Mecanică Generală

IV. Dinamica punctului material - 5

Liviu Marin[1,†]

[1]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, România

[†]E-mail: marin.liviu@gmail.com

17 decembrie 2013

Definiţie

Se numeşte vector viteză areolară $\vec{\mathbf{A}}(t)$ a punctului material $\mathbf{P}(t)$ vectorul

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}}(t) = \frac{1}{2}\,\vec{\mathbf{x}}(t) \times \vec{\mathbf{v}}(t)} \qquad (1)$$

Corolar (Interpretare geometrică a integralelor prime ale mişcării)

(i) Dacă un punct material se mişcă sub acţiunea unei forţe $\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}})$ a.i. $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}$, $\forall\ t \geq t_0$, (e.g. forţe centrale), atunci mişcarea se face cu viteză areolară constantă.

(ii) Teorema ariilor: Dacă un punct material se mişcă sub acţiunea unei forţe $\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}})$ a.i. $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) \neq \vec{\mathbf{0}}$ şi $\exists\ \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ direcţie fixă cu $\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}(\vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$, $\forall\ t \geq t_0$, atunci proiecţia punctului material respectiv pe orice plan perpendicular pe direcţia $\vec{\mathbf{u}}$ se mişcă cu viteză areolară constantă, i.e. descrie arii egale în intervale de timp egale.

Demonstraţie:

(i) Cf. corolarului (integrale prime ale mişcării), are loc conservarea momentului cinetic:

$$\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t_0) =: \vec{\mathbf{C}}\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \qquad (2)$$

i.e.

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}}(t) = \frac{1}{2}\,\vec{\mathbf{x}}(t) \times \vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{2}\,\vec{\mathbf{x}}(t_0) \times \vec{\mathbf{v}}(t_0) = \frac{\vec{\mathbf{C}}}{2m}\,, \quad \forall\ t \geq t_0} \qquad (3)$$

(ii) Cf. corolarului (integrale prime ale mişcării), are loc relaţia:

$$\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t_0) \cdot \vec{\mathbf{u}} =: C\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \qquad (4)$$

Fie reperul relativ $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}; \{\vec{\varepsilon}_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq3}\big)$ a.i. $\vec{\varepsilon}_3 = \vec{\mathbf{u}}$.

Din relaţia (4) obţinem:

$$C = \big[\vec{\mathbf{x}}(t) \times m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t)\big] \cdot \vec{\mathbf{u}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ m\,\dot{x}_1(t) & m\,\dot{x}_2(t) & m\,\dot{x}_3(t) \end{vmatrix}, \quad \forall\ t \geq t_0 \quad (5)$$

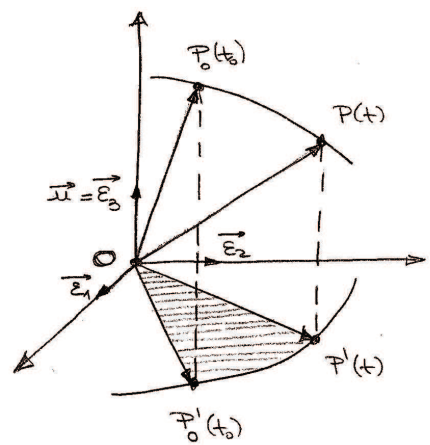

Figure : Mişcarea punctului material $\mathbf{P}(t)$ în raport cu reperul relativ $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}; \{\vec{\varepsilon}_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq3}\big)$.

Din (5) rezultă:

$$x_2(t)\,\dot{x}_1(t) - x_1(t)\,\dot{x}_2(t) = \frac{C}{m}, \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{6}$$

Obținem:

$$A(t) := \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} = \frac{1}{2}\left[x_2(t)\,\dot{x}_1(t) - x_1(t)\,\dot{x}_2(t)\right] = \frac{C}{2m}, \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{7}$$

Integrând relația (7) și folosind condiția inițială $\mathcal{A}(t_0) = 0$, obținem:

$$\boxed{\mathcal{A}(t) = \frac{C}{2m}(t - t_0), \quad \forall\, t \geq t_0} \tag{8}$$

