Algoritmica Grafurilor

Ruxandra Marinescu – Ghemeci
verman@fmi.unibuc.ro

BIBLIOGRAFIE

- Dragoș-Radu Popescu, **Combinatorică şi teoria grafurilor**, Editura Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Bucureşti, 2005.
- J.A. Bondy, U.S.R Murty – **Graph theory with applications**, The Macmillan Press 1976 / Springer 2008
- Douglas B. West, **Introduction to Graph Theory**, Prentice Hall 1996, 2001

BIBLIOGRAFIE

- Ioan Tomescu, **Problems in combinatorics and graph theory**, New York: Wiley, 1985
- T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.R. Rivest – **Introducere in algoritmi**, Mit Press, trad. Computer Libris Agora
- H. Georgescu – **Tehnici de programare**, Editura Universităţii din Bucureşti, 2005
- *infoarena.ro*

Evaluare

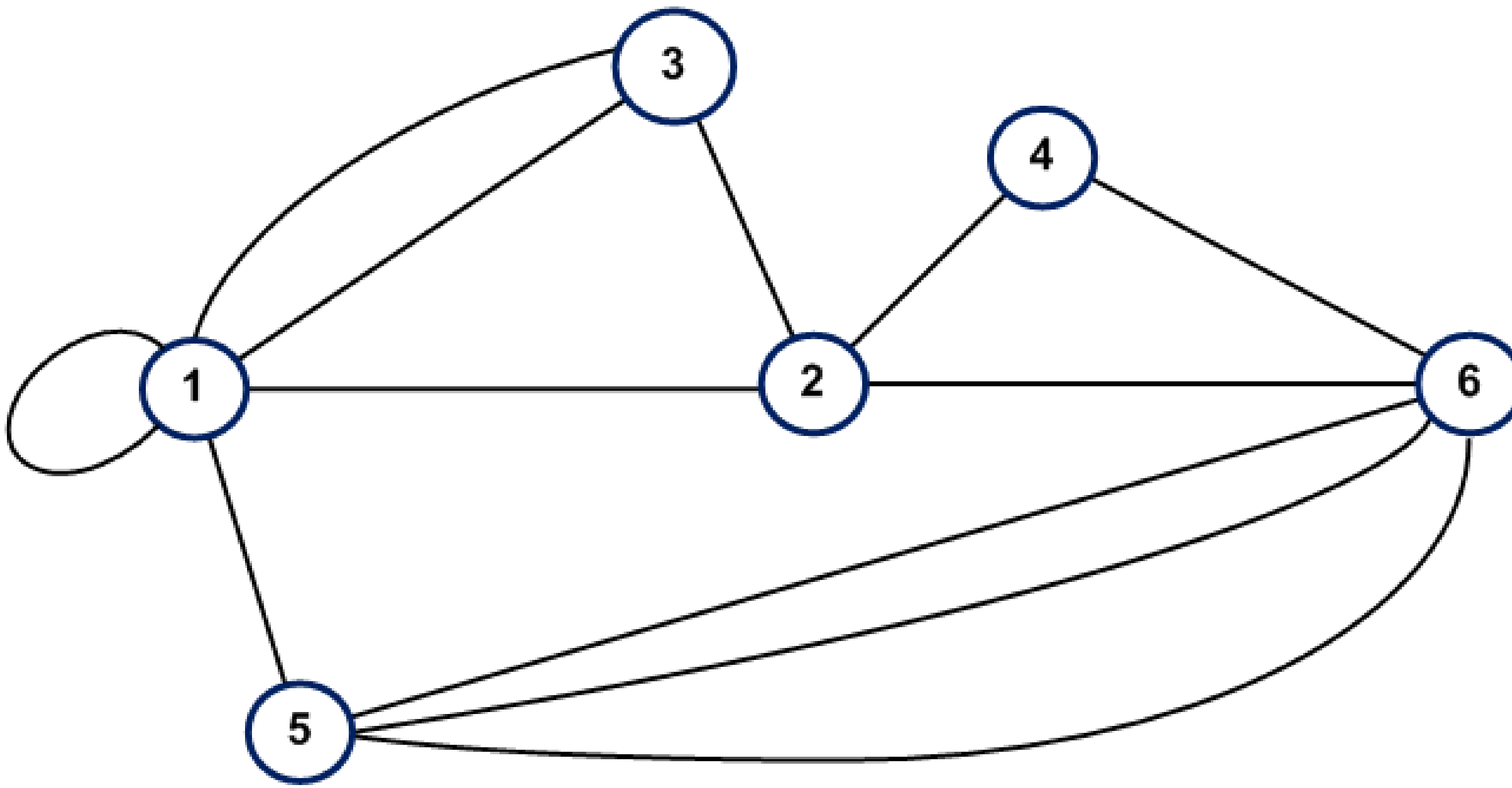
- 25% laborator
- 75% examen scris

Programa

- Secvenţe de grade
- Conectivitate
- Arbori
- Parcurgerea grafurilor
- Drumuri minime
- Arbori parţiali de cost minim

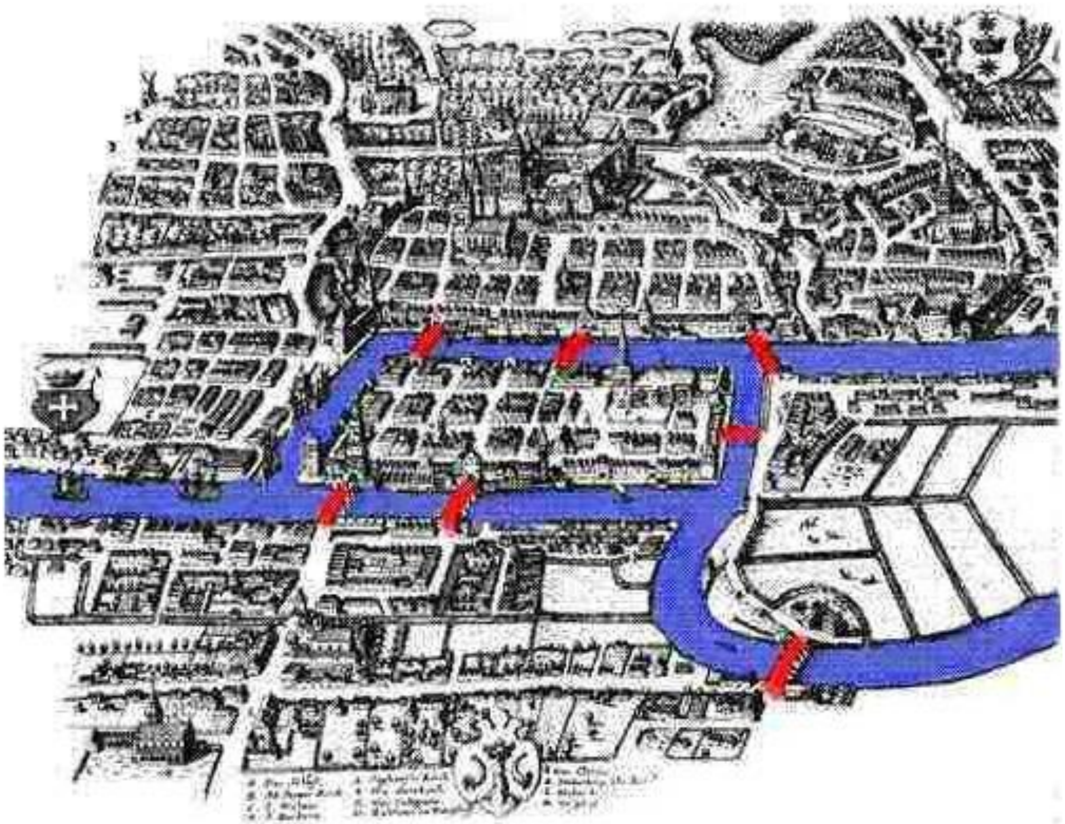
Programa

- Cuplaje
- Fluxuri în reţele de transport
- Grafuri hamiltoniene
- Grafuri euleriene


3
4
1
2
6
5

Istoric. Aplicații

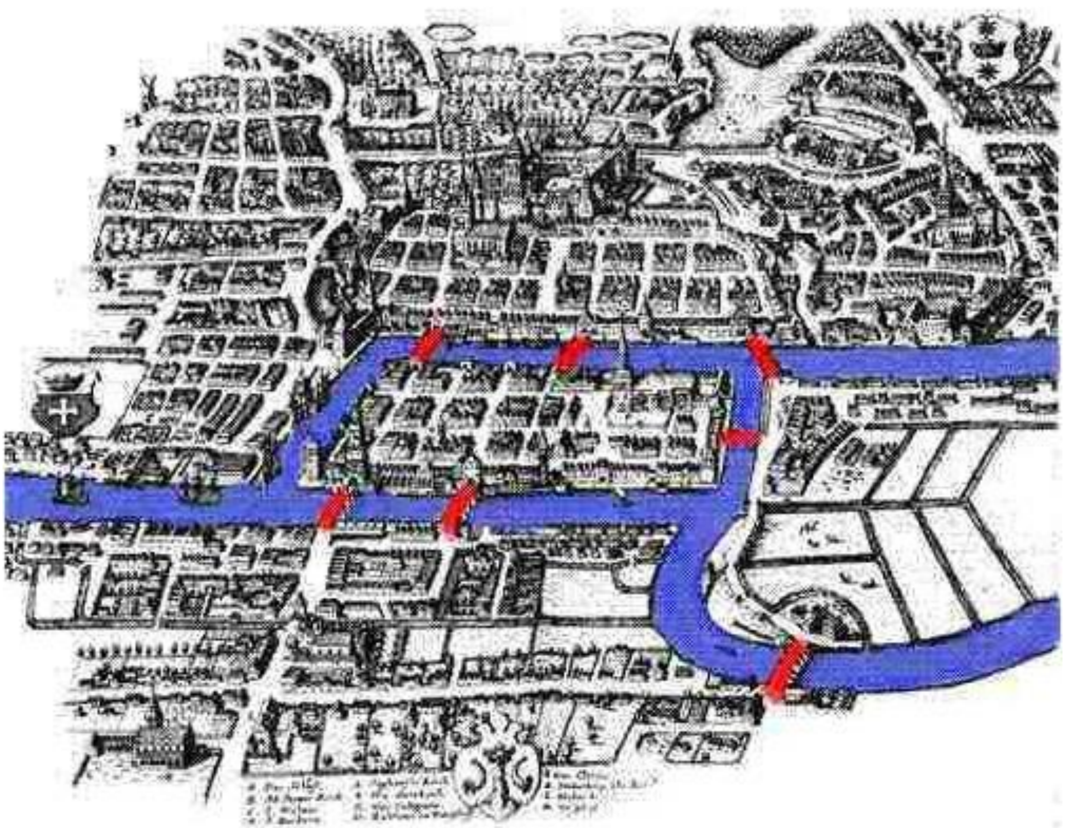
Problema celor 7 poduri din Königsberg

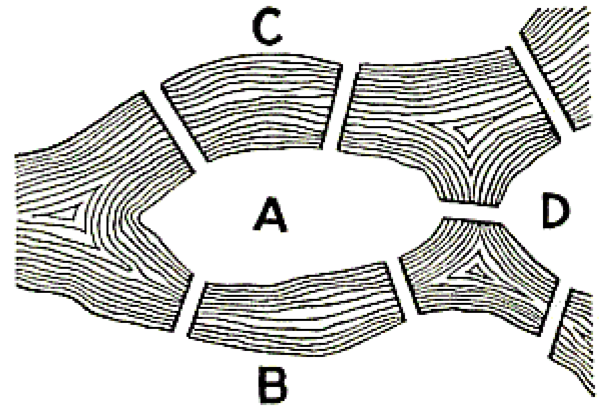


Este posibil ca un om să facă o plimbare în care să treacă pe toate cele 7 poduri o singură dată?

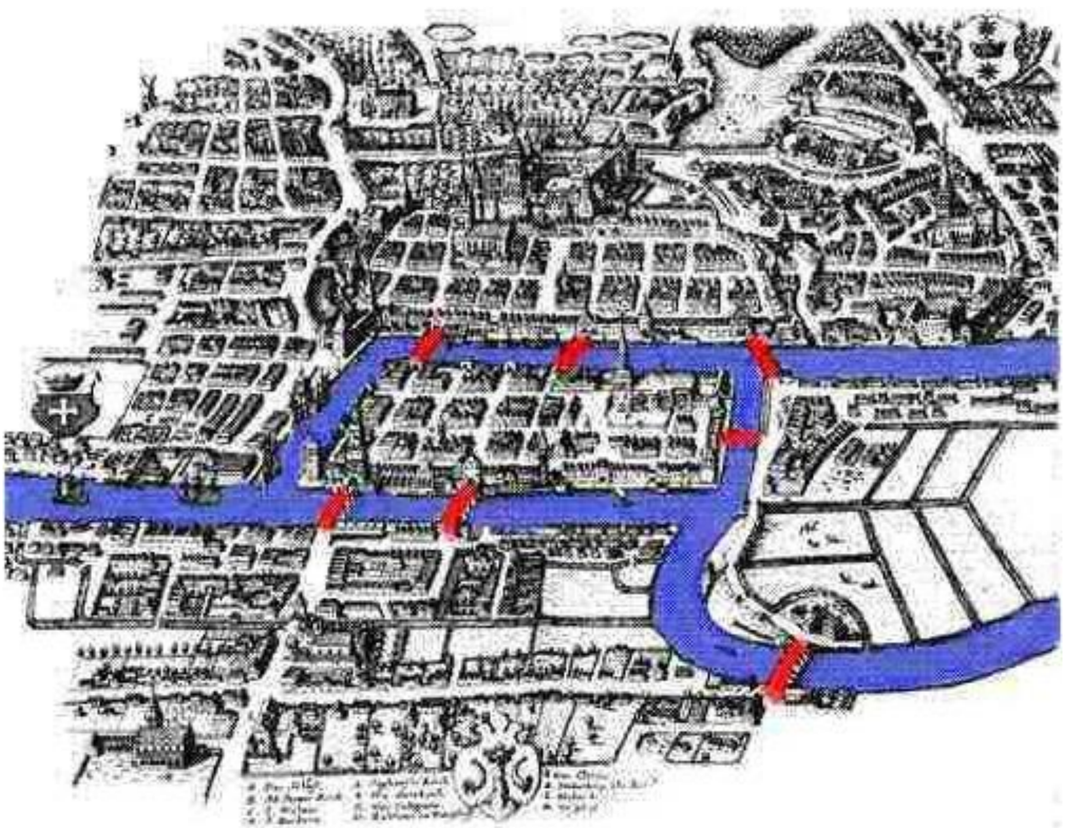
http://think-like-a-git.net/sections/graph-theory/seven-bridges-of-konigsberg.html

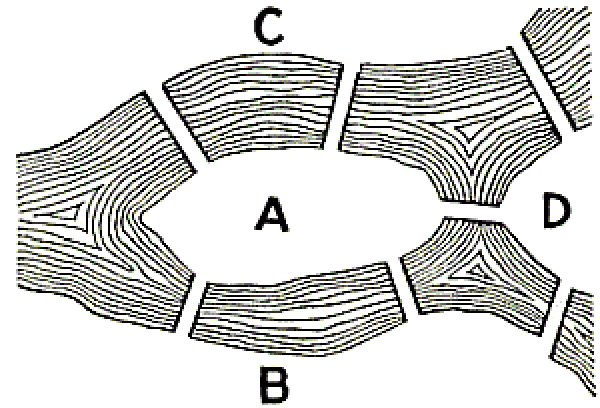
Problema celor 7 poduri din Königsberg



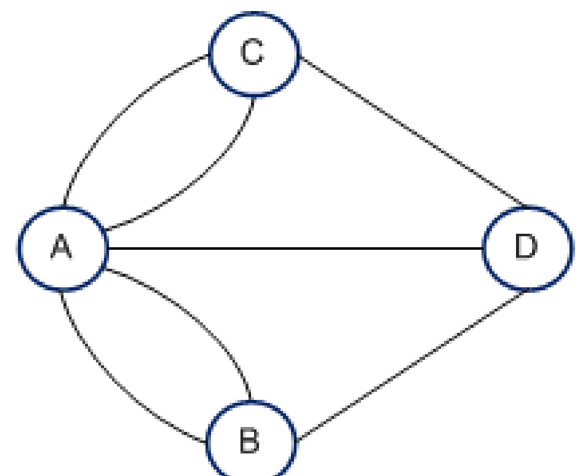


Problema celor 7 poduri din Königsberg

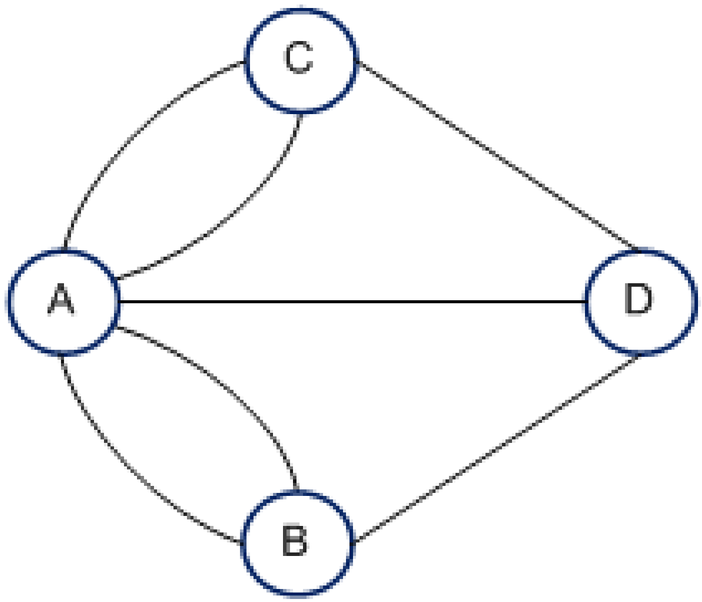


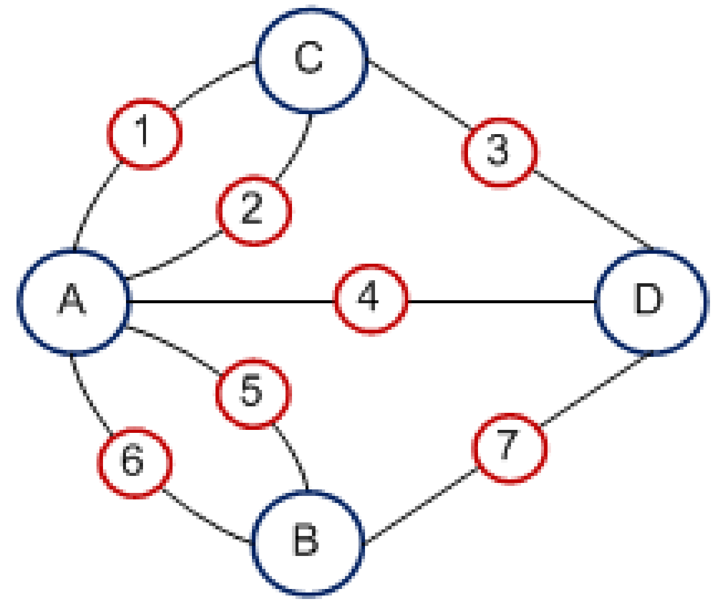


Modelare:

