Mecanică Generală

IV. Dinamica punctului material - 1

Liviu Marin[1,†]

[1]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, România

[†]E-mail: marin.liviu@gmail.com

19 noiembrie 2013

Definiţie (repere inerţiale)

Două repere, $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq 3}\big)$ şi $\mathcal{R}'\big(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha\}_{1\leq \alpha\leq 3}\big)$, se numesc repere inerţiale dacă au o mişcare de translaţie rectilinie şi uniformă unul faţă de celălalt.

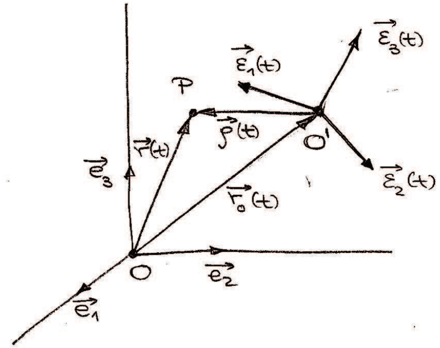

Figure : Reperele $\mathcal{R}_A$ şi $\mathcal{R}$.

Fie $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq 3}\big)$ un reper absolut şi $\mathcal{R}'\big(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t')\}_{1\leq \alpha\leq 3}\big)$ un reper inerţial. Considerăm $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$.

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r}}_0(t) + \vec{\rho}(t') \\ t' = t + a \quad (a \in \mathbb{R}) \end{cases} \tag{1}$$

Cum $\mathcal{R}'$ este un reper inerţial faţă de reperul absolut $\mathcal{R}_A$, rezultă:

$$\vec{\mathbf{r}}_0(t) = \vec{\mathbf{v}}_0\, t + \vec{\mathbf{r}}_0 \quad (\vec{\mathbf{r}}_0 := \vec{\mathbf{r}}_0(0)) \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2), precum şi reprezentarea vectorului de poziţie al lui $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ în baza $\{\vec{\varepsilon}_\alpha(t')\}_{1\leq \alpha\leq 3}$, $\vec{\rho}(t')$, obţinem:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{v}}_0\, t + \vec{\mathbf{r}}_0 + \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{3} \rho_\alpha(t')\, \vec{\varepsilon}_\alpha(t') \\ t' = t + a \end{array}} \tag{3}$$

Transformarea (3) pune în evidenţă următoarea corespondenţa biunivocă:

$$(\vec{\mathbf{r}}, t) \rightleftarrows (\vec{\rho}, t') \tag{4}$$

Transformarea (3) depinde de 10 parametri:

(i) vectorul viteză, $\vec{\mathbf{v}}_0 = \big(v_{01}, v_{02}, v_{03}\big)^{\mathsf{T}}$;
(ii) vectorul de poziţie la momentul iniţial, $\vec{\mathbf{r}}_0 = \big(r_{01}, r_{02}, r_{03}\big)^{\mathsf{T}}$;
(iii) 3 cosinuşi directori ai axelor reperului $\mathcal{R}'$ faţă de reperul $\mathcal{R}_A$;
(iv) constanta a.

Definiţie (grupul lui Galilei)

Mulţimea transformărilor (3) se notează cu G_{10} şi se numeşte grupul transformărilor lui Galilei.

Pornind de la grupul lui Galilei, G_{10}, se poate obţine grupul redus/minimal al lui Galilei, depinzând de un parametru, G_1, astfel:

(i) $a = 0$, i.e. originea timpului în cele două repere este aceeaşi;
(ii) $\vec{\mathbf{r}}_0 := \vec{\mathbf{r}}_0(0) = \vec{\mathbf{0}}$, i.e. la momentul iniţial, observatorii se află în acelaşi punct;
(iii) $\vec{\varepsilon}_\alpha(0) = \vec{\mathbf{e}}_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq 3$, i.e. la momentul iniţial, versorii celor două repere coincid;
(iv) $\vec{\mathbf{v}}_0 := \vec{\mathbf{v}}_0(0) = v_0\, \vec{\mathbf{e}}_1$, i.e. $\mathcal{R}'$ se mişcă în direcţia axei $\mathbf{Ox}_1$ în raport cu $\mathcal{R}_A$.

