Logică matematică și computațională
Cursul VII

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

1. Latici

Latici

- În acest curs vom continua studiul **laticilor** (caz particular de poseturi).

- Amintim că un *poset* este o *mulțime (parțial) ordonată*, i. e. o mulțime înzestrată cu o relație de ordine pe ea.
- **poset** = "partially ordered set"

Latici

Amintim:

- O latice este simultan un poset și o structură algebrică înzestrată cu două operații binare, fiecare dintre acestea cu anumite proprietăți specifice.
- În cursul anterior am definit două tipuri de latici, anume *laticile Ore* și *laticile Dedekind*, și apoi am demonstrat că orice latice Ore poate fi organizată ca o latice Dedekind, și orice latice Dedekind poate fi organizată ca o latice Ore, așadar, de fapt, există un singur fel de latice, care este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.

Cele două definiții ale noțiunii de latice

Definiție

O *latice Ore* este un poset $(L, \leq)$ cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\} \in L$ și $\sup\{x, y\} \in L$.

Definiție

O *latice Dedekind* este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$, unde L este o mulțime, iar $\vee$ și $\wedge$ sunt două operații binare pe L (notate infixat și numite respectiv *sau* și *și*, sau *disjuncție* și *conjuncție*, sau *reuniune* și *intersecție*) care satisfac următoarele proprietăți:

- **idempotență:** pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$ și $x \wedge x = x$;
- **comutativitate:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ și $x \wedge y = y \wedge x$;
- **asociativitate:** pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ și $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- **absorbție:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Teoremă

Cele două definiții ale noțiunii de latice sunt echivalente. Mai precis, au loc următoarele fapte.

1. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \leq)$ *o latice Ore. Definim* $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, *unde* $\vee$ *și* $\wedge$ *sunt operații binare pe mulțimea* L, *definite prin: pentru orice* $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ *și* $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ *în laticea Ore* $\mathcal{L}$. *Atunci* $\Phi(\mathcal{L})$ *este o latice Dedekind.*
2. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ *o latice Dedekind. Definim* $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, *unde* $\leq$ *este o relație binară pe mulțimea* L, *definită prin: pentru orice* $x, y \in L$, $x \leq y$ *ddacă* $x \vee y = y$ *(ceea ce este echivalent cu* $x \wedge y = x$, *după cum ne asigură o lemă din cursul anterior). Atunci* $\Psi(\mathcal{L})$ *este o latice Ore, în care, pentru orice* $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ *și* $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
3. *Aplicațiile* Φ *și* Ψ *sunt inverse una alteia, adică: pentru orice latice Ore* $\mathcal{L}$, $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$, *și, pentru orice latice Dedekind* $\mathcal{L}$, $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.

Latici

- De acum încolo, vom numi orice latice Ore și orice latice Dedekind, simplu, *latice*.
- Conform teoremei anterioare, orice latice este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.
- Ori de câte ori va fi dată o latice, vom lucra cu ordinea ei parțială (care o face latice Ore) și cu operațiile ei binare (disjuncția și conjuncția, care o fac latice Dedekind) fără a specifica la care dintre cele două definiții echivalente ale unei latici ne vom referi într–un anumit moment.
- Pentru orice latice L, vom folosi oricare dintre notațiile: $(L, \leq)$, $(L, \vee, \wedge)$ și $(L, \vee, \wedge, \leq)$, în funcție de ce trebuie specificat despre structura de latice a lui L: ordinea ei parțială $\leq$, operațiile ei binare $\vee$ și $\wedge$, sau toate acestea.

Latici mărginite

Definiție

Un poset mărginit care este latice se numește *latice mărginită*.
Dacă există, primul element al (adică minimul) unei latici se notează, de obicei, cu 0.
Dacă există, ultimul element al (adică maximul) unei latici se notează, de obicei, cu 1.
O latice mărginită va fi notată $(L, \leq, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, cu notațiile prezentate mai sus.
O latice mărginită se mai numește *latice cu* 0 *și* 1 sau *latice cu prim și ultim element*.

