Mecanică Generală

IV. Dinamica punctului material - 2

Liviu Marin[1,†]

[1]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, România

[†]E-mail: marin.liviu@gmail.com

26 noiembrie 2013

Momentul unei forţe

Definiţie

Dat fiind un punct $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ numit pol, se numeşte momentul forţei $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ în raport cu polul $\mathbf{O}$ vectorul

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}} \times \overrightarrow{\mathbf{F}}} \tag{1}$$

unde $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ este punctul de aplicaţie al forţei $\overrightarrow{\mathbf{F}}$.

Observaţie

Momentul forţei $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ în raport cu polul $\mathbf{O}$ măsoară efectul de rotaţie pe care îl produce forţa $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ faţă de polul $\mathbf{O}$.

Definiţie

Cuplul $(\overrightarrow{\mathbf{F}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}})$, unde $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ este o forţă aplicată în punctul $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ şi $\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}$ este momentul forţei $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ în raport cu polul $\mathbf{O}$, se numeşte torsorul forţei $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ în raport cu polul $\mathbf{O}$.

Proprietăţi

(i) Momentul unei forţe $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ în raport cu un pol $\mathbf{O}$ este un vector legat ce depinde de polul $\mathbf{O}$.

(ii) Scalarul torsorului $\overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}$ este invariant la schimbarea polului.

(iii) Momentul rezultantei unor forţe aplicate într-un punct $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ este egal cu suma momentelor forţelor respective.

Demonstraţie:

(i) Fie $\mathbf{O}' \in \mathcal{E}$ un alt pol. Atunci:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}'} = \overrightarrow{\mathbf{O'P}} \times \overrightarrow{\mathbf{F}} = (\overrightarrow{\mathbf{O'O}} + \overrightarrow{\mathbf{OP}}) \times \overrightarrow{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\mathbf{O'O}} \times \overrightarrow{\mathbf{F}} + \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} \tag{2}$$

(ii) Înmulţim scalar ecuaţia (2) cu forţa $\overrightarrow{\mathbf{F}}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}'} \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}} = (\overrightarrow{\mathbf{O'O}} \times \overrightarrow{\mathbf{F}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}} + \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}} = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}}$$

(iii) Fie $\left\{\overrightarrow{\mathbf{F}}_i\right\}_{i\in I}$ forţe aplicate în $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ şi $\overrightarrow{\mathbf{R}} = \sum_{i\in I} \overrightarrow{\mathbf{F}}_i$ rezultanta lor.

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}(\overrightarrow{\mathbf{R}}) = \overrightarrow{\mathbf{OP}} \times \sum_{i\in I} \overrightarrow{\mathbf{F}}_i = \sum_{i\in I} \overrightarrow{\mathbf{OP}} \times \overrightarrow{\mathbf{F}}_i = \sum_{i\in I} \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}(\overrightarrow{\mathbf{F}}_i) \qquad \square$$

Exemple de forţe

(i) Forţe conservative – Forţe ce derivă dintr-un potenţial:

$$\boxed{\exists\ p(\cdot) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{a.i.} \quad \overrightarrow{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})} \tag{3}$$

(ii) Forţe centrale – Forţe exercitate de un punct fix $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$ asupra unui punct $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ şi care depind doar de distanţa $\|\overrightarrow{\mathbf{OP}}\|$:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{F}}(r) = F(r)\,\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}, \qquad \vec{\mathbf{r}} \equiv \overrightarrow{\mathbf{OP}}, \qquad r = \|\vec{\mathbf{r}}\|} \tag{4}$$

Proprietăţi

(i) O forţă centrală este o forţă conservativă.

(ii) Forţa de atracţie universală este o forţă conservativă.

(iii) Forţa elastică ($\overrightarrow{\mathbf{F}} = -k\,\vec{\mathbf{r}}$, unde $k > 0$ este constanta elastică) este o forţă conservativă.

