Curs 5

2015-2016

Programare Logică

Cuprins

Amintiri

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X mulțime de variabile.

- T_Σ este (S, Σ)-algebră inițială, i.e.

  pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B}$ există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

- $T_\Sigma(X)$ este (S, Σ)-algebră liber generată de X, i.e.

  pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$, orice funcție S-sortată $e : X \to B_S$ se extinde unic la un (S, Σ)-morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$.

Motivație

Un modul în Maude (care conține doar declații de sorturi și operații) construiește efectiv algebra T_{Σ}.

Ce se întâmplă cu ecuațiile?

Ce se întâmplă cu atributele operațiilor?

Ecuații. Relația de satisfacere

Ecuație

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-ecuație este formată din

- o mulțime de variabile X,
- doi termeni de același sort $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$.

Notăm o ecuație prin

$$(\forall X)t \doteq_s t'$$

$\doteq$ egalitate formală $\qquad$ $=$ egalitate efectivă

Satisfacerea unei ecuații

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație $(\forall X)t \doteq_s t'$ dacă pentru orice funcție S-sortată $e : X \to A_S$,

$$\tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t').$$

Notăm faptul că $\mathcal{A}$ satisface ecuația $(\forall X)t \doteq_s t'$ prin

$$\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t'$$

- Dacă $\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t'$, mai spunem și că $\mathcal{A}$ este un model al ecuației $(\forall X)t \doteq_s t'$.

Satisfacerea unei ecuații

Am văzut că orice funcție S-sortată $e : X \to A_S$ se extinde unic la un morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$.

Definiție (echivalentă)

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație $(\forall X)t \doteq_s t'$ dacă pentru orice morfism $f : T_\Sigma(X) \to A$,

$$f_s(t) = f_s(t').$$

Necesitatea cuantificării

- În cazul monosortat, cuantificarea înaintea unei ecuații nu este necesară.
- În cazul multisortat, dacă nu cuantificăm înaintea unei ecuații putem obține paradoxuri.

Necesitatea cuantificării

- În cazul monosortat, cuantificarea înaintea unei ecuații nu este necesară.
- În cazul multisortat, dacă nu cuantificăm înaintea unei ecuații putem obține paradoxuri.

Exemplu

- Signatura: $S = \{s, b\}$, $\Sigma = \{T : \to b, F : \to b, g : s \to b\}$
- T_Σ: $T_{\Sigma,s} = \emptyset$, $T_{\Sigma,b} = \{T, F\}$
- $T_\Sigma \not\models (\forall\emptyset) T \doteq_b F$
  - $T_T = T \neq F = T_F$
- $T_\Sigma \models (\forall X) T \doteq_b F$, unde $X_s := \{x\}$ și $X_b := \emptyset$
  - nu există niciun morfism $f : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$

Ecuație condiționată

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-ecuație condiționată este formată din

- o mulțime de variabile X,
- doi termeni de același sort $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$,

Ecuație condiționată

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-ecuație condiționată este formată din

- o mulțime de variabile X,
- doi termeni de același sort $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$,
- o mulțime H de ecuații $u \doteq_{s'} v$, cu $u, v \in T_\Sigma(X)_{s'}$.

Ecuație condiționată

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-ecuație condiționată este formată din
- o mulțime de variabile X,
- doi termeni de același sort $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$,
- o mulțime H de ecuații $u \doteq_{s'} v$, cu $u, v \in T_\Sigma(X)_{s'}$.

Notăm o ecuație condiționată prin

$$(\forall X) t \doteq_s t' \text{ if } H$$

- În practică H este finită, i.e. $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$.
- Ecuațiile din H sunt cuantificate cu X.
- Ecuațiile din H se numesc condiții.
- O ecuație $(\forall X) t \doteq_s t'$ este o ecuație condiționată în care H este $\emptyset$.

