1 SIGNATURI ŞI ALGEBRE MULTISORTATE

Virgil Emil Căzănescu

March 6, 2008

1 Signaturi multisortate

În programare, mai mult decât în orice altă activitate, datele utilizate sunt de mai multe feluri, sau **sorturi** aşa cum vom spune în continuare. Mai mult, de cele mai multe ori, în diferitele construcţii sintactice, într-un anumit loc al acestora nu poate fi plasată decât o dată de un anumit fel(sort). Aceasta ar fi explicaţia faptului că algebrele multisortate constituie una dintre cele mai utile unelte pentru informatica teoretică.

Algebrele la rândul lor nu sunt toate la fel. Felul algebrelor este dat de signatura lor. O signatură are două componenete una pentru date şi una pentru operaţii.

Componenta pentru date este pur şi simplu o mulţime S ale cărei elemente $s \in S$ se numesc sorturi.

Fiecare operaţie este caracterizată de modul acesteia de acţiune. Operaţia acţionează pe un anumit număr fix de date de sorturi precizate şi are rezultatul de un sort dat. Ca exemplu pentru operaţia cu numele o notăm cu

$$o : s_1 s_2 \dots s_n \longrightarrow s$$

faptul ca ea are n argumente de sorturi s_1, s_2, ..., s_n iar rezultatul acesteia este de sort s.

Toate aceste informaţii privind felul algebrei sunt adunate în conceptul de signatură. Cu S^* notăm mulţimea şirurilor finite formate cu elemente din S.

Definiţia 1.1 O signatură

$$(S, \{\Sigma_{s_1 s_2 \dots s_n, s}\}_{s_1 s_2 \dots s_n \in S^*, s \in S})$$

este formată dintr-o muţime S şi o familie de mulţimi

$$\{\Sigma_{s_1 s_2 \dots s_n, s}\}_{s_1 s_2 \dots s_n \in S^*, s \in S}.$$

Pentru fiecare $s_1 s_2 \dots s_n \in S^*$ şi $s \in S$ mulţimea $\Sigma_{s_1 s_2 \dots s_n, s}$ conţine numele operaţiilor cu n argumente de sorturi $s_1 s_2 \dots s_n$ şi rezultat de sort s.

Menţionăm că mulţimile $\Sigma_{s_1 s_2 \dots s_n, s}$ pot avea elemente comune, ceea ce permite modelarea supraîncărcării operatorilor, adică permisiunea ca mai multe operaţii să aibă acelaş nume.

Când nu există pericol de confusie vom scrie pur şi simplu (S, Σ) sau Σ în loc de $(S, \{\Sigma_{s_1 s_2 \dots s_n, s}\}_{s_1 s_2 \dots s_n \in S^*, s \in S})$.

2 Algebre multisortate

Algebrele sunt formate în mare din date şi operaţii. Datele sunt de mai multe sorturi, adică pentru fiecare sort s algebra conţine o mulţime a datelor de sort s. Familia acestor mulţimi, numită şi suportul algebrei, constitue o mulţime sortată.

2.1 Mulţimi şi funcţii multisortate

Fixăm mulţimea S a sorturilor.

Definiţia 2.1 O familie de mulţimi $M = \{M_s\}_{s \in S}$ indexată de S se numeşte mulţime S-sortată.

Observăm că aceeaşi literă este folosită atât pentru întreaga mulţime cât şi pentru toate componentele acesteia.

Conceptele uzuale cu mulţimi se extind pe componente de la mulţimile uzuale la mulţimile S-sortate aşa cum se vede din exemplele de mai jos

$$\{M_s\}_{s \in S} \subseteq \{N_s\}_{s \in S} \text{ dacă şi numai dacă } M_s \subseteq N_s \ \ \forall s \in S,$$

$$\{M_s\}_{s\in S} \cup \{N_s\}_{s\in S} = \{M_s \cup N_s\}_{s\in S},$$
$$\{M_s\}_{s\in S} \cap \{N_s\}_{s\in S} = \{M_s \cap N_s\}_{s\in S},$$
$$\{M_s\}_{s\in S} \times \{N_s\}_{s\in S} = \{M_s \times N_s\}_{s\in S}.$$

O funcţie între două mulţimi sortate duce un element din prima mulţime într-un element de acelaşi sort din a două mulţime.

Definiţia 2.2 O funcţie S-sortată
$$f : M \longrightarrow N$$
este o familie de funcţii $f = \{f_s\}_{s\in S}$ unde componenta de sort s este o funcţie uzuală $f_s : M_s \longrightarrow N_s$.

Ca şi în cazul mulţimilor S-sortate, operaţiile cu funcţiile S-sortate se fac pe componente. Dacă $f : M \longrightarrow N$ şi $g : N \longrightarrow P$ sunt funcţii S-sortate atunci compunerea lor $f; g : M \longrightarrow P$ este definită prin

$$(f; g)_s = f_s; g_s.$$

Compunerea funcţiilor S-sortate este asociativă.

