Curs 4

Amintiri - Termeni (expresii)

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Definiție

Mulțimea S-sortată a termenilor cu variabile din X,

$$T_\Sigma(X),$$

este cea mai mică mulțime de șiruri finite peste alfabetul

$$L = \bigcup_{s \in S} X_s \cup \bigcup_{w,s} \Sigma_{w,s} \cup \{(,)\} \cup \{,\}$$

care verifică:

1. $X \subseteq T_\Sigma(X)$,
2. Dacă $\sigma :\to s$ în Σ, atunci $\sigma \in T_\Sigma(X)_s$,
3. Dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ în Σ și $t_i \in T_\Sigma(X)_{s_i}$, or. $1 \leq i \leq n$, atunci $\sigma(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma(X)_s$.

- $t \in T_\Sigma(X)$ se numește termen (expresie).
- $T_\Sigma = T_\Sigma(\emptyset)$

Amintiri - Inducția pe termeni

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Fie **P** o proprietate astfel încât:

- pasul inițial:

$$\mathbf{P}(x) = \mathit{true}, \text{ or. } x \in X,$$
$$\mathbf{P}(\sigma) = \mathit{true}, \text{ or. } \sigma :\to s.$$

- pasul de inducție:

$$\text{pt. or. } \sigma : s_1 \dots s_n \to s \text{ și or. } t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n},$$
$$\text{dacă } \mathbf{P}(t_1) = \dots = \mathbf{P}(t_n) = \mathit{true}, \text{ atunci } \mathbf{P}(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = \mathit{true}.$$

Atunci $\mathbf{P}(t) = \mathit{true}$, oricare $t \in T_\Sigma(X)$.

Amintiri - Algebra termenilor

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Definiție

Mulțimea S-sortată a termenilor $T_\Sigma(X)$ este o (S, Σ)-algebră, numită algebra termenilor cu variabile din X și notată tot $T_\Sigma(X)$, cu operațiile definite astfel:

- pt. or. $\sigma : \to s$ din Σ, operația corespunzătoare este
$$T_\sigma := \sigma \in T_\Sigma(X)_s$$
- pt. or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ din Σ, operația corespunzătoare este
$$T_\sigma : T_\Sigma(X)_{s_1 \ldots s_n} \to T_\Sigma(X)_s$$
$$T_\sigma(t_1, \ldots, t_n) := \sigma(t_1, \ldots, t_n)$$
or. $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$.

- T_Σ algebra termenilor fără variabile $(X = \emptyset)$

Amintiri - Algebra inițială

Definiție

$\mathcal{I}$ este (S, Σ)-algebră inițială dacă pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B}$ există un unic morfism $f : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$.

Corolar

T_Σ este (S, Σ)-algebra inițială.

Cuprins

Algebre libere

Algebră liberă

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este liber generată de X dacă

Algebră liberă

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este liber generată de X dacă

- $X \subseteq A_S$, i.e. exista funcția S-sortată incluziune a lui X în A_S $i_A : X \hookrightarrow A_S$,

Algebră liberă

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este liber generată de X dacă

- $X \subseteq A_S$, i.e. exista funcția S-sortată incluziune a lui X în A_S $i_A : X \hookrightarrow A_S$,
- pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ și orice funcție S-sortată $f : X \to B_S$, există un unic (S, Σ)-morfism $\tilde{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ astfel încât

$$i_A; \tilde{f} = f.$$

Proprietăți

Teoremă

Dacă $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{B}$ *sunt liber generate de* X*, atunci* $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$*.*

Proprietăți

Teoremă

Dacă $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sunt liber generate de X, atunci $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Demonstrație

- Fie $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ și $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ două (S, Σ)-algebre liber generate de X.
- Notăm cu $i_A : X \hookrightarrow A_S$ și $i_B : X \hookrightarrow B_S$ funcțiile S-sortate incluziune ale lui X în A_S și, respectiv, B_S.
- Demonstrația are patru pași:

Demonstrație (cont.)

