Mecanică Generală

III. Cinematica punctului material - 2

Liviu Marin[1,†]

[1]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, România

[†]E-mail: marin.liviu@gmail.com

29 octombrie 2013

Referenţial (Reper)

$\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^3$ – spaţiul euclidian punctual tridimensional al Mecanicii;
$\mathcal{V}$ – spaţiul vectorial al translaţiilor lui $\mathcal{E}$.

Definiţie

Se numeşte sistem de referinţă (referenţial; reper) al spaţiului euclidian $\mathcal{E}$ perechea $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}\big)$, unde:

(i) $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ este un punct fixat numit originea sistemului de referinţă;

(ii) $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3} \subset \mathcal{V}$ formează o bază ortonormată orientată a lui $\mathcal{V}$.

Orice alt referenţial se numeşte referenţial relativ.

- Sistemul de referinţă (referenţialul; reperul) se mai poate defini ca mulţimea tuturor punctelor spaţiului euclidian antrenate de o "mişcare" de corp rigid a observatorului.
- In Mecanică, se afirmă: (A_0) Există un referenţial absolut $\mathcal{R}_A$.
- Un referenţial absolut $\mathcal{R}_A$ se determină considerând poziţiile a cca 50.000 stele – acest referenţialul fiind reevaluat la 20–25 ani.

Referenţiale relative – Exemple

Triedrul lui Frenet: Fie $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}\big)$ un referenţial absolut în $\mathcal{E}$.

- Curba netedă $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$:

$$\vec{\mathbf{x}}(\cdot) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto \vec{\mathbf{x}}(t) = x_1(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + x_3(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \quad (1)$$

- Notaţii: $\dot{f}(t) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \quad \& \quad \dot{\vec{\mathbf{F}}}(t) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\mathbf{F}}(t)$
- Lungimea de arc pe curba $\mathcal{C}$:

$$t \longmapsto s(t) = \int_a^t \|\dot{\vec{\mathbf{x}}}(\lambda)\|\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^t \sqrt{\dot{\vec{\mathbf{x}}}(\lambda)\cdot\dot{\vec{\mathbf{x}}}(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda, \ t \in [a,b] \quad (2)$$

- $\dot{s}(t) = \|\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t)\|, \quad t \in [a,b]$
- $\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \ne \vec{\mathbf{0}}, \forall t \in [a,b] \Longrightarrow t \longmapsto s(t)$ inversabilă:
  $\exists\ s \longmapsto t(s), \ s \in [0, s(b)]$
- Curba $\mathcal{C}$ poate fi parametrizată în funcţie de lungimea de arc, s:

$$\vec{\mathbf{x}}(\cdot) : [0, s(b)] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \longmapsto \vec{\mathbf{x}}(s) = \vec{\mathbf{x}}\big(t(s)\big) \quad (3)$$

- Considerăm curba $\mathcal{C}$ parametrizată în funcţie de lungimea de arc, s:

$$\vec{\mathbf{x}}(\cdot) : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad s \longmapsto \vec{\mathbf{x}}(s) = \vec{\mathbf{x}}\big(t(s)\big) \quad \big(L := s(b)\big) \quad (4)$$

- În fiecare punct $\mathbf{P}(s) \in \mathcal{C}$, $\overrightarrow{\mathbf{OP}}(s) = \vec{\mathbf{x}}(s)$, $s \in [0, L]$, definim:
  (i) Versorul tangentei în $\mathbf{P}(s)$ la curba $\mathcal{C}$:

$$\vec{\tau}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}(s)}{\mathrm{d}s}; \quad (5)$$

  (ii) Versorul normalei în $\mathbf{P}(s)$ la curba $\mathcal{C}$:

$$\vec{\nu}(s) = \frac{1}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s}\right\|}\,\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s}; \quad (6)$$

  (iii) Versorul binormalei în $\mathbf{P}(s)$ la curba $\mathcal{C}$:

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{\nu}(s). \quad (7)$$

- $\mathcal{R}\big(\mathbf{P}(s), \{\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)\}\big)$ se numeşte triedrul lui Frenet la curba $\mathcal{C}$, în punctul $\mathbf{P}(s) \equiv \mathbf{P}\big(\mathbf{x}(s)\big)$, unde $\overrightarrow{\mathbf{OP}}(s) = \vec{\mathbf{x}}(s)$ şi $s \in [0, L]$