Pentru orice mulţime S-sortată M funcţia ei identitate $1_M : M \longrightarrow M$ este definită prin $(1_M)_s = 1_{M_s}$ pentru orice $s \in S$. Funcţia identitate are efect neutru la compunere.

2.2 Algebre multisortate

Definiţia 2.3 O Σ-algebră $\mathcal{A} = (\{A_s\}_{s\in S}, \{A_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma})$ este formată dintr-o mulţime S-sortată $A = \{A_s\}_{s\in S}$ şi o familie de operaţii $\{A_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$. Pentru claritate, dacă $\sigma \in \Sigma_{s_1 s_2 \ldots s_n, s}$, adică $\sigma : s_1 s_2 \ldots s_n \longrightarrow s$, atunci

$$A_\sigma : A_{s_1} \times A_{s_2} \times \ldots A_{s_n} \longrightarrow A_s.$$

Dacă nu există pericol de confuzie în loc de $(\{A_s\}_{s\in S}, \{A_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma})$ vom scrie mai simplu (A_s, A_σ).

Din definiţia de mai sus rezultă că dacă $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$ unde λ este şirul vid din S^*, atunci $A_\sigma \in A_s$. Deci operaţiile fără argumente, numite şi **constante**, sunt elemente ale algebrei de sort corespunzător sortului rezultat.

Vom continua prin a defini pentru algebrele multisortate cele mai uzuale concepte specifice algebrei: morfisme, subalgebre, algebre libere, congruenţe.

3 Morfisme de algebre multisortate

Un morfism între două algebre multisortate, asemănător oricărui morfisrm de structuri algebrice, este o funcţie multisortată între suporturile celor două algebre care verifică o condiţie suplimentară. Pentru a scrie această condiţie pentru cazul algebrelor multisortate să plecăm de la conceptul uzual de morfism pentru o structură algebrică bazată pe o operaţie binară. $h : (A, *) \longrightarrow (B, \&)$ este morfism dacă

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)h(a * b) = h(a)\&h(b).$$

Să analizăm egalitatea de mai sus. Pentru un număr de elemente arbitrare din prima algebră egal cu numărul de argumente ale operaţiei evaluăm cei doi membri

- membrul stâng:

1) se aplică operaţia din prima algebră elementelor din prima algebra
2) se aplica morfismul h rezultatului obţinut

- membrul drept:

1) se aplică morfismul h elementelor din prima algebra obţinându-se nişte elemente din a doua algebră
2) se aplică operaţia din a doua algebră acestor elemente

- se cere ca rezultatul evalării celor doi membri să fie egali.

Să facem acelaşi lucru pentru două algebre multisortate $\mathcal{A} = (A_s, A_\sigma)$, $\mathcal{B} = (B_s, B_\sigma)$ şi o funcţie S-sortată $h : A \longrightarrow B$. Condiţia de mai sus trebuie pusă pentru fiecare operaţie cu numele $\sigma : s_1 s_2 \ldots s_n \longrightarrow s$ şi oricare ar fi elementele $a_1 \in A_{s_1}$, $a_2 \in A_{s_2} \ldots a_n \in A_{s_n}$

- membrul stâng:

1) se aplică operaţia din prima algebră elementelor din prima algebra: $A_\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
2) se aplica morfismul h rezultatului obţinut $h_s(A_\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n))$

- membrul drept:
1) se aplică morfismul h elementelor din prima algebra obţinându-se nişte elemente din a doua algebră: $h_{s_1}(a_1), h_{s_2}(a_2), \ldots, h_{s_n}(a_n)$
2) se aplică operaţia din a doua algebră acestor elemente: $B_\sigma(h_{s_1}(a_1), h_{s_2}(a_2), \ldots, h_{s_n}(a_n))$
- se cere ca rezultatul evalării celor doi membri să fie egali.

$$h_s(A_\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = B_\sigma(h_{s_1}(a_1), h_{s_2}(a_2), \ldots, h_{s_n}(a_n)).$$

Definiţia 3.1 Funcţia S-sortată $h : A \longrightarrow B$ este un morfism de Σ-algebre multisortate $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ dacă pentru orice $s_1s_2\ldots s_n \in S^*$, pentru orice $s \in S$, pentru orice $\sigma \in \Sigma_{s_1s_2\ldots s_n,s}$, pentru orice $a_1 \in A_{s_1}$, $a_2 \in A_{s_2}$,...,$a_n \in A_{s_n}$

$$h_s(A_\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = B_\sigma(h_{s_1}(a_1), h_{s_2}(a_2), \ldots, h_{s_n}(a_n)).$$

Este util să remarcăm că există câte o condiţie pentru fiecare nume de operaţie. În cazul operaţiilor fără argumente, aşa zisele constante, condiţia de morfism este pentru orice $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$ egalitatea $h_s(A_\sigma) = B_\sigma$. Cu alte cuvinte morfismele trebuie să păstreze constantele. Pe cazuri particulare observăm că orice morfism de monoizi duce elementul neutru în elementul neutru şi că orice morfism de semiinele duce elementul neutru la adunare, respectiv la înmulţire tot în elementul neutru la adunare respectiv la înmulţire.

