Curs 13

2015-2016

Programare Logică

Cuprins

Algebre multisortate

Signaturi multisortate

- O signatură multisortată este o pereche (S, Σ), unde
  - $S \neq \emptyset$ este o mulțime de sorturi.
  - Σ este o mulțime de simboluri de operații $\sigma : s_1 s_2 \ldots s_n \to s$.
    - dacă $n = 0$, atunci $\sigma : \to s$ este simbolul unei constante

Mulțimi și funcții multisortate

Fixăm o mulțime de sorturi S.

- O mulțime S-sortată este o familie de mulțimi $A = \{A_s\}_{s\in S}$. Operațiile pe mulțimi sunt extinse la cazul multisortat pe componente.
- O funcție S-sortată $f : A \to B$ este o familie de funcții $f = \{f_s\}_{s\in S}$, unde $f_s : A_s \to B_s$, pt. or. $s \in S$. Dacă $f : A \to B$ și $g : B \to C$, definim compunerea $f;g : A \to C$, $(f;g)_s(a) = g_s(f_s(a))$, or. $a \in A_s$.
- O funcție S-sortată $f : A \to B$ este injectivă, (surjectivă, bijectivă) dacă f_s este injectivă, (surjectivă, bijectivă), or. $s \in S$.
- O funcție S-sortată $f = \{f_s\}_{s\in S} : A \to B$ este inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $f;g = 1_A$ și $g;f = 1_B$.

Propoziție (!)

O funcție S-sortată $f : A \to B$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ este bijectivă.

Algebre multisortate

- O algebră multisortată de tip (S, Σ) este $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ unde
  - $A_S = \{A_s\}_{s \in S}$ este o mulțime S-sortată (mulțimea suport).
  - $A_\Sigma = \{A_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ este o familie de operații astfel încât
    - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ în Σ, atunci $A_\sigma : A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \to A_s$ (operație).
    - dacă $\sigma : \to s$ în Σ, atunci $A_\sigma \in A_s$ (constantă).

Morfisme de algebre multisortate

- Un morfism de (S, Σ)-algebre $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este o funcție S-sortată $h = \{h_s\}_{s\in S} : \{A_s\}_{s\in S} \to \{B_s\}_{s\in S}$ care verifică condiția de compatibilitate:
  - pt. or. $\sigma :\to s$ din Σ avem $h_s(A_\sigma) = B_\sigma$.
  - pt. or. $\sigma : s_1 \dots s_n \to s$ din Σ și or. $a_1 \in A_{s_1}, \dots, a_n \in A_{s_n}$ avem

$$h_s(A_\sigma(a_1, \dots, a_n)) = B_\sigma(h_{s_1}(a_1), \dots, h_{s_n}(a_n)).$$

$$\begin{array}{ccccccc}
A_{s_1} & \times & \cdots & \times & A_{s_n} & \xrightarrow{A_\sigma} & A_s \\
h_{s_1}\downarrow & & \cdots & & h_{s_n}\downarrow & & h_s\downarrow \\
B_{s_1} & \times & \cdots & \times & B_{s_n} & \xrightarrow{B_\sigma} & B_s
\end{array}$$

Propoziție

Compunerea a două Σ-morfisme este un Σ-morfism.

Izomorfisme de algebre multisortate

- Un Σ-morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se numește izomorfism dacă există un Σ-morfism $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ astfel încât $h; g = 1_A$ și $g; h = 1_B$. Deoarece g este unic, de obicei se notează h^{-1}.

- Două Σ-algebre $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sunt izomorfe ($\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$) dacă există un izomorfism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Propoziție

Fie $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un Σ-morfism. Atunci

$$h \text{ este izomorfism} \Leftrightarrow \text{este funcție } S\text{-sortată bijectivă.}$$

Propoziție (!)

Compunerea a două izomorfisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ și $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ este un izomorfism. Mai mult, $(f; g)^{-1} = g^{-1}; f^{-1}$.

Tipuri abstracte de date

- Un tip abstract de date este o clasă $\mathfrak{C}$ de (S, Σ)-algebre cu proprietatea că oricare două (S, Σ)-algebre din $\mathfrak{C}$ sunt izomorfe
$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{C} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}.$$
- $\mathfrak{I}_{(S,\Sigma)} = \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I}\ (S, \Sigma)\text{-algebră inițială}\}$ este un tip abstract de date.