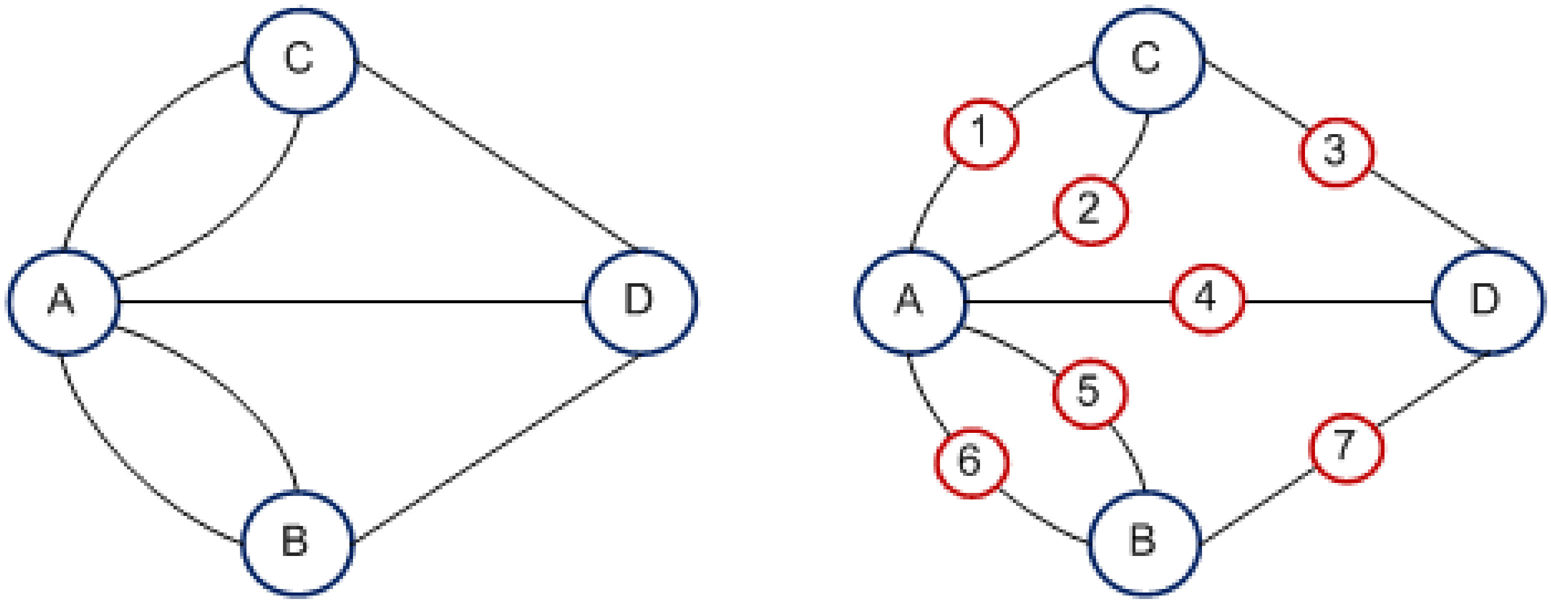


Problema celor 7 poduri din Königsberg





Problema celor 7 poduri din Königsberg



1736 – Leonhard Euler

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

- **Ciclu eulerian** – traseu care trece o singură dată prin toate muchiile
- **Graf eulerian**

Problema celor 7 poduri din Königsberg

- **Interpretare**

Se poate desena diagrama printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie şi fără a desena o linie de două ori?

Problema celor 7 poduri din Königsberg

- **Interpretare**

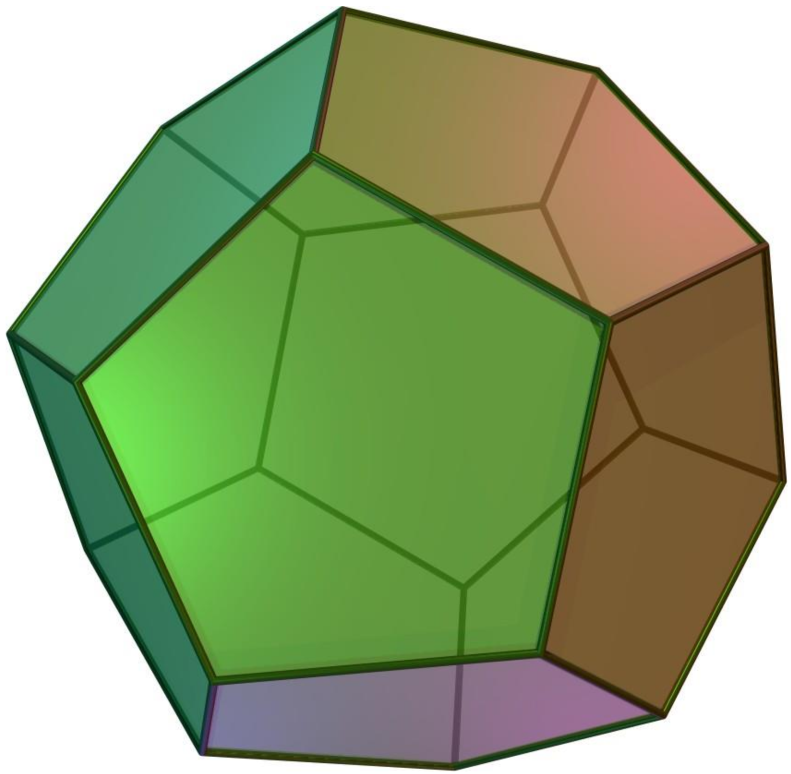
Se poate desena diagrama printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie şi fără a desena o linie de două ori?

- De câte ori (minim) trebuie să ridicăm creionul de pe hârtie pentru a desena diagrama?

Jocul icosian

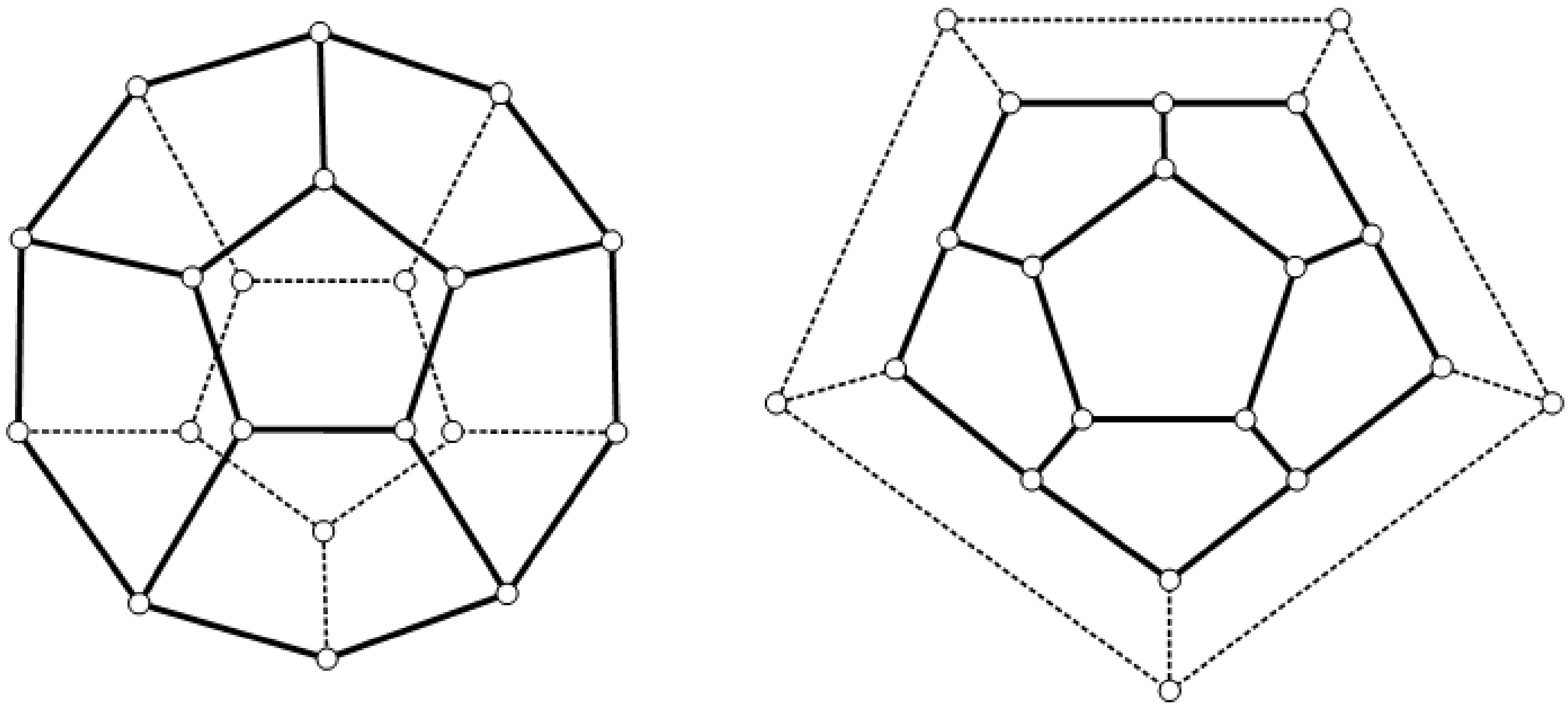
- 1856 – **Hamilton** – *"voiaj în jurul lumii"* :

Există un traseu închis pe muchiile dodecaedrului care să treacă prin fiecare vârf o singură dată

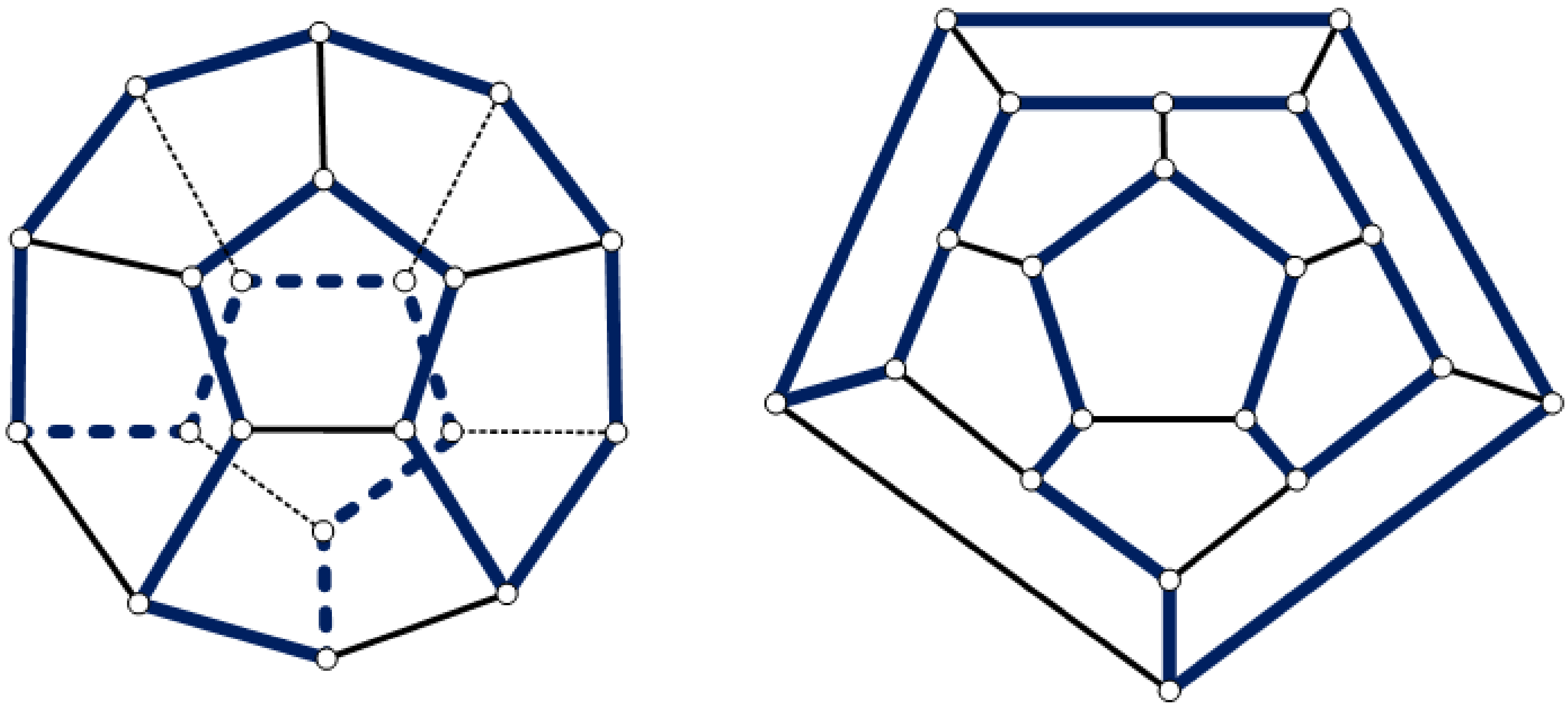


http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dodecahedron.jpg

Jocul icosian



Jocul icosian



Jocul icosian

- **Ciclu hamiltonian** – trece o singură dată prin toate muchiile
- **Graf hamiltonian**
- **Problema comis-voiajorului**

Corpuri platonice

- **Poliedru** – **corp** mărginit de suprafeţe plane
- **Poliedru convex** – segmentul care uneşte două puncte oarecare din el conţine numai puncte din interior

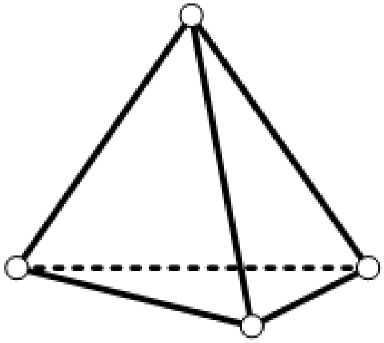
Corpuri platonice

- **Poliedru** – **corp** mărginit de suprafeţe plane
- **Poliedru convex** – segmentul care uneşte două puncte oarecare din el conţine numai puncte din interior
- **Poliedru regulat convex** – feţele sunt poligoane regulate **congruente**

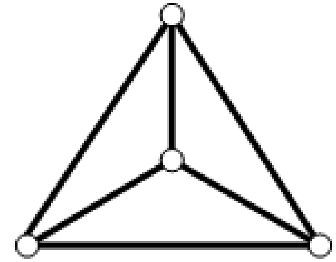
Corpuri platonice

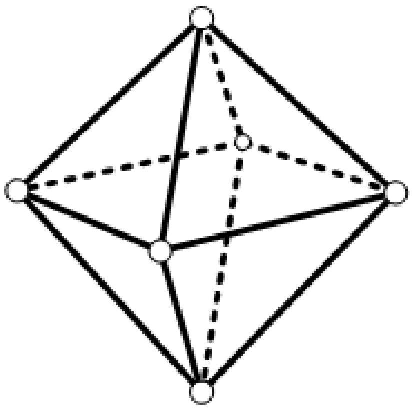
- **Poliedru** – **corp** mărginit de suprafeţe plane
- **Poliedru convex** – segmentul care uneşte două puncte oarecare din el conţine numai puncte din interior
- **Poliedru regulat convex** – feţele sunt poligoane regulate **congruente**
- **Graf planar** – se poate reprezenta în plan fără ca muchiile să se intersecteze in interior

Corpuri platonice – grafuri planare

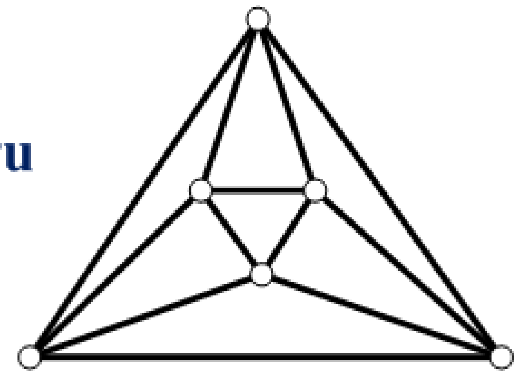


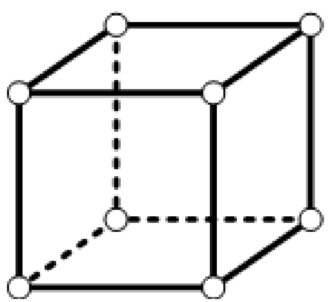
Tetraedru



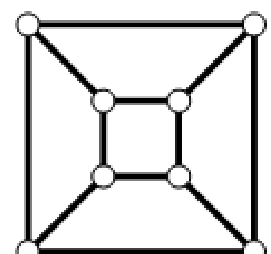


Octaedru

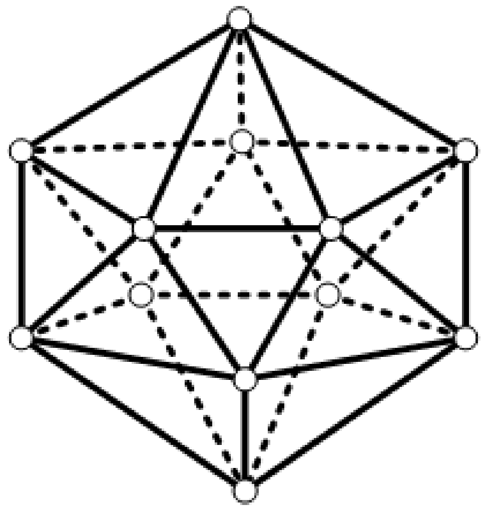




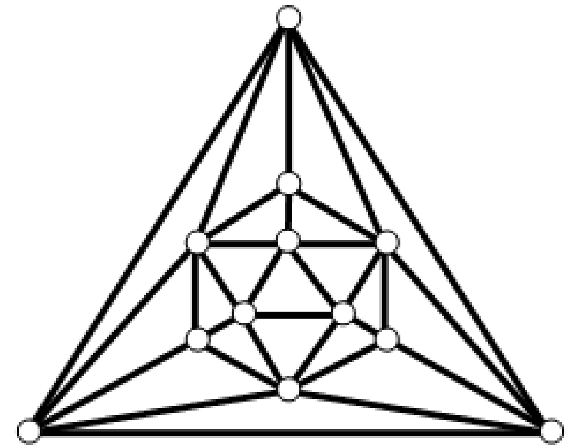
Cub

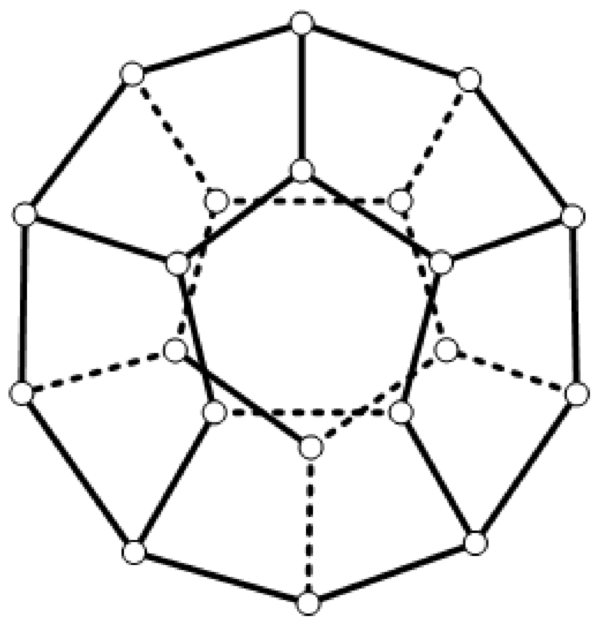


Corpuri platonice – grafuri planare

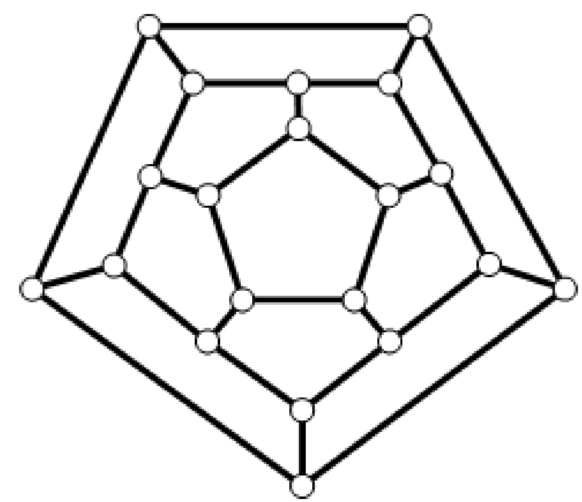


Icosaedru





Dodecaedru



Corpuri platonice

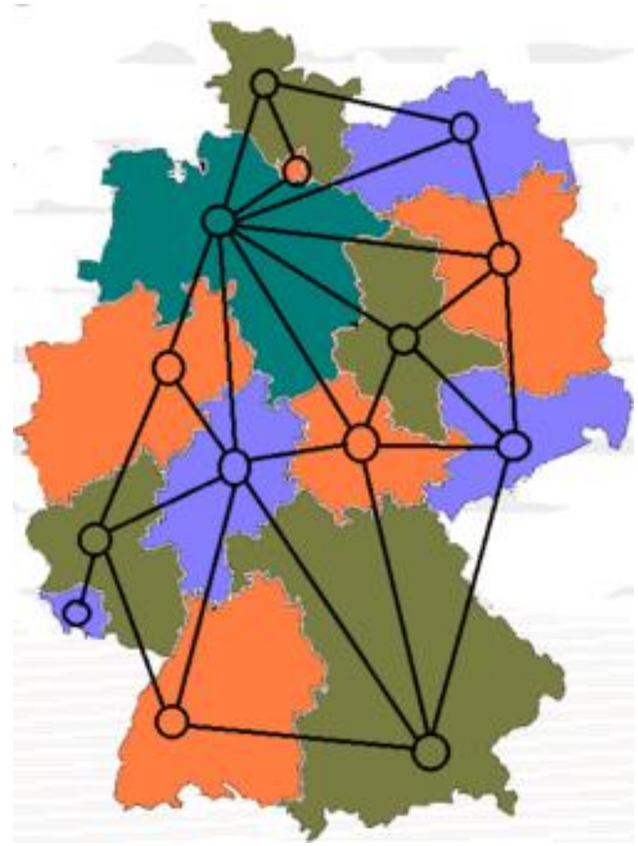
Sunt hamiltoniene?