Definiție

Laticea mărginită cu un singur element (adică laticea mărginită cu $0 = 1$) se numește *laticea mărginită trivială*.
Orice latice mărginită de cardinal strict mai mare decât 1 (adică orice latice mărginită în care $0 \neq 1$) se numește *latice mărginită netrivială*.

Remarcă

Este evident că orice latice finită nevidă L este mărginită, pentru că existența infimumurilor și a supremumurilor submulțimilor lui L cu unul sau două elemente implică existența infimumurilor și a supremumurilor tuturor submulțimilor finite nevide ale lui L, după cum se poate deduce ușor din demonstrația teoremei privind echivalența celor două definiții ale laticii (a se vedea cursul anterior): pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $x_1, \ldots, x_n \in L$,

$$\sup\{x_1, \ldots, x_n\} = \begin{cases} x_1, & n = 1, \\ \sup\{\sup\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, x_n\}, & n > 1, \end{cases}$$ și

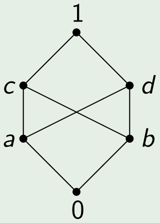
$$\inf\{x_1, \ldots, x_n\} = \begin{cases} x_1, & n = 1, \\ \inf\{\inf\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, x_n\}, & n > 1. \end{cases}$$

În consecință, dacă o latice L este finită și nevidă, atunci întreaga mulțime ordonată L are infimum și supremum, care, desigur, aparțin lui L, deci sunt minim și respectiv maxim pentru L.

Latici mărginite

Exemplu

Nu orice poset finit, nevid și mărginit este latice, după cum arată acest exemplu, cunoscut din cursurile anterioare:



Amintim că submulțimea $\{a, b\}$ nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților săi este $\{c, d, 1\}$, care nu are minim, iar submulțimea $\{c, d\}$ nu are infimum, pentru că mulțimea minoranților săi este $\{0, a, b\}$, care nu are maxim.

Remarcă

Este imediat că, în orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, pentru orice element $x \in L$, întrucât $0 \leq x \leq 1$, rezultă că avem: $x \wedge 0 = \inf\{x, 0\} = \min\{x, 0\} = 0$ și, cu demonstrații similare, $x \vee 0 = x$, $x \wedge 1 = x$ și $x \vee 1 = 1$.

Principiul dualității pentru latici mărginite

Conform **Principiului dualității pentru poseturi**, 0 și 1 sunt noțiuni duale într–o latice mărginită, iar acest fapt, împreună cu **Principiul dualității pentru latici**, ne dă **Principiul dualității pentru latici mărginite**: *orice rezultat privind o latice mărginită arbitrară* $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ *rămâne valabil dacă în el interschimbăm* $\vee$ *cu* $\wedge$, $\leq$ *cu* $\geq := \leq^{-1}$ *și* 0 *cu* 1.

Ca și la **Principiul dualității pentru poseturi** și la **Principiul dualității pentru latici**, este esențial ca laticea mărginită să fie **arbitrară**, adică acest principiu se referă **în mod strict** la rezultate valabile în **toate** laticile mărginite.

Motivul valabilității acestui principiu este faptul că, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o latice mărginită, atunci, după cum arată **Principiul dualității pentru poseturi** și **Principiul dualității pentru latici**, $(L, \wedge, \vee, \geq, 1, 0)$ este, de asemenea, o latice mărginită, numită *duala* laticii mărginite $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$.

Este evident că duala dualei unei latici mărginite $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este chiar $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$.

De acum încolo, atunci când vom face apel la **Principiul dualității pentru latici mărginite**, vom scrie, simplu, "prin dualitate".

Complementul unui element într–o latice mărginită

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ latice mărginită.
Un element $x \in L$ se zice *complementat* ddacă există un element $y \in L$ a. î. $x \vee y = 1$ și $x \wedge y = 0$.
Un astfel de element y se numește *complement al lui* x.
O latice mărginită se zice *complementată* ddacă toate elementele sale sunt complementate.

Remarcă

În mod evident, dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită și $x, y \in L$ sunt a. î. y este un complement al lui x, atunci x este un complement al lui y, după cum arată comutativitatea lui $\vee$ și $\wedge$.