Termeni fără variabile

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

- Mulțimea S-sortată a termenilor fără variabile, T_Σ, este cea mai mică mulțime de șiruri finite peste alfabetul

$$L = \bigcup_{w,s} \Sigma_{w,s} \cup \{(,)\} \cup \{,\}$$

care verifică:

1. Dacă $\sigma :\to s$ în Σ, atunci $\sigma \in T_{\Sigma,s}$,
2. Dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ în Σ și $t_i \in T_{\Sigma,s_i}$, or. $1 \leq i \leq n$, atunci $\sigma(t_1, \ldots, t_n) \in T_{\Sigma,s}$.

Termeni (expresii)

- O mulțime de variabile este o mulțime S-sortată $X = \{X_s\}_{s \in S}$ astfel încât
  - $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$, or. $s, s' \in S$, $s \neq s'$,
  - $X_s \cap \{\sigma\}_{\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma} = \emptyset$,
  - $X_s \cap \{\sigma\}_{\sigma : \to s \in \Sigma} = \emptyset$.

- Mulțimea S-sortată a termenilor cu variabile din X, $T_\Sigma(X)$, este cea mai mică mulțime de șiruri finite peste alfabetul

$$L = \bigcup_{s \in S} X_s \cup \bigcup_{w,s} \Sigma_{w,s} \cup \{(,)\} \cup \{,\}$$

care verifică:

1. $X \subseteq T_\Sigma(X)$,
2. Dacă $\sigma :\to s$ în Σ, atunci $\sigma \in T_\Sigma(X)_s$,
3. Dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ în Σ și $t_i \in T_\Sigma(X)_{s_i}$, or. $1 \leq i \leq n$, atunci $\sigma(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma(X)_s$.

Inducția pe termeni

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Fie **P** o proprietate astfel încât:

- pasul inițial:

$$\mathbf{P}(x) = \mathit{true}, \text{ or. } x \in X,$$
$$\mathbf{P}(\sigma) = \mathit{true}, \text{ or. } \sigma :\to s.$$

- pasul de inducție:

$$\text{pt. or. } \sigma : s_1 \ldots s_n \to s \text{ și or. } t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n},$$
$$\text{dacă } \mathbf{P}(t_1) = \ldots = \mathbf{P}(t_n) = \mathit{true}, \text{ atunci } \mathbf{P}(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = \mathit{true}.$$

Atunci $\mathbf{P}(t) = \mathit{true}$, oricare $t \in T_\Sigma(X)$.

Algebra termenilor

- Mulțimea S-sortată a termenilor $T_\Sigma(X)$ este o (S,Σ)-algebră, numită algebra termenilor cu variabile din X și notată tot $T_\Sigma(X)$, cu operațiile definite astfel:
  - pt. or. $\sigma :\to s$ din Σ, operația corespunzătoare este
  $$T_\sigma := \sigma \in T_\Sigma(X)_s$$
  - pt. or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ din Σ, operația corespunzătoare este
  $$T_\sigma : T_\Sigma(X)_{s_1 \ldots s_n} \to T_\Sigma(X)_s$$
  $$T_\sigma(t_1, \ldots, t_n) := \sigma(t_1, \ldots, t_n)$$

  or. $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$.

- T_Σ algebra termenilor fără variabile $(X = \emptyset)$

Algebră inițială

- O (S, Σ)-algebră $\mathcal{I}$ este inițială într-o clasă de (S, Σ)-algebre $\mathfrak{K}$ dacă pentru orice $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$, există un unic (S, Σ)-morfism $f : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$.

Propoziție

1. Dacă $\mathcal{I}$ este inițială în $\mathfrak{K}$ și $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ astfel încât $\mathcal{A} \simeq \mathcal{I}$, atunci $\mathcal{A}$ este inițială în $\mathfrak{K}$.
2. Dacă $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt inițiale în $\mathfrak{K}$, atunci $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$.

Teoremă

Pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B}$, există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

Corolar

T_Σ este (S, Σ)-algebra inițială.

Algebre libere

- O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este liber generată de X dacă
  - $X \subseteq A_S$,
  - pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ și orice funcție S-sortată $f : X \to B_S$, există un unic (S, Σ)-morfism $\tilde{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ astfel încât $\tilde{f} \restriction_X = f$.

