Curs 3

Cuprins

Amintiri

Definiție

O signatură multisortată este o pereche (S, Σ), unde

- $S \neq \emptyset$ este o mulțime de sorturi.
- Σ este o mulțime de simboluri de operații de forma

$$\sigma : s_1 s_2 \ldots s_n \to s.$$

Amintiri

Definiție

O signatură multisortată este o pereche (S, Σ), unde

- $S \neq \emptyset$ este o mulțime de sorturi.
- Σ este o mulțime de simboluri de operații de forma

$$\sigma : s_1 s_2 \ldots s_n \to s.$$

Definiție

O algebră multisortată de tip (S, Σ) este o structură $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ unde

- $A_S = \{A_s\}_{s \in S}$ este o mulțime S-sortată (mulțimea suport).
- $A_\Sigma = \{A_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ este o familie de operații astfel încât
  - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ în Σ, atunci $A_\sigma : A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \to A_s$ (operație).
  - dacă $\sigma : \to s$ în Σ, atunci $A_\sigma \in A_s$ (constantă).

Amintiri

Fie două (S,Σ)-algebre $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ și $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$.

Definiție

Un morfism de (S,Σ)-algebre $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este o funcție S-sortată $h = \{h_s\}_{s\in S} : \{A_s\}_{s\in S} \to \{B_s\}_{s\in S}$ care verifică condiția de compatibilitate:

- pt. or. $\sigma : \to s$ din Σ avem $h_s(A_\sigma) = B_\sigma$.
- pt. or. $\sigma : s_1 \dots s_n \to s$ din Σ și or. $a_1 \in A_{s_1}, \dots, a_n \in A_{s_n}$ avem

$$h_s(A_\sigma(a_1,\dots,a_n)) = B_\sigma(h_{s_1}(a_1),\dots,h_{s_n}(a_n)).$$

$$\begin{array}{ccccccc}
A_{s_1} & \times & \cdots & \times & A_{s_n} & \xrightarrow{A_\sigma} & A_s \\
{\scriptstyle h_{s_1}}\downarrow & & \cdots & & {\scriptstyle h_{s_n}}\downarrow & & {\scriptstyle h_s}\downarrow \\
B_{s_1} & \times & \cdots & \times & B_{s_n} & \xrightarrow{B_\sigma} & B_s
\end{array}$$

Izomorfisme de algebre multisortate

Definiție și proprietăți

Definiție

Un Σ-morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se numește izomorfism dacă există un Σ-morfism $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ astfel încât $h; g = 1_A$ și $g; h = 1_B$.

- Dacă Σ-morfismul g de mai sus există, atunci este unic:
  - fie un Σ-morfism $f : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ astfel încat $h; f = 1_A$ și $f; h = 1_B$
  - avem $g = g; 1_A = g; (h; f) = (g; h); f = 1_B; f = f$
- Deoarece g este unic, de obicei se notează h^{-1}
- $h; h^{-1} = 1_A$ și $h^{-1}; h = 1_B$
- $(1_A)^{-1} = 1_A$

Proprietăți

Propoziție

Fie $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un Σ-morfism. Atunci

$$h \text{ este izomorfism} \Leftrightarrow \text{ este funcție } S\text{-sortată bijectivă.}$$

Demonstrație

($\Rightarrow$) Presupunem că h este izomorfism.

- Atunci există Σ-morfismul $h^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ a.î. $h; h^{-1} = 1_A$ și $h^{-1}; h = 1_B$.
- Deducem că $h_s; h_s^{-1} = 1_{A_s}$ și $h_s^{-1}; h_s = 1_{B_s}$, or. $s \in S$.
- Deci h_s este inversabilă, și deci bijectivă, pt. or. $s \in S$.
- În concluzie, h este funcție S-sortată bijectivă.

Demonstrație (cont.)

$(\Leftarrow)$ Presupunem că h este funcție S-sortată bijectivă.

- Pt. or. $s \in S$ există $h_s^{-1} : B_s \to A_s$ a.î. $h_s; h_s^{-1} = 1_{A_s}$ și $h_s^{-1}; h_s = 1_{B_s}$.
- Definim Σ-morfismul $h^{-1} = \{h_s^{-1}\}_{s \in S}$.
- Evident avem

$$(h; h^{-1})_s = h_s; h_s^{-1} = 1_{A_s} = (1_A)_s$$
$$(h^{-1}; h)_s = h_s^{-1}; h_s = 1_{B_s} = (1_B)_s$$

- Deci $h; h^{-1} = 1_A$ și $h^{-1}; h = 1_B$.