1. Deoarece $\mathcal{A}$ este liber generată de X, există un unic (S, Σ)-morfism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ astfel încât $i_A; f = i_B$.
2. Similar, deoarece $\mathcal{B}$ este liber generată de X, există un unic (S, Σ)-morfism $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ astfel încât $i_B; g = i_A$.
3. Avem $i_A; (f; g) = (i_A; f); g = i_B; g = i_A$ și $i_A; 1_{\mathcal{A}} = i_A$. Cum $\mathcal{A}$ este liber generată de X, morfismele $f; g$ și $1_{\mathcal{A}}$ sunt unice cu proprietatea de mai sus, deci $f; g = 1_{\mathcal{A}}$.
4. Avem $i_B; (g; f) = (i_B; g); f = i_A; f = i_B$ ș i $i_B; 1_{\mathcal{B}} = i_B$. Cum $\mathcal{B}$ este liber generată de X, obținem că $g; f = 1_{\mathcal{B}}$.

Din egalitățile obținute la 3 și 4, deducem că f și g sunt izomorfisme.

$\square$

Evaluarea termenilor în algebre

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Teoremă

Fie $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră. Orice funcție S-sortată

$$e : X \to B_S$$

se extinde unic la un (S, Σ)-morfism

$$\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}.$$

- e dă interpretarea, evaluarea variabilelor în mulțimi S-sortate.
- $\tilde{e}$ dă interpretarea, evaluarea termenilor în algebre.

Demonstrație.

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și $e : X \to B_S$ o funcție S-sortată. Demonstrăm că există un unic morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ astfel încât $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Existența. Definim $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}\tilde{e}(t) \text{ este definit"}).$$

- *pasul inițial:*
  - dacă $x \in X_s$, atunci $\tilde{e}_s(x) := e_s(x)$,
  - dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $\tilde{e}_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$ astfel încât $\tilde{e}_{s_1}(t_1), \ldots, \tilde{e}_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $\tilde{e}_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) := B_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \ldots, \tilde{e}_{s_n}(t_n))$.

Conform principiului inducției pe termeni, $\tilde{e}(t)$ este definit pentru orice $t \in T_\Sigma(X)$. Evident, $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Mai trebuie arătat că $\tilde{e}$ este morfism - exercițiu!

Demonstrație. (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ un morfism astfel încât $g_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$. Demonstrăm că $g = \tilde{e}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "g_s(t) = \tilde{e}_s(t)").$$

- *pasul inițial:*
  - dacă $x \in X_s$, atunci $g_s(x) = e_s(x) = \tilde{e}_s(x)$,
  - dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = B_\sigma = \tilde{e}_s(\sigma)$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$ astfel încât $g_{s_1}(t_1) = \tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n) = \tilde{e}_{s_n}(t_n)$, atunci $g_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = B_\sigma(g_{s_1}(t_1), \dots, g_{s_n}(t_n)) = B_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n)) = \tilde{e}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n))$.

Conform principiului inducției pe termeni, $g_s(t) = \tilde{e}_s(t)$, oricare $t \in T_\Sigma(X)_s$, deci $g = \tilde{e}$.

□

Consecința

Corolar

$T_{\Sigma}(X)$ este (S, Σ)-algebra liber generată de X.

Consecința

Corolar

$T_\Sigma(X)$ este (S,Σ)-algebra liber generată de X.

- O expresie este un element dintr-o algebră liberă.
- Pentru a evalua un termen t cu variabile din X într-o (S,Σ)-algebră $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$, este suficient să evaluăm variabilele din X în B_S, i.e. să definim o funcție $e : X \to B_S$.

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat, + : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

X: $X_{nat} = \{x, y\}$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat, + : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

X: $X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X)$: $T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \ldots,$
$+(0, 0), +(0, x), +(x, y), \star(0, +(s(0), 0)), \ldots\}$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat, + : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

X: $X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X)$: $T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \ldots,$
$+(0, 0), +(0, x), +(x, y), \star(0, +(s(0), 0)), \ldots\}$

$NATEXP$-algebra $\mathcal{A}$: mulțimea suport $A_{nat} = \mathbb{Z}_4$ și operațiile obișnuite.