Ca urmare a presupunerilor făcute în vederea obținerii lui G_1, transformarea (3) depinde doar de un parametru, v_0. Proiectată pe $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}$, transformarea (3) devine:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\mathbf{e}}_1 :\quad & x_1(t) = v_0\, t + \rho_1(t) \\ \vec{\mathbf{e}}_2 :\quad & x_2(t) = \qquad\ \ \rho_2(t) \\ \vec{\mathbf{e}}_3 :\quad & x_3(t) = \qquad\ \ \rho_3(t) \end{aligned}} \tag{5}$$

Proprietăți

Transformările (5) definesc o structură de grup în raport cu compunerea vitezelor.
Accelerațiile și distanțele sunt invariante în raport cu G_1.

Demonstrație: Exercițiu!

Dinamica punctului material

Dinamica – studiază mișcarea corpurilor ținând cont de cauza ce o determină, i.e. acțiunea reciprocă a corpurilor și acțiunea forțelor date.

Mecanica clasică/newtoniană – studiază mișcarea corpurilor având următoarele ipoteze de lucru:

(i) mișcarea are loc la viteze mult mai mici decât viteza luminii în vid ($c = 300.000$ km/s^2);
(ii) mișcarea are loc în domenii spațiale macroscopice.

Mecanica clasică/newtoniană – studiază mișcarea corpurilor considerată drept cazuri limită ale mișcărilor studiate de mecanica relativistă și mecanica cuantică:

(a) Mecanica relativistă – studiază mișcarea corpurilor la viteze comparabile cu viteza luminii în vid.
(b) Mecanica cuantică – studiază mișcarea corpurilor (particulelor) în interiorul unor domenii microscopice (e.g. atomi).

Forțe

Legea I (Principiul inerției): *"Orice corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie în care se găsește dacă o forță nu lucrează asupra sa sau nu îl constrange să își schimbe starea."*

Consecințe:

(i) Corpurile au două stări naturale: starea de repaus; mișcarea rectilinie și uniformă.
(ii) Numim forță agentul care schimbă starea naturală a corpurilor.
(iii) Forța este legată de variația vitezei (accelerația) prin Legea a II-a: *"Schimbările produse de mișcare sunt proporționale cu forța motrice și se fac în linia dreaptă în lungul căreia a fost imprimată această forță"*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(m(\vec{\mathbf{x}})\,\vec{\mathbf{v}}(t,\vec{\mathbf{x}})\big) = m(\vec{\mathbf{x}})\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{v}}(t,\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) \tag{6}$$

Forța este o mărime derivată din mișcare: dacă are loc o variație a vitezei, atunci este prezentă o forță.

Forța este un aspect al interacțiunii corpurilor și al fenomenelor din Univers: acel "aspect" care determină deplasarea corpurilor.

Dimensiunea: $[\vec{\mathbf{F}}] = [m]\,[\vec{\mathbf{a}}] = \mathrm{M\,L\,T^{-2}}$

Unitatea de măsură: $\langle \vec{\mathbf{F}} \rangle_{SI} = 1$ kg $\cdot$ m/s^2 $= 1$ N (Newton)

In Mecanică, se presupune că acțiunea se propagă instantaneu.

In general, originea forțelor nu este de natură mecanică, iar forțele se presupun date în Mecanică.

Observații (W. Noll, 1960):

(i) In Univers, corpurile interacționează permanent și în totalitate.
(ii) Pentru o problemă din Mecanică asociată unui corp dat, nu este necesar să se considere decât interacțiunile cu acele corpuri aflate într-o "vecinătate" a corpului considerat.
(iii) Interacțiuni: la mare distanță (Universul îndepărtat); la mică distanță (Universul apropiat).

