Signaturi multisortate. Mulţimi şi funcţii multisortate.

- O *signatură multisortată* este o pereche (S,Σ), unde $S \neq \emptyset$ este o mulţime de sorturi şi Σ este o mulţime de simboluri de operaţii $\sigma : s_1 s_2 \ldots s_n \to s$. Dacă $n = 0$, atunci $\sigma :\to s$ este simbolul unei constante.

Fixăm o mulţime de sorturi S.

- O *mulţime S-sortată* este o familie de mulţimi $A = \{A_s\}_{s\in S}$.
- O *funcţie S-sortată* $f : A \to B$ este o familie de funcţii $f = \{f_s\}_{s\in S}$, unde $f_s : A_s \to B_s$, pt. or. $s \in S$. Dacă $f : A \to B$ şi $g : B \to C$, definim *compunerea* $f;g : A \to C$, $(f;g)_s(a) = g_s(f_s(a))$, or. $a \in A_s$.
- O funcţie S-sortată $f : A \to B$ este *injectivă, (surjectivă, bijectivă)* dacă f_s este injectivă, (surjectivă, bijectivă), or. $s \in S$. O funcţie S-sortată $f = \{f_s\}_{s\in S} : A \to B$ este *inversabilă* dacă există $g : B \to A$ astfel încât $f;g = 1_A$ şi $g;f = 1_B$.

Propoziţie 1. *O funcţie S-sortată $f : A \to B$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ este bijectivă.*

Algebre multisortate.

- O *algebră multisortată de tip* (S,Σ) este $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ unde $A_S = \{A_s\}_{s\in S}$ este o mulţime S-sortată şi $A_\Sigma = \{A_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ este o familie de operaţii astfel încât
  - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ în Σ, atunci $A_\sigma : A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \to A_s$.
  - dacă $\sigma : \to s$ în Σ, atunci $A_\sigma \in A_s$.

Morfisme de algebre multisortate.

- Un *morfism de (S,Σ)-algebre* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este o funcţie S-sortată $h = \{h_s\}_{s\in S} : \{A_s\}_{s\in S} \to \{B_s\}_{s\in S}$ care verifică condiţia de compatibilitate:
  - $h_s(A_\sigma) = B_\sigma$, or. $\sigma :\to s \in \Sigma$,
  - $h_s(A_\sigma(a_1,\ldots,a_n)) = B_\sigma(h_{s_1}(a_1),\ldots,h_{s_n}(a_n))$, or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ şi or. $a_1 \in A_{s_1},\ldots,a_n \in A_{s_n}$.

Propoziţie 2. *Compunerea a două Σ-morfisme este un Σ-morfism.*

Izomorfisme de algebre multisortate.

- Un Σ-morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se numeşte *izomorfism* dacă există un Σ-morfism $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ astfel încât $h;g = 1_A$ şi $g;h = 1_B$. Deoarece g este unic, se notează cu h^{-1}.
- Două Σ-algebre $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt *izomorfe* ($\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$) dacă există un izomorfism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Propoziţie 3. *Fie $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un Σ-morfism. Atunci h este izomorfism $\Leftrightarrow$ este funcţie S-sortată bijectivă.*

Propoziţie 4. *Compunerea a două izomorfisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ este un izomorfism. Mai mult, $(f;g)^{-1} = g^{-1};f^{-1}$.*

Tipuri abstracte de date.

- Un tip abstract de date este o clasă $\mathfrak{C}$ de (S,Σ)-algebre cu proprietatea că oricare două (S,Σ)-algebre din $\mathfrak{C}$ sunt izomorfe.
- $\mathfrak{I}_{(S,\Sigma)} = \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I}\ (S,\Sigma)\text{-algebră iniţială}\}$ este un tip abstract de date.

Termeni. Algebre de termeni.