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat, + : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

X: $X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X)$: $T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \ldots,$
$+(0,0), +(0,x), +(x,y), \star(0, +(s(0),0)), \ldots\}$

$NATEXP$-algebra $\mathcal{A}$: mulțimea suport $A_{nat} = \mathbb{Z}_4$ și operațiile obișnuite.

O interpretare a termenilor din $T_{NATEXP}(X)$ în $\mathcal{A}$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat, + : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

X: $X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X)$: $T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \ldots, +(0,0), +(0,x), +(x,y), \star(0, +(s(0), 0)), \ldots\}$

$NATEXP$-algebra $\mathcal{A}$: mulțimea suport $A_{nat} = \mathbb{Z}_4$ și operațiile obișnuite.

O interpretare a termenilor din $T_{NATEXP}(X)$ în $\mathcal{A}$

- definim $e : X \to A_{nat}$, $e(x) := 1$, $e(y) := 3$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat, + : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

X: $X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X)$: $T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \ldots,$
$+(0, 0), +(0, x), +(x, y), \star(0, +(s(0), 0)), \ldots\}$

$NATEXP$-algebra $\mathcal{A}$: mulțimea suport $A_{nat} = \mathbb{Z}_4$ și operațiile obișnuite.

O interpretare a termenilor din $T_{NATEXP}(X)$ în $\mathcal{A}$

- definim $e : X \to A_{nat}$, $e(x) := 1$, $e(y) := 3$

Exemple de interpretări ale termenilor:

- $\tilde{e}(+(x, y)) = A_+(e(x), e(y)) = 1 + 3 = 0(mod\ 4)$

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat, + : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

X: $X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X)$: $T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \ldots,$
$+(0,0), +(0,x), +(x,y), \star(0, +(s(0), 0)), \ldots\}$

$NATEXP$-algebra $\mathcal{A}$: mulțimea suport $A_{nat} = \mathbb{Z}_4$ și operațiile obișnuite.

O interpretare a termenilor din $T_{NATEXP}(X)$ în $\mathcal{A}$

- definim $e : X \to A_{nat}$, $e(x) := 1$, $e(y) := 3$

Exemple de interpretări ale termenilor:

- $\tilde{e}(+(x,y)) = A_+(e(x), e(y)) = 1 + 3 = 0(mod\ 4)$
- $\tilde{e}(\star(s(x), s(s(0)))) = A_\star(A_s(e(x)), A_s(A_s(A_0))) =$
  $(1+1) \star (0+1+1) = 2 \star 2 = 0(mod\ 4)$

Exemple

Exemplu

$STIVA = (S = \{elem, stiva\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 : \to elem, \; empty : \to stiva, push : elem\ stiva \to stiva,$
  $pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

$STIVA$-algebra $\mathcal{A}$:

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$STIVA$-algebra $\mathcal{B}$:

- Mulțimea suport: $B_{elem} := \{0\}$, $B_{stiva} := \mathbb{N}$
- Operații: $B_0 := 0$, $B_{empty} := 0$, $B_{push}(0, n) := n + 1$,
  $B_{pop}(0) := 0$, $B_{pop}(n) := n - 1$, pt. $n \geq 1$, $B_{top}(n) := 0$

Exemple

Exemplu (Cont.)

X: $X_{elem} = \{x, y\}$, $X_{stiva} = \{s\}$

Fie $t := push(x, push(y, s)) \in T_{STIVA}(X)_{stiva}$.

