Mecanică Generală

II. Axiomatica corpurilor deformabile şi a solidului rigid

Liviu Marin[1,†]

[1]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, România

[†]E-mail: `marin.liviu@gmail.com`

8 & 15 octombrie 2013

Spaţii vectoriale

Definiţie

Fie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Se numeşte spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ tripletul $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ format din: (i) mulţimea vectorilor, $\mathcal{V} \neq \varnothing$, (ii) operaţia de adunare a vectorilor, $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, $(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) \longmapsto \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$; şi (iii) operaţia de înmulţire cu scalari, $\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, $(\alpha, \vec{\mathbf{v}}) \longmapsto \alpha\vec{\mathbf{v}}$, a.i.:

(V$_1$) $(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}})\,, \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}$;

(V$_2$) $\exists!\ \vec{\mathbf{0}} \in \mathcal{V} : \quad \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}, \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$;

(V$_3$) $\forall\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}, \exists!\ (-\vec{\mathbf{u}}) \in \mathcal{V} : \quad \vec{\mathbf{u}} + (-\vec{\mathbf{u}}) = (-\vec{\mathbf{u}}) + \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$;

(V$_4$) $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}, \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$;

(V$_5$) $\alpha\,(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = \alpha\vec{\mathbf{u}} + \alpha\vec{\mathbf{v}}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$;

(V$_6$) $(\alpha + \beta)\,\vec{\mathbf{u}} = \alpha\vec{\mathbf{u}} + \beta\vec{\mathbf{u}}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$;

(V$_7$) $\alpha\,(\beta\vec{\mathbf{u}}) = (\alpha\beta)\,\vec{\mathbf{u}}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$;

(V$_8$) $1_{\mathbb{K}}\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}, \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$.

Spaţii afine

De ce spaţii afine?

- Spaţiile afine oferă un cadru f. bun pentru geometrie.
- In spaţiile afine, se pot studia, d.p.d.v. geometric, puncte, curbe, suprafeţe etc. într-o *manieră intrinsecă*, i.e. independent de alegerea unui sistem de referinţă/coordonate.
- Spaţiile afine oferă cadrul constitutiv adecvat pentru studiul mişcării, al traiectoriei şi al forţelor.
- In consecinţă, geometria afină este crucială pentru prezentarea riguroasă şi coerentă a cinematicii şi dinamicii.

Definiţie (spaţiu afin)

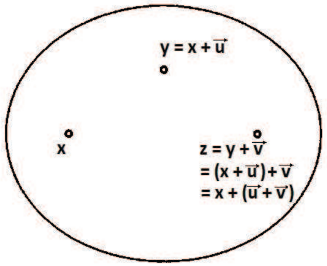
Un spaţiu afin este fie spaţiul degenerat redus la mulţimea vidă, fie tripletul $(\mathcal{E}, \mathcal{V}, +)$ format din:

(i) mulţimea punctelor, $\mathcal{E} \neq \varnothing$;
(ii) spaţiul vectorial al translaţiilor (spaţiul vectorial al vectorilor liberi), $\mathcal{V} \neq \varnothing$;
(iii) aplicaţia

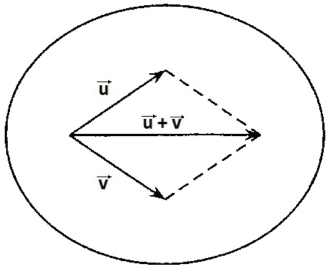
$$+ : \mathcal{E} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (\mathbf{x}, \vec{\mathbf{u}}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{V} \longmapsto \mathbf{x} + \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{E};$$

care satisfac următoarele proprietăţi:

(A$_1$) $\mathbf{x} + \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{x}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{E}$;
(A$_2$) $(\mathbf{x} + \vec{\mathbf{u}}) + \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{x} + (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}})\,, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{E}, \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$;
(A$_3$) $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}, \quad \exists!\ \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} : \quad \mathbf{x} + \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{y}$.



Spaţiul afin, $\mathcal{E}$.



Spaţiul vectorial, $\mathcal{V}$.

Unicul vector $\vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$, a.i. $\mathbf{x} + \vec{\mathbf{u}} = \mathbf{y}$, se notează cu $\overrightarrow{\mathbf{xy}}$ sau $\mathbf{y} - \mathbf{x}$.
In consecinţă, $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \overrightarrow{\mathbf{xy}}$ sau $\mathbf{y} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})$.

Interpretare intuitivă

Spaţiul afin, $\mathcal{E}$, şi spaţiul vectorial, $\mathcal{V}$, sunt două moduri de a privi acelaşi obiect.

(i) Spaţiul afin, $\mathcal{E}$, este privit ca o mulţime de puncte, făcând abstracţie că perechea de puncte $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ determină, în mod unic, vectorul $\overrightarrow{\mathbf{xy}} \in \mathcal{V}$, cf. axiomei (A_3).

(ii) Spaţiul vectorial, $\mathcal{V}$, este privit ca o mulţime de vectori $\vec{\mathbf{u}}$, făcând abstracţie de existenţa punctelor din spaţiul afin, $\mathcal{E}$.

