Exemplificare pentru lucrul cu specificaţii multisortate
SEMINAR DE PROGRAMARE LOGICĂ

LECTOR Claudia MUREŞAN

Semestrul II, 2013–2014

În textul de mai jos, vom folosi prescurtarea uzuala **i. e.** ("id est"), semnificând "adică", precum şi prescurtarea "ddacă" pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Spaţiile vectoriale la care ne vom referi în cele ce urmează vor fi spaţii vectoriale stângi peste corpuri comutative. Ştim că orice spaţiu vectorial stâng peste un corp comutativ se poate organiza (în mod canonic) ca spaţiu vectorial drept peste acelaşi corp comutativ, şi invers. De aceea, în cele ce urmează, în loc de *spaţiu vectorial stâng* vom scrie, simplu, *spaţiu vectorial*.

1 Spaţiile vectoriale ca Γ–algebre

Vrem să determinăm o specificaţie (S, Σ, Γ) astfel încât Γ–algebrele să fie exact spaţiile vectoriale peste corpuri comutative, i. e. orice Γ–algebră să fie un spaţiu vectorial peste un corp comutativ, şi orice spaţiu vectorial peste un corp comutativ să fie o Γ–algebră.

Ce este un spaţiu vectorial ${}_KV$ peste un corp comutativ K? ${}_KV$ este o structură algebrică formată dintr–un grup abelian V, ale cărui elemente se numesc *vectori*, un corp comutativ K, ale cărui elemente se numesc *scalari*, şi o operaţie de compunere a vectorilor cu scalari ce îndeplineşte anumite proprietăţi.

Grupul abelian cu mulţimea suport V se notează, de obicei, aditiv. Întrucât şi corpul K are un grup (abelian) subiacent notat, în mod uzual, tot aditiv, vom folosi pentru operaţiile grupului V notaţii care să se deosebească de cele folosite pentru K.

Aşadar, pe mulţimea V este definită o structură de grup abelian, deci, în primul rând, mulţimea V este înzestrată cu o operaţie binară asociativă, pe care o vom nota cu $\oplus$. Această operaţie binară (de compunere, sau adunare, a vectorilor), are element neutru, fie acesta $\oslash$; $\oslash$ este o constantă (operaţie zeroară) din V. Fiecare element al lui V are un opus (un invers, un simetric) faţă de $\oslash$ (în raport cu operaţia binară $\oplus$), ceea ce înseamnă că avem o operaţie unară pe V, fie aceasta $\ominus$, care duce fiecare element al lui V în opusul său faţă de $\oslash$. În fine, grupul V este comutativ, adică operaţia binară $\oplus$ este comutativă. Să scriem axiomele (condiţiile, proprietăţile) grupului abelian pentru $(V, \oplus, \oslash, \ominus)$; vom începe cu proprietatea de comutativitate a lui $\oplus$:

$$\begin{array}{ll} (C_1) & (\forall\, x, y \in V)\,(x \oplus y = y \oplus x) \\ (C_2) & (\forall\, x, y, z \in V)\,(x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z) \\ (C_3) & (\forall\, x \in V)\,(x \oplus \oslash = x) \\ (C_4) & (\forall\, x \in V)\,(x \oplus (\ominus x) = \oslash) \end{array}$$

De fapt, (C_3) spune că $\oslash$ este element neutru la dreapta pentru $\oplus$, iar (C_4) spune că $\ominus x$ este invers la dreapta pentru x (în raport cu $\oplus$), oricare ar fi $x \in V$, dar, având proprietatea de comutativitate a lui $\oplus$, anume (C_1), rezultă că $\oslash$ este şi element neutru la stânga pentru $\oplus$, iar $\ominus x$ este şi invers la stânga pentru x (în raport cu $\oplus$), oricare ar fi $x \in V$.

