Geometrie - examen

1. a) Definiţi noţiunea de susbpaţiu afin. **(5 puncte).**
b) În $\mathbb{R}^3$ (cu structura canonică de spaţiu afin) considerăm punctele $A_1 = (1,0,2), A_2 = (2,3,\alpha)$ şi $B_1 = (2,3,0), B_2 = (1,1,3), B_3 = (0,0,5)$ (unde $\alpha \in \mathbb{R}$). Determinaţi α astfel încât $(A_1A_2) \cap (B_1B_2B_3) = \emptyset$. **(10 puncte).**
c) Există spaţii afine $\mathcal{A}$ care au subspaţii afine $d, \pi \subset \mathcal{A}$ astfel încât $dim(d) = 1, dim(\pi) = 2, d \cap \pi = \emptyset$ dar d nu este paralelă cu π? Justificaţi răspunsul dat. **(5 puncte).**

2. a) Definiţi noţiunea de transformare afină. **(5 puncte).**
b) Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ cu str. canonică de spaţiu afin şi funcţia $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \tau(X) = AX + B$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Fie $\pi \subset \mathcal{A}$ planul de ecuaţie $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Determinaţi $\tau(\pi)$ şi decideţi dacă $\tau(\pi)||\pi$. **(15 puncte).**
c) Daţi exemplu de o dreaptă $d \subset \mathcal{A}$ astfel încât $\tau(d)||d$. **(5 puncte).**

3. a) Definiţi noţiunea de spaţiu afin euclidian. **(5 puncte).**
b) În $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ inzestrat cu str. canonică de spaţiu afin euclidian se consideră punctele $O = (0,0,0), A = (2,0,0), B = (0,2,0), C = (\alpha, \beta, 0)$ şi planul $\pi :\ x_1+x_2+x_3-8 = 0$. Găsiţi valorile lui $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ precum şi un punct $V \in \pi$ astfel încât $VOABC$ să fie piramidă patrulateră regulată. **(15 puncte).**
c) Pentru $C = (2,2,0)$, există un plan π astfel încât pentru orice $V \in \pi$, piramida $VOABC$ nu este regulată? Justificare. **(5 puncte).**

4. a) Definiţi noţiunea de plan proiectiv. **(5 puncte).**

b) Fie X este un plan proiectiv, $d_1 \neq d_2$ drepte în X şi $O \in X \setminus d_1 \cup d_2$. Definim $f : d_1 \to d_2$ prin $f(P) = P'$ unde $\{P'\} = OP \cap d_2$. Arătaţi că f este corect definită şi bijecţie. **(10 puncte).**

c) Arătaţi că dacă X este un plan proiectiv ce conţine o dreaptă d de cardinal finit, $card(d) = n$ atunci X este finit şi avem $card(X) = n^2 - n + 1$. **(5 puncte).**

Toate subiectele sunt obligatorii. Din oficiu: 10 puncte. Nota $= [\frac{Punctaj}{10}]$.