- O *mulţime de variabile* este o mulţime S-sortată $X = \{X_s\}_{s\in S}$ astfel încât $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$, or. $s, s' \in S$, $s \neq s'$, $X_s \cap \{\sigma\}_{\sigma:s_1\ldots s_n\to s\in\Sigma} = \emptyset$ şi $X_s \cap \{\sigma\}_{\sigma:\to s\in\Sigma} = \emptyset$.
- Mulţimea S-sortată a *termenilor cu variabile din X*, $T_\Sigma(X)$, este cea mai mică mulţime de şiruri finite peste alfabetul $L = \bigcup_{s\in S} X_s \cup \bigcup_{w,s} \Sigma_{w,s} \cup \{(,)\} \cup \{,\}$ care verifică:
  - $X \subseteq T_\Sigma(X)$,
  - dacă $\sigma :\to s$ în Σ, atunci $\sigma \in T_\Sigma(X)_s$,
  - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ în Σ şi $t_i \in T_\Sigma(X)_{s_i}$, or. $1 \leq i \leq n$, atunci $\sigma(t_1,\ldots,t_n) \in T_\Sigma(X)_s$.
- *Inducţia pe termeni*: Fie $\mathbf{P}$ o proprietate astfel încât:
  - pasul iniţial: $\mathbf{P}(x) = \mathit{true}$, or. $x \in X$, şi $\mathbf{P}(\sigma) = \mathit{true}$, or. $\sigma :\to s$.
  - pasul de inducţie: pt. or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ şi or. $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1},\ldots,t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$, dacă $\mathbf{P}(t_1) = \ldots = \mathbf{P}(t_n) = \mathit{true}$, atunci $\mathbf{P}(\sigma(t_1,\ldots,t_n)) = \mathit{true}$.

  Atunci $\mathbf{P}(t) = \mathit{true}$, oricare $t \in T_\Sigma(X)$.
- Mulţimea S-sortată a termenilor $T_\Sigma(X)$ este o (S,Σ)-algebră, numită *algebra termenilor cu variabile din X*, cu operaţiile definite astfel: pt. or. $\sigma :\to s$ din Σ, operaţia corespunzătoare este $T_\sigma := \sigma \in T_\Sigma(X)_s$ şi pt. or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ din Σ, operaţia corespunzătoare este $T_\sigma : T_\Sigma(X)_{s_1\ldots s_n} \to T_\Sigma(X)_s$, $T_\sigma(t_1,\ldots,t_n) := \sigma(t_1,\ldots,t_n)$, or. $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1},\ldots,t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$. T_Σ *algebra termenilor fără variabile* ($X = \emptyset$).

Algebră iniţială.

- O (S,Σ)-algebră $\mathcal{I}$ este iniţială într-o clasă de (S,Σ)-algebre $\mathfrak{K}$ dacă pentru orice $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$, există un unic (S,Σ)-morfism $f : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$.

Propoziţie 5.

(1) Dacă $\mathcal{I}$ este iniţială în $\mathfrak{K}$ şi $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ astfel încât $\mathcal{A} \simeq \mathcal{I}$, atunci $\mathcal{A}$ este iniţială în $\mathfrak{K}$.
(2) Dacă $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ sunt iniţiale în $\mathfrak{K}$, atunci $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$.

Teoremă 1. *Pentru orice (S,Σ)-algebră $\mathcal{B}$, există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.*

Corolar 1. *T_Σ este (S,Σ)-algebra iniţială.*

Algebre libere.

- O (S,Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este *liber generată* de X dacă $X \subseteq A_S$, i.e. există funcţia S-sortată incluziune a lui X în A_S $i_A : X \hookrightarrow A_S$, şi pentru orice (S,Σ)-algebră $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ şi orice funcţie S-sortată $f : X \to B_S$, există un unic (S,Σ)-morfism $\tilde{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ astfel încât $i_A; \tilde{f} = f$.