K este un corp comutativ, deci este, la rândul său, înzestrat cu o structură de grup abelian, în notaţie aditivă, fie aceasta $(K, +, 0, -)$, dar şi cu o structură de grup abelian notată multiplicativ, fie aceasta $(K, \cdot, 1, ^{-1})$ (ar fi fost doar un monoid multiplicativ dacă am fi avut doar o structură de inel pe K, doar un monoid comutativ în cazul unei structuri de inel comutativ pe K, şi doar un grup în cazul unei structuri de corp pe K); în fine, înmulţirea din K (adică operaţia binară $\cdot$ de pe K) este distributivă faţă de adunarea din corpul comutativ K (adică operaţia binară $+$ de pe K). Să scriem axiomele corpului comutativ pentru K (a se revedea discuţiile de mai sus legate de axiomele grupului abelian):

$$\begin{array}{ll}
(C_5) & (\forall\, x, y \in K)\,(x + y = y + x) \\
(C_6) & (\forall\, x, y, z \in K)\,(x + (y + z) = (x + y) + z) \\
(C_7) & (\forall\, x \in K)\,(x + 0 = x) \\
(C_8) & (\forall\, x \in K)\,(x + (-x) = 0) \\
(C_9) & (\forall\, x, y \in K)\,(xy = yx) \\
(C_{10}) & (\forall\, x, y, z \in K)\,(x(yz) = (xy)z) \\
(C_{11}) & (\forall\, x \in K)\,(x \cdot 1 = x) \\
(C_{12}) & (\forall\, x \in K)\,(xx^{-1} = 1) \\
(C_{13}) & (\forall\, x, y, z \in K)\,(x(y + z) = xy + xz)
\end{array}$$

Am folosit notaţia uzuală: $x \cdot y \stackrel{\text{not.}}{=} xy$, pentru orice $x, y \in K$. De asemenea, am folosit convenţia: operaţia $^{-1}$ are prioritate mai mare decât $\cdot$, iar $\cdot$ are prioritate mai mare decât $+$. (C_{13}) este, de fapt, distributivitatea la stânga a înmulţirii faţă de adunare în corpul K, dar, deoarece corpul K este comutativ, i. e. are înmulţirea comutativă (proprietatea C_9), rezultă şi distributivitatea la dreapta a lui $\cdot$ faţă de $+$.

În fine, să notăm operaţia de compunere a vectorilor cu scalari prin $* : K \times V \to V$, şi să îi scriem axiomele (proprietăţile):

$$\begin{array}{ll}
(C_{14}) & (\forall\, a \in K)\,(\forall\, x, y \in V)\,(a * (x \oplus y) = (a * x) \oplus (a * y)) \\
(C_{15}) & (\forall\, a, b \in K)\,(\forall\, x \in V)\,((a + b) * x = (a * x) \oplus (b * x)) \\
(C_{16}) & (\forall\, a, b \in K)\,(\forall\, x \in V)\,((ab) * x = a * (b * x)) \\
(C_{17}) & (\forall\, x \in V)\,(1 * x = x)
\end{array}$$

Acum să determinăm specificaţia (S, Σ, Γ) care descrie spaţiile vectoriale. Spaţiul vectorial arbitrar ${}_K V$ peste corpul comutativ arbitrar K va fi o Γ–algebră $\mathcal{A}$, şi orice Γ–algebră $\mathcal{B}$ va fi un spaţiu vectorial peste un corp comutativ.

În primul rând, care este signatura (S, Σ), astfel încât ${}_K V$ să fie o Σ–algebră $\mathcal{A}$?

Să scriem structura algebrică ${}_K V$ cu toate operaţiile, enumerate descrescător după arităţi (i. e. după numărul argumentelor), cum este uzual pentru Σ–algebre: $(V, K; \oplus, +, \cdot, *, \ominus, -, ^{-1}, \oslash, 0, 1)$. $\oplus : V \times V \to V, + : K \times K \to K, \cdot : K \times K \to K, * : K \times V \to V, \ominus : V \to V, - : K \to K, ^{-1} : K \to K, \oslash \in V, 0 \in K, 1 \in K$.

Avem două mulţimi suport: V şi K, deci vom avea două sorturi: $S = \{v, s\}$ (v va fi sortul vectorilor, iar s va fi sortul scalarilor). Suporturile lui $\mathcal{A}$ sunt: $A_v = V$ şi $A_s = K$.

Să scriem simboluri de operaţii cu arităţile şi sorturile rezultat corespunzătoare pentru operaţiile din ${}_K V$: $\Sigma = \{sumv : vv \to v, sums : ss \to s, prods : ss \to s, prodvs : sv \to v, opusv : v \to v, opuss : s \to s, invs : s \to s, ov : \to v, os : \to s, is : \to s\}$. Cu operaţiile $\oplus = A_{sumv} : A_v \times A_v \to A_v, + = A_{sums} : A_s \times A_s \to A_s, \cdot = A_{prods} : A_s \times A_s \to A_s, * = A_{prodvs} : A_s \times A_v \to A_v, \ominus = A_{opusv} : A_v \to$

$A_v, - = A_{opuss} : A_s \to A_s, ^{-1} = A_{invs} : A_s \to A_s, \oslash = A_{ov} \in A_v, 0 = A_{os} \in A_s, 1 = A_{os} \in A_s$, ${}_KV$ devine Σ–algebra $\mathcal{A} = (A_v, A_s; A_{sumv}, A_{sums}, A_{prods}, A_{prodvs}, A_{opusv}, A_{opuss}, A_{invs}, A_{ov}, A_{os}, A_{is})$.

