Logică matematică și computațională
Cursul VIII

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

Preliminarii despre algebre produs direct

- În acest curs vom încheia studiul **laticilor** oarecare, și vom începe să studiem **algebrele Boole** (caz particular de latici).

- Dar vom începe prin a descrie anumite operații cu relații binare, pe care le vom aplica în cazul relațiilor de ordine.

- Amintim că un *poset* este o *mulțime (parțial) ordonată*, i. e. o mulțime înzestrată cu o relație de ordine pe ea.
- **poset** = "partially ordered set"
- Un poset a cărui relație de ordine este *totală* (i. e. *liniară*, i. e. oricare două elemente ale posetului sunt comparabile) se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Preliminarii despre algebre produs direct

Definiție

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie arbitrară de mulțimi. Se definește *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i\in I}$ ca fiind mulțimea notată $\coprod_{i\in I} A_i$ și definită prin:

$$\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$$

Observație

Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulțimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulțimii respective.

Notație

Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașați, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Preliminarii despre algebre produs direct

Notație

Dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i\in\overline{1,n}} A_i \stackrel{\text{notație}}{=} \coprod_{i=1}^{n} A_i \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n$$

Remarcă

Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A, B, C, se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și o identificare de indici, adică o bijecție între mulțimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A \coprod (B \coprod C) = (A \coprod B) \coprod C$.

Exemplu

Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$. Cine este reuniunea disjunctă $A \coprod B$? Putem considera că familia de mulțimi {A,B} este indexată de mulțimea $\{1, 2\}$, iar A are indicele 1 și B are indicele 2, adică $\{A, B\} = \{A_1, A_2\}$, cu $A_1 := A$ și $A_2 := B$. Avem, așadar:

$$A \coprod B = A_1 \coprod A_2 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

Preliminarii despre algebre produs direct

Definiție

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi. Se definesc:

- *suma directă* a poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \oplus \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \coprod B$: $\leq \oplus \sqsubseteq := \leq \cup \sqsubseteq \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, cu identificarea între fiecare element al lui $A \cup B$ și elementul reuniunii disjuncte $A \coprod B$ care îi corespunde;
- *produsul direct* al poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notat $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$, unde $\leq \times \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe mulțimea produs direct $A \times B$: $\leq \times \sqsubseteq := \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, a_1 \leq a_2, b_1 \sqsubseteq b_2\}$.

Preliminarii despre algebre produs direct

Remarcă (temă pentru acasă)

Cu notațiile din definiția anterioară, relațiile binare sumă directă, $\leq \oplus \sqsubseteq$, și produs direct, $\leq \times \sqsubseteq$, sunt **relații de ordine** pe $A \coprod B$ și $A \times B$, respectiv. Adică:

$$(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq) \text{ și } (A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$$

sunt **poseturi**.

Acest fapt se demonstrează prin verificarea directă, cu definiția, a proprietăților unei relații de ordine (reflexivitate, tranzitivitate, antisimetrie).

În cazul sumei directe, se analizează toate cazurile în care se pot afla câte două elemente $x, y \in A \coprod B$ vizavi de mulțimile "din care provin" acestea: sunt ambele din A, ambele din B, sau unul din A și unul din B.

Preliminarii despre algebre produs direct

Remarcă (temă pentru acasă)

Se observă din diagramele Hasse care urmează și se demonstrează ușor că:

- **suma directă** de poseturi **este asociativă**, dar **nu este comutativă**;
- **produsul direct** de poseturi **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism de poseturi**, i. e., pentru orice poseturi $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ și $(C, \leq_C)$, există un izomorfism de poseturi între $((A, \leq_A) \times (B, \leq_B)) \times (C, \leq_C)$ și $(A, \leq_A) \times ((B, \leq_B) \times (C, \leq_C))$ (anume $f : (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$, pentru orice $a \in A$, $b \in B$ și $c \in C$, $f((a, b), c) = (a, (b, c))$) și există un izomorfism de poseturi între $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B)$ și $(B, \leq_B) \times (A, \leq_A)$ (anume $g : A \times B \rightarrow B \times A$, pentru orice $a \in A$ și $b \in B$, $g(a, b) = (b, a)$).

Se demonstrează simplu că și **produsul direct** de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (structuri pe care le vom studia mai târziu) **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism**, în aceste cazuri un izomorfism de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole.

Remarcă (temă pentru seminar)

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi.

