# Mecanică Generală

## III. Cinematica punctului material - 4


Liviu Marin[1,†]

[1]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, România

[†]E-mail: marin.liviu@gmail.com


12 noiembrie 2013





### Propoziţie

Fie $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}\big)$ un referenţial/reper absolut în $\mathcal{E}$.
Fie $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\le\alpha\le 3}\big)$ un referenţial/reper relativ în $\mathcal{E}$. Atunci:

$$\exists\ \mathbf{Q}(t) \in \mathrm{Ort}: \quad \vec{\varepsilon}_\alpha(t) = \mathbf{Q}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\alpha, \quad 1 \le \alpha \le 3. \tag{1}$$

Demonstraţie: Cum $\vec{\varepsilon}_\alpha(t) \in \mathcal{V}_\mathbf{O}$, $1 \le \alpha \le 3$, rezultă

$$\forall\ \alpha \in \{1,2,3\},\ \exists\ \{q_{\alpha i}(t)\}_{1\le i\le 3} \subset \mathbb{R}: \quad \vec{\varepsilon}_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{3} q_{\alpha i}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_i \tag{2}$$

Fie $\mathbf{Q}(t) = \big[q_{\alpha i}(t)\big]_{1\le\alpha,i\le 3}$. Din (2), obţinem

$$\delta_{\alpha\beta} = \vec{\varepsilon}_\alpha(t)\cdot\vec{\varepsilon}_\beta(t) = \Big(\sum_{i=1}^{3} q_{\alpha i}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_i\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3} q_{\beta j}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_j\Big)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3} q_{\alpha i}(t)\,q_{\beta j}(t)\,\underbrace{(\vec{\mathbf{e}}_i\cdot\vec{\mathbf{e}}_j)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{3} q_{\alpha i}(t)\,q_{\beta i}(t) = \big[\mathbf{Q}(t)\,\mathbf{Q}^\mathsf{T}(t)\big]_{\alpha\beta}. \ \square$$



### Definiţie

Mişcarea punctului $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ în raport cu reperul absolut $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}\big)$ se numeşte mişcare absolută.

Mişcarea punctului $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ în raport cu reperul relativ $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\le\alpha\le 3}\big)$ se numeşte mişcare relativă.

Notaţii:

$\overrightarrow{\mathbf{OP}} \equiv \vec{\mathbf{r}}(t) \in \mathcal{V}_\mathbf{O}$

$\overrightarrow{\mathbf{OO'}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_0(t) \in \mathcal{V}_\mathbf{O}$

$\overrightarrow{\mathbf{O'P}} \equiv \vec{\rho}(t) \in \mathcal{V}_{\mathbf{O}'}$

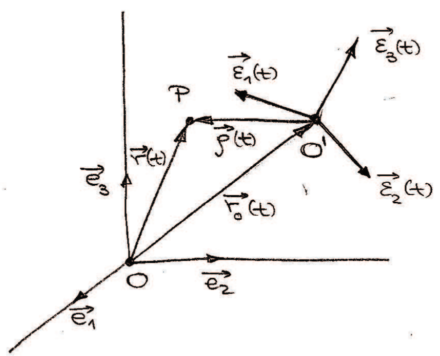

Figure : Reperele $\mathcal{R}_A$ şi $\mathcal{R}$.



### Teoremă (formula lui Poisson)

Dacă reperul relativ $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\le\alpha\le 3}\big)$ este legat de reperul absolut $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}\big)$ prin relaţia (1), atunci

$$\begin{aligned} &\exists!\ \mathbf{W}(t) \in \mathrm{Asim}(\mathcal{V},\mathcal{V}), \quad \text{respectiv } \exists!\ \vec{\omega}(t) \in \mathcal{V} \quad \text{a.i.} \\ &\dot{\vec{\varepsilon}}_\alpha(t) = \mathbf{W}(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{\varepsilon}_\alpha(t), \quad 1 \le \alpha \le 3. \end{aligned} \tag{3}$$

Demonstraţie:

Din relaţia (1), rezultă

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\varepsilon}}_\alpha(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathbf{Q}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\alpha\big] = \dot{\mathbf{Q}}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\alpha \overset{(1)}{=} \dot{\mathbf{Q}}(t)\big[\mathbf{Q}^\mathsf{T}(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\big] \\ &= \big[\dot{\mathbf{Q}}(t)\,\mathbf{Q}^\mathsf{T}(t)\big]\vec{\varepsilon}_\alpha(t) \equiv \mathbf{W}(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Cum $\mathbf{I} = \mathbf{Q}(t)\,\mathbf{Q}^\mathsf{T}(t)$, obţinem

