Teorema Kleene:

Dacă limbajul L este acceptat de un DFA A, atunci există o expresie regulată E astfel încât $L(E) = L$.

Dem.

Fie $A = (\{1,2,3,\dots,n\}, \Sigma, \delta, 1, F)$ automatul după o eventuală renumerotare a stărilor. Avem că $L(A) = L$.

Definim mulțimile

$$R_{ij}^{k} = \{x \mid \delta(i,x) = j, \text{ și } x = yz, |y| \neq 0, |y| \neq |x|, \delta(i,y) = t \text{ și } t \leq k\}$$

în cuvinte: R_{ij}^{k} este mulțimea cuvintelor de la i la j care trec prin stări cel mult k.

Vrem să găsim expresii regulate pentru mulțimile R_{1t}^{n}, pentru toate stările terminale t. În acel caz putem construi o expresie regulată pentru L.

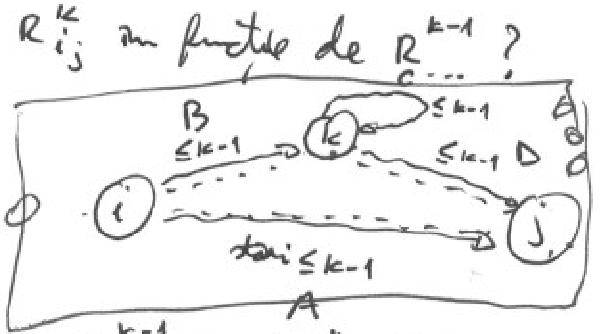
În R_{ij}^{k} i și j pot fi mai mari decât k, restricția e pentru stările intermediare.

Putem defini recursiv:

$$R_{ij}^{0} = \{a \mid \delta(i,a) = j\} \text{ pentru } i \neq j$$

$$R_{ii}^{0} = \{a \mid \delta(i,a) = i\} \cup \{\lambda\}$$

Cum scriem R_{ij}^{k} în funcție de $R^{k-1}_{\dots}$?



$\Rightarrow R_{ij}^{k} = A \cup BC^{*}D$

$$R_{ij}^{k} = R_{ij}^{k-1} \cup R_{ik}^{k-1} \left(R_{kk}^{k-1}\right)^{*} R_{kj}^{k-1}$$

Demonstrăm prin inducție că există expresii regulate pentru orice R_{ij}^{k}:

$\forall i,j,k$, $\exists\, r_{ij}^{k}$ expresie regulată cu $L(r_{ij}^{k}) = R_{ij}^{k}$ (inducție după k).

$k=0$: din R_{ij}^{0} de mai sus avem că e o mulțime finită de simboluri și eventual λ dacă $i=j$. Se poate construi o expr. reg. în mod trivial.

Ipoteza ~~Baza~~ inducției: presupunem că pentru ordin k se poate construi o expresie regulată pentru R_{ij}^{k}, $\forall i,j \in Q$: r_{ij}^{k}.

Pasul inducției: să demonstrăm că există o expr. reg. pentru R_{ij}^{k+1}:

Fie $r_{ij}^{k+1} = r_{ij}^{k} \cup r_{i\,k+1}^{k} \left(R_{k+1\,k+1}^{k}\right)^{*} r_{k+1\,j}^{k}$

$$L(r_{ij}^{k+1}) = L(r_{ij}^{k}) \cup L(r_{i\,k+1}^{k})\left(L(r_{k+1\,k+1}^{k})\right)^{*} L(r_{k+1\,j}^{k}) \overset{i.i}{=}$$

$$= R_{ij}^{k} \cup R_{i\,k+1}^{k}\left(R_{k+1\,k+1}^{k}\right)^{*} R_{k+1\,j}^{k} = R_{ij}^{k+1}$$

Deci pentru orice i, j, k putem construi expresiile regulate r_{ij}^{k}.

Considerăm expresia regulată: $E = \bigcup_{t \in F} r_{1t}^{n}$.

Este trivial de arătat că $L = L(E)$ $\square$