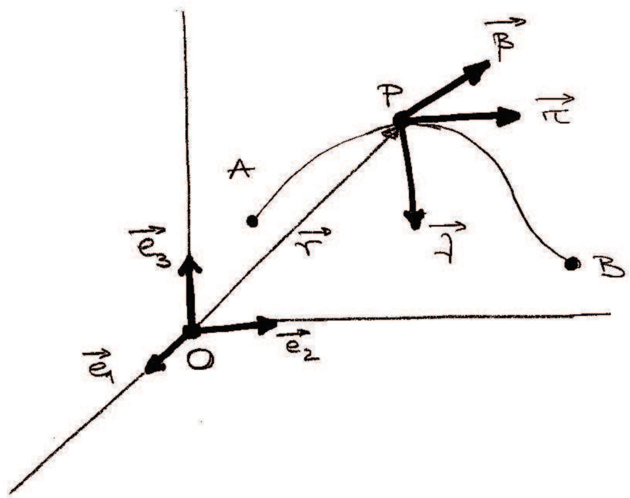

Figure : Triedrul lui Frenet.

Proprietăți (Triedrul lui Frenet)

(F_1) Vectorii $\{\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)\}$ reprezintă un reper ortonormat, i.e.

$$\vec{\tau}(s)\cdot\vec{\tau}(s) = 1; \tag{8a}$$

$$\vec{\nu}(s)\cdot\vec{\nu}(s) = 1; \quad \vec{\nu}(s)\cdot\vec{\tau}(s) = 0; \tag{8b}$$

$$\vec{\beta}(s)\cdot\vec{\beta}(s) = 1; \quad \vec{\beta}(s)\cdot\vec{\tau}(s) = 0; \quad \vec{\beta}(s)\cdot\vec{\nu}(s) = 0. \tag{8c}$$

(F_2) Formulele Frenet-Serret:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix}\vec{\tau}(s)\\ \vec{\nu}(s)\\ \vec{\beta}(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R(s)} & 0 \\ -\frac{1}{R(s)} & 0 & \frac{1}{T(s)} \\ 0 & -\frac{1}{T(s)} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\tau}(s)\\ \vec{\nu}(s)\\ \vec{\beta}(s)\end{bmatrix} \tag{9}$$

cu $R(s)-$raza de curbură și $T(s)-$raza de torsiune.

Demonstrație:

(F_1): $\{\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)\}$ – reper ortonormat

- Din definiția versorului tangentei la curba $\mathcal{C}$, $\vec{\tau}(s)$, obținem:

$$\vec{\tau}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\vec{x}(t(s)) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s} = \dot{\vec{x}}(t)\,\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{\dot{s}(t)}$$

Din definiția lungimii de arc rezultă:

$$\dot{s}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t \|\dot{\vec{x}}(\lambda)\|\,\mathrm{d}\lambda = \|\dot{\vec{x}}(t)\| \Longrightarrow \boxed{\vec{\tau}(s) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|}} \tag{10}$$

Obținem:

$$\vec{\tau}(s)\cdot\vec{\tau}(s) = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|}\cdot\frac{\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)\cdot\dot{\vec{x}}(t)}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|^2} = \frac{\|\dot{\vec{x}}(t)\|^2}{\|\dot{\vec{x}}(t)\|^2} = 1 \tag{11}$$

- Direct din definiția versorului normalei la curba $\mathcal{C}$, $\vec{\nu}(s)$, rezultă:

$$\vec{\nu}(s)\cdot\vec{\nu}(s) = \frac{1}{\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s}\right\|^2}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s}\right) = 1 \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(11): \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\vec{\tau}(s)\cdot\vec{\tau}(s)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}1 \Longrightarrow$$

$$0 = 2\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{\tau}(s) = 2\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{ds}\right\|(\vec{\nu}(s)\cdot\vec{\tau}(s)) \tag{13}$$

- Din definiția versorului binormalei la curba $\mathcal{C}$, $\vec{\beta}(s)$, rezultă:

$$\vec{\tau}(s)\cdot\vec{\beta}(s) = \vec{\tau}(s)\cdot(\vec{\tau}(s)\times\vec{\nu}(s)) = 0 \tag{14}$$

$$\vec{\nu}(s)\cdot\vec{\beta}(s) = \vec{\nu}(s)\cdot(\vec{\tau}(s)\times\vec{\nu}(s)) = 0 \tag{15}$$

Mai mult, avem:

$$\sqrt{\vec{\beta}(s)\cdot\vec{\beta}(s)} = \|\vec{\tau}(s)\times\vec{\nu}(s)\| = \|\vec{\tau}(s)\|\,\|\vec{\nu}(s)\|\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \tag{16}$$