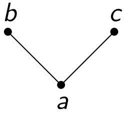
1. Dacă $|A| \geq 2$ și $|B| \geq 2$, atunci produsul direct $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu este lanț.
2. Dacă A este un singleton (i. e. o mulțime cu un singur element), atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism de poseturi între ele).
3. Dacă B este un singleton, atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și $(A, \leq)$ sunt izomorfe.

Remarcă

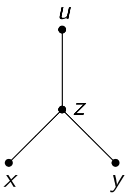
Remarca anterioară arată că lanțurile sunt **indecompozabile** raportat la produsul direct (i. e. lanțurile nu pot fi descompuse în produs direct de alte poseturi).

Să vedem cum arată **diagramele Hasse ale poseturilor sumă directă și produs direct de două poseturi finite**.

Fie, pentru exemplificare, următoarele două poseturi:



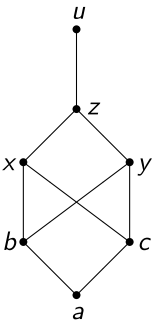
$(A, \leq)$



$(B, \sqsubseteq)$

Preliminarii despre algebre produs direct

Diagrama Hasse a sumei directe $(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$ se obține astfel: se desenează diagrama Hasse a lui $(A, \leq)$ dedesubtul diagramei Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$, apoi se unește fiecare element maximal al lui A cu fiecare element minimal al lui B:



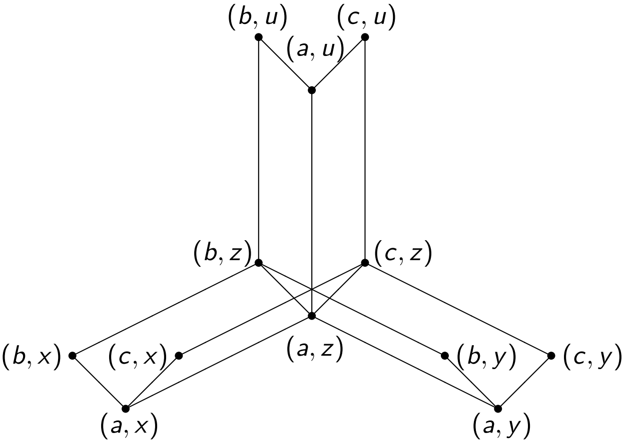
$(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$

Preliminarii despre algebre produs direct

Diagrama Hasse a produsului direct $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ se obține astfel:

- se desenează $|B|$ (adică 4, aici) copii ale diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$ și se așează pe pozițiile în care apar nodurile în diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$;
- se etichetează fiecare nod din fiecare copie a diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$ cu perechea formată din:
  - eticheta lui din diagrama Hasse a lui $(A, \leq)$
    și
  - eticheta nodului din diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$ căruia îi corespunde respectiva copie a diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$;
- se adaugă muchiile care unesc fiecare nod etichetat cu (α, β), cu $\alpha \in A$ și $\beta \in B$, cu fiecare nod etichetat cu (α, γ), cu $\gamma \in B$ și β și γ unite prin muchie în diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$:

Preliminarii despre algebre produs direct



$(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$

Preliminarii despre algebre produs direct

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația sumă directă de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **sumă directă a unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin următoarea **definiție recursivă**: suma directă a familiei $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$ se notează cu

$(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2) \oplus \ldots \oplus (A_n, \leq_n)$ sau $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} (A_i, \leq_i)$ sau

$(A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n, \leq_1 \oplus \leq_2 \oplus \ldots \oplus \leq_n)$ sau $(\displaystyle\coprod_{i=1}^{n} A_i, \bigoplus_{i=1}^{n} \leq_i)$ și este posetul

definit, recursiv, astfel: $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} (A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ (\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n-1} (A_i, \leq_i)) \oplus (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$

Preliminarii despre algebre produs direct

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația produs direct de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **produs direct al unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin **definiția recursivă**: produsul direct al familiei $(A_i, \leq_i)_{i\in\overline{1,n}}$ se notează cu $(A_1, \leq_1) \times (A_2, \leq_2) \times \ldots \times (A_n, \leq_n)$ sau $\prod_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i)$ sau $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n, \leq_1 \times \leq_2 \times \ldots \times \leq_n)$ sau $(\prod_{i=1}^{n} A_i, \prod_{i=1}^{n} \leq_i)$ și este posetul definit, recursiv, astfel:

$$\prod_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ (\prod_{i=1}^{n-1}(A_i, \leq_i)) \times (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

Notație

Cu notațiile din remarca anterioară, dacă $(A_1, \leq_1) = (A_2, \leq_2) = \ldots = (A_n, \leq_n) = (A, \leq)$, atunci produsul direct $(\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A}, \underbrace{\leq \times \leq \times \ldots \times \leq}_{n \text{ de } \leq})$ se mai notează cu $(A^n, \leq)$.