Materia, prin proprietatea ei numită masă, creează un domeniu în jurul corpului considerat, numit câmp, în care starea oricărui alt corp va fi influențată.

Câmpul astfel creat se numește câmp gravific.

Măsura acțiunii câmpului gravific asupra oricărui corp se numește (caracterizează o) forță.

Nu are sens să vorbim despre forțe decât în prezența a cel puțin două corpuri!!!

Definiție

Măsura interacțiunii dintre cele două corpuri $\mathcal{B}_1$ și $\mathcal{B}_2$ se numește forță (acțiunea lui $\mathcal{B}_2$ asupra lui $\mathcal{B}_1$) $\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \neq \vec{\mathbf{0}}$.

Observații

Forța $\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ este un vector legat într-un punct $\mathbf{P} \in \mathcal{B}_1$ al corpului asupra căruia acționează.

Dacă $\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \neq \vec{\mathbf{0}}$, atunci există și $\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) \neq \vec{\mathbf{0}}$.

Tipuri de forțe

Fie $\mathcal{B}_1$ și $\mathcal{B}_2$ configurațiile, la un moment dat, a două corpuri.

Atunci are loc una din următoarele situații:

(A) $\overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2 = \varnothing$:
Corpurile sunt la distanță $\Longrightarrow$ Interacțiuni la distanță:

- (A.1) Interacțiuni la "mare distanță" (Universul îndepărtat)
- (A.2) Interacțiuni la "mică distanță" (Universul apropiat)

(B) $\overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2 = \mathcal{B}$, unde $\varnothing \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ cu $\dim(\mathcal{B}) \leq 2$:
Corpurile sunt în contact $\Longrightarrow$ Interacțiuni de contact/legătură:

- (B.1) Interacțiuni (Forțe) de contact ideal;
  Legături ideale/fără frecare
- (B.2) Interacțiuni (Forțe) de contact real;
  Legături reale/cu frecare

Exemple:

(i) Interacțiune la "mare distanță" (A.1): Forța de atracție universală

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}(\mathrm{P}, \mathrm{S}) = -f\,\frac{M_S\, m_P}{r^2}\,\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}} \tag{7}$$

- $\vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{SP}}$ vectorul de poziție a planetei (P) față de Soare (S);
- $r = \|\vec{\mathbf{r}}\|$;
- M_S masa Soarelui (S);
- m_P masa planetei (P);
- $f = 6,673 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3/\left(\mathrm{kg}\cdot \mathrm{s}^2\right)$ constanta atracției universale.

(ii) Interacțiune la "mică distanță" (A.2): Forța de atracție gravitațională a Pământului

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}(\mathrm{c}, \mathrm{S}) = m_c\, \vec{\mathbf{g}}} \tag{8}$$

- m_c masa corpului (c);
- $\vec{\mathbf{g}} = -\mathrm{g}\,\vec{\mathbf{e}}_3$ accelerația gravitațională $\left(\mathrm{g} = \|\vec{\mathbf{g}}\| = 9,81\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right)$.

(A) Interacțiuni la distanță

CORPURI

I. Axioma (Principiul) acțiunii și reacțiunii:

Fie $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{E}$ configurațiile, la un moment dat, a două corpuri.
Dacă $\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \neq \vec{\mathbf{0}}$, atunci

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) \neq \vec{\mathbf{0}} \tag{9a}$$

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) + \vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \vec{\mathbf{0}} \tag{9b}$$

II. Axioma compunerii forțelor:

Fie $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3 \subset \mathcal{E}$ configurațiile, la un moment dat, a trei corpuri.
Dacă $\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1) \neq \vec{\mathbf{0}}$ și $\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) \neq \vec{\mathbf{0}}$, atunci

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) \neq \vec{\mathbf{0}} \tag{10a}$$

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1) + \vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) \tag{10b}$$

PUNCTE MATERIALE

I. Axioma (Principiul) acțiunii și reacțiunii:

Fie $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathcal{E}$ două puncte materiale.
Dacă $\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \neq \vec{\mathbf{0}}$, atunci