Teoremă 2. *Dacă $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt liber generate de X, atunci $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.*

Teoremă 3. *Fie $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ o (S,Σ)-algebră. Orice funcţie S-sortată $e : X \to B_S$ se extinde unic la un (S,Σ)-morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$.*

Corolar 2. *$T_\Sigma(X)$ este (S,Σ)-algebra liber generată de X.*

Propoziţie 6. *Fie $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un (S,Σ)-morfism surjectiv şi X o mulţime de variabile. Pentru orice (S,Σ)-morfism $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$, există un (S,Σ)-morfism $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ astfel încât $g; h = f$.*

Dacă $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este un (S,Σ)-morfism şi $X \subseteq A_S$, $f\restriction_X$ este *restricţia* lui f la X, i.e. $(f\restriction_X)_s(x) = f_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Propoziţie 7. *Fie $\mathcal{B}$ o (S,Σ)-algebră şi X o mulţime de variabile. Dacă $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ şi $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ sunt morfisme, atunci $g = f \Leftrightarrow g\restriction_X = f\restriction_X$.*

Propoziţie 8. *Dacă $X \simeq Y$, atunci $T_\Sigma(X) \simeq T_\Sigma(Y)$.*

Congruenţe.

- O relaţie S-sortată $\equiv = \{\equiv_s\}_{s\in S} \subseteq A_S \times A_S$ este o congruenţă dacă $\equiv_s \subseteq A_s \times A_s$ este echivalenţă, or. $s \in S$, şi $\equiv$ este compatibilă cu operaţiile: pt. or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ şi or. $a_i, b_i \in A_{s_i}$, $i = 1, \ldots, n$, $a_i \equiv_{s_i} b_i$, or. $i = 1, \ldots, n \Rightarrow A_\sigma(a_1, \ldots, a_n) \equiv_s A_\sigma(b_1, \ldots, b_n)$.
- Fie $\mathcal{A}$ o (S,Σ)-algebră şi $\equiv$ o congruenţă pe $\mathcal{A}$. Definim:
  - $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalenţă a lui a) şi $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$.
  - *algebră cât* a lui $\mathcal{A}$ prin congruenţa $\equiv$ notată $\mathcal{A}/_\equiv$: $A/_\equiv := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ cu operaţiile: $(A/_\equiv)_\sigma := [A_\sigma]_{\equiv_s}$, or. $\sigma :\to s$, şi $(A/_\equiv)_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}}$ $[A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ şi $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$.
  - $[\cdot]_\equiv : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/_\equiv$, $a \mapsto [a]_{\equiv_s}$, or. $a \in A_s$, morfism surjectiv. Avem $[a]_{\equiv_s} = [b]_{\equiv_s} \Leftrightarrow a \equiv_s b \Leftrightarrow (a,b) \in \equiv_s$.
- Dacă $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism de (S,Σ)-algebre, *nucleul* lui f este $Ker(f) = \{Ker(f_s)\}_{s\in S}$, unde $Ker(f_s) := \{(a,a') \in A_s \times A_s \mid f_s(a) = f_s(a')\}$, or. $s \in S$.

Propoziţie 9.

(1) $Ker(f)$ este o congruenţă pe $\mathcal{A}$.
(2) Dacă $\equiv$ este o congruenţă pe $\mathcal{A}$, atunci $Ker([\cdot]_\equiv) = \equiv$.

Teoremă 4 (Proprietatea de universalitate a algebrei cât)**.** *Pentru orice (S,Σ)-algebră $\mathcal{B}$ şi pentru orice morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$, există un unic morfism $\overline{h} : \mathcal{A}/_\equiv \to \mathcal{B}$ a.i. $[\cdot]_\equiv; \overline{h} = h$.*

Propoziţie 10 (*)**.** *Fie $\mathfrak{K}$ o clasă de (S,Σ)-algebre. Dacă $\equiv_{\mathfrak{K}} := \bigcap\{Ker(h) \mid h : T_\Sigma \to \mathcal{B} \in \mathfrak{K}$ morfism$\}$, atunci următoarele proprietăţi sunt adevărate:*

(1) $\equiv_{\mathfrak{K}}$ este congruenţa pe T_Σ,
(2) pt. or. $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$, există un unic morfism $\overline{h} : T_\Sigma/_{\equiv_{\mathfrak{K}}} \to \mathcal{B}$.

