Mecanică Generală

III. Cinematica punctului material - 3

Liviu Marin[1,†]

[1]Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea din București, România

[†]E-mail: marin.liviu@gmail.com

5 noiembrie 2013

Elemente de cinematica punctului material

Fie $\mathcal{R}_A(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq 3})$ un referențial/reper absolut în $\mathcal{E}$.

Definiție

Spunem că un punct $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ este în mișcare (se mișcă) în raport cu reperul $\mathcal{R}_A$ dacă vectorul lui de poziție, $\vec{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}$, este o funcție de timp:

$$\begin{aligned} &\vec{\mathbf{x}}(\cdot) : I \longrightarrow \mathcal{E} \ (I \subset \mathbb{R}), \\ &t \longmapsto \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(t) = x_1(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + x_3(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3\,, \end{aligned} \tag{1}$$

sau, echivalent, componentele vectorului de poziție $\vec{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}$ în baza $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq 3}$, $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, sunt funcții de timp:

$$x_i(\cdot) : I \longrightarrow \mathcal{E} \ (I \subset \mathbb{R}), \quad t \longmapsto x_i = x_i(t), \quad 1 \leq i \leq 3\,. \tag{2}$$

Observații

(i) Cunoașterea funcțiilor $x_i(t)$ pe intervalul de timp $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ înseamnă cunoașterea mișcării punctului $\mathbf{P}$ în raport cu $\mathcal{R}_A$.

(ii) Ecuațiile (2) definesc legea mișcării.

Definiții

Locul geometric al extremităților vectorului de poziție, $\vec{\mathbf{x}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$ când $t \in I$, i.e. locul geometric al pozițiilor pe care le ocupă succesiv punctul $\mathbf{P}$ în mișcare, se numește traiectorie.

Ecuațiile (2) se numesc ecuațiile parametrice ale traiectoriei.

Prin eliminarea parametrului timp, t, din ecuațiile parametrice ale traiectoriei (2) se obține ecuația carteziană a traiectoriei.

Observații

(i) Cunoașterea traiectoriei nu implică cunoașterea legii de mișcare, i.e. se pot determina pozițiile punctului $\mathbf{P}$, dar nu și momentele corespunzătoare acestora.

(ii) Mai mult, presupunem că funcțiile $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, sunt funcții de clasă $\mathcal{C}^1 \Longrightarrow$ Traiectoria este o curbă rectificabilă.

(iii) Dacă traiectoria este o curbă rectificabilă, atunci poziția punctului $\mathbf{P}$ poate fi reperată și prin lungimea arcului de cubă, s, măsurat de la un punct de pe traiectorie, considerat drept origine.

Presupunem, în continuare, că funcțiile $x_i(\cdot) : I \longrightarrow \mathcal{E}$, $i = 1, 2, 3$, definite prin (2), sunt de clasă $\mathcal{C}^n$, unde $n \geq 2$.

Definiție

Derivata de ordinul întâi în raport cu timpul a funcției (1)

$$\vec{\mathbf{v}}(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) \tag{3a}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t_0) = \dot{x}_1(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \dot{x}_2(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \dot{x}_3(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \tag{3b}$$

se numește viteza punctului material $\mathbf{P}$ la momentul t_0 prin mișcarea $\vec{\mathbf{x}}(t)$.

Observație

Viteza este un vector tangent la traiectorie în orice moment, are sensul dat de sensul mișcării și mărimea egală cu $\dot{s}$.

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}(s(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}(s)}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{s}(t)\,\vec{\tau}(s)$$

Definiție

Derivata de ordinul doi în raport cu timpul a funcției (1)

$$\vec{\mathbf{a}}(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mathbf{x}}(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=t_0} = \ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) = \dot{\vec{\mathbf{v}}}(t_0) \tag{4a}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t_0) = \ddot{x}_1(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \ddot{x}_2(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \ddot{x}_3(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_3 = \dot{v}_1(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \dot{v}_2(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \dot{v}_3(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \tag{4b}$$

se numește accelerația lui **P** la momentul t_0 prin mișcarea $\vec{\mathbf{x}}(t)$.

Definiție

Locul geometric al extremităților vectorului viteză în punctul material **P** translatat în originea **O** a reperului $\mathcal{R}_A$, când timpul t variază, se numește hodograful mișcarii.

Observații

(i) Accelerația este tangentă la hodograful mișcării.

(ii) Accelerația se găsește în planul osculator, i.e. planul determinat de vectorii tangentă, $\vec{\tau}$, și normală principală, $\vec{\nu}$, la traiectorie.

