Logică matematică și computațională
Cursul IX

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

Algebre Boole

- În acest curs vom continua studiul **algebrelor Boole** (caz particular de latici).

Definiția unei algebre Boole

Amintim că: o **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ compusă din:

- o mulțime B,
- o relație de ordine parțială $\leq$ pe B,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe B, notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operație unară $\bar{\cdot}$ pe B,

iar aceste componente au proprietățile:

- $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este o **latice**, i. e.:
  - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(B, \leq)$;
  - $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
  - $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;

Definiția unei algebre Boole

- laticea $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este **distributivă**, i. e.:
  - $\vee$ este **distributivă** față de $\wedge$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
  - $\wedge$ este **distributivă** față de $\vee$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
  - 0 este **minimul** posetului $(B, \leq)$;
  - 1 este **maximul** posetului $(B, \leq)$;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** și satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivității**, iar $\bar{\cdot}$ este operația de **complementare**:
  - pentru orice $x \in B$, $\overline{x}$ este **unicul complement** al lui x, adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{și} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc următoarele **operații binare derivate**:

- **implicația (booleană)**, $\rightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalența (booleană)**, $\leftrightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

Exemple de algebre Boole

La fel ca în cazul laticilor mărginite:

Remarcă

O algebră Boole nu poate fi vidă, pentru că are minim și maxim.

Definiție

- Algebra Boole cu un singur element (adică algebra Boole cu $0 = 1$, anume lanțul cu un singur element, $\mathcal{L}_1$) se numește *algebra Boole trivială*.
- Orice algebră Boole de cardinal strict mai mare decât 1 (i. e. orice algebră Boole cu cel puțin 2 elemente, adică orice algebră Boole cu $0 \neq 1$) se numește *algebră Boole netrivială*.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Lanțul cu două elemente este o algebră Boole.
Într–adevăr, $(\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}, \leq)$, cu $0 < 1$ (i. e. $0 \leq 1$ și $0 \neq 1$):

- este un lanț, deci o latice distributivă, cu $\vee = \max$ și $\wedge = \min$;
- este, evident, o latice mărginită;
- are proprietatea că 0 și 1 sunt complemente unul altuia și nu au alte complemente (fapt valabil în orice latice mărginită), deci $\overline{0} = 1$ și $\overline{1} = 0$.

Așadar, $(\mathcal{L}_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ este o algebră Boole.
Această algebră Boole se numește *algebra Boole standard* și are următoarea diagramă Hasse ca poset:

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Se arată imediat, direct cu definiția unei algebre Boole, că orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite punctual.

Remarcă

În particular, considerând algebra Boole standard $\mathcal{L}_2$ și o mulțime arbitrară I, remarca anterioară ne asigură de faptul că produsul direct $(\mathcal{L}_2^I = \{f | f : I \to \mathcal{L}_2\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite **punctual**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $(\mathcal{L}_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$:

- pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_2^I$, $f \vee g, f \wedge g, \overline{f}, 0, 1 \in \mathcal{L}_2^I$, definite prin: pentru orice $i \in I$:
  - $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i)$
  - $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i)$
  - $\overline{f}(i) := \overline{f(i)}$
  - $0(i) := 0$ și $1(i) := 1$
- iar $f \leq g$ în $\mathcal{L}_2^I$ dacă, pentru fiecare $i \in I$, $f(i) \leq g(i)$ în $\mathcal{L}_2$.

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Aplicând remarca anterioară cazului în care I este finită, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, obținem că $(\mathcal{L}_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{L}_2 = \{0, 1\}\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și relația de ordine definite **pe componente**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $(\mathcal{L}_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$: pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{L}_2$:

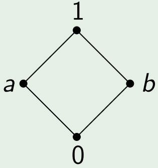
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$
- $\overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$
- $0 := \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ de } 0}$ și $1 := \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ de } 1}$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în $\mathcal{L}_2^n$ ddacă $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, ..., $x_n \leq y_n$ în $\mathcal{L}_2$

- $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_1$ este algebra Boole trivială.
- $\mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}_2$ este algebra Boole standard.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^2$ se numește *rombul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Am notat: $0 = (0,0)$, $1 = (1,1)$, $a = (0,1)$, $b = (1,0)$, unde $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$.
Diagrama de mai sus este corectă, pentru că ordinea parțială produs, $\leq$, satisface:

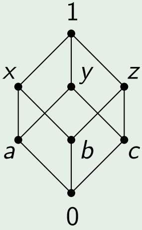
- $(0,0) \leq (0,1) \leq (1,1)$,
- $(0,0) \leq (1,0) \leq (1,1)$,
- $(0,1)$ și $(1,0)$ sunt incomparabile ($(0,1) \nleq (1,0)$ și $(1,0) \nleq (0,1)$, pentru că $1 \nleq 0$ în $\mathcal{L}_2$).