Satisfacerea unei ecuații condiționate

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație condiționată $(\forall X)t \doteq_s t' \textit{ if } H$ dacă pentru orice funcție S-sortată $e : X \to A_S$,

$$\tilde{e}_{s'}(u) = \tilde{e}_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t').$$

Notăm faptul că $\mathcal{A}$ satisface ecuația condiționată $(\forall X)t \doteq_s t' \textit{ if } H$ prin

$$\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t' \textit{ if } H$$

- $\mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t' \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t' \textit{ if } \emptyset$

Satisfacerea unei ecuații condiționate

Definiție (echivalentă)

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație condiționată $(\forall X)t \stackrel{.}{=}_s t'$ *if* H dacă pentru orice morfism $f : T_\Sigma(X) \to A$,

$$f_{s'}(u) = f_{s'}(v), \text{ or. } u \stackrel{.}{=}_{s'} v \in H \Rightarrow f_s(t) = f_s(t').$$

Exemple

Exemplu

$STIVA = (S = \{elem, stiva\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 : \to elem,\ empty : \to stiva, push : elem\ stiva \to stiva,$
  $pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

X: $X_{elem} = \{E\}$, $X_{stiva} = \{S, Q\}$

Ecuația condiționată:

$$(\forall X) top(S) \doteq_{elem} E \text{ if } \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$$

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{A}$:

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$, $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$ $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

Exemple

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{A}$:

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$, $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$ $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{A} \models (\forall X) top(S) \stackrel{\cdot}{=}_{elem} E \ if \ \{S \stackrel{\cdot}{=}_{stiva} push(E, Q)\}$

- fie $e : X \to A$ o evaluare a.î. $\tilde{e}_{stiva}(S) = \tilde{e}_{stiva}(push(E, Q))$
- obținem $\tilde{e}_{stiva}(S) = A_{push}(\tilde{e}_{elem}(E), \tilde{e}_{stiva}(Q))$
- notăm $n := \tilde{e}_{elem}(E)$, $w := \tilde{e}_{stiva}(S)$, $w' := \tilde{e}_{stiva}$
- rezultă $w = nw'$ și

$$\tilde{e}_{elem}(top(S)) = A_{top}(\tilde{e}_{stiva}(S)) = A_{top}(w) = A_{top}(nw') = n = \tilde{e}_{elem}(E)$$

Exemple

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{C}$:

- Mulțimea suport: $C_{elem} := \mathbb{N}$, $C_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $C_0 := 0$, $C_{empty} := \lambda$, $C_{push}(x, x_1 \ldots x_k) := x_1 \ldots x_k x$, $C_{pop}(\lambda) := \lambda$, $C_{pop}(x) := \lambda$, $C_{pop}(x_1 \ldots x_{k-1} x_k) := x_2 \ldots x_k$, pt $k \geq 2$
  $C_{top}(\lambda) := 0$, $C_{top}(x_1 \ldots x_k) := x_1$, pt. $k \geq 1$

Exemple

Exemplu (cont.)

STIVA-algebra $\mathcal{C}$:

- Mulțimea suport: $C_{elem} := \mathbb{N}$, $C_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $C_0 := 0$, $C_{empty} := \lambda$, $C_{push}(x, x_1 \ldots x_k) := x_1 \ldots x_k x$,
  $C_{pop}(\lambda) := \lambda$, $C_{pop}(x) := \lambda$, $C_{pop}(x_1 \ldots x_{k-1} x_k) := x_2 \ldots x_k$, pt $k \geq 2$
  $C_{top}(\lambda) := 0$, $C_{top}(x_1 \ldots x_k) := x_1$, pt. $k \geq 1$

$\mathcal{C} \not\models (\forall X) top(S) \doteq_{elem} E \ if \ \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$

- fie $e : X \to C$ o evaluare definită prin $e_{elem}(E) = 2$, $e_{stiva}(Q) = 3\ 4$, $e_{stiva}(S) = 3\ 4\ 2$
- atunci $\tilde{e}_{stiva}(S) = \tilde{e}_{stiva}(push(E, Q))$
- dar $\tilde{e}_{elem}(E) = 2 \neq 3 = \tilde{e}_{elem}(top(S))$

Γ-algebre

Definiții

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată
- Γ o mulțime de ecuații condiționate