Preliminarii despre algebre produs direct

Produsul direct poate fi generalizat la **familii arbitrare de poseturi**, astfel:

Definiție

Fie $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ o familie arbitrară de poseturi. Atunci se definește *produsul direct* al acestei familii, notat $\prod_{i \in I}(A_i, \leq_i)$, ca fiind $(\prod_{i \in I} A_i, \leq)$, unde $\leq$ este o relație binară pe produsul direct de mulțimi

$\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) f(i) \in A_i\}$, definită prin: pentru orice

$f, g \in \prod_{i \in I} A_i$,

$$f \leq g \text{ ddacă } f(i) \leq g(i), \text{ oricare ar fi } i \in I.$$

Remarcă (temă pentru acasă)

Verificând direct proprietățile unei relații de ordine (reflexivitate, tranzitivitate și antisimetrie), se arată că relația binară $\leq$ din definiția anterioară este o **relație de ordine**, deci $(\prod_{i \in I} A_i, \leq)$ este un **poset**.

Produsul direct al familiei vide

Remarcă

Produsul direct al familiei vide de mulțimi este **un singleton**, adică o mulțime cu un singur element.
Prin urmare, produsul direct al familiei vide de poseturi este un singleton $\{*\}$, organizat ca poset cu unica relație de ordine pe un singleton, anume $\{(*,*)\}$.
La fel stau lucrurile pentru produsul direct al unei familii vide de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos această generalizare).
Într–adevăr, să înlocuim mulțimea de indici I cu $\emptyset$ în definiția anterioară.
Reuniunea familiei vide de mulțimi este $\emptyset$, așadar mulțimea
$\prod\limits_{i\in\emptyset} A_i = \{f \mid f : \emptyset \to \emptyset\} = \{(\emptyset,\emptyset,\emptyset)\}$ (unica funcție de la $\emptyset$ la $\emptyset$; a se vedea definiția unei funcții).
Așadar, pentru orice mulțime A, $A^{\emptyset} = \{(\emptyset,\emptyset,\emptyset)\}$.
Este admisă și notația A^0 în loc de $A^{\emptyset}$.
Aceste notații pot fi extinse la produsul direct al familiei vide de poseturi sau de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos).

Preliminarii despre algebre produs direct

Notație

Pentru $(A_i, \leq_i) = (A, \leq)$, oricare ar fi $i \in I$, în definiția anterioară, produsul direct al familiei $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ devine $(A^I, \leq)$ (notând ordinea de pe $A^I = \{f : I \to A\}$ la fel ca ordinea de pe A).

Remarcă

În definițiile produsului direct (a două poseturi, al unei familii finite nevide de poseturi, al unei familii arbitrare de poseturi) se pot **înlocui poseturile** cu **mulțimi înzestrate cu relații binare arbitrare**, și se obține noțiunea de *produs direct al unor relații binare*, care este o relație binară pe mulțimea dată de produsul direct al respectivelor mulțimi.

Dar **produsul direct** se poate defini și pentru **structuri algebrice de același tip**, înzestrate cu anumite operații, pe baza cărora se definesc, punctual, operațiile produsului direct.

În cazul laticilor, a căror definiție o vom aminti îndată, **produsul direct al unor latici** este **simultan un poset produs direct** (latice Ore) și **o structură algebrică produs direct**, cu două operații binare (latice Dedekind).

Vom exemplifica mai jos noțiunea de **produs direct al unor mulțimi înzestrate și cu operații, și cu relații binare**.

Preliminarii despre algebre produs direct

Să exemplificăm pe o structură formată dintr–o mulțime înzestrată cu o relație binară și trei operații, dintre care una binară, una unară (adică având un singur argument) și una zeroară (adică fără argumente, adică o constantă).
Mai întâi pentru **produse directe finite nevide**.
Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și n structuri algebrice de același tip $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in \overline{1, n}$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$:

- $\circ_i : A_i \times A_i \rightarrow A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \circ_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \rightarrow A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i.

