Logică matematică și computațională
Cursul II

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

1 Mulțimi și funcții

Mulțimi și funcții

- Continuăm recapitularea din secțiunea “Mulțimi și funcții“.

- Amintim din primul curs și primul seminar faptul că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulțimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.
- Amintim din primul seminar următoarea metodă de a demonstra că două mulțimi A și B satisfac incluziunea $A \subseteq B$: $A \subseteq B$ ddacă, pentru orice element x, are loc implicația $x \in A \Rightarrow x \in B$.
- Amintim din primul seminar următoarea metodă de a demonstra că două mulțimi A și B sunt egale, provenită din faptul că egalitatea de mulțimi este echivalentă cu dubla incluziune între ele și din metoda descrisă imediat mai sus pentru demonstrarea incluziunii între două mulțimi: $A = B$ ddacă, pentru orice element x, are loc echivalența $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Notație

Alăturarea de simboluri $\exists!$ semnifică "există un unic", "există și este unic".

Notație

Vom nota cu $\emptyset$ mulțimea vidă, adică mulțimea fără elemente. Păstrăm notațiile cunoscute $\cup$, $\cap$ și $\setminus$ pentru reuniunea, intersecția și respectiv diferența de mulțimi. De asemenea, păstrăm notațiile $\subseteq$, $\subsetneq$, $\supseteq$ și $\supsetneq$ pentru incluziunile și incluziunile stricte dintre mulțimi în fiecare sens. Vom mai nota incluziunile stricte și cu $\subset$ și respectiv $\supset$, dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă și nu poate avea loc egalitatea de mulțimi nu ne folosește în cele prezentate.

Remarcă

Este evident faptul că singura submulțime a mulțimii vide este mulțimea vidă.

Notație

Pentru orice elemente a și b, notăm cu (a, b) perechea ordonată formată din a și b.

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, se definește *produsul cartezian* dintre A și B (numit și *produsul direct* dintre A și B) ca fiind mulțimea $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$.

Remarcă

Se demonstrează ușor că, pentru orice mulțime A, $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.
De asemenea, se demonstrează ușor că produsul cartezian este distributiv față de reuniunea, intersecția și diferența de mulțimi, adică, pentru orice mulțimi A, B și C, au loc egalitățile:

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ și $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ și $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ și $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$

Aveți ca **temă pentru acasă** demonstrarea tuturor acestor egalități.

Mulțimi și funcții

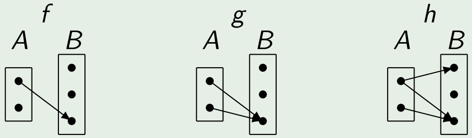
Definiție

Fie A și B mulțimi oarecare. Se numește *funcție* de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. î., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.
Formal: $(\forall a \in A)(\exists! b \in B)(a, b) \in G$.

Faptul că f este o funcție de la A la B se notează cu $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.
Mulțimea A se numește *domeniul* funcției f, B se numește *codomeniul* sau *domeniul valorilor* lui f, iar G se numește *graficul* lui f.
Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ și se numește *valoarea funcției f în punctul a*.

Exemplu

Care dintre următoarele corespondențe este o funcție de la A la B?



Remarcă

Amintim din primul curs și primul seminar că, oricare ar fi propozițiile (i. e. proprietățile, enunțurile, afirmațiile) p și q:

- implicația $p \Rightarrow q$ este echivalentă cu "non p sau q", așadar:
- implicația $p \Rightarrow q$ este adevărată ddacă p e falsă sau q e adevărată
- implicația $p \Rightarrow q$ este falsă ddacă p e adevărată și q e falsă

- Într-adevăr, echivalența între $p \Rightarrow q$ și "non p sau q" se arată foarte ușor: implicația directă ($p \Rightarrow q$ implică "non p sau q") se demonstrează observând că, dacă are loc $p \Rightarrow q$, atunci, când "non p" e falsă, adică p e adevărată, rezultă că e adevărată și q, așadar, ori de câte ori $p \Rightarrow q$ este adevărată, rezultă că și "non p sau q" este adevărată; implicația inversă ("non p sau q" implică $p \Rightarrow q$) rezultă din faptul că, dacă "non p sau q" este adevărată, atunci, când p este adevărată și deci "non p" este falsă, rezultă că este adevărată q, prin urmare implicația $p \Rightarrow q$ este adevărată.

Mulțimi și funcții

Remarcă

Fie B o mulțime oarecare (**poate fi vidă și poate fi nevidă**). Atunci există o unică funcție $f : \emptyset \rightarrow B$.