Remarcă

Este imediat faptul că, în orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și niciunul dintre ele nu are alte complemente, pentru că, dacă $a \in L$ este un complement al lui 0, atunci $a = a \vee 0 = 1$, iar, dacă $b \in L$ este un complement al lui 1, atunci $b = b \wedge 1 = 0$.

Latici distributive

Amintim:

Propoziție

În orice latice $(L, \vee, \wedge)$*, următoarele două afirmații, numite* legile de distributivitate, *sunt echivalente:*

(d_1) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(d_2) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Definiție

O latice se zice *distributivă* ddacă satisface una (și deci pe amândouă) dintre condițiile (d_1) și (d_2) din propoziția precedentă.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite

Remarcă

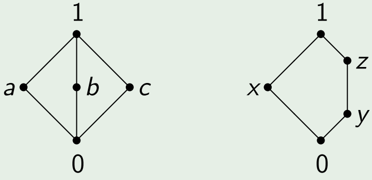
În orice latice distributivă mărginită, complementul unui element, dacă există, este unic.
Într–adevăr, fie $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ o latice distributivă mărginită și $x, a, b \in L$ a. î. a și b sunt complemente ale lui x, adică:

$$\begin{cases} x \vee a = 1 \\ x \wedge a = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x \vee b = 1 \\ x \wedge b = 0 \end{cases}$$

Atunci, conform relațiilor de mai sus (care dau definiția unui complement), distributivității lui L și commutativității lui $\wedge$,
$a = a \wedge 1 = a \wedge (x \vee b) = (a \wedge x) \vee (a \wedge b) = (x \wedge a) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b$, deci $a = a \wedge b$, ceea ce înseamnă că $a \leq b$ (a se vedea teorema privind echivalența celor două definiții ale noțiunii de latice).
Interschimbând a și b în șirul de egalități de mai sus, obținem $b = b \wedge a$, deci $b \leq a$.
Prin urmare $a = b$, conform antisimetriei relației de ordine $\leq$.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite

Exemplu



diamantul *pentagonul*

Aceste două latici mărginite nu sunt distributive.
Într–adevăr, în diamant, fiecare două dintre elementele a, b, c sunt complemente ale celui de–al treilea.
Iar, în pentagon, y și z sunt complemente ale lui x.
Deci aceste două latici mărginite nu satisfac proprietatea de unicitate a complementului, așadar nu sunt distributive, conform remarcii de mai sus.

Cele două latici mărginite nedistributive din exemplul anterior oferă o caracterizare a laticilor distributive, pe care o vom vedea mai târziu, în acest curs.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție.
f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.
f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge)$ și $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici și $f : L \rightarrow M$ o funcție.
f se numește *morfism de latici* ddacă f comută cu operațiile de latici, i. e.: pentru orice $x, y \in L$,

1. $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
   și
2. $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$.

Un morfism de latici de la o latice la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Remarcă

Orice morfism de latici este funcție izotonă.
Într–adevăr, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ sunt două latici și $f : L \rightarrow M$ este un morfism de latici, atunci, pentru orice $x, y \in L$ a. î. $x \leq y$, ceea ce este echivalent cu $x \vee y = y$, avem: $f(x) \sqcup f(y) = f(x \vee y) = f(y)$, așadar $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ două latici mărginite și $f : L \rightarrow M$ o funcție.
f se numește *morfism de latici mărginite* ddacă este morfism de latici și $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$.
Un morfism de latici mărginite de la o latice mărginită la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici mărginite.

Remarcă (temă pentru acasă)

Compunerea a două funcții izotone (respectiv morfisme de latici, respectiv morfisme de latici mărginite) este o funcție izotonă (respectiv un morfism de latici, respectiv un morfism de latici mărginite).
Demonstrația se face prin aplicarea definițiilor acestor noțiuni.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție

Un *izomorfism de latici (mărginite)* este un morfism de latici (mărginite) inversabil, i. e. un morfism de latici (mărginite) care este o funcție inversabilă a cărei inversă este tot un morfism de latici (mărginite).
Un *automorfism de latici (mărginite)* este un izomorfism de latici (mărginite) între o latice (mărginită) și ea însăși (adică un endomorfism de latici (mărginite) inversabil).

