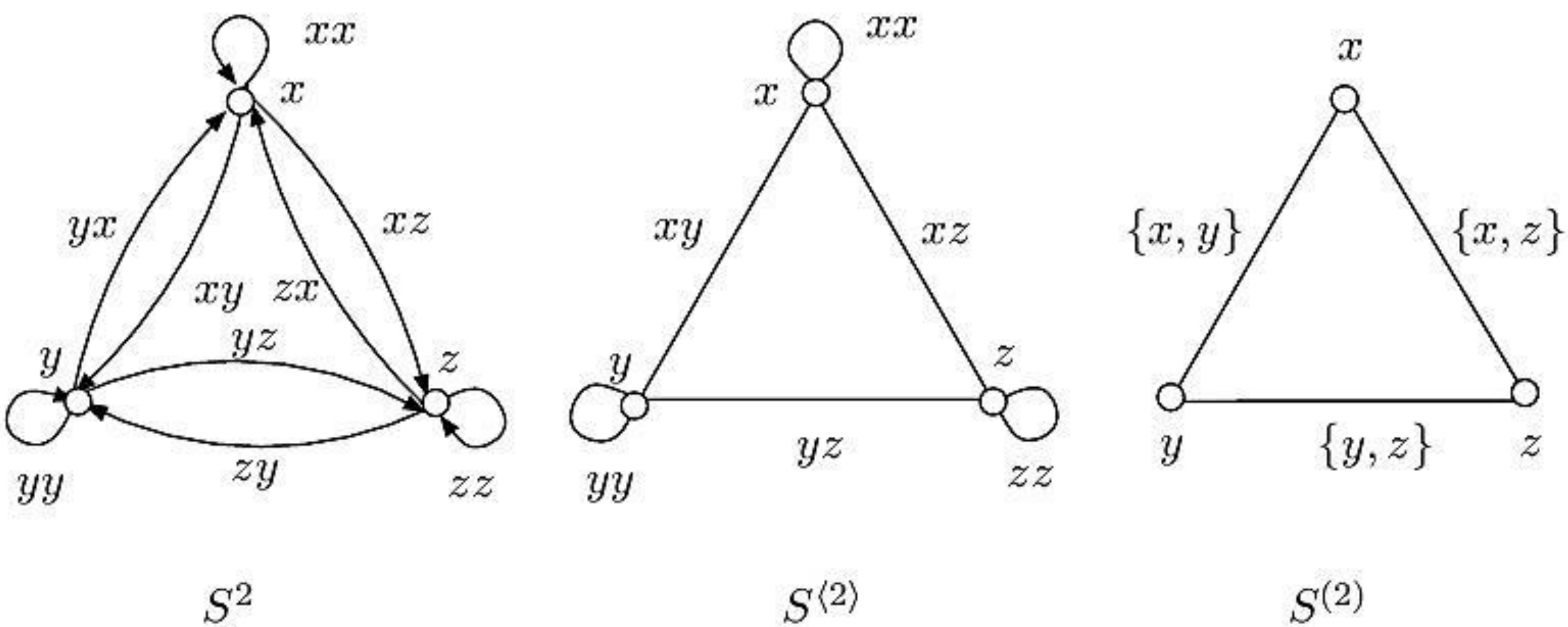
Noţiuni introductive

Multiset

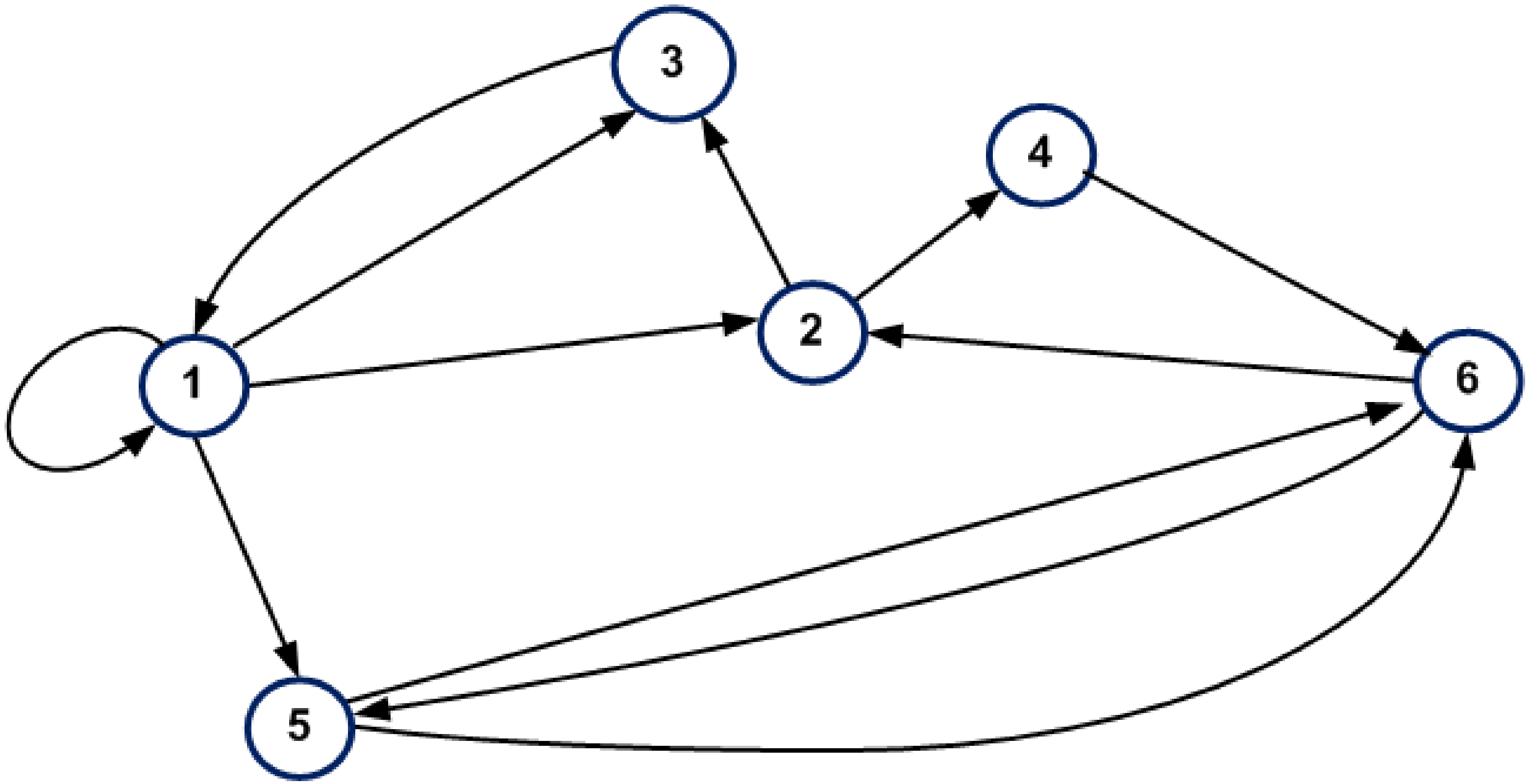
- S o mulţime **finită** nevidă
- **Multiset**
  - $R = (S, r)$
  - $r : S \to \mathbb{N}$ **funcţie de multiplicitate**
- **Notaţie**
  - $R = \{x^{r(x)} \mid x \in S\}$

Exemplu

- $S = \{x, y, z\}$, $m = 2$
  - $S^2 = \{ xx, yy, zz, xy, yx, xz, zx, yz, zy\}$
  - $S^{<2>} = \{ xx, yy, zz, xy, xz, yz\}$
  - $S^{(2)} = \{ \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$



Graf orientat



Graf orientat

- **Graf orientat**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E = (V^2, r)}$
  - $v \in V$ – **vârf**
  - $e = (u, v) = uv$ – **arc**
    - $u = v$ – **buclă**
    - $u = e^-$ – **vârf iniţial / origine / extremitate iniţială**
    - $v = e^+$ – **vârf final / terminus**

Graf orientat

- **Graf orientat**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E = (V^2, r)}$
  - $v \in V$ – **vârf**
  - $e = (u, v) = uv$ – **arc**
    - $u = v$ – **buclă**
    - $u = e^-$ – **vârf iniţial / origine / extremitate iniţială**
    - $v = e^+$ – **vârf final / terminus**

Un arc e cu $r(e) > 1$ îl vom numi **arc multiplu**

Graf orientat

- G = (V, E), **E = (V², r)**
  - $d_G^-(u)$ – **grad interior**

    $$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$$

  - $d_G^+(u)$ – **grad exterior**

    $$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$$

  - $d_G(u)$ – **grad**

    $$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$

Graf orientat

- G = (V, E), **E = (V², r)**
  - $d_G^-(u)$ – **grad interior**

    $$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$$

  - $d_G^+(u)$ – **grad exterior**

    $$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$$

  - $d_G(u)$ – **grad**

    $$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$

Graf orientat

- Are loc relația

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

Multisetul gradelor

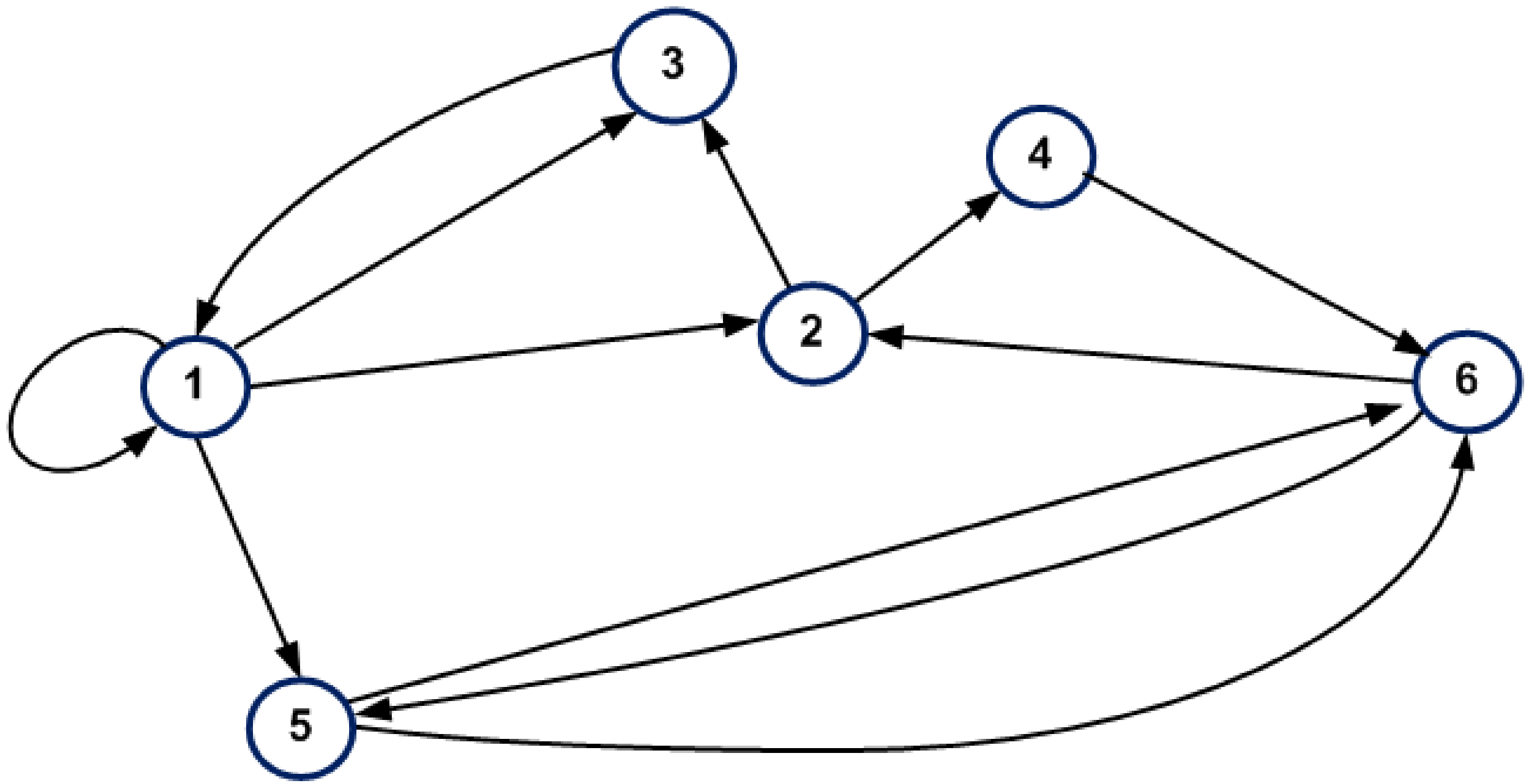
- G orientat, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
  - Multisetul gradelor interioare