Ecuaţii. Relaţia de satisfacere.

- O (S,Σ)-*ecuaţie* $(\forall X)t \doteq_s t'$ este formată dintr-o mulţime de variabile X şi doi termeni $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$.
- O (S,Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ *satisface o ecuaţie* $(\forall X)t \doteq_s t'$
  - dacă pentru orice funcţie S-sortată $e : X \to A_S$, $\tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t')$.
  - dacă pentru orice morfism $f : T_\Sigma(X) \to A$, $f_s(t) = f_s(t')$.
- O (S,Σ)-*ecuaţie condiţionată* $(\forall X)t \doteq_s t'$ *if* H este formată dintr-o mulţime de variabile X, doi termeni de acelaşi sort $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$ şi o mulţime H de ecuaţii $u \doteq_{s'} v$, cu $u, v \in T_\Sigma(X)_{s'}$.
- O (S,Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ *satisface o ecuaţie condiţionată* $(\forall X)t \doteq_s t'$ *if* H
  - dacă pentru orice funcţie S-sortată $e : X \to A_S$, $\tilde{e}_{s'}(u) = \tilde{e}_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t')$.
  - dacă pentru orice morfism $f : T_\Sigma(X) \to A$, $f_{s'}(u) = f_{s'}(v)$, or. $u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow f_s(t) = f_s(t')$.

Γ-algebre.

- Dacă Γ este o mulţime de ecuaţii condiţionate, o (S,Σ)-algebră $\mathcal{A}$ este o Γ-*algebră* dacă $\mathcal{A} \models \gamma$, or. $\gamma \in \Gamma$. Notăm cu $Alg(S,\Sigma,\Gamma)$ clasa tuturor Γ-algebrelor.

Teoremă 5. *Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ două (S,Σ)-algebre a.î. $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ şi $\gamma := (\forall X)t \doteq_s t'$ if H. Atunci $\mathcal{A} \models \gamma \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \gamma$.*

- O ecuaţie condiţionată θ este *consecinţă semantică* a lui Γ dacă $\mathcal{A} \models \Gamma$ implică $\mathcal{A} \models \theta$, pentru orice (S,Σ)-algebră $\mathcal{A}$.
- O congruenţă $\equiv$ pe $\mathcal{A}$ este *închisă la substituţie* dacă

$$\mathrm{CS}(\Gamma,\mathcal{A}) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{or. } (\forall X)t \doteq_s t' \text{ if } H \in \Gamma, \text{ or. } e : X \to A_S \\ \tilde{e}_{s'}(u) \equiv_{s'} \tilde{e}_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{e}_s(t) \equiv_s \tilde{e}_s(t'). \end{array}}$$

Propoziţie 11. *Dacă $\equiv$ este o congruenţă pe $\mathcal{A}$ închisă la substituţie, atunci $\mathcal{A}/_\equiv \models \Gamma$.*

- Pentru Γ şi $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$, definim $\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}} := \bigcap\{Ker(h) \mid h : \mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \models \Gamma\}$. Dacă $\mathcal{A} = T_\Sigma(X)$, notăm $\equiv_{\Gamma, T_\Sigma(X)}$ cu $\equiv_\Gamma$. Avem $t \equiv_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.

Propoziţie 12 (*)**.** *$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}}$ este o congruenţă pe $\mathcal{A}$ închisă la substituţie.*

Propoziţie 13 (*)**.** *$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}}$ este cea mai mică congruenţă pe $\mathcal{A}$ închisă la substituţie.*

Teoremă 6 (*)**.** *$T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma,T_\Sigma}}$ este Γ-algebra iniţială.*

Specificaţii algebrice.

