Curs 7

Scop

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

- O ecuație este $(\forall X)t \doteq_s t'$, unde $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$.
- O ecuație condiționată este $(\forall X)t \doteq_s t'$ if H, unde $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$ și $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$.

Scop

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

- O ecuație este $(\forall X)t \doteq_s t'$, unde $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$.
- O ecuație condiționată este $(\forall X)t \doteq_s t'$ if H, unde $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$ și $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$.

Scop: să înțelegem când o ecuație se poate obține din alte ecuații (condiționate)!

- Două puncte de vedere diferite:
  - semantic: când o ecuație este adevărată într-o algebră anume
  - sintactic: axiome + reguli de deducție care ne permit să deducem alte ecuații
- O dată fixate pentru logica ecuațională, vom arăta că ele coincid, i.e. corectitudinea și completitudinea logicii ecuaționale.

Cuprins

Deducție ecuațională

Două variante

În funcție de tipul ipotezelor avem două variante:

- Cazul necondiționat:
  - E mulțime de ecuații necondiționate.
  - Vom încerca să înțelegem ce înseamnă $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.
- Cazul condiționat:
  - Γ mulțime de ecuații condiționate.
  - Vom încerca să înțelegem ce înseamnă $\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.

Cazul necondiționat

Regulile deducției ecuaționale (Birkhoff)

- (S, Σ) signatură multisortată, X și Y mulțimi de variabile
- E mulțime de ecuații necondiționate

Regulile deducției ecuaționale (Birkhoff)

- (S, Σ) signatură multisortată, X și Y mulțimi de variabile
- E mulțime de ecuații necondiționate

$$\boxed{\text{R} \quad \frac{}{(\forall X)t \stackrel{\cdot}{=}_s t}}$$

Regulile deducției ecuaționale (Birkhoff)

- (S, Σ) signatură multisortată, X și Y mulțimi de variabile
- E mulțime de ecuații necondiționate

R $\dfrac{}{(\forall X)t \doteq_s t}$

S $\dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_2 \doteq_s t_1}$

Regulile deducției ecuaționale (Birkhoff)

- (S, Σ) signatură multisortată, X și Y mulțimi de variabile
- E mulțime de ecuații necondiționate

R $\quad \dfrac{}{(\forall X)t \doteq_s t}$

S $\quad \dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_2 \doteq_s t_1}$

T $\quad \dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2, \ (\forall X)t_2 \doteq_s t_3}{(\forall X)t_1 \doteq_s t_3}$

Regulile deducției ecuaționale (Birkhoff)

- (S, Σ) signatură multisortată, X și Y mulțimi de variabile
- E mulțime de ecuații necondiționate

$$\boxed{\mathsf{R} \quad \frac{}{(\forall X)t \doteq_s t}}$$

$$\boxed{\mathsf{S} \quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_2 \doteq_s t_1}}$$

$$\boxed{\mathsf{T} \quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2, \ (\forall X)t_2 \doteq_s t_3}{(\forall X)t_1 \doteq_s t_3}}$$

$$\boxed{\mathsf{C}\Sigma \quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1, \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)}}, \text{ unde } \sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$$

Regulile deducției ecuaționale (Birkhoff)

- (S, Σ) signatură multisortată, X și Y mulțimi de variabile
- E mulțime de ecuații necondiționate

$$\mathrm{R}\quad \frac{}{(\forall X)t \doteq_s t}$$

$$\mathrm{S}\quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_2 \doteq_s t_1}$$

$$\mathrm{T}\quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2,\ (\forall X)t_2 \doteq_s t_3}{(\forall X)t_1 \doteq_s t_3}$$

$$\mathrm{C}\Sigma\quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t_1', \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t_n'}{(\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t_1', \ldots, t_n')}\text{, unde } \sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$$

$$\mathrm{Sub}_E\quad \frac{}{(\forall X)\tilde{\theta}(t) \doteq_s \tilde{\theta}(t')}\text{, unde } (\forall Y)t \doteq_s t' \in E \text{ și } \theta : Y \to T_\Sigma(X)$$

Observații

- R - reflexivitate
- S - simetrie
- T - tranzitivitate
- $C\Sigma$ - compatibilitate cu operații
- Sub_E - substituție