Într-adevăr, o funcție $f : \emptyset \rightarrow B$ trebuie să fie un triplet $f = (\emptyset, G, B)$, cu $G \subseteq \emptyset \times B = \emptyset$, deci $G = \emptyset$. Așadar, există cel mult o funcție $f : \emptyset \rightarrow B$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, B)$ este unica posibilitate. Să arătăm că acest triplet satisface definiția funcției:

$$(\forall a \in \emptyset)(\exists! b \in B)(a, b) \in \emptyset, \quad \text{i. e.:}$$

$$(\forall a)[a \in \emptyset \Rightarrow (\exists! b)(b \in B \text{ și } (a, b) \in \emptyset)].$$

Pentru orice element a, proprietatea $a \in \emptyset$ este falsă, așadar, pentru orice element a, implicația $[a \in \emptyset \Rightarrow \ldots]$ este adevărată. Iar acest lucru înseamnă exact faptul că întreaga proprietate $(\forall a)[a \in \emptyset \Rightarrow \ldots]$ este adevărată, deci f este funcție. Prin urmare, există o unică funcție $f : \emptyset \rightarrow B$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, B)$.

Mulțimi și funcții

Remarcă

Fie A o mulțime **nevidă**. Atunci nu există nicio funcție $f : A \to \emptyset$.
Într-adevăr, o funcție $f : A \to \emptyset$ trebuie să fie un triplet $f = (A, G, \emptyset)$, cu $G \subseteq A \times \emptyset = \emptyset$, deci $G = \emptyset$. Așadar, dacă ar exista o funcție $f : A \to \emptyset$, atunci am avea neapărat $f = (A, \emptyset, \emptyset)$. Să vedem dacă acest triplet verifică definiția funcției:

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in \emptyset)(a, b) \in \emptyset, \quad \text{i. e.:}$$

$$(\forall a)[a \in A \Rightarrow [[(\exists b)(b \in \emptyset \text{ și } (a, b) \in \emptyset)] \text{ și}$$

$$[(\forall c)(\forall d)((c \in \emptyset \text{ și } d \in \emptyset \text{ și } (a, c) \in \emptyset \text{ și } (a, d) \in \emptyset) \Rightarrow c = d)]]].$$

Oricare ar fi elementul b, proprietatea $b \in \emptyset$ este falsă, deci, oricare ar fi elementele a și b, conjuncția ($b \in \emptyset$ și $(a, b) \in \emptyset$) este falsă, deci, oricare ar fi elementul a, proprietatea $(\exists b)(b \in \emptyset$ și $(a, b) \in \emptyset)$ este falsă, așadar, oricare ar fi elementul a, conjuncția care succede mai sus implicației având ca antecedent pe $a \in A$ este falsă. În schimb, întrucât A este nevidă, rezultă că proprietatea $a \in A$ este adevărată pentru măcar un element a. Prin urmare, implicația $[a \in A \Rightarrow \ldots]$ de mai sus este falsă pentru cel puțin un element a, ceea ce înseamnă că întreaga proprietate $(\forall a)[a \in A \Rightarrow \ldots]$ este falsă, și deci f nu este funcție.

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, orice funcție $f : A \to B$ și orice submulțimi $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$, se definesc:

- *imaginea lui* X *prin* f sau *imaginea directă a lui* X *prin* f, notată $f(X)$, este submulțimea lui B: $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$
- $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$ se mai notează cu $Im(f)$ și se numește *imaginea lui* f
- *preimaginea lui* Y *prin* f sau *imaginea inversă a lui* Y *prin* f, notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărți, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f, care există numai atunci când f este inversabilă, adică numai atunci când f este bijectivă, pe când preimaginea unei submulțimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcție), este submulțimea lui A: $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$

Remarcă

Evident, cu notațiile de mai sus, $f^{-1}(B) = A$.

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, notăm cu $A \Delta B$ *diferența simetrică a lui* A *și* B, anume: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Notație

Pentru orice mulțime T, vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ mulțimea părților lui T, i. e. mulțimea submulțimilor lui T: $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

Tehnica de demonstrație pentru incluziunea sau egalitatea de mulțimi, amintită la începutul acestui curs, poate fi adaptată la cazul particular al submulțimilor unei mulțimi date T, astfel:

- pentru stabilirea incluziunii între două submulțimi A și B ale lui T, în loc de a se demonstra că, pentru orice element x, $x \in A \Rightarrow x \in B$, este suficient să se demonstreze că, pentru orice element $x \in T$, $x \in A \Rightarrow x \in B$, ceea ce, conform metodei din cazul general, înseamnă că $A \cap T \subseteq B \cap T$, dar, întrucât $A, B \in \mathcal{P}(T)$, avem că $A \cap T = A$ și $B \cap T = B$, și rezultă că $A \subseteq B$;
- pentru a stabili egalitatea a două submulțimi A și B ale lui T, în loc de a se demonstra că, pentru orice element x, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, este suficient să se arate că: pentru orice $x \in T$, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, ceea ce, conform variantei demonstrației din cazul general, arată că: $A \cap T = B \cap T$; dar, întrucât $A, B \in \mathcal{P}(T)$, au loc: $A \cap T = A$ și $B \cap T = B$, de unde rezultă că $A = B$.