□

3. Energie cinetică. Energie potențială. Energie totală. Teorema energiei

Definiție

Fie $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ un punct material, de masă m și vector de poziție $\vec{\mathbf{x}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$.
Se numește energie cinetică asociată punctului material **P** mărimea

$$\boxed{E_c(\vec{\mathbf{x}}) = E_c(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \cdot \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \frac{1}{2}\, m\, \vec{\mathbf{v}}(t) \cdot \vec{\mathbf{v}}(t)} \tag{9}$$

Definiție

Fie $\{\mathbf{P}_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset \mathcal{E}$ un sistem de puncte materiale $\mathbf{P_i}$, de mase m_i și vectori de poziție $\vec{\mathbf{x}}_i(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.
Se numește energie cinetică asociată sistemului de puncte materiale $\{\mathbf{P}_i\}_{i=\overline{1,n}}$ mărimea

$$\boxed{E_c(\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{x}}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\, m_i\, \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i(t) \cdot \dot{\vec{\mathbf{x}}}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\, m_i\, \vec{\mathbf{v}}_i(t) \cdot \vec{\mathbf{v}}_i(t)} \tag{10}$$

Definiție

Se numește lucrul mecanic elementar efectuat de o forță $\vec{\mathbf{F}}$ care se aplică punctului material **P** pe drumul descris de mișcarea lui **P** (de la momentul inițial t_0 la momentul actual t) mărimea scalară

$$\boxed{dL = \vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}}) \cdot d\vec{\mathbf{x}}} \tag{11}$$

Definiție

Se numește lucrul mecanic efectuat de o forță $\vec{\mathbf{F}}$ care se aplică punctului material **P** pe drumul descris de mișcarea lui **P** de la momentul inițial t_0 la momentul actual t mărimea

$$\boxed{L_{t_0}(t) = \int_{\mathbf{P}(t_0)\mathbf{P}(t)} \vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}}) \cdot d\vec{\mathbf{x}}} \tag{12}$$

Definiție

Se numește puterea mecanică dezvoltată de punctul material **P** mărimea

$$\boxed{\mathscr{P}(t) = \frac{dL(t)}{dt} = \vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}}) \cdot \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t)} \tag{13}$$

Teorema energiei cinetice

Mișcarea punctului material se face a.i., la orice moment de timp t, diferențiala energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic elementar efectuat de rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material

$$\boxed{dE_c = \vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}}) \cdot d\vec{\mathbf{x}} \equiv dL} \tag{14}$$

sau

$$\boxed{\frac{d}{dt}E_c(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}}) \cdot \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \equiv \mathscr{P}(t)} \tag{15}$$

Demonstrație: Ecuațiile de mișcare:

$$m\ddot{\vec{\mathbf{x}}} = \vec{\mathbf{F}} \quad \Big|\cdot d\vec{\mathbf{x}} \Longrightarrow m\ddot{\vec{\mathbf{x}}} \cdot d\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{x}} \Longrightarrow m\ddot{\vec{\mathbf{x}}} \cdot d\vec{\mathbf{x}} = dL$$

Au loc relațiile:

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt} \Longrightarrow d\vec{\mathbf{x}} = \dot{\vec{\mathbf{x}}}\,dt \quad \& \quad \ddot{\vec{\mathbf{x}}} = \frac{d\dot{\vec{\mathbf{x}}}}{dt} \Longrightarrow d\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \ddot{\vec{\mathbf{x}}}\,dt$$

Obținem:

$$m\ddot{\vec{\mathbf{x}}} \cdot d\vec{\mathbf{x}} = m\ddot{\vec{\mathbf{x}}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{x}}}\,dt = m\dot{\vec{\mathbf{x}}} \cdot \ddot{\vec{\mathbf{x}}}\,dt = m\dot{\vec{\mathbf{x}}} \cdot d\dot{\vec{\mathbf{x}}} = d\left(\frac{1}{2}\, m\, \dot{\vec{\mathbf{x}}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{x}}}\right) = dE_c$$