- Dacă $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$, există un unic morfism $\tilde{\theta} : T_\Sigma(Y) \to T_\Sigma(X)$ a.î. $\tilde{\theta}_s(y) = \theta_s(y)$, or. $y \in Y_s$

- Convenție: Pentru ușurință, vom identifica substituția $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$ cu morfismul $\tilde{\theta} : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(Y)$!

$$\boxed{\mathrm{Sub}_E \quad \frac{}{(\forall X)\tilde{\theta}(t) \doteq_s \tilde{\theta}(t')}} \quad \text{vs.} \quad \boxed{\mathrm{Sub}_E \quad \frac{}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}}$$

Deducția ecuațională

Fie E o mulțime de ecuații numite axiome sau ipoteze.

Deducția ecuațională

Fie E o mulțime de ecuații numite axiome sau ipoteze.

Spunem că ecuația $\epsilon := (\forall X)t \doteq_s t'$ se deduce ecuațional din E dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ a.î.

Deducția ecuațională

Fie E o mulțime de ecuații numite axiome sau ipoteze.

Spunem că ecuația $\epsilon := (\forall X)t \doteq_s t'$ se deduce ecuațional din E dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ a.î.

- $\epsilon_n = \epsilon$ și

Deducția ecuațională

Fie E o mulțime de ecuații numite axiome sau ipoteze.

Spunem că ecuația $\epsilon := (\forall X)t \doteq_s t'$ se deduce ecuațional din E dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ a.î.

- $\epsilon_n = \epsilon$ și
- pt. or. $i \in \{1, \ldots, n\}$ avem:

Deducția ecuațională

Fie E o mulțime de ecuații numite axiome sau ipoteze.

Spunem că ecuația $\epsilon := (\forall X)t \doteq_s t'$ se deduce ecuațional din E dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ a.î.

- $\epsilon_n = \epsilon$ și
- pt. or. $i \in \{1, \ldots, n\}$ avem:
  - $\epsilon_i \in E$ sau

Deducția ecuațională

Fie E o mulțime de ecuații numite axiome sau ipoteze.

Spunem că ecuația $\epsilon := (\forall X) t \doteq_s t'$ se deduce ecuațional din E dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ a.î.

- $\epsilon_n = \epsilon$ și
- pt. or. $i \in \{1, \ldots, n\}$ avem:
  - $\epsilon_i \in E$ sau
  - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, CΣ, Sub$_E$.

Deducția ecuațională

Fie E o mulțime de ecuații numite axiome sau ipoteze.

Spunem că ecuația $\epsilon := (\forall X)t \stackrel{\cdot}{=}_s t'$ se deduce ecuațional din E dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ a.î.

- $\epsilon_n = \epsilon$ și
- pt. or. $i \in \{1, \ldots, n\}$ avem:
  - $\epsilon_i \in E$ sau
  - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, CΣ, Sub$_E$.

În acest caz

- scriem $E \vdash (\forall X)t \stackrel{\cdot}{=}_s t'$, $E \vdash \epsilon$,
- spunem că ϵ este deductibilă, demonstrabilă, derivabilă din E,
- secvența $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = \epsilon$ este o E-demonstrație pt. ϵ.

Exemplu

Exemplu

- $NAT = (S, \Sigma)$, unde $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{0 :\to s, succ : s \to s\}$
- Deoarece avem un singur sort, putem renunța la cuantificare!
- $E = \{x + 0 \doteq x,\ x + succ(y) \doteq succ(x + y)\}$
- Arătăm că $E \vdash 0 + succ(0) \doteq succ(0)$:

Exemplu

Exemplu

- $NAT = (S, \Sigma)$, unde $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{0 :\to s, succ : s \to s\}$
- Deoarece avem un singur sort, putem renunța la cuantificare!
- $E = \{x + 0 \doteq x,\ x + succ(y) \doteq succ(x + y)\}$
- Arătăm că $E \vdash 0 + succ(0) \doteq succ(0)$:
  1. $0 + succ(0) \doteq succ(0 + 0)$
     (Sub_E pt. $x + succ(y) \doteq succ(x + y) \in E$ și $\{x \leftarrow 0, y \leftarrow 0\}$)
  2. $0 + 0 \doteq 0$
     (Sub_E pt. $x + 0 \doteq x \in E$ si $\{x \leftarrow 0\}$)
  3. $succ(0 + 0) \doteq succ(0)$ $(2, \mathrm{C}_\Sigma)$
  4. $0 + succ(0) \doteq succ(0)$ $(1, 3, \mathrm{T})$

Cazul condiționat

Ipotezele sunt ecuații condiționate

Fie E o mulțime de ecuații necondiționate.

$$\boxed{\mathrm{Sub}_E \quad \frac{}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}}$$, unde $(\forall Y)t \doteq_s t' \in E$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate.

$$\boxed{\mathrm{Sub}_\Gamma \quad \frac{(\forall X)\theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1), \ldots, (\forall X)\theta(u_n) \doteq_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}}$$, unde

$(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.