Problema celor 4 culori

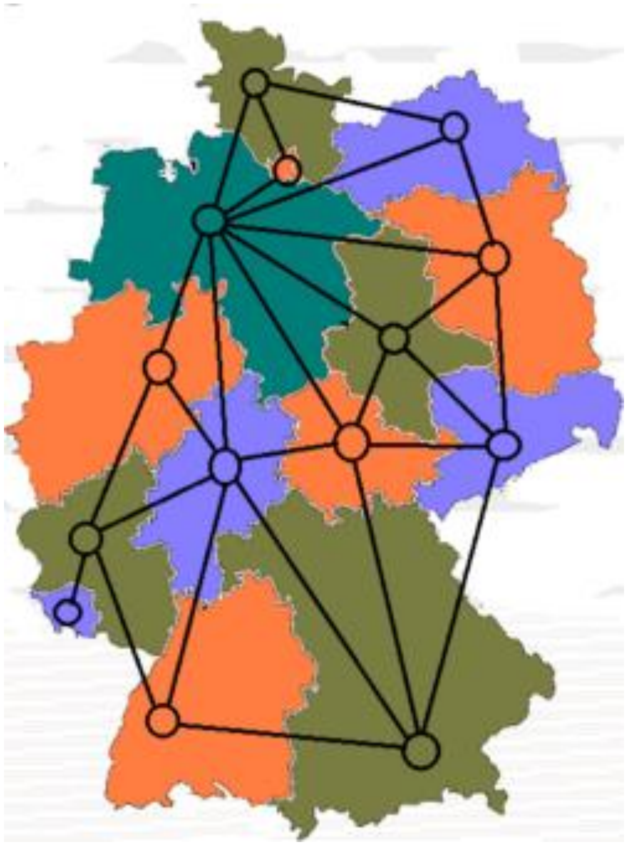
- **Problema celor 4 culori – De Morgan** 1852

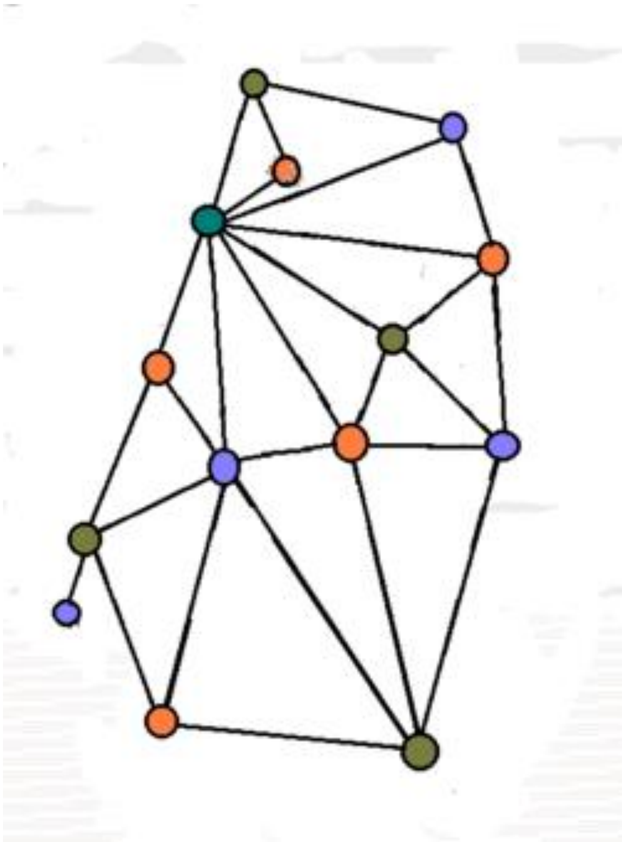
Se poate colora o hartă cu patru culori astfel încât orice două țări, care au frontieră comună și care **nu se reduce la un punct**, să aibă culori diferite?

http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem



http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem

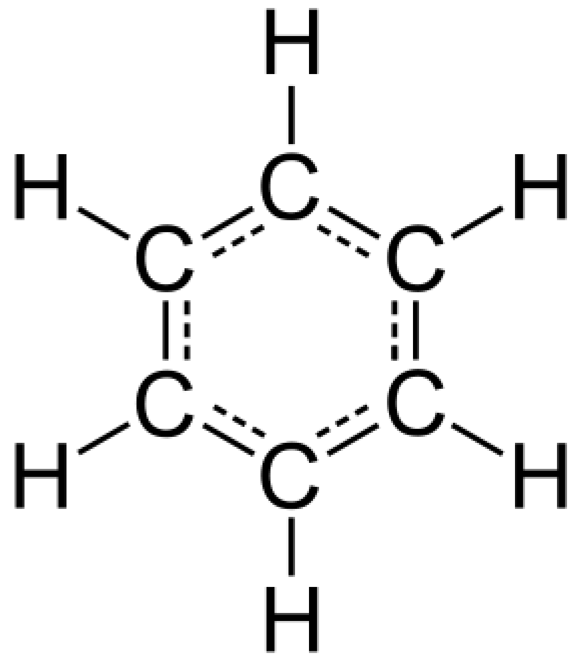




http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem

- **Problema celor 4 culori – Appel și Haken** răspuns afirmativ în 1976 cu ajutorul calculatorului

- **Graf ← “notaţie grafică” din chimie**
  - J. Silvester, 1878



Alte aplicații

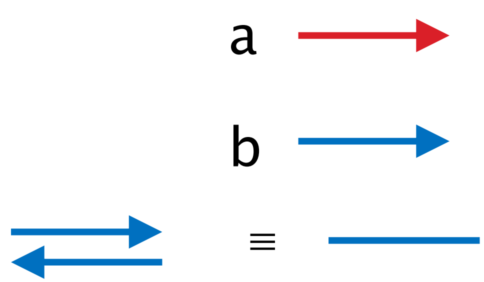
- **Algoritmi**
  - Drumuri minime
  - Probleme de conectivitate
  - Probleme de repartiție (cuplări)
  - etc

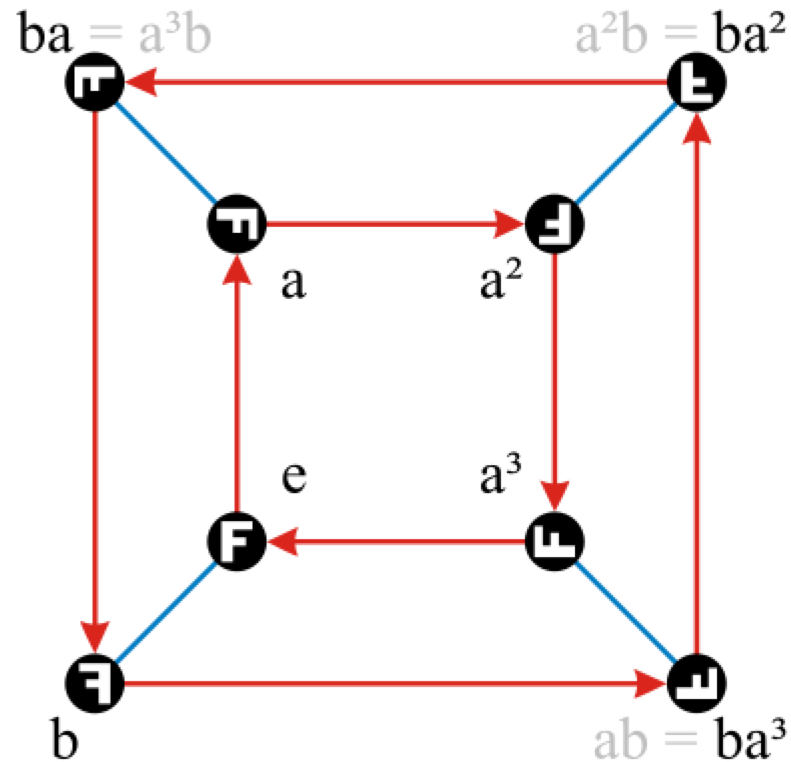
Alte aplicații

- **Grafuri asociate grupurilor**
  - **Graful Cayley**

Grupul diedral D_4

$$\langle a, b \mid a^4 = b^2 = e,\ ab = ba^3 \rangle$$





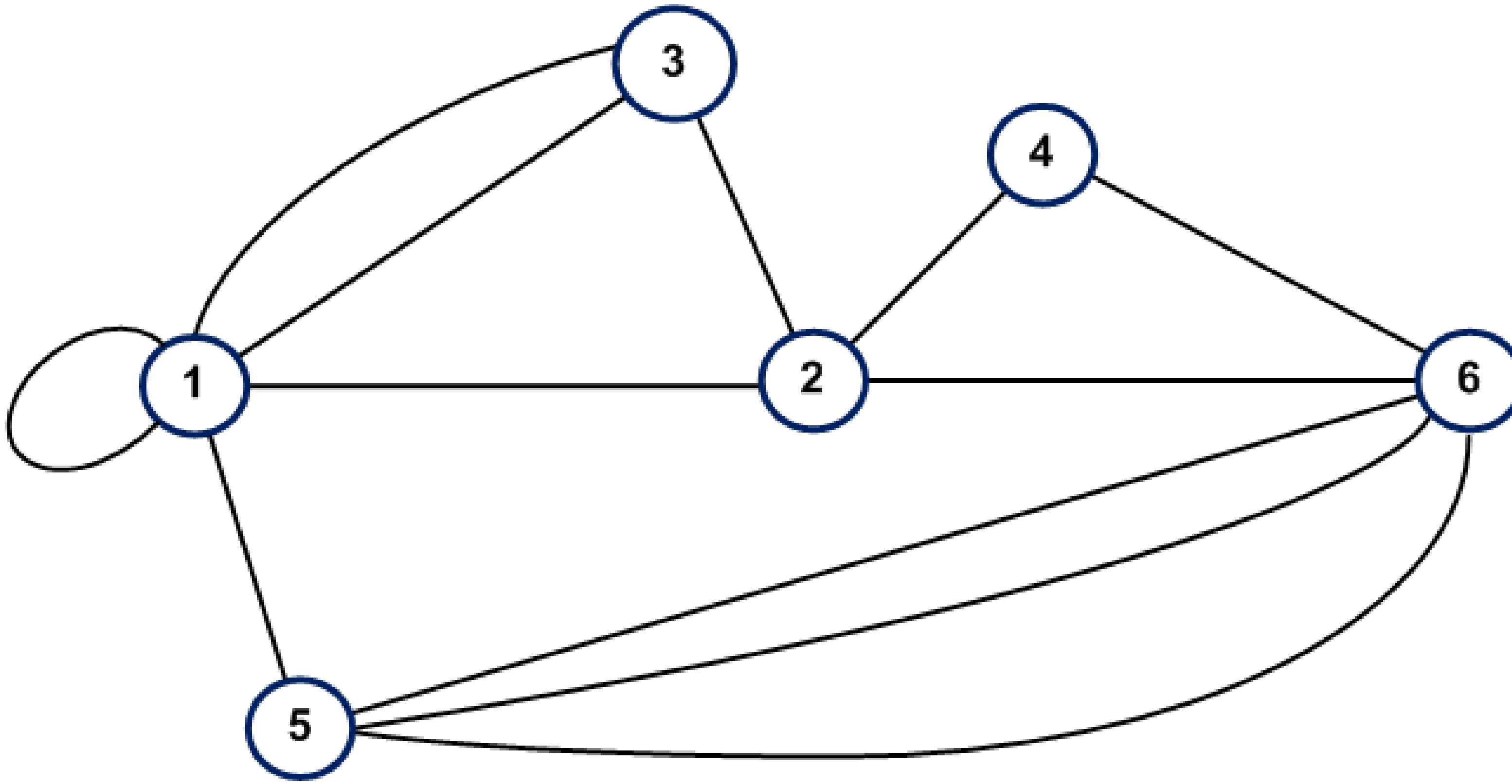
proprietăți graf ⇄ proprietăți grup

Alte aplicații

- **Demonstrarea unor rezultate matematice**
  - **Teorema Birkhoff–von Neumann**

    Orice matrice dublu stochastică de tip $n \times n$ este o combinație convexă de matrici de permutări

Noţiuni introductive


3
4
1
2
6
5

Multiset

- S o mulţime **finită** nevidă
- **Multiset**
  - **R = (S, r)**
  - **$r : S \to \mathbb{N}$** **funcţie de multiplicitate**

Multiset

- S o mulţime **finită** nevidă
- **Multiset**
  - $R = (S, r)$
  - $r : S \to \mathbb{N}$ **funcţie de multiplicitate**
- **Notaţie**
  - $R = \{x^{r(x)} \mid x \in S\}$

Multiset

- **Exemplu**
  - **$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$**
  - **$R = \{2^2, 3, 5^3\}$**
- $|R| = 2+1+3 = 6$ – suma multiplicităților
- $1 \notin R$

Multiset

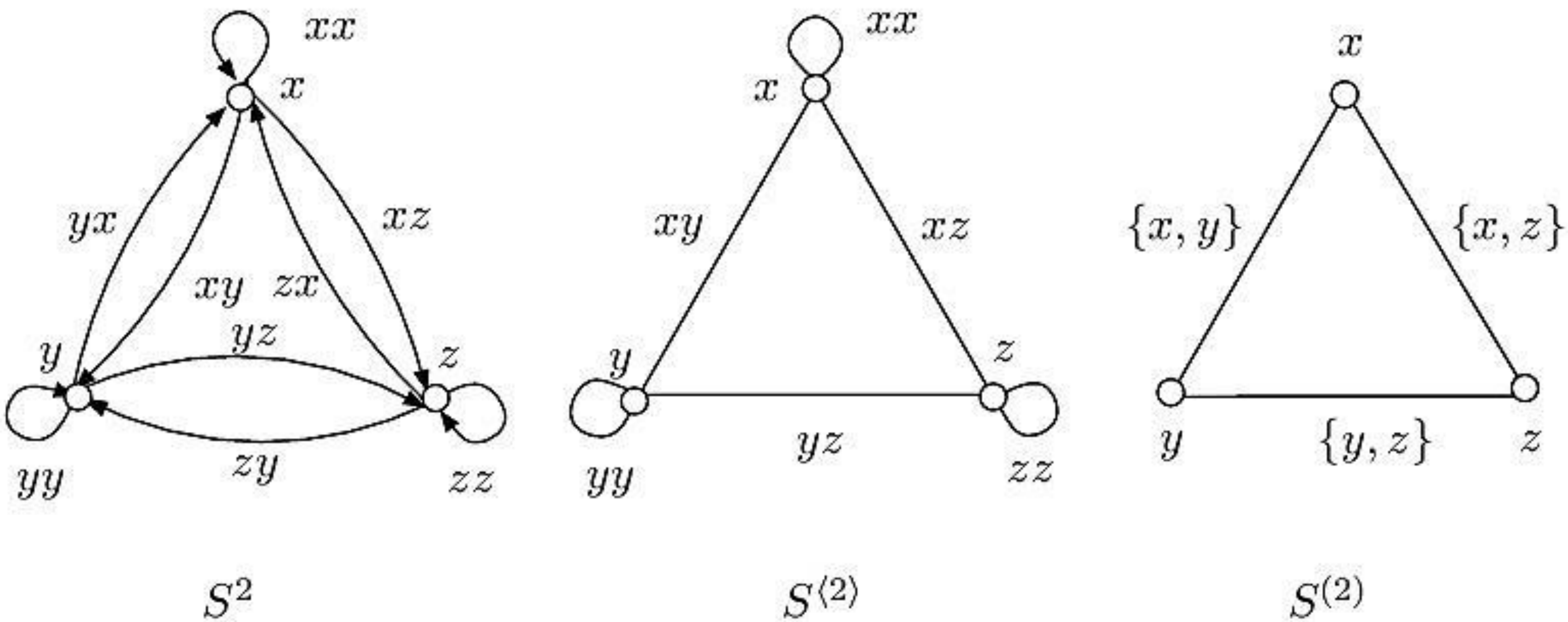
- $|R| = k \quad \rightarrow$ **k-multiset**
- **incluziune, reuniune / reuniune disjunctă…**