Demonstrație (cont.)

Trebuie să arătăm că funcția S-sortată $h^{-1} : B \to A$ este Σ-morfism.

- Fie $\sigma : s_1 \dots s_n \to s$ în Σ și $(b_1, \dots, b_n) \in B_{s_1} \times \dots \times B_{s_n}$.
- Cum h este Σ-morfism, pt. $h_{s_1}^{-1}(b_1) \in A_{s_1}, \dots, h_{s_n}^{-1}(b_n) \in A_{s_n}$ avem

$$\begin{aligned} h_s(A_\sigma(h_{s_1}^{-1}(b_1), \dots, h_{s_n}^{-1}(b_n))) &= B_\sigma(h_{s_1}(h_{s_1}^{-1}(b_1)), \dots, h_{s_n}(h_{s_n}^{-1}(b_n))) \\ &= B_\sigma(b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

- Aplicăm h_s^{-1} în ambele părți și obținem:

$$A_\sigma(h_{s_1}^{-1}(b_1), \dots, h_{s_n}^{-1}(b_n)) = h_s^{-1}(B_\sigma(b_1, \dots, b_n)),$$

- Deci $h^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ este izomorfism.

$\square$

Proprietăți

Propoziție

Compunerea a două izomorfisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ și $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ este un izomorfism. Mai mult,

$$(f; g)^{-1} = g^{-1}; f^{-1}.$$

Demonstrație

Exercițiu!

Σ-algebre izomorfe

Definiție

Două Σ-algebre $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sunt izomorfe dacă există un izomorfism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

- Dacă $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sunt izomorfe, notăm $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.
- Dacă $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, atunci $A_s \simeq B_s$, or. $s \in S$.
- $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}$ (1_A este izomorfism)
- $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \simeq \mathcal{A}$
- $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ și $\mathcal{B} \simeq \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$
- Relația de izomorfism este o relație de echivalența (reflexivă, simetrică și tranzitivă).

Exemple

Exemplu

$NAT = (S = \{nat\}, \Sigma = \{0 : \to nat,\ succ : nat \to nat\})$

NAT-algebra $\mathcal{A}$: $A_{nat} := \mathbb{N}$, $A_0 := 0$, $A_{succ}(x) := x + 1$

NAT-algebra $\mathcal{B}$: $B_{nat} := \{0, 1\}$, $B_0 := 0$, $B_{succ}(x) := 1 - x$

NAT-algebra $\mathcal{C}$: $C_{nat} := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $C_0 := 1$, $C_{succ}(2^n) := 2^{n+1}$

$\mathcal{A} \not\simeq \mathcal{B}$

- nu există niciun NAT-morfism $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$

$\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$:

- $h = \{h_{nat}\} : \{A_{nat}\} \to \{C_{nat}\}$, $h_{nat}(n) := 2^n$
- h este izomorfism

Observație

Algebrele izomorfe sunt ”identice” (modulo redenumire).

Tipuri Abstracte de Date

ADT - Abstract Data Type

- Un tip abstract de date este o mulțime de date (valori) și operații asociate lor, a căror descriere (specificare) este independentă de implementare.

ADT - Abstract Data Type

- Un tip abstract de date este o mulțime de date (valori) și operații asociate lor, a căror descriere (specificare) este independentă de implementare.
- O algebră este formată dintr-o mulțime de elemente și o mulțime de operații.

ADT - Abstract Data Type

- Un tip abstract de date este o mulțime de date (valori) și operații asociate lor, a căror descriere (specificare) este independentă de implementare.
- O algebră este formată dintr-o mulțime de elemente și o mulțime de operații.
- Algebrele pot modela tipuri de date.

ADT - Abstract Data Type

- Un tip abstract de date este o mulțime de date (valori) și operații asociate lor, a căror descriere (specificare) este independentă de implementare.
- O algebră este formată dintr-o mulțime de elemente și o mulțime de operații.
- Algebrele pot modela tipuri de date.
- Două algebre izomorfe au același comportament, deci trebuie să fie modele ale aceluiași tip de date. Aceasta asigură independența de implementare.

