Programare Logică
EXERCIŢII

Exerciţiul 1 Fie (S, Σ) o signatură multisortată. O clasă $\mathcal{K}$ de (S, Σ)-algebre se numeşte *tip abstract de date monomorfic* dacă verifică următoarele proprietăţi:
(p1) dacă $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt (S, Σ)-algebre astfel încât $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ şi $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, atunci $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$,
(p2) $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ oricare ar fi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$.
Daţi exemplu de un tip abstract de date monomorfic.

Exerciţiul 2 Fie (S, Σ) o signatură multisortată, $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ două (S, Σ)-algebre, iar $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un (S, Σ)-morfism. Demonstraţi că, oricare ar fi D o subalgebră a lui $\mathcal{A}$, $h(D)$ este o subalgebră a lui $\mathcal{B}$.

Exerciţiul 3 Scrieţi o specificaţie (S, Σ, Γ), adecvată pentru algebra $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, g, f)$ unde $\mathbb{N}$ este mulţimea numerelor naturale, $0 \in \mathbb{N}$ este constantă, iar $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ şi $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sunt definite astfel:
$g(n) = n + 1$ şi $f(n) = n\, mod\, 2$ oricare $n \in \mathbb{N}$.
Demonstraţi că specificaţia găsită este adecvată pentru $\mathcal{N}$.

Exerciţiul 4 Fie $(S = \{s\}, \Sigma)$ o signatură monosortată cu $\Sigma = \{1\colon \to s, *\colon ss \to s, {}^{-1}\colon s \to s\}$.
Fie $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ o mulţime de ecuaţii, unde

(γ_1) $\forall\{x\} 1 * x \doteq x$
(γ_2) $\forall\{x\} x * x^{-1} \doteq 1$
(γ_3) $\forall\{x, y, z\} x * (y * z) \doteq (x * y) * z$

Justificaţi faptul că următoarea secvenţă de identităţi este o Γ-demonstraţie în logica ecuaţională, indicând la fiecare pas regula de deducţie folosită:

(e1) $\forall\{a, b\}\ a * (a^{-1} * b) \doteq (a * a^{-1}) * b$
(e2) $\forall\{a\}\ a * a^{-1} \doteq 1$
(e3) $\forall\{a, b\}\ (a * a^{-1}) * b \doteq 1 * b$
(e4) $\forall\{b\}\ 1 * b \doteq b$
(e5) $\forall\{a, b\}\ (a * a^{-1}) * b \doteq b$
(e6) $\forall\{a, b\}\ a * (a^{-1} * b) \doteq b$

Exerciţiul 5 Fie $(S = \{s\}, \Sigma)$ o signatură monosortată cu $\Sigma = \{*\colon ss \to s, {}^{-1}\colon s \to s\}$.
Dacă $X = \{x, y, z, u, v\}$ este o mulţime de variabile, găsiţi o substituţie $\sigma\colon X \to T_\Sigma(X)$ astfel încât $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, unde $t_1 = (x * y) * z$ şi $t_2 = v * (u * v)^{-1}$.

Exerciţiul 6 Fie $(S = \{s\}, \Sigma)$ o signatură monosortată, unde $\Sigma = \{0\colon \to s, g\colon s \to s, f\colon s \to s\}$.
Folosind sistemul de rescriere $R = \{f(g(0)) \to g(0),\ g(f(0)) \to g(0)\}$, rescrieţi termenii $t_1 = f(f(g(f(g(0)))))$ şi $t_2 = f(f(0))$ până la o formă normală.
Caracterizaţi formele normale ale sistemului R.

Exerciţiul 7 Fie (S, Σ) o signatură multisortată şi $e = (\forall X) l \doteq r$ o (S, Σ)-ecuatie. Dacă $\mathcal{A}$ este o (S, Σ)-algebră astfel încât $\mathcal{A} \models e$ ($\mathcal{A}$ satisface ecuaţia e), demonstraţi că $\mathcal{A}/\sim \models e$ oricare ar fi $\sim$ o congruenţă pe $\mathcal{A}$.

Exercițiul 8 Fie (S, Σ) următoarea signatură: $S = \{elt\}$, $\Sigma = \{* : elt\, elt \to elt\}$. Dacă $\Gamma = \{\forall\{x\}\, x * x \doteq x,\ \forall\{x,y\}\, x * y \doteq y * x\}$, demonstrați că $\Gamma \vdash \forall\{x,y\}\, (x * y) * (y * x) \doteq y * x$. Indicați la fiecare pas al demonstrației regulile de deducție folosite.