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1) \neq \vec{\mathbf{0}} \tag{11a}$$

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) + \vec{\mathbf{f}}(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1) = \vec{\mathbf{0}} \tag{11b}$$

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \parallel \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \tag{11c}$$

II. Axioma compunerii forțelor:

Fie $\{\mathbf{P}_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{E}$ o mulțime finită de puncte materiale.
Dacă $\exists\ i_0 \in I$ a.i. $\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{P}_{i_0}, \mathbf{P}_j) \neq \vec{\mathbf{0}}$, $\forall j \in I \setminus \{i_0\}$, atunci

$$\vec{\mathbf{f}}\Big(\mathbf{P}_{i_0}, \bigcup_{j\in I\setminus\{i_0\}} \{\mathbf{P}_j\}\Big) = \sum_{j\in I\setminus\{i_0\}} \vec{\mathbf{f}}(\mathbf{P}_{i_0}, \mathbf{P}_j) \tag{12}$$

In acest caz, avem:

$$\overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2 \neq \varnothing, \quad \dim\big(\overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2\big) \leq 2.$$

Mulțimea punctelor de contact poate fi:

(i) un punct (o varietate de dimensiune zero):
$$\overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2 = \{\mathbf{P}\}, \quad \dim(\{\mathbf{P}\}) = 0;$$

(ii) o curbă (o varietate de dimensiune unu):
$$\overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2 = \mathscr{C}, \quad \dim(\mathscr{C}) = 1;$$

(iii) o suprafață (o varietate de dimensiune doi):
$$\overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2 = \mathscr{S}, \quad \dim(\mathscr{S}) = 2.$$

Observații:

(a) In cazul (i), punctul $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ poate fi gândit ca un punct material.

(b) Dacă $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ este originea reperului absolut $\mathcal{R}_A$ și $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$, atunci $\vec{\mathbf{r}}(t) \equiv \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$.

I. Fie $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{E}$ configurațiile, la un moment dat, a două corpuri aflate în contact.

Atunci $\exists\ \vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \neq \vec{\mathbf{0}}$ o forță de contact ideal a.i.

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) \neq \vec{\mathbf{0}} \tag{13a}$$

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \cdot \vec{\mathbf{u}}(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\ \vec{\mathbf{u}}(t) \text{ viteză virtuală} \tag{13b}$$

Observații:

(a) Ec. (13b): puterea mecanică a forței de contact $\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ este nulă.

(b) Punctul de contact $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ poate fi, în timp, pe o suprafață, $\mathscr{S} \subset \mathcal{E}$, sau pe o curbă, $\mathscr{C} \subset \mathcal{E}$. Așadar, contactul poate fi descris ca o legătură geometrică.

Propoziție

Fie $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{E}$ configurațiile, la un moment dat, a două corpuri a.i. $\overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2 = \{\mathbf{P}(t)\}$.
Dacă la orice moment de timp t punctul de contact $\mathbf{P}(t)$ este constrâns să se miște pe suprafața de legătură

$$\mathscr{S}(t) = \Big\{\vec{\mathbf{r}}(t)\ \Big|\ \varphi(t, \vec{\mathbf{r}}(t)) = 0\Big\}, \tag{14}$$

atunci forța de legătură ideală $\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ se află pe direcția normalei la suprafața de legătură $\mathscr{S}(t)$, i.e.

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \lambda\, \nabla_{\vec{\mathbf{r}}}\, \varphi(t, \vec{\mathbf{r}}(t)), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Demonstrație:

Din ecuația (14) a suprafeței de legătură $\mathscr{S}(t)$, rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t, \vec{\mathbf{r}}(t)) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, \vec{\mathbf{r}}(t)) + \nabla_{\vec{\mathbf{r}}}\, \varphi(t, \vec{\mathbf{r}}(t)) \cdot \dot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = 0 \tag{16}$$

