Mecanică Generală

V. Teoremele lui Kepler

Liviu Marin[1,†]

[1]Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea din Bucureşti, România

[†]E-mail: marin.liviu@gmail.com

7 & 14 ianuarie 2014

Legile lui Kepler

Legile de mişcare a planetelor – formulate ca urmare a observaţiilor astronomice (în special ale lui Tycho-Brahe):

(I) Planetele, în mişcarea lor în jurul Soarelui, descriu traiectorii eliptice, cu Soarele situat într-unul dintre focare.

(II) Raza vectoare a planetei descrie arii egale în intervale de timp egale.

(III) Raportul dintre pătratul perioadei de revoluţie a planetei (T) şi cubul semiaxei mari a elipsei (a) este acelaşi pentru toate planetele.

Din aceste legi, Newton a dedus legea forţei de atracţie universală pe care Soarele o exercită asupra celorlalte planete:

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{PS}} = -f\,\frac{m\,M}{\rho^2}\,\frac{\vec{\mathbf{x}}}{\rho}} \qquad (1)$$

unde m – masa planetei, M – masa Soarelui, $\vec{\mathbf{x}} := \vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{P}} - \vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{S}}$, $\rho := \|\vec{\mathbf{x}}\|$ şi $f = 6.673 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg\ s})$.

Teorema 1

Dacă sunt satisfăcute legile lui Kepler (I)–(III), atunci forţa exercitată de Soare asupra celorlalte planete este dată de legea de atracţie universală a lui Newton (1).

Demonstraţie:

Traiectoria planetei fiind plană (legea I a lui Kepler), alegem $\mathbf{S}x_1x_2$ ca plan al traiectoriei, unde reperul considerat este $\mathcal{R}\big(\mathbf{S}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1\le i\le 3}\big)$.

În reperul $\mathcal{R}$ avem:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = x_1(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + x_2(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \qquad (2)$$

Considerăm coordonatele polare în punctul $\mathbf{P}$:

$$\begin{cases} x_1(t) = \rho(t)\,\cos\theta(t) \\ x_2(t) = \rho(t)\,\sin\theta(t) \end{cases}, \quad \rho(t) \in [0,\infty), \quad \theta(t) \in [0,2\pi) \qquad (3)$$

şi transformarea inversă:

$$\begin{cases} \rho(t) = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} \\ \theta(t) = \tan^{-1}\left[x_2(t)/x_1(t)\right] \end{cases} \qquad (4)$$

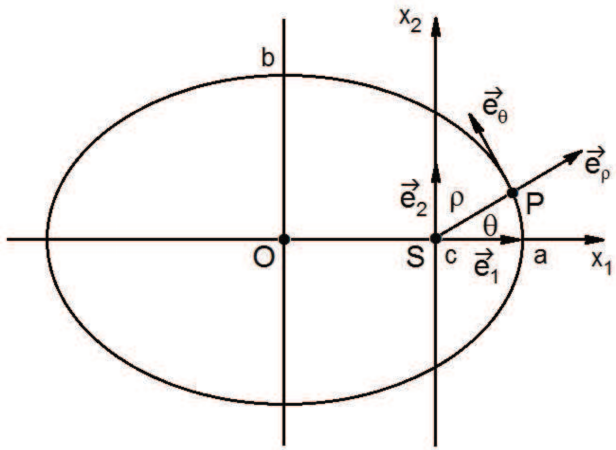

Figure : Mişcarea de rotaţie a planetei $\mathbf{P}(m)$ în jurul Soarelui $\mathbf{S}(M)$.