Exercițiul 9 Fie (S, Σ, Γ) următoarea specificație: $S = \{elt\}$, $\Sigma = \{0 :\to elt,\ s : elt \to elt\}$, $\Gamma = \{\forall\{x\}\, s(s(s(x))) \doteq x\}$. Pentru fiecare din următoarele (S, Σ)-algebre cercetați dacă este Γ-algebră inițială și justificați răspunsul dat:
(a) $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, succ)$, $succ(n) = n + 1$ oricare $n \in \mathbb{N}$,
(b) $\mathcal{Z}_3 = (\mathbb{Z}_3, 0, succ)$, $succ(n) = (n + 1) mod\, 3$ oricare $n \in \mathbb{Z}_3$.

Exercițiul 10 Găsiți un unificator pentru termenii

$$t_1 = f(x, g(y, y), x) \text{ și } t_2 = f(z, z, g(w, h(v))),$$

unde x, y, z, w și v sunt variabile iar operațile f, g și h au aritățile 3,2,1.

Exercițiul 11 Cercetați dacă sistemul de rescriere $R = \{\forall\{x\}\, f(g(f(x))) \to g(x),\ \forall\{x\}\, g(f(g(x))) \to f(x)\}$ este confluent, unde fși g sunt operații unare.

Exercițiul 12 Determinați signatura atașată următoarei gramatici independente de context: $G = (S_0, N, T, P)$, unde $N = \{A, B\}$, $S_0 = A$, $T = \{a, b\}$și $P = \{A \to aAa,\ A \to aBa,\ B \to Bb,\ B \to b\}$.

Exercițiul 13 Fie (S, Σ) o signatură multisortată și

$$(\forall X)\, l \doteq r \ if\ H$$

o (S, Σ)-ecuație condiționată. Fie $\mathcal{A}$ este o (S, Σ)-algebră astfel încât $\mathcal{A} \models (\forall X)\, l \doteq r\ if\ H$. Demonstrați că $\mathcal{B} \models (\forall X)\, l \doteq r\ if\ H$ oricare ar fi B o subalgebră a lui $\mathcal{A}$.

Exercițiul 14 Cercetați dacă termenii

$$t_1 = g(z, h(z, v), f(v)) \text{ și } t_2 = g(f(x), h(y, f(a)), f(f(b)))$$

au un unificator (x, y, z, v sunt variabile, a și b sunt constante iar operațile f, h, g au aritățile 1,2,3).

Pentru următoarele exerciții folosim specificația multisortată (S, Σ, E), unde:

$S = \{nat, bool\}$,
$\Sigma = \{T :\to bool,\ F :\to bool,\ 0 :\to nat,\ succ\colon nat \to nat,\ iszero\colon nat \to bool\}$,
$E = \{\ \forall\emptyset\ succ(succ(0)) \doteq 0,$
$\quad \forall\emptyset\ iszero(0) \doteq T,$
$\quad \forall\{x\}\ iszero(succ(x)) \doteq F\}$.

Exercițiul 15 Fie R sistemul de rescriere ataşat lui E.
(a) Descrieţi T_Σ (algebra termenilor fără variabile) şi indicaţi termenii $t \in T_\Sigma$ care sunt forme normale pentru R.
(b) Arătaţi că R nu este confluent.

Exercițiul 16 Arătaţi că $E \vdash \forall\emptyset(T \doteq F)$ şi scrieţi o E-demonstraţie formală în logica ecuaţională, indicând la fiecare pas regula de deducţie folosită.

Exercițiul 17 Arătaţi că $E \not\vdash \forall\{x\}\, succ(succ(x)) \doteq x$.
(Indicaţie: găsiţi o (S, Σ, E)-algebră care nu satisface ecuaţia.)

Exercițiul 18 Găsiţi o (S, Σ, E)-algebră iniţială şi justificaţi alegerea facută.

Exercițiul 19 Determinaţi signatura corespunzătoare următoarei gramatici independente de context:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{T} \to \text{true} \,|\, \mathbf{V} \le \mathbf{V}, & \mathbf{R} \to reg\, n, \quad n \in \{1,2,3\}, \\
\mathbf{B} \to \mathbf{T} \,|\, \mathbf{B}||\mathbf{B} \,|\, !\mathbf{B}, & \mathbf{V} \to \mathbf{N} \,|\, \mathbf{R} \,|\mathbf{V} + \mathbf{V} \,|\, \mathbf{V} - \mathbf{V}, \\
\mathbf{N} \to i, \quad i \in \{0, \dots, 9\}, & \mathbf{E} \to \mathbf{R} = \mathbf{V} \,|\, \{\mathbf{P}\} \,|\, \text{if } \mathbf{B}\ \mathbf{E} \,|\, \text{while}\, \mathbf{B}\, \mathbf{E}, \\
\mathbf{N} \to i\mathbf{N}, \quad i \in \{0, \dots, 9\}, & \mathbf{P} \to \mathbf{E} \,|\, \mathbf{E}; \mathbf{P},
\end{array}$$

