Curs 11:

Proprietăți de închidere pentru limbajele independente de context

Teoremă: Clasa limbajelor independente de context este închisă la reuniune, concatenare, iterația Kleene.

Dem. Fie L_1 și L_2 limbaje independente de context, $L_1 = L(G_1)$, $L_2 = L(G_2)$, $G_1 = (N_1, T_1, S_1, P_1)$, $G_2 = (N_2, T_2, S_2, P_2)$ gramatici indep. de context.
presupunem că $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ (dacă nu, putem redenumi neterminalele)

1. închiderea la reuniune

construim $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\})$ unde $S \notin N_1$, $S \notin N_2$.

$L(G) = L_1 \cup L_2$ și G este independentă de context.

$$w \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow_G^* w \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} S \Rightarrow_G S_1 \Rightarrow_{G_1}^* w \text{ sau} \\ S \Rightarrow_G S_2 \Rightarrow_{G_2}^* w \end{array}\right\} \Leftrightarrow w \in L_1 \cup L_2$$

Deci $L_1 \cup L_2$ este independentă de context. $\square$

2. închiderea la concatenare

construim $G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$ unde $S \notin N_1$, $S \notin N_2$

$w \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow_G^* w \Leftrightarrow S \Rightarrow_G S_1 S_2 \Rightarrow^* w \Leftrightarrow \exists\, w_1, w_2$ a.î. $S_1 \Rightarrow_G^* w_1$ și $S_2 \Rightarrow_G^* w_2$ unde $w_1 w_2 = w$. Din construcție,

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \Rightarrow_G^* w_1 \Leftrightarrow S_1 \Rightarrow_{G_1}^* w_1 \\ S_2 \Rightarrow_G^* w_2 \Leftrightarrow S_2 \Rightarrow_{G_2}^* w_2 \end{array}\right\} \Rightarrow w \in L_1 L_2$$

Cum G este independentă de context $\Rightarrow L_1 L_2$ este independentă de context. $\square$

3. iterația Kleene:

Construim $G = (N_1 \cup \{S\}, T_1, S, P_1 \cup \{S \to \lambda \mid S S_1\})$, cu $S \notin N_1$.

$w \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow_G^* w \Leftrightarrow S \Rightarrow_G^* \underbrace{S_1 S_1 \ldots S_1}_{n \text{ ori}} \Rightarrow_G^* w \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} w = w_1 w_2 \ldots w_n \text{ cu } S_1 \Rightarrow_{G_1}^* w_i,\ i = \overline{1,n} \Leftrightarrow w \in L_1^* \\ G \text{ este ind. context} \end{array}\right\} \Rightarrow L_1^* \text{ este indep. de context}$$

$\square$

Fie V, W alfabete.

Teoremă: $\varphi : V \to \mathcal{P}(W^*)$ a. î. $\varphi(a)$ este indep. de context pt $\forall a \in V$.
(substituție independentă de context).
Fie $L \subseteq V^*$ un limbaj independent de context.
Atunci $\varphi(L)$ este limbaj independent de context.

Dem: Fie $G=(N,T,S,P)$ o gramatică independentă de context pentru L.
Deci $L(G)=L$.
Definim $G_a=(N_a, W, S_a, P_a)$ gramatică independentă de context a. î.
$L(G_a)=\varphi(a)$, $\forall a \in V$.

Construim gramatica $G'=(N', W, S, P')$ unde

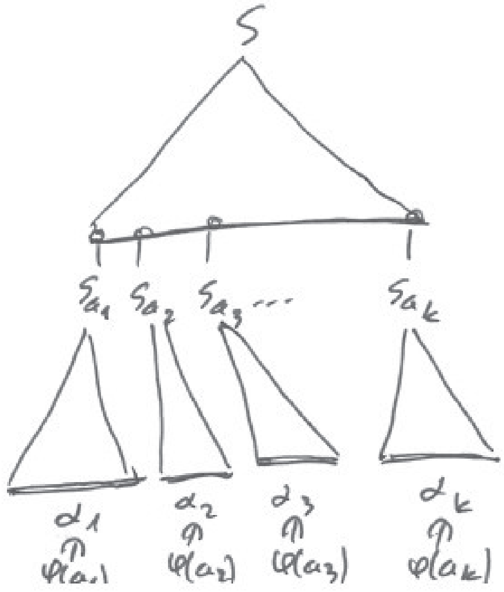
$N' = N \cup \{S_a \mid a \in V\} \cup \bigcup_{a \in V} (N_a \setminus \{S_a\})$

$P' = \bigcup_{a \in V} P_a \cup \{X \to \alpha' \mid X \to \alpha \in P$ și α' este obținută din α înlocuind aparițiile lui a cu S_a, $\forall a \in V\}$

ex: $\alpha = a a A b$
$\alpha' = S_a S_a A S_b$.