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

Definiție

Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim *funcția caracteristică a lui A (raportat la T)*: $\chi_A : T \to \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$$

Observație

În definiția de mai sus pentru funcțiile caracteristice ale submulțimilor unei mulțimi T, am folosit notația (**consacrată**) χ_A pentru funcția caracteristică a unei submulțimi A a lui T, care sugerează faptul că această funcție ar depinde numai de A. Motivul pentru care nu se atașează la această notație și indicele T, pentru a arăta faptul evident că această funcție depinde și de T, este că, în mod uzual, se consideră mulțimea totală T ca fiind fixată atunci când lucrăm cu funcțiile caracteristice ale părților sale.

Remarcă

În cele ce urmează vom considera codomeniul funcțiilor caracteristice $\{0, 1\} \subset \mathbb{N}$ (sau $\{0, 1\} \subset \mathbb{Z}$, sau $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$), iar operațiile aritmetice care vor fi efectuate vor fi operațiile uzuale de pe $\mathbb{N}$ (sau $\mathbb{Z}$, sau $\mathbb{R}$).

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

Observație

Păstrăm notațiile din definiția anterioară.
Probabil că funcțiile caracteristice au mai fost întâlnite până acum, cel puțin în cazul particular când mulțimea totală T este finită: $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. În acest caz, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcția caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \ldots, \chi_A(x_n))$; acest vector de valori din mulțimea $\{0, 1\}$ se numește *vectorul caracteristic al lui A* și poate fi reprezentat printr-un număr scris în baza 2.
După cum se știe, vectorii caracteristici (generați, de exemplu, ca numere în binar, de la 0 la $11\ldots1$) pot fi folosiți la generarea submulțimilor mulțimii finite T: fiecare $A \in \mathcal{P}(T)$ este egală cu mulțimea elementelor x_i cu proprietatea că, în vectorul caracteristic al lui A, pe poziția i apare 1.
Ca o anticipare a similarităților dintre calculul cardinalelor pentru mulțimi finite și expresiile funcțiilor caracteristice din propoziția următoare, este interesant de observat că, în cazul particular finit prezentat mai sus, fiecare $A \in \mathcal{P}(T)$ este, de asemenea, finită, și are cardinalul: $|A| = \sum_{x \in T} \chi_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_A(x_i)$.

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

Propoziție (Proprietățile funcțiilor caracteristice)

Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcția caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcțiile constante: $\mathbf{0} : T \to \{0,1\}$ și $\mathbf{1} : T \to \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $\mathbf{0}(x) = 0$ și $\mathbf{1}(x) = 1$. Atunci au loc proprietățile:

1. $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$ *și* $\chi_T = \mathbf{1}$
2. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$
3. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalența:* $A \subseteq B$ *ddacă* $\chi_A \leq \chi_B$ *(punctual, i. e.: pentru orice* $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$*)*
4. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalența:* $A = B$ *ddacă* $\chi_A = \chi_B$
5. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
6. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$
7. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$
8. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$
9. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T \setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$
10. $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Demonstrație: Pentru început, amintim că egalitatea a două funcții cu același domeniu și același codomeniu semnifică egalitatea punctuală, i. e. în fiecare punct, de exemplu, la punctul (4): $\chi_A = \chi_B$ ddacă (prin definiția egalității de funcții), pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ (întocmai ca la punctul (3), unde am explicitat inegalitatea $\leq$ între două funcții cu același domeniu și același codomeniu).
De asemenea, funcțiile de la punctele (5)–(10), date prin operații aplicate funcțiilor χ_A și χ_B, sunt definite punctual, ca orice operații asupra unor funcții cu același domeniu și același codomeniu, operații care se pot defini între elementele codomeniului respectiv: de exemplu, la punctul (8), funcția
$\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B : T \to \{0, 1\}$ se definește prin: pentru orice $x \in T$,
$(\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B)(x) := \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