Definiție

Două latici (mărginite) între care există un izomorfism de latici (mărginite) se zic *izomorfe*.
În general, oricare două structuri algebrice de același tip între care există un izomorfism se vor zice *izomorfe*.

Propoziție

O funcție între două latici (mărginite) este un izomorfism de latici (mărginite) ddacă este un morfism bijectiv de latici (mărginite), adică un morfism de latici (mărginite) care este funcție bijectivă.
Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici (mărginite) este, de asemenea, un morfism de latici (mărginite).

Funcții izotone versus morfisme de latici

Demonstrație: Implicația directă este imediată, pentru că, așa cum sugerează enunțul, orice izomorfism de latici (mărginite) este simultan un morfism de latici (mărginite) și o funcție inversabilă, deci bijectivă.
Reciproc, fie $(L, \vee, \wedge)$ și $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici și $f : L \rightarrow M$ un morfism bijectiv de latici. Să demonstrăm că, în aceste ipoteze, rezultă că f este un izomorfism de latici.
f este, așadar, o funcție bijectivă, deci inversabilă. Fie $f^{-1} : M \rightarrow L$ inversa funcției f.
Fie $a, b \in M$. f este bijectivă, deci surjectivă, deci există $x, y \in L$ a. î. $f(x) = a$ și $f(y) = b$. Aplicând f^{-1} în ambii membri ai fiecăreia dintre aceste două egalități, obținem: $f^{-1}(a) = f^{-1}(f(x)) = x$ și $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(y)) = y$.
Rezultă că
$f^{-1}(a \sqcup b)^{=} f^{-1}(f(x) \sqcup f(y)) = f^{-1}(f(x \vee y)) = x \vee y = f^{-1}(a) \vee f^{-1}(b)$. Prin dualitate, rezultă că avem și: $f^{-1}(a \sqcap b) = f^{-1}(a) \wedge f^{-1}(b)$. Așadar f^{-1} este morfism de latici, prin urmare f este un morfism de latici inversabil cu inversa morfism de latici, i. e. f este un izomorfism de latici.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ sunt latici mărginite și $f : L \rightarrow M$ este un morfism bijectiv de latici mărginite, atunci:

- f este un morfism bijectiv de latici, prin urmare, conform celor de mai sus, inversa $f^{-1} : M \rightarrow L$ a lui f este un morfism de latici;
- în plus, conform definiției unui morfism de latici mărginite, $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$, deci $f^{-1}(\perp) = f^{-1}(f(0)) = 0$ și $f^{-1}(\top) = f^{-1}(f(1)) = 1$, așadar f^{-1} este un morfism de latici mărginite.

Așadar, f este un morfism de latici mărginite inversabil cu inversa morfism de latici mărginite, i. e. f este un izomorfism de latici mărginite.

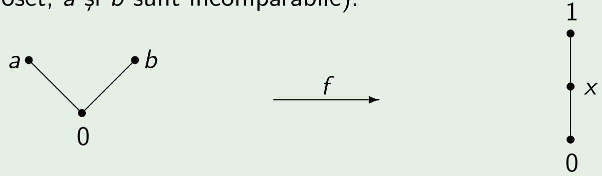
Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă.

Exemplu

Funcția f între următoarele două poseturi (pe care le notăm $(\{0, a, b\}, \leq)$ și $(\{0, x, 1\}, \sqsubseteq)$, respectiv), dată prin $f(0) = 0$, $f(a) = x$ și $f(b) = 1$, este izotonă și bijectivă, dar inversa ei, care are valorile: $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(x) = a$ și $f^{-1}(1) = b$, nu este izotonă, pentru că $x \sqsubseteq 1$ în al doilea poset, dar $f^{-1}(x) = a \nleq b = f^{-1}(1)$ (în primul poset, a și b sunt incomparabile).