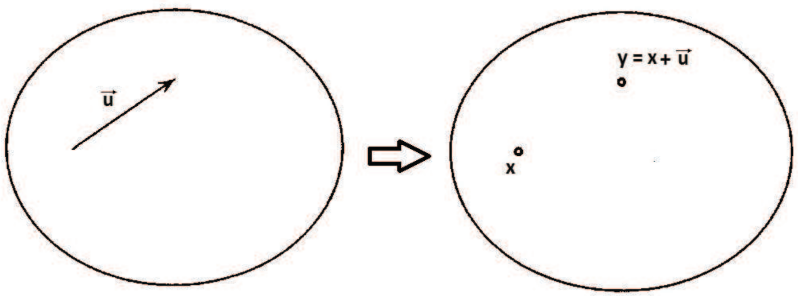
(iii) Prin fixarea unui punct $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$, care este privit drept origine, spaţiul afin $\mathcal{E}$ poate fi regândit ca mulţimea translaţiilor originii $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ prin spaţiul vectorial $\mathcal{V}$

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{x} + \vec{\mathbf{u}} \mid \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}\} = \{\mathbf{x}\} + \mathcal{V}.$$

(iv) Spaţiul afin, $\mathcal{E}$, trebuie gândit ca mulţimea de puncte (particule) ale spaţiului fizic. Spaţiul vectorial, $\mathcal{V}$, trebuie gândit ca mulţimea vectorilor (forţelor) ce acţionează pe $\mathcal{E}$.

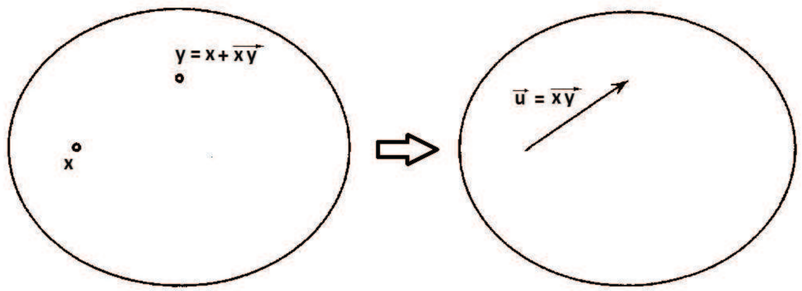
Formal, se definesc următoarele aplicaţii:

$$\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{E} \text{ arbitrar, fixat:} \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{\mathbf{u}} \longmapsto \mathbf{x} + \vec{\mathbf{u}} \qquad (1)$$



Spaţiul vectorial, $\mathcal{V}$. Spaţiul afin, $\mathcal{E}$.

$$\forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{E} \text{ arbitrar, fixat:} \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{y} \longmapsto \overrightarrow{\mathbf{xy}} \qquad (2)$$



Spaţiul afin, $\mathcal{E}$. Spaţiul vectorial, $\mathcal{V}$.

Considerăm compunerile acestor funcții, i.e. (1) cu (2) și, respectiv, (2) cu (1), definite astfel ($\forall\ \mathbf{x} \in \mathcal{E}$ arbitrar, fixat):

$$\forall\ \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V}, \quad \vec{\mathbf{u}} \longmapsto \mathbf{x} + \vec{\mathbf{u}} \longmapsto \overrightarrow{\mathbf{x}\,(\mathbf{x} + \vec{\mathbf{u}})} \tag{3}$$

$$\forall\ \mathbf{y} \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \mathbf{y} \longmapsto \overrightarrow{\mathbf{xy}} \longmapsto \mathbf{x} + \overrightarrow{\mathbf{xy}} \tag{4}$$

Observații

(i) Compunerile de funcții definite de ecuațiile (3) și (4) sunt, de fapt, funcția identitate pe $\mathcal{V}$, $id_{\mathcal{V}}$, respectiv funcția identitate pe $\mathcal{E}$, $id_{\mathcal{E}}$.

(ii) Funcțiile definite de ecuațiile (1) și (2) sunt, in consecință, bijecții, deci inversabile, fiecare dintre acestea fiind inversa celeilalte.

Definiție

Dimensiunea spațiului afin $(\mathcal{E}, \mathcal{V}, +)$ este dată de dimensiunea spațiului vectorial $\mathcal{V}$, i.e. $\dim \mathcal{V}$, și se notează prin $\dim \mathcal{E}$, i.e. $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{V}$.

Definiție

Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{V}, +)$ un spațiu afin $n-$dimensional, i.e. $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{V} = n$. Se numește sistem de referință perechea $\left(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1 \leq i \leq n}\right)$, unde:

(i) $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ este un punct numit originea sistemului de referință;

(ii) $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{V}$ sunt vectori ce formează o bază.

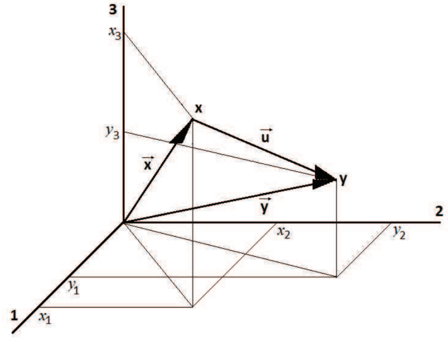
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Longrightarrow \vec{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{O}$;

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Longrightarrow \vec{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{O}$;

$\mathbf{y} - \mathbf{x} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) - (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$= (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n) \Longrightarrow$

$\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{y} - \mathbf{O})}_{=\vec{\mathbf{y}}} - \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{O})}_{=\vec{\mathbf{x}}}$



In cazul Mecanicii, avem:

- $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ – spațiul euclidian punctual (spațiul afin) tridimensional;
- $\mathcal{V}$ – spațiul vectorial al translațiilor lui $\mathcal{E}$, $\dim \mathcal{V} = 3$.

