Logică matematică și computațională
Cursul III

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

Relații n–are

- Amintim notația $\prod_{i \in I} A_i$ pentru produsul direct (produsul cartezian) al unei familii (arbitrare) de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ și notația $(a_i)_{i \in I}$ pentru un element al acestui produs direct (i. e. $a_i \in A_i$ pentru orice $i \in I$).
- Amintim că am notat cu $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mulțimea numerelor naturale nenule și, pentru orice n natural, $\overline{1, n} := \{1, 2, \ldots, n\}$, cu convenția: $\overline{1, 0} = \emptyset$.

Notație

Fie $n \in \mathbb{N}$ și mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Produsul direct $\prod_{i \in \overline{1,n}} A_i$ se mai notează cu $\prod_{i=1}^{n} A_i$, iar un element $(a_i)_{i \in \overline{1,n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Licență de scriere (convenție): Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, orice funcție $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \to B$ și orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) := f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere).

Relații n–are

- Amintim că am notat cu $A \cong B$ faptul că există o bijecție între două mulțimi A și B.

Propoziție (asociativitatea produsului direct)

Fie A_1, A_2, A_3 mulțimi arbitrare. Atunci $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^{3} A_i$.

Mai precis, $A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^{3} A_i$*, întrucât următoarele funcții sunt bijecții:* $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\varphi} (A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^{3} A_i$*, pentru orice* $a_1 \in A_1$*, orice* $a_2 \in A_2$ *și orice* $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ *și* $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$*. Fiecare dintre bijecțiile φ și ψ se asimilează cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenție egalitățile:* $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ *pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ și orice $a_3 \in A_3$.*

Demonstrație: Este evident că φ și ψ sunt bijecții, adică orice element din codomeniul fiecăreia dintre ele este imaginea unuia și numai unuia dintre elementele din domeniul său.

Relații n–are

- Asociativitatea produsului direct semnifică faptul că, într-un șir de produse directe (ca operații binare notate **infixat**, i. e. cu operatorul binar produs direct între *argumentele* (*operanzii*, variabilele) sale; a se vedea mai jos), nu contează cum punem parantezele, i. e. indiferent care dintre produsele directe din acel șir sunt efectuate mai devreme și care mai târziu, rezultatul obținut este același.
- Asociativitatea produsului direct face legitimă (i. e. corectă) notația următoare pentru un șir de produse directe notate **infixat** (i. e. cu operatorul binar produs direct între argumentele sale, ca mai jos) fără paranteze.

Notație

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, notăm

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

Relații n–are

Definiție

Fie $n \in \mathbb{N}$ și $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulțimi. Se numește *relație n–ară* între mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o submulțime a produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Observație

Pentru $n = 1$ în definiția anterioară se obține noțiunea de *relație unară* pe o mulțime: prin definiție, o *relație unară* pe o mulțime A este o submulțime a lui A.
Pentru $n = 2$ în definiția anterioară se obține noțiunea de *relație binară*.

Relații binare

Definiție

Fie A și B două mulțimi. Se numește *relație binară* între A și B o submulțime R a produsului direct $A \times B$.
Pentru fiecare $a \in A$ și fiecare $b \in B$, faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează cu aRb și se citește: *a este în relația R cu b*.

Exemplu

Pentru orice mulțimi A și B, produsul direct $A \times B$ este o relație binară între A și B (evident, cea mai mare în sensul incluziunii dintre toate relațiile binare între A și B).

Tipuri de relații binare

Definiție (tipuri de relații binare)

Fie A și B mulțimi, iar $R \subseteq A \times B$ (i. e. R o relație binară între A și B). R se zice:

- *funcțională* ddacă: pentru orice $a \in A$ și orice $b_1, b_2 \in B$, dacă aRb_1 și aRb_2, atunci $b_1 = b_2$; o relație funcțională între A și B se mai numește *funcție parțială* de la A la B;
- *totală* ddacă: pentru orice $a \in A$, există $b \in B$, a. î. aRb; o relație funcțională totală între A și B se mai numește *funcție* de la A la B;
- *injectivă* ddacă, pentru orice $a_1, a_2 \in A$ și orice $b \in B$, dacă a_1Rb și a_2Rb, atunci $a_1 = a_2$;
- *surjectivă* ddacă, pentru orice $b \in B$, există $a \in A$, astfel încât aRb.

