Logică matematică și computațională
Cursul IV

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

1. Relaţii binare pe o mulţime

Relații binare pe o mulțime

- Continuăm studiul relațiilor binare pe o mulțime, cu:
  - relațiile de echivalență
  - închiderile relațiilor binare pe o mulțime

- Amintim următoarea:

Definiție

Fie A o mulțime. Se numește *relație binară pe A* o submulțime R a produsului cartezian $A \times A$. Pentru orice $a, b \in A$, faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează cu aRb și se citește: *a este în relația R cu b*.

Notație

Pentru orice mulțime A, produsul cartezian $A \times A$ se mai notează cu A^2.

- Așadar, o relație binară pe o mulțime A este orice $R \subseteq A^2$.
- Relațiile binare pe o mulțime sunt mulțimi, așadar li se pot aplica operațiile obișnuite cu mulțimi: reuniunea, intersecția, diferența etc., pot fi puse în relațiile $\subseteq$, $\subsetneq$ etc..

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Amintim:

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie A o mulțime și $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se zice:

- *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;
- *simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc, atunci aRc;
- *(relație de) preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă;
- *(relație de) echivalență* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemplu

În mod evident, pentru orice mulțime A, A^2 este o relație de echivalență pe A, i. e. este o relație binară pe A, reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Relații de echivalență

Amintim, pentru o mulțime A arbitrară, fixată:

Definiție

$\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$ este o relație binară pe A, numită *diagonala lui A*.

Remarcă

Δ_A este o funcție (i. e. o relație binară funcțională totală), anume *funcția identică a lui A* (*identitatea lui A*): $\Delta_A = id_A : A \to A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.

Remarcă

Δ_A este chiar relația de egalitate pe A, adică, pentru orice $a, b \in A$, avem: $a \Delta_A b$ ddacă $a = b$.

Corolar

Din remarca anterioară se deduce foarte ușor faptul că Δ_A este o relație de echivalență pe A.

Relații de echivalență

Notație

Pentru orice număr real x, vom nota cu $[x]$ partea întreagă a lui x (notație **consacrată**), și cu $frac\{x\}$ partea fracționară a lui x (notație **neconsacrată**). I. e.:

- $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\} \in \mathbb{Z}$
- $frac\{x\} := x - [x] \in [0, 1) \subset \mathbb{R}$

Exemplu

- $[5] = 5$ și $frac\{5\} = 0$
- $[-7] = -7$ și $frac\{-7\} = 0$
- $[4, 3] = 4$ și $frac\{4, 3\} = 0, 3$
- $[-3, 2] = -4$ și $frac\{-3, 2\} = 0, 8$

Remarcă

Este imediat faptul că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc: $x \in \mathbb{Z}$ ddacă $x = [x]$.

Exercițiu (temă pentru seminar)

Considerăm următoarea relație binară pe $\mathbb{R}$, la care vom mai reveni în acest curs și pe care o vom nota ρ pe întreg parcursul acestui curs:

- $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x - y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$

Demonstrați că:

- $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, \mathit{frac}\{x\} = \mathit{frac}\{y\}\} \subset \mathbb{R}^2$ (**indicație:** folosiți expresia părții fracționare de pe slide–ul anterior, i. e. chiar definiția părții fracționare)
- ρ este o relație de echivalență pe $\mathbb{R}$

Partiție a unei mulțimi

Definiție

Fie A o mulțime nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de submulțimi ale lui A. Familia $(A_i)_{i \in I}$ se numește *partiție* a lui A ddacă satisface următoarele condiții:

1. pentru orice $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$
2. pentru orice $i, j \in I$, dacă $i \neq j$, atunci $A_i \cap A_j = \emptyset$ (i. e. mulțimile din familia $(A_i)_{i \in I}$ sunt două câte două disjuncte)
3. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$

Exemplu

Următoarele familii de mulțimi sunt partiții ale lui $\mathbb{N}$ (unde notăm $a\mathbb{N} + b = \{an + b \mid n \in \mathbb{N}\}$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$):

- $\{\mathbb{N}\}$
- $\{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N} + 1\}$
- $\{5\mathbb{N}, 5\mathbb{N} + 1, 5\mathbb{N} + 2, 5\mathbb{N} + 3, 5\mathbb{N} + 4\}$
- $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, altfel scrisă: $(\{n\})_{n \in \mathbb{N}}$

Partiție a unei mulțimi

Propoziție

Fie A o mulțime nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o partiție a lui A. Atunci, pentru orice $x \in A$, există un unic $i_0 \in I$, a. î. $x \in A_{i_0}$.