- O *specificaţie algebrică* este un triplet (S,Σ,Γ), unde (S,Σ) este o signatură multisortată şi Γ este o mulţime de ecuaţii condiţionate. Specificaţia (S,Σ,Γ) defineşte clasa modelelor $Alg(S,\Sigma,\Gamma)$.
- Două specificaţii (S,Σ,Γ_1) şi (S,Σ,Γ_2) sunt *echivalente* dacă definesc aceeaşi clasă de modele.
- O specificaţie (S,Σ,Γ) este *adecvată* pentru $\mathcal{A}$ dacă $\mathcal{A}$ este Γ-algebră iniţială, i.e. $\mathcal{A} \in \Im_{(S,\Sigma,\Gamma)}$.

Algoritmul de unificare.

- O *substituţie* a variabilelor din X cu termeni din $T_\Sigma(Y)$ este o funcţie S-sortată $\tau : X \to T_\Sigma(Y)$.
- Un *unificator* pentru U este o substituţie $\nu : X \to T_\Sigma(X)$ a.î. $\nu(t_i) = \nu(t'_i)$, or. $i = 1,\ldots,n$.
- Un unificator ν pentru U este un *cel mai general unificator* dacă pentru orice alt unificator ν' pentru U, există o substituţie μ astfel încât $\nu' = \nu;\mu$.

	Lista soluţie S	Lista de rezolvat R
Iniţial	$\emptyset$	$t_1 \doteq t'_1,\ldots,t_n \doteq t'_n$
SCOATE	S	$R',\, t \doteq t$
	S	R'
DESCOMPUNE	S	$R',\, f(t_1,\ldots,t_n) \doteq f(t'_1,\ldots,t'_n)$
	S	$R',\, t_1 \doteq t'_1,\ldots t_n \doteq t'_n$
REZOLVĂ	S	$R',\, x \doteq t$ sau $t \doteq x$, x nu apare în t
	$x \doteq t,\, S[x \leftarrow t]$	$R'[x \leftarrow t]$
Final	S	$\emptyset$

2. Logica ecuaţională

Deducţie ecuaţională - cazul necondiţionat.

- E mulţime de ecuaţii necondiţionate

R $\dfrac{}{(\forall X)t \doteq_s t}$ S $\dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_2 \doteq_s t_1}$ T $\dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2,\ (\forall X)t_2 \doteq_s t_3}{(\forall X)t_1 \doteq_s t_3}$

CΣ $\dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1,\ldots,(\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1,\ldots,t_n) \doteq_s \sigma(t'_1,\ldots,t'_n)}$, unde $\sigma : s_1\ldots s_n \to s \in \Sigma$

Sub$_E$ $\dfrac{}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}$, $(\forall Y)t \doteq_s t' \in E$ şi $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$

- Ecuaţia $\epsilon := (\forall X)t \doteq_s t'$ se deduce din E dacă ex. o secvenţă $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ a.î. $\epsilon_n = \epsilon$ şi pt. or. $1 \le i \le n$:
  - $\epsilon_i \in E$ sau
  - ϵ_i se obţine din $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, CΣ, Sub$_E$.

Deducţie ecuaţională - cazul condiţionat.

- Γ mulţime de ecuaţii condiţionate

R $\dfrac{}{(\forall X)t \doteq_s t}$ S $\dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_2 \doteq_s t_1}$ T $\dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2,\ (\forall X)t_2 \doteq_s t_3}{(\forall X)t_1 \doteq_s t_3}$

CΣ $\dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1,\ldots,(\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1,\ldots,t_n) \doteq_s \sigma(t'_1,\ldots,t'_n)}$, unde $\sigma : s_1\ldots s_n \to s \in \Sigma$

Sub$_\Gamma$ $\dfrac{(\forall X)\theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1),\ldots,(\forall X)\theta(u_n) \doteq_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}$, unde $(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $\{u_1 \doteq_{s_1} v_1,\ldots,u_n \doteq_{s_n} v_n\} \in \Gamma$, $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.