Remarcă

Definiția de mai sus a unei funcții este exact definiția din cursul al doilea, în care identificăm o funcție cu graficul ei: o funcție $f = (A, G, B)$ se identifică cu $G \subseteq A \times B$.

De asemenea, cu această identificare, noțiunea de funcție injectivă, respectiv surjectivă, coincide cu aceea de relație funcțională totală injectivă, respectiv surjectivă.

Definiție alternativă pentru o funcție

- Fie A și B două mulțimi.
- Conform celor de mai sus, o funcție de la A la B este o relație binară între A și B, $R \subseteq A \times B$, cu proprietatea că, pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, a. î. aRb.
- Un alt mod de a defini o funcție de la A la B este ca fiind o relație **unară** pe mulțimea $A \times B$, deci o submulțime $S \subseteq A \times B$, cu proprietatea că, pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, a. î. $(a, b) \in S$.

Diagonala unei mulțimi

Definiție

Pentru orice mulțime A, $\Delta_A := \{(a,a) \mid a \in A\}$ este o relație binară între A și A, numită *diagonala lui A*.

Remarcă

Pentru orice mulțime A, Δ_A este chiar relația de egalitate pe A, adică, pentru orice $a, b \in A$, avem: $a \Delta_A b$ ddacă $a = b$.

Remarcă

Pentru orice mulțime A, Δ_A este o funcție, anume *funcția identică a lui A* (*identitatea lui A*): $\Delta_A = id_A : A \to A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.

Operații cu relații binare

- Relațiile sunt mulțimi, așadar li se pot aplica operațiile obișnuite cu mulțimi: reuniunea, intersecția, diferența etc..
- Astfel, pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară R între A și B: $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $\overline{R} := (A \times B) \setminus R$ (*complementara* lui R) sunt tot relații binare între A și B.

Definiție

Pentru orice mulțimi A, B, A', B' și orice relații binare $R \subseteq A \times B$ și $R' \subseteq A' \times B'$, se definește *produsul direct* al relațiilor R și R', notat $R \times R'$, ca fiind următoarea relație binară între $A \times A'$ și $B \times B'$: $R \times R' := \{((a, a'), (b, b')) \mid a \in A, a' \in A', b \in B, b' \in B', (a, b) \in R, (a', b') \in R'\} \subseteq (A \times A') \times (B \times B')$.

Operații cu relații binare

Definiție

Pentru orice mulțimi A, B, C și orice relații binare $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq B \times C$, se definește *compunerea lui* S *cu* R ca fiind relația binară între A și C notată $S \circ R$ și definită prin:
$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, (\exists b \in B)[(a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in S]\} \subseteq A \times C$.

Remarcă

Diagonala unei mulțimi este element neutru la compunere și la dreapta, și la stânga, i. e., pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$, $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R$. Demonstrația este imediată și o aveți ca **temă pentru acasă**.

Remarcă

Compunerea ca relații binare a două funcții coincide cu compunerea lor ca funcții. În particular, rezultatul ei este tot o funcție. Aceste fapte sunt ușor de observat.

Operații cu relații binare

Definiție

Pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$, se definește *inversa lui* R, notată R^{-1}, ca fiind următoarea relație binară între B și A:
$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$.

Remarcă

A se observa faptul că, pentru orice relație binară R, se definește inversa ei R^{-1}, spre deosebire de cazul inverselor de funcții, care se definesc numai pentru funcțiile bijective, această restricție provenind atât din constrângerea ca relația binară să fie funcție, cât si din constrângerea ca inversa ei să fie tot funcție (a se vedea o remarcă de mai jos, care arată că definiția funcției este exact definiția bijectivității (i. e. a injectivității și surjectivității) în oglindă).

Remarcă

Este imediat faptul că inversa ca relație a unei funcții bijective este inversa ei ca funcție.

Operații cu relații binare

Remarcă (temă pentru seminar)

Fie A, B mulțimi și $R \subseteq A \times B$. Atunci:

- R este injectivă ddacă R^{-1} este funcțională;
- R este surjectivă ddacă R^{-1} este totală;
- prin urmare: R este injectivă și surjectivă ddacă R^{-1} este funcție.