(1) Din faptul că orice $x \in T$ satisface: $x \notin \emptyset$ și $x \in T$.
(2) Fie $x \in T$. Avem: $x \in A$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ ddacă $x \in \chi_A^{-1}(\{1\})$. Așadar $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$.
(3) Are loc: $A \subseteq B$ ddacă $(\forall x \in T)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ ddacă $(\forall x \in T)(\chi_A(x) = 1 \Rightarrow \chi_B(x) = 1)$ ddacă $(\forall x \in T)\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$ ddacă $\chi_A \leq \chi_B$ (amintim că domeniul valorilor lui χ_A și χ_B este $\{0, 1\}$).
(4) Putem folosi punctul (3): $A = B$ ddacă $[A \subseteq B$ și $B \subseteq A]$ ddacă $[\chi_A \leq \chi_B$ și $\chi_B \leq \chi_A]$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.
Sau putem folosi punctul (2): $A = B$ ddacă $\chi_A^{-1}(\{1\}) = \chi_B^{-1}(\{1\})$ ddacă $\chi_A = \chi_B$ (amintim că domeniul valorilor lui χ_A și χ_B este mulțimea cu două elemente $\{0, 1\}$).
(5) Fie $x \in T$, arbitrar, fixat. Distingem patru cazuri:

- $x \notin A$ și $x \notin B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \notin A$ și $x \in B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \in A$ și $x \notin B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \in A$ și $x \in B$ (deci $x \in A \cap B$)

În primul dintre aceste cazuri, $\chi_{A \cap B}(x) = 0 = 0 \cdot 0 = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$. La fel se analizează celelalte trei cazuri, și rezultă că $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ pentru orice $x \in T$, i. e. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

(6) Aplicând (5) cazului particular $A = B$, obținem: $\chi_A = \chi_{A\cap A} = \chi_A \cdot \chi_A = \chi_A^2$. Sau putem aplica faptul că fiecare dintre elementele 0 și 1 este egal cu pătratul său, iar codomeniul lui χ_A este $\{0, 1\}$.
(7) Analog demonstrației pentru punctul (5).
(8) Analog demonstrației pentru fiecare dintre punctele (5) și (7).
(9) Conform punctelor (8) și (1), $\chi_{T\setminus A} = \chi_T - \chi_T \cdot \chi_A = \mathbf{1} - \mathbf{1} \cdot \chi_A = \mathbf{1} - \chi_A$. (Este clar că $\mathbf{1} \cdot \chi_A = \chi_A$. Se putea folosi, ca alternativă, și punctul (5), pentru a deduce: $\chi_T \cdot \chi_A = \chi_{T\cap A} = \chi_A$.)
(10) Putem calcula, conform punctelor (7), (8), (5) și (1):
$\chi_{A\Delta B} = \chi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} - \chi_{A\setminus B} \cdot \chi_{B\setminus A} =$
$\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B - \chi_{(A\setminus B)\cap(B\setminus A)} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B - \chi_\emptyset =$
$\chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B - \mathbf{0} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$. Am aplicat faptul că orice element al intersecției $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ simultan aparține lui A și nu aparține lui A (și simultan aparține lui B și nu aparține lui B); sigur că nu există un astfel de element, așadar acea intersecție este vidă.

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

Remarcă

- Punctul **(5)** al propoziției precedente poate fi demonstrat folosind faptul că funcțiile $\chi_{A\cap B}$ și $\chi_A \cdot \chi_B$ au drept codomeniu mulțimea cu două elemente $\{0,1\}$ și observând că orice $x \in T$ satisface: $\chi_{A\cap B}(x) = 1$ ddacă $x \in A \cap B$ ddacă $x \in A$ și $x \in B$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_B(x) = 1$ ddacă $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$ ddacă $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = 1$.
- De asemenea, punctul **(8)** al propoziției precedente poate fi demonstrat folosind faptul că funcțiile care intervin în acea egalitate au codomeniul $\{0,1\}$ și observând că orice $x \in T$ satisface: $\chi_{A\setminus B}(x) = 1$ ddacă $x \in A \setminus B$ ddacă $x \in A$ și $x \notin B$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_B(x) = 0$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 0$ ddacă $\chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$ ddacă $(\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B)(x) = 1$.

Remarcă

Punctele (3) și (4) ale propoziției precedente ne oferă posibilitatea de a demonstra incluziunea și egalitatea de mulțimi folosind funcția caracteristică a mulțimilor respective.