Definiții

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată
- Γ o mulțime de ecuații condiționate

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A}$ este o Γ-algebră ($\mathcal{A}$ este model pentru Γ) dacă

$$\mathcal{A} \models \gamma, \text{ or. } \gamma \in \Gamma.$$

Definiții

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată
- Γ o mulțime de ecuații condiționate

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A}$ este o Γ-algebră ($\mathcal{A}$ este model pentru Γ) dacă

$$\mathcal{A} \models \gamma, \text{ or. } \gamma \in \Gamma.$$

- În acest caz, notăm $\mathcal{A} \models \Gamma$
- Notăm cu $Alg(S, \Sigma, \Gamma)$ clasa tuturor Γ-algebrelor.

Proprietăți

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{B}$ *două* (S,Σ)*-algebre a.î.* $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ *și* $\gamma := (\forall X)t \doteq_s t' \text{ if } H$.

$$\mathcal{A} \models \gamma \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \gamma.$$

Proprietăți

Demonstrație

"$\Rightarrow$" Fie $\iota : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ un izomorfism.

- Fie $e : X \to B_S$ a.î. $\tilde{e}_{s'}(u) = \tilde{e}_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H$.
- Definim $f : X \to A_S$ prin $f := e; \iota$.
- *Curs 4 -* **Propoziție.** *Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și X o mulțime de variabile. Dacă $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ și $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ sunt morfisme, atunci $g = f \Leftrightarrow g\restriction_X = f\restriction_X$.*
- Deoarece $\tilde{f}\restriction_X = (\tilde{e}; \iota)\restriction_X$, obținem $\tilde{f} = \tilde{e}; \iota$.
- Atunci $\tilde{f}_{s'}(u) = \iota_{s'}(\tilde{e}_{s'}(u)) = \iota_{s'}(\tilde{e}_{s'}(v)) = \tilde{f}_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H$.
- Cum $\mathcal{A} \models \gamma$, rezultă că $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$, i.e. $\iota_s(\tilde{e}_s(t)) = \iota_s(\tilde{e}_s(t'))$.
- Cum ι este injectiv, obținem $\tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t')$, deci $\mathcal{B} \models \gamma$.

"$\Leftarrow$" Se arată similar. $\square$

Consecința semantică

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și Γ o mulțime de ecuații condiționate.

Definiție

O ecuație condiționată θ este consecință semantică a lui Γ dacă

$$\mathcal{A} \models \Gamma \text{ implică } \mathcal{A} \models \theta,$$

pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{A}$.

- În acest caz, notăm $\Gamma \models \theta$.
- Dacă Θ mulțime de ecuații condiționate, atunci
$$\Gamma \models \Theta \Leftrightarrow \Gamma \models \theta, \text{ or. } \theta \in \Theta$$

Exemplu

Exemplu (Teoria grupurilor)

- (S, Σ, Γ) unde
  - $S = \{elem\}$
  - $\Sigma = \{e :\to elem,\ - : elem \to elem,\ + : elem\ elem \to elem\}$
  - $\Gamma = \{(\forall\{x, y, z\})(x + y) + z \doteq x + (y + z),$
    $(\forall\{x\})e + x \doteq x,$
    $(\forall\{x\})x + e \doteq x,$
    $(\forall\{x\})(-x) + x \doteq e,$
    $(\forall\{x\})x + (-x) \doteq e\}$
- $\theta_1 := (\forall\{x, y, z\})x \doteq y$ if $\{x + z \doteq y + z\}$
- $\theta_2 := (\forall\{x, y\})x + y \doteq y + x$
- $\Gamma \models \theta_1$
- $\Gamma \not\models \theta_2$

Fie (S,Σ) o signatură multisortată și $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S,Σ)-algebră.