Notaţii

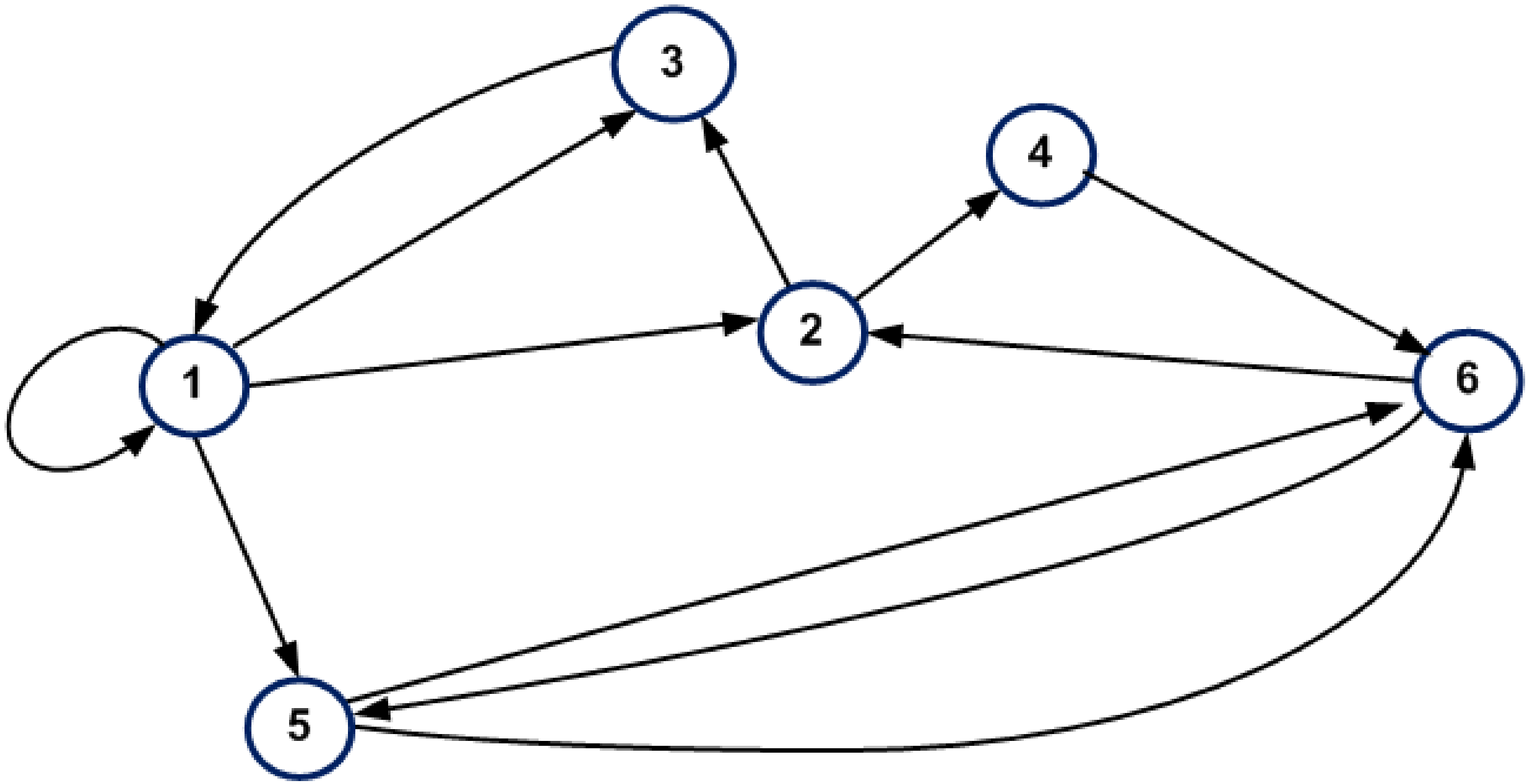
- $S^m = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_i \in S\}$
- $S^{<m>} = \{ X \mid X$ este m–multiset peste $S\}$
- $S^{(m)} = \{ X \mid X \subseteq S, |X| = m\}$

Exemplu

- $S = \{x, y, z\}$, $m = 2$
  - $S^2 = \{ xx, yy, zz, xy, yx, xz, zx, yz, zy\}$
  - $S^{<2>} = \{ xx, yy, zz, xy, xz, yz\}$
  - $S^{(2)} = \{ \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$



Graf orientat



Graf orientat

- **Graf orientat**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E = (V^2, r)}$
  - $v \in V$ – **vârf**
  - $e = (u, v) = uv$ – **arc**
    - $u = v$ – **buclă**
    - $u = e^-$ – **vârf iniţial / origine / extremitate iniţială**
    - $v = e^+$ – **vârf final / terminus**

Graf orientat

- **Graf orientat**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E = (V^2, r)}$
  - $v \in V$ – **vârf**
  - $e = (u, v) = uv$ – **arc**
    - $u = v$ – **buclă**
    - $u = e^-$ – **vârf iniţial / origine / extremitate iniţială**
    - $v = e^+$ – **vârf final / terminus**

Un arc e cu $r(e) > 1$ îl vom numi **arc multiplu**

Graf orientat

- G = (V, E), **E = (V², r)**
  - $d_G^-(u)$ – grad interior

    $$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$$

  - $d_G^+(u)$ – grad exterior

    $$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$$

  - $d_G(u)$ – grad

    $$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$

Graf orientat

- G = (V, E),   E = (V², r)
  - $d_G^-(u)$ – grad interior

    $$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$$

  - $d_G^+(u)$ – grad exterior

    $$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$$

  - $d_G(u)$ – grad

    $$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$

Graf orientat

- Are loc relația

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

Multisetul gradelor

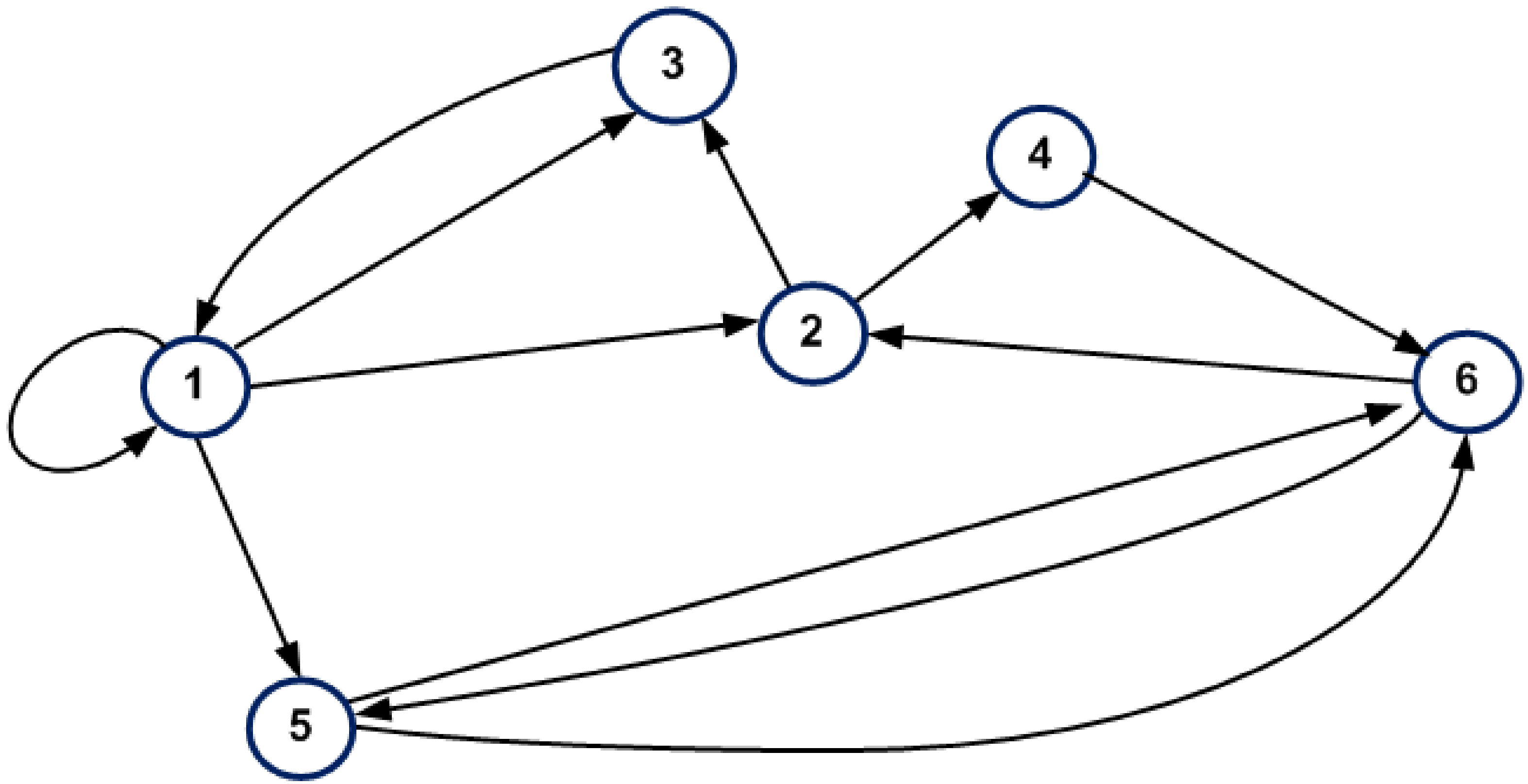
- G orientat, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  - Multisetul gradelor interioare

$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), \ldots, d_G^-(v_n)\}$$

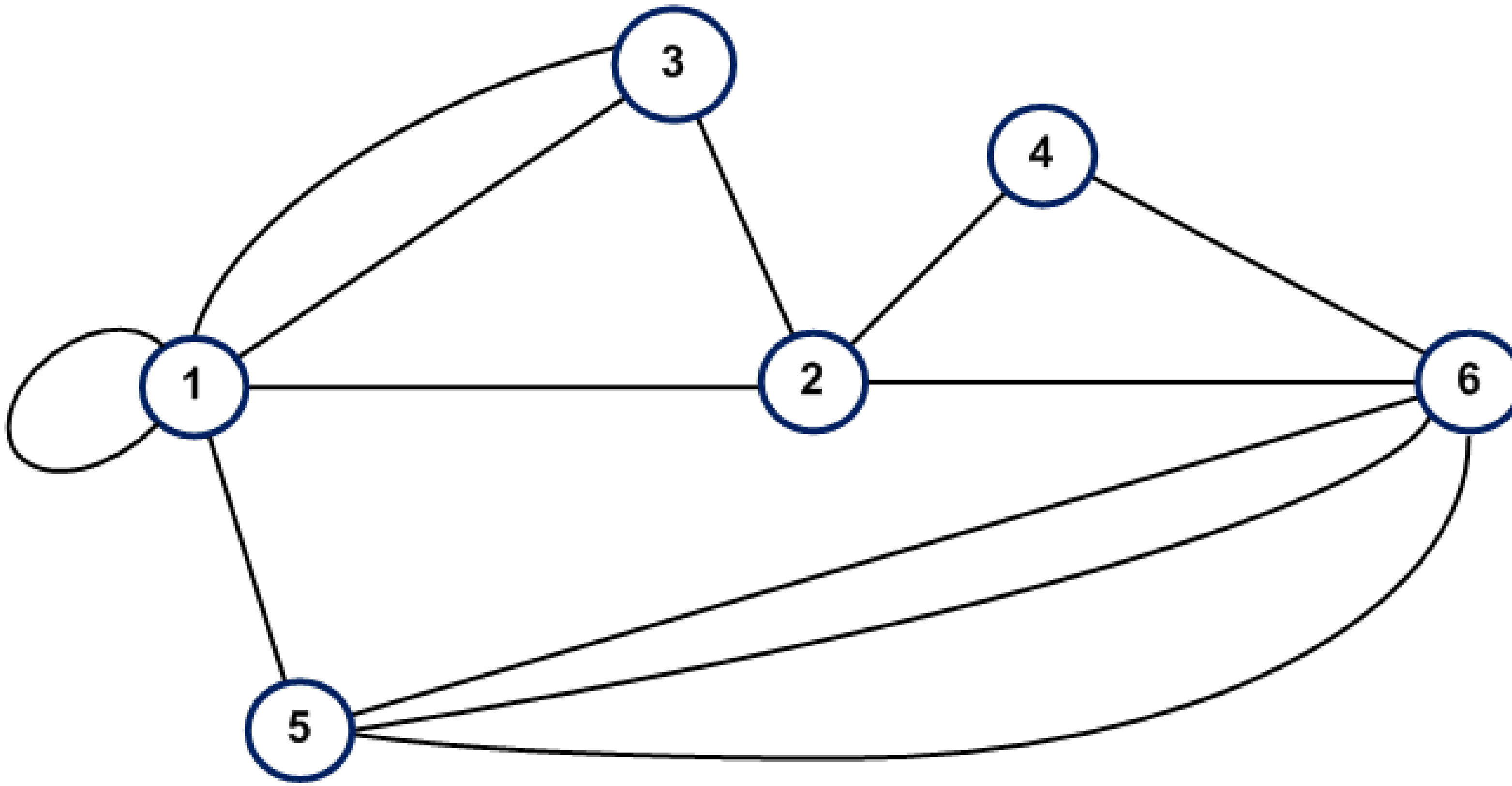
  - Multisetul gradelor exterioare

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), \ldots, d_G^+(v_n)\}$$

Exemplu



Graf neorientat



Graf neorientat

- **Graf neorientat**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E = (V^{<2>}, r)}$
  - $v \in V$ – **vârf / nod**
  - $e = \{u,v\} = uv$ – **muchie**
    - $u = v$ – **buclă**
    - u, v – **capete / extremităţi**

  - O muchie e cu $r(e) > 1$ o vom numi **muchie multiplă**

Graf neorientat – Noțiuni

- **Graf neorientat**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E = (V^{<2>}, r)}$
  - u și v $\in$ V sunt **adiacente** dacă uv $\in$ E
  - Un **vecin** al lui u $\in$ V este un vârf adiacent cu el
  - **Notație** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u

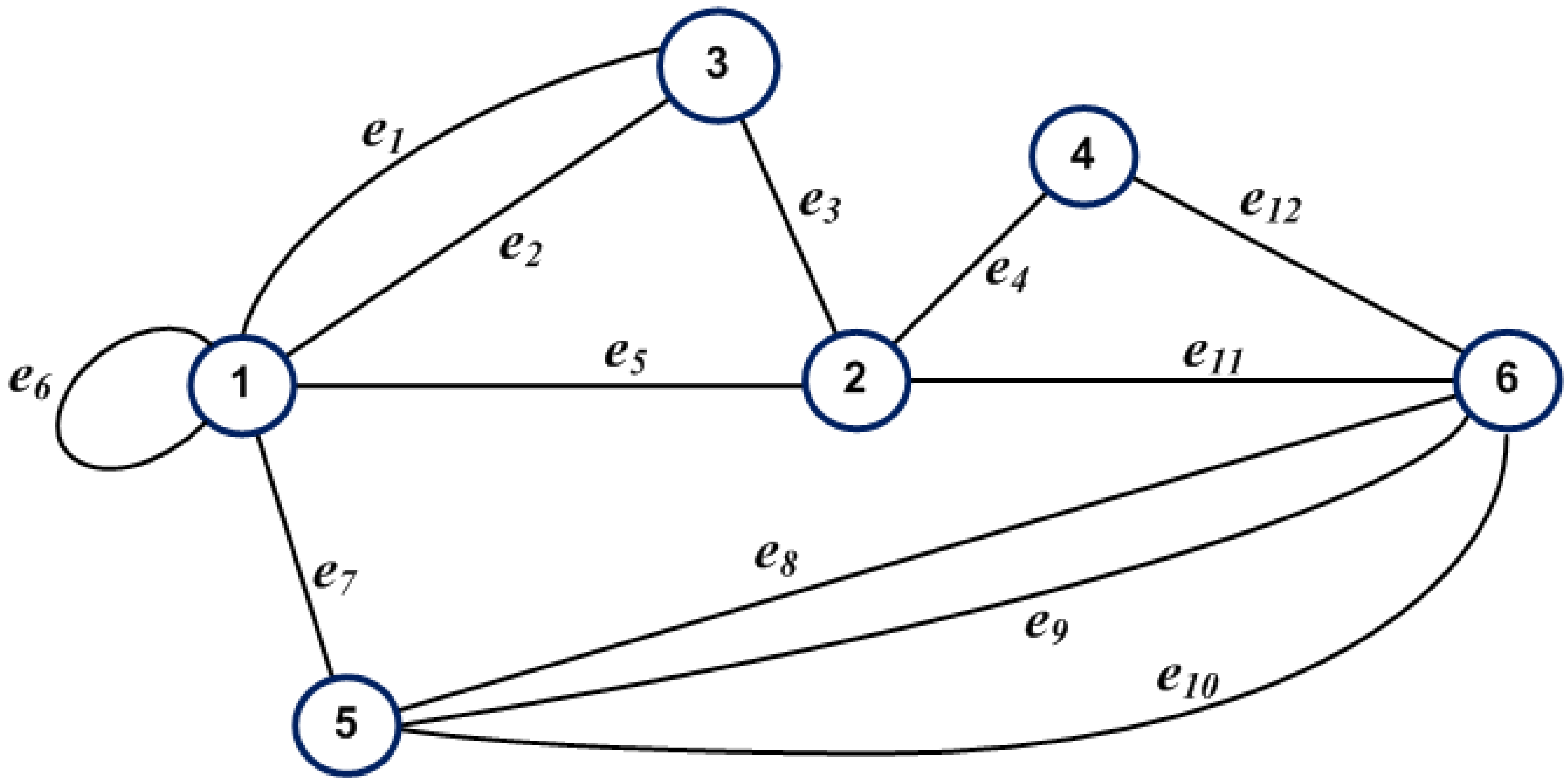
Graf neorientat – Noțiuni

- **Graf neorientat**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E = (V^{<2>}, r)}$
  - u și v $\in$ V sunt **adiacente** dacă uv $\in$ E
  - Un **vecin** al lui u $\in$ V este un vârf adiacent cu el
  - **Notație** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u
  - O muchie e $\in$ E este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e

Graf neorientat – Noțiuni

- **Graf neorientat**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E = (V^{<2>}, r)}$
  - u și v $\in$ V sunt **adiacente** dacă uv $\in$ E
  - Un **vecin** al lui u $\in$ V este un vârf adiacent cu el
  - **Notație** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u
  - O muchie e $\in$ E este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e
  - e și f $\in$ E sunt **adiacente** dacă există un vârf în care sunt incidente (au o extremitate în comun)

Exemplu



Graf neorientat – Noțiuni

- G = (V, E), **E = ($V^{<2>}$, r)**
  - $d_G(u)$ – **grad**

    = de câte ori este u extremitate a unei muchii (incident cu o muchie)

