# Curs 2

# Cuprins

# Signaturi multisortate

# Definiție

## Definiție

O signatură multisortată este o pereche $(S, \Sigma)$, unde

# Definiție

## Definiție

O signatură multisortată este o pereche $(S, \Sigma)$, unde

- $S \neq \emptyset$ este o mulțime de sorturi.

# Definiție

## Definiție

O signatură multisortată este o pereche $(S, \Sigma)$, unde

- $S \neq \emptyset$ este o mulțime de sorturi.
- $\Sigma$ este o mulțime de simboluri de operații de forma

$$\sigma : s_1 s_2 \ldots s_n \to s.$$

# Definiție

## Definiție

O signatură multisortată este o pereche $(S, \Sigma)$, unde

- $S \neq \emptyset$ este o mulțime de sorturi.
- $\Sigma$ este o mulțime de simboluri de operații de forma

$$\sigma : s_1 s_2 \dots s_n \to s.$$

  - $\sigma$ este numele operației
  - $s_1, \dots, s_n, s \in S$
  - $\langle s_1 s_2 \dots s_n, s \rangle$ este aritatea operației
  - $s_1, \dots, s_n$ sunt sorturile argumentelor
  - $s$ este sortul rezultatului
  - dacă $n = 0$, atunci $\sigma : \to s$ este simbolul unei constante

# Observații

- $S^*$ mulțimea cuvintelor finite cu elemente din $S$.

# Observații

- $S^*$ mulțimea cuvintelor finite cu elemente din $S$.
- Notații alternative pentru o signatură $(S, \Sigma)$:

# Observații

- $S^*$ mulțimea cuvintelor finite cu elemente din $S$.
- Notații alternative pentru o signatură $(S, \Sigma)$:
  - $(S, \{\Sigma_{s_1 s_2 \ldots s_n, s}\}_{s_1 s_2 \ldots s_n \in S^*, s \in S})$

# Observații

- $S^*$ mulțimea cuvintelor finite cu elemente din $S$.
- Notații alternative pentru o signatură $(S, \Sigma)$:
  - $(S, \{\Sigma_{s_1 s_2 \ldots s_n, s}\}_{s_1 s_2 \ldots s_n \in S^*, s \in S})$
  - $(S, \{\Sigma_{w,s}\}_{w \in S^*, s \in S})$
    - $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ ddacă $\sigma : w \to s$
    - $w = s_1 \ldots s_n \in S^*$

# Observații

- $S^*$ mulțimea cuvintelor finite cu elemente din $S$.
- Notații alternative pentru o signatură $(S, \Sigma)$:
  - $(S, \{\Sigma_{s_1 s_2 \ldots s_n, s}\}_{s_1 s_2 \ldots s_n \in S^*, s \in S})$
  - $(S, \{\Sigma_{w,s}\}_{w \in S^*, s \in S})$
    - $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ ddacă $\sigma : w \to s$
    - $w = s_1 \ldots s_n \in S^*$
  - $\Sigma$

# Observații

- $S^*$ mulțimea cuvintelor finite cu elemente din $S$.
- Notații alternative pentru o signatură $(S, \Sigma)$:
  - $(S, \{\Sigma_{s_1 s_2 \ldots s_n, s}\}_{s_1 s_2 \ldots s_n \in S^*, s \in S})$
  - $(S, \{\Sigma_{w,s}\}_{w \in S^*, s \in S})$
    - $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ ddacă $\sigma : w \to s$
    - $w = s_1 \ldots s_n \in S^*$
  - $\Sigma$
- Este permisă supraîncărcarea operațiilor:
  - $\sigma$ este supraîncărcată dacă $\sigma \in \Sigma_{w_1, s_1} \cap \Sigma_{w_2, s_2}$ și $\langle w_1, s_1 \rangle \neq \langle w_2, s_2 \rangle$

# Exemple

## Exemplu

$NAT = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$
- $\Sigma = \{0 : \to nat,\ succ : nat \to nat\}$

Cum arată $\Sigma = \{\Sigma_{w,s}\}_{w \in S^*, s \in S}$ în acest caz?