Teoremă

Dacă $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sunt liber generate de X, atunci $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Teoremă

Fie $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră. Orice funcție S-sortată $e : X \to B_S$ se extinde unic la un (S, Σ)-morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$.

Corolar

$T_\Sigma(X)$ este (S, Σ)-algebra liber generată de X.

Algebre libere

Propoziție

Fie $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un (S, Σ)-morfism surjectiv și X o mulțime de variabile. Pentru orice (S, Σ)-morfism $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$, există un (S, Σ)-morfism $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ astfel încât $g; h = f$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "h"] & \mathcal{B} \\ & T_\Sigma(X) \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "g"] \end{tikzcd}$$

Propoziție (!)

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și X o mulțime de variabile. Dacă $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ și $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ sunt morfisme, atunci $g = f \Leftrightarrow g\restriction_X = f\restriction_X$.

Propoziție (!)

Dacă $X \simeq Y$, atunci $T_\Sigma(X) \simeq T_\Sigma(Y)$.

Congruențe

- O relație S-sortată $\equiv = \{\equiv_s\}_{s\in S} \subseteq A_S \times A_S$ este o congruență dacă:
  - $\equiv_s \subseteq A_s \times A_s$ este echivalență, or. $s \in S$.
  - $\equiv$ este compatibilă cu operațiile: pt. or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ și or. $a_i, b_i \in A_{s_i}$, $i = 1, \ldots, n$, $a_i \equiv_{s_i} b_i$, or. $i = 1, \ldots, n \Rightarrow A_\sigma(a_1, \ldots, a_n) \equiv_s A_\sigma(b_1, \ldots, b_n)$

- Fie $\mathcal{A}$ o (S, Σ)-algebră și $\equiv$ o congruență pe $\mathcal{A}$. Definim:
  - $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa de echivalență a lui a)
  - $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$, or. $s \in S$
  - $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}$ devine (S, Σ)-algebră, notată $\mathcal{A}/_{\equiv}$, cu operațiile:
    - $(A/_{\equiv})_\sigma := [A_\sigma]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : \to s$,
    - $(A/_{\equiv})_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}}) := [A_\sigma(a_1, \ldots, a_n)]_{\equiv_s}$, or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ și $a_1 \in A_{s_1}, \ldots, a_n \in A_{s_n}$.
  - $\mathcal{A}/_{\equiv}$ se numește algebră cât a lui $\mathcal{A}$ prin congruența $\equiv$.
  - $[\cdot]_{\equiv} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/_{\equiv}$, $a \mapsto [a]_{\equiv_s}$, or. $a \in A_s$, este morfism surjectiv.

$$[a]_{\equiv_s} = [b]_{\equiv_s} \Leftrightarrow a \equiv_s b \Leftrightarrow (a, b) \in \equiv_s$$

Nucleul unui morfism

- Dacă $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism de (S, Σ)-algebre, nucleul lui f este $Ker(f) = \{Ker(f_s)\}_{s \in S}$, unde

$$Ker(f_s) := \{(a, a') \in A_s \times A_s \mid f_s(a) = f_s(a')\}, \text{ or. } s \in S.$$

Propoziție (!)

1. $Ker(f)$ este o congruență pe $\mathcal{A}$.
2. Dacă $\equiv$ este o congruență pe $\mathcal{A}$, atunci $Ker([\cdot]_{\equiv}) = \equiv$.

Proprietatea de universalitate

Teoremă (Proprietatea de universalitate a algebrei cât)

Pentru orice (S,Σ)-algebră $\mathcal{B}$ și pentru orice morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$, există un unic morfism $\overline{h} : \mathcal{A}/_{\equiv} \to \mathcal{B}$ a.i. $[\cdot]_{\equiv};\overline{h} = h$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "{[\cdot]_{\equiv}}"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{A}/_{\equiv} \arrow[dl, dotted, "\overline{h}"] \\ \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

Propoziție (*)

Fie $\mathfrak{K}$ o clasă de (S,Σ)-algebre. Dacă $\equiv_{\mathfrak{K}} := \bigcap\{Ker(h) \mid h : T_{\Sigma} \to \mathcal{B} \in \mathfrak{K} \text{ morfism}\}$, atunci următoarele proprietăți sunt adevărate:

1. $\equiv_{\mathfrak{K}}$ este congruența pe T_{Σ},
2. pt. or. $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$, există un unic morfism $\overline{h} : T_{\Sigma}/_{\equiv_{\mathfrak{K}}} \to \mathcal{B}$.