$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| +$$

$$2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| +$$

Graf neorientat – Noțiuni

- $G = (V, E)$, $\quad$ **$E = (V^{<2>}, r)$**

  - $d_G(u)$ – **grad**

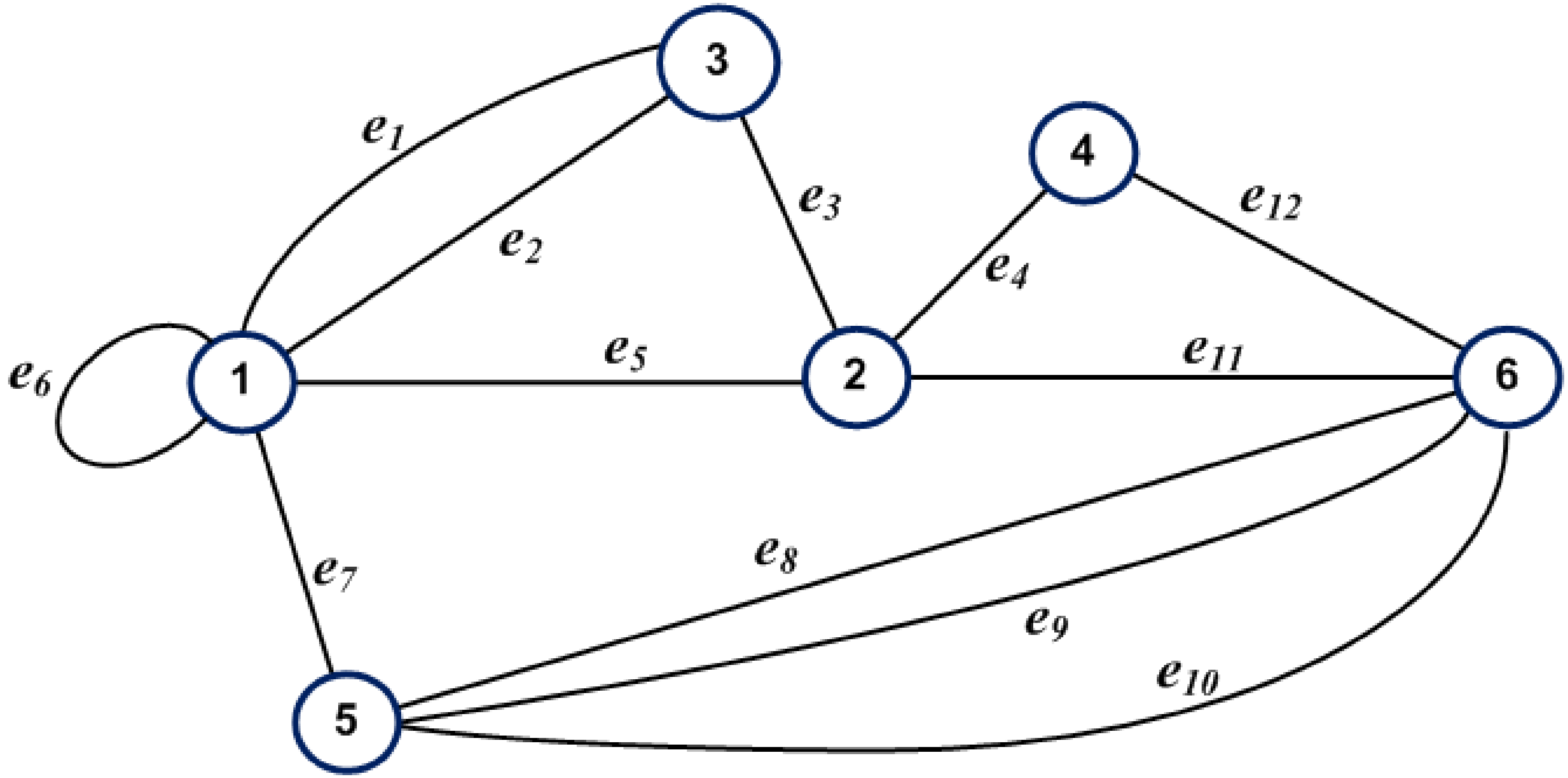
    = de câte ori este u extremitate a unei muchii (incident cu o muchie)

$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| + 2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| +$$

  - Dacă $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, **multisetul gradelor** lui G este:

$$s(G) = \{d_G(v_1), \ldots, d_G(v_n)\}$$

Exemplu



Graf neorientat – Noțiuni

- G = (V, E), **E = (V^{<2>}, r)**
  - Are loc **relația**

$$\sum_{u \in V} d_G(u) = 2|E|$$

Graf neorientat – Noțiuni

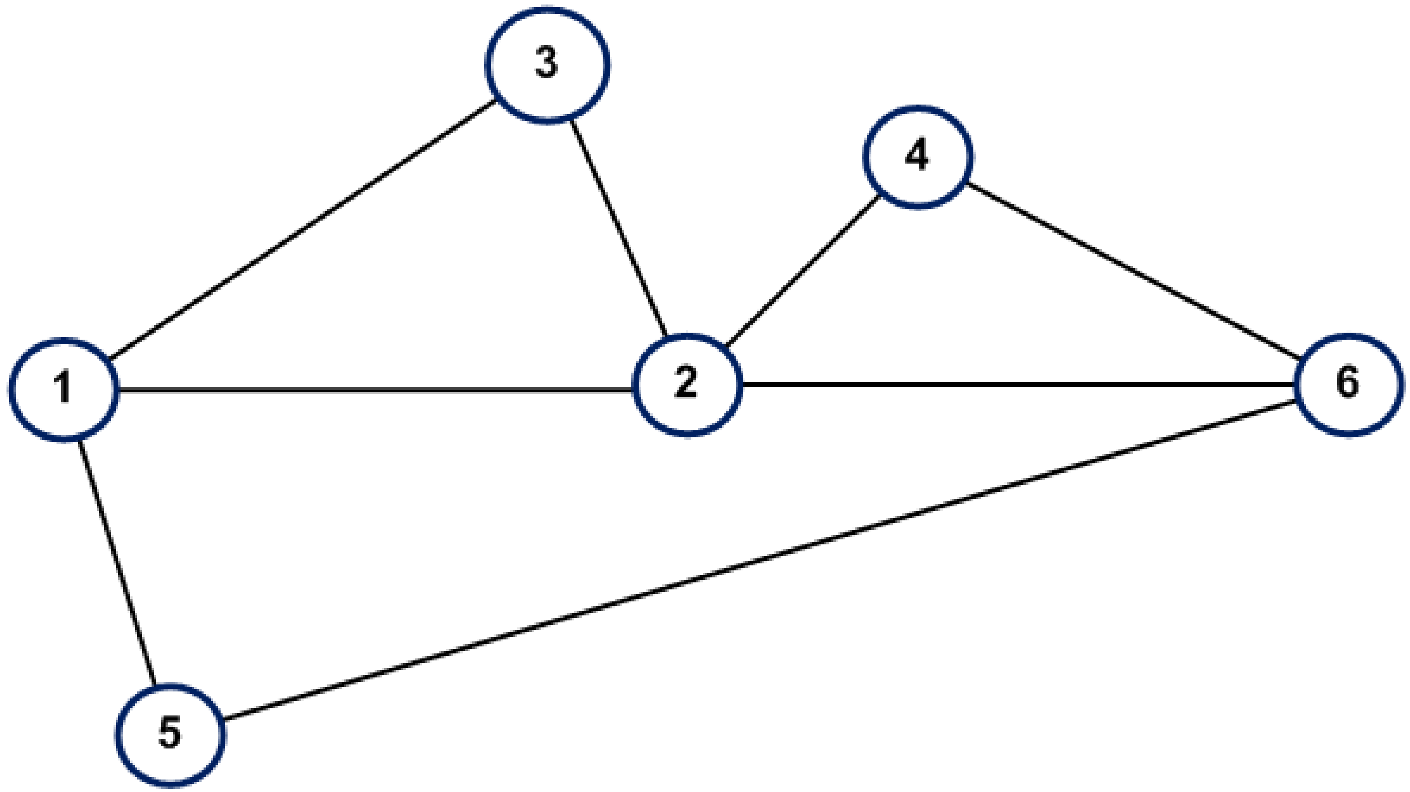
- G = (V, E), **E = (V$^{<2>}$, r)**

  - Are loc **relația**

$$\sum_{u\in V} d_G(u) = 2|E|$$

  - **Consecință**. Într-un graf neorientat există un număr par de vârfuri de grad impar

Graf simplu



Graf simplu

- **Graf simplu**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V}^{(2)}$, adică un graf neorientat fără bucle și muchii multiple

Graf simplu

- **Graf simplu**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V}^{(2)}$, adică un graf neorientat fără bucle și muchii multiple
  - $e = \{u, v\} = uv$ – **muchie**
    - $u = v$ – **buclă**
    - u, v – **capete / extremităţi**
  - $d_G(u)$ – **grad**

Notaţii

- V(G), E(G)
- e = uv

Noțiuni fundamentale

Fie G un graf **orientat**

- Un **drum** este o secvență P de vârfuri și arce care se succed alternativ:

  $$P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

  unde $v_1,\ldots,v_m \in V(G)$, $e_1,\ldots,e_{m-1} \in E(G)$, și fiecare arc e_i are extremitatea inițială v_i și finală v_{i+1}

Noțiuni fundamentale

Fie G un graf **orientat**

- Un **drum** este o secvență P de vârfuri și arce care se succed alternativ:

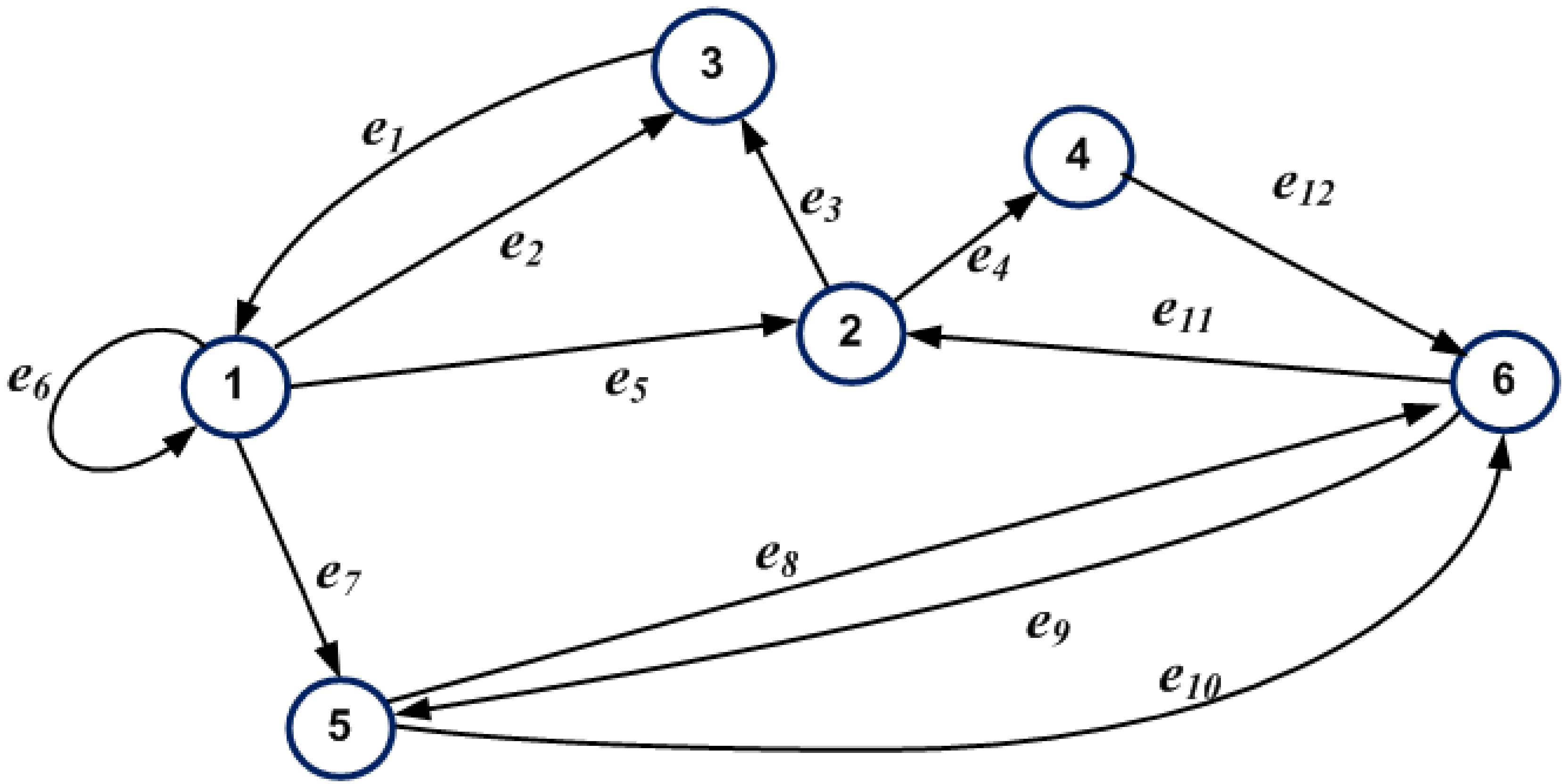
  $$P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

  unde $v_1, \ldots, v_m \in V(G)$, $e_1, \ldots, e_{m-1} \in E(G)$, și fiecare arc e_i are extremitatea inițială v_i și finală v_{i+1}

- P este **drum simplu** dacă nu conține un arc de mai multe ori ($e_i \neq e_j, \forall i \neq j$)

- P este **drum elementar** dacă nu conține un vârf de mai multe ori ($v_i \neq v_j, \forall i \neq j$)

Exemplu



Noțiuni fundamentale

$$P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

- **Lungimea** lui P = **l(P)** = cardinalul multisetului arcelor lui P (l(P) = **m-1**)
- v_1 și v_m se numesc **capetele/ extremitățile** lui P
- P se numește și **v_1-v_m lanț**

Noțiuni fundamentale

$$P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

- **Lungimea** lui P = **l(P)** = cardinalul multisetului arcelor lui P (l(P) = **m-1**)
- v_1 și v_m se numesc **capetele/ extremitățile** lui P
- P se numește și **v_1-v_m lanț**
- Notăm
  - $V(P) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$
  - $E(P) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}\}$

Noțiuni fundamentale

- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v)=\begin{cases}\mathbf{0}, & \text{daca } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\infty}, & \text{daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\\ \mathbf{min}\{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{P})\,|\,\boldsymbol{P} \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\}, & \text{altfel}\end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u–v drum)

Noțiuni fundamentale

- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v)=\begin{cases}\mathbf{0}, \ \text{daca } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\infty}, \ \text{daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\\ \mathbf{min}\{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{P}) \mid \boldsymbol{P} \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\}, \ \text{altfel}\end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u–v drum)

- Un u–v drum de lungime $d_G(u,v)$ se numește **drum minim de la u la v**

Noțiuni fundamentale

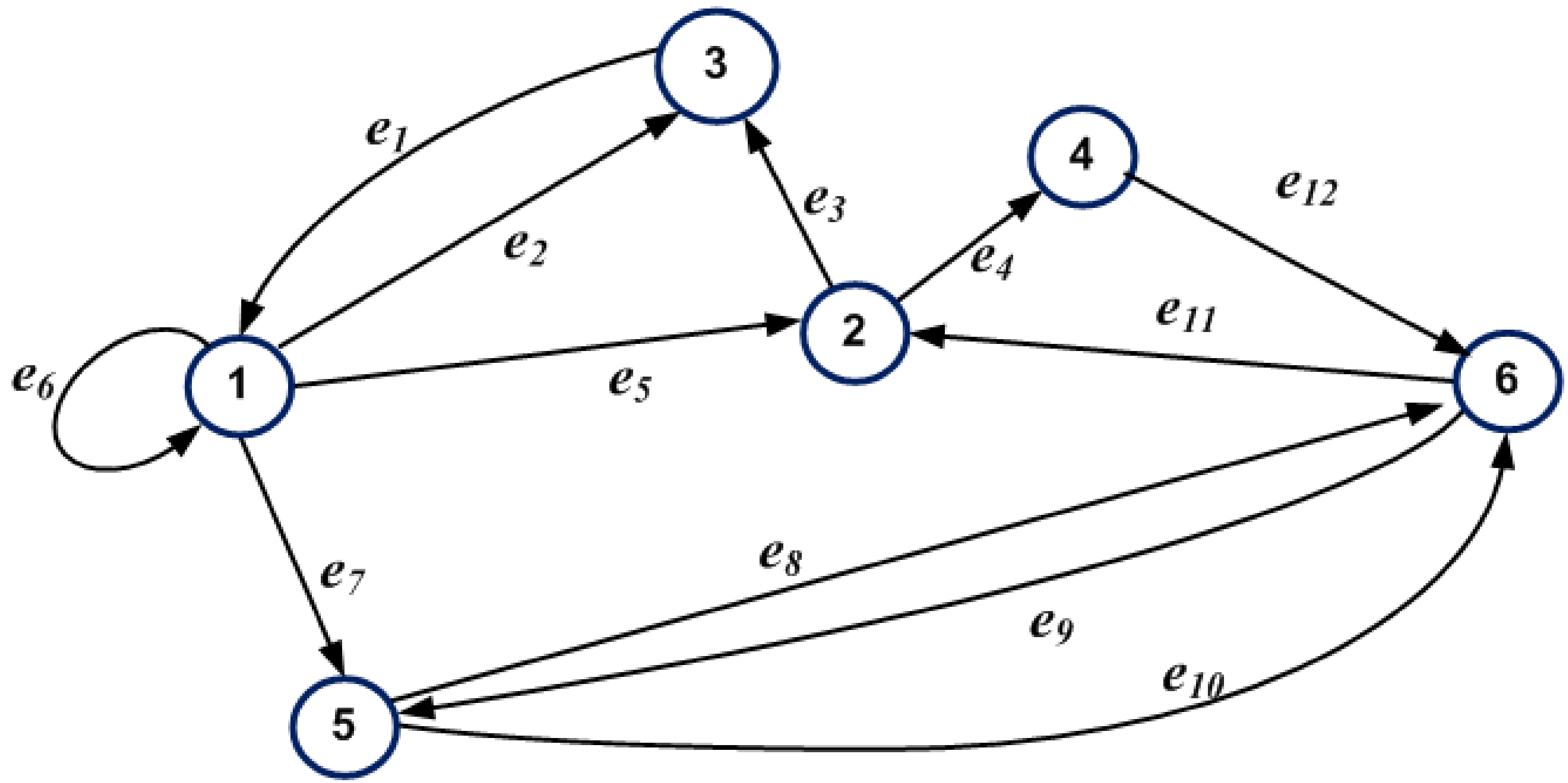
- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{daca } u = v \\ \infty, & \text{daca nu exista } u\text{-}v \text{ drum in } G \\ \min\{l(P) \mid P \text{ este } u\text{-}v \text{ drum in } G\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u-v drum)

- Un u-v drum de lungime $d_G(u,v)$ se numește **drum minim de la u la v**
- Vom nota și $d(u,v)$ dacă G se deduce din context