O interpretare a lui t în $\mathcal{A}$:

- $e : X \to A$, $e(x) := 5$, $e(y) := 3$, $e(s) := 6\ 7$
- $\tilde{e}(t) = A_{push}(e(x), A_{push}(e(y), e(s))) = 5\ 3\ 6\ 7$

O interpretare a lui t în $\mathcal{B}$:

- $e : X \to B$, $e(x) := 0$, $e(y) := 0$, $e(s) := 10$
- $\tilde{e}(t) = B_{push}(e(x), B_{push}(e(y), e(s))) = (10 + 1) + 1 = 12$

Proprietăți

Propoziție

Fie $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un (S, Σ)-morfism surjectiv și X o mulțime de variabile. Pentru orice (S, Σ)-morfism $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$, există un (S, Σ)-morfism $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ astfel încât $g; h = f$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "h"] & \mathcal{B} \\
 & T_\Sigma(X) \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "g"]
\end{tikzcd}$$

Demonstrație.

- Fie $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ un morfism.
- Cum h este surjectiv, pt. or. $x \in X_s$, există $a \in A_s$ astfel încât $h_s(a) = f_s(x)$.
- Pentru orice $s \in S$ și $x \in X_s$, alegem $a \in A_s$ astfel încât $h_s(a) = f_s(x)$ și definim $e_s(x) := a$.
- Deci $e : X \to A$.
- Considerăm $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ extensia unică a lui $e : X \to A$.
- Cum $T_\Sigma(X)$ este algebră liberă și $(\tilde{e}; h)_s(x) = f_s(x)$, or. $x \in X_s$, obținem că $\tilde{e}; h = f$.
- Luăm $g := \tilde{e}$.

$\square$

Proprietăți

Notație. Dacă $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este un (S, Σ)-morfism și $X \subseteq A_S$, atunci $f \restriction_X$ este restricția lui f la X, i.e. $(f \restriction_X)_s(x) = f_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Proprietăți

Notație. Dacă $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este un (S, Σ)-morfism și $X \subseteq A_S$, atunci $f\restriction_X$ este restricția lui f la X, i.e. $(f\restriction_X)_s(x) = f_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Propoziție

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și X o mulțime de variabile. Dacă $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ și $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ sunt morfisme, atunci

$$g = f \Leftrightarrow g\restriction_X = f\restriction_X.$$

Demonstrație.

Exercițiu! Se demonstrează că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}g_s(t) = f_s(t)\text{"}).$$

$\square$

Proprietăți

Propoziție

Dacă $X \simeq Y$, atunci $T_\Sigma(X) \simeq T_\Sigma(Y)$.

Demonstrație.

Exercițiu! A se vedea demonstrația pentru:

două algebre liber generate de X sunt izomorfe.

$\square$

Concluzii

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X mulțime de variabile.

- T_Σ este (S, Σ)-algebră inițială.
- $T_\Sigma(X)$ este (S, Σ)-algebră liber generată de X.
- T_Σ este liber generată de $\emptyset$.

Congruențe

Congruențe

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră.

Definiție

O relație S-sortată $\equiv = \{\equiv_s\}_{s \in S} \subseteq A_S \times A_S$ este o congruență dacă:

- $\equiv_s \subseteq A_s \times A_s$ este echivalență, or. $s \in S$:
  - reflexivă
  - simetrică
  - tranzitivă
- $\equiv$ este compatibilă cu operațiile:

$$\text{pt. or. } \sigma : s_1 \ldots s_n \to s \text{ și or. } a_i, b_i \in A_{s_i},\ i = 1, \ldots, n$$
$$a_i \equiv_{s_i} b_i, \text{ or. } i = 1, \ldots, n \Rightarrow A_\sigma(a_1, \ldots, a_n) \equiv_s A_\sigma(b_1, \ldots, b_n)$$

Exemplu

Exemplu

$NAT = (S, \Sigma)$

- $S = \{nat\}$
- $\Sigma = \{0 : \to nat,\ succ : nat \to nat\}$

NAT-algebra $\mathcal{A}$

- Mulțimea suport: $A_{nat} := \mathbb{N}$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{succ}(x) := x + 1$