Avem: $w \in L(G') \Leftrightarrow S \Rightarrow^*_{G'} w \Leftrightarrow S \Rightarrow^*_{G'} S_{a_1} S_{a_2} \dots S_{a_k} \Rightarrow^* w$
$\Leftrightarrow w \in \varphi(a_1)\varphi(a_2)\dots\varphi(a_k) \Leftrightarrow w \in \varphi(a_1 \dots a_k)$ unde $S \Rightarrow^*_G a_1 \dots a_k$

Deci $w \in L(G') \Leftrightarrow w \in \varphi(L)$
G' este indep. de context
$\Big\} \Rightarrow$ clasa limbajelor indep. de context este închisă la substituții indep. de context. □



Teoremă: Familia limbajelor independente de context este închisă la morfisme inverse.

$h : V^* \to U^*$, $h^{-1} : U^* \to 2^{V^*}$, $h^{-1}(x) = \{ y \mid h(y) = x \}$

$h(xy) = h(x) h(y)$.

obs: h^{-1} nu este substituție
$h^{-1}(xy) \neq h^{-1}(x) h^{-1}(y)$.

Dem: $h : V^* \to U^*$, $L \subseteq U^*$ indep. de context.

Fie A ~~o gramatica~~ indep. de context $L = L(A)$, $A = (Q, U, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$

$h^{-1}(L) = \bigcup_{x \in L} h^{-1}(x)$. Să dem. că $h^{-1}(L)$ este indep. de context.

Construim $A' = (Q', V, \Gamma, \delta', (q_0, \lambda), z_0, F \times \{\lambda\})$

$Q' = Q \times \{ x \in U^* \mid \exists a \in V \text{ a.î. } h(a) = zx,\ z \in U^* \}$

$a \to XYZt$
$b \to XXYY$

i) $\delta'((q, x), \lambda, A) = \{ ((p, x), \alpha) \mid (p, \alpha) \in \delta(q, \lambda, A) \}$ $q \in Q$, $A \in \Gamma$

ii) $\delta'((q, ax), \lambda, A) = \{ ((p, x), \alpha) \mid (p, \alpha) \in \delta(q, a, A) \}$ $a \in U$

iii) $\delta'((q, \lambda), a, Y) = \{ ((q, h(a)), Y) \}$, $a \in V$.

Afirmație: $L(A') = h^{-1}(L(A))$

"$\supseteq$" Fie $w = a_1 \dots a_n$, $a_i \in V$ a.î. $h(w) \in L(A)$.

$h(w) = h(a_1) \dots h(a_n) = w_1 \dots w_n \in L(A)$

$$(q_0, w_1 \dots w_n, z_0) \vdash_A^* (q_1, w_2 \dots w_n, \alpha_1) \vdash_A^* (q_2, w_3 \dots w_n, \alpha_2) \vdash_A^* \dots$$

$$\dots \vdash_A^* (q_n, \lambda, \alpha_n),\ q_n \in F$$

Avem: $((q_0, \lambda), a_1 \dots a_n, z_0) \vdash_{A'}^* ((q_0, w_1), a_2 \dots a_n, z_0) \vdash_{A'}^*$

$((q_1, \lambda), a_2 \dots a_n, \alpha_1) \vdash_{A'}^* ((q_1, w_2), a_3 \dots a_n, \alpha_1) \vdash_{A'}^*$

$((q_2, \lambda), a_3 \dots a_n, \alpha_2) \vdash_{A'}^* \dots \vdash_{A'}^* ((q_n, \lambda), \lambda, \alpha_n)$

este în $F \times \{\lambda\}$

deci $w \in L(A')$.

Reciproc: "$\subseteq$" fie $w = a_1 \dots a_n \in L(A')$
să arăt că $w \in R^{-1}(L(A))$. exercițiu.

Teoremă: Familia CFL este închisă la intersecție cu limbajele regulate.

Dem: Fie $A_1 = (Q, V, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ un automat push down,
$A_2 = (K, V, f, s_0, E)$ un automat finit determinist.