Definiție

O relație S-sortată $\equiv = \{\equiv_s\}_{s\in S} \subseteq A_S \times A_S$ este o congruență dacă:

- $\equiv_s \subseteq A_s \times A_s$ este echivalență, or. $s \in S$:
- $\equiv$ este compatibilă cu operațiile:

$$\text{pt. or. } \sigma : s_1 \ldots s_n \to s \text{ și or. } a_i, b_i \in A_{s_i},\ i = 1,\ldots,n$$
$$a_i \equiv_{s_i} b_i, \text{ or. } i = 1,\ldots,n \Rightarrow A_\sigma(a_1,\ldots,a_n) \equiv_s A_\sigma(b_1,\ldots,b_n)$$

Congruențe închise la substituții

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată,
- Γ o mulțime de ecuații condiționate,
- $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.

Spunem că $\equiv$ este închisă la substituție dacă

$$\mathrm{CS}(\Gamma, \mathcal{A}) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{or. } (\forall X)t \doteq_s t' \text{ if } H \in \Gamma, \text{ or. } e : X \to A_S \\ \tilde{e}_{s'}(u) \equiv_{s'} \tilde{e}_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{e}_s(t) \equiv_s \tilde{e}_s(t'). \end{array}}$$

Congruențe închise la substituții

Propoziție

Dacă $\equiv$ este o congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție, atunci

$$\mathcal{A}/_{\equiv} \models \Gamma.$$

Congruențe închise la substituții

Propoziție

Dacă $\equiv$ este o congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție, atunci

$$\mathcal{A}/_{\equiv} \models \Gamma.$$

Algebra cât $\mathcal{A}/_{\equiv}$ a lui $\mathcal{A}$ prin congruența $\equiv$:

- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$, unde
- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A/_{\equiv}$ devine (S, Σ)-algebră cu operațiile:
  - $(A/_{\equiv})_\sigma := [A_\sigma]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : \to s$,
  - $(A/_{\equiv})_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}}) := [A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ și $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$.
- $[\cdot]_{\equiv} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/_{\equiv}$, $a \mapsto [a]_{\equiv_s}$, or. $a \in A_s$, este morfism surjectiv.

Congruențe închise la substituții

Demonstrație

Fie $(\forall X)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$. Arătăm că $\mathcal{A}/_{\equiv} \models (\forall X)t \doteq_s t'$ if H.

- Fie $e : X \to A/_{\equiv}$ a.î. $\tilde{e}_{s'}(u) = \tilde{e}_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "{[\cdot]_{\equiv}}"] & \mathcal{A}/_{\equiv} \\
& T_\Sigma(X) \arrow[ul, dotted, "g"] \arrow[u, "\tilde{e}"']
\end{tikzcd}$$

- *Curs 4 -* **Propoziție.** *Fie $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un (S, Σ)-morfism surjectiv și X o mulțime de variabile. Pentru orice (S, Σ)-morfism $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$, există un (S, Σ)-morfism $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ astfel încât $g; h = f$.*
  - Cum $[\cdot]_{\equiv} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/_{\equiv}$ morfism surjectiv și $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}/_{\equiv}$, există $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ a.î. $g; [\cdot]_{\equiv} = \tilde{e}$.
  - Atunci $[g_{s'}(u)]_{\equiv_{s'}} = [g_{s'}(v)]_{\equiv_{s'}}$, i.e. $g_{s'}(u) \equiv_{s'} g_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H$.
  - Cum $\equiv$ congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție, obținem $g_s(t) \equiv_s g_s(t')$. Deci $\tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t')$. $\square$

Echivalența semantică

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată,
- Γ o mulțime de ecuații condiționate,
- $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră

Echivalența semantică pe $\mathcal{A}$ determinată de Γ este

$$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}} := \bigcap \{Ker(h) \mid h : \mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \models \Gamma\}.$$

Echivalența semantică

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată,
- Γ o mulțime de ecuații condiționate,
- $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră

Echivalența semantică pe $\mathcal{A}$ determinată de Γ este

$$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}} := \bigcap\{Ker(h) \mid h : \mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \models \Gamma\}.$$

Dacă $\mathcal{A} = T_\Sigma(X)$, notăm $\equiv_{\Gamma, T_\Sigma(X)}$ cu $\equiv_\Gamma$.