- Fie $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1 \leq i \leq 3} \subset \mathcal{V}$ o bază ortonormată a lui $\mathcal{V}$, i.e.

$$\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3. \tag{5}$$

Atunci

$$\forall\ \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}, \quad \exists!\ (u_i)_{1 \leq i \leq 3} \subset \mathbb{R}: \quad \vec{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{3} u_i \vec{\mathbf{e}}_i, \tag{6}$$

unde $u_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, sunt componentele vectorului $\vec{\mathbf{u}}$ în baza $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1 \leq i \leq 3}$.

- Mai mult, componentele vectorului $\vec{\mathbf{u}}$ în baza $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ sunt proiecțiile vectorului $\vec{\mathbf{u}}$ pe direcțiile $\vec{\mathbf{e}}_i$, $1 \leq i \leq 3$:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_k = \left(\sum_{i=1}^{3} u_i \vec{\mathbf{e}}_i\right) \cdot \vec{\mathbf{e}}_k = \sum_{i=1}^{3} u_i \left(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_k\right) = \sum_{i=1}^{3} u_i \delta_{ik} = u_k. \tag{7}$$

- Fie $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ ale căror reprezentări în baza $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ sunt date de:

$$\vec{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{3} u_i \vec{\mathbf{e}}_i, \qquad \vec{\mathbf{v}} = \sum_{j=1}^{3} v_j \vec{\mathbf{e}}_j. \tag{8}$$

Atunci produsul scalar al vectorilor $\vec{\mathbf{u}}$ si $\vec{\mathbf{v}}$ este dat de formula:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \left(\sum_{i=1}^{3} u_i \vec{\mathbf{e}}_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} v_j \vec{\mathbf{e}}_j\right) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} u_i v_j \underbrace{\left(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j\right)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i. \tag{9}$$

- Produsul scalar al vectorilor $\vec{\mathbf{u}}$ și $\vec{\mathbf{v}}$ se mai poate introduce și în forma următoare:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{u}}|\ |\vec{\mathbf{v}}|\ \cos\theta, \tag{10}$$

unde $\theta \in [0, \pi]$ este unghiul dintre vectorii $\vec{\mathbf{u}}$ și $\vec{\mathbf{v}}$.

- Vectorii $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ se numesc perpendiculari dacă $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$.

- Produsul vectorial al vectorilor $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ este dat de:

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \big(|\vec{\mathbf{u}}|\,|\vec{\mathbf{v}}|\,\sin\theta\big)\vec{\mathbf{e}}, \tag{11}$$

unde $\theta \in [0, \pi]$ este unghiul dintre vectorii $\vec{\mathbf{u}}$ si $\vec{\mathbf{v}}$, iar $\vec{\mathbf{e}} \in \mathcal{V}$ este vectorul unitar, perpendicular pe planul determinat de $\vec{\mathbf{u}}$ și $\vec{\mathbf{v}}$, obținut prin aplicarea regulii mâinii drepte (regula burghiului.)

- Vectorii $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ se numesc paraleli daca $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$.
- Fie $\vec{\mathbf{e}} \in \mathcal{V}$ un vector unitar. Atunci

$$\forall\, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}: \quad \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}}^{\perp}, \tag{12}$$

unde

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{0}}, \qquad \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}}^{\perp} \cdot \vec{\mathbf{e}} = 0. \tag{13}$$

Vectorul $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}} = (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{e}})\vec{\mathbf{e}}$ se numește proiecția lui $\vec{\mathbf{v}}$ pe $\vec{\mathbf{e}}$.
Vectorul $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}}^{\perp} = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}}$ se numește componenta ortogonală a lui $\vec{\mathbf{v}}$ în raport cu $\vec{\mathbf{e}}$.

- Vectorii $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3} \subset \mathcal{V}$ formează o bază ortonormată orientată a lui $\mathcal{V}$ dacă
  - (i) $\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}, \quad \forall\, i, j \in \{1, 2, 3\}$;
  - (ii) $\vec{\mathbf{e}}_i \times \vec{\mathbf{e}}_j = \vec{\mathbf{e}}_k, \quad \forall\, (i, j, k)$ permutare pară a lui $(1, 2, 3)$.
- Se numește produs tensorial al vectorilor $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ aplicația

$$\vec{\mathbf{u}} \otimes \vec{\mathbf{v}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}, \qquad (\vec{\mathbf{u}} \otimes \vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}), \quad \forall\, \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{V}. \tag{14}$$

Definiție

(i) $\mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \equiv \Big\{\mathbf{T} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \;\Big|\; \mathbf{T} \text{ liniară}\Big\}$ se numește mulțimea tensorilor de ordinul 2 pe $\mathcal{V}$.

(ii) $\mathrm{InvLin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \equiv \Big\{\mathbf{T} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \;\Big|\; \mathbf{T} \text{ inversabilă}\Big\}$ se numește mulțimea tensorilor de ordinul 2 inversabili pe $\mathcal{V}$.

(iii) $\mathrm{Bilin}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathbb{R}) \equiv \Big\{\mathbf{A} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R} \;\Big|\; \mathbf{A} \text{ biliniară}\Big\}$ se numește mulțimea aplicațiilor biliniare pe $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Proprietăți

(i) $\vec{\mathbf{u}} \otimes \vec{\mathbf{v}} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}), \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$.

