Mîndrilă Claudiu, grupa 301

Tema 5-Coduri

1.

2. (a) Fie g polinomul generator. Dacă $1 + X|g$ atunci fie $(c_0, \ldots, c_{n-1})$ un cuvând. Avem $X + 1|c_0 + \ldots + c_{n-1}X^{n-1}$, de unde $c_0 + c_1 + \ldots c_{n-1} = 0 \mod 2$. Dar asta este tocmai ponderea cuvântului!. Reciproc, fie cuvântul produs chiar de g. Atunci el are pondere pară, i.e. $g(1) = 0$ sau $X - 1|g$.

   (b) Trebuie ca $g|X^7 - 1$ şi $g|X^5 + X^2 + X + 1$. Fie p ireductibil cu $p|g$. Avem $X^5 + X^2 + X + 1 = (X + 1)^2 \cdot (X^3 + X + 1)$ deci $p \in X + 1, X^3 + X + 1$. Avem şi $X^7 - 1 = (X - 1)(X^3 + X + 1)(X^3 + X^2 + 1)$. Prin urmare $g \in \{1,\ X + 1, X^3 + X + 1,\ (X + 1)(X^3 + X + 1)\}$. Dar g trebuie să aiba gradul minim, deci $g = X + 1$.

   (c) Codul este generat de g unde $g|X^8 - 1 = (X + 1)^8$. Dacă $g \neq 1$ atunci $(X + 1)|g$ şi conform a) avem că orice cuvânt are pondere pară şi nu va exista niciunul cu distanţă minimală 1. Deci $g = 1$ şi atunci $C = \mathbb{F}_2^7$. Deci fix un cod.

3. Numărul de coduri ternare, notat N, este numărul de polinoame din $\mathbb{F}_3[X]$ care divid pe $X^8 - 1$. Dar descompunerea în factori primi a lui $X^8 - 1$ este

$$X^8 - 1 = (X + 1)(X - 1)\left(X^2 + 1\right)\left(X^2 + X - 1\right)\left(X^2 - X - 1\right)$$

Deci

$$g = (X + 1)^\alpha (X - 1)^\beta \left(X^2 + 1\right)^\gamma \left(X^2 + X - 1\right)^\delta \left(X^2 - X - 1\right)^\epsilon$$

cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta,\ \epsilon \in \{0, 1\}$. Deci $N = 2^5 = 32$.