Aplicația 1: Viteza și accelerația în triedrul lui Frenet

Viteza

S-a arătat următoarea identitate:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}(s(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}(s)}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{s}(t)\,\vec{\tau}(s) \tag{5}$$

Vectorii $\{\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)\}$ reprezintă un reper ortonormat:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = v_\tau\,\vec{\tau}(s) + v_\nu\,\vec{\nu}(s) + v_\beta\,\vec{\beta}(s) \tag{6}$$

Din relațiile (5) și (6), obținem componentele vectorului viteză în triedrul lui Frenet:

$$\boxed{v_\tau = \dot{s}(t) = \|\vec{\mathbf{v}}(t)\|} \tag{7a}$$

$$\boxed{v_\nu = v_\beta = 0} \tag{7b}$$

Accelerația

Derivăm, în raport cu timpul t, expresia vitezei (5):

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}}(t) &= \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{s}(t)\,\vec{\tau}(s)\right] = \ddot{s}(t)\,\vec{\tau}(s) + \dot{s}(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}t} \\ &= \ddot{s}(t)\,\vec{\tau}(s) + \dot{s}(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \ddot{s}(t)\,\vec{\tau}(s) + \dot{s}(t)^2\,\frac{1}{R(s)}\,\vec{\nu}(s)\end{aligned} \tag{8}$$

Vectorii $\{\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)\}$ reprezintă un reper ortonormat:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = a_\tau\,\vec{\tau}(s) + a_\nu\,\vec{\nu}(s) + a_\beta\,\vec{\beta}(s) \tag{9}$$

Din relațiile (8) și (9), obținem componentele vectorului accelerație în triedrul lui Frenet:

$$\boxed{a_\tau = \ddot{s}(t)} \tag{10a}$$

$$\boxed{a_\nu = \frac{\dot{s}(t)^2}{R(s)}} \tag{10b}$$

$$\boxed{a_\beta = 0} \tag{10c}$$

Aplicația 2: Viteza și accelerația în mișcarea plană (coordonate polare)

In reperul absolut $\mathcal{R}_A$, avem:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = x_1(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \tag{11}$$

unde

$$\begin{cases} x_1(t) = \rho(t)\,\cos\theta(t) \\ x_2(t) = \rho(t)\,\sin\theta(t) \end{cases}, \quad \rho(t) = \|\vec{\mathbf{x}}(t)\| \in [0, \infty), \quad \theta(t) \in [0, 2\pi) \tag{12}$$

Transformarea inversă celei din relația (12) este dată de:

$$\begin{cases} \rho(t) = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} \\ \theta(t) = \tan^{-1}\left[x_2(t)/x_1(t)\right] \end{cases} \tag{13}$$

Versorii reperului relativ $\mathcal{R}$ sunt dați de:

$$\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) = \frac{\vec{\mathbf{x}}(t)}{\|\vec{\mathbf{x}}(t)\|} = \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \tag{14a}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) = \vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_\rho(t) = -\sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \tag{14b}$$

Din ecuațiile (11), (12) și (14), rezultă:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \rho(t)\left[\cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2\right] = \rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) \tag{15}$$

Derivăm expresiile (14a) și (14b) în raport cu timpul t și obținem:

$$\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\rho(t) = \dot\theta(t)\left[-\sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2\right] = \dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) \tag{16a}$$

$$\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\theta(t) = \dot\theta(t)\left[-\cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 - \sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2\right] = -\dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) \tag{16b}$$

Viteza

Derivăm expresia (15) în raport cu timpul t:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}(t) &= \frac{d\vec{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t)\right] = \dot\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \rho(t)\,\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\rho(t)\\ &\overset{(16a)}{=} \dot\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \rho(t)\,\dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t)\end{aligned} \tag{17}$$

Vectorii $\{\vec{\mathbf{e}}_\rho(t), \vec{\mathbf{e}}_\theta(t), \vec{\mathbf{e}}_3\}$ reprezintă un reper ortonormat:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = v_\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + v_\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) + v_3(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \tag{18}$$

Din ecuațiile (17) și (18) rezultă:

$$\boxed{v_\rho(t) = \dot\rho(t)} \tag{19a}$$

$$\boxed{v_\theta(t) = \rho(t)\,\dot\theta(t)} \tag{19b}$$

$$\boxed{v_3(t) \equiv 0} \tag{19c}$$

Accelerația

Derivăm expresia vitezei (17) în raport cu timpul t

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}}(t) &= \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \rho(t)\,\dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t)\right]\\ &= \ddot\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \dot\rho(t)\underbrace{\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\rho(t)}_{=\dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t)}\\ &+ \left[\dot\rho(t)\,\dot\theta(t) + \rho(t)\,\ddot\theta(t)\right]\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) + \rho(t)\,\dot\theta(t)\underbrace{\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\theta(t)}_{=-\dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t)}\\ &= \left[\ddot\rho(t) - \rho(t)\,\dot\theta(t)^2\right]\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \left[2\,\dot\rho\,\dot\theta(t) + \rho(t)\,\ddot\theta(t)\right]\vec{\mathbf{e}}_\theta(t)\end{aligned} \tag{20}$$