- $\Sigma_{\lambda,nat} = \{0\}$ și $\Sigma_{nat,nat} = \{succ\}$
- $\Sigma_{w,s} = \emptyset$, pentru orice alt $w \in S^*$ și $s \in S$

Modul în Maude:

```
fmod MYNAT-SIMPLE is
   sort Nat .
   op 0 : -> Nat .
   op succ : Nat -> Nat .
endfm
```

# Exemple

## Exemplu

$BOOL = (S, \Sigma)$

- $S = \{bool\}$
- $\Sigma = \{T : \to bool,\ F : \to bool,$
  $\neg : bool \to bool,$
  $\vee : bool\ bool \to bool,\ \wedge : bool\ bool \to bool\}$

Cum arată $\Sigma = \{\Sigma_{w,s}\}_{w \in S^*, s \in S}$ în acest caz?

- $\Sigma_{\lambda,bool} = \{T, F\}$
- $\Sigma_{bool,bool} = \{\neg\}$
- $\Sigma_{bool\ bool,bool} = \{\vee, \wedge\}$
- $\Sigma_{w,s} = \emptyset$, pentru orice alt $w \in S^*$ și $s \in S$

# Exemple

## Exemplu

$NATBOOL = (S, \Sigma)$

- $S = \{bool, nat\}$
- $\Sigma = \{T : \to bool,\ \ F : \to bool,$
  $0 : \to nat, succ : nat \to nat,$
  $\leq: nat\ nat \to bool\}$

Cum arată $\Sigma = \{\Sigma_{w,s}\}_{w \in S^*, s \in S}$ în acest caz?

- $\Sigma_{\lambda,bool} = \{T, F\}$
- $\Sigma_{\lambda,nat} = \{0\}$
- $\Sigma_{nat,nat} = \{succ\}$
- $\Sigma_{nat\ nat,bool} = \{\leq\}$
- $\Sigma_{w,s} = \emptyset$, pentru orice alt $w \in S^*$ și $s \in S$

# Exemple

## Exemplu

$STIVA = (S, \Sigma)$

- $S = \{elem, stiva\}$
- $\Sigma = \{0 : \to elem,\ \ empty : \to stiva,$
  $push : elem\ stiva \to stiva,$
  $pop : stiva \to stiva,$
  $top : stiva \to elem\}$

# Signaturi ordonat-sortate

**Definiție**

O signatură ordonat-sortată este un triplet $(S, \leq, \Sigma)$ unde

- $(S, \Sigma)$ signatură multisortată
- $(S, \leq)$ mulțime parțial ordonată
- condiția de monotonie:

$$\text{dacă } \sigma \in \Sigma_{w_1,s_1} \cap \Sigma_{w_2,s_2} \text{ atunci } w_1 \leq w_2 \Rightarrow s_1 \leq s_2$$

# Exemple

## Exemplu

$NAT = (S, \leq, \Sigma)$

- $S = \{zero, nznat, nat\}$
- $zero \leq nat,\ nznat \leq nat$
- $\Sigma = \{0 : \to zero,\ \ succ : nat \to nznat\}$

Modul în Maude:

```
fmod MYNAT is
   sorts Zero NzNat Nat .
   subsort Zero NzNat < Nat .
   op 0 : -> Zero .
   op succ : Nat -> NzNat .
endfm
```

# Exemple

### Exemplu

$STIVA = (S, \leq, \Sigma)$

- $S = \{elem, stiva, nvstiva\}$
- $elem \leq stiva, \; nvstiva \leq stiva$
- $\Sigma = \{0 : \to elem, \;\; empty : \to stiva,$
  $push : elem \; stiva \to nvstiva,$
  $pop : nvstiva \to stiva,$
  $top : nvstiva \to elem\}$

În practică se folosesc signaturi ordonat-sortate.

# Mulțimi multisortate

# Definiție

Fixăm o mulțime de sorturi $S$.

## Definiție

O mulțime $S$-sortată este o familie de mulțimi $A = \{A_s\}_{s \in S}$ indexată după $S$.

- Pentru orice sort $s \in S$, avem o mulțime $A_s$.
- Pentru orice sort $s \in S$ și $a \in A_s$, spunem că $a$ este de sort $s$.

