Laborator 4

Pendulul matematic

Sa se studieze miscarea unui punct material greu, de masa m , pe o circumferinta de raza l , in plan vertical.

Legea a II-a Newton:

$$m\vec{a} = \vec{F}\left(= \vec{G} + \vec{N}\right) \tag{1}$$

Fortele care intervin sunt forta de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$ si forta de legatura $\vec{N}$, care apriori nu se cunoaste.

Componentele vitezei si acceleratiei pe axele triedrului lui Frenet $\vec{\tau},\vec{\nu}$ (versorii tangentei (orientata in sensul crescator al arcului s), normalei principale (orientata spre centrul de curbura)):

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{s}\vec{\tau} = r\dot{\theta}\vec{\tau} \\ \vec{a} &= \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{r}\vec{\nu} = r\ddot{\theta}\vec{\tau} + r\dot{\theta}^2\vec{\nu} \end{aligned} \tag{2}$$

deoarece $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}, \quad \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{1}{r}\vec{\nu}$. Proiectam $\vec{G},\vec{N}$ pe directiile $\vec{\tau}$ si $\vec{\nu}$:

$$\vec{N} = N\vec{\nu}, \quad \vec{G} = -mg\,sin\,\theta\vec{\tau} - mg\,cos\,\theta\vec{\nu} \tag{3}$$

Scrisa pe componente (1) via $(2)_2$ si (3) rezulta:

$$\begin{cases} r\ddot{\theta} = -g\,sin\,\theta \\ mr\dot{\theta}^2 = N - mg\,cos\,\theta \Rightarrow N = mr\dot{\theta}^2 + mg\,cos\,\theta \end{cases} \tag{4}$$

cu conditiile initiale:

$$\begin{cases} \theta\left(0\right) = 0 \\ \dot{\theta}\left(0\right) = \dfrac{v_0}{R} \end{cases} \tag{5}$$

Ne propunem in continuare sa rezolvam ecuatia diferentiala de ordinul 2 $(4)_1$ cu conditia (5).

Algoritm:

- Notam $\theta = q(1), \dot{\theta} = q(2)$. Cu aceste notatii se obtine urmatorul sistem diferential:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2 \\ \dot{q}_2 = -\dfrac{g \sin q_1}{r} \end{cases} \qquad (6)$$

cu conditia $\begin{cases} q_1(0) = 0 \\ q_2(0) = \dfrac{v_0}{R} \end{cases}$.

Vom considera mai multe seturi de date numerice:

I) $v_0^2 < 4gR \Rightarrow$ Miscare permanenta.

Se verifică dacă $\exists \beta < \alpha$, unde $\alpha = max\,\theta$, a.î. $N(\beta) = 0$. In acest caz, spunem ca miscarea isi perde caracterul.

II) $v_0^2 \geq 4gR$ si $v_0^2 \leq 5gR \Rightarrow$ $\exists \beta$ a.i. $N(\beta) = 0 \Rightarrow$ are loc caderea de pe curba

III) $v_0^2 > 5gR \Rightarrow$ Miscare permanenta

- Date numerice: I) $g = 9{,}8;\ R = 2;\ m = 4$; $v_0 = \sqrt{3gR}; \sqrt{2gR}; \sqrt{gR}; \sqrt{\frac{1}{2}gR}$ respectiv. Ce observati? In ce caz miscarea isi perde caracterul?
- II) $v_0 = (1-a)\sqrt{4gR} + a\sqrt{5gR}, a = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$ respectiv
- III) $v_0 = \sqrt{6gR}; \sqrt{7gR}$ respectiv
- Rezolvati in Matlab sistemul (6)
- Calculati θ si $d\theta$
- Calculati marimile $x_1 = R\cos\theta, x_2 = R\sin\theta$ si construiti graficul. Animati procesul de miscare cu un numar de cadre mult mai mic decat dimensiunea
- Calculati marimea $N = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$ si construiti graficul acestei marimi $N = N(\theta)$
- Care este natura miscarii in fiecare caz considerat

Program Matlab

date.m

```
g=9.8; R=2; v0=sqrt(3*g*R); m=4;
```

pendul_mat.m

```
date;
[t,q]=ode45(@sistem_f,[0;10],[0;v0/R]);
teta=q(:,1);
N=3*m*g*cos(teta)-2*m*g+m*v0^2/R;
x1=R*cos(teta);
x2=R*sin(teta);
figure(1)
plot(x1,x2,'.','Markersize',6)
title('Pendulul matematic')
xlabel('x1')
ylabel('x2')
grid on
figure(2)
title('Pendulul matematic')
xlabel('x1')
ylabel('x2')
grid on
for i=1:size(teta,1)
    plot(x1(i),x2(i),'*',-R,-R,'o',R,R,'o');
    axis equal
    hold on
    M(i)=getframe;
end
movie(M,3,10)
figure(3)
plot(t,N)
title('Reactiunea N')
xlabel('t')
ylabel('N')
grid on
figure(4)
plot(t,teta)
title('Unghiul teta ca functie de t')
xlabel('t')
ylabel('teta')
grid on
```

sistem_f.m

```
function f=sistem_f(t,q)
f=zeros(2,1);
date;
f=[q(2);-g*sin(q(1))/R];
```