Propoziție

O funcție între două latici este izomorfism de latici ddacă este izomorfism de ordine (între poseturile subiacente celor două latici).

Demonstrație: Implicația directă rezultă din definiția unui izomorfism de latici și faptul că orice morfism de latici este funcție izotonă.
Reciproc, fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ două latici și $f : L \rightarrow M$ un izomorfism de ordine între poseturile $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$, adică f este o funcție izotonă bijectivă, iar inversa ei, $f^{-1} : M \rightarrow L$, este, de asemenea, izotonă.
Fie $a, b \in L$, arbitrare, fixate. Demonstrăm că $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.
$a \vee b = \sup\{a, b\}$, iar $a \leq \sup\{a, b\}$ și $b \leq \sup\{a, b\}$.
Așadar, $a \leq a \vee b$ și $b \leq a \vee b$, iar f este izotonă, prin urmare $f(a) \sqsubseteq f(a \vee b)$ și $f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$, deci $f(a \vee b)$ este un majorant al submulțimii $\{f(a), f(b)\}$ a lui $(M, \sqsubseteq)$, prin urmare $\sup\{f(a), f(b)\} \sqsubseteq f(a \vee b)$, conform definiției supremumului.
Dar $f(a) \sqcup f(b) = \sup\{f(a), f(b)\}$, deci $f(a) \sqcup f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$.
De aici, demonstrația poate continua în mai multe moduri.
De exemplu, să notăm cu $u := f(a) \sqcup f(b) \in M$, pentru comoditatea scrierii în cele ce urmează.
Cu această notație, ultima relație de mai sus devine: $u \sqsubseteq f(a \vee b)$.
Au loc: $f(a) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$ și
$f(b) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$, deci $f(a) \sqsubseteq u$ și $f(b) \sqsubseteq u$.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Ipoteza că f^{-1} este izotonă și ultimele două relații de mai sus implică $a = f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(u)$ și $b = f^{-1}(f(b)) \leq f^{-1}(u)$, deci $f^{-1}(u)$ este majorant pentru submulțimea $\{a, b\}$ a lui $(L, \leq)$.
Acum aplicăm din nou definiția supremumului, și obținem:
$a \vee b = \sup\{a, b\} \leq f^{-1}(u)$.
Prin urmare, întrucât f este izotonă, avem: $f(a \vee b) \sqsubseteq f(f^{-1}(u)) = u$.
În relația $f(a \vee b) \sqsubseteq u$, pe care tocmai am demonstrat–o, înlocuim $u = f(a) \sqcup f(b)$ conform notației de mai sus, și obținem $f(a \vee b) \sqsubseteq f(a) \sqcup f(b)$.
Așadar, $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.
Prin dualitate, rezultă că și $f(a \wedge b) = f(a) \sqcap f(b)$.
Ultimele două egalități arată că f este un morfism de latici.
Dar, prin ipoteză, f este o funcție inversabilă, deci bijectivă.
Deci f este un morfism bijectiv de latici, așadar, conform propoziției anterioare, rezultă că f este un izomorfism de latici.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Remarcă

Fie $(L, \leq)$ un lanț (adică o mulțime total ordonată, adică o mulțime liniar ordonată). Atunci, pentru orice $a, b \in L$, $a \nleq b$ implică $b < a$, unde $<:=\leq \setminus \Delta_L$ este ordinea strictă asociată lui $\leq$. Într–adevăr, pentru orice $a, b \in L$, faptul că $(L, \leq)$ este lanț implică $a \leq b$ sau $b \leq a$, așadar, dacă $a \nleq b$, atunci $b \leq a$ și $a \neq b$, prin urmare $b < a$.

Exercițiu (temă pentru seminar)

Fie $f : L \rightarrow M$ o funcție bijectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$. Arătați că, dacă $(L, \leq)$ este lanț, atunci inversa lui f, f^{-1}, este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.

Indicație: aplicați metoda reducerii la absurd, remarca anterioară și injectivitatea funcției din enunț.