(F_2): Formulele Frenet-Serret

- Cum $\{\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)\}$ este bază a lui $\mathcal{V} \equiv \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s} = a(s)\,\vec{\tau}(s) + b(s)\,\vec{\nu}(s) + c(s)\,\vec{\beta}(s) \tag{17}$$

Înmulțim scalar (17) cu fiecare vector al reperului lui Frenet:

$$a(s) = \frac{d\vec{\tau}(s)}{ds} \cdot \vec{\tau}(s) \overset{(13)}{=} 0 \tag{18}$$

$$\begin{aligned} c(s) &= \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{\beta}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot (\vec{\tau}(s) \times \vec{\nu}(s)) \\ &= \vec{\nu}(s) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s} \times \vec{\tau}(s)\right) = \vec{\nu}(s) \cdot \vec{\mathbf{0}} = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

$$b(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{\nu}(s) = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s}\right\| (\vec{\nu}(s) \cdot \vec{\nu}(s)) = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s}\right\| \tag{20}$$

Din relațiile (17)–(20), obținem:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R(s)}\,\vec{\nu}(s), \quad \text{unde} \quad \boxed{\frac{1}{R(s)} := \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s}\right\|} \tag{21}$$

- Cum $\{\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)\}$ este bază a lui $\mathcal{V} \equiv \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}(s)}{\mathrm{d}s} = a(s)\,\vec{\tau}(s) + b(s)\,\vec{\nu}(s) + c(s)\,\vec{\beta}(s) \tag{22}$$

Înmulțim scalar (22) cu fiecare vector al reperului lui Frenet:

$$c(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{\beta}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{\beta}(s) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\vec{\beta}(s) \cdot \vec{\beta}(s)) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}1 = 0 \tag{23}$$

$$\begin{aligned} a(s) &= \frac{\mathrm{d}\vec{\beta}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{\tau}(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\vec{\beta}(s) \cdot \vec{\tau}(s)) - \vec{\beta}(s) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s} \\ &= -\vec{\beta}(s) \cdot \left(\frac{1}{R(s)}\,\vec{\nu}(s)\right) = -\frac{1}{R(s)}\,(\vec{\beta}(s) \cdot \vec{\nu}(s)) = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

$$b(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{\beta}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{\nu}(s) \tag{25}$$

Din relațiile (22)–(25), obținem:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}(s)}{ds} = -\frac{1}{T(s)}\,\vec{\nu}(s), \quad \text{unde} \quad \boxed{\frac{1}{T(s)} := -\frac{\mathrm{d}\vec{\beta}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{\nu}(s)} \tag{26}$$

- Derivăm, în raport cu s, versorul normalei la curba $\mathcal{C}$, $\vec{\nu}(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{\nu}(s)}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\vec{\beta}(s) \times \vec{\tau}(s)) = \frac{\mathrm{d}\vec{\beta}(s)}{\mathrm{d}s} \times \vec{\tau}(s) + \vec{\beta}(s) \times \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(s)}{\mathrm{d}s} \\ &= -\frac{1}{T(s)}\,(\vec{\nu}(s) \times \vec{\tau}(s)) + \frac{1}{R(s)}\,(\vec{\beta}(s) \times \vec{\nu}(s)) \\ &= -\frac{1}{R(s)}\,\vec{\tau}(s) + \frac{1}{T(s)}\,\vec{\beta}(s)\,. \;\square \end{aligned} \tag{27}$$

Referențial relativ – coordonate sferice: Fie $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq 3}\big)$ și $\mathbf{O}^* \in \mathcal{E}$. Construiți un referențial relativ cu observatorul in $\mathbf{O}^\star$, având un reper ortonormat $\{\vec{\varepsilon}_i\}_{1\leq i\leq 3}\big)$ definit ca în figură. Determinați relațiile $\vec{\varepsilon}_i = f_i\big(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\big)$, $1 \leq i \leq 3$.

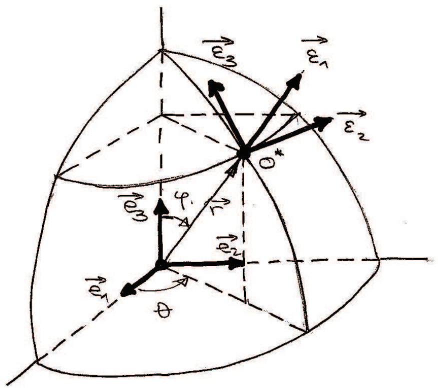

Figure : Referențial relativ – coordonate sferice.