# Exemplu

## Exemplu

- Mulțime de sorturi: $S = \{nat, bool\}$
- Mulțime S-sortată: $A = \{A_{nat}, A_{bool}\}$, unde
  - $A_{nat} = \mathbb{N}$
  - $A_{bool} = \{true, false\}$
- 1 este de sort *nat*
- *false* este de sort *bool*

- sorturi = tipuri
- elemente de sort $s$ = date de tip $s$

# Operații

Operațiile uzuale pe mulțimi sunt extinse la cazul multisortat pe componente:

- $\{A_s\}_{s\in S} \subseteq \{B_s\}_{s\in S}$ ddacă $A_s \subseteq B_s$, or. $s \in S$
- $\{A_s\}_{s\in S} \cup \{B_s\}_{s\in S} = \{A_s \cup B_s\}_{s\in S}$
- $\{A_s\}_{s\in S} \cap \{B_s\}_{s\in S} = \{A_s \cap B_s\}_{s\in S}$
- $\{A_s\}_{s\in S} \times \{B_s\}_{s\in S} = \{A_s \times B_s\}_{s\in S}$

# Funcții

Fixăm $A = \{A_s\}_{s \in S}$, $B = \{B_s\}_{s \in S}$, $C = \{C_s\}_{s \in S}$ mulțimi $S$-sortate.

**Definiție**

O funcție $S$-sortată $f : A \to B$ este o familie de funcții $f = \{f_s\}_{s \in S}$, unde $f_s : A_s \to B_s$, pt. or. $s \in S$.

- Dacă $f : A \to B$ și $g : B \to C$, definim compunerea
$$f ; g = \{(f ; g)_s\}_{s \in S} : A \to C$$
$$(f ; g)_s(a) = (f_s ; g_s)(a) = g_s(f_s(a)), \text{ or. } a \in A.$$
- Compunerea este asociativă: $(f ; g); h = f ; (g ; h)$.
- Funcția identitate: $1_A : A \to A$, $1_A = \{1_{A_s}\}_{s \in S}$.
- Observați că $f ; 1_B = f$, $1_A ; f = f$, or. $f : A \to B$.

# Funcții

- O funcție $S$-sortată $f = \{f_s\}_{s \in S} : A \to B$ se numește injectivă, (surjectivă, bijectivă) dacă $f_s$ este injectivă, (surjectivă, bijectivă), or. $s \in S$.
- O funcție $S$-sortată $f = \{f_s\}_{s \in S} : A \to B$ se numește inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $f; g = 1_A$ si $g; f = 1_B$.

# Funcții

- O funcție $S$-sortată $f = \{f_s\}_{s \in S} : A \to B$ se numește injectivă, (surjectivă, bijectivă) dacă $f_s$ este injectivă, (surjectivă, bijectivă), or. $s \in S$.
- O funcție $S$-sortată $f = \{f_s\}_{s \in S} : A \to B$ se numește inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $f; g = 1_A$ si $g; f = 1_B$.

## Propoziție

O funcție $S$-sortată $f : A \to B$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ este bijectivă.

## Demonstrație

Exercițiu!

# Algebre multisortate

# Definiție

Fixăm o signatură multisortată $(S, \Sigma)$.

## Definiție

O algebră multisortată de tip $(S, \Sigma)$ este o structură $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ unde

- $A_S = \{A_s\}_{s \in S}$ este o mulțime $S$-sortată (mulțimea suport).
- $A_\Sigma = \{A_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ este o familie de operații astfel încât
  - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ în $\Sigma$, atunci $A_\sigma : A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \to A_s$ (operație).
  - dacă $\sigma : \to s$ în $\Sigma$, atunci $A_\sigma \in A_s$ (constantă).

# Definiție

Fixăm o signatură multisortată $(S, \Sigma)$.

## Definiție

O algebră multisortată de tip $(S, \Sigma)$ este o structură $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ unde

- $A_S = \{A_s\}_{s \in S}$ este o mulțime $S$-sortată (mulțimea suport).
- $A_\Sigma = \{A_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ este o familie de operații astfel încât
  - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ în $\Sigma$, atunci $A_\sigma : A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \to A_s$ (operație).
  - dacă $\sigma : \to s$ în $\Sigma$, atunci $A_\sigma \in A_s$ (constantă).