Exercițiu (temă pentru seminar)

Fie $f : L \rightarrow M$ o funcție surjectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$. Arătați că, dacă $(L, \leq)$ este lanț, atunci $(M, \sqsubseteq)$ este lanț.

Sublatici și sublatici mărginite

Definiție

Dată o latice $(L, \vee, \wedge)$, o submulțime M a lui L se numește *sublatice a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$.

Dată o latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, o submulțime M a lui L se numește *sublatice mărginită a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice mărginită ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$;
- $0, 1 \in M$.

Sublatici și sublatici mărginite

Remarcă

Este imediat că o sublatice (mărginită) M a unei latici (mărginite) L este o latice (mărginită) cu operațiile *induse* pe M de operațiile lui L, adică restricțiile operațiilor lui L la M:

- restricția lui $\vee$ la M este operația binară $\sqcup$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcup y := x \vee y$;
- restricția lui $\wedge$ la M este operația binară $\sqcap$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcap y := x \wedge y$;
- pentru latici mărginite:
  - restricția lui 1 la M la M este 1 (aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente);
  - restricția lui 0 la M la M este 0 (și aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente).

Operațiile induse se notează, de obicei, la fel ca operațiile laticii L:

- operația $\sqcup$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\vee$;
- operația $\sqcap$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\wedge$;
- în cazul laticilor mărginite, primul și ultimul element al sublaticii mărginite M, ca prim și, respectiv, ultim element al laticii mărginite M, se notează, de obicei tot cu 0 și 1, respectiv.

Sublatici și sublatici mărginite

Remarcă

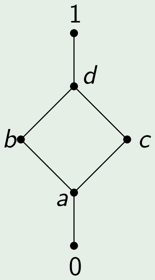
Cu notațiile din remarca anterioară, este trivial că ordinea parțială a unei sublatici M a lui L (ca latice cu operațiile induse de cele ale lui L) este exact ordinea parțială a lui L restricționată la M, care (amintim) se notează, în mod uzual, la fel ca ordinea parțială a lui L:

- notând cu $\sqsubseteq$ ordinea laticii M, pentru orice $x, y \in M$, avem: $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \sqcup y = y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \leq y$;
- deci ordinea $\sqsubseteq$ a laticii M este, într–adevăr, restricția lui $\leq$ la M, și $\sqsubseteq$ se notează, de obicei, tot cu $\leq$.

Sublatici și sublatici mărginite

Exemplu

Fie L laticea mărginită dată de următoarea diagramă Hasse:



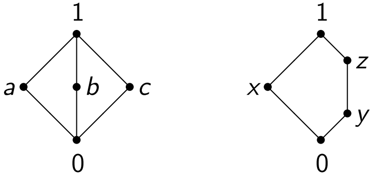
Se observă, direct din această diagramă Hasse, că submulțimea $M := \{a, b, c, d\}$ este o **sublatice** a lui L, pentru că este închisă la infimumurile și supremumurile perechilor de elemente ale ei.
Evident, M este o **latice mărginită**, cu primul element a și ultimul element d.
Dar $0, 1 \notin M$ (primul și ultimul element din L nu aparțin lui M), așadar M **nu** este o **sublatice mărginită** a lui L.

Caracterizare a laticilor distributive

Remarcă

Este evident că orice sublatice a unei latici distributive este distributivă.

Amintim că următoarele două latici nu sunt distributive.



Propoziție

O latice L este distributivă ddacă nu are nicio sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul.

Observație

Demonstrația propoziției anterioare se găsește în *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*, de Sergiu Rudeanu, precum și în cele două cărți de D. Bușneag și D. Piciu din bibliografia din primul curs.

Această demonstrație nu face parte din materia pentru examen.

Latici complete

Definiție

O latice $(L, \leq)$ se zice *completă* ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, există $\inf(A)$ și $\sup(A)$ în posetul $(L, \leq)$.

Pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ se mai notează cu $\bigwedge_{x \in A} x$, iar $\sup(A)$ se mai notează cu $\bigvee_{x \in A} x$.