In reperul absolut $\mathcal{R}_A$, avem:

$$\vec{\mathbf{x}} = x_1\,\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2\,\vec{\mathbf{e}}_2 + x_3\,\vec{\mathbf{e}}_3 \tag{28}$$

unde

$$\begin{cases} x_1 = \rho\,\cos\theta\,\sin\varphi \\ x_2 = \rho\,\sin\theta\,\sin\varphi \\ x_3 = \rho\,\cos\varphi \end{cases} \tag{29}$$

cu $\rho = \|\vec{\mathbf{x}}\| \in [0,\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ și $\varphi \in [0,\pi]$.

Versorii reperului relativ $\mathcal{R}$ sunt dați de:

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = \dfrac{\vec{\mathbf{x}}}{\rho} = \cos\theta\,\sin\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \cos\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_3 \\ \vec{\varepsilon}_2 = \dfrac{1}{\sin\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\varepsilon}_1 = -\sin\theta\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta\,\vec{\mathbf{e}}_2 \\ \vec{\varepsilon}_3 = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2 = -\cos\theta\,\cos\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_1 - \sin\theta\,\cos\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \sin\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_3 \end{cases} \tag{30}$$

Referențial relativ – coordonate cilindrice: Fie $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}\big)$ și $\mathbf{O}^\star \in \mathcal{E}$. Construiți un referențial relativ cu observatorul in $\mathbf{O}^\star$, având un reper ortonormat $\{\vec{\varepsilon}_i\}_{1\le i\le 3}\big)$ definit ca în figură. Determinați relațiile $\vec{\varepsilon}_i = f_i\big(\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3\big)$, $1 \le i \le 3$.

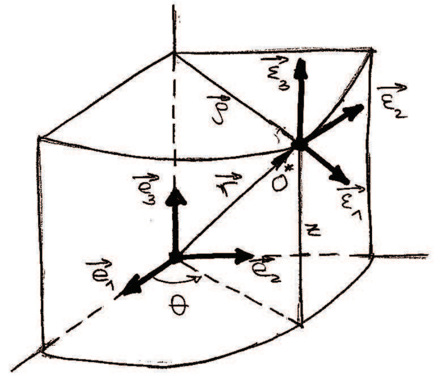

Figure : Referențial relativ – coordonate cilindrice.

Elemente de cinematica punctului material

Fie $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}\big)$ un referențial/reper absolut în $\mathcal{E}$.

Definiție

Spunem că un punct $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ este în mișcare (se mișcă) în raport cu reperul $\mathcal{R}_A$ dacă vectorul lui de poziție, $\vec{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}$, este o funcție de timp:

$$\begin{aligned} &\vec{\mathbf{x}}(\cdot) : I \longrightarrow \mathcal{E}\ (I \subset \mathbb{R}), \\ &t \longmapsto \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(t) = x_1(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + x_3(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3\,, \end{aligned} \tag{31}$$

sau, echivalent, componentele vectorului de poziție $\vec{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}$ în baza $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}$, $x_i(t)$, $i = 1,2,3$, sunt funcții de timp:

$$x_i(\cdot) : I \longrightarrow \mathcal{E}\ (I \subset \mathbb{R}), \quad t \longmapsto x_i = x_i(t), \quad 1 \le i \le 3\,. \tag{32}$$

Observații

(i) Cunoașterea funcțiilor $x_i(t)$ pe intervalul de timp $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ înseamnă cunoașterea mișcării punctului $\mathbf{P}$ în raport cu $\mathcal{R}_A$.

(ii) Ecuațiile (32) definesc legea mișcării.

Definiții

Locul geometric al extremităților vectorului de poziție, $\vec{\mathbf{x}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$ când $t \in I$, i.e. locul geometric al pozițiilor pe care le ocupă succesiv punctul $\mathbf{P}$ în mișcare, se numește traiectorie.

Ecuațiile (32) se numesc ecuațiile parametrice ale traiectoriei.

Prin eliminarea parametrului timp, t, din ecuațiile parametrice ale traiectoriei (32) se obține ecuația carteziană a traiectoriei.

Observații

(i) Cunoașterea traiectoriei nu implică cunoașterea legii de mișcare, i.e. se pot determina pozițiile punctului $\mathbf{P}$, dar nu și momentele corespunzătoare acestora.

(ii) Mai mult, presupunem că funcțiile $x_i(t)$, $i = 1,2,3$, sunt funcții de clasă $\mathcal{C}^1 \implies$ Traiectoria este o curbă rectificabilă.