- Exprimări alternative:
  - $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este o $(S, \Sigma)$-algebră sau o $\Sigma$-algebră
  - $\mathcal{A}$ este o $\Sigma$-algebră
  - $\mathcal{A}$ este o algebră
- Notație: $A_{s_1 \ldots s_n} = A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n}$

# Exemple

## Exemplu

$NAT = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$
- $\Sigma = \{0 : \to nat,\ succ : nat \to nat\}$

# Exemple

## Exemplu

$NAT = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$
- $\Sigma = \{0 : \to nat,\ succ : nat \to nat\}$

$NAT$-algebra $\mathcal{A}$

- Mulțimea suport: $A_{nat} := \mathbb{N}$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{succ}(x) := x + 1$

# Exemple

## Exemplu

$NAT = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$
- $\Sigma = \{0 : \to nat,\ succ : nat \to nat\}$

$NAT$-algebra $\mathcal{A}$

- Mulțimea suport: $A_{nat} := \mathbb{N}$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{succ}(x) := x + 1$

$NAT$-algebra $\mathcal{B}$

- Mulțimea suport: $B_{nat} := \{0, 1\}$
- Operații: $B_0 := 0$, $B_{succ}(x) := 1 - x$

# Exemple

## Exemplu

$NAT = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$
- $\Sigma = \{0 : \to nat,\ succ : nat \to nat\}$

$NAT$-algebra $\mathcal{A}$

- Mulțimea suport: $A_{nat} := \mathbb{N}$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{succ}(x) := x + 1$

$NAT$-algebra $\mathcal{B}$

- Mulțimea suport: $B_{nat} := \{0, 1\}$
- Operații: $B_0 := 0$, $B_{succ}(x) := 1 - x$

$NAT$-algebra $\mathcal{C}$

- Mulțimea suport: $C_{nat} := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Operații: $C_0 := 1$, $C_{succ}(2^n) := 2^{n+1}$

# Exemple

## Exemplu

$BOOL = (S, \Sigma)$

- $S = \{bool\}$
- $\Sigma = \{T : \to bool,\ F : \to bool, \neg : bool \to bool,$
  $\vee : bool\ bool \to bool,\ \wedge : bool\ bool \to bool\}$

# Exemple

## Exemplu

$BOOL = (S, \Sigma)$

- $S = \{bool\}$
- $\Sigma = \{T : \to bool,\ F : \to bool, \neg : bool \to bool,$
  $\vee : bool\ bool \to bool,\ \wedge : bool\ bool \to bool\}$

$BOOL$-algebra $\mathcal{A}$

- Mulțimea suport: $A_{bool} := \{0, 1\}$
- Operații:
  - $A_T := 1$,
  - $A_F := 0$,
  - $A_\neg(x) := 1 - x$
  - $A_\vee(x, y) := \max(x, y)$,
  - $A_\wedge(x, y) := \min(x, y)$

# Exemple

## Exemplu

$BOOL = (S, \Sigma)$

- $S = \{bool\}$
- $\Sigma = \{T : \to bool,\ F : \to bool, \neg : bool \to bool,$
  $\vee : bool\ bool \to bool,\ \wedge : bool\ bool \to bool\}$

# Exemple

## Exemplu

$BOOL = (S, \Sigma)$

- $S = \{bool\}$
- $\Sigma = \{T : \to bool,\ F : \to bool, \neg : bool \to bool,$
  $\vee : bool\ bool \to bool,\ \wedge : bool\ bool \to bool\}$

$BOOL$-algebra $\mathcal{B}$

- Mulțimea suport: $B_{bool} := \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- Operații:
  - $B_T := \mathbb{N}$,
  - $B_F := \emptyset$,
  - $B_\neg(X) := \mathbb{N} \setminus X$
  - $B_\vee(X, Y) := X \cup Y$,
  - $B_\wedge(x, y) := X \cap Y$