Remarcă

A se observa că o relație binară injectivă și surjectivă nu este neapărat o funcție (bijectivă), pentru că nu i se impune condiția de a fi funcțională, și nici cea de a fi totală.

Exercițiu (temă pentru seminar)

Fie A, B mulțimi și $R \subseteq A \times B$. Dacă R este injectivă, atunci:

- $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$;
- $R^{-1} \circ R = \Delta_A$ ddacă R este totală.

Operații cu relații binare

Remarcă (asociativitatea compunerii de relații binare)

Fie A, B, C, D mulțimi, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ și $T \subseteq C \times D$. Atunci:

- $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Într-adevăr, $T \circ (S \circ R) = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists c \in C)((a, c) \in S \circ R$ și $(c, d) \in T)\} = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists c \in C)(\exists b \in B)((a, b) \in R$ și $(b, c) \in S$ și $(c, d) \in T)\} = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists b \in B)(\exists c \in C)((a, b) \in R$ și $(b, c) \in S$ și $(c, d) \in T)\} = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists b \in B)((a, b) \in R$ și $(b, d) \in T \circ S)\} = (T \circ S) \circ R$. Am aplicat faptul că doi cuantificatori de același fel comută (aici avem doi cuantificatori existențiali).

Remarcă

Fie A, B, C mulțimi, $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq B \times C$. Atunci:

- $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Într-adevăr, $R^{-1} \circ S^{-1} = \{(c, a) \mid c \in C, a \in A, (\exists b \in B)((c, b) \in S^{-1}$ și $(b, a) \in R^{-1})\} = \{(c, a) \mid a \in A, c \in C, (\exists b \in B)((a, b) \in R$ și $(b, c) \in S)\} = \{(c, a) \mid (a, c) \in S \circ R\} = (S \circ R)^{-1}$.

Operații cu relații binare

Definiție

Pentru orice mulțime A, orice relație binară $R \subseteq A \times A$ și orice $n \in \mathbb{N}$, se definește *puterea a n–a a lui R*, notată $R^n \subseteq A \times A$, prin:

$$\begin{cases} R^0 := \Delta_A; \\ R^{n+1} := R^n \circ R, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarcă

A se observa că asociativitatea compunerii de relații binare implică faptul că două puteri naturale ale aceleiași relații binare comută la compunere. Într-adevăr, pentru orice mulțime A, orice $R \subseteq A \times A$ și orice $n, k \in \mathbb{N}^*$ (putem elimina cazul în care $n = 0$ sau $k = 0$, pentru că am văzut că $R^0 = \Delta_A$ este element neutru la compunere),

$$R^n \circ R^k = \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n \text{ de } R} \circ \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{k \text{ de } R} = \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{k \text{ de } R} \circ \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n \text{ de } R} = R^k \circ R^n$$

(am mutat parantezele).

Operații cu relații binare

Remarcă

Pentru orice mulțime A, $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$.
Într-adevăr, $\Delta_A^{-1} = \{(b,a) \mid a \in A, b \in A, (a,b) \in \Delta_A\} = \{(b,a) \mid a \in A, b \in A, a = b\} = \{(a,a) \mid a \in A\} = \Delta_A$.

Remarcă

Pentru orice mulțime A, orice relație binară $R \subseteq A \times A$ și orice $n \in \mathbb{N}$, $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$.
Într-adevăr, această egalitate rezultă prin inducție după $n \in \mathbb{N}$ dintr-o remarcă de mai sus:
Pasul de verificare: Pentru $n = 0$ avem: $(R^0)^{-1} = (\Delta_A)^{-1} = \Delta_A = (R^{-1})^0$.
Pasul de inducție: Presupunem că $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$, arbitrar, fixat. Conform unei remarci de mai sus, ipotezei de inducție și asociativității compunerii de relații binare, care ne asigură de comutarea oricăror puteri naturale ale oricărei relații binare, după cum am văzut, $(R^{n+1})^{-1} = (R^n \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ (R^n)^{-1} = R^{-1} \circ (R^{-1})^n = (R^{-1})^n \circ R^{-1} = (R^{-1})^{n+1}$. Raționamentul prin inducție matematică este încheiat.
Așadar $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Relații binare pe o mulțime

Definiție

Fie A o mulțime. Se numește *relație binară pe A* o relație binară între A și A, i. e. o submulțime a produsului direct $A \times A$, produs direct care se mai notează și A^2.