Preliminarii despre algebre produs direct

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \circ, f, c, \rho)$, cu:

- $A \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} A_i$,
  cu *operațiile produs direct*:
- $\circ \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} \circ_i \overset{\text{notație}}{=} (\circ_1, \ldots, \circ_n)$,
- $f \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} f_i \overset{\text{notație}}{=} (f_1, \ldots, f_n)$,
- $c \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} c_i \overset{\text{notație}}{=} (c_1, \ldots, c_n)$
  și *relația binară produs direct*:
- $\rho \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} \rho_i \overset{\text{notație}}{=} (\rho_1, \ldots, \rho_n)$,

definite **pe componente**, i. e. ca mai jos, unde notația pentru un element $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ semnifică faptul că $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$:

Preliminarii despre algebre produs direct

- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, $x \circ y \overset{\text{definiție}}{=} (x_1 \circ_1 y_1, \ldots, x_n \circ_n y_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, $f(x) \overset{\text{definiție}}{=} (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in A$;
- constanta $c \overset{\text{definiție}}{=} (c_1, \ldots, c_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, prin definiție, $x \rho y$ ddacă $x_1 \rho_1 y_1, \ldots, x_n \rho_n y_n$.

Dacă $(A_1, \circ_1, f_1, c_1, \rho_1) = \ldots = (A_n, \circ_n, f_n, c_n, \rho_n) = (B, \circ_B, f_B, c_B, \rho_B)$, atunci $A = B^n = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_1, \ldots, b_n \in B\}$, și operațiile și relația binară produs pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Preliminarii despre algebre produs direct

Și acum **cazul general**: fie $((A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i))_{i \in I}$ o **familie arbitrară** de structuri algebrice, unde, pentru fiecare $i \in I$:

- $\circ_i : A_i \times A_i \to A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \circ_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \to A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i.

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \circ, f, c, \rho)$, cu:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{h \mid h : I \to A, (\forall i \in I) h(i) \in A_i\}$,

cu *operațiile produs direct* $\circ$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și *relația binară produs direct* ρ pe A definite **punctual**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $g, h \in A$, $g \circ h \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(g \circ h)(i) = g(i) \circ_i h(i)$;
- pentru orice $h \in A$, $f(h) \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f(h))(i) = f_i(h(i))$;
- $c \in A$, definită prin: pentru orice $i \in I$, $c(i) = c_i \in A_i$;
- pentru orice $g, h \in A$, prin definiție, $g \rho h$ ddacă $g(i) \rho_i h(i)$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \circ_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{h \mid h : I \to B\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Produsul direct al familiei vide de structuri algebrice de același tip

În cazul în care $I = \emptyset$, obținem **algebra produs direct al familiei vide de algebre** de tipul de mai sus, anume $(A, \circ, f, c, \rho)$, unde:

- A este un singleton: $A = \{*\}$ (a se vedea, mai sus, produsul direct al familiei vide de poseturi);
- operațiile $\circ$, f și c au singurele definiții posibile pe un singleton, anume: $* \circ * := *$, $f(*) := *$ și $c := *$;
- ρ este un singleton, deci nu poate fi decât: $\rho := \{(*, *)\}$.

Latici

Amintim:

- O latice este simultan un poset și o structură algebrică înzestrată cu două operații binare, fiecare dintre acestea cu anumite proprietăți specifice.
- Am definit două tipuri de latici, anume *laticile Ore* și *laticile Dedekind*, și apoi am demonstrat că orice latice Ore poate fi organizată ca o latice Dedekind, și orice latice Dedekind poate fi organizată ca o latice Ore, așadar, de fapt, există un singur fel de latice, care este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.

Cele două definiții ale noțiunii de latice

Amintim:

Definiție

O *latice Ore* este un poset $(L, \leq)$ cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\} \in L$ și $\sup\{x, y\} \in L$.

Definiție

O *latice Dedekind* este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$, unde L este o mulțime, iar $\vee$ și $\wedge$ sunt două operații binare pe L (notate infixat și numite respectiv *sau* și *și*, sau *disjuncție* și *conjuncție*, sau *reuniune* și *intersecție*) care satisfac următoarele proprietăți:

- **idempotență:** pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$ și $x \wedge x = x$;
- **comutativitate:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ și $x \wedge y = y \wedge x$;
- **asociativitate:** pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ și $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- **absorbție:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Amintim:

Teoremă

Cele două definiții ale noțiunii de latice sunt echivalente. Mai precis, au loc următoarele fapte.

1. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \leq)$ *o latice Ore. Definim* $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, *unde* $\vee$ *și* $\wedge$ *sunt operații binare pe mulțimea* L, *definite prin: pentru orice* $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ *și* $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ *în laticea Ore* $\mathcal{L}$. *Atunci* $\Phi(\mathcal{L})$ *este o latice Dedekind.*
2. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ *o latice Dedekind. Definim* $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, *unde* $\leq$ *este o relație binară pe mulțimea* L, *definită prin: pentru orice* $x, y \in L$, $x \leq y$ *ddacă* $x \vee y = y$ *(ceea ce este echivalent cu* $x \wedge y = x$, *după cum ne asigură o lemă dintr–un curs anterior). Atunci* $\Psi(\mathcal{L})$ *este o latice Ore, în care, pentru orice* $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ *și* $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
3. *Aplicațiile* Φ *și* Ψ *sunt inverse una alteia, adică: pentru orice latice Ore* $\mathcal{L}$, $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$, *și, pentru orice latice Dedekind* $\mathcal{L}$, $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.

Latici

- De acum încolo, vom numi orice latice Ore și orice latice Dedekind, simplu, *latice*.
- Conform teoremei anterioare, orice latice este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.
- Ori de câte ori va fi dată o latice, vom lucra cu ordinea ei parțială (care o face latice Ore) și cu operațiile ei binare (disjuncția și conjuncția, care o fac latice Dedekind) fără a specifica la care dintre cele două definiții echivalente ale unei latici ne vom referi într–un anumit moment.
- Pentru orice latice L, vom folosi oricare dintre notațiile: $(L, \leq)$, $(L, \vee, \wedge)$ și $(L, \vee, \wedge, \leq)$, în funcție de ce trebuie specificat despre structura de latice a lui L: ordinea ei parțială $\leq$, operațiile ei binare $\vee$ și $\wedge$, sau toate acestea.

Latici

În esență, așadar, într–o latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$, avem:

- o mulțime L,
- o relație de ordine (parțială) $\leq$ pe L,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe L, notate infixat,

aceste elemente au proprietățile:

- oricare ar fi $x, y \in L$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(L, \leq)$;
- $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in L$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
- $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;

și sunt legate între ele prin relațiile: pentru orice $x, y \in L$:

- $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
- $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Latici mărginite

Amintim:

Definiție

Un poset mărginit care este latice se numește *latice mărginită*.
Dacă există, primul element al (adică minimul) unei latici se notează, de obicei, cu 0.
Dacă există, ultimul element al (adică maximul) unei latici se notează, de obicei, cu 1.
O latice mărginită va fi notată $(L, \leq, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, cu notațiile prezentate mai sus.
O latice mărginită se mai numește *latice cu* 0 *și* 1 sau *latice cu prim și ultim element*.

Definiție

Laticea mărginită cu un singur element (adică laticea mărginită cu $0 = 1$) se numește *laticea mărginită trivială*.
Orice latice mărginită de cardinal strict mai mare decât 1 (adică orice latice mărginită în care $0 \neq 1$) se numește *latice mărginită netrivială*.

Produs direct de latici

Exercițiu (temă pentru acasă)

Să se demonstreze că un produs direct arbitrar de latici (mărginite) este o latice (mărginită).

Exercițiu (temă pentru seminar)

Pentru un număr natural nenul arbitrar n, să se descompună laticea mărginită $(D_n := \{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |, 1, n)$ în produs direct de lanțuri.

Complementul unui element într–o latice mărginită

Amintim:

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ latice mărginită.
Un element $x \in L$ se zice *complementat* ddacă există un element $y \in L$ a. î. $x \vee y = 1$ și $x \wedge y = 0$.
Un astfel de element y se numește *complement al lui* x.
O latice mărginită se zice *complementată* ddacă toate elementele sale sunt complementate.

Remarcă

În mod evident, dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită și $x, y \in L$ sunt a. î. y este un complement al lui x, atunci x este un complement al lui y, după cum arată comutativitatea lui $\vee$ și $\wedge$.

Remarcă

În orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și niciunul dintre ele nu are alte complemente.

Latici distributive

Amintim:

Propoziție

În orice latice $(L, \vee, \wedge)$*, următoarele două afirmații, numite* legile de distributivitate, *sunt echivalente:*

(d_1) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(d_2) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Definiție

O latice se zice *distributivă* ddacă satisface una (și deci pe amândouă) dintre condițiile (d_1) și (d_2) din propoziția precedentă.

Remarcă

În orice latice distributivă mărginită, complementul unui element, dacă există, este unic.