Vectorii $\{\vec{\mathbf{e}}_\rho(t), \vec{\mathbf{e}}_\theta(t), \vec{\mathbf{e}}_3\}$ reprezintă un reper ortonormat:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = a_\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + a_\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) + a_3(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \tag{21}$$

Din ecuațiile (20) și (21) rezultă:

$$\boxed{a_\rho(t) = \ddot\rho(t) - \rho(t)\,\dot\theta(t)^2} \tag{22a}$$

$$\boxed{a_\theta(t) = 2\,\dot\rho\,\dot\theta(t) + \rho(t)\,\ddot\theta(t)} \tag{22b}$$

$$\boxed{a_3(t) \equiv 0} \tag{22c}$$

Caz particular: Mișcarea circulară

Mișcarea plană în coordonate polare cu $\rho(t) = \rho_0$ (ceea ce implică $\dot\rho(t) = \ddot\rho(t) = 0$) descrie o mișcare circulară. In acest caz, avem:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}(t) = \rho_0\,\dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t)} \tag{23}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}}(t) = \rho_0\left[-\dot\theta(t)^2\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \ddot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t)\right]} \tag{24}$$

Viteza unghiulară se definește prin $\omega(t) := \dot\theta(t)$.

Fie $\vec{\boldsymbol{\omega}}(t) = \omega(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3$ vectorul rotației instantanee in jurul axei $\mathbf{Ox}_3$. Atunci:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}(t) = \vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \vec{\mathbf{x}}(t)} \tag{25}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \vec{\mathbf{x}}(t) &= \omega(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \times \left[x_1(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2\right]\\ &= \dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \times \rho_0\left[\cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2\right]\\ &= \rho_0\,\dot\theta(t)\left[\cos\theta(t)\,(\vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_1) + \sin\theta(t)\,(\vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_2)\right]\\ &= \rho_0\,\dot\theta(t)\left[-\sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2\right] = \rho_0\,\dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) = \vec{\mathbf{v}}(t) \quad \square\end{aligned}$$

Aplicația 3: Viteza în coordonate sferice

In reperul absolut $\mathcal{R}_A$, avem:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = x_1(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + x_3(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \tag{26}$$

unde

$$\begin{cases} x_1(t) = \rho(t)\,\cos\theta(t)\,\sin\varphi(t) & \rho(t)\in[0,\infty) \\ x_2(t) = \rho(t)\,\sin\theta(t)\,\sin\varphi(t) & \theta(t)\in[0,2\pi) \\ x_3(t) = \rho(t)\,\cos\varphi(t) & \varphi(t)\in[0,\pi] \end{cases} \tag{27}$$

Versorii reperului relativ $\mathcal{R}$ sunt dați de:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{e}}_\rho(t) &= \frac{\vec{\mathbf{x}}(t)}{\|\vec{\mathbf{x}}(t)\|} \\ &= \cos\theta(t)\,\sin\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta(t)\,\sin\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \cos\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \tag{28a}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) = \frac{1}{\sin\varphi(t)}\,\vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_\rho(t) = -\sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \tag{28b}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{e}}_\varphi(t) &= \vec{\mathbf{e}}_\rho(t) \times \vec{\mathbf{e}}_\theta(t) \\ &= -\cos\theta(t)\,\cos\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 - \sin\theta(t)\,\cos\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \sin\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \tag{28c}$$

Din relațiile (28a)–(28c), obținem:

$$\cos\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \sin\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi(t) = \vec{\mathbf{e}}_3 \tag{29a}$$

$$\sin\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) - \cos\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi(t) = \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \tag{29b}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) = -\sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \tag{29c}$$

Din ecuațiile (26), (27) și (29), rezultă:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}(t) &= \rho(t)\left\{\left[\cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2\right]\,\sin\varphi(t) + \cos\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3\right\} \\ &= \rho(t)\left\{\left[\sin\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) - \cos\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi(t)\right]\,\sin\varphi(t)\right. \\ &\quad \left. + \left[\cos\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \sin\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi(t)\right]\,\cos\varphi(t)\right\} = \rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) \end{aligned} \tag{30}$$