- Ecuaţia $\epsilon := (\forall X)t \doteq_s t'$ *se deduce* din Γ dacă ex. o secvenţă $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ a.î. $\epsilon_n = \epsilon$ si pt. or. $1 \le i \le n$:
  - $\epsilon_i \in \Gamma$ sau
  - ϵ_i se obţine din $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, CΣ, Sub$_\Gamma$.

Corectitudinea logicii ecuationale.

- O regulă de deducţie $\dfrac{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}{\epsilon}$ este corectă dacă $\Gamma \models \epsilon_1,\ldots,\Gamma \models \epsilon_n \Rightarrow \Gamma \models \epsilon$.

Propoziţie 14. *Regulile de deducţie R, S, T, CΣ, Sub$_\Gamma$ sunt corecte.*

Teoremă 7 (Corectitudinea deducţiei)**.** $\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.

Completitudinea logicii ecuationale.

- O relaţie binară $\sim\subseteq T_\Sigma(X)\times T_\Sigma(X)$ este închisă la regula $\boxed{\text{Reg}\ \dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t_1', \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t_n'}{(\forall X)t \doteq_s t'}}$ dacă $t_1 \sim_{s_1} t_1', \ldots, t_n \sim_{s_n} t_n' \Rightarrow t \sim_s t'$.

Propoziţie 15. *Sunt echivalente:*

(1) $\sim$ *este congruenţă pe* $T_\Sigma(X)$,
(2) $\sim$ *este închisă la* R, S, T, $C\Sigma$.

Propoziţie 16. *Sunt echivalente:*

(1) $\sim$ *verifică* $CS(\Gamma, T_\Sigma(X))$ *(i.e. închisă la substituţie),*
(2) $\sim$ *este închisă la* Sub_Γ.

- Definim $t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$, or. $s \in S$.

Propoziţie 17. $\sim_\Gamma$ *este o congruenţă pe* $T_\Sigma(X)$ *închisă la substituţie.*

Teoremă 8 (Completitudinea deducţiei)**.** $\Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.

Teorema de completitudine.

- Echivalenţa sintactică: $t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.
- Echivalenţa semantică: $t \equiv_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.
- Corectitudinea deducţiei: $\sim_\Gamma \subseteq \equiv_\Gamma$.
- Completitudinea deducţiei: $\equiv_\Gamma \subseteq \sim_\Gamma$.

Teoremă 9 (Teorema de completitudine)**.** $\Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$ $(\equiv_\Gamma = \sim_\Gamma)$

3. Rescrierea termenilor

Contexte.

- $nr_y(t)$ = numărul de apariţii ale lui y în t
- Fie z a.î. $z \notin X$. Un termen $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})$ se numeşte *context* dacă $nr_z(c) = 1$.
- Dacă $t_0 \in T_\Sigma(X)$ şi t_0 are acelaşi sort cu z, definim substituţia $\{z \leftarrow t_0\} : X \cup \{z\} \to T_\Sigma(X)$, prin $\{z \leftarrow t_0\}(x) = \begin{cases} t_0, & \text{dacă } x = z \\ x, & \text{altfel} \end{cases}$.
  Pentru un context $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})$, notăm $c[z \leftarrow t_0] := \{z \leftarrow t_0\}(c)$.

Sistem de rescriere.

