PROGRAMARE LOGICĂ
SEMINAR 4
- RESCRIERI -

Teorie:

- O regulă de rescriere $l \to_s r$ este formată din $l, r \in T_\Sigma(Y)_s$ astfel încât l nu este variabilă şi $Var(r) \subseteq Var(l)$.
- Un sistem de rescriere (TRS) este o mulţime finită de reguli de rescriere.
- Dacă R este un sistem de rescriere, pentru $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$ definim relaţia $t \to_R t'$ astfel:

$$\boxed{\begin{array}{lll} t \to_R t' & \Leftrightarrow & t \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(l)] \text{ şi} \\ & & t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(r)], \text{ unde} \\ & & c \in T_\Sigma(X \cup \{z\}) \text{ context}, \\ & & l \to_s r \in R \text{ cu } Var(l) = Y, \\ & & \theta : Y \to T_\Sigma(X) \text{ substituţie} \end{array}}$$

- Un termen t este *reductibil* dacă există un termen t' a.î. $t \to t'$.
- Un termen t este *în formă normală* (ireductibil) dacă nu este reductibil.
- t_0 este *o formă normală a lui* t dacă $t \stackrel{*}{\to} t_0$ şi t_0 este în formă normală.
- t_1 şi t_2 *se intâlnesc* ($t_1 \downarrow t_2$) dacă există $t \in T$ a.î. $t_1 \stackrel{*}{\to} t \stackrel{*}{\leftarrow} t_2$.
- Un sistem de rescriere se numeşte
  - *noetherian:* dacă nu există reduceri infinite $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \ldots$.
  - *confluent:* $t_1 \stackrel{*}{\leftarrow} t \stackrel{*}{\to} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
  - *complet* (convergent, canonic): confluent şi noetherian.
- Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:
  (1) $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
  (2) există t un subtermen al lui l_1 care nu este variabilă
  ($l_1 = c[z \leftarrow t]$, unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă)
  (3) există θ c.g.u pentru t şi l_2 (i.e. $\theta(t) = \theta(l_2)$).
  Perechea $(\theta(r_1), \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)])$ se numeşte *pereche critică*.

$$\begin{tikzcd} & \theta(l_1) \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\ \theta(r_1) & & \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] \end{tikzcd}$$

Teoremă 1 (Teorema Perechilor Critice $*$). *Dacă R este noetherian, atunci sunt echivalente:*

(1) R este confluent,
(2) $t_1 \downarrow_R t_2$ pentru orice pereche critică (t_1, t_2).

Algoritmul Knuth-Bendix.

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIŢIALIZARE: T := R şi $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii paşi, cât timp este posibil:
  (1) CP := CP(T) = $\{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$
  (2) Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP *(T completarea lui R)*.
  (3) Dacă $(t_1, t_2) \in CP$, $t_1 \not\downarrow t_2$ atunci:
    - dacă $fn(t_1) > fn(t_2)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_1) \to fn(t_2)\}$,
    - dacă $fn(t_2) > fn(t_1)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_2) \to fn(t_1)\}$,
    - altfel, STOP *(completare eşuată)*.
- IEŞIRE: T completarea lui R sau eşec.

Exerciţiul 1: Fie (S, Σ) o signatură, unde $S = \{s\}$ şi $\Sigma = \{0 :\to s, g : s \to s, f : s \to s\}$. Folosind sistemul de rescriere

$$R = \{f(g(x)) \to g(x),\ g(f(x)) \to g(x)\},$$

rescrieţi termenii $t_1 = f(f(g(f(g(0)))))$ şi $t_2 = f(f(0))$ până la o formă normală. Caracterizaţi formele normale ale sistemului R.

Rezolvare: Forma normală a lui t_1 este $g(g(0))$, deoarece

$$t_1 = f(f(g(f(g(0))))) \to_R f(f(g(g(0)))) \to_R f(g(g(0))) \to_R g(g(0)),$$

iar t_2 este in formă normală. Formele normale pentru sistenul R sunt $f(\ldots(f(0))\ldots)$, $g(\ldots(g(0))\ldots)$ şi 0.

Exerciţiul 2: Fie (S, Σ) o signatură, unde $S = \{s\}$ şi $\Sigma = \{g : s \to s, f : s \to s\}$. Cercetaţi dacă sistemul de rescriere de mai jos este confluent:

$$R = \{f(f(x)) \to g(x)\}.$$

Rezolvare: Determinăm perechile critice ale sistemului R. Redenumind variabilele, considerăm $l_1 \to r_1, l_2 \to r_2 \in R$ ca fiind $f(f(x)) \to g(x)$ şi $f(f(y)) \to g(y)$, respectiv. Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(x)$ şi $f(f(x))$. Investigăm fiecare caz:

- $t := f(x)$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = f(z)$. Mai mult, $\theta(x) = f(y)$ este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică $P_1 = (g(f(y)), f(g(y)))$.
- $t := f(f(x))$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, $\theta(x) = y$ este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică $P_1 = (g(y), g(y))$.