Orice spaţiu vectorial este o Σ–algebră $\mathcal{B} = (B_v, B_s; B_{sumv}, B_{sums}, B_{prods}, B_{prodvs}, B_{opusv}, B_{opuss}, B_{invs}, B_{ov}, B_{os}, B_{is})$, definită la fel ca $\mathcal{A}$ pentru spaţiul vectorial arbitrar ${}_KV$.

Acum să definim o mulţime Γ de Σ–ecuaţii astfel încât $\mathcal{A}$ să fie o Γ–algebră (i. e. Σ–algebra $\mathcal{A} \vDash \Gamma$, i. e. $\mathcal{A} \vDash \gamma$, oricare ar fi $\gamma \in \Gamma$), prin urmare orice spaţiu vectorial peste un corp comutativ să fie o Γ–algebră, şi orice Γ–algebră să fie un spaţiu vectorial peste un corp comutativ.

Fie $\Gamma = \{\gamma_i \mid i \in \overline{1, 17}\}$, unde:

$$
\begin{array}{ll}
(\gamma_1) & \forall \{x, y\}\, sumv(x, y) \doteq_v sumv(y, x) \\
(\gamma_2) & \forall \{x, y, z\}\, sumv(x, sumv(y, z)) \doteq_v sumv(sumv(x, y), z) \\
(\gamma_3) & \forall \{x\}\, sumv(x, ov) \doteq_v x \\
(\gamma_4) & \forall \{x\}\, sumv(x, opusv(x)) \doteq_v ov \\
(\gamma_5) & \forall \{x, y\}\, sums(x, y) \doteq_s sums(y, x) \\
(\gamma_6) & \forall \{x, y, z\}\, sums(x, sumv(y, z)) \doteq_s sums(sums(x, y), z) \\
(\gamma_7) & \forall \{x\}\, sums(x, os) \doteq_s x \\
(\gamma_8) & \forall \{x\}\, sums(x, opuss(x)) \doteq_s os \\
(\gamma_9) & \forall \{x, y\}\, prods(x, y) \doteq_s prods(y, x) \\
(\gamma_{10}) & \forall \{x, y, z\}\, prods(x, prods(y, z)) \doteq_s prods(prods(x, y), z) \\
(\gamma_{11}) & \forall \{x\}\, prods(x, is) \doteq_s x \\
(\gamma_{12}) & \forall \{x\}\, prods(x, invs(x)) \doteq_s is \\
(\gamma_{13}) & \forall \{x, y, z\}\, prods(x, sums(y, z)) \doteq_s sums(prods(x, y), prods(x, z)) \\
(\gamma_{14}) & \forall \{a, x, y\}\, prodvs(a, sumv(x, y)) \doteq_v sumv(prodvs(a, x), prodvs(a, y)) \\
(\gamma_{15}) & \forall \{a, b, x\}\, prodvs(sums(a, b), x) \doteq_v sumv(prodvs(a, x), prodvs(b, x)) \\
(\gamma_{16}) & \forall \{a, b, x\}\, prodvs(prods(ab), x) \doteq_v prodvs(a, prodvs(b, x)) \\
(\gamma_{17}) & \forall \{x\}\, prodvs(is, x) \doteq_v x
\end{array}
$$

Să verificăm că $\mathcal{A} \vDash \Gamma$:

$\mathcal{A} \vDash \gamma_1$ ddacă $(\forall\, x, y \in A_v)\, (A_{sumv}(x, y) = A_{sumv}(y, x))$, ceea ce este adevărat, conform (C_1);

$\mathcal{A} \vDash \gamma_2$ ddacă $(\forall\, x, y, z \in A_v)\, (A_{sumv}(x, A_{sumv}(y, z)) = A_{sumv}(A_{sumv}(x, y), z))$, ceea ce este adevărat, conform (C_2);