Demonstrație: Într-adevăr, considerând un element $x \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$, rezultă că există $i_0 \in I$, a. î. $x \in A_{i_0}$.
Presupunând prin absurd că există un $i_1 \in I$, cu $i_0 \neq i_1$ și $x \in A_{i_1}$, rezultă că $x \in A_{i_0} \cap A_{i_1} = \emptyset$, ceea ce este o contradicție. Deci $i_0 \in I$ este unic cu proprietatea că $x \in A_{i_0}$.

Clase de echivalență, mulțime factor

Pentru cele ce urmează, vom considera o mulțime nevidă A și o relație de echivalență $\sim$ pe A, i. e.:

- $\sim$ este o relație binară pe A: $\sim \subseteq A^2$
- $\sim$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \sim x$
- $\sim$ este **simetrică**: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \sim y$, atunci $y \sim x$
- $\sim$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, dacă $x \sim y$ și $y \sim z$, atunci $x \sim z$

Să observăm că, în definiția simetriei, putem interschimba x și y și continua seria de implicații, obținând implicație dublă, adică: $\sim$ este **simetrică** ddacă, pentru orice $x, y \in A$, are loc echivalența: $x \sim y$ ddacă $y \sim x$.

Definiție

Cu notațiile de mai sus, pentru fiecare $x \in A$, definim *clasa de echivalență a lui* x *raportat la* $\sim$ ca fiind următoarea submulțime a lui A, notată cu $\hat{x}$:
$\hat{x} := \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Remarcă

Cu notațiile de mai sus, observăm că simetria lui $\sim$ ne asigură de faptul că: pentru orice $x \in A$, $\hat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\}$.

Clase de echivalență, mulțime factor

Propoziție (proprietățile claselor de echivalență)

Cu notațiile de mai sus, au loc:

1. *pentru orice* $x \in A$, $x \in \hat{x}$, *și, așadar,* $\hat{x} \neq \emptyset$
2. *pentru orice* $x, y \in A$, *avem:*
   - *dacă* $x \sim y$, *atunci* $\hat{x} = \hat{y}$
   - *dacă* $(x, y) \notin \sim$, *atunci* $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$

Demonstrație: **(1)** Întrucât $\sim$ este reflexivă, pentru orice $x \in A$, avem: $x \sim x$, deci $x \in \hat{x}$, prin urmare $\hat{x}$ este nevidă.
(2) Fie $x, y \in A$, arbitrare, fixate.

- Dacă $x \sim y$, atunci:
  - pentru orice $z \in \hat{y}$, are loc $y \sim z$, ceea ce implică $x \sim z$ datorită tranzitivității lui $\sim$, așadar $z \in \hat{x}$, deci $\hat{y} \subseteq \hat{x}$;
  - conform simetriei lui $\sim$, are loc și $y \sim x$, prin urmare: pentru orice $z \in \hat{x}$, are loc $x \sim z$, ceea ce implică $y \sim z$ datorită tranzitivității lui $\sim$, așadar $z \in \hat{y}$, deci $\hat{x} \subseteq \hat{y}$;
  - rezultă că $\hat{x} = \hat{y}$.
- Dacă $(x, y) \notin \sim$, atunci, presupunând prin absurd că există $z \in \hat{x} \cap \hat{y}$, i. e. $z \in \hat{x}$ și $z \in \hat{y}$, adică $z \in A$ și $x \sim z$ și $z \sim y$, tranzitivitatea lui $\sim$ implică $x \sim y$, ceea ce este o contradicție cu ipoteza acestui caz; așadar $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$ în acest caz.

Clase de echivalență, mulțime factor

Propoziție (proprietățile claselor de echivalență)

Cu notațiile de mai sus, pentru orice $x, y \in A$*:*

- $x \sim y$ *ddacă* $y \sim x$ *ddacă* $x \in \hat{y}$ *ddacă* $y \in \hat{x}$ *ddacă* $\hat{x} = \hat{y}$
- $(x, y) \notin \sim$ *ddacă* $(y, x) \notin \sim$ *ddacă* $x \notin \hat{y}$ *ddacă* $y \notin \hat{x}$ *ddacă* $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$

Demonstrație: Fie $x, y \in A$, arbitrare, fixate.
Cum $\sim$ este simetrică, are loc echivalența: $x \sim y$ ddacă $y \sim x$, iar definiția claselor de echivalență ne asigură de faptul că fiecare dintre aceste condiții este echivalentă cu fiecare dintre condițiile $x \in \hat{y}$ și $y \in \hat{x}$.
Prin urmare (după cum se poate verifica aplicând metoda reducerii la absurd) au loc și echivalențele între negațiile proprietăților de mai sus: $(x, y) \notin \sim$ ddacă $(y, x) \notin \sim$ ddacă $x \notin \hat{y}$ ddacă $y \notin \hat{x}$.
Adăugând aceste proprietăți la propoziția precedentă, obținem, pentru orice $x, y \in A$:

- $x \sim y$ ddacă $y \sim x$ ddacă $x \in \hat{y}$ ddacă $y \in \hat{x}$ implică $\hat{x} = \hat{y}$
- $(x, y) \notin \sim$ ddacă $(y, x) \notin \sim$ ddacă $x \notin \hat{y}$ ddacă $y \notin \hat{x}$ implică $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$

Deci mai avem de demonstrat că implicațiile care încheie fiecare dintre cele două rânduri anterioare sunt chiar echivalențe, adică au rămas de demonstrat implicațiile reciproce acelora de la capetele celor două rânduri anterioare.