(ii) $\big[(\vec{\mathbf{u}} \otimes \vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{z}}\big] \cdot \vec{\mathbf{w}} = (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{z}})(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}), \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}, \vec{\mathbf{z}} \in \mathcal{V}$.

Demonstrație: Exercițiu!

Teoremă (Riesz)

Fie $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ o aplicație liniară. Atunci

$$\exists\, \vec{\mathbf{a}}_f \in \mathcal{V} \text{ a.i. } f(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{a}}_f \cdot \vec{\mathbf{v}}, \quad \forall\, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}. \tag{15}$$

Teoremă

$\mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \equiv \Big\{\mathbf{T} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \;\Big|\; \mathbf{T} \text{ liniară}\Big\}$ este izomorf cu
$\mathrm{Bilin}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathbb{R}) \equiv \Big\{\mathbf{A} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R} \;\Big|\; \mathbf{A} \text{ biliniară}\Big\}$ prin relația următoare:

$$\mathbf{T}\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{A}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}), \quad \forall\, \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}. \tag{16}$$

Teorema de unicitate (W. Noll, 1964)

Definiţie (metrică)

O metrică pe mulţimea $\mathcal{E} \neq \varnothing$ este dată de funcţia

$$d(\cdot,\cdot) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

cu următoarele proprietăţi:

(M_1) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq 0, \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{E}$ (separabilitate);

(M_2) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$ (coincidenţă);

(M_3) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{E}$ (simetrie);

(M_4) $d(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d(\mathbf{y},\mathbf{z}), \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathcal{E}$ (inegalitatea triunghiului).

Observaţii

(i) (M_1) & (M_2) i.e. d este pozitiv definită.

(ii) (M_2)–(M_4) $\Longrightarrow$ (M_1). Exerciţiu!

Fie mulţimea $\mathcal{E} \neq \varnothing$ înzestrată cu metrica $d(\cdot,\cdot) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Considerăm grupul izometriilor pe mulţimea $\mathcal{E}$, i.e.

$\mathcal{I} = \Big\{ \alpha : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \Big| \alpha \text{ bijecţie};\ \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{E},\ d\left(\alpha(\mathbf{x}),\alpha(\mathbf{y})\right) = d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Big\}$

Definiţie ("axioma euclidiană")

$d(\cdot,\cdot) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ se numeşte metrică euclidiană dacă $\exists\, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{I}$ subgrup a.i.

(E_1) $u \circ v = v \circ u, \quad \forall\, u, v \in \mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ comutativ);

(E_2) $\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{E}$, $\exists!\, u \in \mathcal{V}$ a.i. $\mathbf{y} = u(\mathbf{x})$ ($\mathcal{V}$ tranzitiv);

(E_3) $\exists\, v \in \mathcal{V}$ a.i. $v(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_0 \in \mathcal{E} \Longrightarrow v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{E}$, i.e. $v \equiv id_{\mathcal{E}}$ ($\mathcal{V}$ acţionează liber);

(E_4)
(i) $\exists\, \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ o operaţie (înmulţirea cu scalari) în raport cu care $\mathcal{V}$ devine spaţiu vectorial real ($\circ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ adunarea vectorilor, i.e. "$\circ$" $\equiv$ "$+$");
(ii) $\exists\, \cdot : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ produs scalar a.i. $\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{E}$ a.i. $u(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \Longrightarrow d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (u \cdot u)^{1/2} = |u|$.

Observaţii

Dacă axiomele (E_1)–(E_4) sunt îndeplinite, atunci:

(i) d induce o structură de spaţiu euclidian pe $\mathcal{E}$.

(ii) $\mathcal{V}$ este spaţiul translaţiilor asociat lui $\mathcal{E}$.

Observaţii

Fie $\mathcal{E}$ spaţiul euclidian, $\mathcal{V}$ spaţiul translaţiilor asociat. Atunci:

(i) $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$ este gândită în locul $u \circ v$;

(ii) $\vec{\mathbf{0}} \in \mathcal{V} \Longrightarrow \vec{\mathbf{0}} \equiv id_{\mathcal{E}}$;

(iii) $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V} \Longrightarrow -\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$;

(iv) $\mathbf{x} \in \mathcal{E}, \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V} \Longrightarrow u(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} + \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}$;

(v) $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{E} \Longrightarrow \exists!\, \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ a.i $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Teorema de unicitate (W. Noll, 1964)

Există cel mult un spaţiu vectorial cu produs scalar care satisface axiomele (E_1)–(E_4).

Teorema de unicitate (W. Noll, 1964)

Există cel mult un spaţiu vectorial cu produs scalar care satisface axiomele (E_1)–(E_4).

Demonstraţie:

Fie $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subset \mathcal{I}$ două subgrupuri ce satisfac axiomele (E_1)–(E_4).