$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), \dots, d_G^-(v_n)\}$$

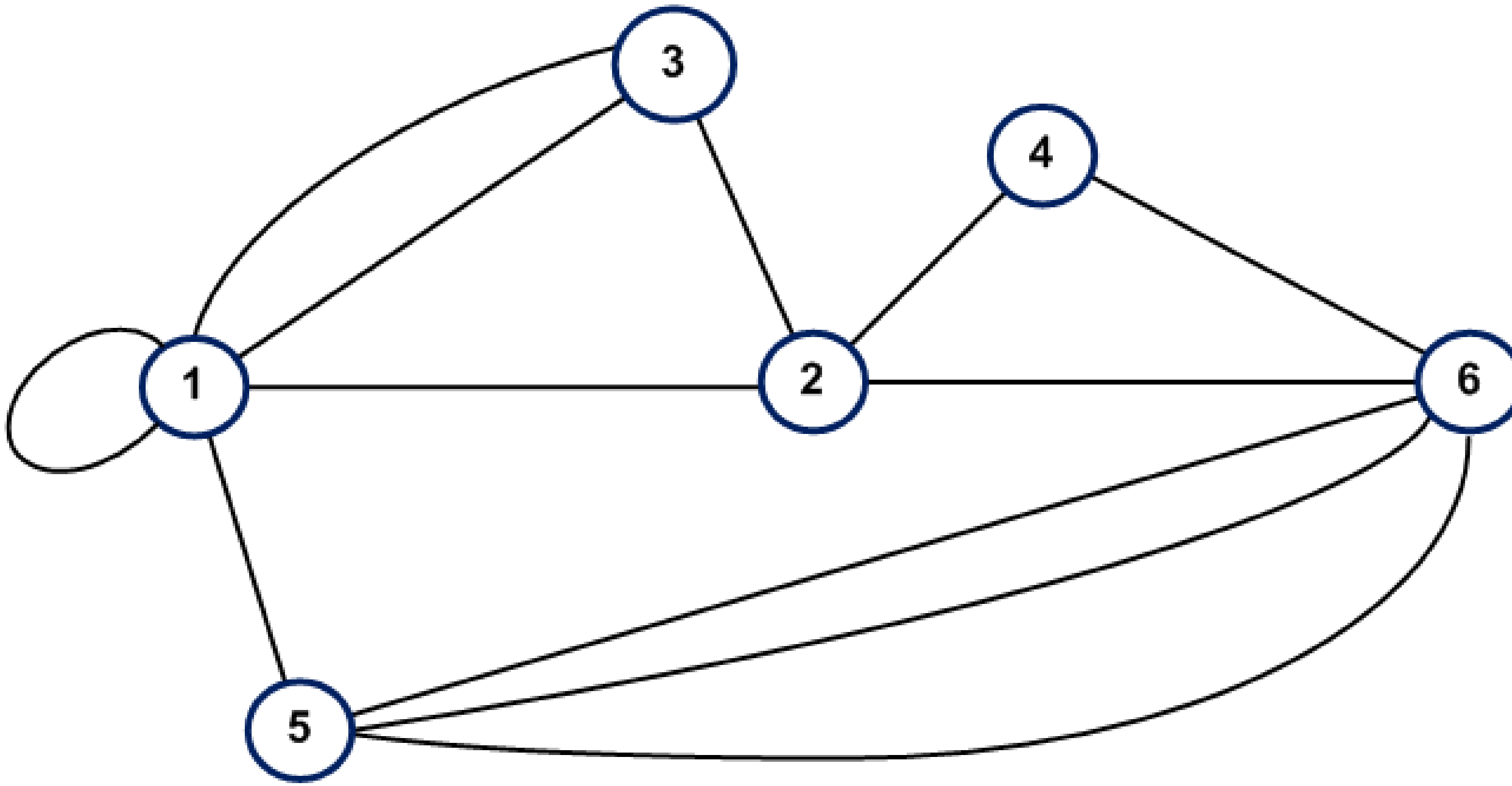
  - Multisetul gradelor exterioare

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), \dots, d_G^+(v_n)\}$$

Exemplu



Graf neorientat



Graf neorientat

- **Graf neorientat**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E = (V^{<2>}, r)}$
  - $v \in V$ – **vârf / nod**
  - $e = \{u,v\} = uv$ – **muchie**
    - $u = v$ – **buclă**
    - u, v – **capete / extremităţi**

  - O muchie e cu $r(e) > 1$ o vom numi **muchie multiplă**

Graf neorientat – Noțiuni

- G = (V, E), **E = ($V^{<2>}$, r)**
  - $d_G(u)$ – **grad**

    = de câte ori este u extremitate a unei muchii (incident cu o muchie)

$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| + 2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}|$$

Graf neorientat - Noțiuni

- G = (V, E), **E = ($V^{<2>}$, r)**
  - $d_G(u)$ - **grad**

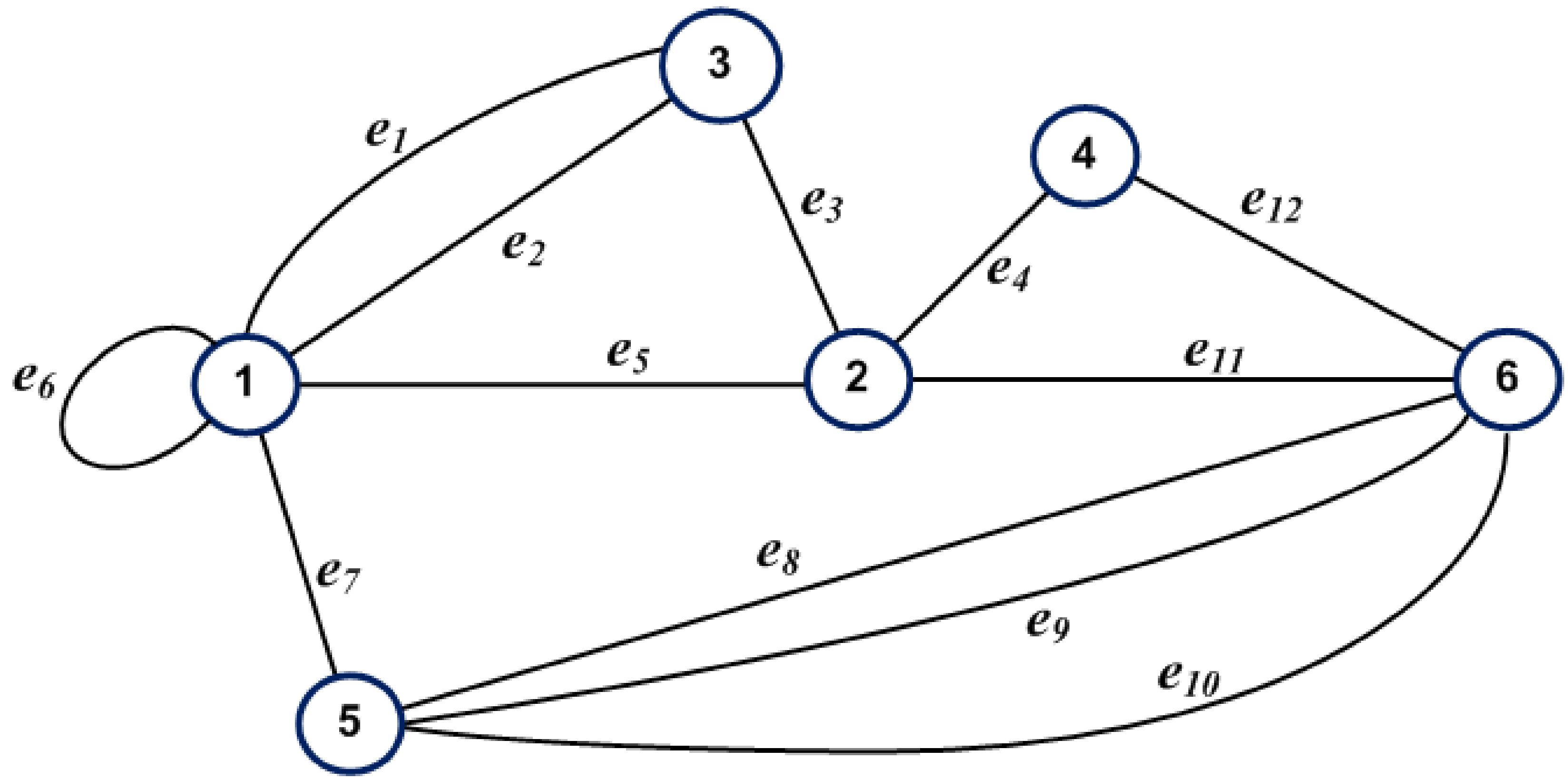
    = de câte ori este u extremitate a unei muchii (incident cu o muchie)

$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| + 2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă}, u \text{ extremitate a lui } e\}| +$$

  - Dacă V = {v_1, v_2, …, v_n}, **multisetul gradelor** lui G este:

$$s(G) = \{d_G(v_1), \ldots, d_G(v_n)\}$$

Exemplu



Graf neorientat – Noțiuni

- $G = (V, E)$, $\quad$ **$E = (V^{<2>}, r)$**
  - Are loc **relația**

$$\sum_{u \in V} d_G(u) = 2|E|$$

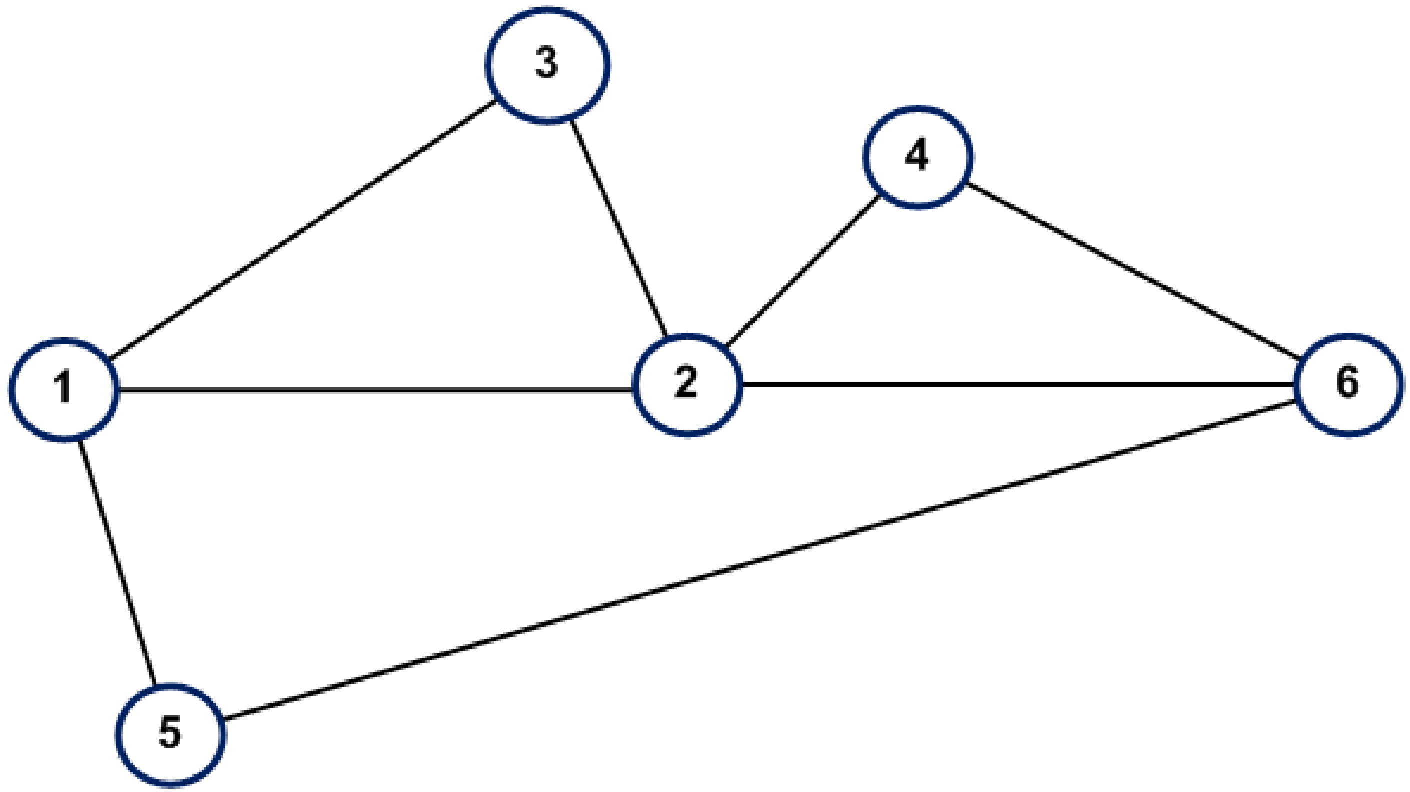
Graf neorientat - Noțiuni

- G = (V, E), **E = ($V^{<2>}$, r)**
  - Are loc **relația**

$$\sum_{u\in V} d_G(u) = 2|E|$$

  - **Consecință**. Într-un graf neorientat există un număr par de vârfuri de grad impar