Exemplu

- Pentru orice mulțime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, T)$ este mărginită, distributivă și completă.
- Laticea $((0,1) \subset \mathbb{R}, \max, \min)$ nu este mărginită, este distributivă (fiind lanț, i. e. mulțime total ordonată) și nu este completă (de exemplu, nu există în $(0,1)$ $\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$).

Latici complete

Remarcă

- Orice latice completă $(L, \leq)$ este mărginită, pentru că există $\inf(L) \in L$ și $\sup(L) \in L$, deci acestea sunt respectiv $\min(L) = 0$ și $\max(L) = 1$, cu notația clasică pentru primul și ultimul element al unei latici.
- Orice latice finită și nevidă este completă, pentru că, după cum am demonstrat mai sus, orice latice nevidă conține infimumurile și supremumurile tuturor submulțimilor sale finite și nevide și, în plus, orice latice finită și nevidă are prim și ultim element, iar acestea sunt, respectiv, supremumul și infimumul mulțimii vide. Într–adevăr, pentru orice poset mărginit $(L, \leq, 0, 1)$, $\sup(\emptyset) \stackrel{\text{definiție}}{=} \min\{x \mid x \in L, \text{ a. î. } (\forall y)(y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x)\} = \min\{x \mid x \in L\} = \min(L) = 0$, pentru că, oricare ar fi un element y, afirmația $y \in \emptyset$ este falsă, și deci implicația $y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x$ este adevărată pentru orice element x. Dual, $\inf(\emptyset) = \max(L) = 1$.
- De fapt, calculul anterior arată că, într–un poset $(L, \leq)$, $\sup(\emptyset)$ există ddacă $\min(L)$ există, și, dacă acestea există, atunci sunt egale. Dual, la fel se întâmplă pentru $\inf(\emptyset)$ și $\max(L)$.

Latici complete

Următoarea propoziție arată că, în definiția unei latici complete, este suficient să impunem condiția existenței infimumurilor tuturor submulțimilor laticii, și, de asemenea, este suficient să impunem condiția existenței supremumurilor tuturor submulțimilor laticii.

Propoziție

Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în L;*
2. *pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în L.*

Demonstrație: Condiția (1) aplicată lui $A := L$ spune că $(L, \leq)$ are minim, iar condiția (2) aplicată lui $A := L$ spune că $(L, \leq)$ are maxim. Deci, dacă $(L, \leq)$ satisface una dintre condițiile (1) și (2), atunci L este nevidă.
În cele ce urmează, vom considera L nevidă.

Latici complete

$(1) \Rightarrow (2)$: Ipoteza acestei implicații, anume existența în $(L, \leq)$ a infimumurilor tuturor submulțimilor lui L, implică faptul că:

- în $(L, \leq)$ există $\inf(\emptyset) = \max(L)$, conform remarcii anterioare; deci $(L, \leq)$ are maxim;
- în $(L, \leq)$ există $\inf(L) = \min(L)$; deci $(L, \leq)$ are minim.

Conform remarcii anterioare, rezultă că în $(L, \leq)$ există $\sup(\emptyset) = \min(L)$.
Fie, acum, $\emptyset \neq A \subseteq L$ și $M := \{m \in L \mid (\forall x \in A) x \leq m\} \subseteq L$, i. e. M este mulțimea majoranților lui A. $M \neq \emptyset$, pentru că $\max(L) \in M$.
Faptul că $(L, \leq)$ satisface condiția (1) arată că există $s := \inf(M) \in L$.
Pentru orice $x \in A$ și orice $y \in M$, are loc $x \leq y$, conform definiției mulțimii M. Deci orice element x al mulțimii nevide A este minorant al lui M. Definiția infimumului arată acum că $x \leq \inf(M) = s$, oricare ar fi $x \in A$. Deci $s = \inf(M)$ este un majorant al lui A, adică $s = \inf(M) \in M$, conform definiției lui M. Dar $s = \inf(M) \in M$ înseamnă că $s = \min(M)$, adică s este cel mai mic majorant al lui A, adică $s = \sup(A)$, conform definiției supremumului.
$(2) \Rightarrow (1)$: Rezultă, prin dualitate, din prima implicație.