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de numărul de pași în care se obține un enunț din variabile propoziționale prin aplicarea regulilor (E_2) și (E_3), care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă enunțul φ se obține într–un singur pas, adică φ este o variabilă propozițională, atunci φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n+1$**:** dacă enunțul φ se obține în $n+1$ pași, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem două cazuri:
  1. $\varphi = \neg\psi$, pentru un enunț ψ care se obține în n pași, deci, conform ipotezei de inducție, ψ satisface proprietatea P; atunci rezultă că φ satisface proprietatea P;
  2. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, pentru două enunțuri ψ și χ care se obțin, fiecare, în cel mult n pași, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ satisfac proprietatea P; atunci rezultă că φ satisface proprietatea P.

Întrucât orice enunț se obține într–un număr finit de pași din variabile propoziționale prin aplicarea regulilor (E_2) și (E_3), **principiul inducției matematice** (obișnuite, după un număr natural) ne asigură de faptul că, prin metoda de mai sus, am demonstrat că orice enunț satisface proprietatea P.

Inducția după teoreme formale

Remarcă

Descriem aici *inducția după teoreme formale*.
Fie P o proprietate asupra enunțurilor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \to \varphi$ (sunt teoreme formale și – este corect și cu și fără această adăugire) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după teoreme formale* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs amândoi pașii de mai sus, atunci am demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Inducția după teoreme formale

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după teoreme formale, privită ca inducție structurală)

Se poate demonstra că mulțimea teoremelor formale este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor și care este închisă la regula de deducție (MP), i. e. mulțimea T a teoremelor formale este cea mai mică mulțime M de enunțuri care satisface proprietățile:

- orice axiomă aparține lui M;
- *închiderea la (MP)*: dacă $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei doi pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a enunțurilor care satisfac proprietatea P conține toate axiomele și este închisă la regula de deducție (MP), rezultă că $M_P \supseteq T$, i. e. toate teoremele formale sunt printre enunțurile care satisfac proprietatea P.

Inducția după teoreme formale

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după teoreme formale, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după teoreme formale poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de lungimea unei demonstrații formale pentru o teoremă formală, care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă teorema formală φ admite o demonstrație formală de lungime 1, φ_1, atunci $\varphi = \varphi_1$ este o axiomă, și în acest caz φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n + 1$**:** dacă teorema formală φ admite o demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, de lungime $n + 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\varphi = \varphi_{n+1}$ și, fie φ este o axiomă, caz în care φ satisface proprietatea P, fie există $k, j \in \overline{1, n}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$, iar:
  - teorema formală φ_j admite demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$, de lungime $j \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că φ_j satisface proprietatea P;
  - teorema formală $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ admite demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, de lungime $k \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ satisface proprietatea P;

  rezultă că $\varphi = \varphi_{n+1}$ satisface proprietatea P.

Principiul inducției matematice (obișnuite) arată că, prin metoda de mai sus, am demonstrat că orice teoremă formală satisface proprietatea P.

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă

Descriem aici *inducția după consecințele sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*.
Fie Σ o mulțime de enunțuri și P o proprietate asupra enunțurilor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice enunț din Σ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ (sunt consecințe sintactice ale lui Σ și – este corect și cu și fără această adăugire)) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze, privită ca inducție structurală)

Se poate demonstra că mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor, include mulțimea Σ și care este închisă la regula de deducție (MP), i. e. mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ este cea mai mică mulțime M de enunțuri care satisface proprietățile:

- orice axiomă aparține lui M;
- orice enunț din Σ aparține lui M;
- *închiderea la (MP)*: dacă $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \to \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei trei pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a enunțurilor care satisfac proprietatea P conține toate axiomele și toate enunțurile din Σ și este închisă la regula de deducție (MP), rezultă că M_P include mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ, i. e. toate consecințele sintactice ale lui Σ sunt printre enunțurile care satisfac proprietatea P.

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după consecințele sintactice ale lui Σ poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de lungimea unei Σ–demonstrații formale pentru o consecință sintactică a lui Σ, care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă enunțul φ admite o Σ–demonstrație formală de lungime 1, φ_1, atunci $\varphi = \varphi_1$ este o axiomă sau un enunț din Σ, și în acest caz φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n + 1$**:** dacă enunțul φ admite o Σ–demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, de lungime $n + 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\varphi = \varphi_{n+1}$ și, fie φ este o axiomă sau un enunț din Σ, caz în care φ satisface proprietatea P, fie există $k, j \in \overline{1, n}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$, iar:
  - φ_j admite Σ–demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$, de lungime $j \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că φ_j satisface proprietatea P;
  - $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ admite Σ–demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, de lungime $k \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ satisface proprietatea P;

  rezultă că $\varphi = \varphi_{n+1}$ satisface proprietatea P.