Graf simplu



Graf simplu

- **Graf simplu**: $G = (V, E)$, $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V}^{(2)}$, adică un graf neorientat fără bucle și muchii multiple

Graf simplu

- **Graf simplu**: G = (V, E), $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V}^{(2)}$, adică un graf neorientat fără bucle și muchii multiple
  - e = {u, v} = uv – **muchie**
    - u = v – **buclă**
    - u, v – **capete / extremităţi**
  - $d_G(u)$ – **grad**

Notaţii

- $V(G)$, $E(G)$
- $e = uv$

Alte noţiuni fundamentale

Adiacență. Incidență

- Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**
  - u și $v \in V$ sunt **adiacente** dacă $uv \in E$
  - Un **vecin** al lui $u \in V$ este un vârf adiacent cu el
  - **Notație** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u

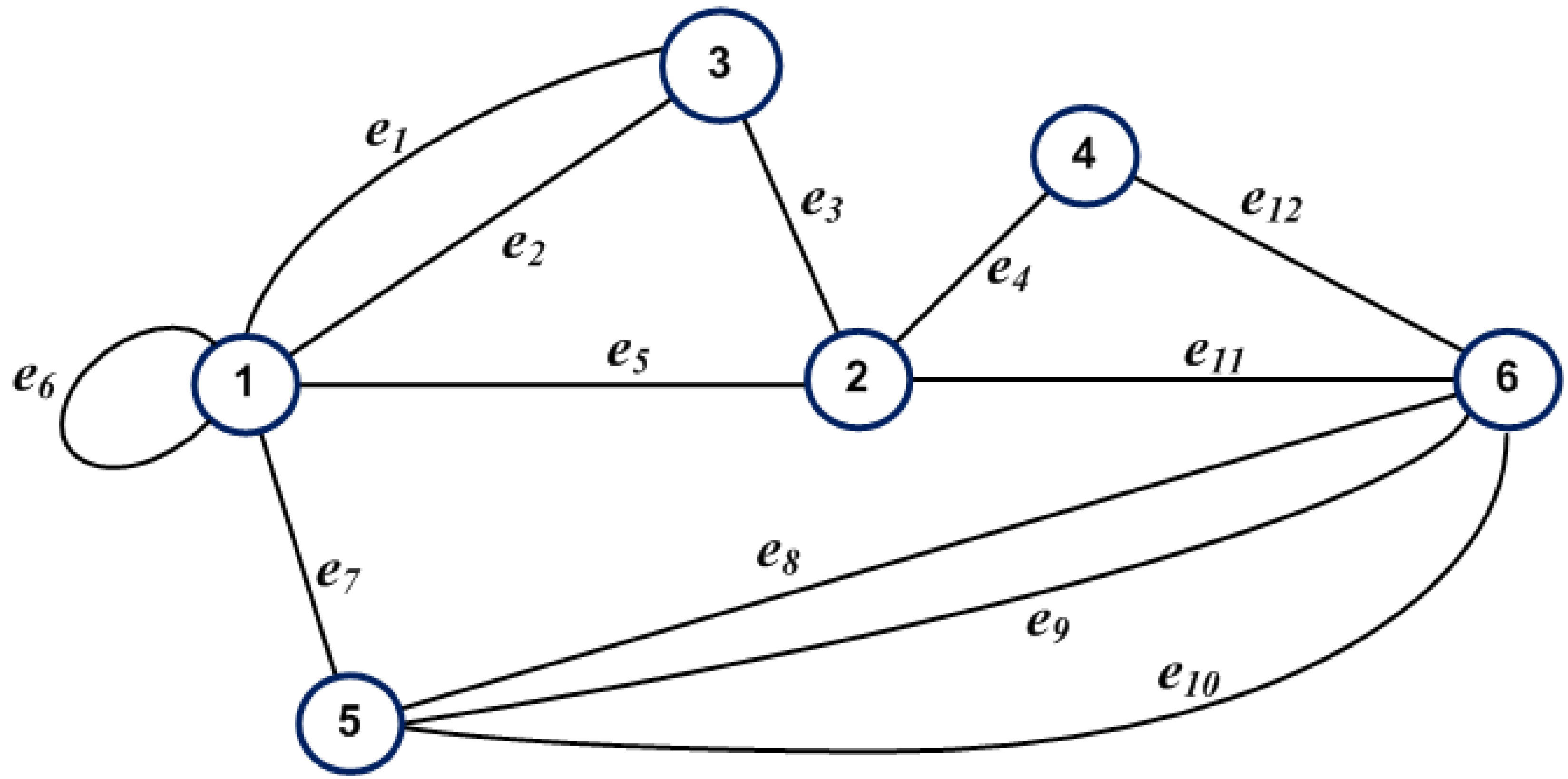
Adiacență. Incidență

- Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**
  - u și v $\in$ V sunt **adiacente** dacă uv $\in$ E
  - Un **vecin** al lui u $\in$ V este un vârf adiacent cu el
  - **Notație** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u
  - O muchie e $\in$ E este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e

Adiacență. Incidență

- Fie $G = (V, E)$ un graf **neorientat**
  - u și v $\in$ V sunt **adiacente** dacă uv $\in$ E
  - Un **vecin** al lui u $\in$ V este un vârf adiacent cu el
  - **Notație** $N_G(u)$ = mulțimea vecinilor lui u
  - O muchie e $\in$ E este **incidentă** cu un vârf u dacă u este extremitate a lui e
  - e și f $\in$ E sunt **adiacente** dacă există un vârf în care sunt incidente (au o extremitate în comun)

Exemplu



Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat**

- Un **drum** este o secvență P de vârfuri și arce care se succed alternativ:

  $$P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

  unde $v_1,\ldots,v_m \in V(G)$, $e_1,\ldots,e_{m-1} \in E(G)$, și fiecare arc e_i are extremitatea inițială v_i și finală v_{i+1}

Drumuri. Circuite

Fie G un graf **orientat**

- Un **drum** este o secvență P de vârfuri și arce care se succed alternativ:

  $$P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

  unde $v_1, \ldots, v_m \in V(G)$, $e_1, \ldots, e_{m-1} \in E(G)$, și fiecare arc e_i are extremitatea inițială v_i și finală v_{i+1}

- P este **drum simplu** dacă nu conține un arc de mai multe ori ($e_i \neq e_j$, $\forall i \neq j$)

- P este **drum elementar** dacă nu conține un vârf de mai multe ori ($v_i \neq v_j$, $\forall i \neq j$)

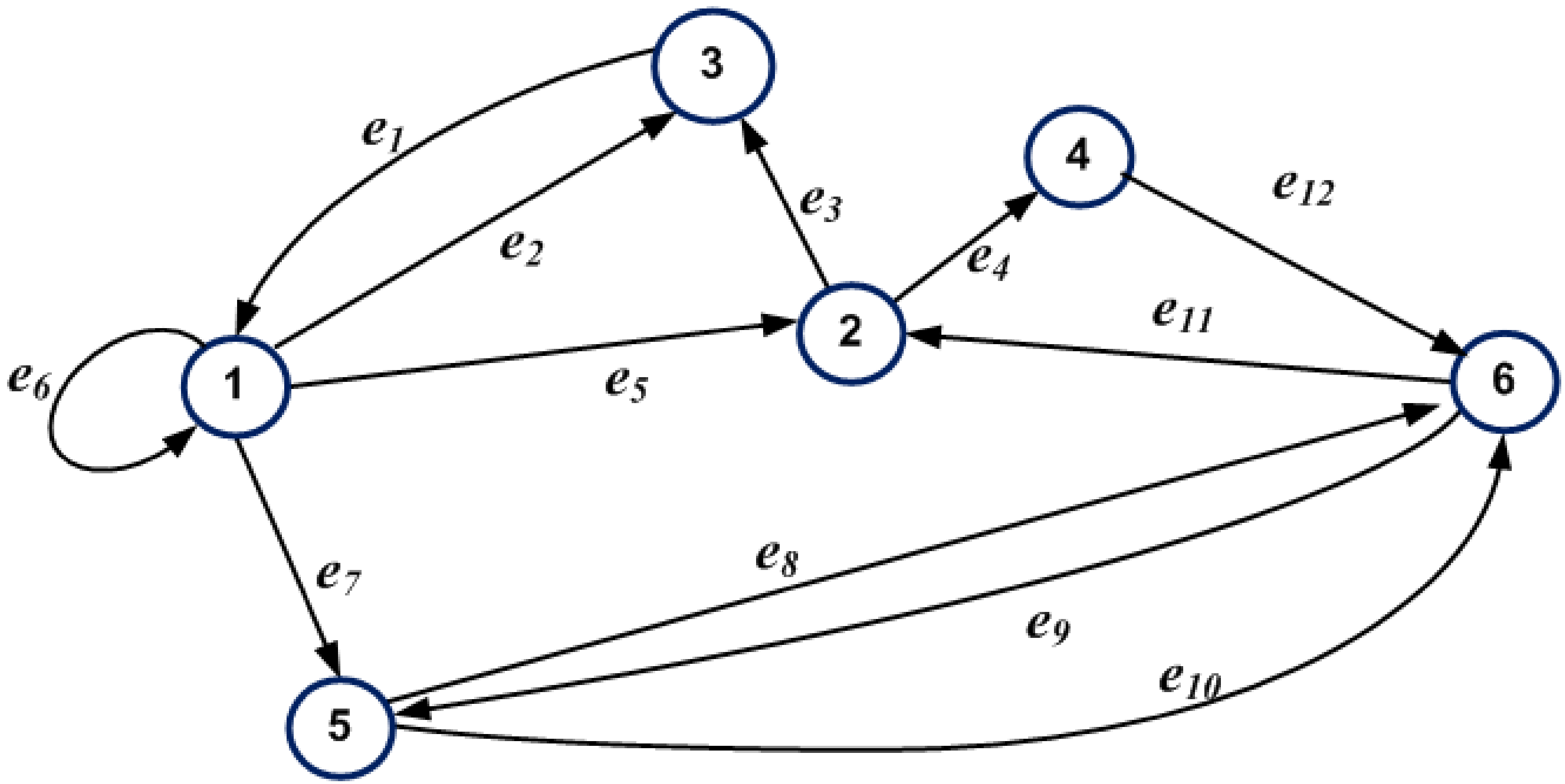
Drumuri. Circuite

Observație

- În cazul în care nu avem arce multiple putem descrie un drum doar ca o **succesiune de vârfuri** (fără a mai preciza și arcele):

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}, v_m]$$

Exemplu



Drumuri. Circuite

$$P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

- **Lungimea** lui P = **l(P)** = cardinalul multisetului arcelor lui P (l(P) = **m-1**)
- v_1 și v_m se numesc **capetele/ extremitățile** lui P
- P se numește și **v_1-v_m lanț**

Drumuri. Circuite

$$P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

- **Lungimea** lui P = **l(P)** = cardinalul multisetului arcelor lui P (l(P) = **m-1**)
- v_1 și v_m se numesc **capetele/ extremitățile** lui P
- P se numește și **v_1-v_m lanț**
- Notăm
  - $V(P) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$
  - $E(P) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}\}$

Drumuri. Circuite

- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v)=\begin{cases}\mathbf{0}, & \text{daca } \boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{\infty}, & \text{daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\\ \mathbf{min}\{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{P})\mid \boldsymbol{P} \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\}, & \text{altfel}\end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u–v drum)

Drumuri. Circuite

- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v) = \begin{cases} 0, & \text{daca } u = v \\ \infty, & \text{daca nu exista } u\text{-}v \text{ drum in } G \\ \min\{l(P) \mid P \text{ este } u\text{-}v \text{ drum in } G\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u–v drum)