$\mathcal{A} \vDash \gamma_3$ ddacă $(\forall\, x \in A_v)\, (A_{sumv}(x, A_{ov}) = x)$, ceea ce este adevărat, conform (C_3);

$\mathcal{A} \vDash \gamma_4$ ddacă ddacă $(\forall\, x \in A_v)\, (A_{sumv}(x, A_{opusv}(x)) = A_{ov})$, ceea ce este adevărat, conform (C_4);

analog, $\mathcal{A} \vDash \gamma_5$, $\mathcal{A} \vDash \gamma_6$, $\mathcal{A} \vDash \gamma_7$ şi $\mathcal{A} \vDash \gamma_8$, conform (C_5), (C_6), (C_7) şi (C_8);

$\mathcal{A} \vDash \gamma_9$ ddacă $(\forall\, x, y \in A_s)\, (A_{prods}(x, y) = A_{prods}(y, x))$, ceea ce este adevărat, conform (C_9);

$\mathcal{A} \vDash \gamma_{10}$ ddacă $(\forall\, x, y, z \in A_s)\, (A_{prods}(x, A_{prods}(y, z)) = (A_{prods}(A_{prods}(x, y), z))$, ceea ce este adevărat, conform (C_{10});

$\mathcal{A} \vDash \gamma_{11}$ ddacă $(\forall\, x \in A_s)\, (A_{prods}(x, A_{is}) = x)$, ceea ce este adevărat, conform (C_{11});

$\mathcal{A} \vDash \gamma_{12}$ ddacă $(\forall\, x \in A_s)\, (A_{prods}(x, A_{invs}(x)) = A_{is})$, ceea ce este adevărat, conform (C_{12});

$\mathcal{A} \vDash \gamma_{13}$ ddacă $(\forall\, x, y, z \in A_s)\, A_{prods}(x, A_{sums}(y, z)) = A_{sums}(A_{prods}(x, y), A_{prods}(x, z))$, ceea ce este adevărat, conform (C_{13});

$\mathcal{A} \vDash \gamma_{14}$ ddacă $(\forall\, a \in A_s)\, (\forall\, x, y \in A_v)\, (A_{prodvs}(a, A_{sumv}(x, y)) = A_{sumv}(A_{prodvs}(a, x), A_{prodvs}(a, y)))$, ceea ce este adevărat, conform (C_{14});

$\mathcal{A} \vDash \gamma_{15}$ ddacă $(\forall\, a, b \in A_s)\, (\forall\, x \in A_v)\, (A_{prodvs}(A_{sums}(a, b), x) = A_{sumv}(A_{prodvs}(a, x), A_{prodvs}(b, x)))$, ceea ce este adevărat, conform (C_{15});

$\mathcal{A} \vDash \gamma_{16}$ ddacă $(\forall\, a, b \in A_s)\, (\forall\, x \in A_v)\, (A_{prodvs}(A_{prods}(ab), x) = A_{prodvs}(a, A_{prodvs}(b, x)))$, ceea ce este adevărat, conform (C_{16});

$\mathcal{A} \vDash \gamma_{17}$ ddacă $(\forall\, x \in A_v)\,(A_{prodvs}(A_{is}, x) = x)$, ceea ce este adevărat, conform (C_{17}).

Orice spaţiu vectorial peste un corp comutativ, ca Σ–algebră $\mathcal{B}$, satisface mulţimea Γ de Σ–ecuaţii, deci este o Γ–algebră. Reciproca este imediată: orice Γ–algebră, i. e. orice Σ–algebră care satisface Γ, este un spaţiu vectorial peste un corp comutativ. Aşadar, Γ–algebrele sunt exact spaţiile vectoriale peste corpuri comutative.

2 Γ–subalgebre, Γ–morfisme versus subspaţii vectoriale, morfisme de spaţii vectoriale

Vom observa că subspaţiile vectoriale ale unui spaţiu vectorial peste un corp comutativ care coincide cu Γ–algebra $\mathcal{A}$ sunt exact Γ–subalgebrele lui $\mathcal{A}$ cu acelaşi corp comutativ subiacent ca şi spaţiul vectorial $\mathcal{A}$, iar morfismele de spaţii vectoriale peste un corp comutativ sunt exact componentele de sort v ale Γ–morfismelor definite între Γ–algebrele cu acelaşi corp comutativ subiacent având componenta de sort s egală cu funcţia identică a acelui corp comutativ.