Evident $g(y) \downarrow g(y)$, dar $g(f(y)) \not\downarrow f(g(y))$ deoarece $g(f(y))$ şi $f(g(y))$ sunt deja în formă normală. Deoarece R este noetherian, din Teorema Perechilor Critice obţinem că R nu este confluent.

Exerciţiul 3: Fie (S, Σ) o signatură, unde $S = \{s\}$ şi $\Sigma = \{a :\to s, b :\to s, c :\to s, g : s \to s, f : s\ s \to s\}$. Găsiţi perechile critice pentru sistemul de rescriere:

$$R = \{f(x, x) \to a,\quad f(x, g(x)) \to b,\quad c \to g(c)\}.$$

Rezolvare: Avem următoarele cazuri:

- **Cazul $\mathbf{l_1 \to r_1 = f(x, x) \to a}$ şi $\mathbf{l_2 \to r_2 = f(y, y) \to a}$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t = f(x, x)}$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, $\theta(x) = y$ este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică (a, a).
- **Cazul $\mathbf{l_1 \to r_1 = f(x, x) \to a}$ şi $\mathbf{l_2 \to r_2 = f(y, g(y)) \to b}$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t = f(x, x)}$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Nu există c.g.u. pentru t şi l_2.
- **Cazul $\mathbf{l_1 \to r_1 = f(x, x) \to a}$ şi $\mathbf{l_2 \to r_2 = c \to g(c)}$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t = f(x, x)}$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Nu există c.g.u. pentru t şi l_2.
- **Cazul $\mathbf{l_1 \to r_1 = f(x, g(x)) \to b}$ şi $\mathbf{l_2 \to r_2 = f(y, g(y)) \to b}$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t = g(x)}$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = f(x, z)$. Nu există c.g.u. pentru t şi l_2.
  - $\mathbf{t = f(x, g(x))}$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, $\theta(x) = y$ este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică (b, b).
- **Cazul $\mathbf{l_1 \to r_1 = f(x, g(x)) \to b}$ şi $\mathbf{l_2 \to r_2 = c \to g(c)}$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t = g(x)}$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = f(x, z)$. Nu există c.g.u. pentru t şi l_2.
  - $\mathbf{t = f(x, g(x))}$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Nu există c.g.u. pentru t şi l_2.
- **Cazul $\mathbf{l_1 \to r_1 = c \to g(c)}$ şi $\mathbf{l_2 \to r_2 = c \to g(c)}$.** Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t = c}$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, orice substituţie este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică $(g(c), g(c))$.

În concluzie, perechile critice pentru R sunt (a, a), (b, b) şi $(g(c), g(c))$.

Exerciţiul 4: Fie (S, Σ) o signatură, unde $S = \{s\}$ şi $\Sigma = \{a :\to s, b :\to s, c :\to s, g : s \to s, f : s\ s \to s\}$. Cercetaţi dacă sistemul de rescriere de mai jos este confluent:

$$R = \{f(x, x) \to a, \quad f(x, g(x)) \to b, \quad c \to g(c)\}.$$

Rezolvare: Se observă că R nu se termină:

$$c \to_R g(c) \to_R g(g(c)) \to_R \ldots .$$

În concluzie nu putem aplica Teorema perechilor critice pentru a stabili confluenţa. Se observă că:

$$\begin{tikzcd}
 & f(c,c) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
a & & f(c, g(c)) \arrow[dr] & \\
 & & & b
\end{tikzcd}$$

Cum $a \not\downarrow b$, sistemul R nu este confluent.

Exerciţiul 5: Fie (S, Σ) o signatură, unde $S = \{s\}$ şi $\Sigma = \{g : s \to s, f : s \to s\}$. Completaţi următorul sistem de rescriere:

$$R = \{f(g(f(x))) \to x\}.$$

Rezolvare: Se observă că R se termină. Aplicăm algoritmul Knuth-Bendix pentru a completa sistemul de rescriere. Pentru **iniţializare** considerăm $T = R = \{f(g(f(x))) \to x\}$ şi $>$ ca fiind ordinea lexicografică pe termeni indusă de relaţia $f > g$.

Determinăm perechile critice pentru $l_1 \to r_1 = f(g(f(x))) \to x$ şi $l_2 \to r_2 = f(g(f(y))) \to y$. Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:

- $\mathbf{t} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = f(g(z))$. Mai mult, $\theta(x) = g(f(y))$ este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică $(g(f(y)), f(g(y)))$.
- $\mathbf{t} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = f(z)$. Nu există c.g.u. pentru t şi l_2.
- $\mathbf{t} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})))$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, $\theta(x) = y$ este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică (y, y).

Pentru perechea critică $(g(f(y)), f(g(y)))$ avem $(g(f(y)) \not\downarrow f(g(y)))$; obţinem $f(g(y))) > (g(f(y))$ deoarece $f > g$.

Luăm $T = \{f(g(f(x))) \to x, f(g(x)) \to g(f(x))\}$. Se continuă algoritmul Knuth-Bendix şi se observă că T este confluent, fiind completarea lui R.