ADT - Abstract Data Type

- O signatură (S, Σ) este interfața sintactică a unui tip abstract de date.

ADT - Abstract Data Type

- O signatură (S, Σ) este interfața sintactică a unui tip abstract de date.
- O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este o posibilă implementare.

ADT - Abstract Data Type

- O signatură (S, Σ) este interfața sintactică a unui tip abstract de date.
- O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este o posibilă implementare.
- Dacă $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, atunci $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ implementează același tip de date.

ADT - Abstract Data Type

- O signatură (S, Σ) este interfața sintactică a unui tip abstract de date.
- O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este o posibilă implementare.
- Dacă $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, atunci $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ implementează același tip de date.

Definiție

Un tip abstract de date este o clasă $\mathfrak{C}$ de (S, Σ)-algebre cu proprietatea că oricare două (S, Σ)-algebre din $\mathfrak{C}$ sunt izomorfe:

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{C} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}.$$

$[\mathcal{A}] := \{\mathcal{B}\ (S, \Sigma)\text{-algebră} \mid \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}\}$ este tip abstract de date.

Termeni. Algebră de termeni.

Termeni fără variabile

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

Mulțimea S-sortată a termenilor fără variabile,

$$T_\Sigma,$$

este cea mai mică mulțime de șiruri finite peste alfabetul

$$L = \bigcup_{w,s} \Sigma_{w,s} \cup \{(,)\} \cup \{,\}$$

care verifică:

1. Dacă $\sigma : \to s$ în Σ, atunci $\sigma \in (T_\Sigma)_s$,
2. Dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ în Σ și $t_i \in (T_\Sigma)_{s_i}$, or. $1 \leq i \leq n$, atunci $\sigma(t_1, \ldots, t_n) \in (T_\Sigma)_s$.

Exemple

Exemplu

$NATBOOL = (S, \Sigma)$

- $S = \{bool, nat\}$
- $\Sigma = \{T : \to bool,\ F : \to bool, 0 :\to nat, s : nat \to nat,$
  $\leq: nat\ nat \to bool\}$

$T_{NATBOOL}$:

- $(T_{NATBOOL})_{nat} = \{0, s(0), s(s(0)), \ldots\}$
- $(T_{NATBOOL})_{bool} = \{T, F, \leq (0, 0), \leq (0, s(0)), \ldots\}$

Câteva șiruri care nu sunt termeni: $\leq (T, F), s \leq (0), Ts(0), \ldots$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$
- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat,$
  $+ : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

T_{NATEXP}:

- $(T_{NATEXP})_{nat} = \{0, s(0), s(s(0)), \ldots,$
  $+(0, 0), \star(0, +(s(0), 0)), \ldots\}$

Câteva șiruri care nu sunt termeni: $+(0), 0(s)s(0), \star(s(0)), \ldots$

Mulțime de variabile

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

Definiție

O mulțime de variabile este o mulțime S-sortată $X = \{X_s\}_{s \in S}$ astfel încât

- $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$, or. $s, s' \in S$, $s \neq s'$,
- $X_s \cap \{\sigma\}_{\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma} = \emptyset$,
- $X_s \cap \{\sigma\}_{\sigma : \to s \in \Sigma} = \emptyset$.

- Simbolurile de variabile sunt distincte între ele și sunt distincte de simbolurile de operații/constante din Σ.

Termeni (expresii)

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Definiție

Mulțimea S-sortată a termenilor cu variabile din X,

$$T_\Sigma(X),$$

este cea mai mică mulțime de șiruri finite peste alfabetul

$$L = \bigcup_{s \in S} X_s \cup \bigcup_{w,s} \Sigma_{w,s} \cup \{(,)\} \cup \{,\}$$

care verifică:

1. $X \subseteq T_\Sigma(X)$,
2. Dacă $\sigma : \to s$ în Σ, atunci $\sigma \in T_\Sigma(X)_s$,
3. Dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s$ în Σ și $t_i \in T_\Sigma(X)_{s_i}$, or. $1 \leq i \leq n$, atunci $\sigma(t_1, \dots, t_n) \in T_\Sigma(X)_s$.