Echivalența semantică (pe $T_\Sigma(X)$):

$$t \equiv_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X) t \doteq_s t'.$$

Congruența semantică

Propoziție ($\star$)

$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}}$ este o congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție.

Demonstrație

Pentru simplitatea demonstrației notăm $\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}}$ cu $\equiv$.

$\equiv$ este congruență:

- $Ker(h)$ este congruență pentru orice morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
- Intersecția unei familii arbitrare de congruențe este congruență.

Arătăm că $\equiv$ este închisă la substituție:

- Fie $(\forall X) t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$ și $e : X \to A_S$ a.î. $\tilde{e}_{s'}(u) \equiv_{s'} \tilde{e}_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H$.
- Trebuie să arătăm că $\tilde{e}_s(t) \equiv_s \tilde{e}_s(t')$.

Demonstrație (cont.)

- Avem $(\tilde{e}_{s'}(u), \tilde{e}_{s'}(v)) \in \equiv \subseteq Ker(h)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H$ și or. $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \models \Gamma$.
- Deci $h_{s'}(\tilde{e}_{s'}(u)) = h_{s'}(\tilde{e}_{s'}(v))$, or. $u \doteq_{s'} v \in H$ și or. $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \models \Gamma$.

- Fie $\mathcal{B} \models \Gamma$ și $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.
- Avem $\tilde{e}; h : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ și $h_{s'}(\tilde{e}_{s'}(u)) = h_{s'}(\tilde{e}_{s'}(v))$, or. $u \doteq_{s'} v \in H$
- Deci $h_s(\tilde{e}_s(t)) = h_s(\tilde{e}_s(t'))$.
- Rezultă că $(\tilde{e}_s(t), \tilde{e}_s(t')) \in Ker(h)$, or. $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \models \Gamma$

- Deci $(\tilde{e}_s(t), \tilde{e}_s(t')) \in \equiv$, adică $\tilde{e}_s(t) \equiv_s \tilde{e}_s(t')$.

$\square$

Congruența semantică

Propoziție ($\star$)

$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}}$ este cea mai mică congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție.

Demonstrație

- $\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}}$ este congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție.
- Fie $\sim$ o altă congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție.
- Fie $p : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/_\sim$ surjecția canonică, i.e. $p(a) = [a]_\sim$, or. $a \in A$.
- $\mathcal{A}/_\sim \models \Gamma$.
- Dar $\sim = Ker(p)$.
- Deci $\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}} \subseteq \sim$.

$\square$

Γ-algebra inițială

Definim pe T_Σ congruența semantică determinată de Γ:

$$\equiv_{\Gamma,T_\Sigma} := \bigcap\{Ker(f) \mid f : T_\Sigma \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \models \Gamma\}$$

Teoremă ($\star$)

$T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}}$ *este* Γ*-algebra inițială.*

Demonstrație

- $\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}$ este închisă la substituții *(slide 31)*
- $T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}} \models \Gamma$ *(slide 28)*
- $\equiv_{\Gamma,T_\Sigma} = \equiv_{\mathfrak{K}}$, unde $\mathfrak{K} = Alg(S,\Sigma,\Gamma)$
- Pt. or. $\mathcal{B} \models \Gamma$, ex. un unic morfism $\bar{f} : T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}} \to \mathcal{B}$ *(Curs 4 - slide 31)*.

$\square$

Consecințe

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și Γ o mulțime de ecuații condiționate.

Teoremă $(^\star)$

Fie $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră și $h : T_\Sigma \to \mathcal{A}$ unicul morfism. Sunt echivalente:

1. *$\mathcal{A}$ este Γ-algebră inițială.*
2. *$\mathcal{A}$ verifică următoarele proprietăți:*
   - *No Junk:* *h este surjectiv*
   - *No Confusion:*

$$h_s(t_1) = h_s(t_2) \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall \emptyset) t_1 \doteq_s t_2, \text{ or. } t_1, t_2 \in (T_\Sigma)_s.$$

Pe săptămâna viitoare!