Derivând expresiile (28a)–(28c) în raport cu timpul t și folosind relațiile (29a)–(29c), obținem:

$$\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\rho(t) = -\dot\theta(t)\,\sin\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) - \dot\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi(t) \tag{31a}$$

$$\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\theta(t) = -\dot\theta(t)\left[\sin\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) - \cos\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi(t)\right] \tag{31b}$$

$$\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\varphi(t) = -\dot\theta(t)\,\cos\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) + \dot\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) \tag{31c}$$

Viteza

Derivăm expresia (30) în raport cu timpul t și folosim relația (31a):

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(t) &= \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t)\right] = \dot\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \rho(t)\,\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\rho(t) \\ &= \dot\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \rho(t)\left[-\dot\theta(t)\,\sin\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) - \dot\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi(t)\right] \\ &= \dot\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) - \rho(t)\,\dot\theta(t)\,\sin\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) - \rho(t)\,\dot\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi(t) \end{aligned} \tag{32}$$

Vectorii $\{\vec{\mathbf{e}}_\rho(t), \vec{\mathbf{e}}_\theta(t), \vec{\mathbf{e}}_\varphi(t)\}$ reprezintă un reper ortonormat:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = v_\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + v_\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) + v_\varphi(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi(t) \tag{33}$$

Din ecuațiile (32) și (33), rezultă:

$$\boxed{v_\rho(t) = \dot\rho(t)} \tag{34a}$$

$$\boxed{v_\theta(t) = -\rho(t)\,\dot\theta(t)\,\sin\varphi(t)} \tag{34b}$$

$$\boxed{v_\varphi(t) = -\rho(t)\,\dot\varphi(t)} \tag{34c}$$

Mișcarea absolută. Mișcarea relativă

Propoziție

Fie $\mathcal{R}_A\left(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}\right)$ un referențial/reper absolut în $\mathcal{E}$.
Fie $\mathcal{R}\left(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\le\alpha\le 3}\right)$ un referențial/reper relativ în $\mathcal{E}$. Atunci:

$$\exists\ \mathbf{Q}(t) \in \mathrm{Ort}: \quad \vec{\varepsilon}_\alpha(t) = \mathbf{Q}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\alpha, \quad 1\le\alpha\le 3. \tag{35}$$

Demonstrație: Cum $\vec{\varepsilon}_\alpha(t) \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}}$, $1\le\alpha\le 3$, rezultă

$$\forall\ \alpha\in\{1,2,3\},\ \exists\ \{q_{\alpha i}(t)\}_{1\le i\le 3} \subset \mathbb{R}: \quad \vec{\varepsilon}_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{3} q_{\alpha i}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_i \tag{36}$$

Fie $\mathbf{Q}(t) = \left[q_{\alpha i}(t)\right]_{1\le\alpha,i\le 3}$. Din (36), obținem

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta} &= \vec{\varepsilon}_\alpha(t)\cdot\vec{\varepsilon}_\beta(t) = \left(\sum_{i=1}^{3} q_{\alpha i}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} q_{\beta j}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} q_{\alpha i}(t)\,q_{\beta j}(t)\,\underbrace{(\vec{\mathbf{e}}_i\cdot\vec{\mathbf{e}}_j)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{3} q_{\alpha i}(t)\,q_{\beta i}(t) = \left[\mathbf{Q}(t)\,\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(t)\right]_{\alpha\beta}. \ \square \end{aligned}$$

Definiție

Mișcarea punctului $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ în raport cu reperul absolut $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq 3}\big)$ se numește mișcare absolută.

Mișcarea punctului $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ în raport cu reperul relativ $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\leq \alpha\leq 3}\big)$ se numește mișcare relativă.

Notații:

$\overrightarrow{\mathbf{OP}} \equiv \vec{\mathbf{r}}(t) \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}}$

$\overrightarrow{\mathbf{OO}'} \equiv \vec{\mathbf{r}}_0(t) \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}}$

$\overrightarrow{\mathbf{O}'\mathbf{P}} \equiv \vec{\rho}(t) \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}'}$

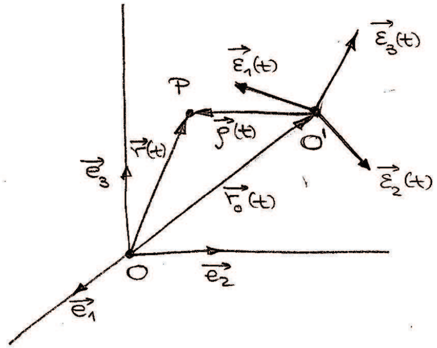

Figure : Reperele $\mathcal{R}_A$ și $\mathcal{R}$.