În cele ce urmează, $\mathcal{A} = (A_v, A_s; A_{sumv}, A_{sums}, A_{prods}, A_{prodvs}, A_{opusv}, A_{opuss}, A_{invs}, A_{ov}, A_{os}, A_{is})$ şi $\mathcal{B} = (B_v, B_s; B_{sumv}, B_{sums}, B_{prods}, B_{prodvs}, B_{opusv}, B_{opuss}, B_{invs}, B_{ov}, B_{os}, B_{is})$ vor fi Γ–algebre arbitrare.

$\mathcal{B}$ este Γ–subalgebră a lui $\mathcal{A}$ ddacă $\mathcal{B}$ este Σ–subalgebră a lui $\mathcal{A}$ (este imediat că orice Σ–subalgebră a Γ–algebrei $\mathcal{A}$ satisface Γ, deci este o Γ–algebră), i. e. ddacă: $B_v \subseteq A_v$, $B_s \subseteq A_s$ şi $\mathcal{B}$ este închisă la operaţiile de Σ–algebră ale lui $\mathcal{A}$, i. e.: pentru orice $x, y \in B_v$ şi orice $a, b \in B_s$, au loc: $A_{sumv}(x, y) \in B_v, A_{sums}(a, b) \in B_s, A_{prods}(a, b) \in B_s, A_{prodvs}(a, x) \in B_v, A_{opusv}(x) \in B_v, A_{opuss}(a) \in B_s, A_{invs}(a) \in B_s, A_{ov} \in B_v, A_{os} \in B_s, A_{is} \in B_s$, iar operaţiile de Σ–algebră ale lui $\mathcal{B}$ sunt restricţiile operaţiilor de Σ–algebră ale lui $\mathcal{A}$ la suporturile lui $\mathcal{B}$, adică: $B_{sumv} = A_{sumv} \mid_{B_v \times B_v}$, $B_{sums} = A_{sums} \mid_{B_s \times B_s}$, $B_{prods} = A_{prods} \mid_{B_s \times B_s}$, $B_{prodvs} = A_{prodvs} \mid_{B_s \times B_v}$, $B_{opusv} = A_{opusv} \mid_{B_v}$, $B_{opuss} = A_{opuss} \mid_{B_s}$, $B_{invs} = A_{invs} \mid_{B_s}$, $B_{ov} = A_{ov}$, $B_{os} = A_{os}$, $B_{is} = A_{is}$.

Se observă că $\mathcal{B}$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{A}$ ddacă $\mathcal{B}$ este Γ–subalgebră a lui $\mathcal{A}$ şi $B_s = A_s$.

Un Γ–morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este un Σ–morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (definiţia unui Γ–morfism nu este influenţată de Σ–ecuaţiile din Γ), i. e. o funcţie bisortată $h = (h_v, h_s) : (A_v, A_s) \to (B_v, B_s)$ (i. e. $h_v : A_v \to B_v$ şi $h_s : A_s \to B_s$) care comută cu operaţiile de Σ–algebre ale lui $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$, adică, pentru orice $x, y \in A_v$ şi orice $a, b \in A_s$:

$$
\begin{gathered}
h_v(A_{sumv}(x, y)) = B_{sumv}(h_v(x), h_v(y)),\\
h_s(A_{sums}(a, b)) = B_{sums}(h_s(a), h_s(b)),\\
h_s(A_{prods}(a, b)) = B_{prods}(h_s(a), h_s(b)),\\
h_v(A_{prodvs}(a, x)) = B_{prodvs}(h_s(a), h_v(x)),\\
h_v(A_{opusv}(x)) = B_{opusv}(h_v(x)),\\
h_s(A_{opuss}(a)) = B_{opuss}(h_s(a)),\\
h_s(A_{invs}(a)) = B_{invs}(h_s(a)),\\
h_v(A_{ov}) = B_{ov},\\
h_s(A_{os}) = B_{os},\\
h_s(A_{is}) = B_{is}.
\end{gathered}
$$

Se observă că $f : A_v \to B_v$ este un morfism de spaţii vectoriale între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ ddacă $(B_s; B_{sums}, B_{prods}, B_{opuss}, B_{invs}, B_{os}, B_{is}) = (A_s; A_{sums}, A_{prods}, A_{opuss}, A_{invs}, A_{os}, A_{is})$ şi $h = (f, id_{A_s}) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este un Γ–morfism (unde id_{A_s} este funcţia identică a lui A_s, care duce fiecare element al lui A_s în el însuşi).