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{I}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\mathbf{Q}(t)\,\mathbf{Q}^\mathsf{T}(t)\big] = \dot{\mathbf{Q}}(t)\,\mathbf{Q}^\mathsf{T}(t) + \mathbf{Q}(t)\,\dot{\mathbf{Q}}^\mathsf{T}(t) \\ &= \dot{\mathbf{Q}}(t)\,\mathbf{Q}^\mathsf{T}(t) + \big[\dot{\mathbf{Q}}(t)\,\mathbf{Q}^\mathsf{T}(t)\big]^\mathsf{T} \Longrightarrow \end{aligned} \tag{5}$$

$$\mathbf{W}(t) \equiv \dot{\mathbf{Q}}(t)\,\mathbf{Q}^\mathsf{T}(t) \in \mathrm{Asim}(\mathcal{V},\mathcal{V}). \tag{6}$$

Arătăm următoarea echivalență:

$$\boxed{\mathbf{W}(t) \in \mathrm{Asim}(\mathcal{V},\mathcal{V}) \iff \exists!\ \vec{\omega}(t) \in \mathcal{V} : \mathbf{W}(t)\,\vec{\mathbf{x}} = \vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{x}}, \forall\, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}} \tag{7}$$

(i) Unicitatea reprezentării (7)

Presupunem

$$\exists\ \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \in \mathcal{V} : \quad \mathbf{W}(t)\,\vec{\mathbf{x}} = \vec{\omega}_\alpha \times \vec{\mathbf{x}}, \quad \forall\, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{8}$$

Fie $\vec{\omega} := \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$. Atunci

$$\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{x}} = (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \times \vec{\mathbf{x}} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\mathbf{x}} - \vec{\omega}_2 \times \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V} \tag{9}$$

Rezultă $\vec{\omega} = \vec{\mathbf{0}}$, i.e. $\boxed{\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2}$.



(ii) Existența reprezentării (7)

Proiectăm membrul drept al relației (7) pe baza ortonormată $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}$:

$$\vec{\mathbf{e}}_1: \quad W_{12}(t)\,x_2 + W_{13}(t)\,x_3 = \omega_2(t)\,x_3 - \omega_3(t)\,x_2, \quad \forall\, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V} \tag{10a}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_2: \quad W_{21}(t)\,x_1 + W_{23}(t)\,x_3 = \omega_3(t)\,x_1 - \omega_1(t)\,x_3, \quad \forall\, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V} \tag{10b}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_3: \quad W_{31}(t)\,x_1 + W_{32}(t)\,x_2 = \omega_1(t)\,x_2 - \omega_2(t)\,x_1, \quad \forall\, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V} \tag{10c}$$

Fie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_1$ : (10b) $\Longrightarrow \omega_3(t) = W_{21}(t)$ & (10c) $\Longrightarrow \omega_2(t) = -W_{31}(t)$

Fie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_2$ : (10c) $\Longrightarrow \omega_1(t) = W_{32}(t)$ & (10a) $\Longrightarrow \omega_3(t) = -W_{12}(t)$

Fie $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{e}}_3$ : (10a) $\Longrightarrow \omega_2(t) = W_{13}(t)$ & (10b) $\Longrightarrow \omega_1(t) = -W_{23}(t)$

În cele din urmă, obținem:

$$\boxed{\vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} -W_{23}(t) & -W_{31}(t) & -W_{12}(t) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}} \quad \square \tag{11}$$



**Observații:**

(i) $\mathbf{W}(t) \in \mathrm{Asim}(\mathcal{V},\mathcal{V})$ se numește spinul mișcării și, în baza $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}$, are următoarea reprezentare:

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) $\vec{\omega}(t) \in \mathcal{V}$ se numește vectorul rotației instantanee.

(iii) Rotația în jurul unei axe fixe:
Presupunem că reperul relativ $\mathcal{R}(\mathbf{O}, \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\le\alpha\le 3})$ este obținut din reperul absolut $\mathcal{R}_A(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3})$ printr-o rotație în jurul axei $\vec{\mathbf{e}}_3$ cu unghiul $\theta(t)$. Atunci

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}(t) & 0 \\ -\dot{\theta}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega}(t) = -\dot{\theta}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta}(t) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}.$$



(iii) Demonstrație:

Reperul relativ $\mathcal{R}(\mathbf{O}, \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\le\alpha\le 3})$ este obținut din reperul absolut $\mathcal{R}_A(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3})$ printr-o rotație în jurul axei $\vec{\mathbf{e}}_3$ cu unghiul $\theta(t)$:

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1(t) = \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \\ \vec{\varepsilon}_2(t) = -\sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \\ \vec{\varepsilon}_3(t) = \vec{\mathbf{e}}_3 \end{cases}$$

i.e.