- O regulă de rescriere $l \to_s r$ (peste Y) este formată din $l, r \in T_\Sigma(Y)_s$ astfel încât l nu este variabilă şi $Var(r) \subseteq Var(l)$.
- Un sistem de rescriere (TRS) este o mulţime finită de reguli de rescriere.
- Dacă R este un sistem de rescriere, pentru $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$ definim relaţia $t \to_R t'$ astfel:

$$\boxed{\begin{array}{lll} t \to_R t' & \Leftrightarrow & t \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(l)] \text{ şi} \\ & & t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(r)], \text{ unde} \\ & & c \in T_\Sigma(X \cup \{z\}) \text{ context}, \\ & & l \to_s r \in R \text{ cu } Var(l) = Y, \\ & & \theta : Y \to T_\Sigma(X) \text{ substituţie} \end{array}}$$

- Dacă E este o mulţime de ecuaţii astfel încât, pt. or. $(\forall Y)l \doteq_s r \in E$, $l \notin Y$ (nu este variabilă) şi $Var(r) \subseteq Var(l)$, definim *sistemul de rescriere determinat de* E $R_E := \{l \to_s r \mid (\forall Y)l \doteq_s r \in E\}$. Notăm *relaţia de rescriere generată de* R_E prin $\to_E := \to_{R_E}$.

Logica ecuaţională şi rescrierea termenilor.

- E mulţime de ecuaţii necondiţionate: $\boxed{\text{SR}_E\ \dfrac{}{(\forall X)c[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(t')]}}$, unde
  $(\forall Y)t \doteq_s t' \in E$, $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$, $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})_{s'}$, $z \notin X$, $nr_z(c) = 1$.
- Γ mulţime de ecuaţii condiţionate: $\boxed{\text{SR}_\Gamma\ \dfrac{(\forall X)\theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1), \ldots, (\forall X)\theta(u_n) \doteq_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)c[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(t')]}}$, unde
  $(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $\{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\} \in \Gamma$, $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$, $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})_{s'}$, $z \notin X$, $nr_z(c) = 1$.

Propoziţie 18. SR_Γ *este regulă de deducţie corectă.*

Teoremă 10. *Sunt echivalente:*

(1) $\Gamma \vdash_{R,S,T,C\Sigma,Sub_\Gamma} (\forall X)t \doteq_s t'$,
(2) $\Gamma \vdash_{R,S,T,SR_\Gamma} (\forall X)t \doteq_s t'$.

Teoremă 11. $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \overset{*}{\leftrightarrow}_E t'$.

<u>Sisteme de rescriere abstracte</u>.

- Un *sistem de rescriere abstract* este o pereche $(T, \to)$ unde T este o mulţime şi $\to \subseteq T \times T$.
- $t \in T$ este *reductibil* dacă există $t' \in T$ a.î. $t \to t'$.
- $t \in T$ este *în formă normală* (ireductibil) dacă nu este reductibil.
- t_0 este *o formă normală a lui* t dacă $t \overset{*}{\to} t_0$ şi t_0 este în formă normală.
- t_1 şi t_2 *se intâlnesc* $(t_1 \downarrow t_2)$ dacă există $t \in T$ a.î. $t_1 \overset{*}{\to} t \overset{*}{\leftarrow} t_2$.
- $(T, \to)$ se numeşte
  - *noetherian:* dacă nu există reduceri infinite $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \ldots$.
  - *confluent:* $t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\to} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
  - *local confluent:* $t_1 \leftarrow t \to t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
  - *Church-Rosser*: $t_1 \overset{*}{\leftrightarrow} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
  - *normalizat*: orice element are o formă normală.
  - *complet* (convergent, canonic): confluent şi noetherian.

Propoziţie 19. *Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere. Dacă $t \downarrow t'$, atunci $t \overset{*}{\leftrightarrow} t'$.*

Propoziţie 20. *Dacă $(T, \to)$ este un sistem de rescriere noetherian, atunci orice element are o formă normală.*

Propoziţie 21. *Dacă $(T, \to)$ este un sistem de rescriere complet, atunci orice element are o unică formă normală.*

Propoziţie 22. *Un sistem de rescriere este confluent ddacă este Church-Rosser.*

Propoziţie 23. *Dacă $(T, \to)$ este un sistem de rescriere confluent, atunci este local confluent.*

