

PROGRAMARE LOGICĂ
SEMINAR 2
- DEDUCȚII ECUAȚIONALE -

Teorie:

- Deducția ecuațională - cazul necondiționat:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\text{R} \quad \frac{}{(\forall X)t \dot{=}_s t}} \quad \boxed{\text{S} \quad \frac{(\forall X)t_1 \dot{=}_s t_2}{(\forall X)t_2 \dot{=}_s t_1}} \quad \boxed{\text{T} \quad \frac{(\forall X)t_1 \dot{=}_s t_2, (\forall X)t_2 \dot{=}_s t_3}{(\forall X)t_1 \dot{=}_s t_3}} \\
 \\
 \boxed{\text{C}\Sigma \quad \frac{(\forall X)t_1 \dot{=}_{s_1} t'_1, \dots, (\forall X)t_n \dot{=}_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \dots, t_n) \dot{=}_s \sigma(t'_1, \dots, t'_n)}}, \text{ unde } \sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma \\
 \\
 \boxed{\text{Sub}_E \quad \frac{}{(\forall X)\theta(t) \dot{=}_s \theta(t')}} , (\forall Y)t \dot{=}_s t' \in E \text{ și } \theta : Y \rightarrow T_\Sigma(X)
 \end{array}$$

- Ecuația $\epsilon := (\forall X)t \dot{=}_s t'$ se deduce din E dacă ex. o secvență $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ a.î. $\epsilon_n = \epsilon$ și pt. or. $1 \leq i \leq n$:
 - $\epsilon_i \in E$ sau
 - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, CΣ, Sub_E.

Exercițiul 1:

Fie signatura (S, Σ) , $S = \{elt\}$ și $\Sigma = \{* : elt \ elt \rightarrow elt\}$, și $E = \{e_1, e_2\}$, unde

- $e_1: (\forall\{x\})x * x \dot{=} x$,
- $e_2: (\forall\{x, y\})x * y \dot{=} y * x$.

Arătați că $E \vdash (\forall\{x, y\})(x * y) * (y * x) \dot{=} y * x$, indicând la fiecare pas regula de deducție folosită.

Rezolvare:

1. $(\forall\{x, y\})(x * y) * (x * y) \dot{=} x * y$ (Sub_E pt. e_1 și $\theta(x) = x * y$)
2. $(\forall\{x, y\})x * y \dot{=} y * x$ (e_2)
3. $(\forall\{x, y\})x * y \dot{=} x * y$ (R)
4. $(\forall\{x, y\})(x * y) * (x * y) \dot{=} (x * y) * (y * x)$ (CΣ pt. 3, 2 și *)
5. $(\forall\{x, y\})(x * y) * (y * x) \dot{=} (x * y) * (x * y)$ (S 4)
6. $(\forall\{x, y\})(x * y) * (y * x) \dot{=} x * y$ (T pt. 5 și 1)

Exercițiul 2: Fie signatura (S, Σ) , $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{1 : \rightarrow s, * : s \ s \rightarrow s, ^{-1} : s \rightarrow s\}$, și $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, unde

- $e_1: (\forall\{x\})1 * x \dot{=} x$,
- $e_2: (\forall\{x\})x * (x^{-1}) \dot{=} 1$,
- $e_3: (\forall\{x, y, z\})x * (y * z) \dot{=} (x * y) * z$.

Arătați că $E \vdash (\forall\{a, b\})a * ((a^{-1}) * b) \dot{=} b$, indicând la fiecare pas regula de deducție folosită.

Rezolvare:

1. $(\forall\{a, b\})a * ((a^{-1}) * b) \dot{=} (a * (a^{-1})) * b$ (Sub_E pt. e_3 și $\theta(x) = a, \theta(y) = a^{-1}, \theta(z) = b$)
2. $(\forall\{a, b\})a * (a^{-1}) \dot{=} 1$ (Sub_E pt. e_2 și $\theta(x) = a$)
3. $(\forall\{a, b\})b \dot{=} b$ (R)
4. $(\forall\{a, b\})(a * (a^{-1})) * b \dot{=} 1 * b$ (CΣ pt. 2, 3 și *)
5. $(\forall\{a, b\})1 * b \dot{=} b$ (Sub_E pt. e_1 și $\theta(x) = b$)
6. $(\forall\{a, b\})(a * (a^{-1})) * b \dot{=} b$ (T pt. 4 și 5)
7. $(\forall\{a, b\})a * ((a^{-1}) * b) \dot{=} b$ (T pt. 1 și 6)

Exercițiul 3: Fie signatura (S, Σ) , $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{\circ : s \ s \rightarrow s\}$, și $E = \{e_1, e_2\}$, unde

- $e_1: (\forall\{x, y, z\})x \circ (y \circ z) \doteq (x \circ y) \circ z$,
- $e_2: (\forall\{x, y\})y \circ (x \circ y) \doteq y$.

Arătați că $E \vdash (\forall\{x\})x \circ x \doteq x$, indicând la fiecare pas regula de deducție folosită.

Rezolvare:

1. $(\forall\{x\})x \circ ((x \circ x) \circ x) \doteq x$ (Sub_E pt. e_2 și $\theta(x) = x \circ x, \theta(y) = x$)
 2. $(\forall\{x\})x \circ ((x \circ x) \circ x) \doteq (x \circ (x \circ x)) \circ x$ (Sub_E pt. e_1 și $\theta(x) = x, \theta(y) = x \circ x, \theta(z) = x$)
 3. $(\forall\{x\})(x \circ (x \circ x)) \circ x \doteq x \circ ((x \circ x) \circ x)$ (S 2)
 4. $(\forall\{x\})(x \circ (x \circ x)) \circ x \doteq x$ (T pt. 3 și 1)
 5. $(\forall\{x\})x \circ (x \circ x) \doteq x$ (Sub_E pt. e_2 și $\theta(x) = x, \theta(y) = x$)
 6. $(\forall\{x\})x \doteq x$ (R)
 7. $(\forall\{x\})(x \circ (x \circ x)) \circ x \doteq x \circ x$ (CΣ pt. 5,6 și \circ)
 8. $(\forall\{x\})x \circ x \doteq (x \circ (x \circ x)) \circ x$ (S 7)
 9. $(\forall\{x\})x \circ x \doteq x$ (T pt. 8 și 4)
- R, S, T, CΣ, Sub_E.

Exercițiul 4: Fie signatura (S, Σ) , $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{0 : \rightarrow s, + : s \ s \rightarrow s, - : s \rightarrow s\}$, și $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, unde

- $e_1: (\forall\{x, y, z\})x + (y + z) \doteq (x + y) + z$,
- $e_2: (\forall\{x\})0 + x \doteq x$,
- $e_3: (\forall\{x\})(-x) + x \doteq 0$.

Arătați că

- (1) $E \vdash (\forall\{x\})x + (-x) \doteq 0$,
- (2) $E \vdash (\forall\{x\})x + 0 \doteq x$,

indicând la fiecare pas regula de deducție folosită.