Dacă $H = \emptyset$, atunci $\boxed{\mathrm{Sub}_\Gamma \quad \frac{}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}}$

Regulile deducției ecuaționale

- (S, Σ) signatură multisortată, X și Y mulțimi de variabile
- Γ mulțime de ecuații condiționate

$$\boxed{\mathrm{R} \quad \frac{}{(\forall X) t \doteq_s t}}$$

$$\boxed{\mathrm{S} \quad \frac{(\forall X) t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X) t_2 \doteq_s t_1}}$$

$$\boxed{\mathrm{T} \quad \frac{(\forall X) t_1 \doteq_s t_2, \ (\forall X) t_2 \doteq_s t_3}{(\forall X) t_1 \doteq_s t_3}}$$

$$\boxed{\mathrm{C}\Sigma \quad \frac{(\forall X) t_1 \doteq_{s_1} t_1', \ldots, (\forall X) t_n \doteq_{s_n} t_n'}{(\forall X) \sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t_1', \ldots, t_n')}}, \text{ unde } \sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$$

$$\boxed{\mathrm{Sub}_\Gamma \quad \frac{(\forall X) \theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1), \ldots, (\forall X) \theta(u_n) \doteq_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X) \theta(t) \doteq_s \theta(t')}}, \text{ unde}$$

$(\forall Y) t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.

Deducția ecuațională

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate numite axiome sau ipoteze.

Spunem că ecuația $\epsilon := (\forall X)t \doteq_s t'$ se deduce ecuațional din Γ dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ a.î.

- $\epsilon_n = \epsilon$ si
- pt. or. $i \in \{1, \ldots, n\}$ avem:
  - $\epsilon_i \in \Gamma$ sau
  - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, CΣ, Sub$_\Gamma$.

În acest caz

- scriem $\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$, $\Gamma \vdash \epsilon$,
- spunem că ϵ este deductibilă, demonstrabilă, derivabilă din Γ,
- secvența $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = \epsilon$ este o Γ-demonstrație pt. ϵ.

Exemplu

Exemplu

- *NATBOOL* $= (S, \Sigma)$, unde $S = \{n, b\}$ și $\Sigma = \{T, F, 0, s, \star, >\}$
- $\Gamma = \{\gamma, \epsilon_1, \epsilon_2\}$
  - $\gamma := (\forall\{x, y, z\})x \doteq_n y \text{ if } \{z \star x \doteq_n z \star y,\ z > 0 \doteq_b T\}$,
  - $\epsilon_1 := (\forall\{a, c\})s(s(s(0))) \star a \doteq_n s(s(s(0))) \star c$,
  - $\epsilon_2 := (\forall\{a, c\})s(s(s(0))) > 0 \doteq_b T$

Exemplu

Exemplu

- $NATBOOL = (S, \Sigma)$, unde $S = \{n, b\}$ și $\Sigma = \{T, F, 0, s, \star, >\}$
- $\Gamma = \{\gamma, \epsilon_1, \epsilon_2\}$
  - $\gamma := (\forall\{x, y, z\})x \doteq_n y$ if $\{z \star x \doteq_n z \star y,\ z > 0 \doteq_b T\}$,
  - $\epsilon_1 := (\forall\{a, c\})s(s(s(0))) \star a \doteq_n s(s(s(0))) \star c$,
  - $\epsilon_2 := (\forall\{a, c\})s(s(s(0))) > 0 \doteq_b T$
- Arătăm că $\Gamma \vdash (\forall\{a, c\})a \doteq_n c$:
  1. $\epsilon_1 \in \Gamma$
  2. $\epsilon_2 \in \Gamma$
  3. $a \doteq_n c$