- $t \in T_\Sigma(X)$ se numește termen (expresie).
- Notăm cu $Var(t)$ mulțimea variabilelor care apar în termenul t.
- $T_\Sigma = T_\Sigma(\emptyset)$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$
- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat,$
  $+ : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

X:

- $X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X)$:

- $T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), s(s(x)), \ldots,$
  $+(0, 0), +(0, x), \star(0, +(s(0), 0)), \ldots\}$

Câteva șiruri care nu sunt termeni: $+(x), 0x, 0(s)s(0), \star(s(0)), \ldots$

Exemple

Exemplu

$STIVA = (S, \Sigma)$

- $S = \{elem, stiva\}$
- $\Sigma = \{0 : \to elem,\ empty : \to stiva, push : elem\ stiva \to stiva,$
  $pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

X:

- $X_{elem} = \{x, y\}$ și $X_{stiva} = \emptyset$

$T_{STIVA}(X)$:

- $T_{STIVA}(X)_{elem} = \{0, x, y, top(pop(empty)),$
  $top(push(x, empty)), \ldots\}$
- $T_{STIVA}(X)_{stiva} = \{empty, push(y, empty), pop(empty),$
  $push(top(empty), empty), \ldots\}$

Câteva șiruri care nu sunt termeni: $pop(0), (pop)top(empty), empty(y)$

Inducția pe termeni

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Fie $\mathbf{P}$ o proprietate astfel încât:

- pasul inițial:

$$\mathbf{P}(x) = true, \text{ or. } x \in X,$$
$$\mathbf{P}(\sigma) = true, \text{ or. } \sigma :\to s.$$

- pasul de inducție:

$$\text{pt. or. } \sigma : s_1 \ldots s_n \to s \text{ și or. } t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n},$$
$$\text{dacă } \mathbf{P}(t_1) = \ldots = \mathbf{P}(t_n) = true, \text{ atunci } \mathbf{P}(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = true.$$

Atunci $\mathbf{P}(t) = true$, oricare $t \in T_\Sigma(X)$.

Termeni ca arbori

Un termen $t \in T_\Sigma(X)$ poate fi reprezentat ca un arbore $arb(t)$ astfel:

- dacă $t = \sigma$ (simbol de constantă), atunci $arb(t) := \sigma$,
- dacă $t \in X$ (variabilă), atunci $arb(t) := t$,
- dacă $t = \sigma(t_1, \ldots, t_n)$, atunci $arb(t) :=$

$$\begin{tikzcd} & \sigma \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ arb(t_1) & \cdots & arb(t_n) \end{tikzcd}$$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$
- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat,$
  $+ : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

$arb(\star(0, +(s(0), 0))) =$

$$\begin{tikzcd}
 & & \star \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
0 & & & & + \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & & & s \arrow[d] & & 0 \\
 & & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Algebra termenilor

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Definiție

Mulțimea S-sortată a termenilor $T_\Sigma(X)$ este o (S, Σ)-algebră, numită algebra termenilor cu variabile din X și notată tot $T_\Sigma(X)$, cu operațiile definite astfel:

- pt. or. $\sigma :\to s$ din Σ, operația corespunzătoare este
$$T_\sigma := \sigma \in T_\Sigma(X)_s$$
- pt. or. $\sigma : s_1 \dots s_n \to s$ din Σ, operația corespunzătoare este
$$T_\sigma : T_\Sigma(X)_{s_1 \dots s_n} \to T_\Sigma(X)_s$$
$$T_\sigma(t_1, \dots, t_n) := \sigma(t_1, \dots, t_n)$$
or. $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$.

- T_Σ algebra termenilor fără variabile $(X = \emptyset)$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$
- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat,$
  $+ : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

T_{NATEXP}:

- $(T_{NATEXP})_{nat} = \{0, s(0), s(s(0)), \ldots,$
  $+(0,0), \star(0, +(s(0), 0)), \ldots\}$

Algebra termenilor:

- Mulțimea suport: T_{NATEXP}
- Operații:
  - $T_0 := 0,\ T_s(t) := s(t)$,
  - $T_+(t_1, t_2) := +(t_1, t_2)$,
  - $T_\star(t_1, t_2) := \star(t_1, t_2)$.

Observații

Semantica unui modul în **Maude** (care conține doar declații de sorturi, operații și variabile) este o algebră de termeni.