Ecuații. Relația de satisfacere

- O (S, Σ)-ecuație $(\forall X)t \doteq_s t'$ este formată dintr-o mulțime de variabile X și doi termeni de același sort $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$.
- O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație $(\forall X)t \doteq_s t'$ dacă pentru orice funcție S-sortată $e : X \to A_S$, $\tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t')$.
- O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație $(\forall X)t \doteq_s t'$ dacă pentru orice morfism $f : T_\Sigma(X) \to A$, $f_s(t) = f_s(t')$.

Ecuații condiționate. Relația de satisfacere

- O (S,Σ)-ecuație condiționată $(\forall X)t \doteq_s t'$ *if* H este formată dintr-o mulțime de variabile X, doi termeni de același sort $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$ și o mulțime H de ecuații $u \doteq_{s'} v$, cu $u, v \in T_\Sigma(X)_{s'}$.

- O (S,Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație condiționată $(\forall X)t \doteq_s t'$ *if* H dacă pentru orice funcție S-sortată $e : X \to A_S$,

$$\tilde{e}_{s'}(u) = \tilde{e}_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{e}_s(t) = \tilde{e}_s(t').$$

- O (S,Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ satisface o ecuație condiționată $(\forall X)t \doteq_s t'$ *if* H dacă pentru orice morfism $f : T_\Sigma(X) \to A$,

$$f_{s'}(u) = f_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow f_s(t) = f_s(t').$$

Γ-algebre

- Dacă Γ este o mulțime de ecuații condiționate, o (S, Σ)-algebră $\mathcal{A}$ este o Γ-algebră ($\mathcal{A}$ este model pentru Γ) dacă $\mathcal{A} \models \gamma$, or. $\gamma \in \Gamma$.
- Notăm cu $Alg(S, \Sigma, \Gamma)$ clasa tuturor Γ-algebrelor.

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ două (S, Σ)-algebre a.î. $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ și $\gamma := (\forall X)t \doteq_s t'$ if H. Atunci $\mathcal{A} \models \gamma \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \gamma$.

- O ecuație condiționată θ este consecință semantică a lui Γ dacă $\mathcal{A} \models \Gamma$ implică $\mathcal{A} \models \theta$, pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{A}$.

Congruențe închise la substituții

- O congruență $\equiv$ pe $\mathcal{A}$ este închisă la substituție dacă

$CS(\Gamma, \mathcal{A})$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{or. } (\forall X)t \doteq_s t' \text{ if } H \in \Gamma, \text{ or. } e : X \to A_S \\ \tilde{e}_{s'}(u) \equiv_{s'} \tilde{e}_{s'}(v), \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{e}_s(t) \equiv_s \tilde{e}_s(t'). \end{array}}$$

Propoziție

Dacă $\equiv$ este o congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție, atunci $\mathcal{A}/_{\equiv} \models \Gamma$.

Congruența semantică

- Pentru Γ o mulțime de ecuații condiționate și $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră, definim $\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}} := \bigcap\{Ker(h) \mid h : \mathcal{A} \to \mathcal{B},\ \mathcal{B} \models \Gamma\}$.
- Dacă $\mathcal{A} = T_\Sigma(X)$, notăm $\equiv_{\Gamma, T_\Sigma(X)}$ cu $\equiv_\Gamma$. Avem $t \equiv_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X) t \doteq_s t'$.

Propoziție (*)

$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}}$ este o congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție.

Propoziție (*)

$\equiv_{\Gamma,\mathcal{A}}$ este cea mai mică congruență pe $\mathcal{A}$ închisă la substituție.

Teoremă (*)

$T_\Sigma/_{\equiv_{\Gamma, T_\Sigma}}$ *este* Γ*-algebra inițială.*

Specificații algebrice

- O specificație algebrică este un triplet (S, Σ, Γ), unde (S, Σ) este o signatură multisortată și Γ este o mulțime de ecuații condiționate.
- Specificația (S, Σ, Γ) definește clasa modelelor $Alg(S, \Sigma, \Gamma)$.
- Două specificații (S, Σ, Γ_1) și (S, Σ, Γ_2) sunt echivalente dacă definesc aceeași clasă de modele.
- O specificație (S, Σ, Γ) este adecvată pentru $\mathcal{A}$ dacă $\mathcal{A}$ este Γ-algebră inițială, i.e. $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}_{(S,\Sigma,\Gamma)}$.