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

Remarcă

A se observa că, în propoziția anterioară, conform punctelor (5), (7) și (8), au loc, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$:

- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$
- $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}$

De asemenea, pentru orice $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ (care este domeniul valorilor funcțiilor caracteristice), au loc:

- $\alpha \cdot \beta = \min\{\alpha, \beta\}$
- $\alpha + \beta - \alpha \cdot \beta = \alpha + \beta - \min\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha, \beta\}$

Aceste egalități pot fi demonstrate, de exemplu, prin înlocuirea fiecăruia dintre elementele α și β cu fiecare dintre valorile 0 și 1 în fiecare egalitate.
Din egalitățile de mai sus și punctele (5) și (7) ale propoziției precedente rezultă că, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, au loc:

- $\chi_{A \cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\}$
- $\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

Teme pentru acasă: Să se demonstreze, folosind funcția caracteristică (nu contează față de ce mulțime totală T; se poate lua orice mulțime nevidă T care include mulțimile care intră în discuție, de exemplu se poate lua T egală cu reuniunea acelor mulțimi, reunită cu o mulțime nevidă, de exemplu $\{0\}$, pentru a avea siguranța că T e nevidă):

- asociativitatea diferenței simetrice: pentru orice mulțimi A, B, C, $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ (**indicație:** prin calcul, folosind propoziția precedentă, se obține $\chi_{A\Delta(B\Delta C)} = \chi_{(A\Delta B)\Delta C}$, ceea ce este echivalent cu egalitatea $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ care trebuie demonstrată; la fel se poate proceda mai jos)
- distributivitatea lui $\cup$ față de $\cap$: pentru orice mulțimi A, B, C, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- distributivitatea lui $\cap$ față de $\cup$: pentru orice mulțimi A, B, C, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- idempotența operației de trecere la complementară: pentru orice mulțime T și orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $T \setminus (T \setminus A) = A$
- **legile lui de Morgan** pentru $\cup$ și $\cap$: pentru orice mulțime T și orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\begin{cases} T \setminus (A \cup B) = (T \setminus A) \cap (T \setminus B) \\ T \setminus (A \cap B) = (T \setminus A) \cup (T \setminus B) \end{cases}$
- alte rezultate demonstrate în primul seminar

Definiție

Fie A și B mulțimi și $f : A \to B$ o funcție. f se zice:

- *injectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- *surjectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există cel puțin un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
  - $f(A) = B$
- *bijectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
  - f este simultan injectivă și surjectivă
  - pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall b \in B)(\exists! a \in A) f(a) = b$)

Definiție

Două mulțimi A și B se zic *cardinal echivalente* ddacă există o funcție bijectivă de la A la B, fapt notat prin: $A \cong B$.

Notație

Pentru orice mulțimi A și B, se notează cu B^A mulțimea funcțiilor de la A la B: $B^A = \{f \mid f : A \to B\}$.

Propoziție

Pentru orice mulțime nevidă T, $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T$.

Demonstrație: Considerăm aplicația
$f : \mathcal{P}(T) \to \{0,1\}^T = \{\varphi \mid \varphi : T \to \{0,1\}\}$, definită prin: pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $f(A) = \chi_A$ (funcția caracteristică a lui A raportat la T).

Funcția caracteristică

Conform punctului (4) al propoziției conținând proprietățile funcției caracteristice, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, avem:

- dacă $A = B$, atunci $\chi_A = \chi_B$, adică $f(A) = f(B)$, deci f e **bine definită** (i. e. este funcție, adică asociază unui element din domeniul ei, $\mathcal{P}(T)$, un **unic** element din codomeniul ei, $\{0,1\}^T$)
- și reciproc: dacă $f(A) = f(B)$, adică $\chi_A = \chi_B$, atunci $A = B$, deci f este injectivă.

Fie $\varphi \in \{0,1\}^T$, i. e. $\varphi : T \to \{0,1\}$. Fie $A = \varphi^{-1}(\{1\}) = \{a \in T \mid \varphi(a) = 1\}$. Atunci $\chi_A \in \{0,1\}^T$ are proprietatea că, pentru orice $x \in T$: $\chi_A(x) = 1$ ddacă $x \in A = \varphi^{-1}(\{1\})$ ddacă $\varphi(x) = 1$. Cum χ_A și φ au ca domeniu al valorilor mulțimea cu două elemente $\{0,1\}$, rezultă că $\varphi = \chi_A = f(A)$, deci f este și surjectivă.
Am demonstrat că $f : \mathcal{P}(T) \to \{0,1\}^T$ este o bijecție, deci $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T$.

Familii arbitrare de mulțimi

- Ce este un șir de numere reale indexat de $\mathbb{N}$? Un *șir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se notează $x_n := f(n) \in \mathbb{R}$.
- Ce este o familie arbitrară de numere reale? Fie I o mulțime arbitrară. Ce este o familie de numere reale indexată de I? O *familie* $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$ este o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in \mathbb{R}$. Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i\in I}$.

