PROGRAMARE LOGICĂ
SEMINAR 3
- SPECIFICAŢII ADECVATE -

Teorie:

- Un *morfism de* (S,Σ)*-algebre* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este o funcţie S-sortată $h = \{h_s\}_{s\in S} : \{A_s\}_{s\in S} \to \{B_s\}_{s\in S}$ care verifică condiţia de compatibilitate:
  - $h_s(A_\sigma) = B_\sigma$, or. $\sigma :\to s \in \Sigma$,
  - $h_s(A_\sigma(a_1,\ldots,a_n)) = B_\sigma(h_{s_1}(a_1),\ldots,h_{s_n}(a_n))$, or. $\sigma : s_1\ldots s_n \to s \in \Sigma$ şi or. $a_1 \in A_{s_1},\ldots,a_n \in A_{s_n}$.
- O (S,Σ)-algebră $\mathcal{I}$ este *iniţială* într-o clasă de (S,Σ)-algebre $\mathfrak{K}$ dacă pentru orice $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$, există un unic (S,Σ)-morfism $f : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$.
- O (S,Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ *satisface o ecuaţie condiţionată* $(\forall X)t \doteq_s t'\ if\ H$
  - dacă pentru orice funcţie S-sortată $e : X \to A_S$, $\tilde{e}_{s'}(u) = \tilde{e}_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t')$.
  - dacă pentru orice morfism $f : T_\Sigma(X) \to A$, $f_{s'}(u) = f_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow f_s(t) = f_s(t')$.
- O (S,Σ)-algebră $\mathcal{A}$ este o Γ-*algebră* dacă $\mathcal{A} \models \gamma$, or. $\gamma \in \Gamma$.
- O *specificaţie algebrică* este un triplet (S,Σ,Γ), unde (S,Σ) este o signatură multisortată şi Γ este o mulţime de ecuaţii condiţionate.
- O specificaţie (S,Σ,Γ) este *adecvată* pentru $\mathcal{A}$ dacă $\mathcal{A}$ este Γ-algebră iniţială, i.e. $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{(S,\Sigma,\Gamma)}$.

Exerciţiul 1:

Fie $S = \{s\}$, $\Sigma = \{8 :\to s,\ h : s \to s\}$ şi $\Gamma = \{(\forall x)h(h(h(x))) \doteq x\}$.
Determinaţi (S,Σ,Γ)-algebra iniţială şi justificaţi răspunsul.

Rezolvare: Considerăm (S,Σ)-algebra $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_3, A_8, A_h)$, unde

$$A_8 := 0 \text{ şi } A_h(x) = (x+1)(mod 3), \text{ or. } x \in \mathbb{Z}_3.$$

Arătăm că $\mathcal{A}$ este Γ-algebră, i.e. $\mathcal{A} \models (\forall x)h(h(h(x))) \doteq x$. Fie $e : X \to \mathbb{Z}_3$, unde $X = \{x\}$. Avem:

$$\tilde{e}(h(h(h(x)))) = A_h(A_h(A_h(e(x)))) = (e(x)+3)(mod 3) = e(x) = \tilde{e}(x)$$

Arătăm că $\mathcal{A}$ este Γ-algebră iniţiala. Fie $\mathcal{B}$ o Γ-algebră, $\mathcal{B} = (B, B_8, B_h)$.
Existenţa: Definim $f : \mathbb{Z}_3 \to B$ prin $f(0) := B_8$ şi $f(x+1) := B_h(f(x))$, pt. $0 \le x \le 1$. Arătăm că f este morfism:

- $f(A_8) = f(0) = B_8$.
- $f(A_h(0)) = f(1) = B_h(f(0))$.
- $f(A_h(1)) = f(2) = B_h(f(1))$.
- Trebuie să arătăm $f(A_h(2)) = B_h(f(2))$.
  - $f(A_h(2)) = f(0) = B_8$
  - $B_h(f(2)) = B_h(B_h(f(1))) = B_h(B_h(B_h(f(0)))) = B_h(B_h(B_h(B_8)))$.
  - Cum $\mathcal{B} \models (\forall x)h(h(h(x))) \doteq x$, pt. $e' : X \to B$, $e'(x) := B_8$, obţinem $B_h(B_h(B_h(B_8))) = B_8$.
  - Deci $B_h(f(2)) = B_8 = f(A_h(2))$.