# Exemple

## Exemplu

$STIVA = (S, \Sigma)$

- $S = \{elem, stiva\}$
- $\Sigma = \{0 : \rightarrow elem,\ empty : \rightarrow stiva, push : elem\ stiva \rightarrow stiva,$
  $pop : stiva \rightarrow stiva, top : stiva \rightarrow elem\}$

# Exemple

## Exemplu

$STIVA = (S, \Sigma)$

- $S = \{elem, stiva\}$
- $\Sigma = \{0 : \to elem, \;\; empty : \to stiva, push : elem\ stiva \to stiva,$ $pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

$STIVA$-algebra $\mathcal{A}$

- Mulțimea suport:
  - $A_{elem} := \mathbb{N}$,
  - $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$

# Exemple

## Exemplu

$STIVA = (S, \Sigma)$

- $S = \{elem, stiva\}$
- $\Sigma = \{0 : \to elem,\ empty : \to stiva, push : elem\ stiva \to stiva,$
  $pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

$STIVA$-algebra $\mathcal{A}$

- Mulțimea suport:
  - $A_{elem} := \mathbb{N}$,
  - $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații:
  - $A_0 := 0$,
  - $A_{empty} := \lambda$,
  - $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$,
  - $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$
  - $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

# Exemple

## Exemplu

$STIVA = (S, \Sigma)$

- $S = \{elem, stiva\}$
- $\Sigma = \{0 : \to elem,\ empty : \to stiva, push : elem\ stiva \to stiva,$
  $pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

$STIVA$-algebra $\mathcal{B}$

- Mulțimea suport:
  - $B_{elem} := \{0\}$,
  - $B_{stiva} := \mathbb{N}$

# Exemple

## Exemplu

$STIVA = (S, \Sigma)$

- $S = \{elem, stiva\}$
- $\Sigma = \{0 : \to elem,\ empty : \to stiva, push : elem\ stiva \to stiva,$
  $pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

$STIVA$-algebra $\mathcal{B}$

- Mulțimea suport:
  - $B_{elem} := \{0\}$,
  - $B_{stiva} := \mathbb{N}$
- Operații:
  - $B_0 := 0$,
  - $B_{empty} := 0$,
  - $B_{push}(0, n) := n + 1$,
  - $B_{pop}(0) := 0,\ B_{pop}(n) := n - 1$, pt. $n \geq 1$,
  - $B_{top}(n) := 0$

# Privire de ansamblu

| | | |
|---|---|---|
| signatură (multisortată) | $\Sigma$ | simboluri |
| $\Sigma$-algebră | $\mathcal{A}$ | "înțeles" pentru simboluri |

# Algebre ordonat-sortate

Fixăm o signatură ordonat-sortată $(S, \leq, \Sigma)$.

**Definiție**

O algebră ordonat-sortată de tip $(S, \leq, \Sigma)$ este o $(S, \Sigma)$-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ astfel încât

- dacă $s_1 \leq s_2$, atunci $A_{s_1} \subseteq A_{s_2}$.
- dacă $\sigma \in \Sigma_{w_1, s_1} \cap \Sigma_{w_2, s_2}$ si $w_1 \leq w_2$, atunci
$$A_\sigma^{w_2, s_2}(x) = A_\sigma^{w_1, s_1}(x),$$
oricare $x \in A_{w_1}$.

Semantica unui modul în **Maude** este o algebră ordonat-sortată.

# Morfisme de algebre multisortate

# Definiție

Fie două $(S, \Sigma)$-algebre $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ și $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$.

# Definiție

Fie două $(S,\Sigma)$-algebre $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ și $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$.

## Definiție

Un morfism de $(S,\Sigma)$-algebre $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este o funcție $S$-sortată $h = \{h_s\}_{s\in S} : \{A_s\}_{s\in S} \to \{B_s\}_{s\in S}$ care verifică condiția de compatibilitate:

# Definiție

Fie două $(S, \Sigma)$-algebre $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ și $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$.