Clase de echivalență, mulțime factor

- Dacă $\hat{x} = \hat{y}$, atunci, cum $x \in \hat{x}$ conform propoziției anterioare, rezultă că $x \in \hat{y}$, ceea ce arată prima implicație reciprocă dintre cele două.
- Dacă $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$, atunci, întrucât $x \in \hat{x}$ conform propoziției anterioare, rezultă că $x \notin \hat{y}$, ceea ce încheie demonstrația celei de–a doua implicații reciproce.

O altă metodă de a demonstra implicațiile reciproce ale acestor două implicații este reducerea la absurd, folosind, pentru demonstrarea fiecărei implicații reciproce, cealaltă implicație directă:

- dacă $\hat{x} = \hat{y}$, și presupunem prin absurd că $(x, y) \notin \sim$, atunci, conform celei de–a doua implicații, rezultă că $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$, iar, acum, faptul că $\hat{x} = \hat{y}$ arată că $\hat{x} = \emptyset$, ceea ce este o contradicție cu propoziția precedentă;
- dacă $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$, și presupunem prin absurd că $x \sim y$, atunci, conform primei implicații, rezultă că $\hat{x} = \hat{y}$, și, acum, ca și mai sus, rezultă că $\hat{x} = \emptyset$, ceea ce este o contradicție cu propoziția precedentă.

Cu toate că, în acest caz, metoda a doua, a reducerii la absurd, este mai ineficientă decât prima metodă, această a doua metodă are meritul de a fi aplicabilă în cazul general al unor astfel de șiruri de echivalențe terminate prin implicații, între proprietăți complementare (spunem că două proprietăți sunt **complementare** ddacă, la un moment dat, una și numai una dintre ele este satisfăcută).

Clase de echivalență, mulțime factor

Definiție

Cu notațiile de mai sus, fiecare $x \in A$ se numește *reprezentant al clasei* $\hat{x}$.

Remarcă (proprietățile claselor de echivalență)

Cu notațiile de mai sus:

- pentru fiecare $x \in A$, orice $y \in \hat{x}$ este reprezentant al clasei $\hat{x}$.

Într–adevăr, conform propoziției precedente, pentru orice $x, y \in A$, are loc echivalența: $y \in \hat{x}$ ddacă $\hat{x} = \hat{y}$, iar, conform definiției anterioare, orice y este reprezentant al clasei $\hat{y}$, care este egală cu $\hat{x}$ exact atunci când $y \in \hat{x}$, deci orice $y \in \hat{x}$ este reprezentant al clasei $\hat{x}$.

Mai mult, tocmai am demonstrat că:

- pentru fiecare $x, y \in A$, y este reprezentant al clasei $\hat{x}$ ddacă $y \in \hat{x}$.

Clase de echivalență, mulțime factor

Definiție

Cu notațiile de mai sus, mulțimea claselor de echivalență ale lui $\sim$ se notează cu $A/_{\sim}$ și se numește *mulțimea factor a lui A prin* $\sim$ sau *mulțimea cât a lui A prin* $\sim$: $A/_{\sim} = \{\hat{x} \mid x \in A\}$.

Propoziție (clasele de echivalență formează o partiție)

Cu notațiile de mai sus, mulțimea factor $A/_{\sim}$ este o partiție a lui A.

Demonstrație: Verificăm proprietățile din definiția unei partiții, aplicând cele două propoziții anterioare cu **proprietățile claselor de echivalență**.

(1) Conform primeia dintre cele două propoziții precedente, pentru orice $x \in A$, $\hat{x} \neq \emptyset$.

(2) Conform celei de–a doua dintre cele două propoziții anterioare, pentru orice $x, y \in A$, dacă $\hat{x} \neq \hat{y}$, atunci $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$.

(3) Conform primeia dintre cele două propoziții anterioare, pentru orice $x \in A$, $x \in \hat{x} \subseteq A$, prin urmare $A = \bigcup\limits_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} \hat{x} \subseteq A$, așadar $A = \bigcup\limits_{x \in A} \hat{x}$.