- Un u–v drum de lungime $d_G(u,v)$ se numește **drum minim de la u la v**

Drumuri. Circuite

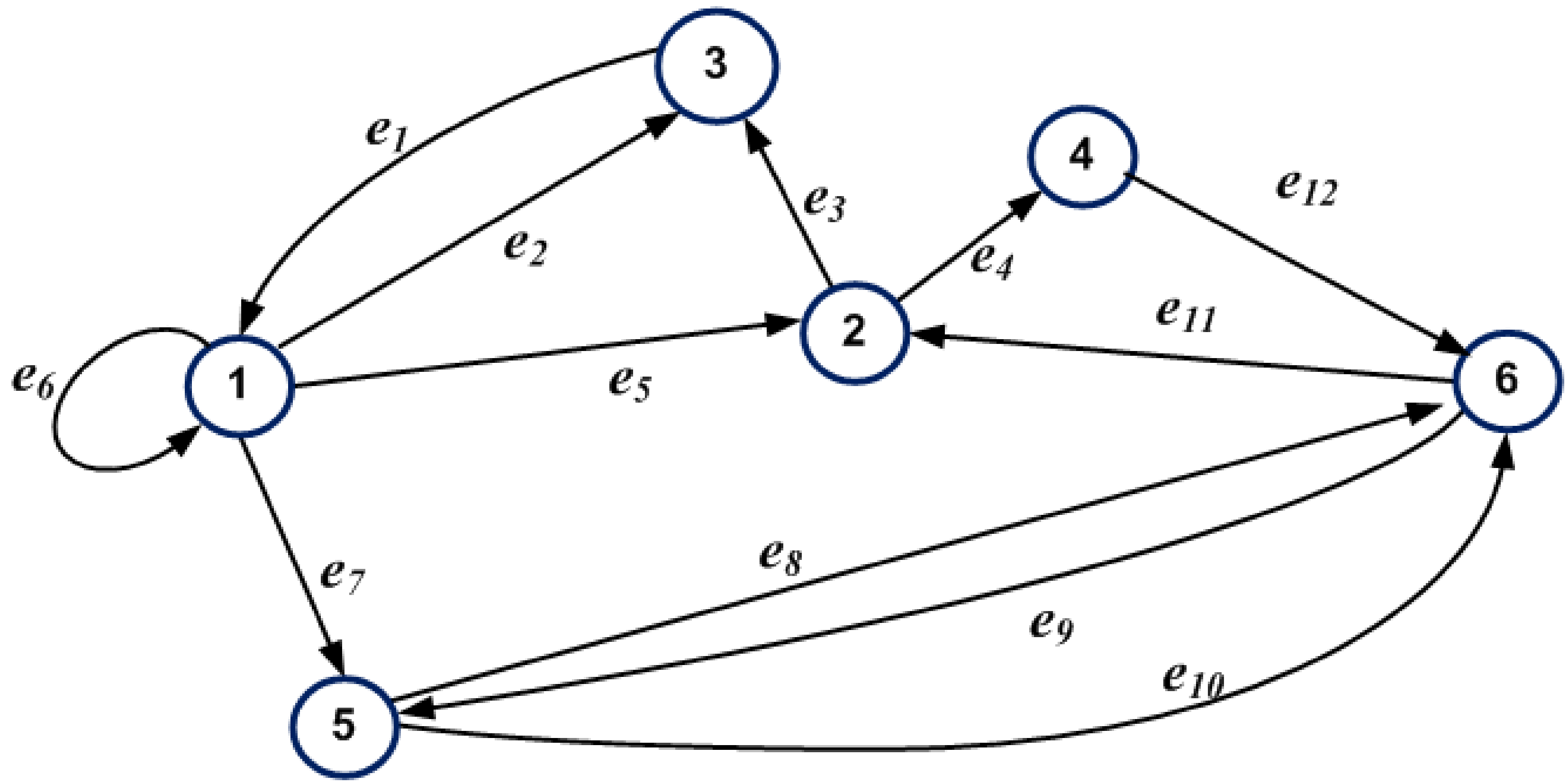
- Pentru două vârfuri u și v definim **distanța de la u la v** astfel:

$$d_G(u,v)=\begin{cases}\mathbf{0},\ \text{daca } \boldsymbol{u=v}\\ \boldsymbol{\infty},\ \text{daca nu exista } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\\ \mathbf{min}\{\boldsymbol{l(P)} \mid \boldsymbol{P} \text{ este } \boldsymbol{u}\text{-}\boldsymbol{v} \text{ drum in } \boldsymbol{G}\},\ \text{altfel}\end{cases}$$

(cea mai mică lungime a unui u–v drum)

- Un u–v drum de lungime $d_G(u,v)$ se numește **drum minim de la u la v**
- Vom nota și $\boldsymbol{d(u,v)}$ dacă G se deduce din context

Exemplu



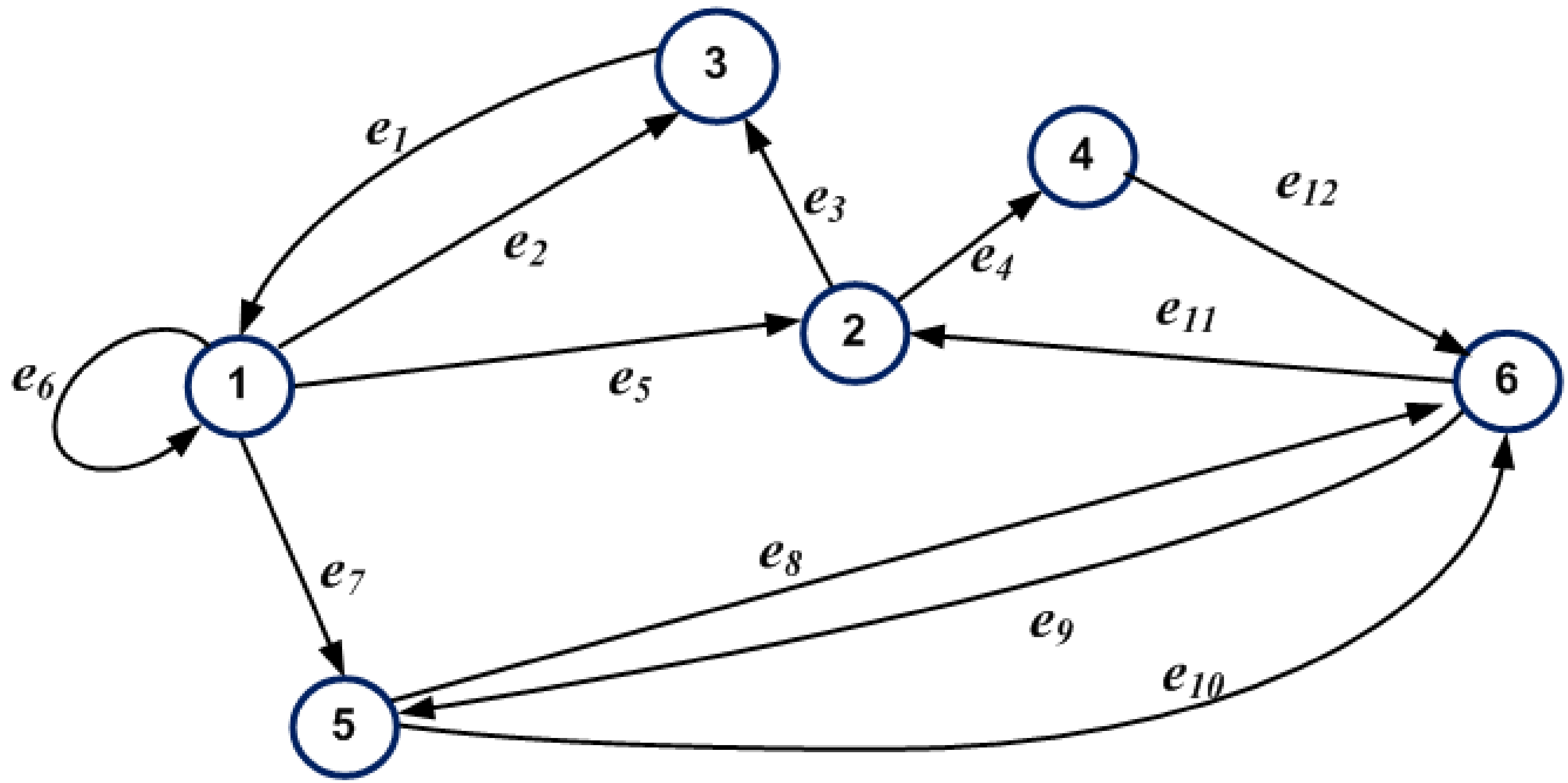
Drumuri. Circuite

- Un **circuit** este un drum cu capetele identice

$$C = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m, e_m, v_1]$$

- C este **circuit simplu** – dacă drumul asociat este simplu
- **Circuit elementar**
- **Notații** V(C), E(C)

Exemplu



Lanțuri. Cicluri

Pentru G graf **neorientat** – **noțiuni similare**

- Un **lanț** este o secvență P de vârfuri și muchii care se succed alternativ:

  $$P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

  unde $v_1,\ldots,v_m \in V(G)$, $e_1,\ldots,e_{m-1} \in E(G)$, și fiecare muchie e_i are extremitățile v_i și v_{i+1}
- **lanț simplu** / **lanț elementar** / **lungime**
- **ciclu** / **ciclu simplu** / **ciclu elementar**
- **distanță** / **lanț minim**

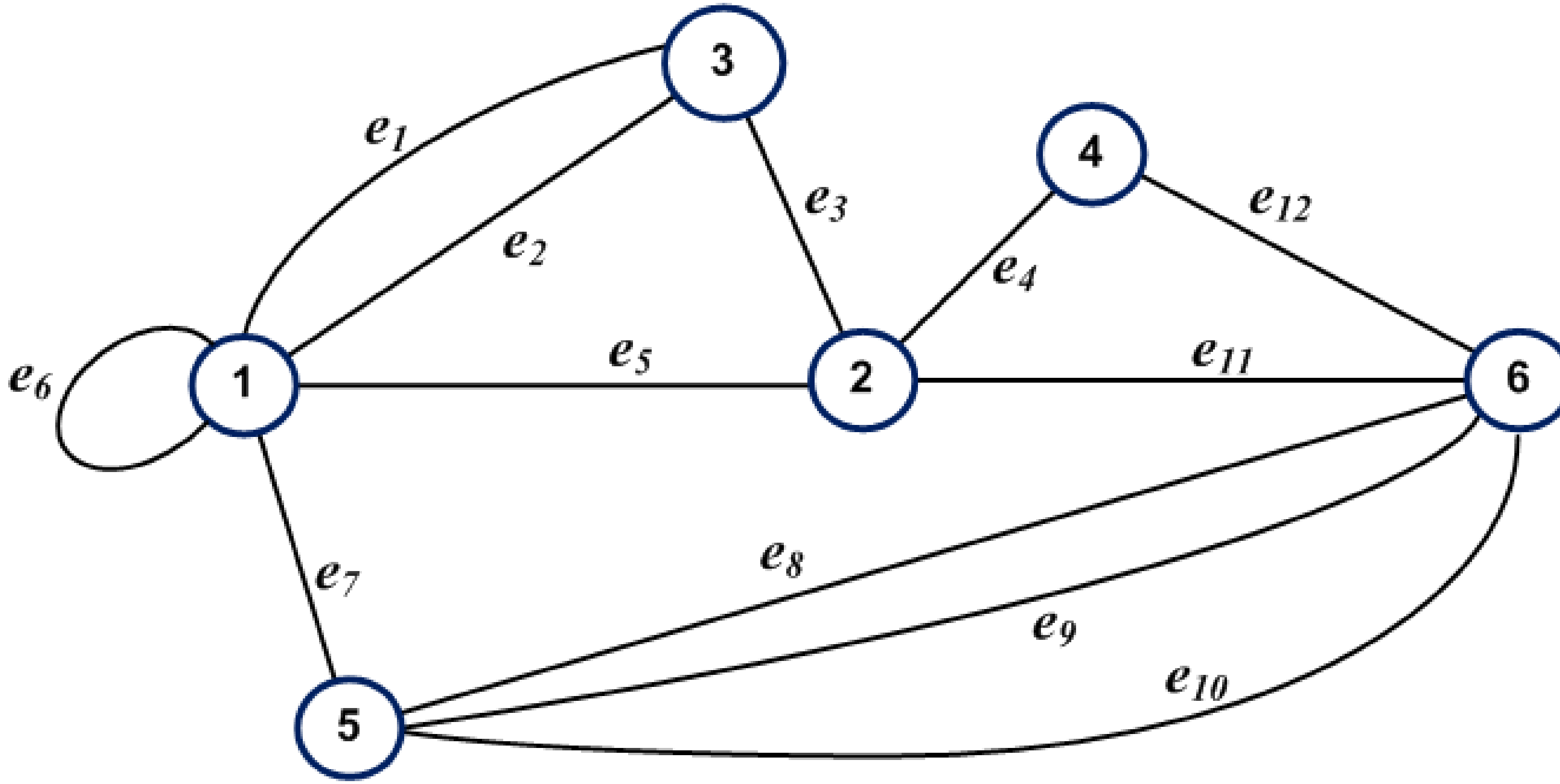
Lanțuri. Cicluri

Observație

- În cazul unui graf simplu putem descrie un lanț/ciclu doar ca o **succesiune de vârfuri** (fără a mai preciza și muchiile):

$$P = [v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}, v_m]$$

Exemplu



Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1} \leq \mathbf{G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1} \prec \mathbf{G}$) dacă