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & \sin\theta(t) & 0 \\ -\sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(t) = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{Q}}(t) = \dot{\theta}(t) \begin{bmatrix} -\sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ -\cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculăm $\mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\,\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(t)$ și apoi determinăm $\vec{\omega}(t)$ – Exercițiu! $\square$

## Legătura funcțională între $\mathbf{W}$ și $\vec{\omega}$

- Considerăm problema de vectori și valori proprii pentru $\mathbf{W} \in \mathrm{Asim}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}\,\vec{\mathbf{x}} = \lambda\,\vec{\mathbf{x}} \iff (\mathbf{W} - \lambda\,\mathbf{I})\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}} \iff \det\left(\mathbf{W} - \lambda\,\mathbf{I}\right) = 0 \\ \iff -\lambda\left[\lambda^2 + \left(W_{12}^2 + W_{23}^2 + W_{31}^2\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

- Singura valoare proprie reală a ecuației caracteristice (12) este

$$\boxed{\lambda = 0} \tag{13}$$

Fie $\vec{\omega} \in \mathcal{V}$ vectorul propriu corespunzător valorii proprii reale (13), i.e.

$$\mathbf{W}\,\vec{\omega} = 0 \tag{14}$$

- Exercițiu: Soluția ecuației (14) este vectorul rotației instantanee, $\vec{\omega}$, definit prin relația (7) i.e.

$$\boxed{\mathbf{W}(t)\,\vec{\mathbf{x}} = \vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{x}}, \quad \forall\,\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}}$$



### Propoziție (regula de derivare)

Presupunem că reperul relativ $\mathcal{R}\left(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\le\alpha\le3}\right)$ este legat de reperul absolut $\mathcal{R}_A\left(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le3}\right)$ prin relația (1).

Fie $\vec{\mathbf{u}}(t)$ o mărime mecanică oarecare. Atunci are loc formula:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{u}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\vec{\mathbf{u}}(t)}{\delta t} + \mathbf{W}(t)\,\vec{\mathbf{u}}(t) = \frac{\delta\vec{\mathbf{u}}(t)}{\delta t} + \vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{u}}(t)} \tag{15}$$

(i) $\dot{\vec{\mathbf{u}}}(t) := \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{u}}(t)}{\mathrm{d}t}$ este derivata absolută a mărimii $\vec{\mathbf{u}}(t)$; se calculează și se exprimă în $\mathcal{R}_A$;

(ii) $\dfrac{\delta\vec{\mathbf{u}}(t)}{\delta t}$ este derivata relativă a mărimii $\vec{\mathbf{u}}(t)$; se calculează și se exprimă în $\mathcal{R}$;

(iii) $\mathbf{W}(t)\,\vec{\mathbf{u}}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{u}}(t)$ descrie modificarea mărimii $\vec{\mathbf{u}}(t)$ dacă punctul asociat acesteia ar fi solidar legat de $\mathcal{R}$.

(iv) $\mathbf{W}(t)$ este spinul mișcării dat de (6);

(v) $\vec{\omega}(t)$ este vectorul rotației instantanee dat de (11).



Demonstrație:

- $\mathcal{R}_A: \quad \exists\,\left\{u_i(t)\right\}_{1\le i\le3} \subset \mathbb{R}: \quad \vec{\mathbf{u}}(t) = \sum_{i=1}^{3} u_i(t)\,\vec{\mathbf{e}}_i$

Derivăm relația de mai sus în raport cu $t$ și obținem:

$$\dot{\vec{\mathbf{u}}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{u}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{3} u_i(t)\,\vec{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^{3} \dot{u}_i(t)\,\vec{\mathbf{e}}_i$$

- $\mathcal{R}: \quad \exists\,\left\{\mu_\alpha(t)\right\}_{1\le\alpha\le3} \subset \mathbb{R}: \quad \vec{\mathbf{u}}(t) = \sum_{\alpha=1}^{3} \mu_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t)$