Demonstrație:

(i) Fie potențialul:

$$p(\cdot):\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{R}\,,\quad p(r)=\int_{r_0}^{r}F(s)\,ds \tag{5a}$$

$$\vec{\mathbf{r}}=\sum_{i=1}^{3}x_i\,\vec{\mathbf{e}}_i\,,\quad r=\|\vec{\mathbf{r}}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,,\quad p(r_0)=0 \tag{5b}$$

Astfel, obținem:

$$\nabla_{\vec{r}}\,p(r)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial p(r)}{\partial x_i}\,\vec{\mathbf{e}}_i=\sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}p(r)}{\mathrm{d}r}\,\frac{\partial r(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}\,\vec{\mathbf{e}}_i$$
$$=\frac{\mathrm{d}p(r)}{\mathrm{d}r}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial r(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}\,\vec{\mathbf{e}}_i=F(r)\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{r}\,\vec{\mathbf{e}}_i=F(r)\,\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r}=\vec{\mathbf{F}}(r)$$

(ii) Potențialul este $p(\cdot):\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{R}\,,\quad p(r)=f\,\dfrac{M_S\,m_P}{r}$. Exercițiu!

(iii) Potențialul este $p(\cdot):\mathcal{E}\longrightarrow\mathbb{R}\,,\quad p(r)=-\dfrac{1}{2}\,k\,r^2$. Exercițiu! □

Axiomele (Principiile) mecanicii newtoniene

(A_0) *Există un referențial absolut, $\mathcal{R}_A(\mathbf{O},\{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3})$.*

- Axiomele se enunță în raport cu referențialul absolut, $\mathcal{R}_A$, sau cu un reper inerțial, $\mathcal{R}$.

(A_1) Principiul inerției (Legea I a lui Newton): *Orice corp își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie și uniformă dacă asupra sa nu acționează un alt corp.*

- Există mișcări în absența interacțiunilor.

(A_2) Principiul acțiunii forțelor (Legea a II-a a lui Newton): *Variația vitezei este proporțională cu forța ce acționează asupra corpului și este dirijată după dreapta suport a acesteia*

$$\boxed{m\,\vec{\mathbf{a}}=\vec{\mathbf{F}}\quad\text{sau}\quad m\,\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t)=\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}}(t),\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t))} \tag{6}$$

- Axioma (A_2) reprezintă legătura dintre cauză (forța) și efect (variația vitezei, i.e. mișcarea) într-un reper inerțial.
- Relația (6) descrie proprietatea de inerție a corpurilor

$$\vec{\mathbf{F}}+(-m\,\vec{\mathbf{a}})=\vec{\mathbf{0}} \tag{7}$$

(A_3) Principiul acțiunii și reacțiunii (Legea a III-a a lui Newton): *Acțiunile reciproce a două corpuri sunt întotdeauna egale și dirijate în sensuri contrare*

$$\boxed{\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2)+\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_1)=\vec{\mathbf{0}}\,,\quad \vec{\mathbf{f}}(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2)\parallel\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2} \tag{8}$$

(A_4) Principiul compunerii forțelor: *Acțiunea a două forțe în același punct poate fi înlocuită cu acțiunea unei singure forțe reprezentată de diagonala paralelogramului construit cu forțele componente.*

(A_5) Principiul datelor inițiale: *Starea inițială a unui punct la un moment dat, i.e. poziția și viteza punctului în acel moment, determină, în mod unic, mișcarea punctului.*

- Axioma (A_5) conduce la determinismul mecanicii clasice/newtoniene.
- Explicație "aproximativă":
  Fie $\varepsilon>0$. Atunci pentru orice $t>0$ a.i. $|t-t_0|<\varepsilon$ avem:

$$x_i(t)=x_i(t_0)+\dot{x}_i(t_0)\,(t-t_0)+\ddot{x}_i(t_0)\,\frac{1}{2}\,(t-t_0)^2+O(\varepsilon^2)\,,\quad i=1,2,3$$

Determinarea mișcării

In mecanica newtoniană, forțele nu depind de accelerații, ci doar de timp, poziție și viteză. Dacă nu, s-ar încălca (A_2) Legea a II-a a lui Newton!