Principiul inducției matematice arată că această demonstrație este completă.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Remarcă

Este imediat, direct din definițiile date, că, pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ:

1. $\emptyset \vdash \varphi$ ddacă $\vdash \varphi$;
2. dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$;
3. dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.

- Am încheiat descrierea sintactică a sistemului formal al logicii propoziționale clasice.

Notație

Vom nota acest sistem formal cu $\mathcal{L}$.

Observație

Întreaga prezentare de până acum a fost efectuată la **nivel sintactic**: am pornit de la un **alfabet** (o **mulțime de simboluri**), am definit un tip particular de **cuvinte peste acest alfabet**, numite **enunțuri**, apoi un tip particular de enunțuri, numite **teoreme formale**, și **deducția sintactică** (**inferența sintactică**), care indică modul în care, din teoreme formale, se obțin alte teoreme formale, cu generalizarea la **consecințe sintactice** ale unor mulțimi de enunțuri.

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

- În această secțiune vom prezenta unele proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$, dintre care cea mai importantă este **Teorema deducției**. Acest rezultat ne va conduce la cele mai semnificative teoreme formale ale lui $\mathcal{L}$.
- Demonstrarea următoarei propoziții este un bun prilej de exersare a inducției după un concept.

Propoziție (o numim ad–hoc Propoziția $\star$)

Fie $\Sigma \subseteq E$, $\Delta \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci:

1. *dacă $\Sigma \subseteq \Delta$ și $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\Delta \vdash \varphi$;*
2. *dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci există $\Gamma \subseteq \Sigma$ a. î. Γ este o mulțime finită și $\Gamma \vdash \varphi$;*
3. *dacă $\Sigma \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in \Delta$ și $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.*

Demonstrație: (1) Demonstrăm, prin inducție după consecințele sintactice ale lui Σ, că orice consecință sintactică a lui Σ este și consecință sintactică a lui Δ.
$\Sigma \vdash \varphi$ înseamnă că ne aflăm în unul dintre cazurile următoare:
Cazul 1: φ este axiomă. Atunci $\Delta \vdash \varphi$.
Cazul 2: $\varphi \in \Sigma$. Cum $\Sigma \subseteq \Delta$, rezultă că $\varphi \in \Delta$, prin urmare $\Delta \vdash \varphi$.

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Cazul 3 (pasul de inducție): există $\psi \in E$, a. î. $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, și ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ satisfac ipoteza de inducție, i. e. au loc: $\Delta \vdash \psi$ și $\Delta \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Atunci $\Delta \vdash \varphi$ prin (MP).
Demonstrația primului punct este încheiată.

(2) Și aici procedăm prin inducție după consecințele sintactice ale lui Σ.
Dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci ne situăm în unul dintre următoarele trei cazuri:
Cazul 1: φ este axiomă. Atunci $\vdash \varphi$, i. e. $\emptyset \vdash \varphi$. $\emptyset \subseteq \Sigma$ și $\emptyset$ este o mulțime finită, deci, în acest caz, φ satisface proprietatea pe care trebuie să o demonstrăm.
Cazul 2: $\varphi \in \Sigma$. Atunci: $\{\varphi\} \vdash \varphi$, iar $\{\varphi\} \subseteq \Sigma$ și $\{\varphi\}$ este o mulțime finită.
Cazul 3 (pasul de inducție): există $\psi \in E$, a. î. $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, și ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ satisfac ipoteza de inducție, i. e. există $\Gamma_1 \subseteq \Sigma$ și $\Gamma_2 \subseteq \Sigma$ a. î. Γ_1 și Γ_2 sunt finite și $\Gamma_1 \vdash \psi$ și $\Gamma_2 \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Atunci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Sigma$, $|\Gamma_1 \cup \Gamma_2| \leq |\Gamma_1| + |\Gamma_2| < \infty$, deci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ este o mulțime finită, iar, întrucât $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ și $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, prin aplicarea punctului (1) obținem: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi$ și $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi \rightarrow \varphi$, deci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi$ prin (MP).
Am încheiat demonstrația punctului (2).

