Mecanică Generală

IV. Dinamica punctului material - 3

Liviu Marin[1,†]

[1]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, România

[†]E-mail: marin.liviu@gmail.com

3 decembrie 2013

Propoziţie (ecuaţia de mişcare relativă)

Fie $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}\big)$ un reper absolut şi $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\le \alpha\le 3}\big)$ un reper relativ.

Fie $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{E}$ un punct mobil. Atunci ecuaţiile de mişcare în raport cu reperul relativ $\mathcal{R}$ sunt date de:

$$\boxed{m\,\vec{\mathbf{a}}_r(t) = \vec{\mathbf{F}}(t) + \vec{\mathbf{F}}_t(t) + \vec{\mathbf{F}}_c(t)} \tag{1}$$

unde:

(i) $\vec{\mathbf{a}}_r(t) = \dfrac{\delta \vec{\mathbf{v}}_r(t)}{\delta t} = \dfrac{\delta^2 \vec{\rho}(t)}{\delta t^2}$ este acceleraţia relativă (în $\mathcal{R}$);

(ii) $\vec{\mathbf{F}}(t) = m\,\vec{\mathbf{a}}(t)$ este forţa absolută (propriu-zisă) (în $\mathcal{R}_A$);

(iii) $\vec{\mathbf{F}}_t(t) = -m\,\vec{\mathbf{a}}_t(t)$ este forţa de transport (în $\mathcal{R}$),
$\vec{\mathbf{a}}_t(t) = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \vec{\omega}(t)\times\big(\vec{\omega}(t)\times\vec{\rho}(t)\big) + \dot{\vec{\omega}}(t)\times\vec{\rho}(t)$;

(iv) $\vec{\mathbf{F}}_c(t) = -m\,\vec{\mathbf{a}}_c(t)$ este forţa lui Coriolis (în $\mathcal{R}$),
$\vec{\mathbf{a}}_c(t) = 2\vec{\omega}(t)\times\vec{\mathbf{v}}_r(t)$.

Demonstraţie:

Din ecuaţiile de mişcare în raport cu reperul absolut $\mathcal{R}_A$ şi formula de compunere a acceleraţiilor:

$$\vec{\mathbf{a}}(t) = \vec{\mathbf{a}}_r(t) + \vec{\mathbf{a}}_t(t) + \vec{\mathbf{a}}_c(t)$$

obţinem formula (1), i.e.

$$\underbrace{m\,\vec{\mathbf{a}}_r(t)}_{=:\vec{\mathbf{F}}_r(t)} = \underbrace{m\,\vec{\mathbf{a}}(t)}_{=:\vec{\mathbf{F}}(t)} + \underbrace{\big[-m\,\vec{\mathbf{a}}_t(t)\big]}_{=:\vec{\mathbf{F}}_t(t)} + \underbrace{\big[-m\,\vec{\mathbf{a}}_c(t)\big]}_{=:\vec{\mathbf{F}}_c(t)}$$

S-au folosit notaţiile:

(i) $\vec{\mathbf{a}}_r(t) = \dfrac{\delta \vec{\mathbf{v}}_r(t)}{\delta t} = \dfrac{\delta^2 \vec{\rho}(t)}{\delta t^2}$ este acceleraţia relativă (în $\mathcal{R}$);

(ii) $\vec{\mathbf{a}}_t(t) = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \vec{\omega}(t)\times\big(\vec{\omega}(t)\times\vec{\rho}(t)\big) + \dot{\vec{\omega}}(t)\times\vec{\rho}(t)$ este acceleraţia de transport (în $\mathcal{R}$);

(iii) $\vec{\mathbf{a}}_c(t) = 2\vec{\omega}(t)\times\vec{\mathbf{v}}_r(t) = 2\vec{\omega}(t)\times\dfrac{\delta\vec{\rho}(t)}{\delta t}$ este acceleraţia lui Coriolis (în $\mathcal{R}$);

(iv) $\vec{\omega}(t)$ este vectorul rotaţiei instantanee

$$\dot{\vec{\varepsilon}}_\alpha(t) = \vec{\omega}(t)\times\vec{\varepsilon}_\alpha(t), \quad 1\le\alpha\le 3 \qquad \square$$

Observaţii:

(i) Forţa de transport, $\vec{\mathbf{F}}_t$, şi forţa lui Coriolis, $\vec{\mathbf{F}}_c$, se numesc forţe complementare şi sunt de natură inerţială, i.e. sunt datorate mişcării reperului relativ $\mathcal{R}$.