  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

Graf parțial. Subgraf

Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \leq G}$) dacă

  $V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $\mathbf{G_1 \prec G}$) dacă

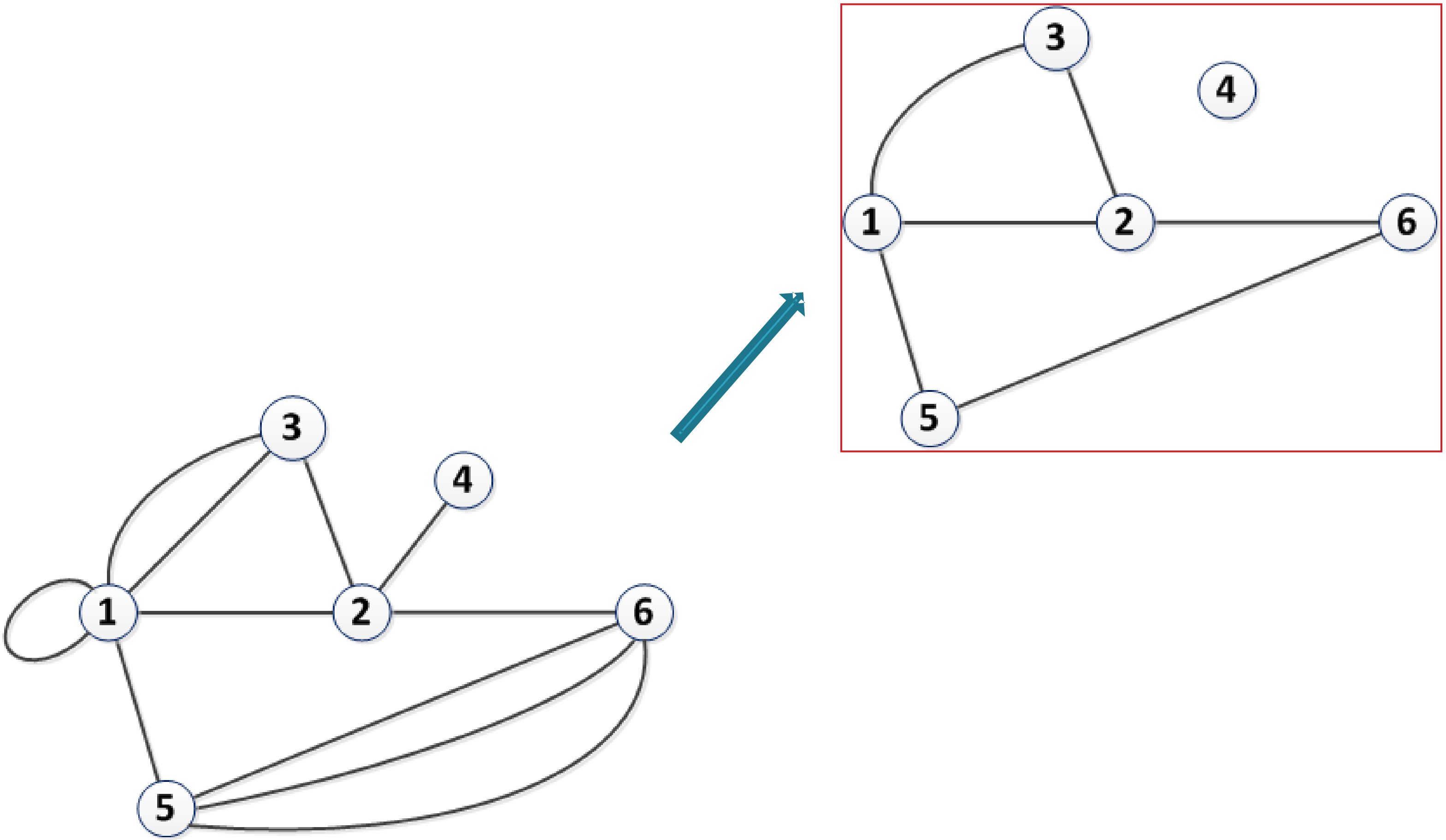
  $V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$

- G_1 este **subgraf indus de V_1 în** G (vom nota $\mathbf{G_1 = G[V_1]}$) dacă

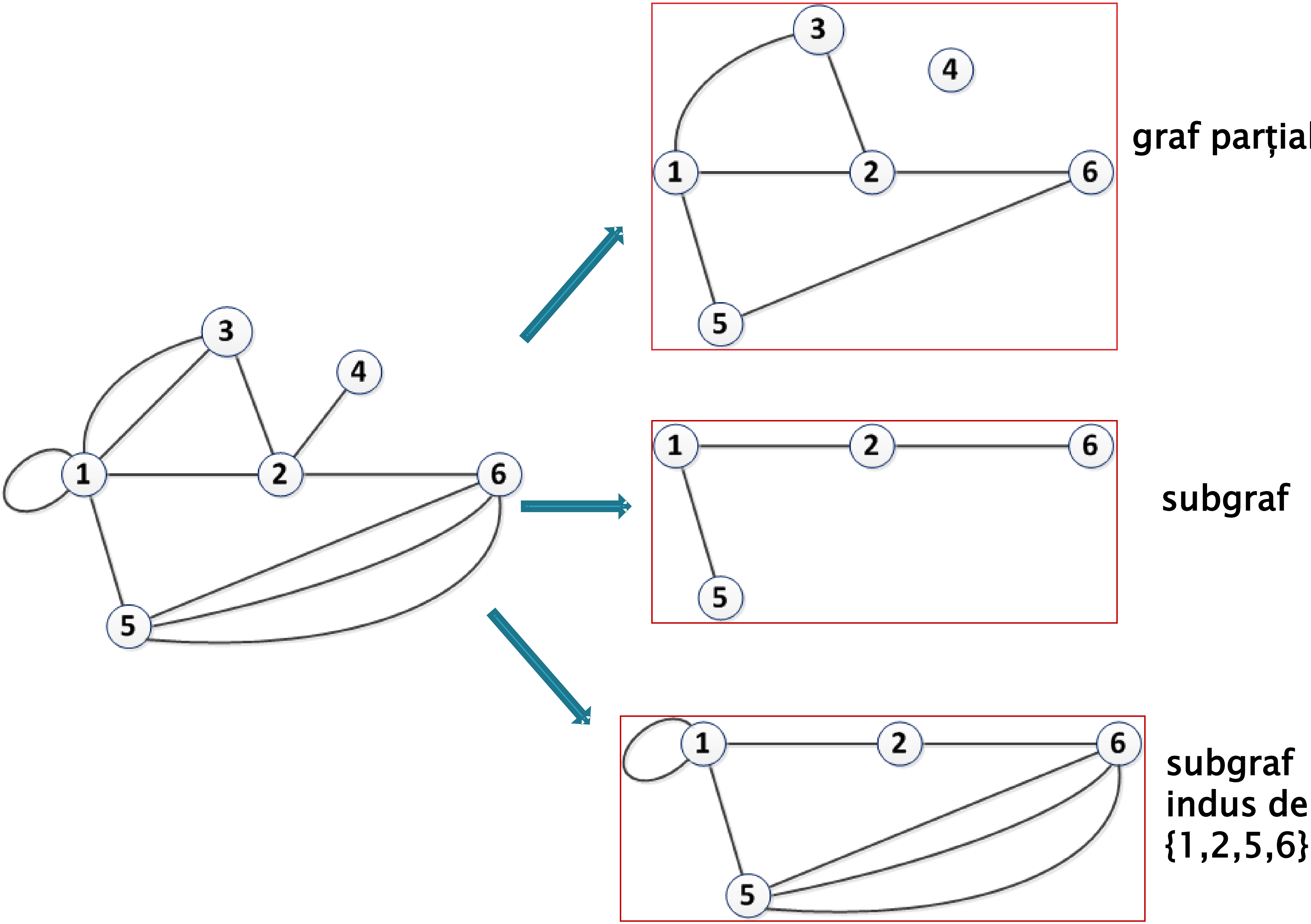
  $V_1 \subseteq V,$

  $E_1 = \{e^{r(e)} \mid e \in E(G), \text{ e are ambele extremități în } V_1 \}$

  (toate arcele/muchiile cu extremități în V_1)



graf parțial


graf parțial
subgraf
subgraf
indus de
{1,2,5,6}

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă, pentru orice două vârfuri distincte u și v, există un u-v lanț (între orice două vârfuri există un lanț)

Conexitate

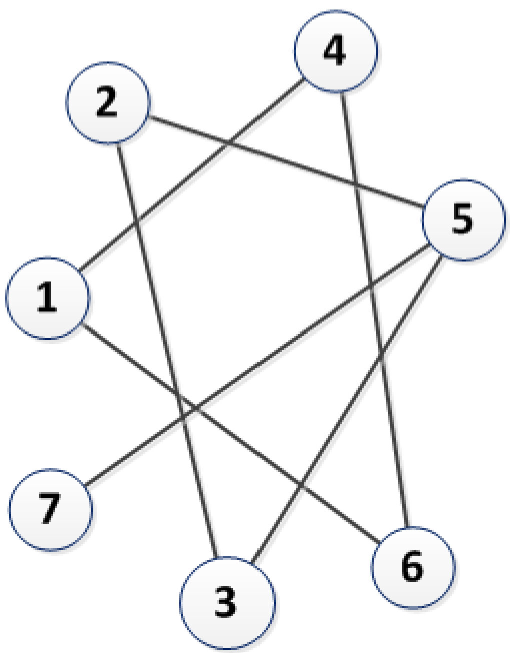
Fie G = (V, E) un graf neorientat

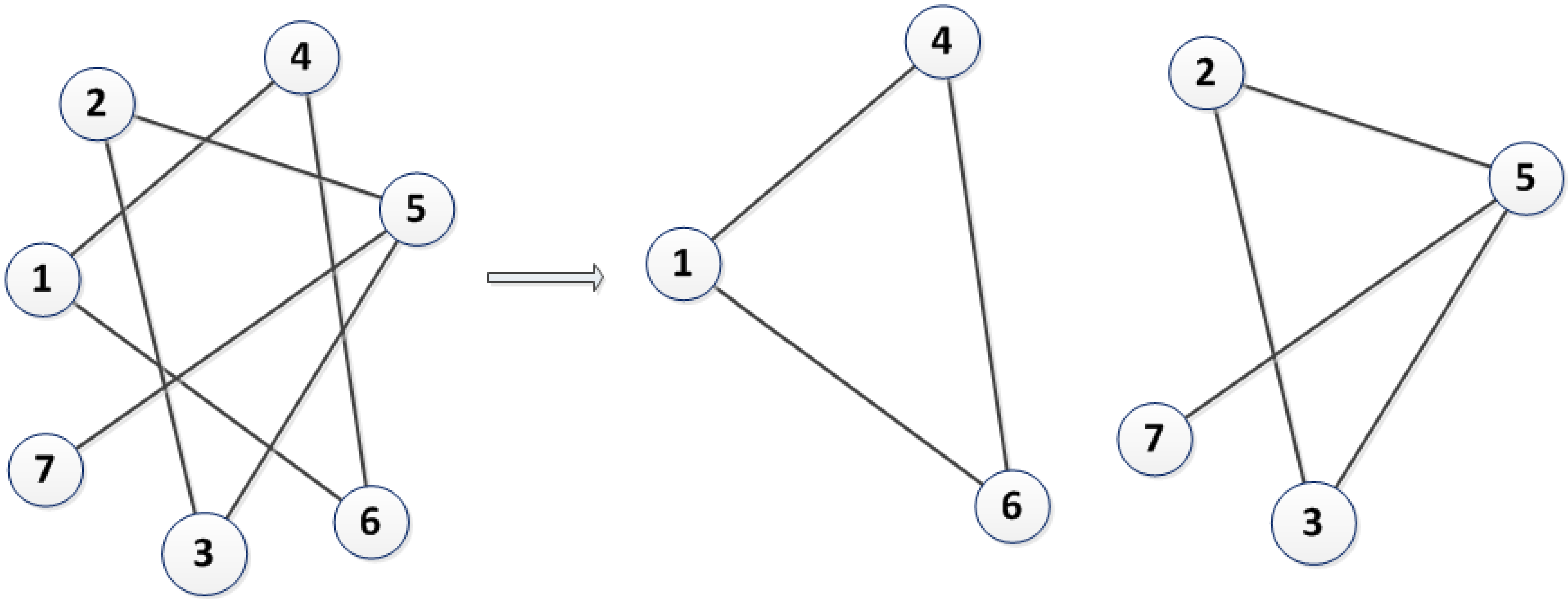
- G este **graf conex** dacă, pentru orice două vârfuri distincte u și v, există un u-v lanț (între orice două vârfuri distincte există un lanț)
- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)