Exemplu



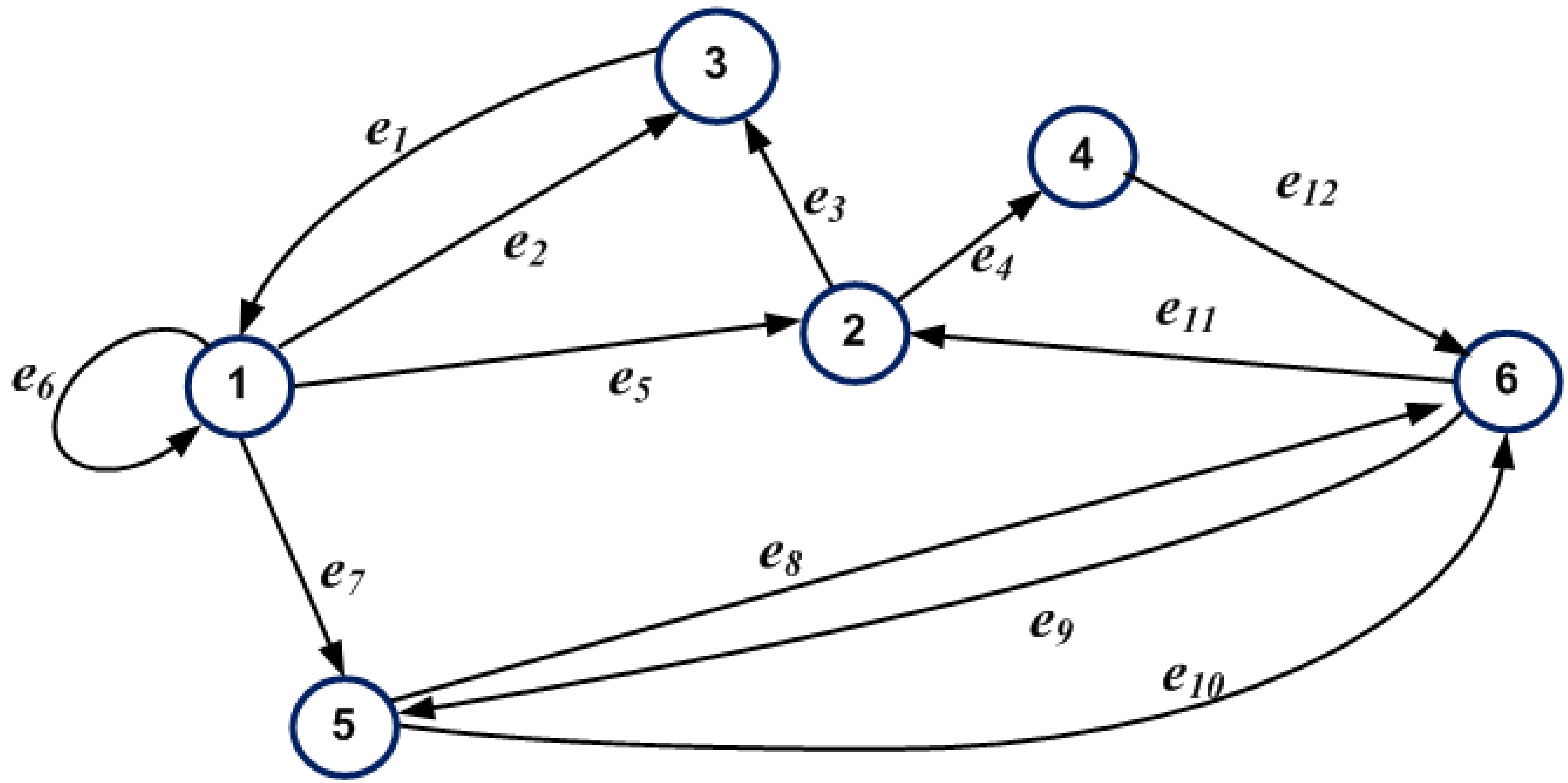
Noțiuni fundamentale

- Un **circuit** este un drum cu capetele identice

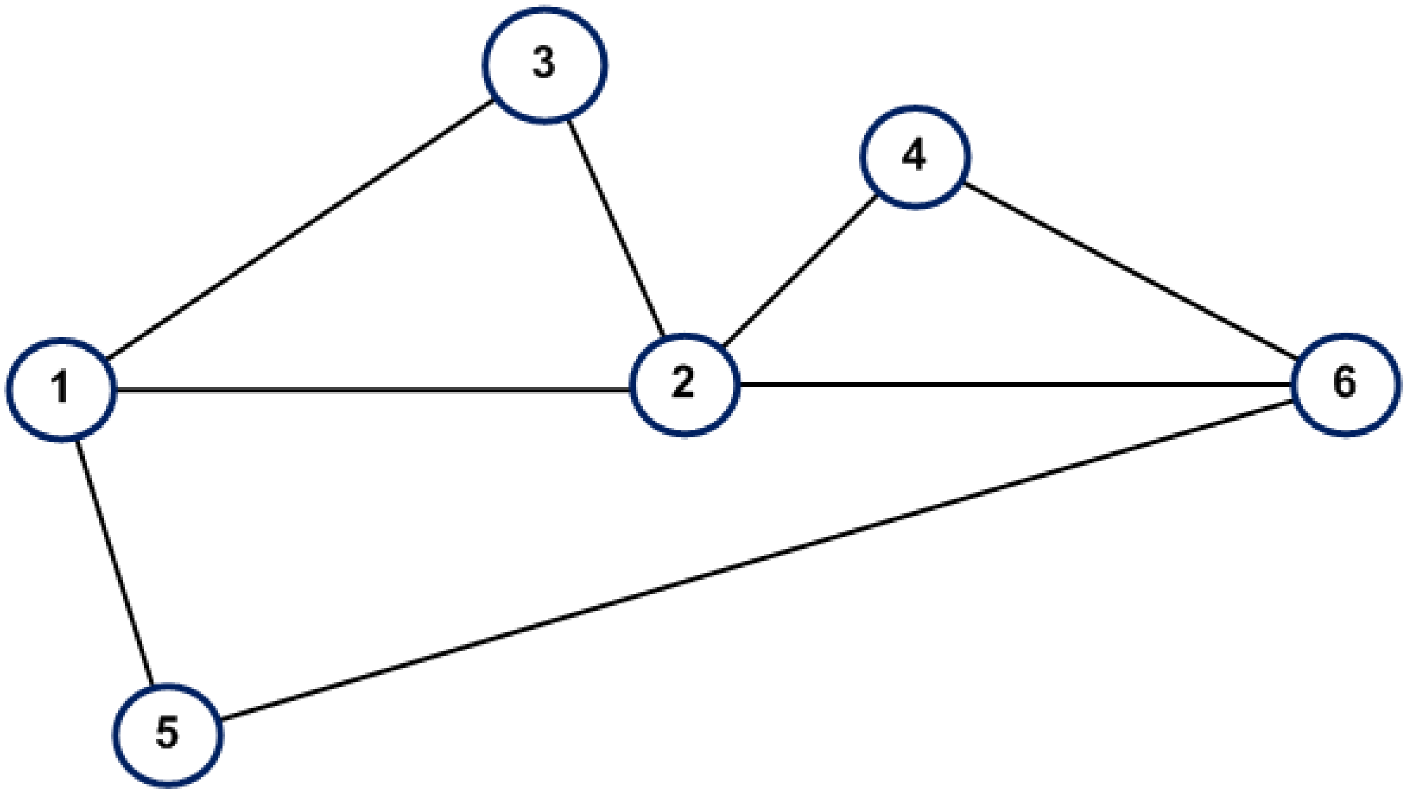
  $$C = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_{m,}\ e_m, v_1]$$

- C este **circuit simplu** – dacă drumul asociat este simplu
- **Circuit elementar**
- **Notații** V(C), E(C)

Exemplu



Exemplu



Noțiuni fundamentale

Pentru G graf **neorientat** – **noțiuni similare**

- Un **lanț** este o secvență P de vârfuri și muchii care se succed alternativ:

  $$P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

  unde $v_1,\ldots,v_m \in V(G)$, $e_1,\ldots,e_{m-1} \in E(G)$, și fiecare muchie e_i are extremitățile v_i și v_{i+1}
- **lanț simplu** / **lanț elementar** / **lungime**
- **ciclu** / **ciclu simplu** / **ciclu elementar**
- **distanță** / **lanț minim**

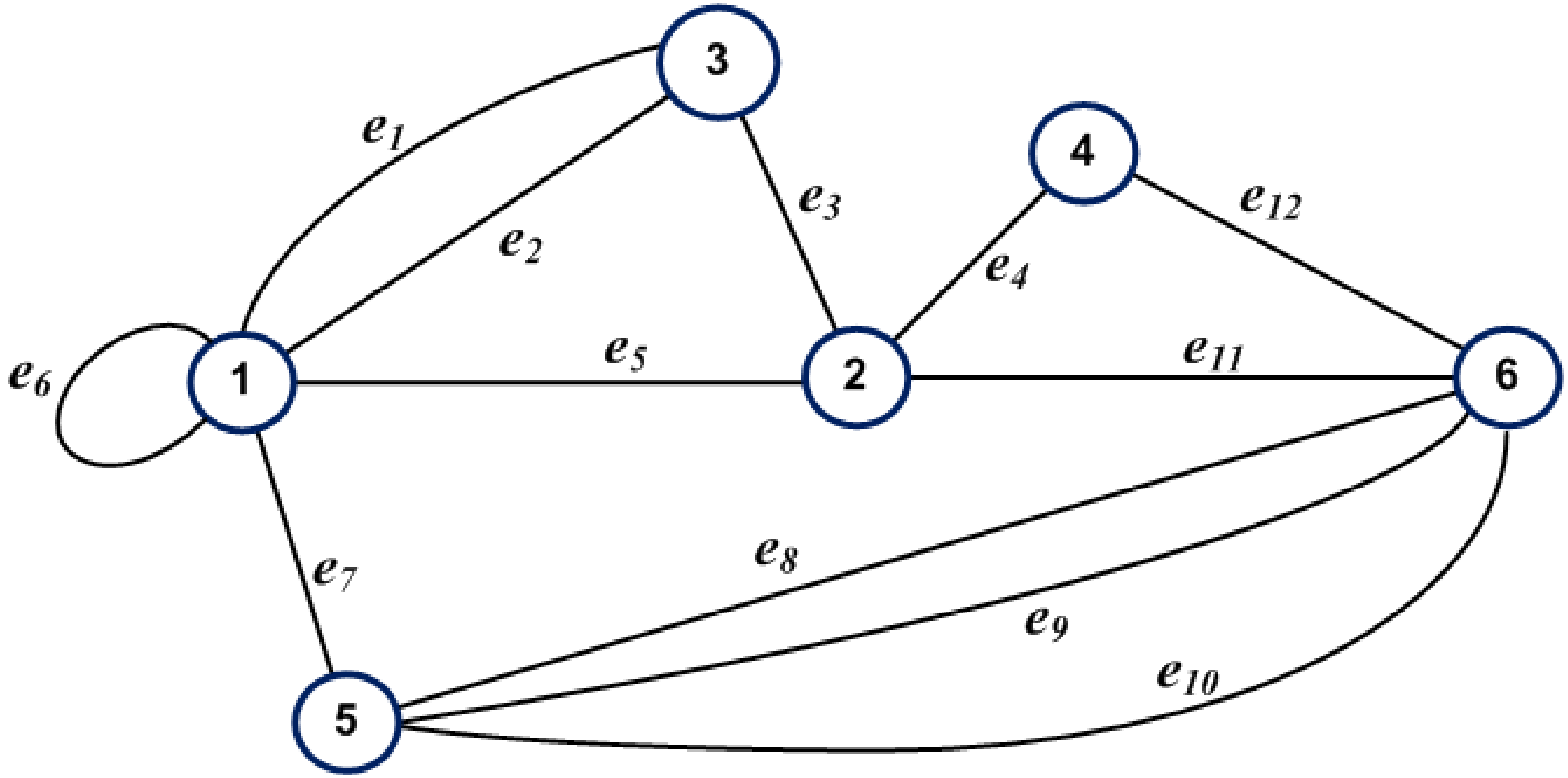
Noțiuni fundamentale

Observație

- În cazul unui graf simplu putem descrie un lanț/ciclu doar ca o **succesiune de vârfuri** (fără a mai preciza și muchiile):

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}, v_m]$$

Exemplu



Noțiuni fundamentale

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

Noțiuni fundamentale

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \prec G}$) dacă

  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

Noțiuni fundamentale

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \le G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \prec G}$) dacă

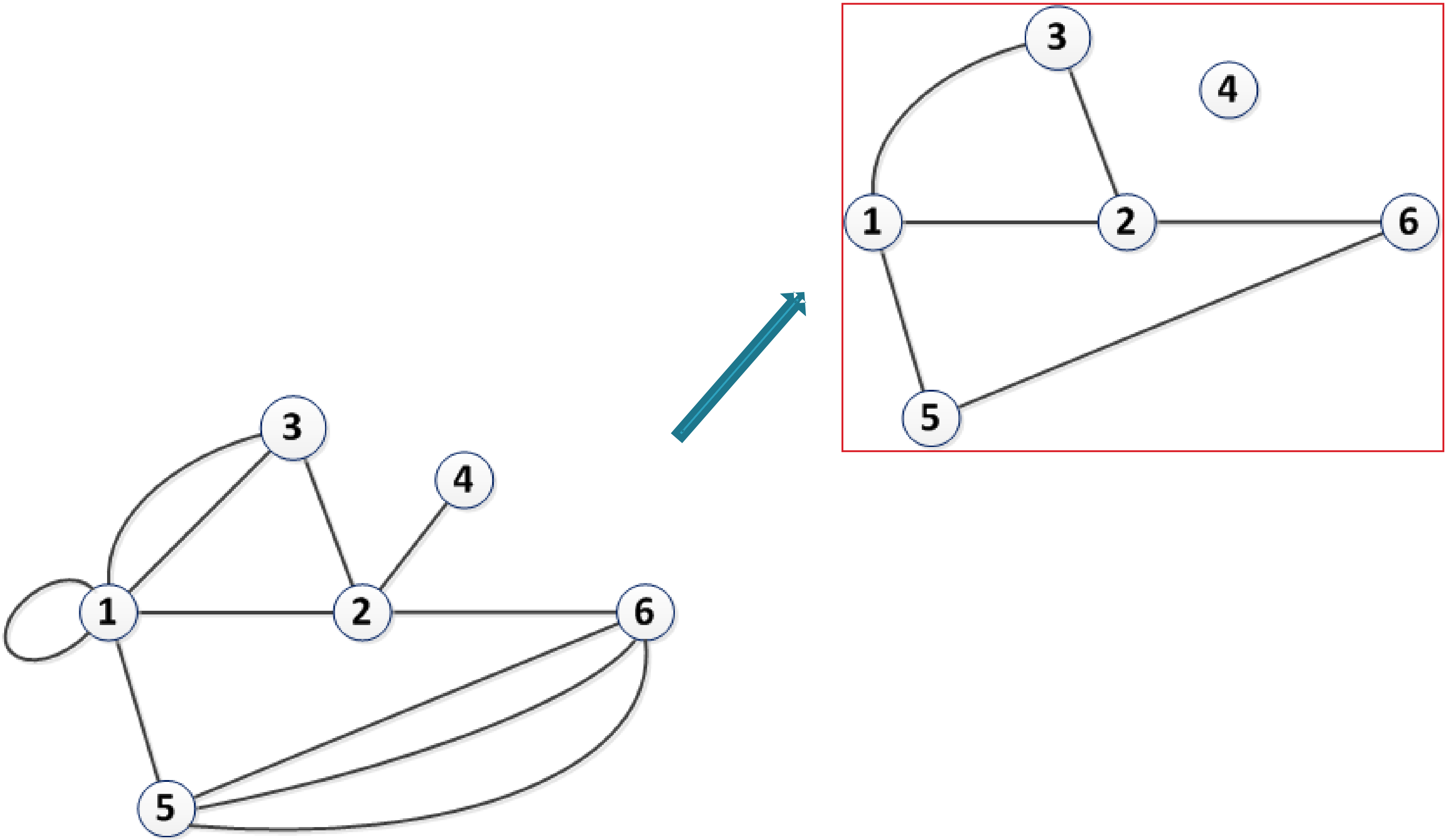
  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf indus de V_1 în** G (vom nota $\mathbf{G_1 = G[V_1]}$) dacă

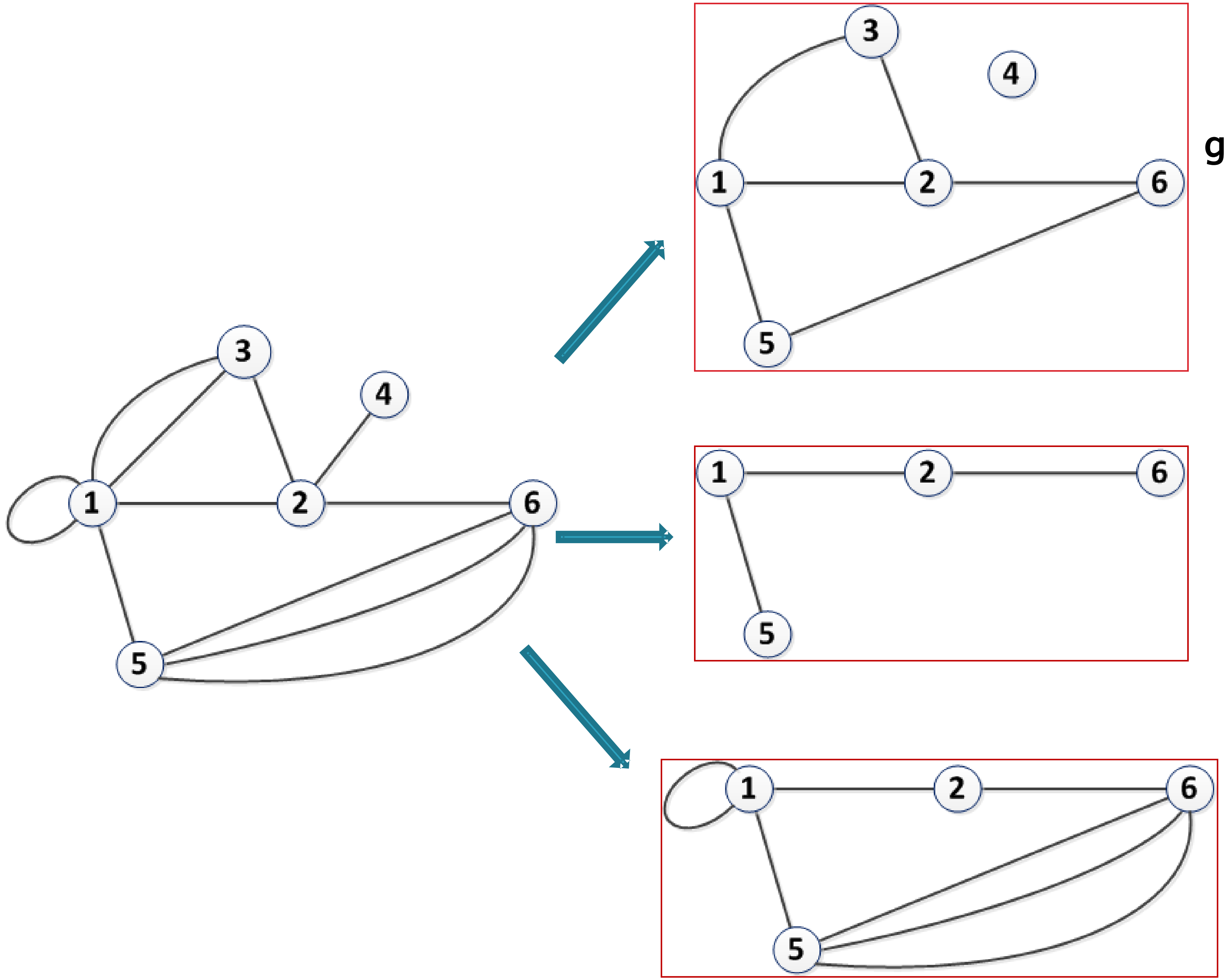
  $V_1 \subseteq V,$

  $E_1 = \{e^{r(e)} \mid e \in E(G),$ e are ambele extremități în $V_1\}$

  (toate arcele/muchiile cu extremități în V_1)



graf parțial



graf parțial

subgraf

subgraf indus de {1,2,5,6}

Noțiuni fundamentale

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă, pentru orice două vârfuri distincte u și v, există un u-v lanț (între orice două vârfuri există un lanț)