Definițiile operațiilor de algebră Boole se fac pe componente, pornind de la cele ale lui $\mathcal{L}_2$ (de exemplu, $a \vee b = (0,1) \vee (1,0) = (0 \vee 1, 1 \vee 0) = (1,1) = 1$), dar pot fi determinate și din diagrama Hasse a acestei algebre Boole.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ se numește *cubul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Cu notația uzuală $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$ pentru elementele algebrei Boole standard, elementele din diagrama Hasse de mai sus sunt: $0 = (0, 0, 0)$, $a = (0, 0, 1)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 0, 0)$, $x = (0, 1, 1)$, $y = (1, 0, 1)$, $z = (1, 1, 0)$ și $1 = (1, 1, 1)$.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Pentru orice mulțime I, $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, I)$, unde $\overline{A} = I \setminus A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, este o algebră Boole.
Acest fapt poate fi verificat foarte ușor, cu definiția unei algebre Boole, folosind funcțiile caracteristice ale submulțimilor lui I raportat la I sau, direct, calcul cu mulțimi pentru a demonstra proprietățile operațiilor lui $\mathcal{P}(I)$.

Algebre Boole

- Peste tot în cele ce urmează, $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ va fi o algebră Boole arbitrară.

Remarcă (complementarea este idempotentă)

Pentru orice $x \in B$, $\overline{\overline{x}} = x$.
Acest fapt se arată direct cu definiția complementului, folosind unicitatea lui în algebre Boole. Într–adevăr, definiția complementului $\overline{x}$ al lui x arată că x satisface condițiile care definesc complementul $\overline{\overline{x}}$ al lui $\overline{x}$, așadar $x = \overline{\overline{x}}$.

Principiul dualității pentru algebre Boole

Remarcă

Se arată ușor că $(B, \wedge, \vee, \geq, \bar{\cdot}, 1, 0)$ este o algebră Boole, numită *duala algebrei Boole* $\mathcal{B}$.
Se știa, din capitolul despre latici al cursului, că:

- $\vee$ și $\wedge$,
- $\leq$ și $\geq := \leq^{-1}$,
- 0 și 1

sunt duale una alteia, respectiv.
Este imediat că operația unară $\bar{\cdot}$ este duală ei însăși. Spunem că operația $\bar{\cdot}$ este *autoduală*.
Evident, duala dualei lui $\mathcal{B}$ este $\mathcal{B}$.

Remarca anterioară stă la baza **Principiului dualității pentru algebre Boole**: *orice rezultat valabil într–o algebră Boole arbitrară rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul lui interschimbăm: $\vee$ cu $\wedge$, $\leq$ cu $\geq$, 0 cu 1 (iar operația $\bar{\cdot}$ rămâne neschimbată).*

Legile lui de Morgan

Propoziție (legile lui de Morgan)

Pentru orice $x, y \in B$*:*

1. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
2. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Demonstrație: (1) Avem de arătat că $\overline{x} \wedge \overline{y}$ este complementul lui $x \vee y$. Conform definiției și unicității complementului, este suficient să demonstrăm că: $(x \vee y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 1$ și $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 0$.
Aplicăm distributivitatea, comutativitatea, definiția complementului și faptul că 0 și 1 sunt minimul și, respectiv, maximul lui $\mathcal{B}$:
$x \vee y \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = (x \vee y \vee \overline{x}) \wedge (x \vee y \vee \overline{y}) = (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1;$
$(x \vee y) \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} = (x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = (0 \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$
(2) Rezultă din (1), prin dualitate.

Subalgebre Boole

Definiție

O submulțime S a lui B se numește *subalgebră Boole a lui* $\mathcal{B}$ ddacă este **închisă la operațiile de algebră Boole ale lui** $\mathcal{B}$, i. e.:

1. pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \vee y \in S$;
2. pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \wedge y \in S$;
3. pentru orice $x \in S$, rezultă $\overline{x} \in S$;
4. $0, 1 \in S$.