□

- Considerăm o mişcare a punctului material **P** de la momentul de timp t_1 la t_2. Dacă integrăm ecuaţia (14) între două momente de timp t_1 şi t_2 (i.e. între două stări (1) şi (2) ale punctului material **P**), obţinem

$$\boxed{E_c(2) - E_c(1) = \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}E_c = \int_{(1)}^{(2)} \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{x}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot \dot{\vec{\mathbf{x}}}\,\mathrm{d}t} \tag{16}$$

  i.e. variaţia energiei cinetice, când punctul material **P** trece dintr-o stare (1) într-o altă stare (2), este egală cu lucrul mecanic efectuat de rezultanta forţelor ce acţionează în trecerea punctului de la starea (1) la starea (2).
- În ecuaţia (14), membrul stâng este întotdeauna o diferenţială totală exactă (energia cinetică este o mărime de stare), în vreme ce membrul drept nu este.
- Teorema energiei cinetice nu pune, în general, în evidenţă integrale prime.
- Deoarece de regulă $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}}, \dot{\vec{\mathbf{x}}})$, pentru a calcula integrala din membrul drept al ecuaţiei (16) trebuie cunoscută legea de mişcare $t \longmapsto \vec{\mathbf{x}}(t)$ a punctului material **P**.

Forţe cvasiconservative

- Forţa $\vec{\mathbf{F}}$ se numeşte forţă cvasiconservativă dacă derivă dintr-un cvasipotenţial:

$$\boxed{\exists\ V(\cdot,\cdot) : [0,\infty) \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{a.i.} \quad \vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}}) = -\nabla_{\vec{\mathbf{x}}} V(t, \vec{\mathbf{x}})} \tag{17}$$

- Câmpul scalar V se numeşte cvasipotenţialul din care derivă forţa cvasiconservativă $\vec{\mathbf{F}}$.
- Lucrul mecanic elementar al unei forţe cvasiconservative este dat de relaţia:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L &= \vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{x}} = -\nabla_{\vec{\mathbf{x}}} V(t, \vec{\mathbf{x}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{x}} \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 \right) = -\mathrm{d}V + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

- În cazul unei forţe cvasiconservative, lucrul mecanic elementar nu este o diferenţială totală exactă!

Forţe conservative

- Forţa $\vec{\mathbf{F}}$ se numeşte forţă conservativă dacă derivă dintr-un potenţial:

$$\boxed{\exists\ V(\cdot) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{a.i.} \quad \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}) = -\nabla_{\vec{\mathbf{x}}} V(\vec{\mathbf{x}})} \tag{18}$$

- Câmpul scalar V se numeşte potenţialul din care derivă forţa conservativă $\vec{\mathbf{F}}$ şi este o mărime de stare, $V = V(\vec{\mathbf{x}}) = V(x_1, x_2, x_3)$.
- Lucrul mecanic elementar al unei forţe conservative devine o diferenţială totală exactă şi este dat de relaţia:

$$\boxed{\mathrm{d}L = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{x}} = -\nabla_{\vec{\mathbf{x}}} V(\vec{\mathbf{x}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{x}} = -\mathrm{d}V} \tag{19}$$

- Semnificaţie fizică: V este energia potenţială a punctului material **P** în câmpul forţelor conservative.
- Dacă se cunoaşte forţa conservativă $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}})$, din relaţia (19) se obţine expresia potenţialului din care derivă forţa conservativă

$$\boxed{V(\vec{\mathbf{x}}) = -\int \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{x}} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}} \tag{20}$$

  C stabileşte nivelul zero al energiei potenţiale

- La o deplasare finită, lucrul mecanic efectuat de o forţă conservativă nu depinde de forma traiectoriei, ci doar de valorile potenţialului V în starea iniţială şi în cea finală

$$\boxed{L_{t_1}(t_2) = \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}L = \int_{(1)}^{(2)} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{x}} = -\int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}V = V(1) - V(2)} \tag{21}$$

- Din teorema energiei cinetice, i.e. ecuaţia (14), împreună cu relaţiile (16) şi (21), rezultă

$$\boxed{\int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}(E_c - L) = \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}(E_c + V) = 0} \tag{22}$$

Corolar (integrala primă a mişcării)

Mişcarea unui punct material **P** într-un câmp conservativ de forţe se face a.i., la orice moment de timp t, energia lui totală $E_c + V$ se conservă

$$\boxed{(E_c + V)(t) = (E_c + V)(t_0)\,, \quad \forall\ t \geq t_0} \tag{23}$$

-

Forțe centrale

- Forța $\vec{\mathbf{F}}$ se numește forță centrală dacă este exercitată de un punct fix $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ asupra unui punct $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ și depinde doar de distanța $\|\overrightarrow{\mathbf{OP}}\|$, i.e.