Deci $A/_{\sim} = \{\hat{x} \mid x \in A\}$ este o partiție a lui A.

Exercițiu (temă pentru seminar)

Să se demonstreze că, pentru relația de echivalență ρ pe $\mathbb{R}$ dintr-un exercițiu anterior, mulțimea factor $\mathbb{R}/_{\rho}$ este în bijecție cu intervalul real $[0, 1)$.

Remarcă

Cu notațiile anterioare exercițiului de mai sus, funcția $p : A \to A/_{\sim}$, definită prin: pentru orice $x \in A$, $p(x) = \hat{x}$, este surjectivă (sigur că este bine definită, pentru că $\hat{x}$ este unic determinat de x, oricare ar fi $x \in A$).

Definiție

Cu notațiile de mai sus, funcția p se numește *surjecția canonică de la A la $A/_{\sim}$*.

Propoziție

Mulțimea partițiilor unei mulțimi (nevide) este în bijecție cu mulțimea relațiilor de echivalență pe acea mulțime.

Demonstrație: Fie A o mulțime nevidă. Notăm cu $Part(A)$ mulțimea partițiilor lui A și cu $Echiv(A)$ mulțimea relațiilor de echivalență pe mulțimea A.
Avem de demonstrat că:

$$Part(A) \cong Echiv(A)$$

Definim $\varphi : Echiv(A) \to Part(A)$, prin: pentru orice $\sim \in Echiv(A)$, $\varphi(\sim) = A/_{\sim}$ (mulțimea factor a lui A prin $\sim$). Conform propoziției anterioare, pentru orice $\sim \in Echiv(A)$, $A/_{\sim} \in Part(A)$, așadar φ este o funcție corect definită de la $Echiv(A)$ la $Part(A)$.

Bijecția partiții $\cong$ relații de echivalență

Definim $\psi : Part(A) \to Echiv(A)$, prin: pentru orice $(A_i)_{i \in I} \in Part(A)$, $\psi((A_i)_{i \in I}) \subseteq A^2$ (relație binară pe A), definită astfel:

$\psi((A_i)_{i \in I}) = \{(x, y) \mid x, y \in A, (\exists i \in I) x, y \in A_i\} = \bigcup_{i \in I} A_i^2.$

Pentru a demonstra că ψ este corect definită, să considerăm $(A_i)_{i \in I} \in Part(A)$, să notăm $\sim = \psi((A_i)_{i \in I})$ și să demonstrăm că $\sim \in Echiv(A)$.

Reflexivitatea lui $\sim$: pentru orice $x \in A$, cum $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ conform definiției unei partiții, urmează că $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, deci există (chiar un unic, a se vedea o propoziție de mai sus) un $i_0 \in I$ a. î. $x \in A_{i_0}$ (deci $(x, x) \in A_{i_0}^2$), prin urmare $x \sim x$ conform definiției lui $\sim$.

Simetria lui $\sim$: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \sim y$, atunci există $i_0 \in I$ a. î. $x, y \in A_{i_0}$, deci $y, x \in A_{i_0}$, așadar $y \sim x$.

Tranzitivitatea lui $\sim$: pentru orice $x, y, z \in A$, dacă $x \sim y$ și $y \sim z$, atunci există $i_0, i_1 \in I$ a. î. $x, y \in A_{i_0}$ și $y, z \in A_{i_1}$, prin urmare $y \in A_{i_0} \cap A_{i_1}$, deci $A_{i_0} \cap A_{i_1} \neq \emptyset$, așadar $i_0 = i_1$ conform definiției unei partiții, prin urmare $x, z \in A_{i_0} = A_{i_1}$, deci $x \sim z$ (din nou puteam folosi acea propoziție de mai sus, pentru y).

Așadar $\sim \in Echiv(A)$, prin urmare ψ este o funcție corect definită de la $Part(A)$ la $Echiv(A)$.

Bijecția partiții $\cong$ relații de echivalență

Pentru a arăta că $Part(A) \cong Echiv(A)$, este suficient să demonstrăm că funcțiile φ și ψ sunt inverse una alteia, ceea ce va arăta că aceste funcții sunt inversabile, deci bijective.

Să demonstrăm că $\psi \circ \varphi = id_{Echiv(A)}$.
Fie $\sim \in Echiv(A)$, arbitrară, fixată.
$\varphi(\sim) = A/_{\sim} = \{\hat{a} \mid a \in A\}$.
Notăm $\sigma = \psi(\varphi(\sim))$.
Conform definițiilor lui φ și ψ și proprietăților claselor de echivalență, pentru orice $x, y \in A$, $x\sigma y$ ddacă există $a \in A$, cu $x, y \in \hat{a}$ ddacă există $a \in A$ cu $\hat{a} = \hat{x} = \hat{y}$ ddacă $\hat{x} = \hat{y}$ (pentru că luăm $a = x$ la implicația inversă) ddacă $x \sim y$. Așadar $\sigma = \sim$, i. e. $\psi(\varphi(\sim)) = \sim$.