Derivăm relația de mai sus în raport cu $t$ și obținem:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\mathbf{u}}}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\alpha=1}^{3} \mu_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) = \sum_{\alpha=1}^{3}\left[\dot{\mu}_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) + \mu_\alpha(t)\,\dot{\vec{\varepsilon}}_\alpha(t)\right] \\ &\overset{(3)}{=} \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{\mu}_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) + \sum_{\alpha=1}^{3} \mu_\alpha(t)\left(\vec{\omega}(t) \times \vec{\varepsilon}_\alpha(t)\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{3} \dot{\mu}_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) + \vec{\omega}(t) \times \sum_{\alpha=1}^{3} \mu_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) = \frac{\delta\vec{\mathbf{u}}(t)}{\delta t} + \vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{u}}(t) \quad \square \end{aligned}$$



### Propoziție (compunerea vitezelor)

Presupunem că reperul relativ $\mathcal{R}\left(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\le\alpha\le3}\right)$ este legat de reperul absolut $\mathcal{R}_A\left(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le3}\right)$ prin relația (1).

Fie $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{E}$ un punct mobil. Atunci are loc formula de compunere a vitezelor:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_a(t) = \vec{\mathbf{v}}_r(t) + \vec{\mathbf{v}}_t(t)} \tag{16}$$

unde:

(i) $\vec{\mathbf{v}}_a(t) := \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}(t)$ este viteza absolută;

(ii) $\vec{\mathbf{v}}_r(t) := \dfrac{\delta\vec{\rho}(t)}{\delta t}$ este viteza relativă;

(iii) $\vec{\mathbf{v}}_t(t) := \dot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{\rho}(t)$ este viteza de transport;

(iv) $\vec{\omega}(t)$ este vectorul rotației instantanee dat de (11).

Demonstrație:

In reperul absolut $\mathcal{R}_A$, are loc relația:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{r}}_0(t) + \vec{\rho}(t)$$

Derivăm relația de mai sus în raport cu $t$ și obținem:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}_a(t) &= \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\mathbf{r}}_0(t) + \vec{\rho}(t)\right] = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}_0(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\rho}(t)}{\mathrm{d}t} \\
&\overset{(15)}{=} \dot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \left[\frac{\delta\vec{\rho}(t)}{\delta t} + \vec{\omega}(t) \times \vec{\rho}(t)\right] \\
&= \underbrace{\frac{\delta\vec{\rho}(t)}{\delta t}}_{=:\vec{\mathbf{v}}_r(t)} + \underbrace{\left[\dot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{\rho}(t)\right]}_{=:\vec{\mathbf{v}}_t(t)} \\
&= \vec{\mathbf{v}}_r(t) + \vec{\mathbf{v}}_t(t) \quad \square
\end{aligned}$$



**Propoziție (compunerea accelerațiilor)**

Presupunem că reperul relativ $\mathcal{R}\left(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\leq\alpha\leq 3}\right)$ este legat de reperul absolut $\mathcal{R}_A\left(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq 3}\right)$ prin relația (1).

Fie $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{E}$ un punct mobil. Atunci are loc formula de compunere a accelerațiilor:

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}}_a(t) = \vec{\mathbf{a}}_r(t) + \vec{\mathbf{a}}_t(t) + \vec{\mathbf{a}}_c(t)} \tag{17}$$

(i) $\vec{\mathbf{a}}_a(t) := \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_a(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{\mathbf{r}}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}(t)$ este accelerația absolută;

(ii) $\vec{\mathbf{a}}_r(t) := \dfrac{\delta\vec{\mathbf{v}}_r(t)}{\delta t} = \dfrac{\delta^2\vec{\rho}(t)}{\delta t^2}$ este accelerația relativă;

(iii) $\vec{\mathbf{a}}_t(t) := \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{\rho}(t)) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{\rho}(t)$ este accelerația de transport;

(iv) $\vec{\mathbf{a}}_c(t) := 2\vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{v}}_r(t)$ este accelerația lui Coriolis;

(v) $\vec{\omega}(t)$ este vectorul rotației instantanee dat de (11).



Demonstrație:

$$\vec{\mathbf{a}}_a(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_a(t)}{\mathrm{d}t} \overset{(16)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\mathbf{v}}_r(t) + \vec{\mathbf{v}}_t(t)\right] = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_r(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_t(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_r(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\alpha=1}^{3}\dot{\rho}_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) = \sum_{\alpha=1}^{3}\left[\ddot{\rho}_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) + \dot{\rho}_\alpha(t)\,\dot{\vec{\varepsilon}}_\alpha(t)\right] \\
&= \sum_{\alpha=1}^{3}\ddot{\rho}_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) + \sum_{\alpha=1}^{3}\dot{\rho}_\alpha(t)\left(\vec{\omega}(t) \times \vec{\varepsilon}_\alpha(t)\right) \\
&= \frac{\delta^2\vec{\rho}(t)}{\delta t^2} + \vec{\omega}(t) \times \sum_{\alpha=1}^{3}\dot{\rho}_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) \\
&= \vec{\mathbf{a}}_r(t) + \vec{\omega}(t) \times \frac{\delta\vec{\rho}(t)}{\delta t} = \vec{\mathbf{a}}_r(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{v}}_r(t)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_t(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{\rho}(t)\right] \\
&= \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{\rho}(t) + \vec{\omega}(t) \times \frac{\mathrm{d}\vec{\rho}(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{\rho}(t) + \vec{\omega}(t) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\alpha=1}^{3}\rho_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) \\
&= \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{\rho}(t) + \vec{\omega}(t) \times \sum_{\alpha=1}^{3}\left[\dot{\rho}_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) + \rho_\alpha(t)\,\dot{\vec{\varepsilon}}_\alpha(t)\right] \\
&= \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{\rho}(t) + \vec{\omega}(t) \times \sum_{\alpha=1}^{3}\dot{\rho}_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t) \\
&\qquad + \vec{\omega}(t) \times \sum_{\alpha=1}^{3}\rho_\alpha(t)\left(\vec{\omega}(t) \times \vec{\varepsilon}_\alpha(t)\right) \\
&= \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{\rho}(t) + \vec{\omega}(t) \times \frac{\delta\vec{\rho}(t)}{\delta t} + \vec{\omega}(t) \times \left(\vec{\omega}(t) \times \sum_{\alpha=1}^{3}\rho_\alpha(t)\,\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\right) \\
&= \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{\rho}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{v}}_r(t) + \vec{\omega}(t) \times \left(\vec{\omega}(t) \times \vec{\rho}(t)\right) \quad \square
\end{aligned}$$

## Observații

(i) Următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) $\dfrac{d\vec{\mathbf{u}}(t)}{dt} = \dfrac{\delta\vec{\mathbf{u}}(t)}{\delta t}$;

(b) $\vec{\mathbf{u}}(t) = \lambda(t)\,\vec{\omega}(t)$ cu $\vec{\omega}(t) \neq \vec{\mathbf{0}}$.

(ii) Mișcări rectilinii și uniforme: Dacă $\vec{\omega}(t) = \vec{\mathbf{0}}$ și $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) = \vec{\mathbf{0}}$, atunci reperul relativ $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\leq\alpha\leq3}\big)$ are o mișcare rectilinie și uniformă în raport cu reperul absolut $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq3}\big)$.

(iii) Dacă reperul relativ $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\leq\alpha\leq3}\big)$ se mișcă rectiliniu și uniform în raport cu reperul absolut $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq3}\big)$, atunci viteza și accelerația unui punct $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$, în raport cu cele două referențiale, sunt legate prin relațiile:

$$\vec{\mathbf{v}}_a(t) = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_r(t)\,, \qquad \vec{\mathbf{a}}_a(t) = \vec{\mathbf{a}}_r(t)\,. \tag{18}$$



Demonstrație:

(i) Exercițiu!

(ii) Cum $\vec{\omega}(t) = \vec{\mathbf{0}}$, din formula lui Poisson (3) obținem:

$$\dot{\vec{\varepsilon}}_\alpha(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{\varepsilon}_\alpha(t) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq 0\,, \quad 1 \leq \alpha \leq 3 \tag{19}$$

Relația (19) implică

$$\vec{\varepsilon}_\alpha(t) = \vec{\varepsilon}_\alpha(0)\,, \quad \forall\, t \geq 0\,, \quad 1 \leq \alpha \leq 3 \tag{20}$$

i.e. $\mathcal{R}$ se mișcă rectiliniu în raport cu $\mathcal{R}_A$.

Cum $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) = \vec{\mathbf{0}}$, obținem prin integrare:

$$\vec{\mathbf{r}}_0(t) = \vec{\mathbf{v}}_0\, t + \vec{\mathbf{r}}_0\,, \quad \vec{\mathbf{r}}_0 \equiv \vec{\mathbf{r}}_0(0)\,, \quad \vec{\mathbf{v}}_0 \equiv \dot{\vec{\mathbf{r}}}_0(0) \tag{21}$$

i.e. $\mathcal{R}$ se mișcă uniform în raport cu $\mathcal{R}_A$.

(iii) Consecință directă a formulelor de compunere a vitezelor (16) și a accelerațiilor (17), împreună cu ipotezele $\vec{\omega}(t) = \vec{\mathbf{0}}$ și $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) = \vec{\mathbf{0}}$. $\square$