Algebre inițiale

Algebră inițială

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată,
- $\mathfrak{K}$ o clasă de (S, Σ)-algebre.

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{I} \in \mathfrak{K}$ este inițială în $\mathfrak{K}$ dacă pentru orice $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$

există un unic (S, Σ)-morfism $f : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$.

Proprietăți

Propoziție

Dacă $\mathcal{I}$ este inițială în $\mathfrak{K}$ și $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ astfel încât $\mathcal{A} \simeq \mathcal{I}$, atunci $\mathcal{A}$ este inițială în $\mathfrak{K}$.

Proprietăți

Propoziție

Dacă $\mathcal{I}$ este inițială în $\mathfrak{K}$ și $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ astfel încât $\mathcal{A} \simeq \mathcal{I}$, atunci $\mathcal{A}$ este inițială în $\mathfrak{K}$.

Demonstrație

Cum $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ astfel încât $\mathcal{A} \simeq \mathcal{I}$, fie $\iota_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{I}$ un izomorfism.

Fie $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$. Cum $\mathcal{I}$ este inițială, există un unic morfism $f_{\mathcal{B}} : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$.

Demonstrăm că există un unic morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$:

- **Existența.** Considerăm $h := \iota_{\mathcal{A}}; f_{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Deoarece compunerea morfismelor este morfism, obținem că h este morfism.
- **Unicitatea.** Presupunem că există un alt morfism $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Atunci $\iota_{\mathcal{A}}^{-1}; g : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$ este morfism, deci $\iota_{\mathcal{A}}^{-1}; g = f_{\mathcal{B}}$. Rezultă că $g = \iota_{\mathcal{A}}; f_{\mathcal{B}} = h$. $\square$

Proprietăți

Propoziție

Dacă $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt inițiale în $\mathfrak{K}$, atunci $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$.

Proprietăți

Propoziție

Dacă $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt inițiale în $\mathfrak{K}$, atunci $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$.

Demonstrație

Cum $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt inițiale în $\mathfrak{K}$, există

- un unic morfism $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ și
- un unic morfism $g : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1$.

Avem $f; g : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_1$, $1_{\mathcal{A}_1} : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_1$ inițială, deci $f; g = 1_{\mathcal{A}_1}$.

Similar obținem $g; f = 1_{\mathcal{A}_2}$.

În concluzie $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$. $\square$

(S, Σ)-algebra inițială

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

- Considerăm $\mathfrak{K}$ clasa tuturor (S, Σ)-algebrelor.
- $\mathcal{I}$ este (S, Σ)-algebră inițială dacă pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B}$ există un unic morfism $f : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$.

Teoremă

Pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B}$, există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

- $f(t)$ este interpretarea termenului $t \in T_\Sigma$ în $\mathcal{B}$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră.
Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră.
Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"} f(t) \text{ este definit"})$$

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră.
Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"} f(t) \text{ este definit"})$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră.
Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}f(t) \text{ este definit"})$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1} \ldots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ astfel încât $f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n))$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră.
Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}f(t) \text{ este definit"})$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1} \ldots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ astfel încât $f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n))$.

Din principiului inducției pe termeni, $f(t)$ este definită pt. or. $t \in T_\Sigma$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră.
Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}f(t) \text{ este definit"})$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1} \ldots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ astfel încât $f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n))$.

Din principiului inducției pe termeni, $f(t)$ este definită pt. or. $t \in T_\Sigma$.
Demonstrăm că f este morfism.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră.
Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"} f(t) \text{ este definit"})$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1} \ldots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ astfel încât $f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n))$.

Din principiului inducției pe termeni, $f(t)$ este definită pt. or. $t \in T_\Sigma$.
Demonstrăm că f este morfism.

- dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $f_s(T_\sigma) = f_s(\sigma) = B_\sigma$;

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră.
Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}f(t) \text{ este definit"})$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma : \to s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1} \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ astfel încât $f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n))$.

Din principiului inducției pe termeni, $f(t)$ este definită pt. or. $t \in T_\Sigma$.
Demonstrăm că f este morfism.

- dacă $\sigma : \to s \in \Sigma$, atunci $f_s(T_\sigma) = f_s(\sigma) = B_\sigma$;
- dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$, atunci $f_s(T_\sigma(t_1, \dots, t_n)) = f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n))$.