(3) Aici vom folosi **Teorema deducției** (vedeți mai jos), în demonstrarea căreia se utilizează numai punctul (1) din această propoziție. Am preferat scrierea punctelor acestei propoziții unul după altul, în același rezultat, dar puteam intercala, undeva între punctele (1) și (3), rezultatul de mai jos numit **Teorema deducției** și abreviat (TD).

Dacă $\Delta \vdash \varphi$, atunci, conform punctului (2), există o mulțime finită Γ a. î. $\Gamma \subseteq \Delta$ și $\Gamma \vdash \varphi$.

Dacă $\Gamma = \emptyset$, atunci $\emptyset \vdash \varphi$, adică $\vdash \varphi$, prin urmare $\Sigma \vdash \varphi$.

Dacă $\Gamma \neq \emptyset$, atunci fie $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Delta$.

Dacă orice enunț din Δ este consecință sintactică a lui Σ, atunci, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, $\Sigma \vdash \gamma_i$.

$\Gamma \vdash \varphi$ înseamnă că $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi$, ceea ce, conform (TD), este echivalent cu $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}\} \vdash \gamma_n \rightarrow \varphi$, ceea ce, din nou conform (TD), este echivalent cu $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-2}\} \vdash \gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi)$, și, continuând astfel, prin aplicări succesive ale (TD), obținem $\vdash \gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi)) \ldots)$, așadar $\Sigma \vdash \gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi)) \ldots)$, dar $\Sigma \vdash \gamma_1$, de unde, prin (MP), obținem $\Sigma \vdash \gamma_2 \rightarrow (\gamma_3 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi)) \ldots)$, dar $\Sigma \vdash \gamma_2$, și, continuând în acest mod, prin aplicări succesive ale regulii de deducție (MP), se obține $\Sigma \vdash \varphi$, ceea ce încheie demonstrația punctului (3).

Propoziție (Principiul identității)

Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$. (Vom folosi abrevierea PI pentru această teoremă formală.)

Demonstrație: Fie $\varphi \in E$. Aceasta este o demonstrație sintactică pentru enunțul $\varphi \rightarrow \varphi$:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) & (A_1) \\
\vdash [\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)] & (A_2) \\
\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi) & (MP) \\
\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi) & (A_1) \\
\vdash \varphi \rightarrow \varphi & (MP)
\end{array}$$

Teoremă (Teorema deducției)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$ și orice $\varphi, \psi \in E$, are loc următoarea echivalență:

$$\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

(Vom abrevia prin TD această teoremă.)

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Din punctul (1) din Propoziția $\star$ și (MP), obținem: $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, așadar $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$, dar $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, deci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.
"$\Leftarrow$": Ipoteza acestei implicații este: $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Aici vom proceda prin inducție după conceptul de consecință sintactică a mulțimii de ipoteze $\Sigma \cup \{\varphi\}$.
Faptul că $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ arată că ne situăm în unul dintre cazurile următoare:
Cazul 1: ψ este o axiomă. Atunci $\vdash \psi$. Dar $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ conform (A_1), iar o aplicare a regulii (MP) ne dă $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, și deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Cazul 2: $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$. Vom împărți acest caz în două subcazuri:
Subcazul 2.1: $\psi \in \Sigma$. Atunci $\Sigma \vdash \psi$. Dar $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ conform (A_1), deci $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$. Așadar $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ prin (MP).
Subcazul 2.2: $\psi = \varphi$. Conform (PI), $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$, deci $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ și, prin urmare, $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
Cazul 3 (pasul de inducție): există un enunț α a. î. $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha \rightarrow \psi$ și α și $\alpha \rightarrow \psi$ satisfac ipoteza de inducție, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \alpha$ și $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$. Conform (A_2), $\vdash (\varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$, deci $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$. Aplicând (MP), obținem $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$, și, aplicând (MP) încă o dată, obținem $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
Așadar și cea de–a doua implicație este satisfăcută de orice enunțuri φ și ψ și orice mulțime de enunțuri Σ.

Remarcă

În demonstrațiile pentru (PI) și (TD), schema de axiome (A_3) nu a fost folosită.