(ii) Forţa de transport, $\vec{\mathbf{F}}_t$, şi forţa lui Coriolis, $\vec{\mathbf{F}}_c$, sunt forţe reale pentru observatorul din reperul relativ $\mathcal{R}$ şi nu sunt forţe reale pentru observatorul din reperul absolut $\mathcal{R}_A$.

Definiţie (echilibru relativ)

O poziţie relativă $\vec{\rho}(t_0) = \vec{\rho}_0$ se numeşte poziţie de echilibru relativ (faţă de reperul $\mathcal{R}$) pentru punctul material $\mathbf{P}\in\mathcal{E}$ dacă

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_r(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\ t\ge t_0} \tag{2}$$

Propoziție (condiția necesară de echilibru relativ)

Condiția necesară de echilibru relativ al punctului material $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ (față de reperul relativ $\mathcal{R}$)

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}}(t) + \vec{\mathbf{F}}_t(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\ t \geq t_0} \tag{3}$$

Demonstrație:

Dacă punctul material $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ este în poziție de echilibru relativ (față de reperul $\mathcal{R}$), atunci

$$\vec{\mathbf{v}}_r(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\ t \geq t_0$$

si, în consecință

$$\vec{\mathbf{a}}_r(t) = \frac{\delta \vec{\mathbf{v}}_r(t)}{\delta t} = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\ t \geq t_0$$

Prin urmare, obținem

$$\vec{\mathbf{F}}_r(t) = m\,\vec{\mathbf{a}}_r(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\ t \geq t_0$$

și

$$\vec{\mathbf{F}}_c(t) = -m\,\vec{\mathbf{a}}_c(t) = -2\,m\,\vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{v}}_r(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\ t \geq t_0$$

Din propoziția referitoare la ecuația de mişcare relativă, rezultă (3). □

Teoremă

Fie $\mathcal{R}_A\big(\mathbf{O}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\leq i\leq 3}\big)$ un reper absolut și $\mathcal{R}\big(\mathbf{O}', \{\vec{\varepsilon}_\alpha(t)\}_{1\leq \alpha\leq 3}\big)$ un reper relativ.

Atunci ecuațiile de mişcare sunt invariante (ca lege) în raport cu reperul relativ $\mathcal{R}$ dacă și numai dacă $\mathcal{R}$ este inerțial.

Demonstrație:

$\Longrightarrow$: Dacă reperul relativ $\mathcal{R}$ este inerțial, atunci

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \vec{\mathbf{v}}_r(t) = \vec{\mathbf{v}}_{r0}, \quad \vec{\omega}(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\ t \geq t_0$$

Obținem:

$$\vec{\mathbf{a}}_t(t) = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times \big(\vec{\omega}(t) \times \vec{\rho}(t)\big) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{\rho}(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\ t \geq t_0$$

$$\vec{\mathbf{a}}_c(t) = 2\vec{\omega}(t) \times \vec{\mathbf{v}}_r(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\ t \geq t_0$$

de unde rezultă relația:

$$\vec{\mathbf{F}}_t(t) = \vec{\mathbf{F}}_c(t) = \vec{\mathbf{0}}, \quad \forall\ t \geq t_0.$$

Prin urmare, obținem:

$$\vec{\mathbf{F}}_r(t) := m\,\vec{\mathbf{a}}_r(t) = m\,\vec{\mathbf{a}}(t) =: \vec{\mathbf{F}}(t), \quad \forall\ t \geq t_0.$$

$\Longleftarrow$: Presupunem că ecuațiile de mişcare sunt invariante (ca lege).

Atunci:

$$m\,\vec{\mathbf{a}}(t) = \vec{\mathbf{F}}(t)\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \quad (\text{în } \mathcal{R}_A) \tag{4a}$$

$$m\,\vec{\mathbf{a}}_r(t) = \vec{\mathbf{F}}(t)\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \quad (\text{în } \mathcal{R}) \tag{4b}$$

Cum

$$m\,\vec{\mathbf{a}}_r(t) = \vec{\mathbf{F}}(t) + \vec{\mathbf{F}}_t(t) + \vec{\mathbf{F}}_c(t) \tag{5}$$

din relația (4b) rezultă că $\forall\ t \longmapsto \vec{\rho}(t)$:

$$\vec{\mathbf{F}}_t(t) + \vec{\mathbf{F}}_c(t) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{6a}$$

i.e.

$$\vec{\mathbf{a}}_t(t) + \vec{\mathbf{a}}_c(t) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{6b}$$