(iii) Dacă traiectoria este o curbă rectificabilă, atunci poziția punctului $\mathbf{P}$ poate fi reperată și prin lungimea arcului de cubă, s, măsurat de la un punct de pe traiectorie, considerat drept origine.

Presupunem, în continuare, că funcţiile $x_i(\cdot) : I \longrightarrow \mathcal{E}$, $i = 1, 2, 3$, definite prin (32), sunt de clasă $\mathcal{C}^n$, unde $n \geq 2$.

Definiţie

Derivata de ordinul întâi în raport cu timpul a funcţiei (31)

$$\vec{\mathbf{v}}(t_0) = \left.\frac{d\vec{\mathbf{x}}(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) \tag{33a}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(t_0) = \dot{x}_1(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \dot{x}_2(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \dot{x}_3(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \tag{33b}$$

se numeşte viteza punctului material **P** la momentul t_0 prin mişcarea $\vec{\mathbf{x}}(t)$.

Observaţie

Viteza este un vector tangent la traiectorie în orice moment, are sensul dat de sensul mişcării şi mărimea egală cu $\dot{s}$.

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{x}}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{x}}(s)}{ds}\,\frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)\,\vec{\tau}(s)$$

Definiţie

Derivata de ordinul doi în raport cu timpul a funcţiei (31)

$$\vec{\mathbf{a}}(t_0) = \left.\frac{d^2\vec{\mathbf{x}}(t)}{dt^2}\right|_{t=t_0} = \ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) = \dot{\vec{\mathbf{v}}}(t_0) \tag{34a}$$

$$\vec{\mathbf{a}}(t_0) = \ddot{x}_1(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \ddot{x}_2(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \ddot{x}_3(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_3 = \dot{v}_1(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \dot{v}_2(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + \dot{v}_3(t_0)\,\vec{\mathbf{e}}_3 \tag{34b}$$

se numeşte acceleraţia lui **P** la momentul t_0 prin mişcarea $\vec{\mathbf{x}}(t)$.

Definiţie

Locul geometric al extremităţilor vectorului viteză în punctul material **P** translatat în originea **O** a reperului $\mathcal{R}_A$, când timpul t variază, se numeşte hodograful mişcării.

Observaţii

(i) Acceleraţia este tangentă la hodograful mişcarii.

(ii) Acceleraţia se găseşte în planul osculator, i.e. planul determinat de vectorii tangentă, $\vec{\tau}$, şi normală principală, $\vec{\nu}$, la traiectorie.

Aplicaţia 1: Viteza şi acceleraţia în triedrul lui Frenet

Viteza

S-a arătat următoarea identitate:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{x}}(s(t))}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{x}}(s)}{ds}\,\frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)\,\vec{\tau}(s) \tag{35}$$

Vectorii $\{\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)\}$ reprezintă un reper ortonormat:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = v_\tau\,\vec{\tau}(s) + v_\nu\,\vec{\nu}(s) + v_\beta\,\vec{\beta}(s) \tag{36}$$

Din relaţiile (35) şi (36), obţinem componentele vectorului viteză în triedrul lui Frenet:

$$\boxed{v_\tau = \dot{s}(t) = \|\vec{\mathbf{v}}(t)\|} \tag{37a}$$

$$\boxed{v_\nu = v_\beta = 0} \tag{37b}$$

Acceleraţia

Derivăm, în raport cu timpul t, expresia vitezei (35):

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}}(t) &= \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{s}(t)\,\vec{\tau}(s)\right] = \ddot{s}(t)\,\vec{\tau}(s) + \dot{s}(t)\,\frac{d\vec{\tau}(s)}{dt} \\ &= \ddot{s}(t)\,\vec{\tau}(s) + \dot{s}(t)\,\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}\,\frac{ds(t)}{dt} \\ &= \ddot{s}(t)\,\vec{\tau}(s) + \dot{s}(t)^2\,\frac{1}{R(s)}\,\vec{\nu}(s) \end{aligned} \tag{38}$$

Vectorii $\{\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)\}$ reprezintă un reper ortonormat:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = a_\tau\,\vec{\tau}(s) + a_\nu\,\vec{\nu}(s) + a_\beta\,\vec{\beta}(s) \tag{39}$$

Din relaţiile (38) şi (39), obţinem componentele vectorului acceleraţie în triedrul lui Frenet:

$$\boxed{a_\tau = \ddot{s}(t)} \tag{40a}$$

$$\boxed{a_\nu = \frac{\dot{s}(t)^2}{R(s)}} \tag{40b}$$

$$\boxed{a_\beta = 0} \tag{40c}$$