unde $\{\text{true}, \le, ||, !, +, -, =, \{, \}, \text{if}, \text{while}, ; \} \cup \{reg\, n, i | \, n \in \{1,2,3\}, i \in \{0, \dots, 9\}\}$ este mulţimea terminalelor.

Exercițiul 20 Fie (S, Σ) o signatură, $\mathcal{K}$ o clasă de (S, Σ) algebre şi $\mathcal{I}$ o algebră iniţială în $\mathcal{K}$. Arătaţi că dacă $\mathcal{I} \models \forall\emptyset\, (l \doteq r)$ atunci $\mathcal{A} \models \forall\emptyset\, (l \doteq r)$ oricare ar fi $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$.

Exercițiul 21 Studiaţi mulţimea de unificatori a termenilor

$$t_1 = h(f(u), h(g(a, w), v, x), f(w)), \quad t_2 = h(f(g(a, w)), h(v, g(w, a), f(v)), y),$$

unde u, v, w, x, y sunt variabile, a este constantă iar f, g, h sunt operatori cu arităţile $1, 2, 3$.

Pentru următoarele exerciţii folosim specificaţia (S, Σ, E), unde:

$S = \{num\}$,
$\Sigma = \{one :\to num,\ double\colon num \to num,\ half\colon num \to num\}$,
$E = \{\ \forall\{x\}\ double(half(x)) \doteq x,$
$\quad\ \forall\{x\}\ half(double(x)) \doteq x\}$.

Exercițiul 22 Definiţi pe $\mathbb{Z}$ operaţiile de Σ-algebră astfel încât structura obţinută să fie E-algebră iniţială.

Exercițiul 23 Pentru un termen $t \in T_\Sigma(\{x\})$, notăm $nr(t)$ = numărul simbolurilor de operaţie care apar în t. Fie R sistemul de rescriere ataşat lui E.
(a) Arătaţi că dacă $\theta : \{x\} \to T_\Sigma(\{x\})$ este o substituţie şi $\forall\{x\}\ l \to r \in R$, atunci $nr(\theta(l)) = nr(\theta(r)) + 2$.
(Indicaţie: $\theta : T_\Sigma(\{x\}) \to T_\Sigma(\{x\})$ este un morfism.)
(b) Arătaţi că $t \to_R t'$ implică $nr(t) > nr(t')$.
(c) Arătaţi că R se termină.

Exerciţiul 24 Fie $G = (S_0, N, T, P)$ o gramatica independente de context cu
$N = \{A, B\}$, $S_0 = A$, $T = \{a, b\}$şi
$P = \{A \to aAB,\ A \to BAa,\ A \to a, B \to Bb,\ B \to b\}$.
(a) Determinati signatura atasata gramaticii G.
(b) Folosind semantica algebrei initiale, contruiti o algebra semantica care sa asocieze unui cuvant $w \in L(G)$ urmatoarea interpetare: $Sem(w) = nr(a, w) - nr(b, w)$, unde $nr(x, w)$ = numarul de aparitii ale literei x in w. Exemplificati pentru $w = aaabb$.

Exerciţiul 25 Fie $S = \{s\}$ si $\Sigma = \{f : s \to s, g : s \to s\}$. Pentru fiecare din sistemele de rescriere de mai jos calculati perechile critice. Cercetati daca aceste sisteme sunt complete.
(1) $R_1 = \{f(g(f(x))) \to g(f(g(x)))\}$,
(2) $R_2 = \{f(f(x)) \to f(x)\}$
(3) $R_3 = \{f(g(f(x))) \to g(f(g(x))), f(f(x)) \to f(x)\}$.

Exerciţiul 26 Fie $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ o multime de clauze Horn, unde

(γ_1) $student2(x) : -prof(IL, x)$
(γ_2) $prof(z, x) : -prof(z, y), serie(x, y)$
(γ_3) $prof(IL, Maria)$
(γ_1) $serie(Andrei, Maria)$

(x, y, z sunt variabile; IL, $Maria$, $Andrei$ sunt constante).
Gasiti o repingere din Γ pentru
$: -student2(Andrei)$