Noțiuni fundamentale

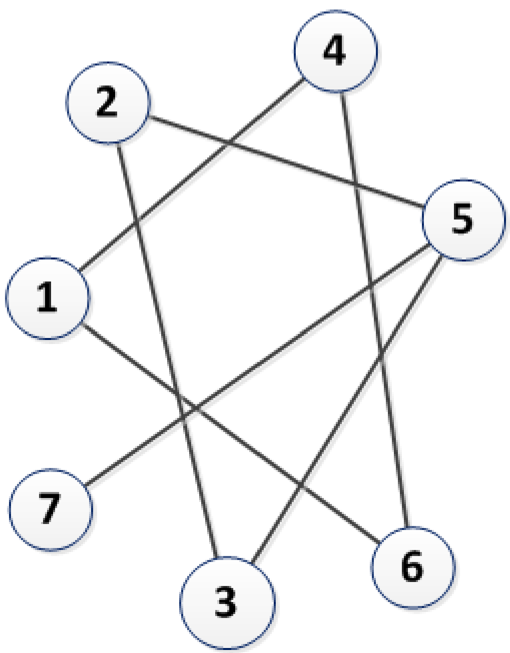
Fie G = (V, E) un graf neorientat

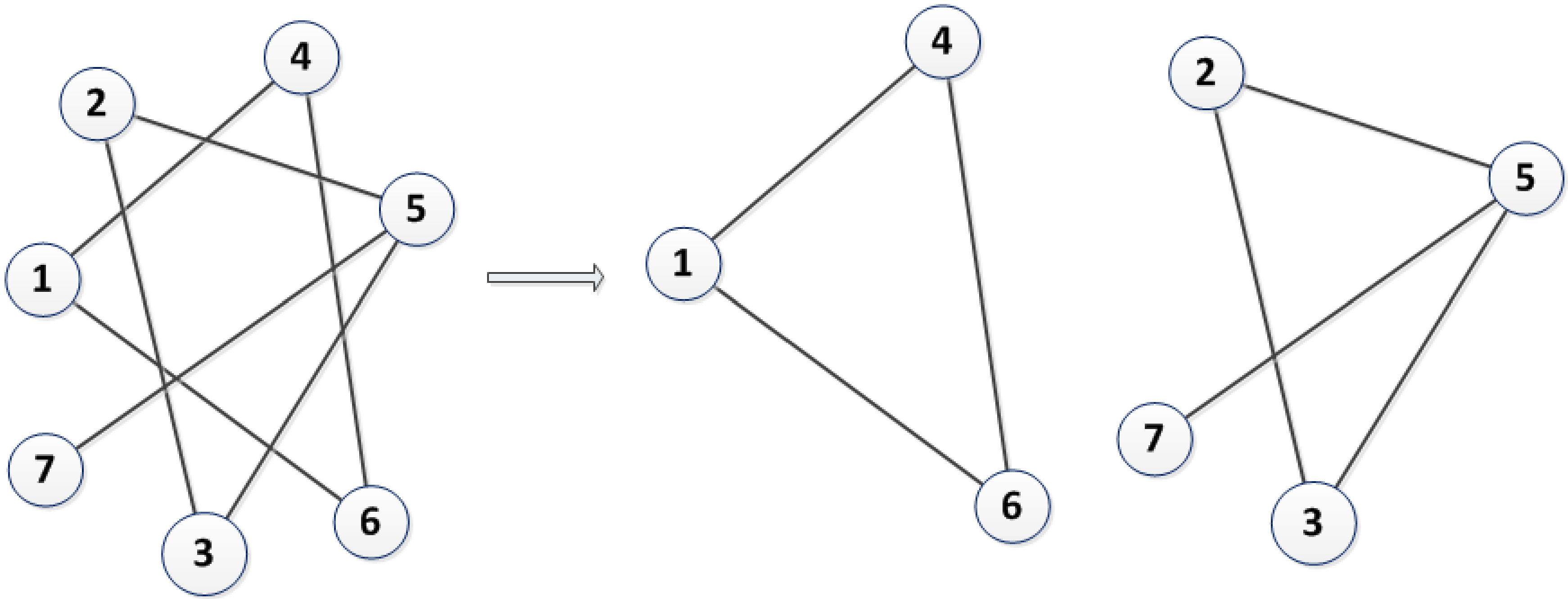
- G este **graf conex** dacă, pentru orice două vârfuri distincte u și v, există un u-v lanț (între orice două vârfuri există un lanț)
- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)

Noțiuni fundamentale

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă, pentru orice două vârfuri distincte u și v, există un u-v lanț (între orice două vârfuri există un lanț)
- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- Pentru cazul orientat - **tare-conexitate**


4
2
5
1
7
3
6



două componente conexe

Notaţii

- $\mathbf{G - v}$, $v \in V(G)$
- $\mathbf{G - e}$, $e \in E(G)$
- $\mathbf{G - V'}$, $V' \subseteq V(G)$
- $\mathbf{G - E'}$, $E' \subseteq E(G)$
- $\mathbf{G + e}$

Graf bipartit

- Un graf neorientat $G = (V, E)$ se numește **bipartit** $\Leftrightarrow$ există o partiție a lui V în două submulțimi nevide **V_1**, **V_2** (**bipartiție**):

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2:

$$|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$$

Graf bipartit

Observație

- $G = (V, E)$ **bipartit** $\Leftrightarrow$ există o colorare a vârfurilor cu două culori:

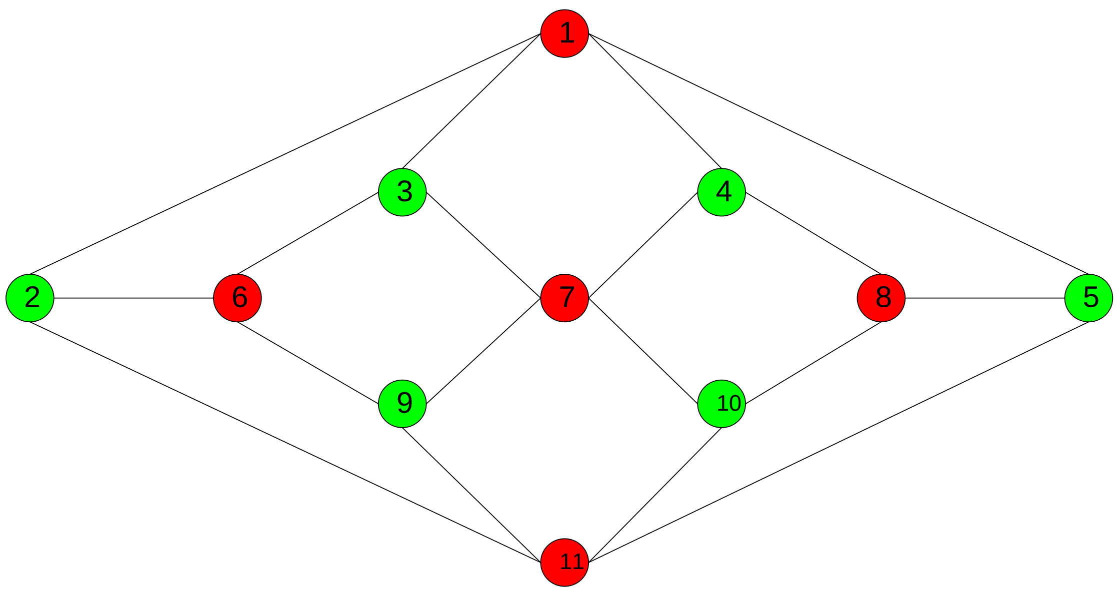
$$c : V \rightarrow \{1, 2\}$$

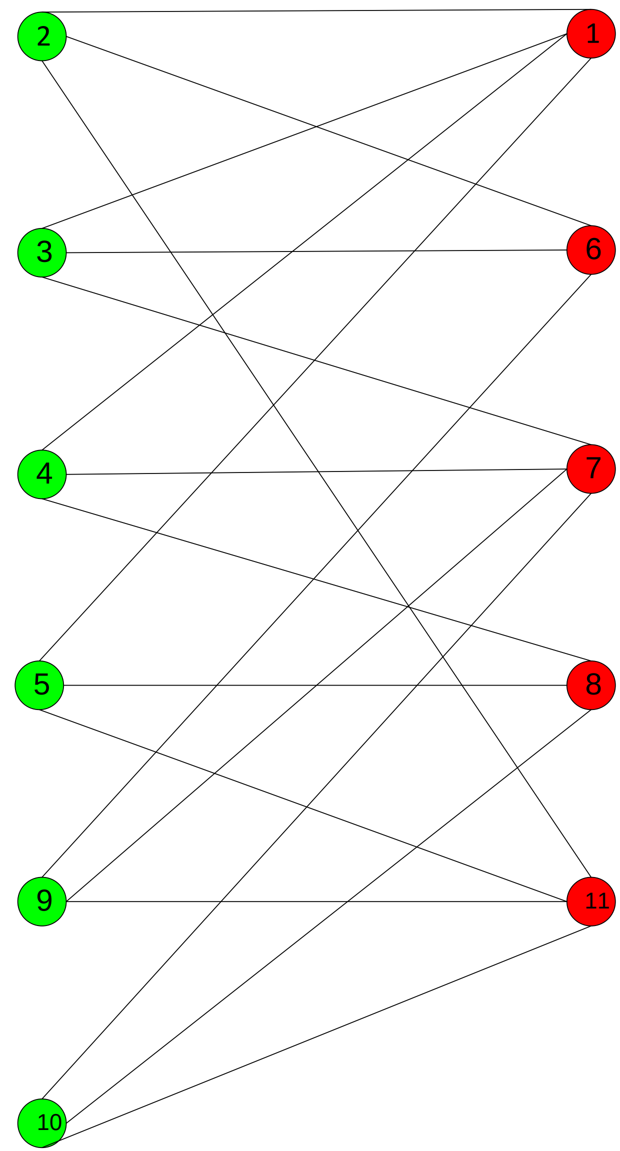
astfel încât pentru orice muchie $e=xy \in E$ avem

$$c(x) \neq c(y)$$

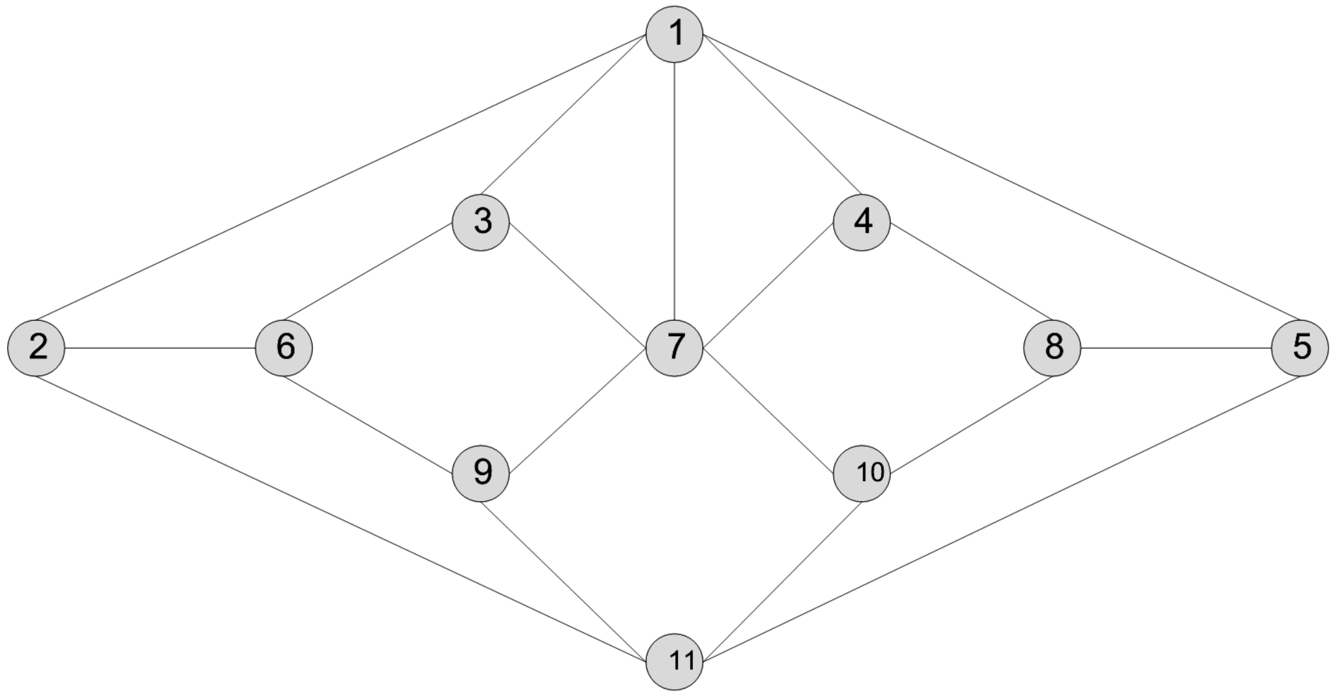
(**bicolorare**)

Graf bipartit



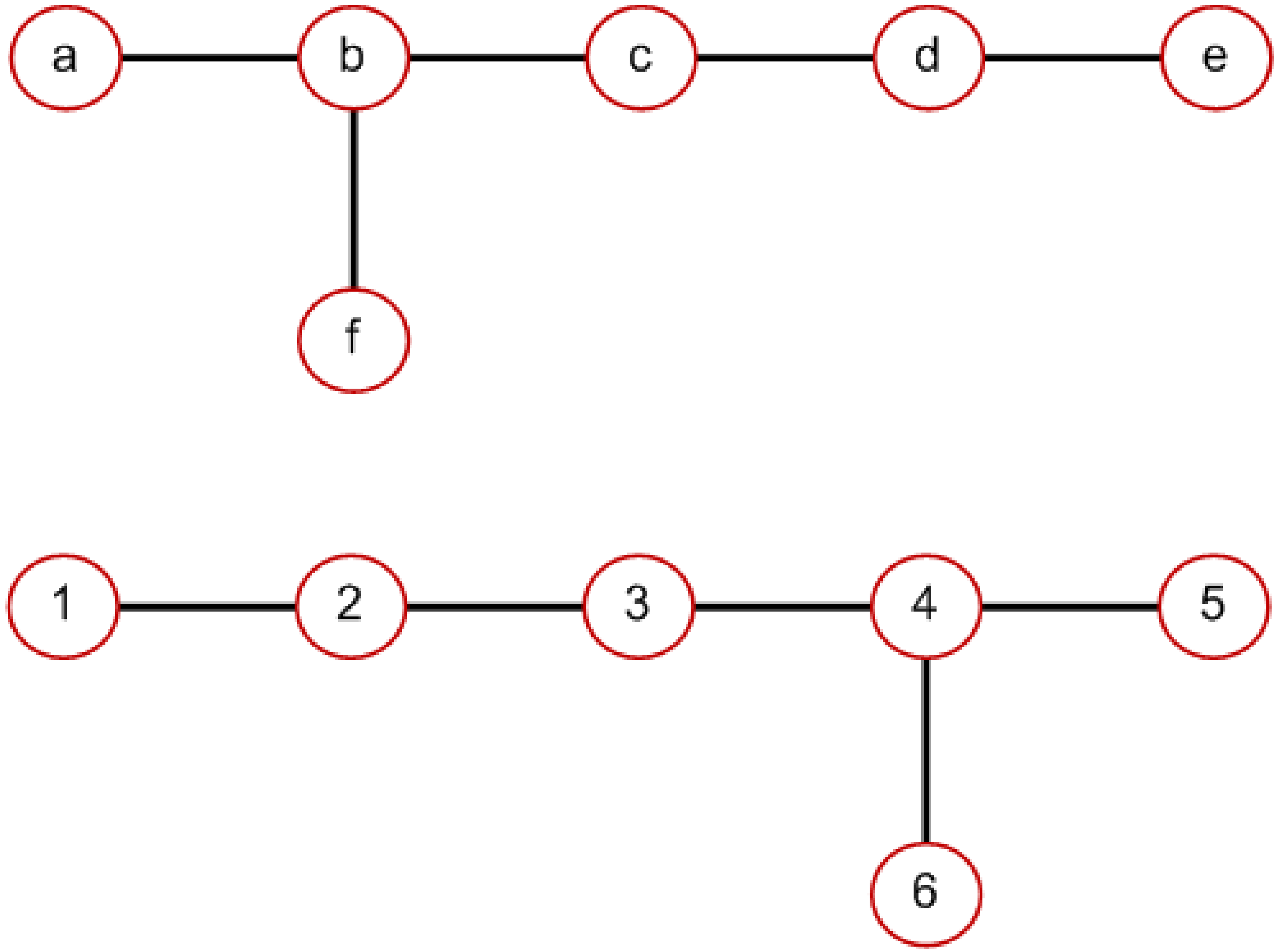


Graf bipartit



nu este bipartit

Izomorfism



Izomorfism

Fie G_1, G_2 două grafuri

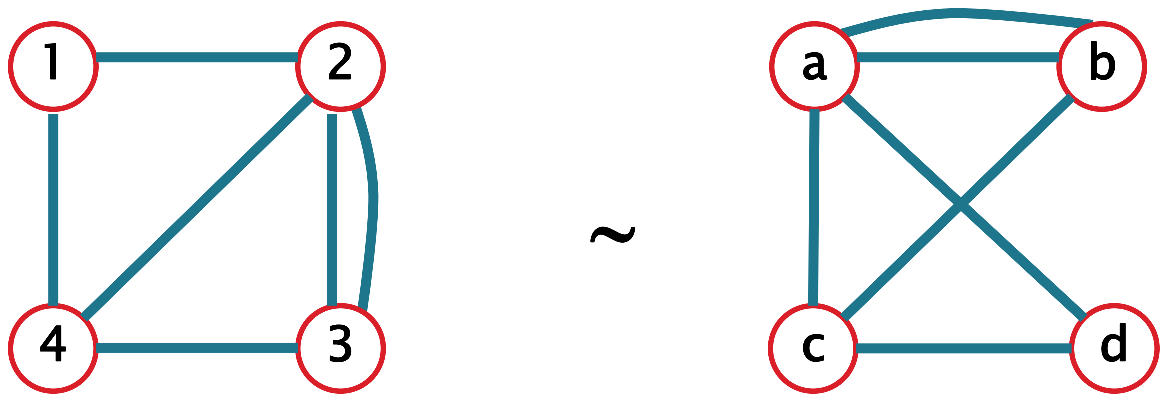
- $G_1 = (V_1, E_1)$, r_1 – funcția de multiplicitate
- $G_2 = (V_2, E_2)$, r_2 – funcția de multiplicitate

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** ($\mathbf{G_1 \sim G_2}$) $\Leftrightarrow$ există $f : V_1 \to V_2$ bijectivă cu