Propoziție

Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, sunt valabile următoarele teoreme formale și reguli de deducție:

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

Demonstrație: Vom aplica succesiv (MP) și (TD).

$$\begin{array}{ll}
\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi & \\
\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi & \\
\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi & \text{(MP)} \\
\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi & \\
\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi & \text{(MP)} \\
\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi & \text{(TD)} \\
\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) & \text{(TD)} \\
\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) & \text{(TD)}
\end{array}$$

- regula de deducție (R_1): $\dfrac{\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \chi}{\vdash \varphi \to \chi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \to \psi, \Sigma \vdash \psi \to \chi}{\Sigma \vdash \varphi \to \chi}$

Demonstrație: Din (1) și (MP). Varianta mai generală cu Σ arbitrar rezultă din (MP) și faptul că (1) implică $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$.

Demonstrații analoge pot fi date pentru rezultatele de mai jos. Vom mai exemplifica prin demonstrații formale în cazul unora dintre acestea. Pentru celelalte, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I. Regulile de deducție sunt numerotate la fel ca în această carte.

- (2) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$
- (3) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$
- (4) $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$
- (5) $\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$
- regula de deducție (R_3): $\dfrac{\vdash \varphi \to \chi, \vdash \psi \to \chi}{\vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \to \chi, \Sigma \vdash \psi \to \chi}{\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi}$

- (6) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
- (7) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
- regula de deducție (R_4): $\dfrac{\vdash \chi \rightarrow \varphi, \vdash \chi \rightarrow \psi}{\vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi, \Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi}{\Sigma \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$
- (8) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$
- (9) $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi)$

Demonstrație: Aceasta este o consecință imediată a lui (8).

- regula de deducție (R_0): $\dfrac{\vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\vdash \psi \leftrightarrow \varphi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \varphi}$ (această regulă de deducție va fi aplicată, de obicei, fără a fi menționată în mod explicit)

Demonstrație: Din (9) și (MP).

- (10) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$
- (11) $\vdash ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi)$
- (12) $\vdash ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) \rightarrow ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$
- (13) $\vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \psi$ și $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$
- $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$ (**Principiul terțului exclus**; îl vom abrevia PTE)
- (14) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

- regula de deducție (R_5): $\dfrac{\vdash \varphi \rightarrow \psi}{\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Sigma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi}$

Demonstrație: Această regulă de deducție rezultă din (14) și (MP).

- (15) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

Demonstrație: Iată o demonstrație sintactică pentru această teoremă formală:

$$
\begin{array}{ll}
\vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)) & (1) \\
\vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi) & (2) \\
\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi) & \text{(MP)} \\
\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi) & \text{formă echivalentă}
\end{array}
$$

- (16) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

Demonstrație: Iată o demonstrație formală pentru această teoremă:

$$
\begin{array}{ll}
\vdash (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow ((\neg\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) & (1) \\
\vdash (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) & (3) \\
\vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) & \text{(MP)} \\
\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) & \text{formă echivalentă}
\end{array}
$$

- (17) $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$
- (18) $\vdash (\neg\, \varphi \vee \neg\, \psi) \rightarrow \neg\, (\varphi \wedge \psi)$

Demonstrație: Pașii următori formează o demonstrație sintactică pentru această teoremă:

$$\begin{array}{ll}
\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi & (6) \\
\vdash \neg\, \varphi \rightarrow \neg\, (\varphi \wedge \psi) & \text{regula de deducție } (R_5) \\
\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi & (7) \\
\vdash \neg\, \psi \rightarrow \neg\, (\varphi \wedge \psi) & \text{regula de deducție } (R_5) \\
\vdash (\neg\, \varphi \vee \neg\, \psi) \rightarrow \neg\, (\varphi \wedge \psi) & \text{regula de deducție } (R_3)
\end{array}$$

- (19) $\vdash \neg\, (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\, \varphi \wedge \neg\, \psi)$

Demonstrație: Aceasta este o demonstrație formală pentru teorema de față:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi) & (4) \\
\vdash \neg\, (\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\, \varphi & \text{regula de deducție } (R_5) \\
\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi) & (5) \\
\vdash \neg\, (\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\, \psi & \text{regula de deducție } (R_5) \\
\vdash \neg\, (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\, \varphi \wedge \neg\, \psi) & \text{regula de deducție } (R_4)
\end{array}$$

- regula de deducție (R_6): $\dfrac{\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)}{\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)}{\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)}$

Demonstrație: Rezultă din axioma (A_2), prin (MP).