$n_1 \equiv_{nat} n_2 \Leftrightarrow 2|(n_1 - n_2)$ este congruență (congruență modulo 2):

- $\equiv_{nat}$ este echivalență
- dacă $n_1 \equiv_{nat} n_2$, atunci $A_{succ}(n_1) \equiv_{nat} A_{succ}(n_2)$

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$
- $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ devine (S, Σ)-algebră, notată $\mathcal{A}/_{\equiv}$, cu operațiile:

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$
- $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ devine (S, Σ)-algebră, notată $\mathcal{A}/_{\equiv}$, cu operațiile:
  - $(A/_{\equiv})_\sigma := [A_\sigma]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : \to s$,

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$
- $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ devine (S, Σ)-algebră, notată $\mathcal{A}/_{\equiv}$, cu operațiile:
    - $(A/_{\equiv})_\sigma := [A_\sigma]_{\equiv_s}$, or. $\sigma :\to s$,
    - $(A/_{\equiv})_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}}) := [A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ și $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$.

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$
- $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ devine (S, Σ)-algebră, notată $\mathcal{A}/_{\equiv}$, cu operațiile:
  - $(A/_{\equiv})_\sigma := [A_\sigma]_{\equiv_s}$, or. $\sigma :\to s$,
  - $(A/_{\equiv})_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}}) := [A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ și $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$.
- $\mathcal{A}/_{\equiv}$ se numește algebră cât a lui $\mathcal{A}$ prin congruența $\equiv$.

Algebra cât

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Definim:

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$
- $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ devine (S, Σ)-algebră, notată $\mathcal{A}/_{\equiv}$, cu operațiile:
  - $(A/_{\equiv})_\sigma := [A_\sigma]_{\equiv_s}$, or. $\sigma :\to s$,
  - $(A/_{\equiv})_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}}) := [A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ și $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$.
- $\mathcal{A}/_{\equiv}$ se numește algebră cât a lui $\mathcal{A}$ prin congruența $\equiv$.
- $[\cdot]_{\equiv} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/_{\equiv}$, $a \mapsto [a]_{\equiv_s}$, or. $a \in A_s$, este morfism surjectiv.

$$[a]_{\equiv_s} = [b]_{\equiv_s} \Leftrightarrow a \equiv_s b \Leftrightarrow (a, b) \in \equiv_s$$

Exemple

Exemplu

STIVA: $S = \{elem, stiva\}$, $\Sigma = \{0 :\to elem,\ empty :\to stiva,$
$push : elem\ stiva \to stiva, pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

STIVA-algebra $\mathcal{A}$:

- $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$\equiv = \{\equiv_{elem}, \equiv_{stiva}\}$ congruență pe $\mathcal{A}$:

- $\equiv_{elem} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\equiv_{stiva} := \{(w, w') \mid w, w' \in \mathbb{N}^*, |w| = |w'|\}$

$\mathcal{A}/_{\equiv} \simeq \mathcal{B}$, unde *STIVA*-algebra $\mathcal{B}$:

- $B_{elem} := \{0\}$, $B_{stiva} := \mathbb{N}$
- Operații: $B_0 := 0$, $B_{empty} := 0$, $B_{push}(0, n) := n + 1$,
  $B_{pop}(0) := 0$, $B_{pop}(n) := n - 1$, pt. $n \geq 1$, $B_{top}(n) := 0$

Nucleul unui morfism

Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism de (S, Σ)-algebre.

Nucleul lui f este $Ker(f) = \{Ker(f_s)\}_{s \in S}$, unde

$$Ker(f_s) := \{(a, a') \in A_s \times A_s \mid f_s(a) = f_s(a')\}, \text{ or. } s \in S.$$

Propoziție

1. $Ker(f)$ este o congruență pe $\mathcal{A}$.
2. Dacă $\equiv$ este o congruență pe $\mathcal{A}$, atunci $Ker([\cdot]_{\equiv}) = \equiv$.

