Mîndrilă Claudiu, grupa 301

Tema 2-Coduri

1. (a) Fie $c \in C$. Ponderea lui înseamnă numărul de 1-uri din el. Dar $c \in C = C^{\perp}$ deci $< c, c >= 0$, de unde numărul de 1 este congruent cu 0, modulo 2. Deci ponderea e pară.
(b) Avem că n este par pentru că avem un cod autpadjunct. Atunci $< (11\ldots1), (11\ldots1) >= 0$, deci $(11\ldots1) \in C^{\perp} = C$.
(c) Fie c un element din cod, A numărul de 1-uri, B numărul de 2-uri. Ca mai sus, $< c, c >= 0$ de unde $A \cdot 1^2 + B \cdot 2^2 = 0$, i. e. $A + B = 0$, dar $A + B$ este chiar ponderea.
(d)

2. *Ou sont les devoirs d'antan... ?*
(a) Avem de-a face cu un cod tip $[4,\ 2,\ 1]_2$.
(b) Matrice generatoare poate fi $G = \begin{pmatrix} 0100 \\ 0001 \end{pmatrix}$. Să determinăm codul dual: dacă $(abcd) \in C^{\perp}$, atunci $b = 0 = d$ (este perpendicular pe cuvintele din matricea generatoare). Deci $C^{\perp}$ va fi generat de următoarele cuvinte pe care le şi punem în matricea de control: $H = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0010 \end{pmatrix}$.
(c) Am determinat dualul şi el are parametrii $[4, 2, 1]_2$.
(d)
(e)

3. Nu există astfel de coduri. Un astfel de cod e un subsupaţiu $C \subset \mathbb{F}_2^3$ unde cuvintele au toate componentele $\neq 0$ şi dimensiunea este $k \leq 3$. El are cel mult 2^3 cuvinte (astea sunt toate cuvintele cu toate componente nenule) şi, 3^k cuvinte. Deci $k = 1$. Are cuvântul nul şi alte două. Dar acestea 2 coincid în minim o poziţie (deci diferenţa lor are un 0, deci nu e în cod) sau măcar pe o poziţie diferă, dar atunci suma lor are pe poziţia aceea 0, fals.

4. A doua cerinţă o rezolvă şi pe prima. O rezolvăm deci pe a doua: Fie un cod de tip $(n, M, n-1)_2$. Să zicem că $M \geq 3$. Fie $(a_1 a_2 \ldots a_n) \in C$. Un al doilea cuvânt diferă de precedentul în minim $n-1$ poziţii, să zicem în primele $n-1$: $(1-a_1,\ 1-a_2, \ldots 1-a_{n-1},\ b)$. Un al treilea cuvânt (există, sunt minim 3) diferă de primele în măcar $n-1$ poziţii. Diferind de al doilea ar putea să fie
   - diferit în primele $n-1$ poziţii, deci $(a_1, \ldots\ a_{n-1}, 1-b)$. Dar atunci distanţa faţă de primul este $1 \geq n-1$, fals.
   - În poziţiile $\neq 1$ (pentru simplitatea redactării), deci $(1-a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, 1-b$. Dar , din nou, diferă de primul în 2 poziţii, i.e. $2 \geq n-1$, fals.

   Deci $M \geq 2$. Un exemplu pentru $M = 2$ este $C = \{00\ldots0,\ 11\ldots10\} \subset \mathbb{F}_2^n$.