Fie $\mathbf{q} \in \mathcal{E}$ fixat. Construim o funcţie $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ astfel:

$$\forall\, \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}, \quad \exists!\, \mathbf{y} \in \mathcal{E} \quad \text{a.i.} \quad \mathbf{y} = \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{q})\ [\equiv \mathbf{q} + \vec{\mathbf{v}}]; \tag{17}$$

$$\exists!\, \vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{W} \quad \text{a.i.} \quad \mathbf{y} = \vec{\mathbf{w}}(\mathbf{q})\ [\equiv \mathbf{q} + \vec{\mathbf{w}}] \quad \text{cf. axiomei } (E_2). \tag{18}$$

Definim funcţia f prin

$$f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}, \qquad \vec{\mathbf{v}} \longmapsto f(\vec{\mathbf{v}}) := \vec{\mathbf{w}}. \tag{19}$$

(i) f este bijectivă:

Fie $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathcal{V}$ a.i.

$$f(\vec{\mathbf{v}}_1) = f(\vec{\mathbf{v}}_2). \tag{20}$$

Din (20) și cf. definiției funcției f, rezultă

$$\vec{\mathbf{v}}_1(\mathbf{q}) = f(\vec{\mathbf{v}}_1)(\mathbf{q}) \quad [\mathbf{q} + \vec{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{q} + f(\vec{\mathbf{v}}_1)] \tag{21a}$$

și

$$\vec{\mathbf{v}}_2(\mathbf{q}) = f(\vec{\mathbf{v}}_2)(\mathbf{q}) \quad [\mathbf{q} + \vec{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{q} + f(\vec{\mathbf{v}}_2)]. \tag{21b}$$

Din (20), (21a) și (21b), obținem

$$\vec{\mathbf{v}}_1(\mathbf{q}) = \vec{\mathbf{v}}_2(\mathbf{q}) \quad [\mathbf{q} + \vec{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{q} + \vec{\mathbf{v}}_2]. \tag{22}$$

Cum $\mathbf{q} \in \mathcal{E}$ arbitrar fixat, din (E_2) aplicată lui $\mathcal{V}$ și relația (22), rezultă $\vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_2$, i.e. f este injectivă.

Fie $\vec{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}$. Atunci

$$\exists!\ \mathbf{y} \in \mathcal{E} \quad \text{a.i.} \quad \mathbf{y} = \vec{\mathbf{w}}(\mathbf{q}) \quad [\equiv \mathbf{q} + \vec{\mathbf{w}}]. \tag{23}$$

Cf. (E_2), $\exists!\ \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$ a.i.

$$\mathbf{y} = \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \quad [\equiv \mathbf{q} + \vec{\mathbf{v}}]. \tag{24}$$

Din (23) și (24), împreună cu definiția funcției f, i.e. relația (19), rezultă că $f(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{w}}$, i.e. f este surjectivă.

Astfel, am arătat că f este bijectivă.

(ii) f conservă produsul scalar:

Fie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$.

Fie $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathcal{V}$ a.i.

$$\mathbf{x} = \vec{\mathbf{v}}_1(\mathbf{q}) \quad [\mathbf{x} = \mathbf{q} + \vec{\mathbf{v}}_1]; \tag{25a}$$

$$\mathbf{y} = \vec{\mathbf{v}}_2(\mathbf{q}) \quad [\mathbf{y} = \mathbf{q} + \vec{\mathbf{v}}_2]. \tag{25b}$$

Din relațiile (25a) și (25b), obținem

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} = (\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1)(\mathbf{q}) \quad [\mathbf{y} = \mathbf{x} + (\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1)]. \tag{26}$$

Fie $\vec{\mathbf{w}}_1 = f(\vec{\mathbf{v}}_1), \vec{\mathbf{w}}_2 = f(\vec{\mathbf{v}}_2) \in \mathcal{W}$. Din definiția funcției f, rezultă urmatoarele relații:

$$\mathbf{x} = \vec{\mathbf{w}}_1(\mathbf{q}) = f(\vec{\mathbf{v}}_1)(\mathbf{q}) \quad [\mathbf{x} = \mathbf{q} + \vec{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{q} + f(\vec{\mathbf{v}}_1)]; \tag{27a}$$

$$\mathbf{y} = \vec{\mathbf{w}}_2(\mathbf{q}) = f(\vec{\mathbf{v}}_2)(\mathbf{q}) \quad [\mathbf{y} = \mathbf{q} + \vec{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{q} + f(\vec{\mathbf{v}}_2)]. \tag{27b}$$

In mod similar, din relațiile (27a) si (27b), obținem

$$\begin{aligned} &\mathbf{y} - \mathbf{x} = (\vec{\mathbf{w}}_2 - \vec{\mathbf{w}}_1)(\mathbf{q}) = \left(f(\vec{\mathbf{v}}_2) - f(\vec{\mathbf{v}}_1)\right)(\mathbf{q}) \\ &[\mathbf{y} = \mathbf{x} + (\vec{\mathbf{w}}_2 - \vec{\mathbf{w}}_1) = \mathbf{x} + (f(\vec{\mathbf{v}}_2) - f(\vec{\mathbf{v}}_1))]. \end{aligned} \tag{28}$$

Din ecuațiile (26) și (28) și axioma (E_4), obținem

$$\begin{aligned} &(\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1) \cdot (\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = \\ &= \left(f(\vec{\mathbf{v}}_2) - f(\vec{\mathbf{v}}_1)\right) \cdot \left(f(\vec{\mathbf{v}}_2) - f(\vec{\mathbf{v}}_1)\right), \quad \forall\ \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{29}$$