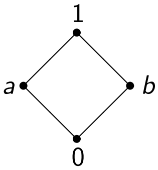
Propoziție

Au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți din definiția unei subalgebre Boole, aplicate unei submulțimi nevide S a lui B:

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$
- $(3) \not\Leftarrow (1), (2), (4)$

Subalgebre Boole

Demonstrație: Fie $\emptyset \neq S \subseteq B$.
"$(1) \Leftarrow (2), (3):$" Presupunem că S satisface (2) și (3). Fie $x, y \in S$. Conform (3), (2), **legilor lui de Morgan** și idempotenței complementării, rezultă că $\overline{x}, \overline{y} \in S$, deci $\overline{x} \wedge \overline{y} \in S$, deci $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \in S$, dar $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} = x \vee y$, așadar $x \vee y \in S$.
"$(2) \Leftarrow (1), (3):$" Prin dualitate, din implicația anterioară.
"$(4) \Leftarrow (1), (2), (3):$" Fie $x \in S$, arbitrar. Atunci, conform (3), (1) și (2), rezultă $\overline{x} \in S$, deci $1 = x \vee \overline{x} \in S$ și $0 = x \wedge \overline{x} \in S$.
"$(3) \not\Leftarrow (1), (2), (4):$" De exemplu, în $\mathcal{L}_2^2$ (rombul, cu diagrama Hasse figurată mai jos), considerând $S := \{0, a, 1\}$, se observă că S satisface (1), (2) și (4), dar nu satisface (3), întrucât $\overline{a} = b \notin S$.



Subalgebre Boole

Remarcă

Proprietatea **(4)** din definiția unei subalgebre Boole arată că orice subalgebră Boole S este nevidă, fapt implicat și de remarca de mai jos.

Remarcă

Este imediat că o subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este o algebră Boole cu operațiile induse pe S de operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$ și cu ordinea parțială indusă pe S de ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$.

Notație

Operațiile induse (adică restricțiile la S ale operațiilor lui $\mathcal{B}$) se notează, de obicei, la fel ca operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, iar ordinea parțială indusă (adică ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$ restricționată la S) se notează, de obicei, la fel ca ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$.

Remarcă

Este imediat că orice subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este închisă la operațiile derivate $\rightarrow$ și $\leftrightarrow$ ale lui $\mathcal{B}$ (adică $x \rightarrow y, x \leftrightarrow y \in S$ pentru orice $x, y \in S$), și că operațiile pe care acestea le induc pe S sunt exact implicația și, respectiv, echivalența algebrei Boole S (notate, în mod uzual, la fel ca implicația și, respectiv, echivalența lui $\mathcal{B}$).

Morfisme booleene

În cele ce urmează, renunțăm la fixarea algebrei Boole notate $\mathcal{B}$.

Definiție

Date două algebre Boole $(A, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, \perp, \top)$, o funcție $f : A \to B$ se numește *morfism boolean* (sau *morfism de algebre Boole*) ddacă f **comută cu operațiile de algebre Boole ale lui A și B**, i. e. ddacă f este morfism de latici mărginite între $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ și, pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$.

Scris desfășurat, o funcție $f : A \to B$ este *morfism boolean* ddacă:

1. pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
2. pentru orice $x, y \in A$, $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$
3. pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$
4. $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$

Un *endomorfism boolean* (sau *endomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean între o algebră Boole și ea însăși.

Un *izomorfism boolean* (sau *izomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean bijectiv, ceea ce este același lucru cu un morfism boolean inversabil, pentru că inversa unui morfism Boolean bijectiv este morfism boolean, ceea ce se observă imediat, dacă aplicăm rezultatul similar de la latici (**temă pentru acasă**).

Un *automorfism boolean* (sau *automorfism de algebre Boole*) este un izomorfism boolean între o algebră Boole și ea însăși, adică un endomorfism boolean bijectiv.

Morfisme booleene

Propoziție

Cu notațiile din definiția anterioară, au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți ale unui morfism boolean, aplicate unei funcții $f : A \to B$:

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(3) \Leftarrow (1), (2), (4)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$

Demonstrație: Fie $f : A \to B$ o funcție.
"$(1) \Leftarrow (2), (3)$:" Dacă f satisface (2) și (3), atunci, pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(\overline{\overline{x \vee y}}) = f(\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}) = \neg f(\overline{x} \wedge \overline{y}) = \neg (f(\overline{x}) \sqcap f(\overline{y})) = \neg(\neg f(x) \sqcap \neg f(y)) = \neg\neg f(x) \sqcup \neg\neg f(y) = f(x) \sqcup f(y)$. Am aplicat idempotența complementării și legile lui de Morgan.
"$(2) \Leftarrow (1), (3)$:" Rezultă, prin dualitate, din prima implicație.
"$(3) \Leftarrow (1), (2), (4)$:" Dacă f satisface (1), (2) și (4), atunci, pentru orice $x \in A$, $\bot = f(0) = f(x \wedge \overline{x}) = f(x) \sqcap f(\overline{x})$ și $\top = f(1) = f(x \vee \overline{x}) = f(x) \sqcup f(\overline{x})$, ceea ce, conform definiției și unicității complementului, arată că $f(\overline{x})$ este complementul lui $f(x)$ în algebra Boole B, adică $f(\overline{x}) = \neg f(x)$.