Observăm că funcţia identitate 1_A este morfism de Σ-algebre de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{A}$.

Propoziţie 3.2 *Compunerea ca funcţii S-sortate a două morfisme de Σ-algebre este un morfism de Σ-algebre.*

Demonstraţie: Fie $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ şi $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ două morfisme de Σ-algebre. Probăm că $h; g : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ este morfism de Σ-algebre.

Fie $s_1s_2\ldots s_n \in S^*$, $s \in S$, $\sigma \in \Sigma_{s_1s_2\ldots s_n,s}$ şi $a_1 \in A_{s_1}$, $a_2 \in A_{s_2}$, ..., $a_n \in A_{s_n}$. Observăm că

$$(h; g)_s(A_\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = g_s(h_s(A_\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n))) = g_s(B_\sigma(h_{s_1}(a_1), h_{s_2}(a_2), \ldots, h_{s_n}(a_n))) =$$

$$= C_\sigma(g_{s_1}(h_{s_1}(a_1)), g_{s_2}(h_{s_2}(a_2)), \ldots, g_{s_n}(h_{s_n}(a_n))) = C_\sigma((h; g)_{s_1}(a_1), (h; g)_{s_2}(a_2), \ldots, (h; g)_{s_n}(a_n)). \ \square$$

Compunerea morfismelor de Σ-algebre este asociativă.

Morfismul identitate are efect neutru la compunere.

3.1 Izomorfisme de algebre multisortate

Definiţia 3.3 Morfismul de Σ-algebre $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ se numeşte **izomorfism** dacă există morfismul $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ cu proprietăţile $h; g = 1_\mathcal{A}$ şi $g; h = 1_\mathcal{B}$.

Dacă există, morfismul g din definiţia de mai sus este unic. Întradevăr dacă $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ este un alt morfism cu proprietăţile $h; f = 1_\mathcal{A}$ şi $f; h = 1_\mathcal{B}$. Observăm că

$$g = g; 1_\mathcal{A} = g; (h; f) = (g; h); f = 1_\mathcal{B}; f = f.$$

Datorită unicităţii sale, conform uzanţelor morfismul g, denumit şi inversul lui h, este notat în continuare cu h^{-1}.

Observăm că morfismele identitate sunt izomorfisme. In plus $(1_\mathcal{A})^{-1} = 1_\mathcal{A}$.

Propoziţie 3.4 *Un morfism este izomorfism dacă şi numai dacă are toate componentele bijective*

Demonstraţie: Fie $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un morfism de Σ-algebre.

Presupunem că h este izomorfism, prin urmare există morfismul $h^{-1} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ cu proprietăţile $h; h^{-1} = 1_\mathcal{A}$ şi $h^{-1}; h = 1_\mathcal{B}$. Rezultă că pentru orice sort $s \in S$ au loc egalităţile $h_s; h_s^{-1} = 1_{A_s}$ şi $h_s^{-1}; h_s = 1_{B_s}$, adică funcţia h_s este inversabilă pentru orice $s \in S$, deci toate componentele h_s ale lui h sunt bijecţii.

Reciproc, presupunem că toate componentele h_s ale lui h sunt bijecţii. Prin urmare pentru orice $s \in S$ există funcţia $h_s^{-1} : B_s \longrightarrow A_s$ cu proprietăţile $h_s; h_s^{-1} = 1_{A_s}$ şi $h_s^{-1}; h_s = 1_{B_s}$. De aici notând $h^{-1} = \{h_s^{-1}\}_{s\in S}$ rezultă că $h; h^{-1} = 1_A$ şi $h^{-1}; h = 1_B$.

Pentru a încheia demonstraţia mai trebuie arătat că funcţia S-sortată $h^{-1} : B \longrightarrow A$ este un morfism de Σ-algebre $h^{-1} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$.

Fie $s_1s_2\ldots s_n \in S^*$, $s \in S$, $\sigma \in \Sigma_{s_1s_2\ldots s_n,s}$ şi $b_1 \in B_{s_1}$, $b_2 \in B_{s_2}$, ..., $b_n \in B_{s_n}$. Deoarece h este morfism deducem

$$h_s(A_\sigma(h_{s_1}^{-1}(b_1), h_{s_2}^{-1}(b_2), \ldots, h_{s_n}^{-1}(b_n))) = B_\sigma(h_{s_1}(h_{s_1}^{-1}(b_1)), h_{s_2}(h_{s_2}^{-1}(b_2)), \ldots, h_{s_n}(h_{s_n}^{-1}(b_n))) = B_\sigma(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Aplicând funcţia h_s^{-1} ambilor membri deducem

$$A_\sigma(h_{s_1}^{-1}(b_1), h_{s_2}^{-1}(b_2), \ldots, h_{s_n}^{-1}(b_n)) = h_s^{-1}(B_\sigma(b_1, b_2, \ldots, b_n))$$

deci $h^{-1} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ este morfism de Σ-algebre.

Propoziţie 3.5 *Compunerea a două izomorfisme este un izomorfism. În plus*

$$(f; g)^{-1} = g^{-1}; f^{-1}$$