Conexitate

Fie G = (V, E) un graf neorientat

- G este **graf conex** dacă, pentru orice două vârfuri distincte u și v, există un u-v lanț (între orice două vârfuri există un lanț)
- O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- Pentru cazul orientat – **tare-conexitate**


4
2
5
1
7
3
6

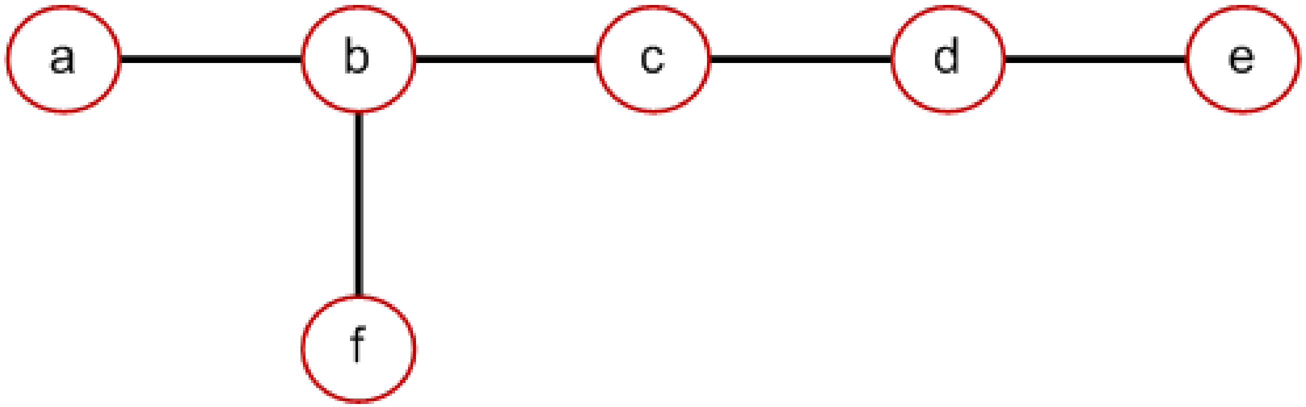


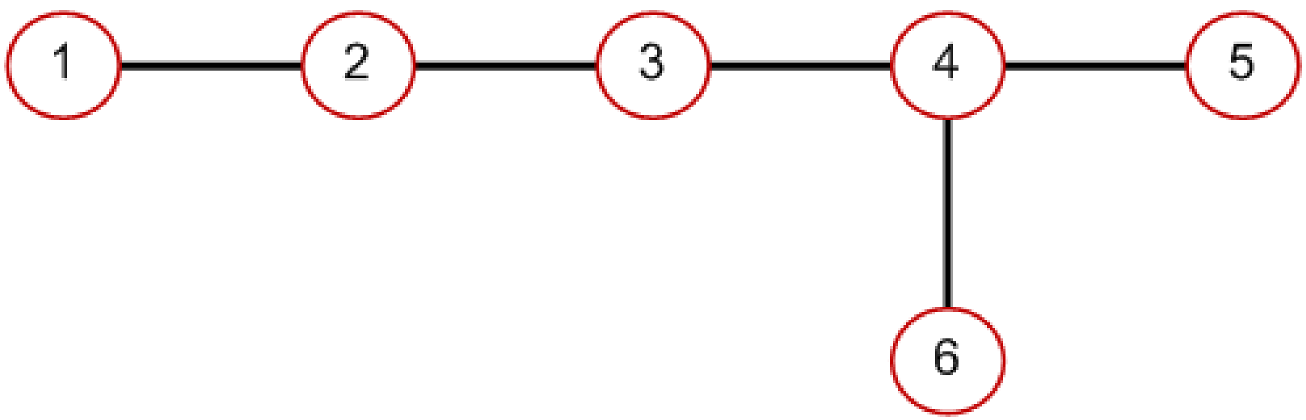
două componente conexe

Notaţii

- **G – v** , v $\in$ V(G)
- **G – e** , e $\in$ E(G)
- **G – V '** , V ' $\subseteq$ V(G)
- **G – E'** , E' $\subseteq$ E(G)
- **G + e**

Izomorfism





Izomorfism

Fie G_1, G_2 două grafuri

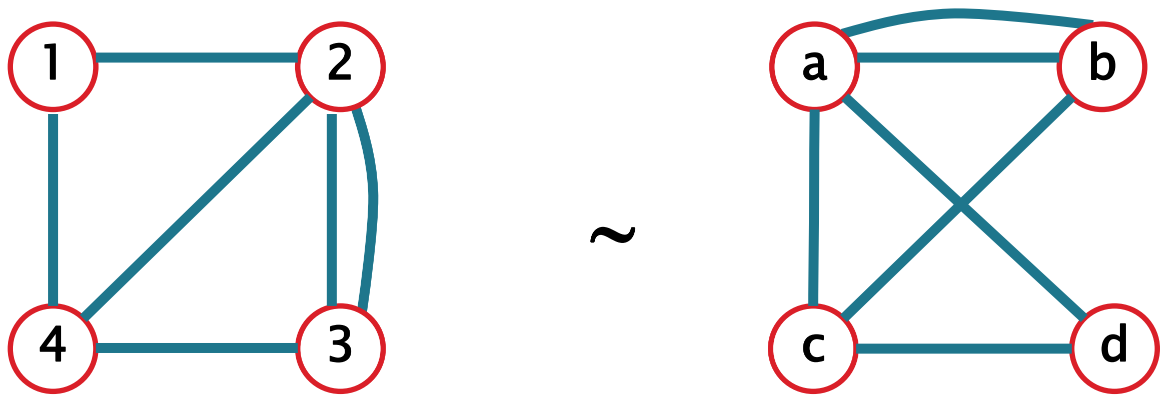
- $G_1 = (V_1, E_1)$, r_1 – funcția de multiplicitate
- $G_2 = (V_2, E_2)$, r_2 – funcția de multiplicitate

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** ($\mathbf{G_1 \sim G_2}$) $\Leftrightarrow$ există $f : V_1 \rightarrow V_2$ bijectivă cu

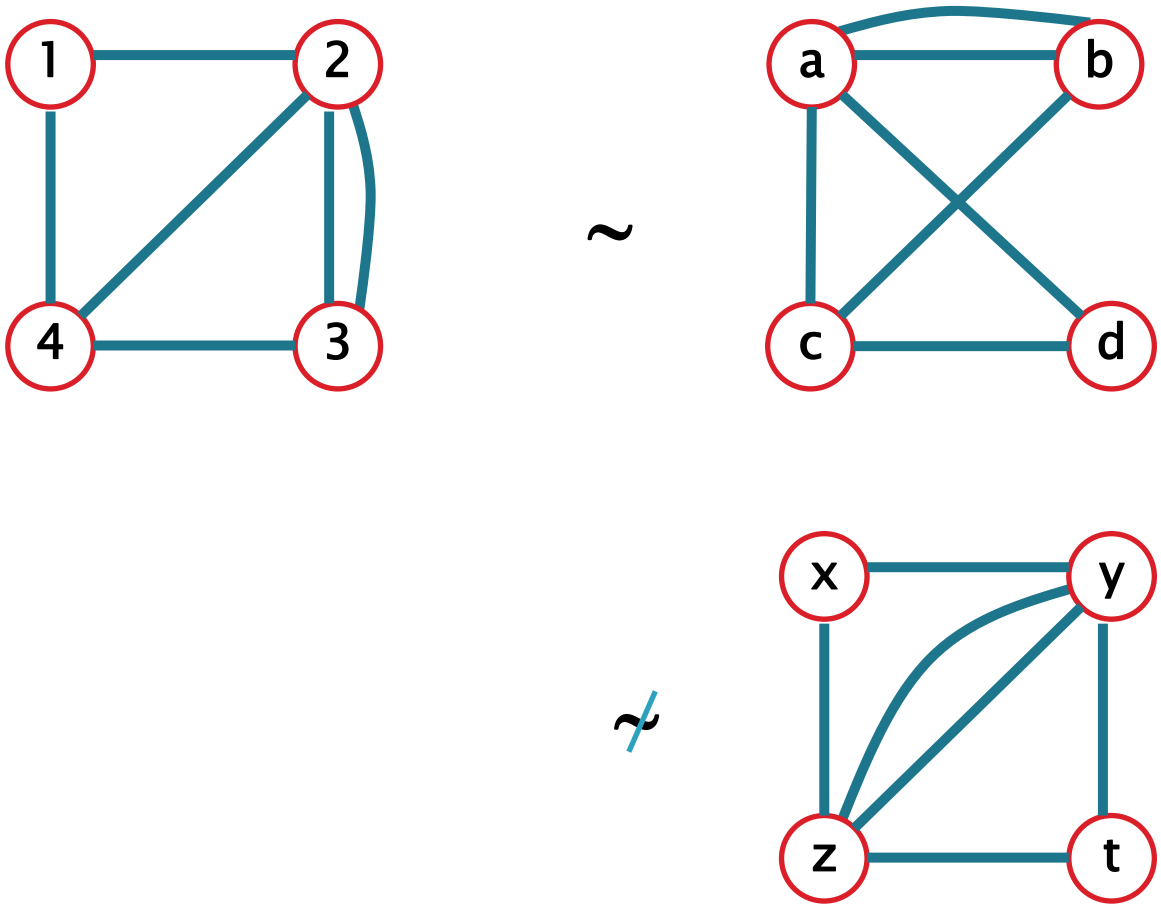
$$\mathbf{r_1(\,uv\,) = r_2(\,f(u)f(v)\,)}$$

pentru orice $u,v \in V_1$

Izomorfism



Izomorfism

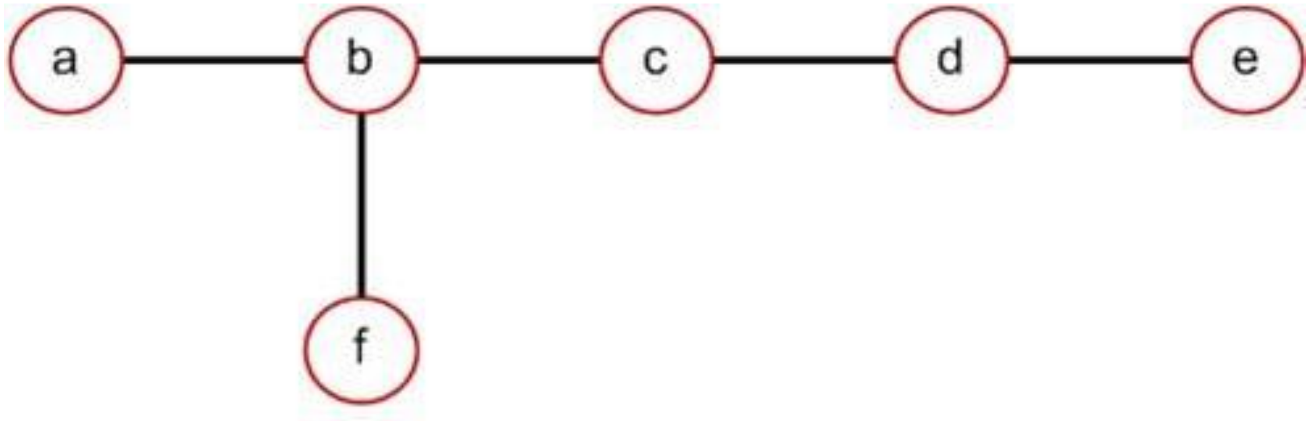


Izomorfism

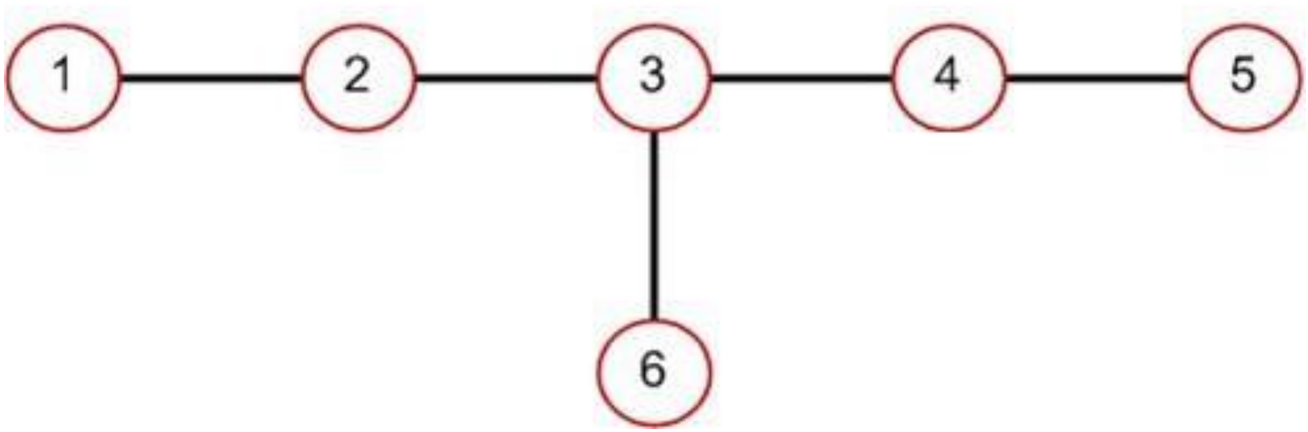
- $G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$

- $s(G_1) = s(G_2) \not\Rightarrow G_1 \sim G_2$?