Fie $\vec{\mathbf{v}}_1 \equiv \vec{\mathbf{0}}$ în ecuația (29). Atunci:

$$\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2 = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = f(\vec{\mathbf{v}}_2) \cdot f(\vec{\mathbf{v}}_2), \quad \forall\ \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathcal{V}. \tag{30}$$

Pe de altă parte, au loc următoarele identități:

$$\begin{aligned} &(\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1) \cdot (\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1) = \\ &= \vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2 - 2(\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{v}}_1) + \vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_1, \quad \forall\ \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathcal{V}; \end{aligned} \tag{31a}$$

$$\begin{aligned} &\left(f(\vec{\mathbf{v}}_2) - f(\vec{\mathbf{v}}_1)\right) \cdot \left(f(\vec{\mathbf{v}}_2) - f(\vec{\mathbf{v}}_1)\right) = \\ &= f(\vec{\mathbf{v}}_2) \cdot f(\vec{\mathbf{v}}_2) - 2\left(f(\vec{\mathbf{v}}_2) \cdot f(\vec{\mathbf{v}}_1)\right) + f(\vec{\mathbf{v}}_1) \cdot f(\vec{\mathbf{v}}_1), \quad \forall\ \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{31b}$$

Din ecuațiile (29)–(31), obținem

$$\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{v}}_1 = f(\vec{\mathbf{v}}_2) \cdot f(\vec{\mathbf{v}}_1), \quad \forall\ \vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2 \in \mathcal{V}, \tag{32}$$

i.e. f conservă produsul scalar.

(iii) f este izomorfism de spaţii vectoriale: Exerciţiu!

(iv) f este funcţia identitate pe $\mathcal{V}$, i.e. $id_{\mathcal{V}}$: Exerciţiu! $\square$

Axiomele corpurilor şi masei

Modelul matematic al conceptului fizic de corp continuu deformabil şi al celui de element material a fost elaborat de W. Noll:

W. Noll, A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archives for Rational Mechanics and Analysis* **2**(1), 197–226 (1958).

Definiţie (corp amorf)

Un corp $\mathcal{B}$ este constituit dintr-o mulţime de puncte $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \ldots$, numite puncte materiale (particule), care are o structură dată de:

(i) familia de aplicaţii $\mathscr{C} \equiv \left\{k : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}\right\}$, numite configuraţii ale corpului $\mathcal{B}$ (în spaţiul $\mathcal{E}$);

(ii) o funcţie $m : \mathscr{P}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, numită masă, unde $\mathscr{P}(\mathcal{B})$ sunt părţi ale corpului $\mathcal{B}$.

Fie $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ spaţiul euclidian punctual tridimensional; $\mathcal{V}$ spaţiul vectorial al translaţiilor lui $\mathcal{E}$ ($\dim \mathcal{V} = 3$); $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ o mulţime deschisă, conexă.

Definiţie

Aplicaţia $\varphi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ (câmp scalar) este diferenţiabilă în $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ dacă

$$\begin{aligned} &\exists\ \mathbf{D}\varphi(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathbb{R}), \quad \exists\ \omega(\mathbf{x}, \cdot) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ a.i.} \\ &\varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{D}\varphi(\mathbf{x})[\vec{\mathbf{v}}] + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \tag{33}$$

unde

$$\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad \lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}} \frac{\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = 0. \tag{34}$$

Observaţie

Din Teorema lui Riesz, obţinem:

$$\exists\ \nabla\varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{V} \text{ a.i. } \mathbf{D}\varphi(\mathbf{x})[\vec{\mathbf{v}}] = \nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \vec{\mathbf{v}}, \quad \forall\ \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}. \tag{35}$$

$\nabla\varphi(\mathbf{x})$ se numeşte gradientul câmpului scalar φ.

Definiţie

Aplicaţia $\vec{\mathbf{u}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{V}$ (câmp vectorial) este diferenţiabilă în $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ dacă

$$\begin{aligned} &\exists\ \mathbf{D}\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}), \quad \exists\ \omega(\mathbf{x}, \cdot) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{V} \text{ a.i.} \\ &\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x})[\vec{\mathbf{v}}] + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \tag{36}$$

unde

$$\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \quad \lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}} \frac{\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = 0. \tag{37}$$

Observaţie

Din Teorema lui Riesz, obţinem:

$$\begin{aligned} &\exists\ \nabla\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \cong \mathrm{Bilin}(\mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathbb{R}) \text{ a.i.} \\ &\mathbf{D}\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x})[\vec{\mathbf{v}}] = \nabla\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\vec{\mathbf{v}}, \quad \forall\ \vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \tag{38}$$

$\nabla\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \vec{\mathbf{e}}_i \otimes \vec{\mathbf{e}}_j$ se numeşte gradientul câmpului vectorial $\vec{\mathbf{u}}$.

Definiție (corp continuu de clasă C^2)

Un corp $\mathcal{B}$ se numește corp continuu de clasă C^2 dacă mulțimea configurațiilor sale, $\mathscr{C}$, și funcția masă, m, satisfac următoarele axiome:

(C_1) Orice configurație $k \in \mathscr{C}$ are proprietățile:

- (i) k este injectivă;
- (ii) $k(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{B}_k \subset \mathcal{E}$ este o mulțime mărginită și deschisă.