Fie $\dot{\vec{\mathbf{r}}}_1(t)$ și $\dot{\vec{\mathbf{r}}}_2(t)$ două viteze posibile, arbitrare, ale punctului **P** la momentul de timp t. Atunci:

$$\vec{\mathbf{r}}_1(t) = \vec{\mathbf{r}}_2(t) = \vec{\mathbf{r}}(t) \ \left(\equiv \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)\right) \tag{17a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}_1(t)) + \nabla_{\vec{\mathbf{r}}}\,\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}_1(t))\cdot\dot{\vec{\mathbf{r}}}_1(t) = 0 \tag{17b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}_2(t)) + \nabla_{\vec{\mathbf{r}}}\,\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}_2(t))\cdot\dot{\vec{\mathbf{r}}}_2(t) = 0 \tag{17c}$$

Scădem relația (17c) din (17b) și ținem seama de identitatea (17a):

$$\nabla_{\vec{\mathbf{r}}}\,\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))\cdot\left[\dot{\vec{\mathbf{r}}}_1(t) - \dot{\vec{\mathbf{r}}}_2(t)\right] = 0 \tag{18}$$

sau, echivalent

$$\nabla_{\vec{\mathbf{r}}}\,\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))\cdot\vec{\mathbf{u}}(t) = 0 \tag{19}$$

unde $\vec{\mathbf{u}}(t) := \dot{\vec{\mathbf{r}}}_1(t) - \dot{\vec{\mathbf{r}}}_2(t)$ este arbitrar.

Cuplăm ecuația (19) cu relația (13b) referitoare la puterea mecanică a forței de contact $\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$:

$$\nabla_{\vec{\mathbf{r}}}\,\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))\cdot\vec{\mathbf{u}}(t) = 0 \tag{20a}$$

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)\cdot\vec{\mathbf{u}}(t) = 0\,,\quad \forall\ \vec{\mathbf{u}}(t) \text{ viteză virtuală} \tag{20b}$$

In baza $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}$ asociată reperului absolut $\mathcal{R}_A$, (20a) & (20b) devin:

$$\sum_i^3 \frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_i}\,\vec{\mathbf{e}}_i\cdot\sum_j^3 u_j(t)\,\vec{\mathbf{e}}_j = 0 \tag{21a}$$

$$\sum_i^3 f_i(t)\,\vec{\mathbf{e}}_i\cdot\sum_j^3 u_j(t)\,\vec{\mathbf{e}}_j = 0\,,\quad \forall\ u_1(t),u_2(t),u_3(t)\in\mathbb{R} \tag{21b}$$

sau, echivalent

$$\frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_1}\,u_1(t) + \frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_2}\,u_2(t) + \frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_3}\,u_3(t) = 0 \tag{22a}$$

$$f_1(t)\,u_1(t)+f_2(t)\,u_2(t)+f_3(t)\,u_3(t) = 0\,,\ \forall\ u_j(t)\in\mathbb{R}\,,\ j=1,2,3 \tag{22b}$$

Fie $\dfrac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_3} \neq 0$. Atunci, din ecuația (22a) obținem:

$$u_3(t) = -\left(\frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_1}\,u_1(t) + \frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_2}\,u_2(t)\right)\Bigg/\frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_3} \tag{23}$$

Din relațiile (23) și (22b), rezultă:

$$\begin{aligned}&\left(f_1(t) - f_3(t)\,\frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_1}\Bigg/\frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_3}\right)u_1(t)+\\ &\left(f_2(t) - f_3(t)\,\frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_2}\Bigg/\frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_3}\right)u_2(t) = 0\,,\\ &\forall\ u_1(t),u_2(t)\in\mathbb{R}\end{aligned} \tag{24}$$

Din (24) obținem:

$$\begin{cases} f_1(t) - f_3(t)\,\dfrac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_1}\Bigg/\dfrac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_3} = 0\\[2ex] f_2(t) - f_3(t)\,\dfrac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_2}\Bigg/\dfrac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_3} = 0\end{cases} \tag{25}$$