- regula de deducție (R_7): $\dfrac{\vdash \psi \rightarrow \chi}{\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi}{\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)}$

Demonstrație: Iată o demonstrație formală:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \psi \rightarrow \chi & \text{ipoteză} \\
\vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) & (A_1) \\
\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) & (\text{MP}) \\
\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) & (R_6)
\end{array}$$

- regula de deducție (R_8): $\dfrac{\vdash \varphi, \vdash \psi}{\vdash \varphi \wedge \psi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi, \Sigma \vdash \psi}{\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi}$

Demonstrație: Din (10) și două aplicări ale lui (MP).

- (20) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$

Demonstrație: Din (2), (3) și (R_8).

- (21) $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$

Demonstrație: Aceasta este o demonstrație sintactică:

$\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$	(3)
$\vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$	(R_8)
$\vdash \neg(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow \neg(\neg\varphi \rightarrow \psi)$	(R_5)
$\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$	formă echivalentă

- (22) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Demonstrație: Din (19), (21) și (R_8).

- (23) $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Demonstrație: Iată o demonstrație sintactică pentru această teoremă formală:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi & (2) \\
\vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)] & (1) \\
\vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) & (MP) \\
\vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi) & (2) \\
\vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) & (R_1) \\
\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) & \text{formă echivalentă}
\end{array}$$

- (24) $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Demonstrație: Din (18), (23) și (R_8).

1. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

2. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

3. Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

- Această secțiune a cursului expune construcția unei algebre Boole care este asociată în mod canonic sistemului formal $\mathcal{L}$.
- Prin această asociere, proprietățile sintactice ale lui $\mathcal{L}$ se reflectă în proprietăți booleene, și invers.

- Pe tot parcursul acestei secțiuni, $\Sigma \subseteq E$ va fi o mulțime arbitrară fixată de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$.
- Σ va reprezenta o mulțime de ipoteze, ceea ce este adesea numită o *teorie* a lui $\mathcal{L}$.

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Lemă

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \wedge \psi.$$

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Conform regulii de deducție (R_8).
"$\Leftarrow$": Conform (6), (7) și (MP).

Definiție

Definim o relație binară $\sim_\Sigma$ pe mulțimea E a enunțurilor lui $\mathcal{L}$, astfel: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \text{ ddacă } \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Remarcă

Conform lemei anterioare, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \to \varphi,$$

pentru că $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Lemă

$\sim_\Sigma$ *este o relație de echivalență pe* E.

Demonstrație: Conform (PI), pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$, așadar $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$ conform remarcii anterioare, i. e. $\varphi \sim_\Sigma \varphi$, prin urmare $\sim_\Sigma$ este reflexivă.

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\varphi \leftrightarrow \psi = \psi \leftrightarrow \varphi$, deci $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$, așadar $\varphi \sim_\Sigma \psi$ ddacă $\psi \sim_\Sigma \varphi$, deci $\sim_\Sigma$ este simetrică.

Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$ a. î. $\varphi \sim_\Sigma \psi$ și $\psi \sim_\Sigma \chi$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, ceea ce este echivalent, conform remarcii anterioare, cu $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Atunci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ și $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi$, conform regulii de deducție (R_1). Din remarca anterioară, rezultă că $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$, i. e. $\varphi \sim_\Sigma \chi$, așadar $\sim_\Sigma$ este tranzitivă.

Deci $\sim_\Sigma$ este o relație de echivalență pe E.

Notație

Să notăm, pentru fiecare $\varphi \in E$, cu $\hat{\varphi}^\Sigma := \{\psi \in E \mid \varphi \sim_\Sigma \psi\}$ clasa de echivalență a lui φ raportat la relația de echivalență $\sim_\Sigma$, și să considerăm mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma} = \{\hat{\varphi}^\Sigma \mid \varphi \in E\}$.

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Definiție

Pe mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma}$, definim relația binară $\leq_\Sigma$, prin: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Propoziție

$\leq_\Sigma$ este bine definită.

Demonstrație: Fie $\varphi, \psi, \varphi', \psi' \in E$ a. î. $\varphi \sim_\Sigma \varphi'$ și $\psi \sim_\Sigma \psi'$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ și $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$, adică $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \varphi'$, $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \varphi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \psi'$ și $\Sigma \vdash \psi' \rightarrow \psi$, conform remarcii anterioare.

Avem de demonstrat că $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\hat{\varphi'}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi'}^\Sigma$, i. e. că $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \psi'$.

Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Această relație și faptul că $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \psi'$, împreună cu regula de deducție (R_1), implică $\Sigma \vdash \varphi' \rightarrow \psi'$.