     $(1, 2, \mathsf{Sub}_\Gamma$ pt. $\gamma \in \Gamma$ și $\{x \leftarrow a, y \leftarrow c, z \leftarrow s(s(s(0)))\})$

Logica ecuațională

Logica ecuațională

- (S, Σ) signatură multisortată
- Γ o mulțime de ecuații condiționate

Logica ecuațională

- (S, Σ) signatură multisortată
- Γ o mulțime de ecuații condiționate
- Sintaxa: $\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$
  - există o Γ-demonstrație $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = (\forall X)t \doteq_s t'$
  - *(vezi secțiunea anterioară)*

Logica ecuațională

- (S, Σ) signatură multisortată
- Γ o mulțime de ecuații condiționate
- Sintaxa: $\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$
  - există o Γ-demonstrație $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = (\forall X)t \doteq_s t'$
  - *(vezi secțiunea anterioară)*
- Semantica: $\Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$
  - pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t'$
  - $\mathcal{A}$ satisface o ecuație condiționată $(\forall X)t \doteq_s t'$ *if* H dacă pentru orice morfism $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$,

    $$f_{s'}(u) = f_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow f_s(t) = f_s(t').$$

  - *(vezi cursurile anterioare)*

Corectitudinea

Scop

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Sintaxa}} & \Rightarrow & \underline{\text{Semantica}} \\ \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t' & \Rightarrow & \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t' \end{array}$$

Reguli de deducție corecte

O regulă de deducție $\boxed{\dfrac{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n}{\epsilon}}$ este corectă dacă

$$\Gamma \models \epsilon_1, \ldots, \Gamma \models \epsilon_n \Rightarrow \Gamma \models \epsilon.$$

Reguli de deducție corecte

O regulă de deducție $\boxed{\dfrac{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n}{\epsilon}}$ este corectă dacă

$$\Gamma \models \epsilon_1, \ldots, \Gamma \models \epsilon_n \Rightarrow \Gamma \models \epsilon.$$

Propoziție

Regulile de deducție R, S, T, CΣ, Sub_Γ sunt corecte.

Demonstrație

1. R este corectă: Exercițiu!
2. S este corectă: Exercițiu!
3. T este corectă: Exercițiu!

Demonstrație (cont.)

4. $C\Sigma$ este corectă:

$$\boxed{C\Sigma \quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1, \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)}}$$, unde $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$

Demonstrație (cont.)

4. CΣ este corectă:

$$\boxed{\text{C}\Sigma \quad \frac{(\forall X)t_1 \stackrel{.}{=}_{s_1} t'_1, \ldots, (\forall X)t_n \stackrel{.}{=}_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \stackrel{.}{=}_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)}}$$, unde $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$

- Fie $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și presupunem $\Gamma \models (\forall X)t_1 \stackrel{.}{=}_{s_1} t'_1, \ldots, \Gamma \models (\forall X)t_n \stackrel{.}{=}_{s_n} t'_n$.

Demonstrație (cont.)

4. $C\Sigma$ este corectă:

$$\boxed{C\Sigma \quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1, \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)}}, \text{ unde } \sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$$

- Fie $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și presupunem $\Gamma \models (\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1, \ldots, \Gamma \models (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n$.
- Trebuie să arătăm că $\Gamma \models (\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)$:

Demonstrație (cont.)

4. CΣ este corectă:

$$\boxed{\mathrm{C}\Sigma \quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1, \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)}}$$, unde $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$

- Fie $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și presupunem $\Gamma \models (\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1, \ldots, \Gamma \models (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n$.
- Trebuie să arătăm că $\Gamma \models (\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)$:
  - fie $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ un morfism.
  - din ip., $f_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t'_1), \ldots, f_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t'_n)$
  - avem

$$f_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = A_\sigma(f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n)) =$$
$$A_\sigma(f_{s_1}(t'_1), \ldots, f_{s_n}(t'_n)) = f_s(\sigma(t'_1, \ldots, t'_n))$$

  - deci $\mathcal{A} \models (\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)$

Demonstrație (cont.)

5. Sub_Γ este corectă:

$$\boxed{\mathsf{Sub}_\Gamma \quad \frac{(\forall X)\theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1), \ldots, (\forall X)\theta(u_n) \doteq_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}}$$, unde

$(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.

Demonstrație (cont.)