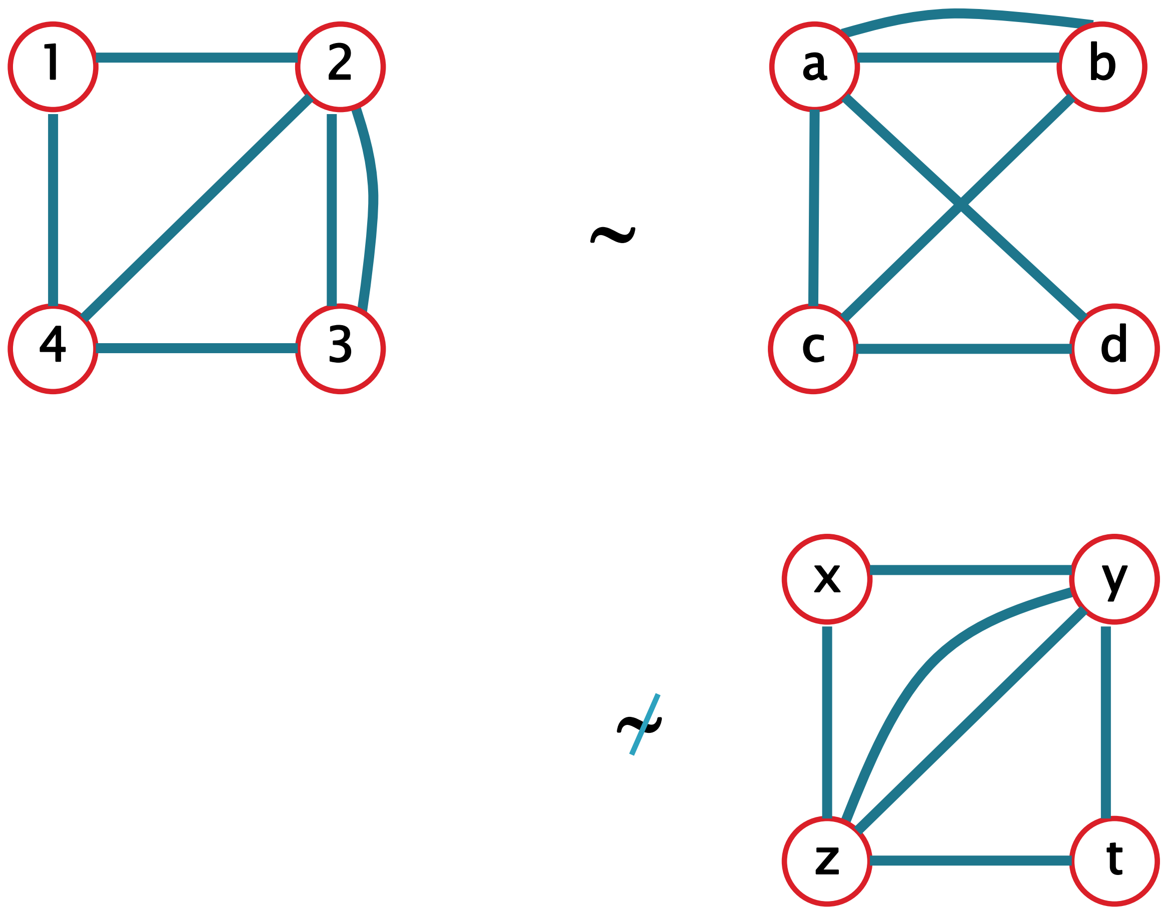
$$\mathbf{r_1(\, uv\,) = r_2(\, f(u)f(v)\,)}$$

pentru orice $u,v \in V_1$

Izomorfism



Izomorfism

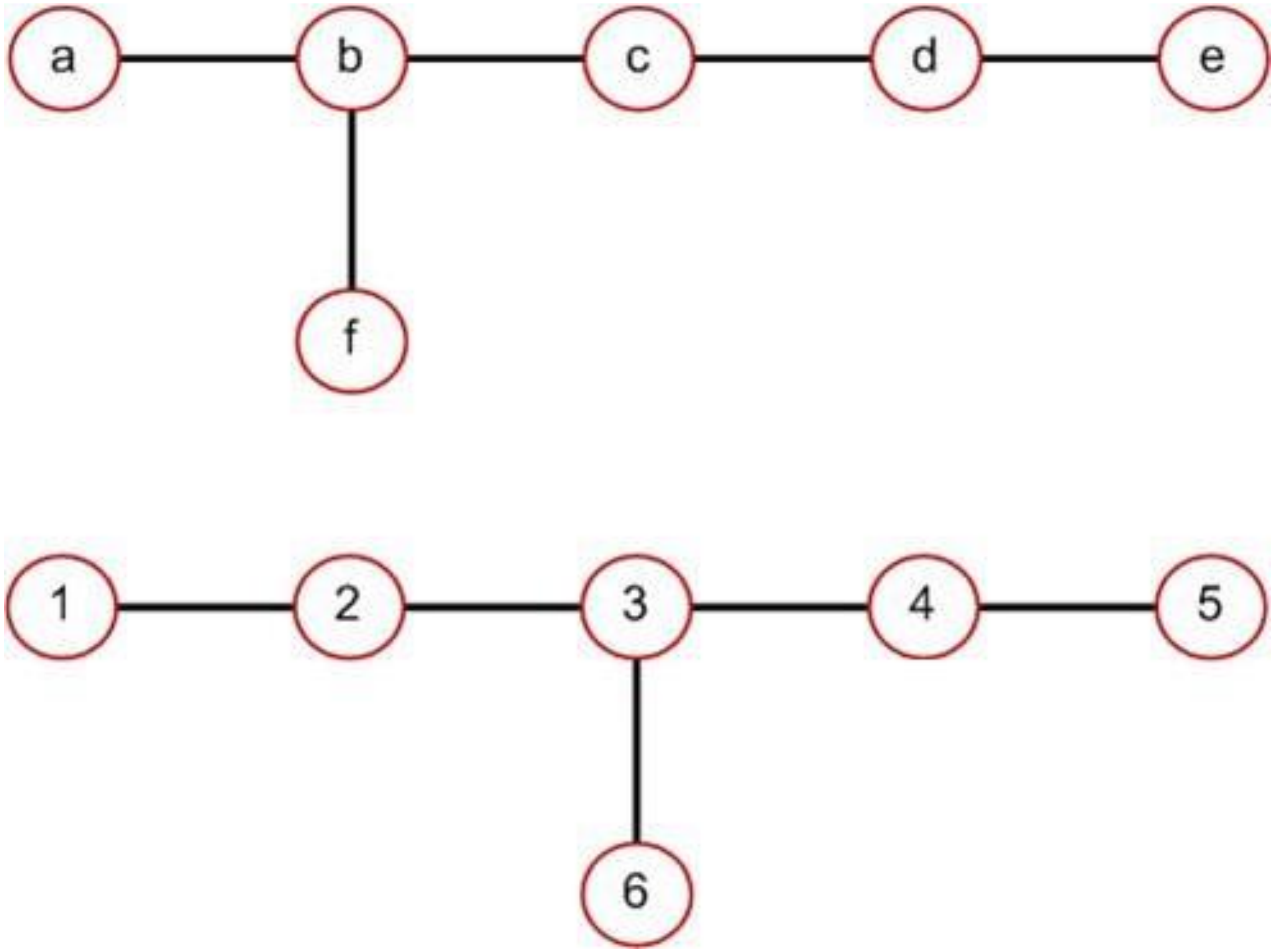


Izomorfism

- $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$

$s(G_1) = s(G_2) \Rightarrow G_1 \sim G_2$?

Izomorfism

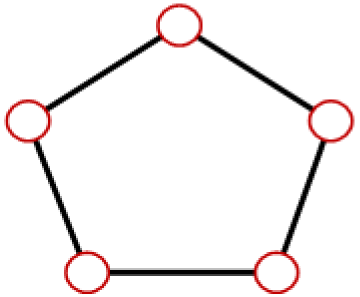


neizomorfe

Grafuri standard

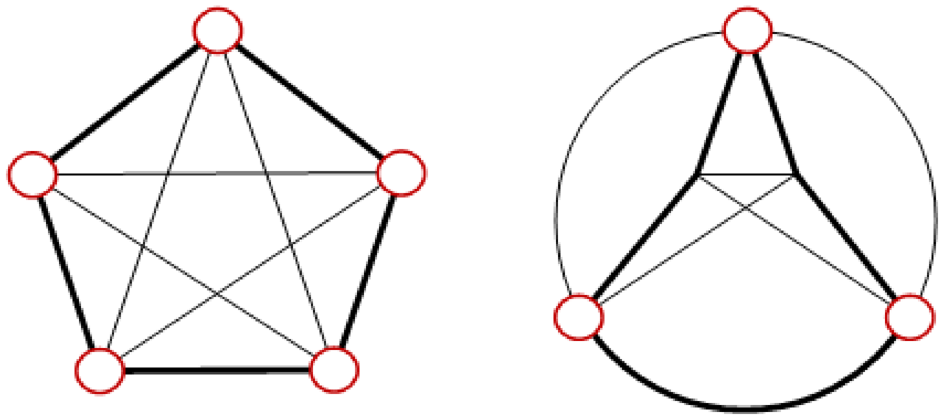
- P_n – lanţ elementar

- C_n – ciclu elementar



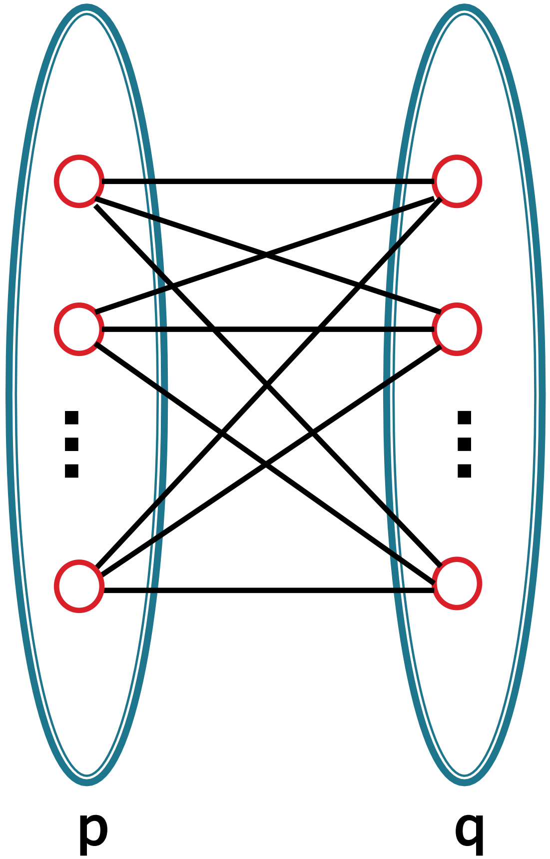
Grafuri standard

- K_n – graf complet



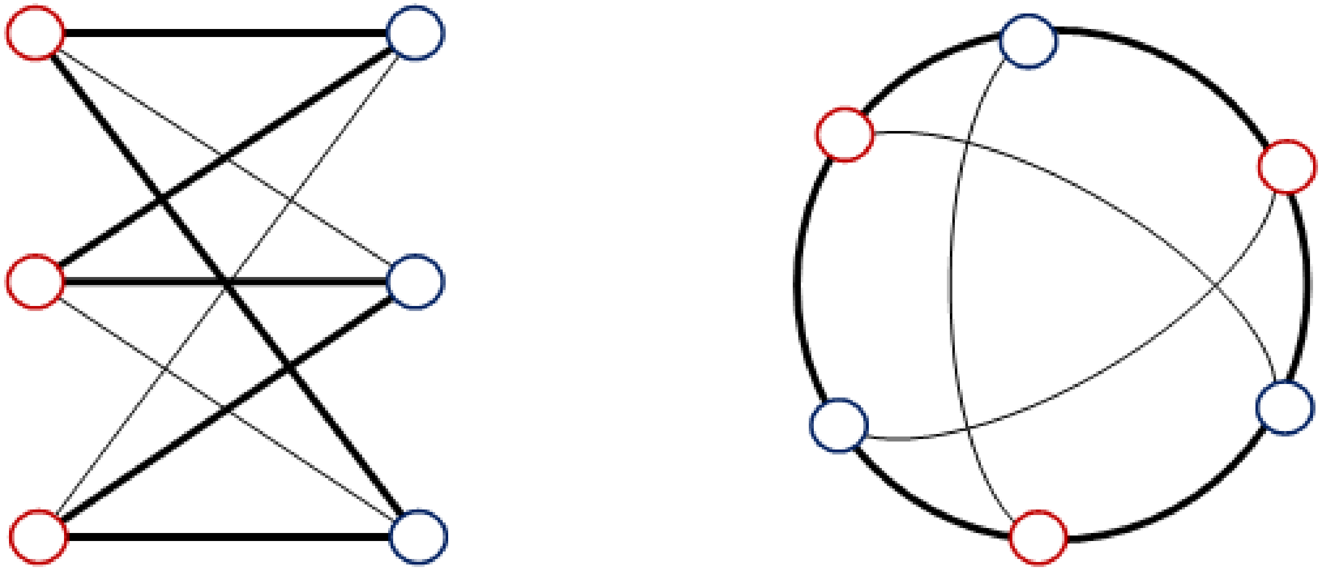
Grafuri standard

- $K_{p,q}$ – graf bipartit complet



Grafuri standard

- $K_{3,3}$



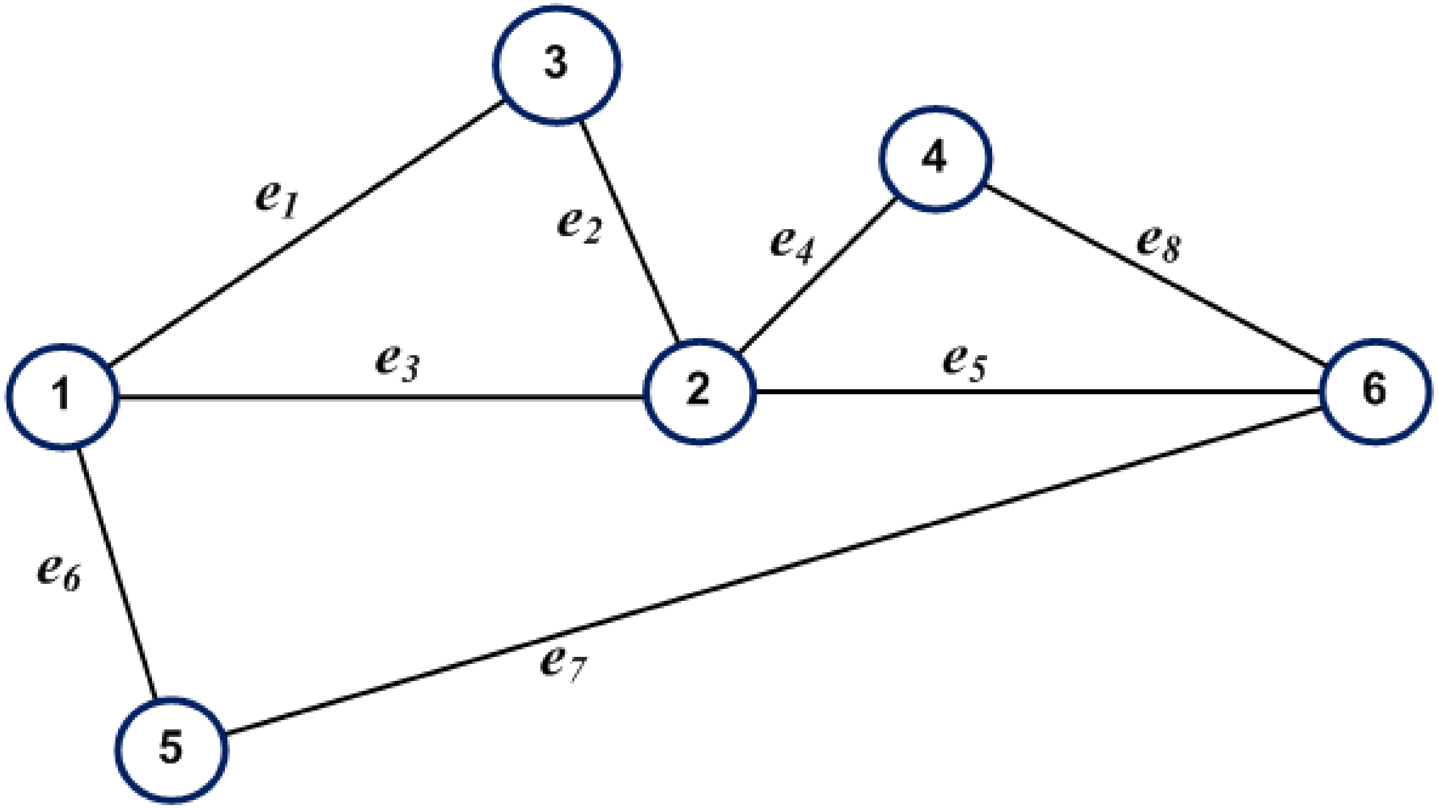
Reprezentarea grafurilor

- **Geometrică**
- **Algebrică**

Reprezentarea grafurilor

- Geometrică
- Algebrică

- Matrice de adiacenţă
- Liste de adiacenţă
- Listă de muchii
- Matrice de incidenţă


3
4
1
2
6
5
e1
e2
e3
e4
e5
e6
e7
e8

Secvenţe de grade

Dată o secvenţă de numere s, se poate construi un graf neorientat având secvenţa gradelor s?

Dar un graf simplu?

- Condiţii necesare
- Condiţii suficiente

Secvenţe de grade

Dată o secvenţă de numere s, se poate construi un graf neorientat având secvenţa gradelor $s=\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$?

- **Condiţii necesare**
  - $s=\{2, 4, 2, 6\}$

Secvenţe de grade

Dată o secvenţă de numere s, se poate construi un graf neorientat având secvenţa gradelor $s=\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$?

- **Condiţii necesare**
  - s={2, 4, 2, 6}
  - s={2, 4, 2, 5}

Secvenţe de grade

Dată o secvenţă de numere s, se poate construi un graf neorientat având secvenţa gradelor $s=\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$?

- Condiţii necesare
  - $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ – număr par

Secvenţe de grade

- Condiţii suficiente
  - $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ – număr par

Secvenţe de grade

- **Teoremă**

Fie $s = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ o secvență de numere naturale.

Avem:

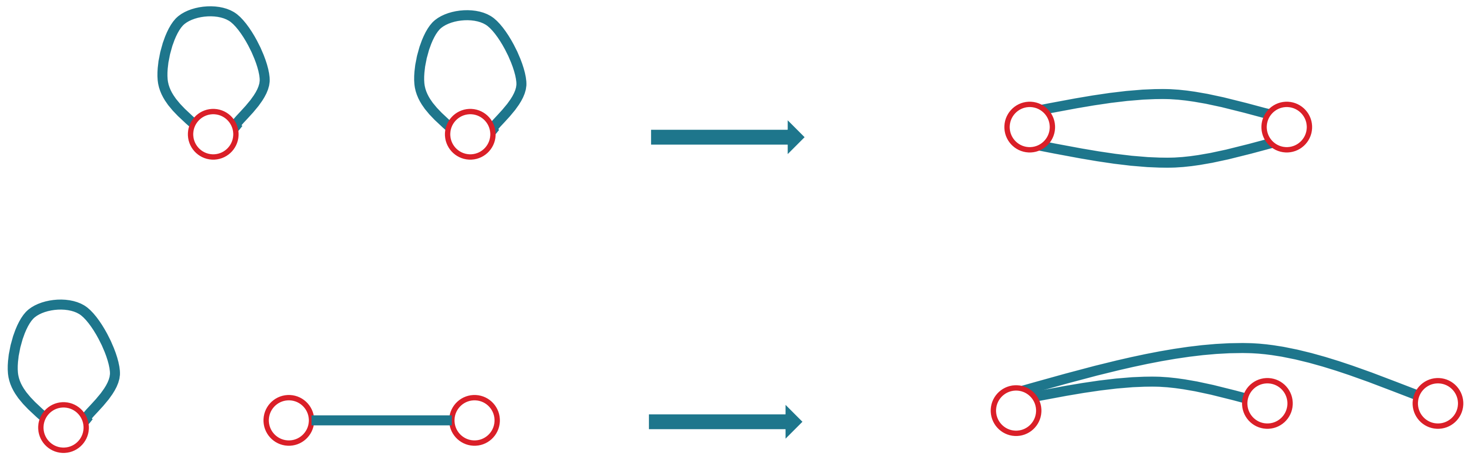
s este secvența gradelor unui graf neorientat

$\Leftrightarrow$

$d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ - număr par

Transformări care conservă gradele

Transformări care conservă gradele



Transformări care conservă gradele