Exemplu

Pentru orice mulțime A, A^2 și Δ_A sunt relații binare pe A.

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie A o mulțime și $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se zice:

- *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;
- *ireflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, $(a, a) \notin R$;
- *simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *antisimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb și bRa, atunci $a = b$;
- *asimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă $(a, b) \in R$, atunci $(b, a) \notin R$;
- *tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc, atunci aRc;
- *totală* (într-un al doilea sens) ddacă, pentru orice $a, b \in A$ cu $a \neq b$, are loc aRb sau bRa;
- *completă* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, are loc aRb sau bRa.

Remarcă

Este imediat că o relație binară pe o mulțime este completă ddacă este reflexivă și totală (în acest al doilea sens).

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie A o mulțime și $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se numește:

- *(relație de) preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă;
- *(relație de) echivalență* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- *(relație de) ordine (parțială)* ddacă e o preordine antisimetrică, i. e. o relație reflexivă, tranzitivă și antisimetrică;
- *(relație de) ordine totală* ddacă e simultan o relație de ordine și o relație totală în acest al doilea sens de mai sus;
- *(relație de) ordine strictă* ddacă e asimetrică și tranzitivă.

Remarcă

Întrucât orice relație de ordine este reflexivă, rezultă, pe baza remarcii anterioare, că o relație de ordine este totală (în acest al doilea sens) ddacă este completă.

Remarcă

O relație de ordine strictă este asimetrică, deci și ireflexivă (după cum se arată ușor, prin reducere la absurd), prin urmare nu e reflexivă, deci nu e relație de ordine.

Remarcă

Se poate demonstra destul de simplu că, dată o relație de ordine R pe o mulțime A, rezultă că $R \setminus \Delta_A$ e o relație de ordine strictă pe A, și, dată o relație de ordine strictă S pe A, rezultă că $S \cup \Delta_A$ e o relație de ordine pe A.

Exemple de diferite tipuri de relații binare pe o mulțime

- Relația $\leq$ pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ este o relație de ordine, numită *relația de ordine naturală* pe fiecare dintre aceste mulțimi de numere, iar relația $<$ pe fiecare dintre aceste mulțimi este o relație de ordine strictă.
- Pentru orice mulțime T, relația $\subseteq$ pe $\mathcal{P}(T)$ este o relație de ordine parțială, care este relație de ordine totală ddacă $|T| \leq 1$, iar $\subsetneq$ este o relație de ordine strictă pe $\mathcal{P}(T)$.
- Relația de divizibilitate pe $\mathbb{N}$ este o relație de ordine parțială.
- Relația de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$ este o preordine care nu este antisimetrică (deci nu e relație de ordine), pentru că, de exemplu: $(-3)|3$ și $3|(-3)$, dar $-3 \neq 3$.
- Relația binară de a avea aceeași paritate (sau același rest modulo $n \in \mathbb{N}^*$), pe $\mathbb{N}$ sau $\mathbb{Z}$, este o relație de echivalență.
- Pentru orice mulțime A, Δ_A și A^2 sunt relații de echivalență pe A, anume cea mai mică și respectiv cea mai mare relație de echivalență pe A.
- Pentru orice mulțime A, relația $\neq = \{(a, b) \mid a, b \in A, a \neq b\} = A^2 \setminus \Delta_A$ este o relație ireflexivă și simetrică.

Matrici caracteristice

- Știm din cursul trecut că, pentru orice mulțime M, are loc: $\mathcal{P}(M) \cong \{0,1\}^M = \{f \mid f : M \to \{0,1\}\}$, cu bijecția care duce fiecare $S \in \mathcal{P}(M)$ în funcția sa caracteristică $\chi_S : M \to \{0,1\}$.
- Dată o mulțime A, relațiile binare pe A sunt părțile lui A^2, prin urmare există o bijecție între mulțimea relațiilor binare pe A și $\{0,1\}^{A^2} = \{f \mid f : A^2 \to \{0,1\}\}$, anume bijecția care duce fiecare relație binară R pe A în funcția sa caracteristică: $\chi_R : A^2 \to \{0,1\}$, pentru orice $a, b \in A$,
$$\chi_R(a,b) = \begin{cases} 0, & (a,b) \notin R \\ 1, & (a,b) \in R \end{cases}$$
- În cazul particular în care $|A| = n \in \mathbb{N}^*$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, pentru orice $R \subseteq A^2$, funcția caracteristică $\chi_R : A^2 \to \{0,1\}$ a lui R poate fi dată prin matricea valorilor ei, anume: $M(R) := (\chi_R(a_i, a_j))_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$, prin urmare mulțimea relațiilor binare pe A se află în bijecție cu mulțimea $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$ a matricilor pătratice de dimensiune n peste $\{0,1\}$, prin bijecția care duce fiecare relație binară R pe A în matricea $M(R)$, numită *matricea booleană* sau *matricea caracteristică a relației R*.