Teoremă (determinismul mecanicii newtoniene)

Dacă forța $\vec{\mathbf{F}}=\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}},\dot{\vec{\mathbf{x}}})$ satisface condițiile de existență și unicitate locale ale problemei Cauchy:

(i) $\vec{\mathbf{F}}$ continuă în raport cu $(t,\vec{\mathbf{x}},\dot{\vec{\mathbf{x}}})$;

(ii) $\vec{\mathbf{F}}$ local Lipschitz în raport cu $(\vec{\mathbf{x}},\dot{\vec{\mathbf{x}}})$;

atunci ecuația lui Newton și condițiile inițiale:

$$m\,\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t)=\vec{\mathbf{F}}(t,\vec{\mathbf{x}},\dot{\vec{\mathbf{x}}}) \tag{9a}$$

$$\vec{\mathbf{x}}(t_0)=\vec{\mathbf{x}}_0 \tag{9b}$$

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0)=\dot{\vec{\mathbf{x}}}_0 \tag{9c}$$

determină în mod strict mișcarea într-un interval finit de timp.

Demonstrație:

Ecuațiile (9a)–(9c) formează un sistem de ecuații diferențiale ordinare (EDO) de ordinul doi pentru determinarea mișcării, i.e. $t \longmapsto \vec{\mathbf{x}}(t)$.

Pe componente, sistemul de EDO (9a)–(9c) se scrie astfel:

$$m\,\ddot{x}_i(t) = F_i(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)\,, \quad i = 1,2,3 \tag{10a}$$
$$x_i(t_0) = x_i^0\,, \quad i = 1,2,3 \tag{10b}$$
$$\dot{x}_i(t_0) = \dot{x}_i^0 \equiv v_i^0\,, \quad i = 1,2,3 \tag{10c}$$

Facem substituția:

$$q_i(t) = x_i(t)\,, \quad i = 1,2,3 \tag{11a}$$
$$q_{3+i}(t) = \dot{x}_i(t)\,, \quad i = 1,2,3 \tag{11b}$$

în sistemul de EDO (10a)–(10c), unde $\vec{\mathbf{q}}(t) = \big(q_1(t), \ldots, q_6(t)\big)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^6$.

Obținem următorul sistem de EDO de ordinul întâi:

$$\dot{\vec{\mathbf{q}}}(t) = \vec{\mathbf{Q}}(t, \vec{\mathbf{q}}) \tag{12a}$$
$$\vec{\mathbf{q}}(t_0) = \vec{\mathbf{q}}_0 \tag{12b}$$

cu $\vec{\mathbf{Q}}(t, \vec{\mathbf{q}}) = \big(Q_1(t, q_1, \ldots, q_6), \ldots, Q_6(t, q_1, \ldots, q_6)\big)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^6$ și $\vec{\mathbf{q}}_0 = \big(q_1^0, \ldots, q_6^0\big)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^6$.

Pe componente, sistemul de EDO (12a)–(12b) devine

$$\dot{q}_i(t) = Q_i(t, q_1, \ldots, q_6)\,, \quad i = 1,2,3 \tag{13a}$$
$$q_i(t_0) = q_i^0\,, \quad i = 1,2,3 \tag{13b}$$

In relațiile (12a) și (12b) (sau (13a) și (13b)), am folosit următoarele notații:

$$Q_i(t, q_1, \ldots, q_6) = \dot{x}_i(t) \equiv q_{3+i}(t)\,, \quad i = 1,2,3 \tag{14a}$$
$$Q_{3+i}(t, q_1, \ldots, q_6) = \frac{1}{m} F_i(t, q_1, \ldots, q_6)\,, \quad i = 1,2,3 \tag{14b}$$
$$q_i^0 = x_i^0\,, \quad i = 1,2,3 \tag{14c}$$
$$q_{3+i}^0 = \dot{x}_i^0 \equiv v_i^0\,, \quad i = 1,2,3 \tag{14d}$$

iar $\vec{\mathbf{Q}}(\cdot,\cdot) : I \times G \longrightarrow \mathbb{R}^6$, $I \times G \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^6$ deschisă și $(t_0, \vec{\mathbf{q}}_0) \in G$.