Dată o mulțime arbitrară M:

- ce este un șir de elemente ale lui M indexat de $\mathbb{N}$?
- ce este o familie arbitrară de elemente ale lui M?

Înlocuind mai sus pe $\mathbb{R}$ cu M, se obțin definițiile acestor noțiuni.

- Ce este un șir de mulțimi indexat de $\mathbb{N}$?
- Ce este o familie arbitrară de mulțimi?

Familii arbitrare de mulțimi

Definiție

Fie T o mulțime arbitrară. Se numește *șir de submulțimi ale lui T indexat de $\mathbb{N}$* o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, se notează $A_n := f(n) \in \mathcal{P}(T)$, iar șirul de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Scriem $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{P}(T)$.

Definiție

Fie T și I două mulțimi arbitrare. Se numește *familie de submulțimi ale lui T indexată de I* o funcție $f : I \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i\in I}$. Scriem $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i\in I}$.

Putem generaliza definițiile anterioare la șiruri de mulțimi oarecare și familii de mulțimi oarecare, nu neapărat părți ale unei mulțimi precizate, dar vom avea nevoie de acea definiție mai cuprinzătoare a noțiunii de funcție, care permite unei funcții f definite pe $\mathbb{N}$, respectiv pe I, să aibă drept codomeniu o clasă (nu neapărat o mulțime), anume clasa tuturor mulțimilor în acest caz.

Operații cu familii arbitrare de mulțimi

Definiție

Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I.
Se definesc următoarele operații:

- *reuniunea familiei* $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcup_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I) x \in A_i\}$$

- *intersecția familiei* $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcap_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I) x \in A_i\}$$

Operații cu familii arbitrare de mulțimi

Definiție

- *produsul cartezian al familiei* $(A_i)_{i\in I}$ (numit și *produsul direct al familiei* $(A_i)_{i\in I}$) este mulțimea notată $\prod_{i\in I} A_i$ și definită prin:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall i \in I) a_i \in A_i\},$$

sau, altfel scris (cu definiția unei familii de elemente exemplificate mai sus pe familii de numere reale):

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall i \in I) f(i) \in A_i\}.$$

Exemplu

Fie T și I două mulțimi nevide și $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părți ale lui T indexată de I. Să demonstrăm următoarele egalități satisfăcute de funcțiile caracteristice raportat la T:

- $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i\in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Să notăm cu $F := \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\} : T \to \{0,1\}$, definită, desigur, punctual: pentru orice $x \in T$, $F(x) = \max\{\chi_{A_i}(x) \mid i \in I\}$. Observăm că maximul unei familii de elemente din mulțimea $\{0,1\}$ este egal cu 1 ddacă există măcar un element egal cu 1 în acea familie. Pentru orice $x \in T$, avem: $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i}(x) = 1$ ddacă $x \in \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ ddacă $(\exists i \in I) x \in A_i$ ddacă $(\exists i \in I)\chi_{A_i}(x) = 1$ ddacă $\max\{\chi_{A_i}(x) \mid i \in I\} = 1$ ddacă $F(x) = 1$. Rezultă că $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} = F$, întrucât codomeniul acestor două funcții este mulțimea cu două elemente $\{0,1\}$. Aveți demonstrarea celei de–a doua egalități ca **temă**. **Indicație:** observați că minimul unei familii de elemente din mulțimea $\{0,1\}$ este egal cu 1 ddacă toate elementele acelei familii sunt egale cu 1, și rescrieți demonstrația de mai sus înlocuind în ea maximul cu minimul, $\exists$ cu $\forall$ și reuniunea cu intersecția.

Numere cardinale

Amintim că spunem că două mulțimi A și B sunt *cardinal echivalente*, și scriem $A \cong B$, ddacă există o bijecție $f : A \to B$.

Definiție

Pentru orice mulțime A, se numește *cardinalul lui A* sau *numărul cardinal al lui A* clasa tuturor mulțimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$.