## Definiție

Un morfism de $(S, \Sigma)$-algebre $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este o funcție $S$-sortată $h = \{h_s\}_{s \in S} : \{A_s\}_{s \in S} \to \{B_s\}_{s \in S}$ care verifică condiția de compatibilitate:

- pt. or. $\sigma :\to s$ din $\Sigma$ avem $h_s(A_\sigma) = B_\sigma$.

# Definiție

Fie două $(S, \Sigma)$-algebre $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ și $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$.

## Definiție

Un morfism de $(S, \Sigma)$-algebre $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este o funcție $S$-sortată $h = \{h_s\}_{s\in S} : \{A_s\}_{s\in S} \to \{B_s\}_{s\in S}$ care verifică condiția de compatibilitate:

- pt. or. $\sigma : \to s$ din $\Sigma$ avem $h_s(A_\sigma) = B_\sigma$.
- pt. or. $\sigma : s_1 \dots s_n \to s$ din $\Sigma$ și or. $a_1 \in A_{s_1}, \dots, a_n \in A_{s_n}$ avem

$$h_s(A_\sigma(a_1, \dots, a_n)) = B_\sigma(h_{s_1}(a_1), \dots, h_{s_n}(a_n)).$$

$$\begin{array}{ccccccc}
A_{s_1} & \times & \cdots & \times & A_{s_n} & \xrightarrow{A_\sigma} & A_s \\
h_{s_1}\downarrow & & \cdots & & h_{s_n}\downarrow & & h_s\downarrow \\
B_{s_1} & \times & \cdots & \times & B_{s_n} & \xrightarrow{B_\sigma} & B_s
\end{array}$$

# Observații

- Exprimări alternative:
  - morfism de $\Sigma$-algebre
  - $\Sigma$-morfism
- $1_A : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este $\Sigma$-morfism, pt. or. $\Sigma$-algebră $\mathcal{A}$ (identitatea)
- Compunerea a două $(S, \Sigma)$-morfisme este dată de compunerea funcțiilor $S$-sortate.

# Exemple

## Exemplu

$NAT = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$ și $\Sigma = \{0 : \to nat,\ succ : nat \to nat\}$

$NAT$-algebra $\mathcal{A}$

- Mulțimea suport: $A_{nat} := \mathbb{N}$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{succ}(x) := x + 1$

$NAT$-algebra $\mathcal{B}$

- Mulțimea suport: $B_{nat} := \{0, 1\}$
- Operații: $B_0 := 0$, $B_{succ}(x) := 1 - x$

Morfismul de NAT-algebre $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$

- $f = \{f_{nat}\} : \{A_{nat}\} \to \{B_{nat}\}$
- $f_{nat}(n) := n(mod2)$

# Exemple

## Exemplu (cont.)

NU există niciun morfism de NAT-algebre $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$!

# Exemple

## Exemplu (cont.)

NU există niciun morfism de NAT-algebre $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$!

- Pres. $g = \{g_{nat}\} : \{B_{nat}\} \to \{A_{nat}\}$ a.î.
- $g_{nat}(0) := z_1$ și $g_{nat}(1) := z_2$.

# Exemple

### Exemplu (cont.)

NU există niciun morfism de NAT-algebre $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$!

- Pres. $g = \{g_{nat}\} : \{B_{nat}\} \to \{A_{nat}\}$ a.î.
- $g_{nat}(0) := z_1$ și $g_{nat}(1) := z_2$.
- Condiția de compatibilitate:

# Exemple

## Exemplu (cont.)

NU există niciun morfism de NAT-algebre $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$!

- Pres. $g = \{g_{nat}\} : \{B_{nat}\} \to \{A_{nat}\}$ a.î.
- $g_{nat}(0) := z_1$ și $g_{nat}(1) := z_2$.
- Condiția de compatibilitate:
  - $g_{nat}(B_0) = A_0$, deci $z_1 = g_{nat}(0) = 0$

# Exemple

## Exemplu (cont.)

NU există niciun morfism de NAT-algebre $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$!