(C_2) Daca $k, \widetilde{k} \in \mathscr{C}$, atunci aplicația $\lambda \equiv \widetilde{k} \circ k^{-1} : \mathcal{B}_k \longrightarrow \mathcal{B}_{\widetilde{k}}$ are proprietățile:

- (i) $\lambda \in C^2\left(\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_{\widetilde{k}}\right) \cap C^0\left(\overline{\mathcal{B}}_k, \overline{\mathcal{B}}_{\widetilde{k}}\right)$;
- (ii) $\nabla\lambda(\mathbf{x}) \in \mathrm{Inv\ Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$, unde $\mathbf{x} = k(\mathbf{X})$, $\forall\, \mathbf{X} \in \mathcal{B}$.

Aplicația λ se numește deformație de clasă C^2 de la configurația k la configurația $\widetilde{k}$.

(C_3) $\forall\, k \in \mathscr{C}$ configurație, $\forall\, \lambda : \mathcal{B}_k \longrightarrow \mathcal{E}$ deformație de clasă C^2, $\lambda \circ k \in \mathscr{C}$ configurație.
Aplicația $\widetilde{k} \equiv \lambda \circ k : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}$ se numește configurație obținută din configurația k prin deformația λ.

Definiție (masa)

Următoarele axiome caracterizează structura specifică a masei:

(M_1) $m : \mathscr{P}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ este o măsură;

(M_2) $\forall\, k \in \mathscr{C}$ configurație, $k(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{B}_k$ este măsurabilă Lebesgue și $m_k = m \circ k^{-1} : \mathscr{P}(\mathcal{B}_k) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ este o măsură absolut continuă în raport cu măsura Lebesgue in $k(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{B}_k$.
In concluzie, $\exists\, \rho_k : \mathcal{B}_k \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continuă a.i.

$$m_k\big(k(\mathcal{P})\big) \equiv m\,(\mathcal{P}) = \int_{k(\mathcal{P})} \rho_k(\mathbf{x})\, dV(\mathbf{x}), \tag{39}$$

$\forall\, \mathcal{P} \in \mathscr{P}(\mathcal{B})$ a.i. $k(\mathcal{P})$ este măsurabilă în $k(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{B}_k$.

(M_3) $\forall\, k \in \mathscr{C}$ configurație, ρ_k este marginită.

Definiții

Funcția $\rho_k : \mathcal{B}_k \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definește repartiția masei lui $\mathcal{B}$ în configurația k. Valoarea acesteia în $\mathbf{x} = k(\mathbf{X})$, unde $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$, i.e. $\rho_k(\mathbf{x})$, este densitatea de masă (masa specifică) în particula $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$, în configurația k.

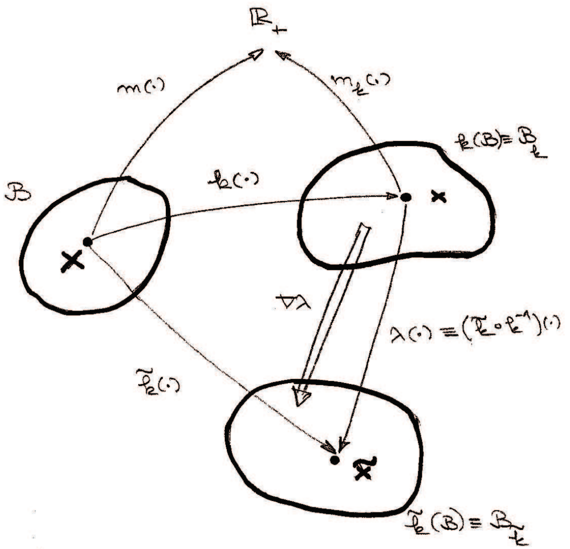


Figure : Deformații și configurații ale corpului continuu de clasă C^2, $\mathcal{B}$.

Proprietăți

(P_1) Principiul de conservare a masei: $\forall\, k, \widetilde{k} \in \mathscr{C}$ configurații și $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(\mathcal{B})$ a.i. $k(\mathcal{P})$ și $\widetilde{k}(\mathcal{P})$ sunt măsurabile în $k(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{B}_k$ și, respectiv, $\widetilde{k}(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{B}_{\widetilde{k}}$, avem:

$$m_k\big(k(\mathcal{P})\big) = m_{\widetilde{k}}\big(\widetilde{k}(\mathcal{P})\big). \tag{40}$$

(P_2) Conservarea densității de masă: Dacă $k, \widetilde{k} \in \mathscr{C}$ sunt două configurații și $\lambda : \mathcal{B}_k \longrightarrow \mathcal{B}_{\widetilde{k}}$ este o deformație de la k la $\widetilde{k}$, atunci:

$$\rho_k(\mathbf{x}) = \rho_{\widetilde{k}}(\widetilde{\mathbf{x}})\, J, \tag{41}$$

unde $\widetilde{\mathbf{x}} = \lambda(\mathbf{x})$ si $J = |\det \nabla\lambda(\mathbf{x})|$.

Demonstrație:
(P_1): Din axioma (M_2).