Algoritmul de unificare

- O substituție a variabilelor din X cu termeni din $T_\Sigma(Y)$ este o funcție S-sortată $\tau : X \to T_\Sigma(Y)$.
- O substituție $\tau : X \to T_\Sigma(Y)$ se extinde unic la un (S, Σ)-morfism $\tilde{\tau} : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(Y)$.
- Un unificator pentru U este o substituție $\nu : X \to T_\Sigma(X)$ a.î. $\nu(t_i) = \nu(t'_i)$, or. $i = 1, \ldots, n$.
- Un unificator ν pentru U este un cel mai general unificator dacă pentru orice alt unificator ν' pentru U, există o substituție μ astfel încât $\nu' = \nu; \mu$.

Algoritmul de unificare - schemă

	Lista soluție S	Lista de rezolvat R
Inițial	$\emptyset$	$t_1 \doteq t_1', \ldots, t_n \doteq t_n'$
SCOATE	S	R', $t \doteq t$
	S	R'
DESCOMPUNE	S	R', $f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(t_1', \ldots, t_n')$
	S	R', $t_1 \doteq t_1', \ldots t_n \doteq t_n'$
REZOLVĂ	S	R', $x \doteq t$ sau $t \doteq x$, x nu apare în t
	$x \doteq t$, $S[x \leftarrow t]$	$R'[x \leftarrow t]$
Final	S	$\emptyset$

$S[x \leftarrow t]$: în toate ecuațiile din S, x este înlocuit cu t

Logica ecuațională

Deducție ecuațională - cazul necondiționat

- E mulțime de ecuații necondiționate

$$\text{R}\quad \frac{}{(\forall X)t \doteq_s t}$$

$$\text{S}\quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_2 \doteq_s t_1}$$

$$\text{T}\quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2,\ (\forall X)t_2 \doteq_s t_3}{(\forall X)t_1 \doteq_s t_3}$$

$$\text{C}\Sigma\quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1, \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)}$$, unde $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$

$$\text{Sub}_E\quad \frac{}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}$$, unde $(\forall Y)t \doteq_s t' \in E$ si $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$

- Ecuația $\epsilon := (\forall X)t \doteq_s t'$ se deduce ecuațional din E dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ a.î. $\epsilon_n = \epsilon$ și pt. or. $1 \leq i \leq n$:
  - $\epsilon_i \in E$ sau
  - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, CΣ, Sub$_E$.

Deducție ecuațională - cazul condiționat

- Γ mulțime de ecuații condiționate

R $$\frac{}{(\forall X)t \doteq_s t}$$

S $$\frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_2 \doteq_s t_1}$$

T $$\frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2,\ (\forall X)t_2 \doteq_s t_3}{(\forall X)t_1 \doteq_s t_3}$$

CΣ $$\frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1, \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)}$$, unde $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$

Sub$_\Gamma$ $$\frac{(\forall X)\theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1), \ldots, (\forall X)\theta(u_n) \doteq_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}$$, unde

$(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$.

- Ecuația $\epsilon := (\forall X)t \doteq_s t'$ se deduce ecuațional din Γ dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ a.î. $\epsilon_n = \epsilon$ si pt. or. $1 \leq i \leq n$:
  - $\epsilon_i \in \Gamma$ sau
  - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, CΣ, Sub$_\Gamma$.

Logica ecuațională

- Sintaxa: $\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$
  - există o Γ-demonstrație $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = (\forall X)t \doteq_s t'$
- Semantica: $\Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$
  - pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \models (\forall X)t \doteq_s t'$

Corectitudinea logicii ecuationale

- O regulă de deducție $\boxed{\dfrac{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n}{\epsilon}}$ este corectă dacă
$\Gamma \models \epsilon_1, \ldots, \Gamma \models \epsilon_n \Rightarrow \Gamma \models \epsilon$.

Propoziție

Regulile de deducție R, S, T, CΣ, Sub$_\Gamma$ sunt corecte.