Matrici caracteristice

Definiție

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $M = (m_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}}, P = (p_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$, definim operațiile:

- $M \vee P := (\max\{m_{i,j}, p_{i,j}\})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$
- $M \wedge P := (\min\{m_{i,j}, p_{i,j}\})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$
- $\overline{M} := (1 - m_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$
- $M \circ P = (\min\{1, r_{i,j}\})_{i,j \in \overline{1,n}}$, unde $(r_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}} = M \cdot P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulțime cu n elemente și R și S două relații binare pe A. Atunci:

1. $M(\Delta_A) = I_n$ *(matricea unitate)*
2. $M(R \cup S) = M(R) \vee M(S)$ *și* $M(R \cap S) = M(R) \wedge M(S)$
3. $M(\overline{R}) = \overline{M(R)}$
4. $M(R^{-1}) = {}^t M(R)$ *(transpusa lui $M(R)$)*
5. $M(S \circ R) = M(R) \circ M(S)$

Demonstrație: **(1)** $M(\Delta_A) = (\chi_{\Delta_A}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = I_n$, pentru că: oricare ar fi $i, j \in \overline{1, n}$, $\chi_{\Delta_A}(a_i, a_j) = 1$ ddacă $(a_i, a_j) \in \Delta_A$ ddacă $a_i = a_j$ ddacă $i = j$.
(2) Amintim din cursul II următoarea proprietate a funcțiilor caracteristice: pentru orice $B, C \in \mathcal{P}(A^2)$, $\chi_{B\cup C} = \chi_B + \chi_C - \chi_B \cdot \chi_C = \max\{\chi_B, \chi_C\}$, pentru că $\beta + \gamma - \beta \cdot \gamma = \max\{\beta, \gamma\}$ pentru orice $\beta, \gamma \in \{0, 1\}$, care este codomeniul funcțiilor caracteristice. Avem, așadar: $M(R) \vee M(S) = (\max\{\chi_R(a_i, a_j)), \chi_S(a_i, a_j)\})_{i,j\in\overline{1,n}} = (\chi_{R\cup S}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = M(R \cup S)$.
Amintim din cursul II următoarea proprietate a funcțiilor caracteristice: pentru orice $B, C \in \mathcal{P}(A^2)$, $\chi_{B\cap C} = \chi_B \cdot \chi_C = \min\{\chi_B, \chi_C\}$, pentru că $\beta \cdot \gamma = \min\{\beta, \gamma\}$ pentru orice $\beta, \gamma \in \{0, 1\}$, care este codomeniul funcțiilor caracteristice. Avem, așadar: $M(R) \wedge M(S) = (\min\{\chi_R(a_i, a_j)), \chi_S(a_i, a_j)\})_{i,j\in\overline{1,n}} = (\chi_{R\cap S}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = M(R \cap S)$.
(3) $\overline{R} = A^2 \setminus R$. Pentru orice $i, j \in \overline{1, n}$, $[(a_i, a_j) \in \overline{R}$ ddacă $(a_i, a_j) \notin R]$, deci $[\chi_{\overline{R}}(a_i, a_j) = 1$ ddacă $\chi_R(a_i, a_j) = 0$ ddacă $1 - \chi_R(a_i, a_j) = 1]$, așadar $\chi_{\overline{R}}(a_i, a_j) = 1 - \chi_R(a_i, a_j)$. Prin urmare $M(\overline{R}) = (\chi_{\overline{R}}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = (1 - \chi_R(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = \overline{M(R)}$.