Izomorfism



neizomorfe



Graf bipartit

- Un graf neorientat $G = (V, E)$ se numește **bipartit** $\Leftrightarrow$ există o partiție a lui V în două submulțimi nevide V_1, V_2 (**bipartiție**):

$$V = V_1 \cup V_2$$

$$V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

astfel încât orice muchie $e \in E$ are o extremitate în V_1 și cealaltă în V_2:

$$|e \cap V_1| = |e \cap V_2| = 1$$

Graf bipartit

Observație

- $G = (V, E)$ **bipartit** $\Leftrightarrow$ există o colorare a vârfurilor cu două culori:

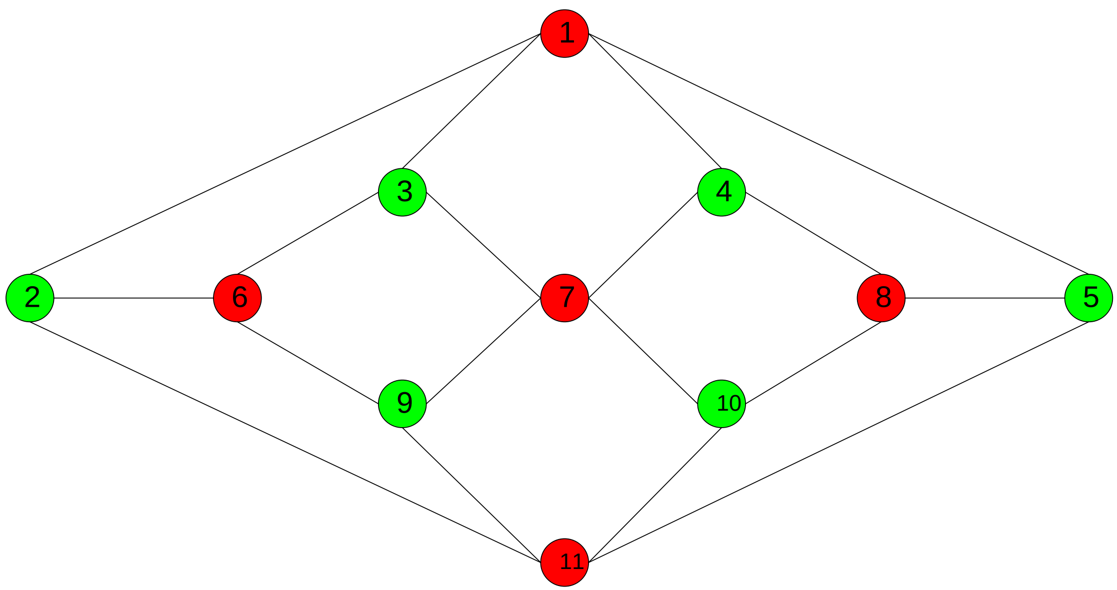
$$c : V \to \{1, 2\}$$

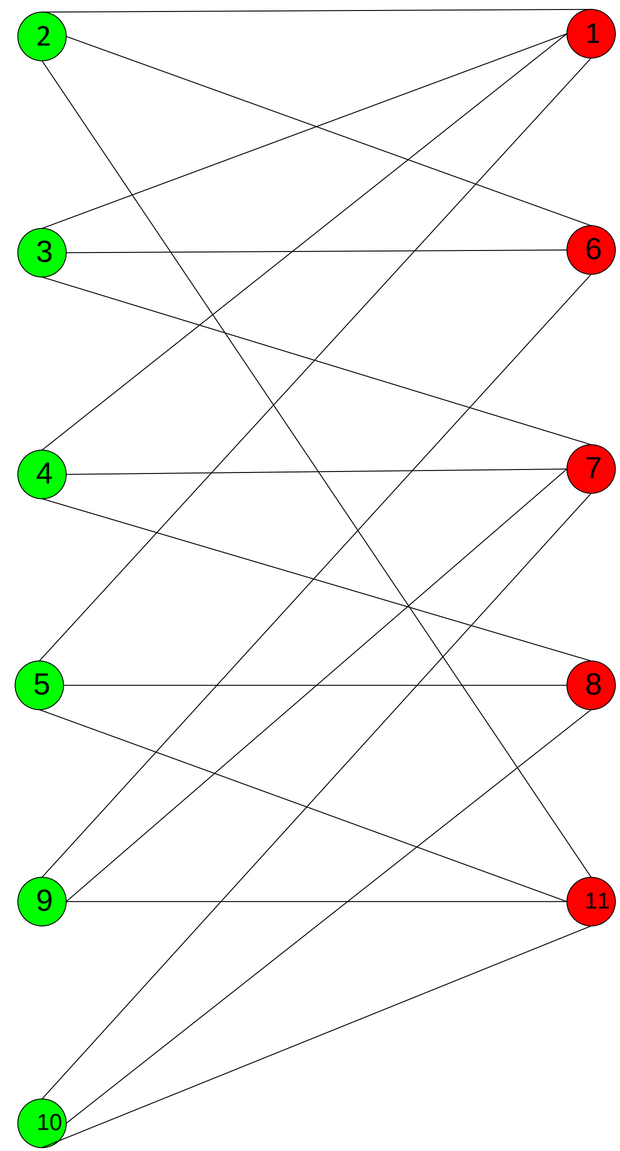
astfel încât pentru orice muchie $e=xy\in E$ avem

$$c(x) \neq c(y)$$

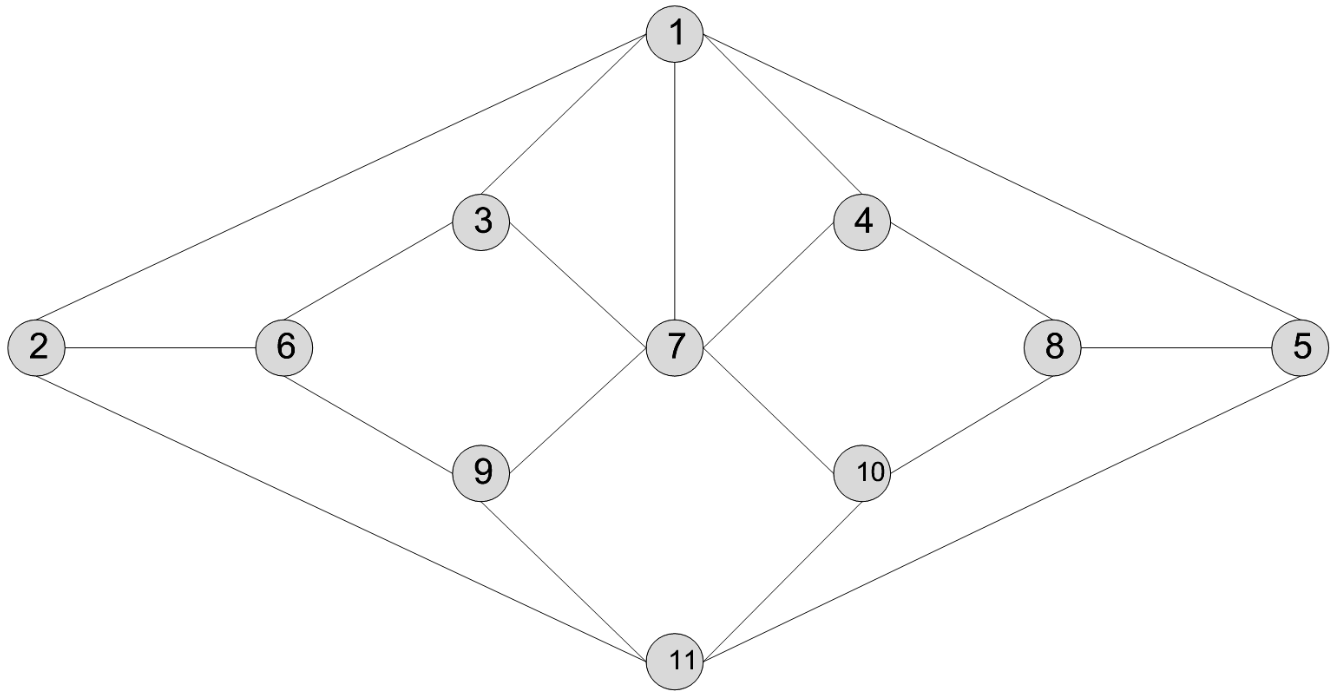
(**bicolorare**)

Graf bipartit





Graf bipartit

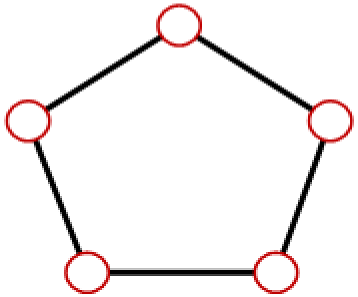


nu este bipartit

Grafuri standard

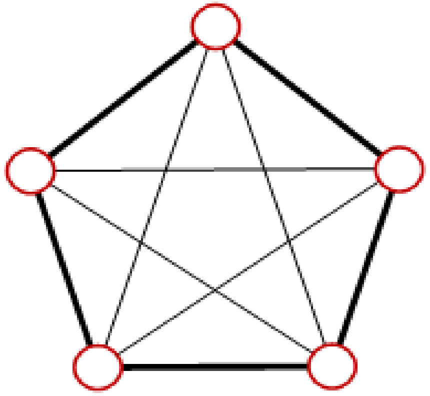
- P_n – lanţ elementar

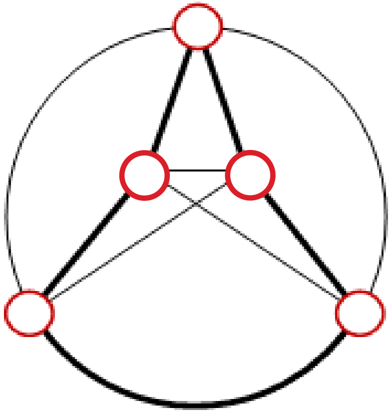
- C_n – ciclu elementar



Grafuri standard

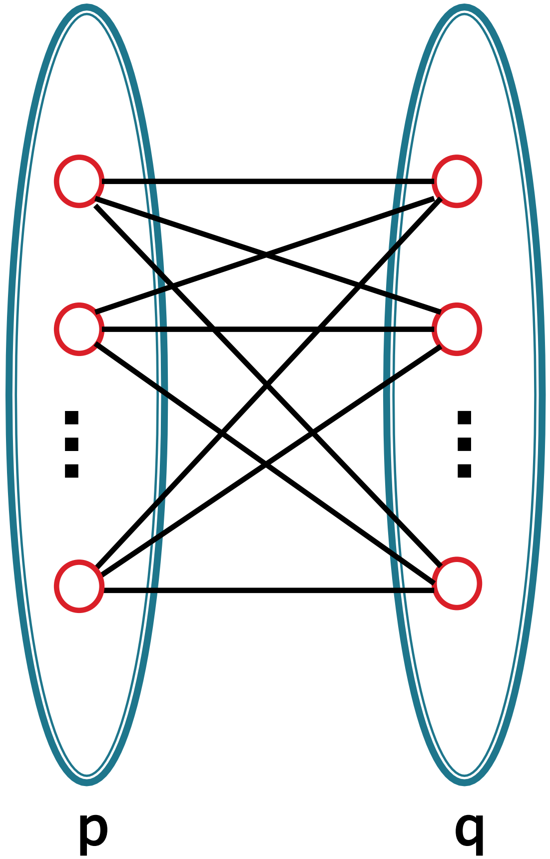
- K_n – graf complet





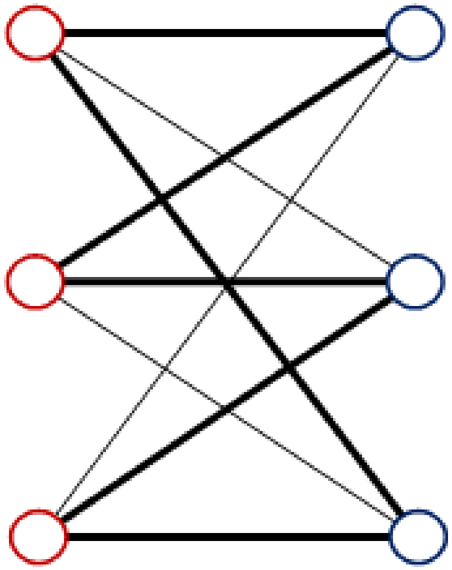
Grafuri standard

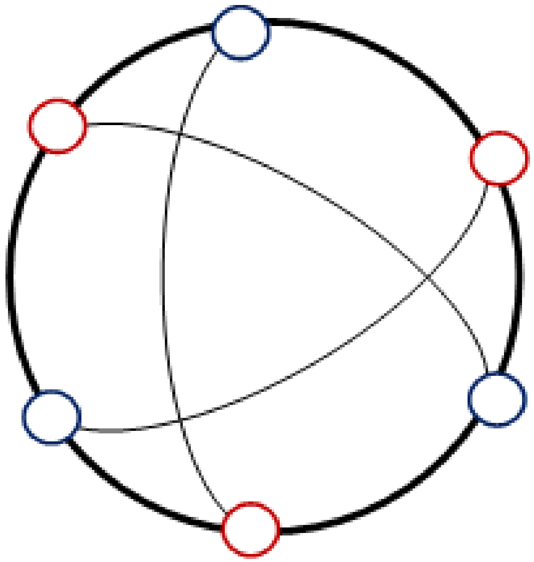
- $K_{p,q}$ – graf bipartit complet



Grafuri standard

- $K_{3,3}$





Secvenţe de grade

- Dată o secvenţă de numere s, se poate construi un graf neorientat având secvenţa gradelor s?
- Dar un graf simplu?