Mai mult, $\forall\ t \longmapsto \vec{\rho}(t)$ au loc relațiile:

$$\vec{\mathbf{a}}_t(t) = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times \big(\vec{\omega}(t) \times \vec{\rho}(t)\big) + \dot{\vec{\omega}}(t) \times \vec{\rho}(t)\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{7a}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_c(t) = 2\vec{\omega}(t) \times \frac{\delta \vec{\rho}(t)}{\delta t}\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{7b}$$

- Fie punctul material $\mathbf{P}\big(\vec{\rho}(t)\big)$ fixat în $\mathcal{R}$: $t \longmapsto \vec{\rho}(t) = \vec{\rho}_0, \quad \forall\ t \geq t_0$

$$\Longrightarrow \frac{\delta \vec{\rho}(t)}{\delta t} = \vec{\mathbf{v}}_r(t) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\ t \geq t_0$$

Din relația (7b), rezultă:

$$\vec{\mathbf{a}}_c(t) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\ t \geq t_0\,, \quad \forall\ \vec{\rho}_0 \in \mathcal{V} \tag{8}$$

Din ecuațiile (6b) și (8), obținem:

$$\vec{\mathbf{a}}_t(t) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\ t \geq t_0\,, \quad \forall\ \vec{\rho}_0 \in \mathcal{V} \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_t(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\vec{\mathbf{v}}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{\rho}(t)\big] = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\ t \geq t_0\,, \quad \forall\ \vec{\rho}_0 \in \mathcal{V}$$

Rezultă:

$$\vec{\mathbf{v}}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{\rho}(t) = \vec{\mathbf{v}}_0(t_0) + \vec{\omega}(t_0) \times \vec{\rho}(t_0)\,, \quad \forall\ t \geq t_0\,, \quad \forall\ \vec{\rho}_0 \in \mathcal{V}$$

i.e.

$$\vec{\mathbf{v}}_0(t) - \vec{\mathbf{v}}_0(t_0) = -\big[\vec{\omega}(t) - \vec{\omega}(t_0)\big] \times \vec{\rho}_0\,, \quad \forall\ t \geq t_0\,, \quad \forall\ \vec{\rho}_0 \in \mathcal{V} \tag{10}$$

- Fie punctul material $\mathbf{P}(\vec{\rho}(t))$ fixat în $\mathcal{R}$, solidar cu $\vec{\varepsilon}_1$:

$$t \longmapsto \vec{\rho}(t) = \vec{\rho}_0 = s\,\vec{\varepsilon}_1\,, \quad \forall\, t \geq t_0\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$$

Relația (10), scrisă în baza $\{\vec{\varepsilon}_\alpha\}_{1\leq\alpha\leq 3}$ a reperului relativ $\mathcal{R}$, devine:

$$\begin{aligned}&\left(\vec{\mathbf{v}}_0(t)-\vec{\mathbf{v}}_0(t_0)\right)_1\vec{\varepsilon}_1+\left(\vec{\mathbf{v}}_0(t)-\vec{\mathbf{v}}_0(t_0)\right)_2\vec{\varepsilon}_2+\left(\vec{\mathbf{v}}_0(t)-\vec{\mathbf{v}}_0(t_0)\right)_3\vec{\varepsilon}_3\\&=-\left[\left(\vec{\omega}(t)-\vec{\omega}(t_0)\right)_1\vec{\varepsilon}_1+\left(\vec{\omega}(t)-\vec{\omega}(t_0)\right)_2\vec{\varepsilon}_2\right.\\&\quad\left.+\left(\vec{\omega}(t)-\vec{\omega}(t_0)\right)_3\vec{\varepsilon}_3\right]\times(s\,\vec{\varepsilon}_1)\quad\forall\, t\geq t_0\,,\quad\forall\, s\in\mathbb{R}\Longrightarrow\\&\left(\vec{\mathbf{v}}_0(t)-\vec{\mathbf{v}}_0(t_0)\right)_1\vec{\varepsilon}_1+\left(\vec{\mathbf{v}}_0(t)-\vec{\mathbf{v}}_0(t_0)\right)_2\vec{\varepsilon}_2+\left(\vec{\mathbf{v}}_0(t)-\vec{\mathbf{v}}_0(t_0)\right)_3\vec{\varepsilon}_3\\&=\left[\left(\vec{\omega}(t)-\vec{\omega}(t_0)\right)_2\vec{\varepsilon}_3-\left(\vec{\omega}(t)-\vec{\omega}(t_0)\right)_3\vec{\varepsilon}_2\right]s\quad\forall\, t\geq t_0\,,\quad\forall\, s\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Înmulțim scalar relația de mai sus cu $\vec{\varepsilon}_1$ și rezultă:

$$\left(\vec{\mathbf{v}}_0(t)\right)_1 = \left(\vec{\mathbf{v}}_0(t_0)\right)_1\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{11a}$$