Este simplu de demonstrat, folosind operații cu bijecții pe care le considerăm cunoscute din gimnaziu și liceu, că:

- pentru orice mulțime A, $A \cong A$, deci $A \in |A|$
- pentru orice mulțimi A și B, dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ și $|A| = |B|$, i. e. orice mulțime C satisface $A \cong C$ ddacă satisface $B \cong C$
- pentru orice mulțimi A și B, dacă $A \ncong B$, atunci nu există nicio mulțime C cu proprietățile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) și $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$)

Numere cardinale

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecție $j : A \to B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ și $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecție $j : A \to B$, dar nu există nicio bijecție $f : A \to B$

Teoremă (Cantor)

Pentru orice mulțime X, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Demonstrație: Dacă $X = \emptyset$, atunci se poate verifica faptul că unica funcție $f : X = \emptyset \to \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\})$, este injecție, dar nu este surjecție, deci nu este bijecție.
Pentru cele ce urmează, să presupunem că $X \neq \emptyset$.
Definim $j : X \to \mathcal{P}(X)$, pentru orice $x \in X$, $j(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$. Funcția j este bine definită și injectivă, pentru că, oricare ar fi $x, y \in X$ cu $j(x) = j(y)$, i. e. $\{x\} = \{y\}$, rezultă $x = y$ (deoarece două mulțimi coincid ddacă au aceleași elemente). Așadar $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$.

Să presupunem prin absurd că există o surjecție $g : X \to \mathcal{P}(X)$. Deci, pentru orice $x \in X$, $g(x) \in \mathcal{P}(X)$, i. e. $g(x) \subseteq X$. Să notăm $A := \{x \in X \mid x \notin g(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. g este surjectivă, prin urmare există un element $x_0 \in X$ a. î. $g(x_0) = A$.
Paradox: $x_0 \in g(x_0) = A$ sau $x_0 \notin g(x_0) = A$?
Dacă $x_0 \in g(x_0) = A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$, rezultă că $x_0 \notin g(x_0)$.
Dacă $x_0 \notin g(x_0) = A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$, rezultă că $x_0 \in A = g(x_0)$.
Am obținut o contradicție (în fiecare situație posibilă), prin urmare presupunerea făcută este falsă, adică nu există nicio surjecție $g : X \to \mathcal{P}(X)$, deci nu există nicio bijecție $f : X \to \mathcal{P}(X)$, așadar $X \not\cong \mathcal{P}(X)$, deci $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$.
Așadar $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Numere cardinale

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), într–un mod care nu este fundamental diferit de construcția menționată în primul curs:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

Mereu se consideră mulțimea având drept elemente toate mulțimile de la pașii anteriori.

Mulțimea numerelor naturale, $\mathbb{N}$, este o mulțime infinită, și este o mulțime numărabilă.

- Ce este o mulțime numărabilă?
- Ce este o mulțime infinită?

Numere cardinale

Notație

Cardinalul mulțimii numerelor naturale se notează cu $\aleph_0$, pronunțat "alef 0": $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$.

Definiție

O mulțime X se zice *numărabilă* ddacă $|X| = \aleph_0$, i. e. ddacă $X \cong \mathbb{N}$.

Definiție

O mulțime X se zice *infinită*:

1. *în sens Dedekind*, ddacă există $S \subsetneq X$ a. î. $S \cong X$
2. *în sens Cantor*, ddacă există $S \subseteq X$, a. î. S este numărabilă
3. *în sens obișnuit*, ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \not\cong \{1, 2, \ldots, n\}$

Teoremă

Cele trei definiții de mai sus ale mulțimilor infinite sunt echivalente.

Observație

Pentru demonstrația teoremei anterioare, a se vedea finalul primului capitol al cărții: D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002. Această demonstrație nu face parte din materia pentru examen.

Desigur, o *mulțime finită* este, prin definiție, o mulțime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiția de mai sus a mulțimilor infinite *în sens obișnuit*, o mulțime finită este o mulțime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$. (Desigur, am folosit licența de scriere (convenția): $\{1, 2, \ldots, n\} = \emptyset$ pentru $n = 0$.)

Numere cardinale

Definiția mulțimilor infinite în sens Cantor arată că $\aleph_0$ (i. e. cardinalul mulțimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde *cardinal infinit* (sau *cardinal transfinit*) înseamnă cardinal al unei mulțimi infinite. În particular, $\mathbb{N}$ este o mulțime infinită, și orice mulțime numărabilă este o mulțime infinită.

Definiție

O *mulțime cel mult numărabilă* este o mulțime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu $\aleph_0$).

$\mathbb{N}$ este o mulțime infinită, deci, conform definiției mulțimilor infinite în sens Dedekind, poate fi pusă în bijecție cu o *submulțime proprie* (i. e. *strictă*, i. e. diferită de întreaga mulțime $\mathbb{N}$) a sa.