  - Condiţii necesare
  - Condiţii suficiente

Secvenţe de grade

Dată o secvenţă de numere s, se poate construi un graf neorientat având secvenţa gradelor $s=\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$?

- **Condiţii necesare**
  - $s=\{2, 4, 2, 6\}$

Secvenţe de grade

Dată o secvenţă de numere s, se poate construi un graf neorientat având secvenţa gradelor $s=\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$?

- **Condiţii necesare**
  - s={2, 4, 2, 6}
  - s={2, 4, 2, 5}

Secvenţe de grade

Dată o secvenţă de numere s, se poate construi un graf neorientat având secvenţa gradelor $s=\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$?

- **Condiţii necesare**
  - $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ – număr par

Secvenţe de grade

- **Condiţii suficiente**
  - $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ – număr par

Secvenţe de grade

- **Teoremă**

Fie $s_0 = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ o secvență de numere naturale.

Avem:

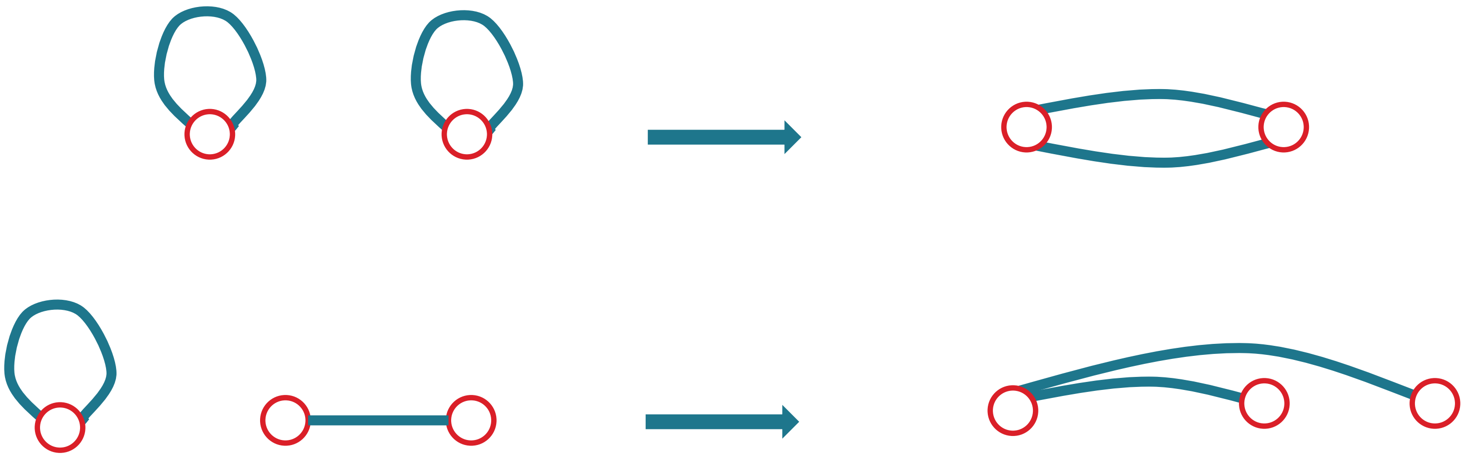
s_0 este secvența gradelor unui graf neorientat

$\Leftrightarrow$

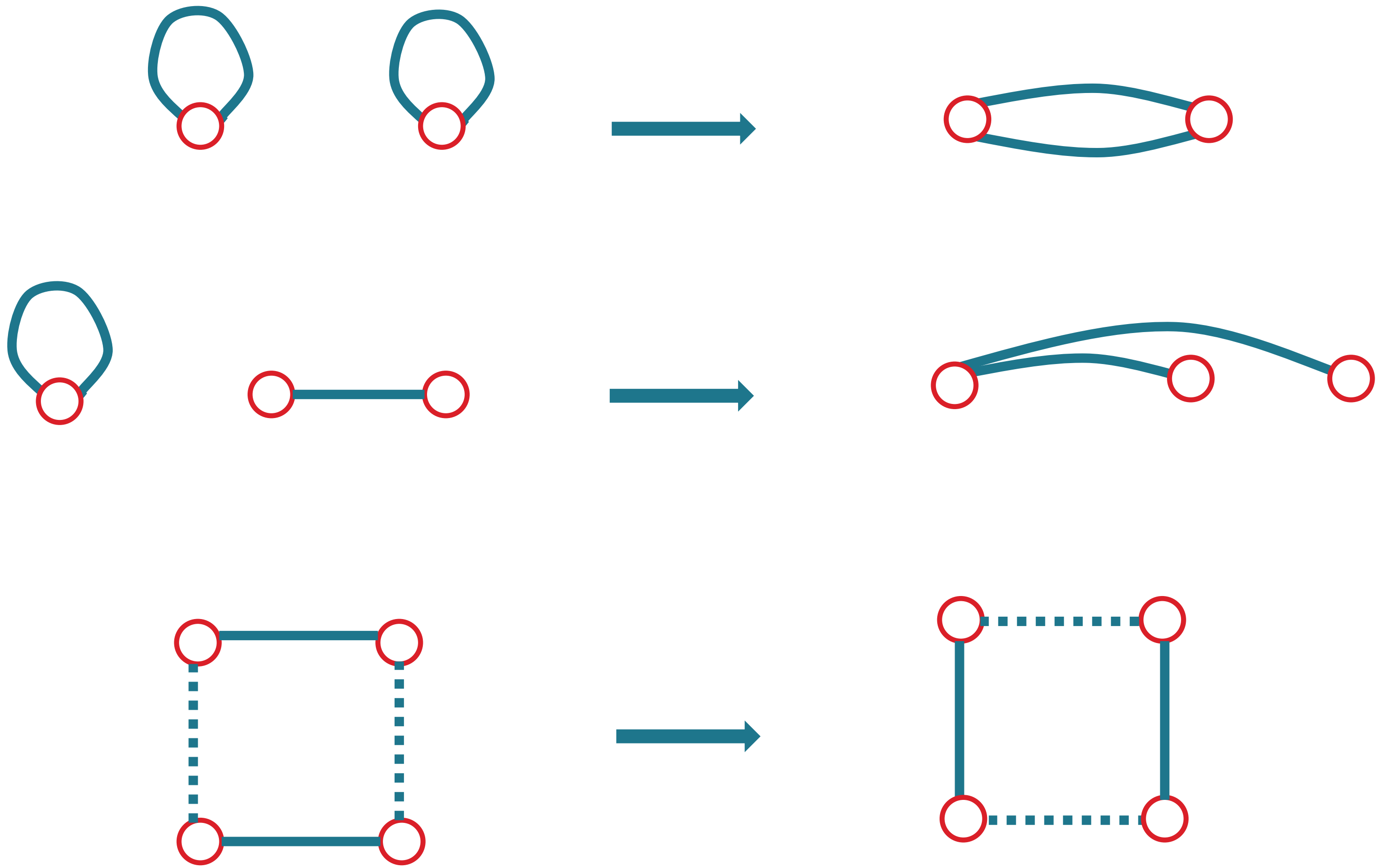
$d_1 + d_2 + \dots + d_n$ - număr par

Transformări care conservă gradele

Transformări care conservă gradele



Transformări care conservă gradele



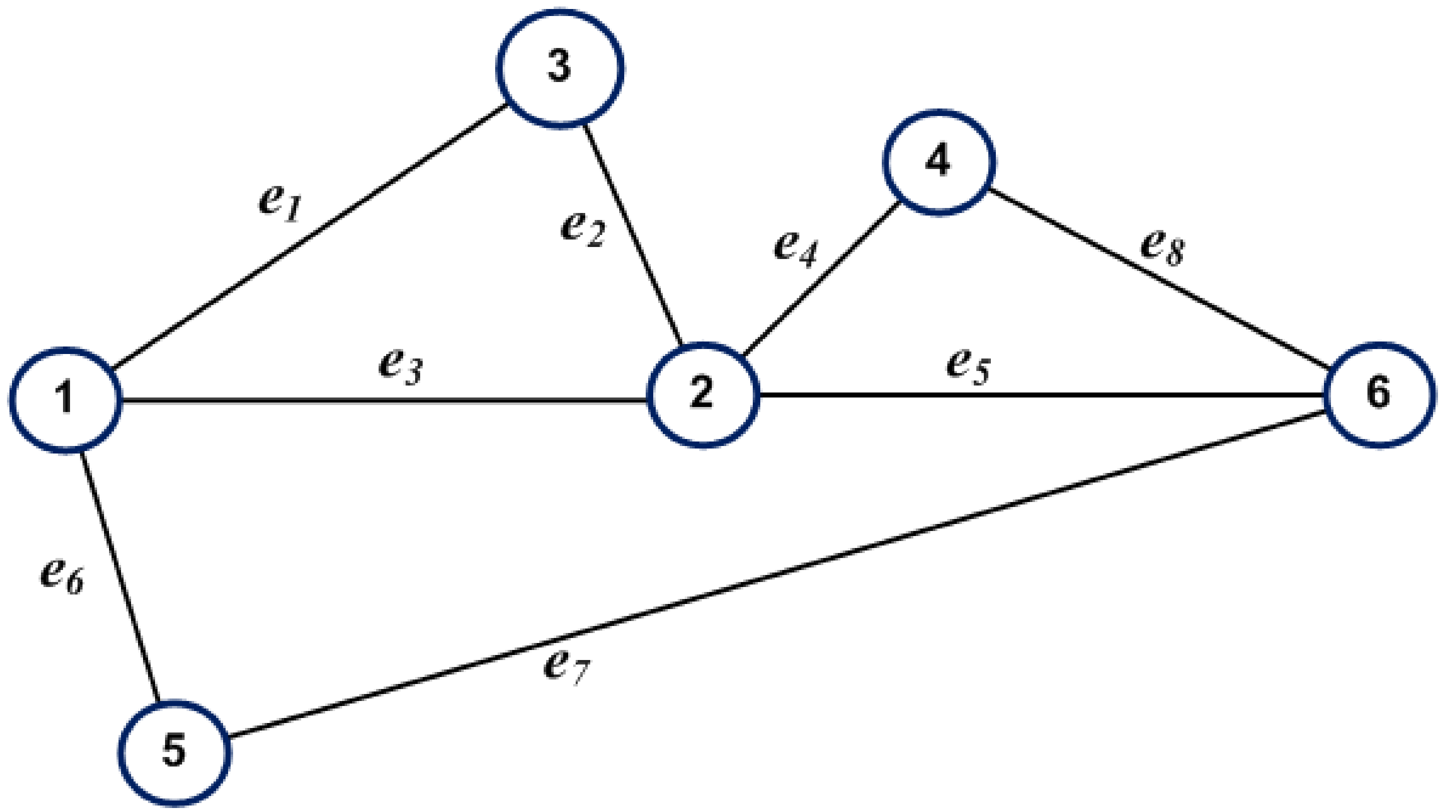
Reprezentarea grafurilor

- Geometrică
- Algebrică

Reprezentarea grafurilor

- Geometrică
- Algebrică

- Matrice de adiacenţă
- Liste de adiacenţă
- Listă de muchii
- Matrice de incidenţă


3
4
1
2
6
5
e_1
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6
e_7
e_8