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}}(r) = F(r)\,\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}\,, \quad \vec{\mathbf{r}} \equiv \overrightarrow{\mathbf{OP}}\,, \quad r = \|\vec{\mathbf{r}}\|} \tag{24}$$

- O forță centrală este o forță conservativă ce derivă din potențialul

$$\boxed{V(\cdot) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad V(r) = -\int_{r_0}^{r} F(s)\,\mathrm{d}s} \tag{25}$$

$$\vec{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{3} x_i\,\vec{\mathbf{e}}_i\,, \quad r = \|\vec{\mathbf{r}}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,, \quad V(r_0) = 0$$

- Într-adevăr, avem

$$-\nabla_{\vec{\mathbf{r}}}\,V(r) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\,\frac{\partial r(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}\,\vec{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial r(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}\,\vec{\mathbf{e}}_i$$
$$= F(r)\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{r}\,\vec{\mathbf{e}}_i = F(r)\,\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} = \vec{\mathbf{F}}(r)$$

Aplicație: Aruncarea și căderea liberă pe verticală

Fie un punct material $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ de masă m, aruncat pe verticală, cu viteza inițială $v_0\,\vec{\mathbf{e}}_3$, $v_0 > 0$, din originea $\mathbf{O}$ a referențialului absolut $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O};\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}\big)$.

Să se determine:

(i) înălțimea maximă h_m pe care o atinge punctul material $\mathbf{P}$;

(ii) timpul t_m parcurs de punctul material $\mathbf{P}$ pentru a atinge înălțimea maximă h_m;

(iii) timpul t_f parcurs de punctul material $\mathbf{P}$ pentru a reveni în $\mathbf{O}$;

(iv) viteza v_f cu care punctul material $\mathbf{P}$ revine în $\mathbf{O}$.

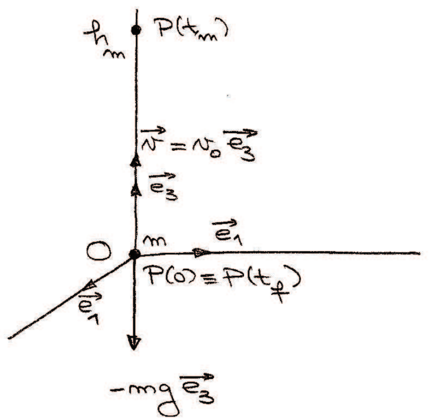

Figure : Aruncarea și căderea liberă pe verticală a punctului material $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ de masă m.

(i) Mișcarea punctului material $\mathbf{P}$ are loc în câmpul gravitațional, deci într-un câmp de forțe conservative, i.e. energia totală se conservă:

$$E_c(t) + V(t) = E_c(0) + V(0)\,, \quad \forall\ t \ge 0 \tag{26a}$$

unde

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\,m\vec{\mathbf{v}}(t)\cdot\vec{\mathbf{v}}(t)\,, \quad \forall\ t \ge 0 \tag{26b}$$

$$V(t) = -\int_0^{x_3(t)} -mg\,\mathrm{d}x_3 = mgx_3(t)\,, \quad \forall\ t \ge 0 \tag{26c}$$

Avem:

$$t = 0: \quad \vec{\mathbf{x}}(0) = \vec{\mathbf{0}} \ \ \&\ \ \vec{\mathbf{v}}(0) = v_0\,\vec{\mathbf{e}}_3 \Longrightarrow$$
$$V(0) = 0 \ \ \&\ \ E_c(0) = \frac{1}{2}\,mv_0^2 \tag{27}$$

$$t = t_m: \quad \vec{\mathbf{x}}(t_m) = h_m\,\vec{\mathbf{e}}_3 \ \ \&\ \ \vec{\mathbf{v}}(t_m) = \vec{\mathbf{0}} \Longrightarrow$$
$$V(t_m) = mgh_m \ \ \&\ \ E_c(t_m) = 0 \tag{28}$$

Din ecuațiile (26a), (27) și (28), rezultă

$$\frac{1}{2}\,mv_0^2 = mgh_m\,, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{h_m = \frac{v_0^2}{2g}} \tag{29}$$

(ii) Ecuația de mișcare a punctului material **P**

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) = -mg\,\vec{\mathbf{e}}_3 \tag{30}$$