Unicitatea: Fie $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism. Arătăm că $g(x) = f(x)$, or. $x \in \{0,1,2\}$, prin inducţie:

- $g(0) = g(A_8) = B_8 = f(0)$,
- $g(1) = g(A_h(0)) = B_h(g(0)) = B_h(f(0)) = f(1)$,
- $g(2) = g(A_h(1)) = B_h(g(1)) = B_h(f(1)) = f(2)$.

Exerciţiul 2:

Scrieţi o specificaţie (S,Σ,Γ) adecvată pentru algebra $\mathcal{Z} = (I, 0, p_I)$, unde $I = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \le 0\}$ este mulţimea numerelor întregi negative, $0 \in I$ este constantă, iar $p_I : I \to I$ este definită prin $p_I(z) = z - 1$, or. $z \in I$. Demonstraţi că specificaţia (S,Σ,Γ) găsită este adecvată pentru $\mathcal{Z}$.

Rezolvare: Considerăm specificaţia $S = \{s\}$, $\Sigma = \{0 :\to s,\ p : s \to s\}$ şi $\Gamma = \emptyset$. Evident $\mathcal{Z}$ este o (S, Σ)-algebră şi Γ-algebră.

Arătăm că $\mathcal{Z}$ este (S, Σ)-algebră iniţială. Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră, $\mathcal{B} = (B, B_0, B_p)$.

Existenţa: Definim $f : I \to B$ prin $f(0) := B_0$ şi $f(x-1) := B_p(f(x))$, pt. $x \leq 0$. Arătăm că f este morfism:

- $f(0) = B_0$,
- $f(p_I(x)) = f(x-1) = B_p(f(x))$, or. $x < 0$.

Unicitatea: Fie $g : \mathcal{Z} \to \mathcal{B}$ un morfism. Arătăm prin inducţie după $z \in I$ că $g(x) = f(x)$:

- $g(0) = B_0 = f(0)$,
- $g(z-1) = g(p_I(z)) = B_p(g(z)) = B_p(f(z)) = f(z-1)$, or. $z < 0$.

Exerciţiul 3:

Fie $S = \{s\}$, $\Sigma = \{0 :\to s,\ succ : s \to s\}$ şi $\Gamma = \{(\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \doteq x\}$.
Arătaţi că(S, Σ, Γ) este o specificaţie adecvată pentru $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}_4, 0, succ)$, unde $succ(x) := x + 1 (\text{mod } 4)$.

Rezolvare: Se reduce la a arăta că $\mathcal{A}$ este Γ-algebra iniţială:

(1) Γ-algebră: $\mathcal{A} \models \gamma$, or. $\gamma \in \Gamma$,
(2) Iniţială: pt. or. Γ-algebră $\mathcal{B}$, există un unic morfism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

(1) $\mathcal{A} \models (\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \doteq x$
Fie $e : X \to \mathbb{Z}_4$, unde $X = \{x\}$. Avem

$$\begin{aligned} \tilde{e}(succ(succ(succ(succ(x))))) &= A_{succ}(A_{succ}(A_{succ}(A_{succ}(e(x))))) \\ &= e(x) + 4 \text{mod } 4 \\ &= e(x) = \tilde{e}(x) \end{aligned}$$

(2) Fie $\mathcal{B}$ o Γ-algebră.
Existenţa: Definim $f : \mathbb{Z}_4 \to B$ prin $f(0) := B_0$ şi $f(x+1) := B_{succ}(f(x))$, pt. $0 \leq x \leq 2$. Arătăm că f este morfism:

- $f(A_0) = f(0) = B_0$
- $f(A_{succ}(x)) = f(x+1) = B_{succ}(f(x))$, pt. $0 \leq x \leq 2$
- Trebuie să mai arătăm că $f(A_{succ}(3)) = B_{succ}(f(3))$:
  - $f(A_{succ}(3)) = f(0) = B_0$
  - $B_{succ}(f(3)) = B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_0))))$
  - Cum $\mathcal{B} \models (\forall x) succ(succ(succ(succ(x)))) \doteq x$, pt. $e' : X \to B$, $e'(x) := B_0$, obţinem
    $$B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_{succ}(B_0)))) = \tilde{e'}(succ(succ(succ(succ(x))))) = \tilde{e'}(x) = B_0$$
  - Deci $f(A_{succ}(3)) = B_{succ}(f(3))$.

Unicitatea: Fie $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism.
Arătăm că $g(x) = f(x)$, or. $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, prin inducţie:

- $g(0) = g(A_0) = B_0 = f(0)$
- $g(x+1) = g(A_{succ}(x)) = B_{succ}(g(x)) = B_{succ}(f(x)) = f(A_{succ}(x)) = f(x+1)$