5. Sub_Γ este corectă:

$$\boxed{\mathsf{Sub}_\Gamma \quad \frac{(\forall X)\theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1), \ldots, (\forall X)\theta(u_n) \doteq_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}}$$, unde

$(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.

- Fie $(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$ a.î. $\Gamma \models (\forall X)\theta(u_i) \doteq_{s_i} \theta(v_i)$, or. $1 \leq i \leq n$.

Demonstrație (cont.)

5. Sub$_\Gamma$ este corectă:

$$\boxed{\mathrm{Sub}_\Gamma \quad \frac{(\forall X)\theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1), \ldots, (\forall X)\theta(u_n) \doteq_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}}$$

, unde

$(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.

- Fie $(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$ a.î. $\Gamma \models (\forall X)\theta(u_i) \doteq_{s_i} \theta(v_i)$, or. $1 \leq i \leq n$.
- Trebuie să arătăm că $\Gamma \models (\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')$:

Demonstrație (cont.)

5. Sub$_\Gamma$ este corectă:

$$\boxed{\mathrm{Sub}_\Gamma \quad \frac{(\forall X)\theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1), \ldots, (\forall X)\theta(u_n) \doteq_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}}$$, unde

$(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.

- Fie $(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$ a.î. $\Gamma \models (\forall X)\theta(u_i) \doteq_{s_i} \theta(v_i)$, or. $1 \leq i \leq n$.
- Trebuie să arătăm că $\Gamma \models (\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')$:
  - fie $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ un morfism.
  - atunci $\tilde{\theta}; f : T_\Sigma(Y) \to \mathcal{A}$
  - din ip., avem $(\tilde{\theta}; f)_{s_i}(u_i) = (\tilde{\theta}; f)_{s_i}(v_i)$, or. $1 \leq i \leq n$.
  - deoarece $\mathcal{A} \models (\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, obținem
    $$(\tilde{\theta}; f)_s(t) = (\tilde{\theta}; f)_s(t'), \text{ i.e. } f_s(\tilde{\theta}(t)) = f_s(\tilde{\theta}(t')).$$
  - deci $\mathcal{A} \models (\forall X)\tilde{\theta}(t) \doteq_s \tilde{\theta}(t')$, echivalent cu $\mathcal{A} \models (\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')$.

$\square$

Corectitudinea deducției ecuaționale

Teoremă (Corectitudinea deducției)

$\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.

Corectitudinea deducției ecuaționale

Teoremă (Corectitudinea deducției)

$\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.

Demonstrație

- Fie $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = (\forall X)t \doteq_s t'$ o Σ-demonstrație.
- Demonstrăm că $\Gamma \models \epsilon_i$ prin inducție după $i = 1, \ldots, n$:

Corectitudinea deducției ecuaționale

Teoremă (Corectitudinea deducției)

$\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.

Demonstrație

- Fie $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = (\forall X)t \doteq_s t'$ o Σ-demonstrație.
- Demonstrăm că $\Gamma \models \epsilon_i$ prin inducție după $i = 1, \ldots, n$:
  - Pt. $i = 1$ avem trei cazuri:
    1. $\epsilon_1 \in \Gamma$,
    2. $\epsilon_1 = (\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t_1$ prin R,
    3. $\epsilon_1 = (\forall X)\theta(t_1) \doteq_{s_1} \theta(t_1')$ prin Sub_Γ pt. $(\forall Y)t_1 \doteq_{s_1} t_1' \in \Gamma$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.

Corectitudinea deducției ecuaționale

Teoremă (Corectitudinea deducției)

$\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.

Demonstrație

- Fie $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = (\forall X)t \doteq_s t'$ o Σ-demonstrație.
- Demonstrăm că $\Gamma \models \epsilon_i$ prin inducție după $i = 1, \ldots, n$:
  - Pt. $i = 1$ avem trei cazuri:
    1. $\epsilon_1 \in \Gamma$,
    2. $\epsilon_1 = (\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t_1$ prin R,
    3. $\epsilon_1 = (\forall X)\theta(t_1) \doteq_{s_1} \theta(t_1')$ prin Sub_Γ pt. $(\forall Y)t_1 \doteq_{s_1} t_1' \in \Gamma$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.

    - cum R și Sub_Γ sunt corecte, rezultă $\Gamma \models \epsilon_1$.