Mai mult, avem:

(i) $\vec{\mathbf{F}}$ continuă $\Longrightarrow$ $\vec{\mathbf{Q}}$ continuă $\Longrightarrow$ existența locală a soluției problemei Cauchy (12a)–(12b);

(ii) $\vec{\mathbf{F}}$ local Lipschitz în raport cu $(\vec{\mathbf{x}}, \dot{\vec{\mathbf{x}}})$ $\Longrightarrow$ $\vec{\mathbf{Q}}$ local Lipschitz în raport cu $\vec{\mathbf{q}}$ $\Longrightarrow$ unicitatea locală a soluției problemei Cauchy (12a)–(12b);

i.e.

$$\exists\ \delta > 0, \quad \exists!\ \vec{\mathbf{q}}(\cdot) : I_0 = (t_0, t_0 + \delta) \longrightarrow G_0 \text{ de clasă } \mathscr{C}^1(I_0) :$$
$$\vec{\mathbf{q}}(t) = \vec{\mathbf{q}}(t; t_0, \vec{\mathbf{q}}_0)\,, \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$$

In consecință, în spațiul fizic rezultă existența și unicitatea locale ale soluției problemei Cauchy (9a)–(9b)

$$\exists\ \delta > 0, \quad \exists!\ \vec{\mathbf{x}}(\cdot) : I_0 = (t_0, t_0 + \delta) \longrightarrow D_0 \text{ de clasă } \mathscr{C}^2(I_0) :$$
$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{x}}(t; t_0, \vec{\mathbf{x}}_0, \vec{\mathbf{v}}_0)\,, \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta) \qquad \square$$

Observație: Dacă, în plus, se face presupunerea că $\vec{\mathbf{F}}$ (deci și $\vec{\mathbf{Q}}$) este mărginită pe intervalul ei de definiție, atunci rezultă existența și unicitatea globale ale soluției problemei Cauchy (9), respectiv (12).

Stabilitatea soluției

Fie $\vec{\mathbf{q}}(t) = \vec{\mathbf{q}}(t; t_0, \vec{\mathbf{q}}_0)$ soluția următoarei probleme Cauchy cu datele inițiale $\vec{\mathbf{q}}_0$:

$$\dot{\vec{\mathbf{q}}}(t) = \vec{\mathbf{Q}}(t, \vec{\mathbf{q}}) \tag{15a}$$
$$\vec{\mathbf{q}}(t_0) = \vec{\mathbf{q}}_0 \tag{15b}$$

Fie $\widetilde{\vec{\mathbf{q}}}(t) = \widetilde{\vec{\mathbf{q}}}(t; t_0, \widetilde{\vec{\mathbf{q}}}_0)$ soluția următoarei probleme Cauchy cu datele inițiale $\widetilde{\vec{\mathbf{q}}}_0$:

$$\dot{\widetilde{\vec{\mathbf{q}}}}(t) = \vec{\mathbf{Q}}(t, \widetilde{\vec{\mathbf{q}}}) \tag{16a}$$
$$\widetilde{\vec{\mathbf{q}}}(t_0) = \widetilde{\vec{\mathbf{q}}}_0 \tag{16b}$$

Definiție (soluție stabilă)

Soluția $\vec{\mathbf{q}}$ se numește soluție stabilă dacă:

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 :$$
$$\|\widetilde{\vec{\mathbf{q}}}_0 - \vec{\mathbf{q}}_0\| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \|\widetilde{\vec{\mathbf{q}}}(t) - \vec{\mathbf{q}}(t)\| < \varepsilon\,, \quad \forall t > t_0 \tag{17}$$

Definiție (soluție asimptotic stabilă)

Soluția $\vec{\mathbf{q}}$ se numește soluție asimptotic stabilă dacă:

$$\|\widetilde{\vec{\mathbf{q}}}_0 - \vec{\mathbf{q}}_0\| < \delta \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \|\widetilde{\vec{\mathbf{q}}}(t) - \vec{\mathbf{q}}(t)\| = 0 \tag{18}$$

Observații:

(i) Condițiile din teorema referitoare la determinismul mecanicii newtoniene asigură nu numai existența și unicitatea locale ale soluției problemei Cauchy, ci și dependența continuă a soluției problemei Cauchy de datele inițiale pe un interval finit de timp.