Versorii reperului local $\mathcal{R}'\big(\mathbf{P}, \{\vec{\mathbf{e}}_\rho, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_3\}\big)$ asociat coordonatelor polare sunt dați de:

$$\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) = \frac{\vec{\mathbf{x}}(t)}{\|\vec{\mathbf{x}}(t)\|} = \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \tag{5a}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) = \vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_\rho(t) = -\sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 \tag{5b}$$

Din relațiile (2), (3) și (5) obținem:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \rho(t)\left[\cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2\right] = \rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) \tag{6}$$

Derivăm expresiile (5a) și (5b) în raport cu timpul t și obținem:

$$\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\rho(t) = \dot\theta(t)\left[-\sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2\right] = \dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) \tag{7a}$$

$$\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\theta(t) = \dot\theta(t)\left[-\cos\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 - \sin\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2\right] = -\dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) \tag{7b}$$

Derivăm relația (6) o dată, respectiv de două ori, în raport cu timpul t, și folosim relațiile (7a)–(7b):

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \dot\rho(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \rho(t)\,\dot\theta(t)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) \tag{8a}$$

$$\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \left[\ddot\rho(t) - \rho(t)\dot\theta^2(t)\right]\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \left[2\dot\rho(t)\dot\theta(t) + \rho(t)\ddot\theta(t)\right]\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) \tag{8b}$$

- Legea a II-a a lui Kepler, i.e. integrala primă a ariilor:

$$\boxed{\rho^2(t)\,\dot\theta(t) = C, \quad \forall\ t \geq 0} \tag{9}$$

Din integrala primă a ariilor (9) rezultă:

$$\dot\theta(t) = \frac{C}{\rho^2(t)} \tag{10a}$$

și, deci, sign $\dot\theta(t) = \text{sign}\ C = \text{constant}$, i.e. funcția $t \longmapsto \theta(t)$ este (local) inversabilă:

$$\exists\ (\text{local}) \quad \theta \longmapsto t(\theta) \tag{10b}$$

Obținem:

$$\dot\rho = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\dot\theta = \frac{C}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = -C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

În mod similar, rezultă:

$$\ddot\rho = \frac{\mathrm{d}\dot\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot\rho}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\dot\rho}{\mathrm{d}\theta} = \frac{C}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[-C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = -\frac{C^2}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Proiectăm legea a II-a a lui Newton $\big(m\ddot{\vec{\mathbf{x}}} = \vec{\mathbf{F}}\big)$ pe reperul local $\mathcal{R}'\big(\mathbf{S}, \{\vec{\mathbf{e}}_\rho, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_3\}\big)$:

$$m\left(\ddot\rho - \rho\,\dot\theta^2\right)\vec{\mathbf{e}}_\rho + m\left(2\,\dot\rho\,\dot\theta + \rho\,\ddot\theta\right)\vec{\mathbf{e}}_\theta = \mathrm{F}_\rho\,\vec{\mathbf{e}}_\rho + \mathrm{F}_\theta\,\vec{\mathbf{e}}_\theta + \mathrm{F}_3\,\vec{\mathbf{e}}_3$$

Obținem astfel:

$$\mathrm{F}_3 = 0$$

$$\mathrm{F}_\theta = m\left(2\,\dot\rho\,\dot\theta + \rho\,\ddot\theta\right) = \frac{m}{\rho}\left(2\,\rho\,\dot\rho\,\dot\theta + \rho^2\,\ddot\theta\right) = \frac{m}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\,\dot\theta\right) = 0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_\rho &= m\left(\ddot\rho - \rho\,\dot\theta^2\right)\\ &= m\left[-\frac{C^2}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \rho\,\frac{C^2}{\rho^4}\right] = -\frac{m\,C^2}{\rho^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right]\end{aligned}$$

Din ultima expresie rezultă ecuația/formula lui Binet:

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{F}_\rho\,\vec{\mathbf{e}}_\rho, \qquad \mathrm{F}_\rho = -\frac{m\,C^2}{\rho^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right]} \tag{11}$$

- Legea I a lui Kepler: Ecuația traiectoriei (elipsă)

$$\boxed{\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e\,\cos\theta}} \tag{12}$$

unde:

$0 < a$	semiaxa mare a elipsei;
$0 < b \leq a$	semiaxa mică a elipsei;
$0 \leq c := \sqrt{a^2 - b^2} < a$	jumătatea distanței focale a elipsei;
$e := \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} < 1$	excentricitatea elipsei;
$p := a\left(1 - e^2\right) = \dfrac{b^2}{a} = ke$	parametrul elipsei;
$x_1 = k, \quad k > 0$	ecuația directoarei elipsei.