Corectitudinea deducției ecuaționale

Teoremă (Corectitudinea deducției)

$\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.

Demonstrație

- Fie $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = (\forall X)t \doteq_s t'$ o Σ-demonstrație.
- Demonstrăm că $\Gamma \models \epsilon_i$ prin inducție după $i = 1, \ldots, n$:
  - Pt. $i = 1$ avem trei cazuri:
    1. $\epsilon_1 \in \Gamma$,
    2. $\epsilon_1 = (\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t_1$ prin R,
    3. $\epsilon_1 = (\forall X)\theta(t_1) \doteq_{s_1} \theta(t_1')$ prin Sub_Γ pt. $(\forall Y)t_1 \doteq_{s_1} t_1' \in \Gamma$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.
    - cum R și Sub_Γ sunt corecte, rezultă $\Gamma \models \epsilon_1$.
  - Pres. $\Gamma \models \epsilon_1, \ldots, \Gamma \models \epsilon_{i-1}$.
    - știm că ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din R, S, T, CΣ, Sub_Γ.
    - cum R, S, T, CΣ, Sub_Γ sunt corecte, rezultă $\Gamma \models \epsilon_i$. $\square$

Completitudinea

Scop

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{Semantica}} & \Rightarrow & \underline{\text{Sintaxa}} \\ \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t' & \Rightarrow & \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \end{array}$$

Închiderea la reguli de deducție

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată
- X o mulțime de variabile
- Regula de deducție

$$\boxed{\text{Reg}\ \frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1, \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n}{(\forall X)t \doteq_s t'}}$$

O relație binară $\sim \subseteq T_\Sigma(X) \times T_\Sigma(X)$ este închisă la regula Reg dacă

$$t_1 \sim_{s_1} t'_1, \ldots, t_n \sim_{s_n} t'_n \Rightarrow t \sim_s t'.$$

Închiderea la reguli de deducție

Propoziție

Sunt echivalente:

1. $\sim$ este congruență pe $T_\Sigma(X)$,
2. $\sim$ este închisă la R, S, T, CΣ.

Închiderea la reguli de deducție

Propoziție

Sunt echivalente:

1. $\sim$ este congruență pe $T_\Sigma(X)$,
2. $\sim$ este închisă la R, S, T, CΣ.

Demonstrație

$\Rightarrow$ Pres. că $\sim$ este congruență pe $T_\Sigma(X)$.

Închiderea la reguli de deducție

Propoziție

Sunt echivalente:

1. $\sim$ este congruență pe $T_\Sigma(X)$,
2. $\sim$ este închisă la R, S, T, CΣ.

Demonstrație

$\Rightarrow$ Pres. că $\sim$ este congruență pe $T_\Sigma(X)$.

- Închisă la R, S, T: Exercițiu!

Închiderea la reguli de deducție

Propoziție

Sunt echivalente:

1. $\sim$ este congruență pe $T_\Sigma(X)$,
2. $\sim$ este închisă la R, S, T, CΣ.

Demonstrație

$\Rightarrow$ Pres. că $\sim$ este congruență pe $T_\Sigma(X)$.

- Închisă la R, S, T: Exercițiu!
- Închisă la CΣ:
  - fie $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ și $t_1 \sim_{s_1} t'_1, \ldots, t_n \sim_{s_n} t'_n$.
  - deoarece $\sim$ este congruență pe $T_\Sigma(X)$, obținem $\sigma(t_1, \ldots, t_n) \sim_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)$.

Demonstrație (cont.)

$\Leftarrow$ Pres. că $\sim$ este închisă la R, S, T, CΣ.

- Deoarece $\sim$ este închisă la R, S, T, obținem că $\sim$ este echivalență pe $T_\Sigma(X)$. (Exercițiu!)
- Arătăm că $\sim$ este compatibilă cu operațiile:
  - fie $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ și $t_1 \sim_{s_1} t_1', \ldots, t_n \sim_{s_n} t_n'$.
  - deoarece $\sim$ este închisă la CΣ., obținem $\sigma(t_1, \ldots, t_n) \sim_s \sigma(t_1', \ldots, t_n')$.

$\square$

Amintiri: Închiderea la substituții

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată, X mulțime de variabile,
- Γ o mulțime de ecuații condiționate,
- $\sim$ o congruență pe $T_\Sigma(X)$.