Acum să demonstrăm că $\varphi \circ \psi = id_{Part(A)}$.
Fie $\alpha := (A_i)_{i \in I} \in Part(A)$, arbitrară, fixată.
Calculăm $\varphi(\psi(\alpha))$.
Conform definiției lui ψ, relația de echivalență $\psi(\alpha) = \psi((A_i)_{i \in I}) = \bigcup_{i \in I} A_i^2$.

Fie $x \in A$, arbitrar, fixat. Conform aceleiași propoziții de mai sus asupra partițiilor unei mulțimi, există un unic $i_0 \in I$ a. î. $x \in A_{i_0}$. Din expresia anterioară a relației de echivalență $\psi(\alpha)$ și faptul că mulțimile din partiția $(A_i)_{i \in I}$ sunt două câte două disjuncte, un $y \in A$ are proprietatea că $x\psi(\alpha)y$ ddacă $y \in A_{i_0}$, așadar $\{y \in A \mid x\psi(\alpha)y\} = A_{i_0}$, deci clasa de echivalență $\hat{x}$ a lui x raportat la $\psi(\alpha)$ este A_{i_0}. Prin urmare, $\varphi(\psi(\alpha)) = A/_{\psi(\alpha)} = \{\hat{x} \mid x \in A\} \subseteq (A_i)_{i \in I} = \alpha$.
Pentru fiecare $i \in I$, A_i este nevid și, așadar, este, conform celor de mai sus, clasa de echivalență a oricărui element al său raportat la $\psi(\alpha)$. Acest fapt înseamnă că $\alpha = (A_i)_{i \in I} \subseteq \{\hat{x} \mid x \in A\} = A/_{\psi(\alpha)} = \varphi(\psi(\alpha))$.
Prin urmare, $\varphi(\psi(\alpha)) \subseteq \alpha$ și $\alpha \subseteq \varphi(\psi(\alpha))$, așadar $\varphi(\psi(\alpha)) = \alpha$.

Am demonstrat că $\psi \circ \varphi = id_{Echiv(A)}$ și $\varphi \circ \psi = id_{Part(A)}$, i. e. $\varphi : Echiv(A) \to Part(A)$ și $\psi : Part(A) \to Echiv(A)$ sunt funcții inverse una alteia, deci sunt funcții inversabile, deci bijective, așadar $Part(A) \cong Echiv(A)$.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Reamintim:

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie A o mulțime și $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se zice:

- *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;
- *simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc, atunci aRc;
- *(relație de) preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă;
- *(relație de) echivalență* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemplu

În mod evident, pentru orice mulțime A, A^2 este o relație de echivalență pe A, i. e. este o relație binară pe A, reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Amintim:

Definiție

Fie A o mulțime. Se definesc:

- *diagonala lui* A: $\Delta_A := \{(a,a) \mid a \in A\} \subseteq A^2$
- pentru orice $R \subseteq A^2$, *inversa lui* R: $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\} \subseteq A^2$
- pentru orice $R, S \subseteq A^2$, *compunerea lui* S *cu* R:
  $S \circ R = \{(a,c) \mid a,c \in A, (\exists b \in A)(aRb \text{ și } bSc)\} \subseteq A^2$
- pentru orice $R \subseteq A^2$ și orice $n \in \mathbb{N}$, *puterea a* n*–a a lui* R: $R^n \subseteq A^2$, definită recursiv:

$$\begin{cases} R^0 := \Delta_A \\ R^{n+1} := R^n \circ R, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Amintim, pentru o mulțime A arbitrară:

Remarcă

- Pentru orice $R \subseteq A^2$ și orice $a, b \in A$, aRb ddacă $bR^{-1}a$.
- Compunerea de relații binare pe A este asociativă, i. e., pentru orice $R, S, T \subseteq A^2$, $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.
- Δ_A este element neutru la compunerea de relații binare pe A: pentru orice $R \subseteq A^2$, $R \circ \Delta_A = \Delta_A \circ R = R$.
- Din proprietatea anterioară și definiția puterilor naturale ale unei relații binare, se obține: pentru orice $R \subseteq A^2$, $R^1 = R^0 \circ R = \Delta_A \circ R = R$.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Amintim, pentru o mulțime A arbitrară:

Remarcă

- Asociativitatea compunerii de relații binare și definiția precedentă arată că: pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $R^n = \underbrace{R \circ R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ de } R}$, cu **licența de scriere** (**convenția**): $\underbrace{R \circ R \circ R \circ \ldots \circ R}_{0 \text{ de } R} = \Delta_A$.
- Pentru orice $R \subseteq A^2$ și orice $n, k \in \mathbb{N}$, $R^n \circ R^k = R^{n+k} = R^k \circ R^n$ (fapt care rezultă din asociativitatea compunerii de relații binare și scrierea anterioară a puterilor naturale ale unei relații binare).
- $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$.
- Pentru orice $R, S \subseteq A^2$, $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.
- Pentru orice $R \subseteq A^2$ și orice $n \in \mathbb{N}$, $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$, fapt care rezultă din cele trei proprietăți anterioare, prin inducție după $n \in \mathbb{N}$.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Propoziție

Fie A o mulțime și $R \subseteq A^2$. Atunci:

1. *R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$*
2. *R este simetrică ddacă $R = R^{-1}$*

Demonstrație: **(1)** Imediat, din definiția unei relații binare reflexive.
(2) "$\Leftarrow$:" Dacă $R = R^{-1}$ și $a, b \in A$ a. î. aRb, atunci $aR^{-1}b$, i. e. bRa, deci R e simetrică.
"$\Rightarrow$:" Dacă R este simetrică și $(a, b) \in R$, i. e. aRb, atunci bRa, ceea ce este echivalent cu $aR^{-1}b$, i. e. $(a, b) \in R^{-1}$, deci $R \subseteq R^{-1}$. Iar, dacă $(c, d) \in R^{-1}$, i. e. $cR^{-1}d$, atunci dRc, deci cRd întrucât R e simetrică, i. e. $(c, d) \in R$, așadar avem și $R^{-1} \subseteq R$. Prin urmare, $R = R^{-1}$.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Remarcă

Următoarea propoziție este valabilă chiar în cazul mai general al relațiilor binare între două mulțimi nu neapărat egale.

Propoziție

Fie A o mulțime, R și S relații binare pe A și $(R_i)_{i\in I}$ o familie de relații binare pe A. Atunci:

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $R \subseteq S$ *ddacă* $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
3. $(\bigcup_{i\in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i\in I} R_i^{-1}$ *și* $(\bigcap_{i\in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i\in I} R_i^{-1}$

Demonstrație: **(1)** și **(2)** Imediate, din definiția inversei unei relații binare (**teme pentru acasă**).

(3) Pentru orice $a, b \in A$, avem: $(a, b) \in (\bigcup_{i\in I} R_i)^{-1}$ ddacă $(b, a) \in \bigcup_{i\in I} R_i$ ddacă există $i \in I$ cu $(b, a) \in R_i$ ddacă există $i \in I$ cu $(a, b) \in R_i^{-1}$ ddacă $(a, b) \in \bigcup_{i\in I} R_i^{-1}$, de unde rezultă prima egalitate. Analog pentru egalitatea a doua, cu intersecția (**temă pentru acasă**).

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Propoziție

Fie A o mulțime și $(R_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de relații binare pe A. Atunci:

1. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e reflexivă, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e reflexivă*
2. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e simetrică, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e simetrică*
3. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e tranzitivă, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e tranzitivă*
4. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o preordine, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e o preordine*
5. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o relație de echivalență, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e o relație de echivalență*

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Demonstrație: **(1)** Dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e reflexivă, i. e., pentru fiecare $i \in I$, $\Delta_A \subseteq R_i$, atunci $\Delta_A \subseteq \bigcap_{i \in I} R_i$, i. e. $\bigcap_{i \in I} R_i$ este reflexivă.

(2) Conform unor rezultate anterioare, pentru fiecare $i \in I$, R_i e simetrică ddacă, pentru fiecare $i \in I$, $R_i = R_i^{-1}$, de unde rezultă că $(\bigcap_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i$, prin urmare $\bigcap_{i \in I} R_i$ e simetrică.

(3) Notăm $S := \bigcap_{i \in I} R_i$. Fie $x, y, z \in A$, a. î. xSy și ySz, i. e. $(x, y), (y, z) \in S$, i. e. $(x, y), (y, z) \in \bigcap_{i \in I} R_i$, i. e., pentru fiecare $i \in I$, $(x, y), (y, z) \in R_i$, i. e., pentru fiecare $i \in I$, xR_iy și yR_iz, iar faptul că fiecare relație R_i este tranzitivă implică xR_iz pentru fiecare $i \in I$, i. e. $(x, z) \in R_i$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. $(x, z) \in \bigcap_{i \in I} R_i = S$, i. e. xSz, deci S e tranzitivă.

(4) Rezultă din (1) și (3).

(5) Rezultă din (1), (2) și (3) (sau din (2) și (4)).