Morfisme booleene

"$(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$:" Dacă f satisface (1), (2) și (3), atunci, pentru orice $x \in A$, $\bot = f(x) \sqcap \neg f(x) = f(x) \sqcap f(\overline{x}) = f(x \wedge \overline{x}) = f(0)$ și, dual, $\top = f(1)$.

Remarcă (temă)

Orice morfism boolean comută cu implicația și echivalența booleană.
Compunerea a două morfisme booleene este un morfism boolean.
Imaginea unui morfism boolean este o subalgebră Boole a codomeniului acelui morfism boolean.

Propoziție

Pentru orice mulțime I, algebrele Boole $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, I)$ și $(\mathcal{L}_2^I, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism boolean între ele).

Amintim dintr–un curs anterior că, în cazul în care $I \neq \emptyset$, un izomorfism boolean între aceste algebre Boole este $f : \mathcal{P}(I) \to \mathcal{L}_2^I$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, $f(A) := \chi_A$ (funcția caracteristică a lui A raportat la I).
Iar, dacă $I = \emptyset$, atunci cele două algebre Boole din enunț coincid cu algebra Boole trivială, așadar sunt izomorfe, cu izomorfismul boolean dat de identitatea algebrei Boole triviale.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

Propoziție

Fie $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ *o algebră Boole. Atunci, pentru orice* $x, y \in B$*, au loc următoarele echivalențe:*

1. $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$
2. $x \leq y$ *ddacă* $\overline{y} \leq \overline{x}$
3. $x \leq y$ *ddacă* $x \wedge \overline{y} = 0$ *ddacă* $\overline{x} \vee y = 1$
4. $x \leq y$ *ddacă* $x \rightarrow y = 1$
5. $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$

Demonstrație: Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
(1) Următorul șir de implicații demonstrează rezultatul de la acest punct: $x = y$ implică $\overline{x} = \overline{y}$ implică $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, ceea ce este echivalent cu $x = y$, conform idempotenței complementării.
(2) Aplicând, pe rând, definiția relației de ordine în funcție de $\vee$, punctul **(1)**, **legile lui de Morgan** și definiția relației de ordine în funcție de $\wedge$ în orice latice (și comutativitatea lui $\wedge$), obținem șirul de echivalențe: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $\overline{x \vee y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{y} \leq \overline{x}$.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

(3) Amintim, dintr–un curs anterior, faptul că, în orice latice, dacă elementele a, b, α, β satisfac inegalitățile: $a \leq b$ și $\alpha \leq \beta$, atunci $a \wedge \alpha \leq b \wedge \beta$. În particular, aplicând reflexivitatea unei relații de ordine, avem: dacă $a \leq b$, atunci $a \wedge \alpha \leq b \wedge \alpha$.
Așadar, $x \leq y$ implică $x \wedge \overline{y} \leq y \wedge \overline{y} = 0$ implică $x \wedge \overline{y} = 0$. Am aplicat definiția complementului și faptul că 0 este minimul lui B.
Dacă $x \wedge \overline{y} = 0$, atunci
$y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$, prin urmare $x \leq y$. Am aplicat faptul că 0 este minimul lui B, distributivitatea lui $\vee$ față de $\wedge$, definiția complementului, faptul că 1 este maximul lui B și definiția lui $\leq$ în funcție de $\vee$ în orice latice (și comutativitatea lui $\vee$).
Am demonstrat faptul că $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$.
Acum aplicăm punctul **(1)**, **legile lui de Morgan**, faptul evident că $\overline{0} = 1$ și idempotența complementării, și obținem: $x \wedge \overline{y} = 0$ ddacă $\overline{x \wedge \overline{y}} = \overline{0}$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{\overline{y}} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$.
(4) Din punctul **(3)** și definiția implicației booleene, obținem: $x \leq y$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$ ddacă $x \rightarrow y = 1$.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

(5) Să observăm că, oricare ar fi $a, b \in B$, are loc echivalența: $a \wedge b = 1$ ddacă [$a = 1$ și $b = 1$]. Într–adevăr, implicația directă rezultă din faptul că $a \wedge b \leq a$ și $a \wedge b \leq b$ și faptul că 1 este maximul lui B, iar implicația reciprocă este trivială. Reflexivitatea și antisimetria lui $\leq$, punctul **(4)**, proprietatea de mai sus și definiția echivalenței booleene ne dau: $x = y$ ddacă [$x \leq y$ și $y \leq x$] ddacă [$x \rightarrow y = 1$ și $y \rightarrow x = 1$] ddacă $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = 1$ ddacă $x \leftrightarrow y = 1$.