Demonstrație.

Exercițiu!

Proprietatea de universalitate

Teoremă (Proprietatea de universalitate a algebrei cât)

Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$.
Pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B}$ și pentru orice morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$, *există un unic morfism* $\overline{h} : \mathcal{A}/_{\equiv} \to \mathcal{B}$ *a.î.* $[\cdot]_{\equiv}; \overline{h} = h$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "{[\cdot]_{\equiv}}"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{A}/_{\equiv} \arrow[dl, dotted, "\overline{h}"] \\ \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$.

- **Existența:** Definim $\overline{h}_s([a]_{\equiv_s}) := h_s(a)$, pentru orice $a \in A_s$.
  - $\overline{h}$ este bine definit: Tb. să arătăm $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s} \Rightarrow h_s(a_1) = h_s(a_2)$. Presupunem că $[a_1]_{\equiv_s} = [a_2]_{\equiv_s}$. Atunci $(a_1, a_2) \in \equiv_s \subseteq Ker(h)$, deci $h_s(a_1) = h_s(a_2)$.
  - $\overline{h}$ este morfism:
    - dacă $\sigma : \to s \in \Sigma$, atunci $\overline{h}_s((A/_\equiv)_\sigma) = \overline{h}_s([A_\sigma]_{\equiv_s}) = h_s(A_\sigma) = B_\sigma$.
    - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ si $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$, atunci

$$\begin{aligned}
\overline{h}_s((A/_\equiv)_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}})) &= \overline{h}_s([A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}) \\
&= h_s(A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)) \\
&= B_\sigma(h_{s_1}(a_1), \ldots, h_{s_n}(a_n)) \\
&= B_\sigma(\overline{h}_{s_1}([a_1]_{\equiv_{s_1}}), \ldots, \overline{h}_{s_n}([a_n]_{\equiv_{s_n}})).
\end{aligned}$$

- **Unicitatea:** Fie $g : \mathcal{A}/_\equiv \to \mathcal{B}$ a.î. $[\cdot]_\equiv ; g = h$. Atunci $g_s([a]_{\equiv_s}) = h_s(a) = \overline{h}_s([a]_{\equiv_s})$, or. $a \in A_s$.

$\square$

Consecințe

Propoziție ($\star$)

Fie $\mathfrak{K}$ o clasă de (S, Σ)-algebre. Dacă

$$\equiv_{\mathfrak{K}} := \bigcap \{Ker(h) \mid h : T_\Sigma \to \mathcal{B} \in \mathfrak{K} \text{ morfism}\},$$

atunci următoarele proprietăți sunt adevărate:

1. $\equiv_{\mathfrak{K}}$ este congruența pe T_Σ,
2. pt. or. $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$, există un unic morfism $\overline{h} : T_\Sigma/_{\equiv_{\mathfrak{K}}} \to \mathcal{B}$.

Demonstrație

1. Rezultă din faptul că intersecția unei familii arbitrare de congruențe este congruență (exercițiu!).

2. Fie $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$ și $h : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ unicul morfism.
   - **Existența:** Deoarece $\equiv_{\mathfrak{K}} \subseteq Ker(h)$, din Proprietatea de universalitate a algebrei cât există un unic morfism $\overline{h} : T_\Sigma/_{\equiv_{\mathfrak{K}}} \to \mathcal{B}$ astfel încât $[\cdot]_{\equiv_{\mathfrak{K}}}; \overline{h} = h$.
   - **Unicitatea:** Fie $g : T_\Sigma/_{\equiv_{\mathfrak{K}}} \to \mathcal{B}$ un morfism. Atunci $[\cdot]_{\equiv_{\mathfrak{K}}}; g : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ morfism. Deci $[\cdot]_{\equiv_{\mathfrak{K}}}; g = h$. Morfismul g verifică proprietatea care îl definește în mod unic pe $\overline{h}$, deci $g = \overline{h}$.

$\square$

Pe săptămâna viitoare!