Algebre Boole – definiție și notații

Definiție

O *algebră Boole* (sau *algebră booleană*) este o latice mărginită distributivă complementată.

Notație

Remarca anterioară arată că, într–o algebră Boole, datorită distributivității, complementul oricărui element x este unic, ceea ce ne permite să îl notăm prin $\overline{x}$ (sau $\neg x$).
Existența complementului oricărui element al unei algebre Boole de mulțime suport B (existență impusă în definiția anterioară), alături de unicitatea complementului, ne dau posibilitatea de a defini o operație unară $\bar{\cdot} : B \to B$ (sau $\neg : B \to B$), care duce fiecare element al lui B în complementul său.
Această operație se va numi *complementare* și se va citi *not*.
O algebră Boole va fi notată $(B, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este laticea distributivă mărginită subiacentă algebrei Boole, iar $\bar{\cdot}$ este operația ei de complementare.

Exemple de algebre Boole

La fel ca în cazul laticilor mărginite:

Remarcă

O algebră Boole nu poate fi vidă, pentru că are minim și maxim.

Definiție

- Algebra Boole cu un singur element (adică algebra Boole cu $0 = 1$, anume lanțul cu un singur element, $\mathcal{L}_1$) se numește *algebra Boole trivială*.
- Orice algebră Boole de cardinal strict mai mare decât 1 (i. e. orice algebră Boole cu cel puțin 2 elemente, adică orice algebră Boole cu $0 \neq 1$) se numește *algebră Boole netrivială*.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Lanțul cu două elemente este o algebră Boole.
Într–adevăr, $(\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}, \leq)$, cu $0 < 1$ (i. e. $0 \leq 1$ și $0 \neq 1$):

- este un lanț, deci o latice distributivă, cu $\vee = \max$ și $\wedge = \min$ (a se vedea un rezultat dintr–un curs anterior);
- este, evident, o latice mărginită;
- are proprietatea că 0 și 1 sunt complemente unul altuia și nu au alte complemente (fapt valabil în orice latice mărginită), deci $\overline{0} = 1$ și $\overline{1} = 0$.

Așadar, $(\mathcal{L}_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ este o algebră Boole.
Această algebră Boole se numește *algebra Boole standard* și are următoarea diagramă Hasse ca poset:

Exercițiu (temă pentru acasă)

Demonstrați că singurele algebre Boole total ordonate sunt algebra Boole trivială și algebra Boole standard.
Indicație: presupuneți prin absurd că există o algebră Boole care să fie un lanț $(L, \max, \min, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ cu cel puțin 3 elemente, adică există $x \in L \setminus \{0, 1\}$. L fiind total ordonată, avem: $x \leq \overline{x}$ sau $\overline{x} \leq x$. Cine este $\overline{x}$, conform definiției complementului?

Remarcă

Se arată imediat, direct cu definiția unei algebre Boole, că orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite punctual.

Exemple de algebre Boole

Remarcă

În particular, considerând algebra Boole standard $\mathcal{L}_2$ și o mulțime arbitrară I, remarca anterioară ne asigură de faptul că $\mathcal{L}_2^I$ este o algebră Boole. Care sunt operațiile ei de algebră Boole și ordinea ei parțială?
Considerând reprezentarea elementelor sale ca funcții de la I la $\mathcal{L}_2$, avem: $\mathcal{L}_2^I = \{f | f : I \to \mathcal{L}_2\}$.
Operațiile de algebră Boole și ordinea parțială pe aceste funcții vor fi definite **punctual**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard, $(\mathcal{L}_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$: pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_2^I$:

- $f \vee g, f \wedge g, \overline{f}, 0, 1 \in \mathcal{L}_2^I$, definite prin: pentru orice $i \in I$:
  - $(f \vee g)(i) = f(i) \vee g(i)$
  - $(f \wedge g)(i) = f(i) \wedge g(i)$
  - $\overline{f}(i) = \overline{f(i)}$
  - $0(i) = 0$ și $1(i) = 1$
- $f \leq g$ ddacă $f(i) \leq g(i)$ pentru fiecare $i \in I$.

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Aplicând remarca anterioară cazului în care I este finită, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, obținem că $\mathcal{L}_2^n$ este o algebră Boole.

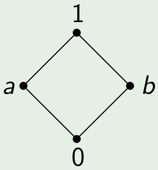
- $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_1$ este algebra Boole trivială.
- $\mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}_2$ este algebra Boole standard.