Teoremă (Corectitudinea deducției)

$\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.

Completitudinea logicii ecuationale

- O relație binară $\sim \subseteq T_\Sigma(X) \times T_\Sigma(X)$ este închisă la regula

$$\boxed{\text{Reg}\ \frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t_1', \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t_n'}{(\forall X)t \doteq_s t'}}$$

dacă $t_1 \sim_{s_1} t_1', \ldots, t_n \sim_{s_n} t_n' \Rightarrow t \sim_s t'$.

Propoziție

Sunt echivalente:

1. $\sim$ este congruență pe $T_\Sigma(X)$,
2. $\sim$ este închisă la R, S, T, CΣ.

Completitudinea logicii ecuationale

Propoziție

Sunt echivalente:

1. $\sim$ verifică $CS(\Gamma, T_\Sigma(X))$ (i.e. închisă la substituție),
2. $\sim$ este închisă la Sub_Γ.

- Echivalența sintactică pe $T_\Sigma(X)$ determinată de Γ este

$$t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X) t \doteq_s t', \text{ or. } s \in S.$$

Propoziție

$\sim_\Gamma$ este o congruență pe $T_\Sigma(X)$ închisă la substituție.

Teoremă (Completitudinea deducției)

$\Gamma \models (\forall X) t \doteq_s t' \Rightarrow \Gamma \vdash (\forall X) t \doteq_s t'.$

Teorema de completitudine

- Echivalența sintactică: $t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.
- Echivalența semantică: $t \equiv_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t'$.
- Corectitudinea deducției: $\sim_\Gamma \subseteq \equiv_\Gamma$.
- Completitudinea deducției: $\equiv_\Gamma \subseteq \sim_\Gamma$.

Teoremă (Teorema de completitudine)

$$\Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$$

$$(\equiv_\Gamma = \sim_\Gamma)$$

Rescrierea termenilor

Contexte

- $nr_y(t)$ = numărul de apariții ale lui y în t
- Fie z a.î. $z \notin X$. Un termen $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})$ se numește context dacă $nr_z(c) = 1$.
- Dacă $t_0 \in T_\Sigma(X)$ și t_0 are același sort cu z, definim substituția $\{z \leftarrow t_0\} : X \cup \{z\} \to T_\Sigma(X)$, prin
$$\{z \leftarrow t_0\}(x) = \begin{cases} t_0, & \text{dacă } x = z \\ x, & \text{altfel} \end{cases} .$$
- Pentru un context $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})$, notăm:
$$c[z \leftarrow t_0] := \{z \leftarrow t_0\}(c).$$

Sistem de rescriere

- O regulă de rescriere $l \to_s r$ (peste Y) este formată din $l, r \in T_\Sigma(Y)_s$ astfel încât l nu este variabilă și $Var(r) \subseteq Var(l) = Y$.
- Un sistem de rescriere (TRS) este o mulțime finită de reguli de rescriere.
- Dacă R este un sistem de rescriere, pentru $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$ definim relația $t \to_R t'$ astfel:

$$
\boxed{
\begin{array}{lcl}
t \to_R t' & \Leftrightarrow & t \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(l)] \text{ și} \\
 & & t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(r)], \text{ unde} \\
 & & c \in T_\Sigma(X \cup \{z\}) \text{ context}, \\
 & & l \to_s r \in R \text{ cu } Var(l) = Y, \\
 & & \theta : Y \to T_\Sigma(X) \text{ substituție}
\end{array}
}
$$

Echivalența generată de $\rightarrow_R$

- Închiderea tranzitivă:
  $t \stackrel{*}{\rightarrow}_R t' \Leftrightarrow t = t_0 \rightarrow_R \ldots \rightarrow_R t_n = t'$

- Închiderea simetrică:
  $t \leftrightarrow_R t' \Leftrightarrow t \rightarrow_R t'$ sau $t' \rightarrow_R t$

- Echivalența generată de $\rightarrow_R$:
  $t \stackrel{*}{\leftrightarrow}_R t' \Leftrightarrow t = t_0 \leftrightarrow_R \ldots \leftrightarrow_R t_n = t'$

Sistemul de rescriere R_E

- E mulțime de ecuații astfel încât, pt. or. $(\forall Y) l \doteq_s r \in E$:
  - $l \notin Y$ (nu este variabilă),
  - $Var(r) \subseteq Var(l) = Y$.