- Fie punctul material $\mathbf{P}(\vec{\rho}(t))$ fixat în $\mathcal{R}$, solidar cu $\vec{\varepsilon}_\alpha$, $\alpha \in \{2,3\}$:

$$t \longmapsto \vec{\rho}(t) = s\,\vec{\varepsilon}_\alpha\,,\ \forall\, t \geq t_0\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \{2,3\}$$

Prin analogie cu relația (11a), obținem:

$$\left(\vec{\mathbf{v}}_0(t)\right)_\alpha = \left(\vec{\mathbf{v}}_0(t_0)\right)_\alpha\,, \quad \forall\, t \geq t_0\,, \quad \alpha \in \{2,3\} \tag{11b}$$

- Din relațiile (11a) și (11b) rezultă:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_0(t) = \vec{\mathbf{v}}_0(t_0)\,, \quad \forall\, t \geq t_0} \tag{12a}$$

și, în consecință,

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}}_0(t) = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_0(t) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0} \tag{12b}$$

Substituind (12a) în (10), obținem:

$$\left[\vec{\omega}(t) - \vec{\omega}(t_0)\right] \times \vec{\rho}_0 = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0\,, \quad \forall\, \vec{\rho}_0$$

de unde rezultă:

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(t_0)\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{13}$$

Din relațiile (12b) și (13), ecuația (7a) devine:

$$\vec{\omega}(t) \times \left(\vec{\omega}(t) \times \vec{\rho}(t)\right) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0\,, \quad \forall\, t \longmapsto \vec{\rho}(t) \tag{14}$$

și, folosind ecuația (13), obținem:

$$\vec{\omega}(t_0)\left(\vec{\omega}(t_0)\cdot\vec{\rho}(t)\right) - \vec{\rho}(t)\left(\vec{\omega}(t_0)\cdot\vec{\omega}(t_0)\right) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{15}$$

- Fie acum $t \longmapsto \vec{\rho}(t)$ cu $\vec{\omega}(t_0)\cdot\vec{\rho}(t) = 0\,,\ \forall\, t \geq t_0$.

Din (15), rezultă

$$\vec{\rho}(t)\left(\vec{\omega}(t_0)\cdot\vec{\omega}(t_0)\right) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0\,, \quad \forall\, \vec{\rho}(t)$$

adică

$$\left(\vec{\omega}(t_0)\cdot\vec{\omega}(t_0)\right) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0$$

În cele din urmă, obținem:

$$\vec{\omega}(t_0) = \vec{\mathbf{0}} \tag{16}$$

Ecuațiile (13) și (16) implică

$$\boxed{\vec{\omega}(t) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0} \tag{17}$$

Relațiile (12a), (12b) și (17) implică faptul că reperul relativ $\mathcal{R}$ este inerțial. $\square$

Teoremele generale ale mecanicii punctului material

1. Impulsul. Teorema impulsului

- Fie $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ un punct material, de masă m și vector de poziție $\vec{\mathbf{x}}(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$.

Definiție

Se numește impulsul (cantitate de mișcare; moment liniar) punctului material $\mathbf{P}$ mărimea

$$\boxed{\vec{\mathbf{H}}(t) = m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = m\,\vec{\mathbf{v}}(t)} \tag{18}$$

Teorema impulsului

Mișcarea punctului material se face a.i., la orice moment de timp t, derivata impulsului este egală cu rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material, i.e.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{H}}(t) = \vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}})} \tag{19}$$

Demonstrație: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{H}}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t)\right) = m\,\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}})$ $\square$

Corolar (integrale prime ale mişcării)

(i) Dacă $\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}$, $\forall\ t \geq t_0$, atunci punctul material are o mişcare rectilinie şi uniformă şi $\vec{\mathbf{H}}(t) = \vec{\mathbf{H}}(t_0)$, $\forall\ t \geq t_0$, reprezintă trei integrale prime ale mişcării.

(ii) Dacă $\exists\ \vec{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$ direcţie fixă a.i. $\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$, $\forall\ t \geq t_0$, atunci $\vec{\mathbf{H}}(t) \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{H}}(t_0) \cdot \vec{\mathbf{u}}$, $\forall\ t \geq t_0$, este o integrală primă a mişcării.