Următoarele exemple prezintă algebrele Boole $\mathcal{L}_2^2$ și $\mathcal{L}_2^3$.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^2$ se numește *rombul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Am notat: $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 1)$, $a = (0, 1)$, $b = (1, 0)$, unde $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$.
Diagrama de mai sus este corectă, pentru că ordinea parțială produs, $\leq$, satisface:

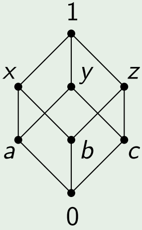
- $(0, 0) \leq (0, 1) \leq (1, 1)$,
- $(0, 0) \leq (1, 0) \leq (1, 1)$,
- $(0, 1)$ și $(1, 0)$ sunt incomparabile ($(0, 1) \nleq (1, 0)$ și $(1, 0) \nleq (0, 1)$, pentru că $1 \nleq 0$ în $\mathcal{L}_2$).

Definițiile operațiilor de algebră Boole se fac **pe componente**, pornind de la cele ale lui $\mathcal{L}_2$ (de exemplu, $a \vee b = (0, 1) \vee (1, 0) = (0 \vee 1, 1 \vee 0) = (1, 1) = 1$), dar pot fi determinate și din diagrama Hasse a acestei algebre Boole.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ se numește *cubul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Cu notația uzuală $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$ pentru elementele algebrei Boole standard, elementele din diagrama Hasse de mai sus sunt: $0 = (0, 0, 0)$, $a = (0, 0, 1)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 0, 0)$, $x = (0, 1, 1)$, $y = (1, 0, 1)$, $z = (1, 1, 0)$ și $1 = (1, 1, 1)$.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Pentru orice mulțime I, $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, I)$, unde $\overline{A} = I \setminus A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, este o algebră Boole.
Acest fapt poate fi verificat foarte ușor, cu definiția unei algebre Boole, folosind funcțiile caracteristice ale submulțimilor lui I raportat la I sau, direct, calcul cu mulțimi pentru a demonstra proprietățile operațiilor lui $\mathcal{P}(I)$.

Operații derivate într–o algebră Boole

Notație

În orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc următoarele *operații binare derivate*:

- *implicația (booleană)*, $\rightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \rightarrow b := \bar{a} \vee b$;
- *echivalența (booleană)*, $\leftrightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Subalgebre Boole

Definiție

Dată o algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, o submulțime S a lui B se numește *subalgebră Boole a lui B* ddacă este **închisă la operațiile de algebră Boole ale lui** B, i. e.:

- pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \vee y, x \wedge y \in S$;
- pentru orice $x \in S$, rezultă $\overline{x} \in S$;
- $0, 1 \in S$.

Subalgebre Boole

Remarcă

Este imediat că o subalgebră Boole S a unei algebre Boole B este o **algebră Boole** cu operațiile induse pe S de operațiile de algebră Boole ale lui B și cu ordinea parțială indusă pe S de ordinea parțială a lui B.

Notație

Cu notațiile de mai sus, **operațiile induse** (adică **restricțiile la S ale operațiilor lui B**) se notează, de obicei, la fel ca operațiile de algebră Boole ale lui B, iar **ordinea parțială indusă** (adică **ordinea parțială a lui B restricționată la S**) se notează, de obicei, la fel ca ordinea parțială a lui B.

Remarcă

Este imediat că orice subalgebră Boole S a unei algebre Boole B este **închisă la operațiile derivate $\rightarrow$ și $\leftrightarrow$ ale lui B** (adică $x \rightarrow y, x \leftrightarrow y \in S$ pentru orice $x, y \in S$), și că operațiile pe care acestea le induc pe S sunt exact implicația și, respectiv, echivalența algebrei Boole S (notate, în mod uzual, la fel ca implicația și, respectiv, echivalența lui B).

Morfisme booleene

Definiție

Date două algebre Boole $(A, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, \perp, \top)$, o funcție $f : A \to B$ se numește *morfism boolean* (sau *morfism de algebre Boole*) ddacă f **comută cu operațiile de algebre Boole ale lui** A **și** B, i. e. ddacă f este morfism de latici mărginite între $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ și, pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$.

Un *endomorfism boolean* este un morfism boolean între o algebră Boole și ea însăși.

Un *izomorfism boolean* este un morfism boolean bijectiv, ceea ce este același lucru cu un morfism boolean inversabil, pentru că inversa unui morfism Boolean bijectiv este morfism boolean, ceea ce se observă imediat, dacă aplicăm rezultatul similar de la latici (**temă pentru acasă**).