Implicația reciprocă se demonstrează în mod similar.

Așadar, $\leq_\Sigma$ este bine definită.

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Lemă

$\leq_\Sigma$ este o relație de ordine parțială pe $E/_{\sim_\Sigma}$.

Demonstrație: Conform (PI), pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$, i. e. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$, așadar $\leq_\Sigma$ este reflexivă.
Din remarca precedentă, pentru orice $\varphi, \psi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, rezultă că $\varphi \sim_\Sigma \psi$, i. e. $\hat{\varphi}^\Sigma = \hat{\psi}^\Sigma$, deci $\leq_\Sigma$ este antisimetrică.
Regula de deducție (R_1) ne asigură de faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ a. î. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, rezultă că $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$, i. e. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, ceea ce înseamnă că $\leq_\Sigma$ este tranzitivă.
Deci $\leq_\Sigma$ este o relație de ordine pe $E/_{\sim_\Sigma}$.

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este o latice distributivă, în care, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\inf\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ și $\sup\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.
Vom nota, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ și $\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.

Demonstrație: Conform lemei precedente, $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este un poset.
Fie $\varphi, \psi \in E$, arbitrare, fixate.

Demonstrăm că, în posetul $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$, $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma = \inf\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\}$, i. e. $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ este cel mai mare minorant al elementelor $\hat{\varphi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma$, i. e.:
(a) $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$ și $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$;
(b) pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\hat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$ și $\hat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$, rezultă că $\hat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$, i. e., pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi$, rezultă că
$\Sigma \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$.
Condiția (a) rezultă din (6) și (7), iar (b) din regula de deducție (R_4).

Acum demonstrăm că, în posetul $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$, $\widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma = \sup\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\}$, i. e. $\widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$ este cel mai mic majorant al elementelor $\hat{\varphi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma$, i. e.:
(c) $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$;
(d) pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, rezultă că $\widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, i. e., pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, rezultă că
$\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.
Condiția (c) rezultă din (4) și (5), iar (d) din regula de deducție (R_3).

Așadar, am demonstrat că $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este o latice, în care, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, conjuncția este $\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$, iar disjuncția este $\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.
(11) implică faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$, $\Sigma \vdash ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi)$, deci $(\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma) \vee_\Sigma (\hat{\psi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma) \leq_\Sigma (\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma) \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$.
(12) implică faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$, $\Sigma \vdash ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) \rightarrow ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$, deci $(\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma) \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma (\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma) \vee_\Sigma (\hat{\psi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma)$.
Cele două inegalități de mai sus arată că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$, $(\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma) \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma = (\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma) \vee_\Sigma (\hat{\psi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma)$, prin urmare laticea $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma)$ este distributivă (amintim că, în orice latice, fiecare dintre legile de distributivitate o implică pe cealaltă).

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Conform lui (13), pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg\, \varphi) \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg\, \varphi)$, așadar, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg\, \varphi}^{\Sigma} \leq_{\Sigma} \hat{\psi}^{\Sigma} \leq_{\Sigma} \widehat{\varphi \vee \neg\, \varphi}^{\Sigma}$. Aceasta înseamnă că, indiferent cine este $\varphi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg\, \varphi}^{\Sigma}$ și $\widehat{\varphi \vee \neg\, \varphi}^{\Sigma}$ sunt, respectiv, primul element și ultimul element al laticii $(E/_{\sim_{\Sigma}}, \vee_{\Sigma}, \wedge_{\Sigma}, \leq_{\Sigma})$.

Vom nota $0_{\Sigma} := \widehat{\varphi \wedge \neg\, \varphi}^{\Sigma}$ și $1_{\Sigma} := \widehat{\varphi \vee \neg\, \varphi}^{\Sigma}$, pentru un $\varphi \in E$, arbitrar. Conform celor de mai sus, această definiție nu depinde de alegerea lui $\varphi \in E$.

- Am obținut:

Propoziție

$(E/_{\sim_{\Sigma}}, \vee_{\Sigma}, \wedge_{\Sigma}, \leq_{\Sigma}, 0_{\Sigma}, 1_{\Sigma})$ *este o latice distributivă mărginită.*

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Notație

Pentru orice $\varphi \in E$, notăm: $\overline{\hat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma := \widehat{\neg\varphi}^\Sigma$.