(ii) Problema dependenței soluției problemei Cauchy de datele inițiale pe un interval finit de timp este, de fapt, problema stabilității soluției problemei Cauchy respective.

(iii) Măsurarea datelor inițiale este, de regulă, inexactă/aproximativă $\Longrightarrow$ Se studiază dependența soluției problemei Cauchy de datele inițiale, respectiv problema stabilității soluției problemei Cauchy!

(iv) Datele inițiale din $\vec{\mathbf{q}}_0$ $(\widetilde{\vec{\mathbf{q}}}_0)$ corespund poziției inițiale $\vec{\mathbf{x}}_0$ $(\widetilde{\vec{\mathbf{x}}}_0)$ și vitezei inițiale $\vec{\mathbf{v}}_0$ $(\widetilde{\vec{\mathbf{v}}}_0)$.

Echilibru

Definiție (echilibru)

O poziție $\vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_0$ se numește poziție de echilibru pentru punctul material $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ dacă lăsând punctul material în această poziție cu viteză nulă, atunci acesta rămâne permanent în această poziție, i.e.

$$\exists\ t_0 > 0 : \begin{cases} \vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_0 \\ \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \Longrightarrow \quad \vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{x}}_0, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{19}$$

Definiție (echilibru stabil)

Poziția de echilibru $\vec{\mathbf{x}}_0$ se numește poziție de echilibru stabilă pentru punctul material $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ dacă

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) : \begin{cases} \|\vec{\mathbf{x}}(t_0) - \vec{\mathbf{x}}_0\| < \delta \\ \|\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0)\| < \delta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \|\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}_0\| < \varepsilon\,, & \forall\ t \geq t_0 \\ \|\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t)\| < \varepsilon\,, & \forall\ t \geq t_0 \end{cases} \tag{20}$$

Interpretare mecanică:

O poziție de echilibru este stabilă pentru un punct material dacă lansând punctul material respectiv dintr-o vecinătate a poziției respective cu o viteză suficient de mică, punctul material rămâne într-o vecinătate dată tot timpul, iar viteza lui nu depășește o viteză limită dată.

Definiție (echilibru instabil)

Orice poziție de echilibru care nu este stabilă pentru punctul material $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ se numește poziție de echilibru instabilă pentru acest punct.

Propoziție (condiția necesară și suficientă de echilibru)

Punctul material $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ este în echilibru în $\vec{\mathbf{x}}_0 \in \mathcal{V}$ dacă și numai dacă rezultanta forțelor ce acționează asupra sa este nulă și

$$\exists\ t_0 > 0 : \begin{cases} \vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_0 \\ \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \tag{21}$$

Demonstrație:

$\Longrightarrow$: Fie punctul material $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ în echilibru în $\vec{\mathbf{x}}_0 \in \mathcal{V}$.

Atunci, din definiția echilibrului:

$$\exists\ t_0 > 0 : \begin{cases} \vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_0 \\ \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \Longrightarrow \quad \vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{x}}_0, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{22}$$

Din Legea a II-a a lui Newton (A_2) rezultă pentru soluția dată de (22):

$$\vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}}_0, \vec{\mathbf{0}}) = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \tag{23}$$

$\Longleftarrow$: Fie $\vec{\mathbf{x}}(\cdot) : [t_0, t_0 + \delta] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ unica soluție a problemei Cauchy date de ecuația lui Newton și condițiile inițiale (21), i.e.

$$\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \frac{1}{m}\vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{x}}, \dot{\vec{\mathbf{x}}}) \equiv \vec{\mathbf{0}} \tag{24a}$$

$$\vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_0 \tag{24b}$$

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) = \vec{\mathbf{0}} \tag{24c}$$

Prin integrarea ecuației (24a) și folosirea condițiilor inițiale (24b)–(24c), obținem soluția problemei Cauchy (24a)–(24c) de forma:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0)\, t + \vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_0\,, \quad \forall\ t \geq t_0 \qquad \square$$

Propoziție

(i) Dacă viteza inițială și forța ce acționează asupra unui punct material la orice moment se află într-un același plan fix, atunci traiectoria punctului material respectiv va fi tot în acel plan.