Un *automorfism boolean* este un izomorfism boolean între o algebră Boole și ea însăși, adică un endomorfism boolean bijectiv.

Remarcă (temă)

Orice morfism boolean comută cu implicația și echivalența booleană.

Compunerea a două morfisme booleene este un morfism boolean.

Imaginea unui morfism boolean este o subalgebră Boole a codomeniului acelui morfism boolean.

Algebre Boole izomorfe

Propoziție

Pentru orice mulțime I, algebrele Boole $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \bar{\cdot}, \emptyset, I)$ și $(\mathcal{L}_2^I, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism boolean între ele).

Demonstrație: Dacă $I = \emptyset$, atunci cele două algebre Boole din enunț coincid cu algebra Boole trivială, așadar sunt izomorfe, cu izomorfismul boolean dat de identitatea algebrei Boole triviale.
În cele ce urmează, vom considera I nevidă.
Putem considera $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\} \subset \mathbb{N}$, ceea ce ne permite să exprimăm operațiile de algebră Boole ale lui $(\mathcal{L}_2, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ în funcție de operațiile aritmetice $+$, $-$ și $\cdot$ de pe $\mathbb{N}$, astfel: pentru orice $x, y \in \mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$:

$$\begin{cases} x \vee y = \max\{x, y\} = x + y - x \cdot y, \\ x \wedge y = \min\{x, y\} = x \cdot y, \\ \overline{x} = 1 - x. \end{cases}$$

Aceste egalități pot fi verificate ușor, de exemplu prin considerarea tuturor cazurilor privind valorile posibile ale lui $x, y \in \mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$.

Algebre Boole izomorfe

Așadar, în algebra Boole $(\mathcal{L}_2^I = \{f | f : I \rightarrow \mathcal{L}_2\}, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, operațiile sunt definite punctual pe baza celor ale lui $\mathcal{L}_2$, astfel:

- $0 : I \rightarrow \mathcal{L}_2$, pentru orice $i \in I$, $0(i) := 0$;
- $1 : I \rightarrow \mathcal{L}_2$, pentru orice $i \in I$, $1(i) := 1$;
- pentru orice $f : I \rightarrow \mathcal{L}_2$, $\overline{f} : I \rightarrow \mathcal{L}_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $\overline{f}(i) := \overline{f(i)} = 1 - f(i) = (1 - f)(i)$, unde 1 este funcția constantă de mai sus; așadar $\overline{f} = 1 - f$;
- pentru orice $f : I \rightarrow \mathcal{L}_2$ și $g : I \rightarrow \mathcal{L}_2$, $f \vee g : I \rightarrow \mathcal{L}_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$,
  $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i) = f(i) + g(i) - f(i) \cdot g(i) = (f + g - f \cdot g)(i)$;
  așadar $f \vee g = f + g - f \cdot g$;
- pentru orice $f : I \rightarrow \mathcal{L}_2$ și $g : I \rightarrow \mathcal{L}_2$, $f \wedge g : I \rightarrow \mathcal{L}_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i) = f(i) \cdot g(i) = (f \cdot g)(i)$; așadar $f \wedge g = f \cdot g$.

Algebre Boole izomorfe

Amintim că am demonstrat că următoarea funcție este o bijecție: $\varphi : \mathcal{P}(I) \to \mathcal{L}_2^I$, definită prin: oricare ar fi $A \in \mathcal{P}(I)$, $\varphi(A) := \chi_A \in \mathcal{L}_2^I = \{f | f : I \to \mathcal{L}_2\}$ (funcția caracteristică a lui A raportat la I).
În cele ce urmează, vom aplica proprietățile funcțiilor caracteristice.
$\varphi(\emptyset) = \chi_\emptyset = 0$ și $\varphi(I) = \chi_I = 1$.
Pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, $\varphi(\overline{A}) = \chi_{\overline{A}} = \chi_{I \setminus A} = 1 - \chi_A = 1 - \varphi(A) = \overline{\varphi(A)}$.
Pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(I)$,
$\varphi(A \cup B) = \chi_{(A \cup B)} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A) \cdot \varphi(B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$.
Pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(I)$,
$\varphi(A \cap B) = \chi_{(A \cap B)} = \chi_A \cdot \chi_B = \varphi(A) \cdot \varphi(B) = \varphi(A) \wedge \varphi(B)$.
Așadar φ este un morfism boolean, iar faptul că este și bijectivă arată că φ este un izomorfism boolean.