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ *este o algebră Boole.*

Demonstrație: Rezultatele anterioare arată că $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o latice distributivă mărginită în care, pentru orice $\varphi \in E$, au loc egalitățile:

- $\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \overline{\hat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma = \hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\neg\varphi}^\Sigma = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}^\Sigma = 0_\Sigma$ și
- $\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \overline{\hat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma = \hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\neg\varphi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$,

prin urmare $\overline{\hat{\varphi}^\Sigma}^\Sigma$ este complementul lui $\hat{\varphi}^\Sigma$.
Aceasta înseamnă că $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o algebră Boole.

Definiție

Algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ se numește *algebra Lindenbaum-Tarski a lui Σ asociată sistemului formal $\mathcal{L}$.*

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Dacă notăm cu $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$ surjecția canonică ($p_\Sigma(\varphi) := \hat{\varphi}^\Sigma$ pentru orice $\varphi \in E$), atunci, oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele identități (unde $\to_\Sigma$ și $\leftrightarrow_\Sigma$ sunt, respectiv, implicația și echivalența booleană în algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$):

1. $p_\Sigma(\varphi \vee \psi) = p_\Sigma(\varphi) \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
2. $p_\Sigma(\varphi \wedge \psi) = p_\Sigma(\varphi) \wedge_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
3. $p_\Sigma(\neg\, \varphi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma$;
4. $p_\Sigma(\varphi \to \psi) = p_\Sigma(\varphi) \to_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
5. $p_\Sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = p_\Sigma(\varphi) \leftrightarrow_\Sigma p_\Sigma(\psi)$.

Într–adevăr, identitățile (1), (2) și (3) sunt chiar definițiile operațiilor algebrei Boole $E/_{\sim_\Sigma}$. Definiția implicației booleene, (1) și (3) arată că $p_\Sigma(\varphi) \to_\Sigma p_\Sigma(\psi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi) = p_\Sigma(\neg\, \varphi \vee \psi)$, ceea ce arată că (4) este echivalent cu faptul că $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\, \varphi \vee \psi)$, care rezultă din (15), (16) și prima remarcă din această secțiune. (5) se obține, direct, din (2) și (4).
Cele cinci identități de mai sus arată cum conectorii logici sunt convertiți în operații booleene.

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \varphi$ *ddacă* $\hat{\varphi}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$.

Demonstrație: Fie $\varphi \in E$, arbitrar, fixat.
Au loc echivalențele: $\hat{\varphi}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$ ddacă $\hat{\varphi}^{\Sigma} = \widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^{\Sigma}$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$.
Așadar, avem de demonstrat că: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$.
Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi$. Conform (A_1), $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \vee \neg \varphi) \rightarrow \varphi)$, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \vee \neg \varphi) \rightarrow \varphi)$. Prin (MP), obținem: $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg \varphi) \rightarrow \varphi$. Conform (13), $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$. Așadar, $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$, după cum ne asigură prima remarcă din această secțiune.
Reciproc, să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$, sau, echivalent, $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg \varphi) \leftrightarrow \varphi$, așadar $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg \varphi) \rightarrow \varphi$, conform aceleiași prime remarci din această secțiune. Dar (PTE) afirmă că $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$, și deci $\Sigma \vdash \varphi \vee \neg \varphi$. Prin (MP), obținem $\Sigma \vdash \varphi$.

Remarcă

Lema anterioară ne oferă o metodă algebrică pentru a verifica dacă un enunț este o consecință sintactică a lui Σ.

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Notație

În cazul în care $\Sigma = \emptyset$:

- relația de echivalență $\sim_{\emptyset}$ se notează, simplu, $\sim$,
- clasele ei de echivalență $\hat{\varphi}^{\emptyset}$ ($\varphi \in E$) se notează $\hat{\varphi}$,
- relația de ordine $\leq_{\emptyset}$ se notează $\leq$,
- iar operațiile $\vee_{\emptyset}$, $\wedge_{\emptyset}$, $\bar{\cdot}^{\emptyset}$, $0_{\emptyset}$ și $1_{\emptyset}$ se notează, respectiv, $\vee$, $\wedge$, $\bar{\cdot}$, 0 și 1.

Definiție

Algebra Boole $(E/_{\sim}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ se numește *algebra Lindenbaum-Tarski asociată sistemului formal* $\mathcal{L}$.

- Lema anterioară devine, în acest caz, o caracterizare a teoremelor formale:

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi$ *ddacă* $\hat{\varphi} = 1$.