Exemplu

Un hotel are o infinitate de camere, numerotate cu numerele naturale, și toate camerele sale sunt ocupate. Cum poate fi cazat un nou turist în acel hotel?
Soluție: mutăm ocupantul camerei 0 în camera 1, pe cel al camerei 1 în camera 2, pe cel al camerei 2 în camera 3 ș. a. m. d.. Iar noul turist este cazat în camera 0.
"Morala:" cum punem pe $\mathbb{N}$ în bijecție cu $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$? Definim $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$. f este o bijecție.

Exemplu

Un hotel are o infinitate de camere, numerotate cu numerele naturale, și toate camerele sale sunt ocupate. Cum pot fi cazați un milion de noi turiști în acel hotel?
Soluție: mutăm ocupantul camerei 0 în camera 1.000.000, pe cel al camerei 1 în camera 1.000.001, pe cel al camerei 2 în camera 1.000.002 ș. a. m. d.. Iar noii turiști sunt cazați în camerele $0, 1, 2, \ldots, 999.999$.
"Morala:" cum punem pe $\mathbb{N}$ în bijecție cu $\mathbb{N} \setminus \overline{0, 999.999} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1.000.000\}$? Definim $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \overline{0, 999.999}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1.000.000$. g este o bijecție.

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi este numărabilă. Într-adevăr, funcția $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definită prin: pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ -2x - 1, & \text{dacă } x < 0, \end{cases}$ este o bijecție.

Numere cardinale

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este numărabilă, fapt care poate fi demonstrat printr-o mare varietate de procedee, cum ar fi: punând mai întâi pe $\mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ în bijecție cu cu $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ prin $x \rightsquigarrow \frac{x}{x+1}$, apoi pe $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ în bijecție cu $\mathbb{N}$ prin așezarea elementelor lui $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ în șirul $\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{0}{n+1}, \ldots$ și eliminarea duplicatelor din acest șir, iar pașii de până acum conduc, prin compunere de bijecții, la existența unei bijecții $\pi : \mathbb{Q} \cap [0, \infty) \to \mathbb{N}$ cu $\pi(0) = 0$ (deci $\pi \mid_{\mathbb{Q} \cap (0,\infty)}: \mathbb{Q} \cap (0, \infty) \to \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este, la rândul ei, o bijecție), ceea ce permite obținerea unei bijecții $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, definite prin: pentru orice $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \begin{cases} 2\pi(x), & \text{dacă } x \geq 0, \\ 2\pi(-x) - 1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$ A se vedea alte metode de a construi o bijecție între $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{N}$ în primul capitol al cărții: D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.

Observație

Demonstrarea faptului că $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ nu face parte din materia pentru examen.

Numere cardinale

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale nu este numărabilă (sigur că este infinită, în baza definiției lui Cantor pentru mulțimile infinite, deoarece include pe $\mathbb{N}$). Acest fapt poate fi arătat, de exemplu, prin **procedeul diagonal al lui Cantor**: să considerăm o funcție arbitrară $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ și, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, să scriem pe $f(n)$ ca fracție zecimală: $f(n) = [f(n)] + 0, a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3} \ldots a_{n,n}a_{n,n+1} \ldots a_{n,k} \ldots$, unde $[f(n)]$ este partea întreagă a lui $f(n)$ și $a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots$ sunt cifrele zecimale de după virgulă ale lui $f(n)$. Să considerăm un număr real b, cu scrierea ca fracție zecimală: $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$, cu cifrele zecimale $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ și cu proprietatea că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $b_n \notin \{0, a_{n,n}, 9\}$ (eliminăm pe 0 și 9 pentru a evita cazul dat de egalitatea $1 = 0,(9) = 0,9999\ldots$, ușor verificabilă prin exprimarea cu fracții a acestor numere). Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $b \neq f(n)$, pentru că au a $n-$a zecimală diferită, ceea ce arată că f nu este surjectivă. Deci nu există nicio surjecție de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{R}$, așadar nu există nicio bijecție între $\mathbb{N}$ și $\mathbb{R}$.

Remarcă

Se poate arăta că $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Numere cardinale

- Este $|\mathbb{R}|$ primul cardinal infinit nenumărabil?

Definiție

$|\mathbb{R}|$ se numește *puterea continuumului*.

- **Ipoteza continuumului:** Nu există niciun cardinal $\mathcal{C}$ cu proprietatea că $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < \mathcal{C} < |\mathbb{R}|$. (Adică $|\mathbb{R}|$ este primul cardinal infinit nenumărabil.)

S-a demonstrat că:

- **ipoteza continuumului** este o proprietate independentă de sistemele consacrate de axiome pentru teoria mulțimilor (Zermelo–Fraenkel, von Neumann–Bernays–Gödel etc.), i. e. nu poate fi nici demonstrată, nici infirmată pornind de la axiomele din aceste sisteme.