- Pres. $g = \{g_{nat}\} : \{B_{nat}\} \to \{A_{nat}\}$ a.î.
- $g_{nat}(0) := z_1$ și $g_{nat}(1) := z_2$.
- Condiția de compatibilitate:
  - $g_{nat}(B_0) = A_0$, deci $z_1 = g_{nat}(0) = 0$
  - $g_{nat}(B_{succ}(0)) = A_{succ}(g_{nat}(0))$, deci $z_2 = g_{nat}(1) = A_{succ}(0) = 1$

# Exemple

## Exemplu (cont.)

NU există niciun morfism de NAT-algebre $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$!

- Pres. $g = \{g_{nat}\} : \{B_{nat}\} \to \{A_{nat}\}$ a.î.
- $g_{nat}(0) := z_1$ și $g_{nat}(1) := z_2$.
- Condiția de compatibilitate:
  - $g_{nat}(B_0) = A_0$, deci $z_1 = g_{nat}(0) = 0$
  - $g_{nat}(B_{succ}(0)) = A_{succ}(g_{nat}(0))$, deci $z_2 = g_{nat}(1) = A_{succ}(0) = 1$
  - $g_{nat}(B_{succ}(1)) = A_{succ}(g_{nat}(1))$, deci $0 = z_1 = g_{nat}(0) = A_{succ}(1) = 2$ (contradicție!)

# Exemple

## Exemplu

$STIVA = (S, \Sigma)$

- $S = \{elem, stiva\}$
- $\Sigma = \{0 : \to elem,\ empty : \to stiva, push : elem\ stiva \to stiva,$
  $pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

$STIVA$-algebra $\mathcal{A}$

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$STIVA$-algebra $\mathcal{B}$

- Mulțimea suport: $B_{elem} := \{0\}$, $B_{stiva} := \mathbb{N}$
- Operații: $B_0 := 0$, $B_{empty} := 0$, $B_{push}(0, n) := n + 1$,
  $B_{pop}(0) := 0$, $B_{pop}(n) := n - 1$, pt. $n \geq 1$, $B_{top}(n) := 0$

# Exemple

## Exemplu (cont.)

- *STIVA*-algebra $\mathcal{A}$ cu $A_{elem} = \mathbb{N}$, $A_{stiva} = \mathbb{N}^*$, etc.
- *STIVA*-algebra $\mathcal{B}$ cu $B_{elem} = \{0\}$, $B_{stiva} = \mathbb{N}$, etc.
- STIVA-morfism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
  - $f = \{f_{elem}, f_{stiva}\}$
  - $f_{elem} : \mathbb{N} \to \{0\}$, $f_{elem}(n) := 0$, or. $n \in \mathbb{N}$
  - $f_{stiva} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, $f_{stiva}(\lambda) := 0$, $f_{stiva}(n_1 \ldots n_k) = k$, or. $k \geq 1$
- STIVA-morfism $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$
  - $g = \{g_{elem}, g_{stiva}\}$
  - $g_{elem} : \{0\} \to \mathbb{N}$, $g_{elem}(0) := 0$
  - $g_{stiva} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, $g_{stiva}(0) := \lambda$, $g_{stiva}(k) := \underbrace{0 \cdots 0}_{k}$, or. $k \geq 1$

# Proprietăți

Fixăm signatura multisortată $\Sigma$.

## Propozitie

Compunerea a două $\Sigma$-morfisme este un $\Sigma$-morfism.

## Demonstrație

- Fie $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ și $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ două $\Sigma$-morfisme.
- Arătăm că $h; g : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ este $\Sigma$-morfism.
- Fie $\sigma : s_1 \dots s_n \to s$ în $\Sigma$ și $a_1 \in A_{s_1}, \dots, a_n \in A_{s_n}$. Se observă că:

$$\begin{aligned}
(h; g)_s(A_\sigma(a_1, \dots, a_n)) &= g_s(h_s(A_\sigma(a_1, \dots, a_n))) \\
&= g_s(B_\sigma(h_{s_1}(a_1), \dots, h_{s_n}(a_n))) \\
&= C_\sigma(g_{s_1}(h_{s_1}(a_1)), \dots, g_{s_n}(h_{s_n}(a_n))) \\
&= C_\sigma((h; g)_{s_1}(a_1), \dots, (h; g)_{s_n}(a_n)).
\end{aligned}$$

$\square$

Pe săptămâna viitoare!