(P_2): Din (P_1) și (M_2), rezultă:

$$\int_{k(\mathcal{P})} \rho_k(\mathbf{x})\, dV(\mathbf{x}) = \int_{\widetilde{k}(\mathcal{P})} \rho_{\widetilde{k}}(\widetilde{\mathbf{x}})\, d\widetilde{V}(\widetilde{\mathbf{x}}), \quad \forall\, \mathcal{P} \in \mathscr{P}(\mathcal{B}). \tag{42}$$

Facem schimbarea de variabilă

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \lambda(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in k(\mathcal{P}) \tag{43}$$

și obținem

$$d\widetilde{\mathbf{x}} = \nabla\lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \left[\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]_{1 \leq i,j \leq 3} d\mathbf{x}, \quad \forall\, \mathcal{P} \in \mathscr{P}(\mathcal{B}), \tag{44a}$$

$$d\widetilde{V}(\widetilde{\mathbf{x}}) = |\det \nabla\lambda(\mathbf{x})|\, dV(\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathcal{P} \in \mathscr{P}(\mathcal{B}). \tag{44b}$$

Din ecuațiile (42) și (44b), rezultă:

$$\int_{k(\mathcal{P})} \rho_k(\mathbf{x})\, dV(\mathbf{x}) = \int_{k(\mathcal{P})} \rho_{\widetilde{k}}(\lambda(\mathbf{x}))\, |\det \nabla\lambda(\mathbf{x})|\, dV(\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathcal{P} \in \mathscr{P}(\mathcal{B}), \tag{45}$$

și, aplicând Lema lui Lebesgue, obținem relația (41).

Corp rigid

Definiție (corp rigid)

Corpul $\mathcal{B}$ se numește corp rigid dacă $\forall\, k, \widetilde{k} \in \mathscr{C}$, $\forall\, \mathbf{x}_k^0 \in k(\mathcal{B})$, $\exists\, \mathbf{x}_{\widetilde{k}}^0 \in \widetilde{k}(\mathcal{B})$, $\exists\, \mathbf{Q} \in \mathrm{Ort}$ a.i. deformația

$$\lambda \equiv \widetilde{k} \circ k^{-1} : k(\mathcal{B}) \longrightarrow \widetilde{k}(\mathcal{B}) \tag{46}$$

este dată de

$$\mathbf{x}_k \in k(\mathcal{B}) \longmapsto \mathbf{x}_{\widetilde{k}} \equiv \lambda(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_{\widetilde{k}}^0 + \mathbf{Q}\left[\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^0\right] \in \widetilde{k}(\mathcal{B}), \tag{47a}$$

i.e.

$$\mathbf{x}_{\widetilde{k}} - \mathbf{x}_{\widetilde{k}}^0 = \mathbf{Q}\left[\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^0\right]. \tag{47b}$$

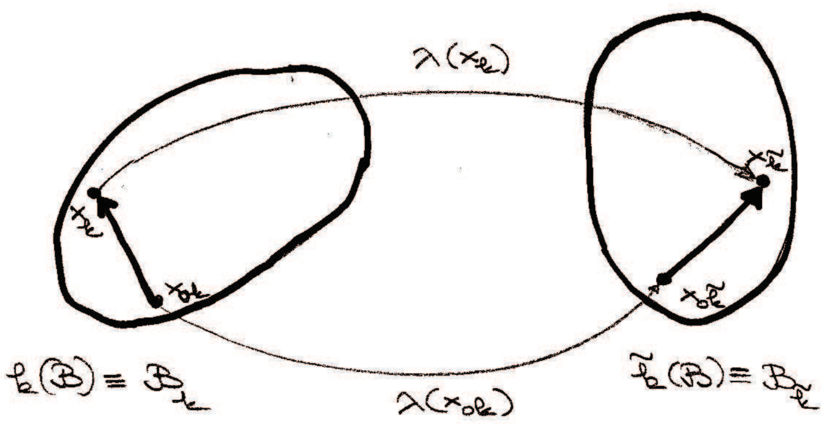


Figure : Deformația corpului $\mathcal{B}$ de la configurația k ($k(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{B}_k$) la configurația $\widetilde{k}$ ($\widetilde{k}(\mathcal{B}) \equiv \mathcal{B}_{\widetilde{k}}$).

Proprietăți (corp rigid)

(R_1) Dacă $\mathcal{B}$ este corp rigid, atunci

$$|\mathbf{x}_{\widetilde{k}} - \mathbf{x}_{\widetilde{k}}^0| = |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^0|, \quad \forall\, \mathbf{x}_k \in k(\mathcal{B}) \quad \text{a.i.} \quad \mathbf{x}_{\widetilde{k}} = \lambda(\mathbf{x}_k). \tag{48}$$

(R_2) Dacă $\mathcal{B}$ este corp rigid, $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}'_k \in \mathcal{B}_k$ și $\mathbf{x}_{\widetilde{k}}, \mathbf{x}'_{\widetilde{k}} \in \mathcal{B}_{\widetilde{k}}$ a.i. $\mathbf{x}_{\widetilde{k}} = \lambda(\mathbf{x}_k)$ și $\mathbf{x}'_{\widetilde{k}} = \lambda(\mathbf{x}'_k)$, atunci

$$|\mathbf{x}_{\widetilde{k}} - \mathbf{x}'_{\widetilde{k}}| = |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k|. \tag{49}$$

(R_3) Dacă $\mathcal{B}$ este corp rigid, $\mathbf{x}_k \in \mathcal{B}_k$ și $\mathbf{x}_{\widetilde{k}} \in \mathcal{B}_{\widetilde{k}}$ a.i. $\mathbf{x}_{\widetilde{k}} = \lambda(\mathbf{x}_k)$, atunci

$$\rho_k(\mathbf{x}_k) = \rho_{\widetilde{k}}(\mathbf{x}_{\widetilde{k}}). \tag{50}$$