Demonstraţie:

(i) $\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}\,,\ \forall\ t \geq t_0 \overset{\text{Teor. impulsului}}{\Longrightarrow} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{H}}(t) = \vec{\mathbf{0}}\,,\ \forall\ t \geq t_0 \Longrightarrow$

$\vec{\mathbf{H}}(t) = \vec{\mathbf{H}}(t_0)\,, \quad \forall\ t \geq t_0$

(ii) $\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0\,,\ \forall\ t \geq t_0 \overset{\text{Teor. impulsului}}{\Longrightarrow} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{H}}(t) \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0\,,\ \forall\ t \geq t_0 \Longrightarrow$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\mathbf{H}}(t) \cdot \vec{\mathbf{u}}\right] = 0\,,\ \forall\ t \geq t_0 \Longrightarrow \vec{\mathbf{H}}(t) \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{H}}(t_0) \cdot \vec{\mathbf{u}}\,,\ \forall\ t \geq t_0 \qquad \square$

- Fie $\{\mathbf{P}_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset \mathcal{E}$ un sistem de puncte materiale $\mathbf{P_i}$, de mase m_i şi vectori de poziţie $\vec{\mathbf{x}}_i(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Definiţie

Se numeşte impulsul sistemului de puncte materiale $\{\mathbf{P}_i\}_{i=\overline{1,n}}$ mărimea

$$\boxed{\vec{\mathbf{H}}(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i(t)} \tag{20}$$

- Fie $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ un corp continuu cu densitatea de masă ρ.

Definiţie

Se numeşte impulsul corpului continuu $\mathcal{B}$ mărimea

$$\boxed{\vec{\mathbf{H}}(t) = \int_{\mathcal{B}_t \equiv k_t(\mathcal{B})} \rho(t,\vec{\mathbf{x}})\,\vec{\mathbf{v}}(t,\vec{\mathbf{x}})\,\mathrm{d}V(\vec{\mathbf{x}})} \tag{21}$$

2. Momentul cinetic. Teorema momentului cinetic

- Fie $\mathcal{B} = \{\mathbf{P}\}$ configuraţia corespunzătoare punctului material $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ de masă m şi vector de poziţie $\vec{\mathbf{x}}(t) \equiv \overrightarrow{\mathbf{OP}}(t)$.

Definiţie

Se numeşte momentul cinetic al punctului material $\mathbf{P}$ în raport cu polul $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ mărimea

$$\boxed{\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \vec{\mathbf{x}}(t) \times \vec{\mathbf{H}}(t) = \vec{\mathbf{x}}(t) \times m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \vec{\mathbf{x}}(t) \times m\,\vec{\mathbf{v}}(t)} \tag{22}$$

- Fie $\{\mathbf{P}_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset \mathcal{E}$ un sistem de puncte materiale $\mathbf{P_i}$, de mase m_i şi vectori de poziţie $\vec{\mathbf{x}}_i(t) = \overrightarrow{\mathbf{OP}}_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Definiţie

Se numeşte momentul cinetic al sistemului de puncte materiale $\{\mathbf{P}_i\}_{i=\overline{1,n}}$ în raport cu polul $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ mărimea

$$\boxed{\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{x}}_i(t) \times m_i\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{x}}_i(t) \times m_i\,\vec{\mathbf{v}}_i(t)} \tag{23}$$

- Fie $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ un corp continuu cu densitatea de masă ρ.

Definiţie

Se numeşte momentul cinetic al corpului continuu $\mathcal{B}$ în raport cu polul $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ mărimea

$$\boxed{\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \int_{\mathcal{B}_t \equiv k_t(\mathcal{B})} \vec{\mathbf{x}}(t) \times \rho(t,\vec{\mathbf{x}})\,\vec{\mathbf{v}}(t,\vec{\mathbf{x}})\,\mathrm{d}V(\vec{\mathbf{x}})} \tag{24}$$

Teorema momentului cinetic

Mişcarea punctului material se face a.i., la orice moment de timp t, derivata momentului cinetic este egală cu momentul rezultant al forţelor ce acţionează asupra punctului material, i.e.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}\left(\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}})\right)} \tag{25}$$

Demonstraţie:

$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}\left(\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}})\right) \overset{\text{def}}{=} \vec{\mathbf{x}}(t) \times \vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}) \overset{\text{Legea a II-a}}{=} \vec{\mathbf{x}}(t) \times m\,\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t)$

$= \vec{\mathbf{x}}(t) \times \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t)\right] + \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \times m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\mathbf{x}}(t) \times m\,\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t)\right] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{K}}_{\mathbf{O}}(t) \ \square$