Obținem din (25):

$$\frac{f_1(t)}{\dfrac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_1}} = \frac{f_2(t)}{\dfrac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_2}} = \frac{f_3(t)}{\dfrac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_3}} =: \lambda\in\mathbb{R} \tag{26}$$

În cele din urmă, rezultă:

$$\exists\ \lambda\in\mathbb{R}:\quad f_j(t) = \lambda\,\frac{\partial\varphi(t,\vec{\mathbf{r}}(t))}{\partial x_j}\,,\quad j=1,2,3 \tag{27}$$

i.e. relația (15) este satisfăcută. $\square$

Propoziție

Fie $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{E}$ configurațiile, la un moment dat, a două corpuri a.i. $\overline{\mathcal{B}}_1 \cap \overline{\mathcal{B}}_2 = \{\mathbf{P}(t)\}$.
Dacă la orice moment de timp t punctul de contact $\mathbf{P}(t)$ este constrâns să se miște pe curba de legătură

$$\mathscr{C}(t) = \mathscr{S}_1(t) \cap \mathscr{S}_2(t)\,, \tag{28}$$

unde suprafațele $\mathscr{S}_j(t)$, $j = 1, 2$, sunt date de:

$$\mathscr{S}_j(t) = \left\{ \vec{\mathbf{r}}(t) \;\middle|\; \varphi_j\big(t, \vec{\mathbf{r}}(t)\big) = 0 \right\}, \quad = 1, 2\,, \tag{29}$$

atunci forța de legătură ideală $\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ se află în planul determinat de cele două normale la suprafațele a căror intersecție determină curba de legătură, i.e.

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \lambda_1 \nabla_{\vec{\mathbf{r}}}\, \varphi_1\big(t, \vec{\mathbf{r}}(t)\big) + \lambda_2 \nabla_{\vec{\mathbf{r}}}\, \varphi_2\big(t, \vec{\mathbf{r}}(t)\big)\,, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{30}$$

Demonstrație: Exercițiu!

(B.2) Interacțiuni (Forțe) de contact reale

I. Fie $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{E}$ configurațiile, la un moment dat, a două corpuri aflate în contact.
Atunci $\exists\, \vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \neq \vec{\mathbf{0}}$ o forță de contact real (forță de frecare) a.i.

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) + \vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \vec{\mathbf{0}} \tag{31a}$$

$$\vec{\mathbf{f}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \big(\vec{\mathbf{N}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2), \vec{\mathbf{\Phi}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)\big) \tag{31b}$$

unde $\vec{\mathbf{N}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ caracterizează forța de contact ideal asociată și

$$\vec{\mathbf{N}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \nabla_{\vec{\mathbf{r}}}\, \varphi_j\big(t, \vec{\mathbf{r}}(t)\big)\,, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}\,, j = 1, 2 \tag{32a}$$

$$\vec{\mathbf{N}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \cdot \vec{\mathbf{\Phi}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = 0 \tag{32b}$$

$$\|\vec{\mathbf{\Phi}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)\| \begin{cases} \leq \mu_0\, \|\vec{\mathbf{N}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)\| & \text{dacă } \vec{\mathbf{v}}_r(t) = \vec{\mathbf{0}} \\ = \mu\, \|\vec{\mathbf{N}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)\| & \text{dacă } \vec{\mathbf{v}}_r(t) \neq \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \tag{32c}$$

$$\vec{\mathbf{\Phi}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = -\|\vec{\mathbf{\Phi}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)\|\, \frac{\vec{\mathbf{v}}_r(t)}{\|\vec{\mathbf{v}}_r(t)\|} \tag{32d}$$

In formulele (32a)–(32d), s-au folosit următoarele notații:

- $\vec{\mathbf{v}}_r(t)$ – viteza relativă a punctului de contact $\mathbf{P}$, la momentul t, în raport cu varietatea (suprafață, curbă) pe care acesta se mișcă cu frecare;
- μ_0 – coeficientul static de frecare la alunecare (în repaus);
- μ – coeficientul dinamic de frecare la alunecare (în mișcare).