împreună cu condițiile inițiale (27), se proiectează pe axa $\mathbf{O}x_3$ și se obține următoarea problemă Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x}_3(t) = -g\,, \quad t > t_0 \\ \dot{x}_3(0) = v_0 \\ x_3(0) = 0 \end{cases} \tag{31}$$

Integrăm ecuația (31) și obținem:

$$\dot{x}_3(t) = -gt + C_1\,, \qquad \forall\ t \in [0, t_m] \tag{32a}$$

$$x_3(t) = -\frac{1}{2}\,gt^2 + C_1 t + C_0\,, \quad \forall\ t \in [0, t_m] \tag{32b}$$

Constantele C_0 și C_1 sunt determinate din condițiile inițiale ale problemei (31), i.e.

$$\dot{x}_3(0) = \big(-gt + C_1\big)\big|_{t=0} = C_1 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = v_0 \tag{33a}$$

$$x_3(0) = \left(-\frac{1}{2}\,gt^2 + C_1 t + C_0\right)\bigg|_{t=0} = C_0 \quad \Longrightarrow \quad C_0 = 0 \tag{33b}$$

Rezultă soluția problemei Cauchy (31) (i.e. traiectoria lui **P**)

$$x_3(t) = -\frac{1}{2}\,gt^2 + v_0 t\,, \quad t \in [0, t_m] \tag{34a}$$

și, respectiv, derivata ei în raport cu timpul (i.e. viteza lui **P**)

$$\dot{x}_3(t) = -gt + v_0\,, \quad t \in [0, t_m] \tag{34b}$$

Cum $\dot{x}_3(t_m) = 0$, din ecuația (34b) rezultă:

$$-\,gt_m + v_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{t_m = \frac{v_0}{g}} \tag{35}$$

(iii) Avem următoarea problemă Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x}_3(t) = -g\,, \quad t > t_m \\ \dot{x}_3(t_m) = 0 \\ x_3(t_m) = h_m \end{cases} \tag{36}$$

Soluția problemei Cauchy (36) este dată de:

$$\dot{x}_3(t) = -gt + C_1\,, \quad \forall\ t \in [t_m, t_f] \tag{37a}$$

$$x_3(t) = -\frac{1}{2}\,gt^2 + C_1 t + C_0\,, \quad \forall\ t \in [t_m, t_f] \tag{37b}$$

Constantele C_0 și C_1 sunt determinate din condițiile inițiale ale problemei (37), i.e.

$$\dot{x}_3(t_m) = \big(-gt + C_1\big)\big|_{t=t_m} = -gt_m + C_1 \tag{38a}$$

$$x_3(t_m) = \left(-\frac{1}{2}\,gt^2 + C_1 t + C_0\right)\bigg|_{t=t_m} = -\frac{1}{2}\,gt_m^2 + C_1 t_m + C_0 \tag{38b}$$

de unde rezultă

$$C_1 = gt_m \qquad \& \qquad C_0 = -\frac{1}{2}\,gt_m^2 \tag{38c}$$

Rezultă soluția problemei Cauchy (37) (i.e. traiectoria lui **P**)

$$x_3(t) = -\frac{1}{2}\,g\big(t - t_m\big)^2 + h_m\,, \quad t \in [t_m, t_f] \tag{39a}$$

și, respectiv, derivata ei în raport cu timpul (i.e. viteza lui **P**)

$$\dot{x}_3(t) = -g\big(t - t_m\big)\,, \quad t \in [t_m, t_f] \tag{39b}$$

Cum $x_3(t_f) = 0$, din ecuația (39a) obținem

$$-\frac{1}{2}\,g\big(t_f - t_m\big)^2 + h_m = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_f = t_m \pm \sqrt{\frac{2h_m}{g}} = t_m \pm \sqrt{\frac{2v_0^2}{2g^2}} \tag{40a}$$

și alegem soluția ce satisface inegalitatea $t_f > t_m$, i.e.

$$\boxed{t_f = t_m + \frac{v_0}{g}} \tag{40b}$$

(iv) Din ecuația (39b), obținem

$$v_f = \dot{x}_3(t_f) = -g\left(t_f - t_m\right) = -g\left(t_m + \frac{v_0}{g} - t_m\right) \tag{41a}$$

de unde rezultă

$$\boxed{v_f = -v_0} \tag{41b}$$

$\square$