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Remarcă

Fie A o mulțime și R o relație binară pe A.
Am observat că A^2 este o relație binară reflexivă pe A, și, evident, $R \subseteq A^2$, din chiar definiția unei relații binare R pe A.
Prin urmare, mulțimea (familia) relațiilor binare reflexive pe A care includ pe R este nevidă (pentru că o conține pe A^2), iar propoziția anterioară arată că intersecția acestei familii este o relație binară reflexivă pe A, care, evident, include pe R.
Sigur că această intersecție este inclusă în fiecare relație binară reflexivă pe A care include pe R (fiind intersecția tuturor acestora), ceea ce înseamnă că această intersecție este cea mai mică relație binară reflexivă pe A care include pe R (cea mai mică în sensul incluziunii, adică raportat la relația de incluziune).
Conform propoziției anterioare, toate aceste fapte rămân valabile dacă înlocuim proprietatea de reflexivitate cu oricare dintre proprietățile:

- simetrie
- tranzitivitate
- proprietatea de a fi preordine
- proprietatea de a fi relație de echivalență

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Remarcă

Cele de mai sus arată că relațiile definite în continuare (cele cinci închideri care apar în definiția următoare) există, pentru orice mulțime A și orice $R \subseteq A^2$.

Definiție

Fie A o mulțime și R o relație binară pe A. Se numește:

- *închiderea reflexivă a lui* R cea mai mică relație binară reflexivă pe A care include pe R; o vom nota cu $\overline{R}$;
- *închiderea simetrică a lui* R cea mai mică relație binară simetrică pe A care include pe R; o vom nota cu R^*;
- *închiderea tranzitivă a lui* R cea mai mică relație binară tranzitivă pe A care include pe R; o vom nota cu $T(R)$;
- *preordinea generată de* R (sau *închiderea reflexiv–tranzitivă a lui* R) cea mai mică preordine pe A care include pe R; o vom nota cu $Pre(R)$;
- *relația de echivalență generată de* R cea mai mică relație de echivalență pe A care include pe R; o vom nota cu $E(R)$.

Aceste notații **nu** sunt consacrate, ci sunt notații ad–hoc pe care le adoptăm în expunerea care urmează.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Remarcă

Fie A o mulțime și R o relație binară pe A. Atunci $\overline{R}$ este cel mai mic element (raportat la incluziune) al mulțimii (nevide a) relațiilor binare reflexive pe A care includ pe R, prin urmare admite următoarea caracterizare: $\overline{R}$ aparține acestei mulțimi și este inclusă în orice element al acestei mulțimi. Sigur că această caracterizare o identifică în mod unic, fapt ușor de observat din antisimetria relației de incluziune.
Cu alte cuvinte, $\overline{R}$ este unica relație binară pe A care satisface condițiile:

- $\overline{R}$ este o relație binară reflexivă pe A
- $R \subseteq \overline{R}$
- pentru orice relație binară reflexivă S pe A cu proprietatea că $R \subseteq S$, are loc: $\overline{R} \subseteq S$

Evident, și celelalte închideri ale lui R, anume R^*, $T(R)$, $Pre(R)$ și $E(R)$, admit caracterizări similare.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Remarcă

Fie A o mulțime și R o relație binară pe A. Este imediat, din definițiile acestor închideri, că:

- R este reflexivă ddacă $R = \overline{R}$
- R este simetrică ddacă $R = R^*$
- R este tranzitivă ddacă $R = T(R)$
- R este o preordine ddacă $R = Pre(R)$
- R este o relație de echivalență ddacă $R = E(R)$

Corolar

Fie A o mulțime și R o relație binară pe A. O consecință imediată a remarcii anterioare este că: $\overline{\overline{R}} = \overline{R}$, $R^{**} = R^*$, $T(T(R)) = T(R)$, $Pre(Pre(R)) = Pre(R)$ și $E(E(R)) = E(R)$.

Formulele închiderilor relațiilor binare pe o mulțime

Propoziție

Fie A o mulțime și R o relație binară pe A. Atunci:

1. $\overline{R} = R \cup \Delta_A$
2. $R^* = R \cup R^{-1}$
3. $T(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$
4. $Pre(R) = \overline{T(R)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$
5. $E(R) = T(\overline{R^*}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup R^{-1} \cup \Delta_A)^n$