Spunem că $\sim$ este închisă la substituție dacă

$CS(\Gamma, T_\Sigma(X))$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{or. } (\forall Y)t \doteq_s t' \text{ if } H \in \Gamma, \text{ or. } h : Y \to T_\Sigma(X) \\ \tilde{h}_{s'}(u) \sim_{s'} \tilde{h}_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{h}_s(t) \sim_s \tilde{h}_s(t') \end{array}}$$

Pentru simplitate, identificăm morfismul $\tilde{h}$ cu h și scriem:

$CS(\Gamma, T_\Sigma(X))$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{or. } (\forall Y)t \doteq_s t' \text{ if } H \in \Gamma, \text{ or. } h : Y \to T_\Sigma(X) \\ h_{s'}(u) \sim_{s'} h_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow h_s(t) \sim_s h_s(t') \end{array}}$$

Închiderea la substituții

Propoziția

Sunt echivalente:

1. $\sim$ verifică $CS(\Gamma, T_\Sigma(X))$ (i.e. închisă la substituție),
2. $\sim$ este închisă la Sub_Γ,

Închiderea la substituții

Propoziția

Sunt echivalente:

1. $\sim$ verifică CS(Γ, $T_\Sigma(X)$) (i.e. închisă la substituție),
2. $\sim$ este închisă la Sub_Γ,

Demonstrație

$\sim$ verifică CS(Γ, $T_\Sigma(X)$) (i.e. închisă la substituție),

$$\Leftrightarrow$$

or. $(\forall Y)t \stackrel{\cdot}{=}_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \stackrel{\cdot}{=}_{s_1} v_1, \ldots, u_n \stackrel{\cdot}{=}_{s_n} v_n\}$ și. or.
$h : Y \to T_\Sigma(X)$ a.î. $h_{s_1}(u_1) \sim_{s_1} h_{s_1}(v_1), \ldots, h_{s_n}(u_1) \sim_{s_n} h_{s_n}(v_n)$ implică
$h_s(t) \sim_s h_s(t')$

$$\Leftrightarrow$$

$\sim$ este închisă la Sub_Γ

$\square$

Echivalența sintactică

Echivalența sintactică pe $T_\Sigma(X)$ determinată de Γ este

$$t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X) t \doteq_s t', \text{ or. } s \in S.$$

Echivalența sintactică

Echivalența sintactică pe $T_\Sigma(X)$ determinată de Γ este

$$t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X) t \doteq_s t', \text{ or. } s \in S.$$

Propoziția

$\sim_\Gamma$ este o congruență pe $T_\Sigma(X)$ închisă la substituție.

Echivalența sintactică

Echivalența sintactică pe $T_\Sigma(X)$ determinată de Γ este

$$t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X) t \doteq_s t', \text{ or. } s \in S.$$

Propoziția

$\sim_\Gamma$ este o congruență pe $T_\Sigma(X)$ închisă la substituție.

Demonstrație

- Din def. deducției sintactice $\vdash$, $\sim_\Gamma$ este închisă la R, S, T, CΣ, Sub$_\Gamma$.
- Rezultă $\sim_\Gamma$ este congruență pe $T_\Sigma(X)$.
- Rezultă $\sim_\Gamma$ este închisă la substituție.

$\square$

Completitudinea deducției ecuaționale

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate.

Teoremă (Completitudinea deducției)

$\Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.

Demonstrație

- echivalența sintactică: $t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.
- echivalența semantică: $t \equiv_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.
- $\sim_\Gamma$ congruență pe $T_\Sigma(X)$ închisă la substituție .
- $\equiv_\Gamma$ este cea mai mică congruența pe $T_\Sigma(X)$ închisă la substituție.
- Deci $\equiv_\Gamma \subseteq \sim_\Gamma$, i.e. $\Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.

$\square$

Teorema de completitudine

(S, Σ) signatură multisortată, X mulțime de variabile, $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$

- Echivalența sintactică: $t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.
- Echivalența semantică: $t \equiv_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.
- Corectitudinea deducției: $\sim_\Gamma \subseteq \equiv_\Gamma$.
- Completitudinea deducției: $\equiv_\Gamma \subseteq \sim_\Gamma$.

Teoremă (Teorema de completitudine)

$$\Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$$

$$(\equiv_\Gamma = \sim_\Gamma)$$

Pe săptămâna viitoare!