Propoziţie 24. *Dacă $(T, \to)$ este un sistem de rescriere noetherian şi local confluent, atunci este confluent.*

Propoziţie 25. *Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere complet. Atunci $t \overset{*}{\leftrightarrow} t' \Leftrightarrow fn(t) = fn(t')$.*

Corolar 3. *Dacă sistemul de rescriere $(T_\Sigma(X), R_E)$ este complet, atunci $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \Leftrightarrow t \overset{*}{\leftrightarrow}_E t' \Leftrightarrow fn(t) = fn(t')$.*

<u>Terminarea sistemelor de rescriere</u>. Fie (S, Σ) o signatură, Y mulţime de variabile şi R un TRS.

Propoziţie 26 (*). *Sunt echivalente:*

(1) R este noetherian,
(2) oricărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $\mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât $t \to_R t'$ implică $\mu(t) > \mu(t')$.

- *Ordine de reducere:* $t > t'$ ddacă $\mu(t) > \mu(t')$
- *Arborele de reducere* al termenului t este definit astfel:
  - rădăcina arborelui are eticheta t,
  - descendenţii nodului cu eticheta u sunt etichetaţi cu termenii u' care verifică $u \to_R u'$.

  Dacă R se termină, atunci $\mu(t) :=$ înălţimea arborelui de reducere asociat lui t.

<u>Confluenţă şi perechi critice</u>. Fie (S, Σ) o signatură, Y mulţime de variabile şi R un TRS.

- Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:
  (1) $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
  (2) există t un subtermen al lui l_1 care nu este variabilă
  ($l_1 = c[z \leftarrow t]$, unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă)
  (3) există θ c.g.u pentru t şi l_2 (i.e. $\theta(t) = \theta(l_2)$).

Perechea $(\theta(r_1), \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)])$ se numeşte *pereche critică*.

$$\begin{tikzcd} & \theta(l_1) \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\ \theta(r_1) & & \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] \end{tikzcd}$$

Teoremă 12 (Teorema Perechilor Critice $*$). *Dacă R este noetherian, atunci sunt echivalente:*

(1) R este confluent,
(2) $t_1 \downarrow_R t_2$ pentru orice pereche critică (t_1, t_2).

<u>Algoritmul Knuth-Bendix</u>.

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIŢIALIZARE: T := R şi $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii paşi, cât timp este posibil:
  (1) CP := CP(T) = $\{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$
  (2) Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP *(T completarea lui R)*.
  (3) Dacă $(t_1, t_2) \in CP$, $t_1 \not\downarrow t_2$ atunci:
    - dacă $fn(t_1) > fn(t_2)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_1) \to fn(t_2)\}$,
    - dacă $fn(t_2) > fn(t_1)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_2) \to fn(t_1)\}$,
    - altfel, STOP *(completare eşuată)*.
- IEŞIRE: T completarea lui R sau eşec.

4. Programare logică

- (S, Σ) signatură multisortată, Γ mulţime de ecuaţii condiţionate, G o mulţime de ecuaţii de forma $(\forall X)t \doteq_s t'$, $t, t' \in T_\Sigma(X)$.
- *Problema programării logice ecuaţionale:* $\Gamma \models (\exists X)G$.
- $\Gamma \models (\exists X)G$: or. $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \models \Gamma$, $\mathcal{A} \models (\exists X)G$.
- $\mathcal{A} \models (\exists X)G$: există un morfim $h : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ a.î. $h_s(t) = h_s(t')$, or. $(\forall X)t \doteq_s t' \in G$.

Teoremă 13 (Teoremele lui Herbrand). *Fie G o mulţime de ecuaţii de forma $(\forall X)t \doteq_s t'$, $t, t' \in T_\Sigma(X)$. Sunt echivalente:*

(1) $\Gamma \models (\exists X)G$,
(2) $T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)G$,
(3) există un morfism $\psi : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$ a.î. $\Gamma \models (\forall \emptyset)\psi(G)$.