Demonstrație: Folosim o caracterizare de mai sus a închiderilor.
(1) Avem de demonstrat că: $R \cup \Delta_A$ este reflexivă, include pe R și este inclusă în orice relație binară reflexivă pe A care include pe R.
$\Delta_A \subseteq R \cup \Delta_A$, deci $R \cup \Delta_A$ este reflexivă.
Evident, $R \subseteq R \cup \Delta_A$.
Fie Q o relație binară reflexivă pe A cu $R \subseteq Q$. Q este reflexivă, deci $\Delta_A \subseteq Q$.
Cum avem și $R \subseteq Q$, rezultă că $R \cup \Delta_A \subseteq Q$.
Prin urmare, $R \cup \Delta_A = \overline{R}$.
(2) Avem de demonstrat că: $R \cup R^{-1}$ este simetrică, include pe R și este inclusă în orice relație binară simetrică pe A care include pe R.
Conform unor rezultate anterioare,
$(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R = R \cup R^{-1}$, deci $R \cup R^{-1}$ este simetrică.
Evident, $R \subseteq R \cup R^{-1}$.
Fie Q o relație binară simetrică pe A cu $R \subseteq Q$, prin urmare $R^{-1} \subseteq Q^{-1}$. Q este simetrică, deci $Q = Q^{-1}$, așadar am obținut $R \subseteq Q$ și $R^{-1} \subseteq Q$, prin urmare $R \cup R^{-1} \subseteq Q$.
Rezultă că $R \cup R^{-1} = R^*$.

Formulele închiderilor relațiilor binare pe o mulțime

(3) Notăm $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. Pentru a arăta că $S = T(R)$, avem de demonstrat că: S este tranzitivă, include pe R și este inclusă în orice relație binară tranzitivă pe A care include pe R.

Fie $x, y, z \in A$, cu xSy și ySz, i. e. $(x, y), (y, z) \in S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, i. e. există $n_0, n_1 \in \mathbb{N}^*$, cu $(x, y) \in R^{n_0}$ și $(y, z) \in R^{n_1}$, prin urmare, aplicând definiția compunerii de relații binare și a puterilor naturale ale unei relații binare, precum și asociativitatea compunerii de relații binare, obținem că
$(x, z) \in R^{n_1} \circ R^{n_0} = R^{n_0+n_1} \subseteq S$, deci $(x, z) \in S$, i. e. xSz. Așadar S e tranzitivă.
$R = R^1 \subseteq S$.
Fie Q o relație binară tranzitivă pe A cu $R \subseteq Q$. Pentru a arăta că $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq Q$, vom demonstra prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$ că $R^n \subseteq Q$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Pasul de verificare: $R^1 = R \subseteq Q$, conform alegerii lui Q.
Pasul de inducție: Presupunem că $R^n \subseteq Q$ pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat. Fie $(x, z) \in R^{n+1} = R^n \circ R$, arbitrar, fixat. Atunci există $y \in A$ a. î. $(x, y) \in R$ și $(y, z) \in R^n$. Dar $R \subseteq Q$ conform alegerii lui Q și $R^n \subseteq Q$ conform ipotezei de inducție. Așadar $(x, y), (y, z) \in Q$, i. e. xQy și yQz. Iar Q este tranzitivă, conform alegerii sale, prin urmare xQz, i. e. $(x, z) \in Q$. Rezultă că $R^{n+1} \subseteq Q$ și raționamentul prin inducție este încheiat.

Am demonstrat că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $R^n \subseteq Q$, așadar $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq Q$.

Rezultă că: $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = S = T(R)$.

(4) Temă pentru seminar.
(5) Temă pentru seminar.

Formulele închiderilor relațiilor binare pe o mulțime

Propoziție (temă pentru seminar)

Dacă A este o mulțime nevidă finită având $|A| = k \in \mathbb{N}^*$, iar R este o relație binară pe A, atunci $T(R) = \bigcup_{n=1}^{k} R^n$.

Propoziție (comutările închiderilor (temă pentru seminar, cu contraexemplu pentru comutarea de la ultimul punct))

Fie A o mulțime și R o relație binară pe A. Atunci:

1. $(\overline{R})^* = \overline{R^*}$
2. $T(\overline{R}) = \overline{T(R)}$
3. $T(R^*)$ *și* $T(R)^*$ *nu sunt neapărat egale*

Adică: închiderea reflexivă comută cu fiecare dintre închiderile simetrică și tranzitivă, dar (în general) închiderile simetrică și tranzitivă nu comută una cu alta.

Exemplu (temă pentru acasă)

Fie R relația "sunt numere consecutive" pe $\mathbb{N}$, i. e.: $R \subset \mathbb{N}^2$, $R = \{(k, k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Să se arate că:

1. $\overline{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, y - x \in \{0, 1\}\}$
2. $R^* = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, |y - x| = 1\}$
3. $T(R) = <= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x < y\}$ (**indicație:** să se arate, prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$, că $R^n = \{(k, k+n) \mid k \in \mathbb{N}\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$)
4. $Pre(R) = \leq = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x \leq y\}$
5. $E(R) = \mathbb{N}^2$