- Sistemul de rescriere determinat de E:

$$R_E := \{l \to_s r \mid (\forall Y) l \doteq_s r \in E\}$$

- Relația de rescriere generată de R_E: $\to_E := \to_{R_E}$

Logica ecuațională și rescrierea termenilor

Dacă Γ mulțime de ecuații condiționate:

$$\boxed{\mathrm{SR}_\Gamma \quad \frac{(\forall X)\theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1), \ldots, (\forall X)\theta(u_n) \doteq_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)c[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(t')]}}$$, unde

$(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$, $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$, $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})_{s'}$, $z \notin X$, $nr_z(c) = 1$ (c context).

Dacă E mulțime de ecuații necondiționate:

$$\boxed{\mathrm{SR}_E \quad \frac{}{(\forall X)c[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(t')]}}$$, unde

$(\forall Y)t \doteq_s t' \in E$, $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$, $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})_{s'}$, $z \notin X$, $nr_z(c) = 1$.

Propoziție

SR_Γ este regulă de deducție corectă.

Logica ecuațională și rescrierea termenilor

- $\Gamma \vdash_{\mathrm{R,S,T,C\Sigma,Sub}_\Gamma} (\forall X)t \doteq_s t'$:
  - dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = (\forall X)t \doteq_s t'$ a.î.
    - $\epsilon_i \in \Gamma$ sau
    - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, CΣ, Sub$_\Gamma$.

- $\Gamma \vdash_{\mathrm{R,S,T,SR}_\Gamma} (\forall X)t \doteq_s t'$:
  - dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = (\forall X)t \doteq_s t'$ a.î.
    - $\epsilon_i \in \Gamma$ sau
    - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, SR$_\Gamma$.

Teoremă

Sunt echivalente:

1. $\Gamma \vdash_{R,S,T,C\Sigma,Sub_\Gamma} (\forall X)t \doteq_s t'$,
2. $\Gamma \vdash_{R,S,T,SR_\Gamma} (\forall X)t \doteq_s t'$.

Logica ecuațională și rescrierea termenilor

Teoremă

$$E \vdash (\forall X) t \doteq_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \overset{*}{\leftrightarrow}_E t'$$

Sisteme de rescriere abstracte

- Un sistem de rescriere abstract este o pereche $(T, \to)$ unde T este o mulțime și $\to \subseteq T \times T$.
- $\leftarrow \; := \; \to^{-1}$ (relația inversă)
- $\leftrightarrow \; := \; \to \cup \leftarrow$ (închiderea simetrică)
- $\stackrel{*}{\to} \; := (\to)^*$ (închiderea reflexivă și tranzitivă)
- $\stackrel{*}{\leftrightarrow} \; := (\leftrightarrow)^*$ (echivalența generată)

Sisteme de rescriere abstracte

- $t \in T$ este reductibil dacă există $t' \in T$ a.î. $t \to t'$.
- O reducere este un șir $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \ldots$
- $t \in T$ este în formă normală (ireductibil) dacă nu este reductibil.
- t_0 este o formă normală a lui t dacă
  - $t \stackrel{*}{\to} t_0$ și
  - t_0 este în formă normală.
- t_1 și t_2 se intâlnesc dacă există $t \in T$ a.î. $t_1 \stackrel{*}{\to} t \stackrel{*}{\leftarrow} t_2$.
  - notație: $t_1 \downarrow t_2$.

Sisteme de rescriere abstracte

- $(T, \to)$ se numește
  - noetherian: dacă nu există reduceri infinite $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \ldots$.
  - confluent: $t_1 \stackrel{*}{\leftarrow} t \stackrel{*}{\to} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
  - local confluent: $t_1 \leftarrow t \to t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
  - Church-Rosser: $t_1 \stackrel{*}{\leftrightarrow} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
  - Normalizat: orice element are o formă normală.
  - Complet (convergent, canonic): confluent și noetherian.

Sisteme de rescriere abstracte

Propoziție

Fie $(T, \rightarrow)$ sistem de rescriere. Dacă $t \downarrow t'$, atunci $t \stackrel{*}{\leftrightarrow} t'$.

Propoziție

Dacă $(T, \rightarrow)$ este un sistem de rescriere noetherian, atunci orice element are o formă normală.