(ii) Dacă viteza inițială și forța ce acționează asupra unui punct material la orice moment se află pe o aceeași dreaptă fixă, atunci traiectoria punctului material respectiv va fi tot pe acea dreaptă.

Demonstrație:

(i) Fie Σ planul fix considerat și $\vec{\mathbf{n}}$ versorul normalei la planul Σ. Atunci:

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) = \dot{\vec{\mathbf{x}}}_0 \in \Sigma \Longrightarrow \dot{\vec{\mathbf{x}}}_0 \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 \tag{25a}$$

$$\vec{\mathbf{F}}\left(t, \vec{\mathbf{x}}, \dot{\vec{\mathbf{x}}}\right) \in \Sigma\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \Longrightarrow \vec{\mathbf{F}}\left(t, \vec{\mathbf{x}}, \dot{\vec{\mathbf{x}}}\right) \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{25b}$$

Înmulțim scalar cu $\vec{\mathbf{n}}$ ecuația de mișcare:

$$\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \frac{1}{m}\,\vec{\mathbf{F}}\left(t, \vec{\mathbf{x}}, \dot{\vec{\mathbf{x}}}\right) \cdot \vec{\mathbf{n}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \overset{(25b)}{\Longrightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \cdot \vec{\mathbf{n}}\right] = 0\,, \quad \forall\, t \geq t_0$$

$$\Longrightarrow \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) \cdot \vec{\mathbf{n}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \Longrightarrow \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \dot{\vec{\mathbf{x}}}_0 \cdot \vec{\mathbf{n}} \overset{(25a)}{=} 0\,, \quad \forall\, t \geq t_0$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\mathbf{x}}(t) \cdot \vec{\mathbf{n}}\right] = 0\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \Longrightarrow \vec{\mathbf{x}}(t) \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{x}}(t_0) \cdot \vec{\mathbf{n}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0$$

$$\Longrightarrow \left[\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}_0\right] \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \Longrightarrow \vec{\mathbf{x}}(t) \in \Sigma\,, \quad \forall\, t \geq t_0$$

(ii) Fie d dreapta fixă considerată și $\vec{\mathbf{i}}$ versorul acestei drepte d. Atunci:

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) = \dot{\vec{\mathbf{x}}}_0 \in d \Longrightarrow \dot{\vec{\mathbf{x}}}_0 \times \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{26a}$$

$$\vec{\mathbf{F}}\left(t, \vec{\mathbf{x}}, \dot{\vec{\mathbf{x}}}\right) \in d\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \Longrightarrow \vec{\mathbf{F}}\left(t, \vec{\mathbf{x}}, \dot{\vec{\mathbf{x}}}\right) \times \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{26b}$$

Înmulțim vectorial cu $\vec{\mathbf{i}}$ ecuația de mișcare:

$$\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \times \vec{\mathbf{i}} = \frac{1}{m}\,\vec{\mathbf{F}}\left(t, \vec{\mathbf{x}}, \dot{\vec{\mathbf{x}}}\right) \times \vec{\mathbf{i}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \overset{(26b)}{\Longrightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \times \vec{\mathbf{i}}\right] = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0$$

$$\Longrightarrow \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \times \vec{\mathbf{i}} = \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t_0) \times \vec{\mathbf{i}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \Longrightarrow \dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) \times \vec{\mathbf{i}} = \dot{\vec{\mathbf{x}}}_0 \times \vec{\mathbf{i}} \overset{(26a)}{=} \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\vec{\mathbf{x}}(t) \times \vec{\mathbf{i}}\right] = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \Longrightarrow \vec{\mathbf{x}}(t) \times \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{x}}(t_0) \times \vec{\mathbf{i}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0$$

$$\Longrightarrow \left[\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}_0\right] \times \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{0}}\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \Longrightarrow \vec{\mathbf{x}}(t) \in d\,, \quad \forall\, t \geq t_0 \qquad \square$$