Din ecuația traiectoriei (12) obținem:

$$\frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{1 + e\cos\theta}{p}$$

Prin derivare în raport cu θ, rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{\rho(\theta)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1 + e\cos\theta}{p}\right) = -\frac{e}{p}\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho(\theta)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{e}{p}\sin\theta\right) = -\frac{e}{p}\cos\theta$$

Rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho(\theta)}\right) + \frac{1}{\rho(\theta)} = -\frac{e}{p}\cos\theta + \frac{1 + e\cos\theta}{p} = \frac{1}{p}$$

Astfel, ecuația/formula lui Binet (11) devine:

$$\boxed{\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{F}_\rho\,\vec{\mathbf{e}}_\rho, \qquad \mathrm{F}_\rho = -\frac{m}{\rho^2}\frac{C^2}{p}} \tag{13}$$

- Legea a III-a a lui Kepler: Din definiția vitezei areolare, obținem

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\rho^2(t)\,\dot{\theta}(t) = \frac{1}{2}C$$

Integrăm relația de mai sus pe durata T a unei mișcări de revoluție a planetei (mișcare de rotație în jurul Soarelui):

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{1}{2}C\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{d}t \Longrightarrow \mathrm{Aria(elipsei)} = \frac{C\,\mathrm{T}}{2} \Longrightarrow$$

$$\pi\,a\,b = \frac{C\,\mathrm{T}}{2} \Longrightarrow C = \frac{2\,\pi\,a\,b}{\mathrm{T}}$$

Cum $p = b^2/a$, obținem:

$$\frac{C^2}{p} = \frac{4\,\pi^2\,a^2\,b^2}{\mathrm{T}^2}\,\frac{a}{b^2} = 4\,\pi^2\,\frac{a^3}{\mathrm{T}^2} =: f\,M$$

Astfel, ecuația/formula lui Binet (13) devine:

$$\boxed{\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{F}_\rho\,\vec{\mathbf{e}}_\rho, \qquad \mathrm{F}_\rho = -f\,\frac{m\,M}{\rho^2}} \tag{14}$$

Problema celor două corpuri

Presupunem că singura interacțiune între Soare $\mathbf{S}(M)$ și planeta $\mathbf{P}(m)$ este forța de atracție universală:

$$\boxed{\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{PS}} + \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{SP}} = \vec{\mathbf{0}}, \qquad \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{PS}} = \mathrm{F}\,\frac{\vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{P}} - \vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{S}}}{\|\vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{P}} - \vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{S}}\|} =: \mathrm{F}\,\frac{\vec{\mathbf{x}}}{\rho}} \tag{15}$$

cu $\vec{\mathbf{x}} := \vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{P}} - \vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{S}}$, $\rho := \|\vec{\mathbf{x}}\|$, $\mathrm{F} < 0$ ($\mathrm{F} > 0$) forțe de atracție (respingere).

Legea a II-a a lui Newton pentru $\mathbf{S}$ și $\mathbf{P}$:

$$M\,\ddot{\vec{\mathbf{x}}}_{\mathrm{S}} = -\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{PS}} \tag{16a}$$

$$m\,\ddot{\vec{\mathbf{x}}}_{\mathrm{P}} = \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{PS}} \tag{16b}$$

Înmulțim ecuațiile (16a) și (16b) cu $(-m)$, respectiv M, și le adunăm:

$$m\,M\left(\ddot{\vec{\mathbf{x}}}_{\mathrm{P}} - \ddot{\vec{\mathbf{x}}}_{\mathrm{S}}\right) = (m + M)\,\vec{\mathrm{F}}, \qquad \vec{\mathrm{F}} := \vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{PS}} \tag{17}$$

Împărțim ecuația (17) cu $(m + M)$:

$$\boxed{\mu\,\ddot{\vec{\mathbf{x}}} = \vec{\mathrm{F}}, \qquad \mu := \frac{mM}{m + M} = \frac{m}{1 + m/M}} \tag{18}$$