Construim un automat push down A' a.î. $L_f^{\lambda}(A') = L^{\lambda}(A_1) \cap L(A_2)$.

$$A' = (Q \times K, V, \Gamma, \delta', (q_0, s_0), z_0, Q \times E)$$

$$\delta'((q,s),a,A) = \{((q',s'),\alpha) \mid (q',\alpha) \in \delta(q,a,A),\ s' = f(s,a)\}\ a \in V$$

$\forall q \in Q \quad a \in V$
$s \in K \quad A \in \Gamma$

$$\delta'((q,s),\lambda,A) = \{((q',s),\alpha) \mid (q',\alpha) \in \delta(q,\lambda,A)\}.$$

Afirmație: $L_f^{\lambda}(A') = L^{\lambda}(A_1) \cap L(A_2)$.

(*) $$((q,s),x,A) \vdash_{A'}^{*} ((q',s'),\lambda,\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} (q,x,A) \vdash_{A_1}^{*} (q',\lambda,\lambda) \\ f(s,x) = s' \end{cases}$$

în (*) $\left.\begin{array}{l} q = q_0 \\ s = s_0 \\ A = z_0 \\ s' \in E \end{array}\right| \Rightarrow L_f^{\lambda}(A') = L^{\lambda}(A_1) \cap L(A_2)$.

Demonstrăm relația (*) inducție după nr. de pași în calculul $\vdash_{A'}^{n}$

$n = 0$ evident

pp. adev. $\forall \leq n$, dem pt $n+1$

$$((q,s),ay,A) \vdash_{A'} ((\bar{q},\bar{s}),\underset{y_1 \dots y_p}{y},x_1 \dots x_p) \vdash_{A'}^{n} ((q',s'),\lambda,\lambda) \quad a \in V \cup \{\lambda\}$$

$$((\bar{q},\bar{s}),y_1,x_1) \vdash_{A'}^{*} ((\bar{q}_1,\bar{s}_1),\lambda,\lambda)$$
$$((\bar{q}_1,\bar{s}_1),y_2,x_2) \vdash_{A'}^{*} ((\bar{q}_2,\bar{s}_2),\lambda,\lambda)$$
$$- - -$$
$$(\bar{q}_{p-1},\bar{s}_{p-1},y_p,x_p) \vdash_{A'}^{*} ((q',s'),\lambda,\lambda)$$

ip. inducție: $(\bar{q}, y_1, x_1) \vdash_{A_1}^{*} (\bar{q}_1, \lambda, \lambda)$ și $f(\bar{s}, y_1) = \bar{s}_1$

$(\bar{q}_1, y_2, x_2) \vdash_{A}^{*} (\bar{q}_2, \lambda, \lambda)$ și $f(\bar{s}_1, y_2) = \bar{s}_2$

- - - -

$(\bar{q}_{p-1}, y_{p-1}, x_p) \vdash_{A}^{*} (q', \lambda, \lambda)$ și $f(\bar{s}_{p-1}, y_p) = s'$

$(q, a, A) \vdash_{A}^{*} (\bar{q}, \lambda, x_1 \dots x_p)$ $\qquad f(s, a) = \bar{s}$

deci $(q, ay, A) \vdash_{A}^{*} (q', \lambda, \lambda)$ $\qquad$ deci $f(s, ay) = s'$. □

Demonstrație alternativă:

$G = (N, V, S, P)$ gram. indep. de context în forma normală Chomsky,
$A = (K, V, f, s_0, \Sigma)$ un autom. finit determinist.

Construim $G' = (N' \cup \{S_0\}, V, S_0, P')$ unde

$N' = K \times N \times K$

$$P': \begin{cases} - S_0 \to (s_0, S, s) & , s \in \Sigma \\ - (s, X, s') \to (s, Y, s'')(s'', Z, s') & X \to YZ \in P \\ & s, s', s'' \in K \\ - (s, X, s') \to a, & \text{pentru } X \to a \in P \\ & s, s' \in K, \ f(s, a) = s' \end{cases}$$

$L(G') = L(G) \cap L(A)$

avem: $(s, A, s') \Rightarrow_{G'}^{*} w \in V^* \iff \begin{cases} f(s, w) = s' \\ A \Rightarrow_{G}^{*} w \end{cases}$

Consecință a propriet. de închidere:

este $L=\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ indep. de context ?

$L \cap a^+b^+a^+b^+ = \{a^n b^m a^n b^m \mid n, m \geq 1\} \notin CFG$ (lema de pompare).