Demonstrație (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ un morfism.
Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}g_s(t) = f_s(t)\text{"})$$

Demonstrație (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ un morfism.
Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}g_s(t) = f_s(t)\text{"})$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = g_s(T_\sigma) = B_\sigma = f_s(\sigma)$.

Demonstrație (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ un morfism.
Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "g_s(t) = f_s(t)")$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = g_s(T_\sigma) = B_\sigma = f_s(\sigma)$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \ldots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ a. î. $g_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t_1), \ldots, g_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t_n)$, atunci

Demonstrație (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ un morfism.
Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}g_s(t) = f_s(t)\text{"})$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma : \to s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = g_s(T_\sigma) = B_\sigma = f_s(\sigma)$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \ldots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ a. î. $g_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t_1), \ldots, g_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t_n)$, atunci

$$g_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = g_s(T_\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = B_\sigma(g_{s_1}(t_1), \ldots, g_{s_n}(t_n)) = B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n)) = f_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)).$$

Demonstrație (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ un morfism.
Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}g_s(t) = f_s(t)\text{"})$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = g_s(T_\sigma) = B_\sigma = f_s(\sigma)$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \ldots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ a. î. $g_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t_1), \ldots, g_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t_n)$, atunci

$$g_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = g_s(T_\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = B_\sigma(g_{s_1}(t_1), \ldots, g_{s_n}(t_n)) = B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n)) = f_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)).$$

Conform principiului inducției pe termeni, $g_s(t) = f_s(t)$, oricare $t \in T_\Sigma, s$, deci $g = f$.

□

Consecință

Corolar

T_Σ este (S, Σ)-algebra inițială.

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) signatură multisortată

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) signatură multisortată
- (S, Σ)-algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$
  - $D_s := \mathbb{N}$, or. $s \in S$,
  - dacă $\sigma : \to s$, atunci $D_\sigma := 0$
  - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, atunci $D_\sigma(k_1, \ldots, k_n) := 1 + \max(k_1, \ldots, k_n)$.

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) signatură multisortată
- (S, Σ)-algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$
  - $D_s := \mathbb{N}$, or. $s \in S$,
  - dacă $\sigma : \to s$, atunci $D_\sigma := 0$
  - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, atunci $D_\sigma(k_1, \ldots, k_n) := 1 + \max(k_1, \ldots, k_n)$.
- $f : T_\Sigma \to \mathcal{D}$ unicul morfism

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) signatură multisortată
- (S, Σ)-algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$
  - $D_s := \mathbb{N}$, or. $s \in S$,
  - dacă $\sigma :\to s$, atunci $D_\sigma := 0$
  - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, atunci $D_\sigma(k_1, \ldots, k_n) := 1 + \max(k_1, \ldots, k_n)$.
- $f : T_\Sigma \to \mathcal{D}$ unicul morfism
- Ce reprezintă valoarea $f(t)$ pentru un termen t?

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) signatură multisortată
- (S, Σ)-algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$
  - $D_s := \mathbb{N}$, or. $s \in S$,
  - dacă $\sigma :\to s$, atunci $D_\sigma := 0$
  - dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, atunci $D_\sigma(k_1, \dots, k_n) := 1 + \max(k_1, \dots, k_n)$.
- $f : T_\Sigma \to \mathcal{D}$ unicul morfism
- Ce reprezintă valoarea $f(t)$ pentru un termen t?
  - $f(t)$ este adâncimea arborelui $arb(t)$.

Observații

- Un tip abstract de date este o clasă $\mathfrak{C}$ de (S, Σ)-algebre cu proprietatea că oricare două (S, Σ)-algebre din $\mathfrak{C}$ sunt izomorfe ($\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{C} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.)
- Considerăm clasa de (S, Σ)-algebre
$$\mathfrak{I}_{(S,\Sigma)} = \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I}\ (S, \Sigma)\text{-algebră inițială}\}$$
- $\mathfrak{I}_{(S,\Sigma)}$ este un tip abstract de date.
- $T_\Sigma \in \mathfrak{I}_{(S,\Sigma)}$.
- Un modul în **Maude** (care conține doar declații de sorturi și operații) definește un astfel de tip abstract de date și construiește efectiv algebra T_Σ.

Pe săptămâna viitoare!