Propoziție

Dacă $(T, \rightarrow)$ este un sistem de rescriere complet, atunci orice element are o unica formă normală.

Propoziție

Un sistem de rescriere este confluent ddacă este Church-Rosser.

Sisteme de rescriere abstracte

Propoziție

Dacă $(T, \to)$ este un sistem de rescriere confluent, atunci este local confluent.

Lema lui Newman

Dacă $(T, \to)$ este un sistem de rescriere noetherian și local confluent, atunci este confluent.

Propoziție

Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere complet. Atunci $t \overset{*}{\leftrightarrow} t' \Leftrightarrow fn(t) = fn(t')$.

Corolar

Dacă sistemul de rescriere $(T_\Sigma(X), R_E)$ este complet, atunci:

$$E \vdash (\forall X) t \doteq_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \overset{*}{\leftrightarrow}_E t' \quad \Leftrightarrow \quad fn(t) = fn(t')$$

Terminarea sistemelor de rescriere

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Propoziție (*)

Sunt echivalente:

1. R este noetherian,
2. oricărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $\mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât $t \to_R t'$ implică $\mu(t) > \mu(t')$.

- Ordine de reducere: $t > t'$ ddacă $\mu(t) > \mu(t')$
- Arborele de reducere al termenului t este definit astfel:
  - rădăcina arborelui are eticheta t,
  - descendenții nodului cu eticheta u sunt etichetați cu termenii u' care verifică $u \to_R u'$.
- Dacă R se termină atunci

$$\mu(t) := \text{înălțimea arborelui de reducere asociat lui } t.$$

Confluență și perechi critice

Fie (S, Σ) o signatură, Y mulțime de variabile și R un TRS.

Definiție

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

1. $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
2. există t un subtermen al lui l_1 care nu este variabilă ($l_1 = c[z \leftarrow t]$, unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă)
3. există θ c.g.u pentru t și l_2 (i.e. $\theta(t) = \theta(l_2)$).

Perechea $(\theta(r_1), \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)])$ se numește pereche critică.

$$\begin{tikzcd}
& \theta(l_1) \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\
\theta(r_1) & & \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)]
\end{tikzcd}$$

Confluență și perechi critice

Teoremă (Teorema Perechilor Critice *)

Dacă R este noetherian, atunci sunt echivalente:

1. *R este confluent,*
2. *$t_1 \downarrow_R t_2$ pentru orice pereche critică (t_1, t_2).*

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
  1. CP := CP(T) $= \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$
  2. Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP *(T completarea lui R)*.
  3. Dacă $(t_1, t_2) \in CP$, $t_1 \not\downarrow t_2$ atunci:
     - dacă $fn(t_1) > fn(t_2)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_1) \to fn(t_2)\}$,
     - dacă $fn(t_2) > fn(t_1)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_2) \to fn(t_1)\}$,
     - altfel, STOP *(completare eșuată)*.
- IEȘIRE: T completarea lui R sau eșec.

Atenție! Succesul completării depinde de relația $<$.

Programare logică

Problema programării logice (ecuaționale)

- (S, Σ) signatură multisortată și Γ mulțime de ecuații condiționate
- G o mulțime de ecuații de forma $(\forall X)t \doteq_s t'$, $t, t' \in T_\Sigma(X)$.

- Problema programării logice ecuaționale:

$$\Gamma \models (\exists X)G.$$

- $\Gamma \models (\exists X)G$:
  or. $\mathcal{A}$ a.î. $\mathcal{A} \models \Gamma$, $\mathcal{A} \models (\exists X)G$.
- $\mathcal{A} \models (\exists X)G$:
  există un morfim $h : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ a.î. $h_s(t) = h_s(t')$, or.
  $(\forall X)t \doteq_s t' \in G$.

Teoremele lui Herbrand

Teoremă

Fie G o mulțime de ecuații de forma $(\forall X)t \doteq_s t'$, $t, t' \in T_\Sigma(X)$. Sunt echivalente:

1. $\Gamma \models (\exists X)G$,
2. $T_{\Sigma,\Gamma} \models (\exists X)G$,
3. *există un morfism* $\psi : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma$ *a.î.* $\Gamma \models (\forall\emptyset)\psi(G)$.

Baftă la examen!