Matrici caracteristice

(4) Pentru orice $i, j \in \overline{1, n}$, $[(a_i, a_j) \in R^{-1}$ ddacă $(a_j, a_i) \in R]$, adică $[\chi_{R^{-1}}(a_i, a_j) = 1$ ddacă $\chi_R(a_j, a_i) = 1]$, deci $\chi_{R^{-1}}(a_i, a_j) = \chi_R(a_j, a_i)$, prin urmare $M(R^{-1}) =^t M(R)$.

(5) Pentru orice $i, j \in \overline{1, n}$, $[(a_i, a_j) \in S \circ R$ ddacă există măcar un $k \in \overline{1, n}$ a. î. $(a_i, a_k) \in R$ și $(a_k, a_j) \in S]$, adică $[\chi_{S \circ R}(a_i, a_j) = 1$ ddacă există măcar un $k \in \overline{1, n}$ a. î. $\chi_R(a_i, a_k) = 1$ și $\chi_S(a_k, a_j) = 1$ ddacă există $k \in \overline{1, n}$ a. î. $\min\{\chi_R(a_i, a_k), \chi_S(a_k, a_j)\} = 1$ ddacă există $k \in \overline{1, n}$ a. î. $\chi_R(a_i, a_k) \cdot \chi_S(a_k, a_j) = 1$ ddacă $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \chi_R(a_i, a_k) \cdot \chi_S(a_k, a_j) \geq 1$ ddacă $\min\{1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \chi_R(a_i, a_k) \cdot \chi_S(a_k, a_j)\} = 1]$, de unde rezultă egalitatea din enunț.

Observație

Notația $\circ$ pentru operația de mai sus între matrici caracteristice **nu** este consacrată.

Exercițiu

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ o mulțime cu n elemente, I o mulțime nevidă și $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relații binare pe A. Să se demonstreze că:

1. $M(\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigvee_{i \in I} M(R_i)$
2. $M(\bigcap_{i \in I} R_i) = \bigwedge_{i \in I} M(R_i)$

Rezolvare: **(1)** Folosind rezultatul din cursul al doilea care spune că funcția caracteristică a unei reuniuni arbitrare de mulțimi este egală (punctual, adică în fiecare punct) cu maximul dintre funcțiile caracteristice ale mulțimilor care se reunesc, obținem:

$$\bigvee_{i \in I} M(R_i) = (\max\{\chi_{R_i}(a_j, a_k) \mid i \in I\})_{j,k \in \overline{1,n}} = (\chi_{\bigcup_{i \in I} R_i}(a_j, a_k))_{j,k \in \overline{1,n}} = M(\bigcup_{i \in I} R_i).$$

(2) Analog cu (1). **Temă pentru acasă.**

Matrici caracteristice

Exercițiu (temă pentru acasă)

Considerăm $A = \{a_1, a_2\}$ (putem lua $a_1 = 1$ și $a_2 = 2$, de exemplu) și R, S următoarele relații binare pe A: $R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$, $S = \{(a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$. Să se determine relația binară Q pe A dată de egalitatea: $Q = (R^3 \circ S^{-1}) \cup ((S^2 \circ R) \cap R^{-1})$.

Indicație: $M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $M(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Folosind propoziția anterioară, putem calcula:
$M(Q) = ({}^tM(S) \circ M(R) \circ M(R) \circ M(R)) \vee ((M(R) \circ M(S) \circ M(S)) \wedge^t M(R))$, iar Q este unica relație binară pe A care are această matrice caracteristică și poate fi ușor determinată pe baza acestei matrici, folosind definiția matricii caracteristice: pentru fiecare $i, j \in \overline{1, 2} = \{1, 2\}$, $(a_i, a_j) \in Q$ ddacă, în matricea $M(Q)$, componenta de pe linia i și coloana j are valoarea 1.

Matrici caracteristice

Remarcă (temă pentru acasă)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulțime cu n elemente, iar $R \subseteq A^2$. Atunci:

1. R e reflexivă ddacă $M(R)$ are valoarea 1 pe toată diagonala principală;
2. R e ireflexivă ddacă $M(R)$ are valoarea 0 pe toată diagonala principală;
3. R e simetrică ddacă $M(R)$ e matrice simetrică;
4. R e asimetrică ddacă $M(R) \wedge^t M(R) = O_n$ (matricea cu toate componentele nule).

Pot fi stabilite mai multe proprietăți de acest gen.