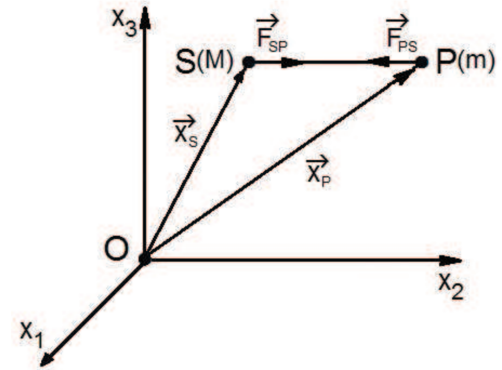

Figure : Problema celor două corpuri – Planeta $\mathbf{P}(m)$ și Soarele $\mathbf{S}(M)$.

Observații:

(i) Pentru a studia mișcarea lui **P** în raport cu **S**, putem folosi legea a II-a a lui Newton ca și cum **S** ar fi fix, iar masa lui **P**, m, este înlocuită cu

$$\boxed{\mu := \frac{m}{1 + m/M}} \tag{19}$$

(ii) În general, $m << M$.
De exemplu, $m/M \approx 1/332.952$ pentru **P** = Pământ și **S** = Soare.

(iii) Simplificăm cu M în ecuația (16a) și rezultă $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{SP}}/M \approx \vec{\mathbf{0}}$:

$$\boxed{\ddot{\vec{\mathbf{x}}}_{\mathrm{S}} = \vec{\mathbf{0}}} \tag{20}$$

i.e. **S** se mișcă rectiliniu și uniform & $\mathcal{R}\big(\mathbf{S}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1 \le i \le 3}\big)$ reper inerțial.

(iv) Ecuația (16b) descrie mișcarea planetei **P**, de masă $\mu \approx m$, în raport cu Soarele **S** (presupus reper inerțial):

$$\boxed{\mu\, \ddot{\vec{\mathbf{x}}} = \vec{\mathbf{F}}} \tag{21a}$$

sub acțiunea forței centrale:

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}} := \mathrm{F}\, \frac{\vec{\mathbf{x}}}{\rho}, \qquad \vec{\mathbf{x}} := \vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{P}} - \vec{\mathbf{x}}_{\mathrm{S}}, \quad \rho := \|\vec{\mathbf{x}}\|} \tag{21b}$$

(v) Cum planeta **P** se mișcă sub acțiunea forței centrale (21b), rezultă:

- mișcarea planetei **P** este plană și are loc în planul determinat de poziția inițială $\vec{\mathbf{x}}_0$ și viteza inițială $\vec{\mathbf{v}}_0$ în raport cu Soarele **S**;
- mișcarea planetei **P** se face cu viteză areolară constantă (cf. teoremei ariilor), i.e. Legea a II-a a lui Kepler.

Considerăm reperul inerțial $\mathcal{R}\big(\mathbf{S}, \{\vec{\mathbf{e}}_i\}_{1 \le i \le 3}\big)$, a.i. $\mathbf{S}x_1x_2 = \mathrm{span}\big(\vec{\mathbf{x}}_0, \vec{\mathbf{v}}_0\big)$:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = x_1(t)\, \vec{\mathbf{e}}_1 + x_2(t)\, \vec{\mathbf{e}}_2 \tag{22}$$

Considerăm coordonatele polare în punctul **P**:

$$x_1(t) = \rho(t)\, \cos\theta(t) \quad \& \quad x_2(t) = \rho(t)\, \sin\theta(t) \tag{23}$$

În cazul reperului $\mathcal{R}'\big(\mathbf{P}, \{\vec{\mathbf{e}}_\rho, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{e}}_3\}\big)$ asociat (ρ, θ), au loc relațiile:

$$\vec{\mathbf{e}}_\rho(t) = \frac{\vec{\mathbf{x}}(t)}{\|\vec{\mathbf{x}}(t)\|} = \cos\theta(t)\, \vec{\mathbf{e}}_1 + \sin\theta(t)\, \vec{\mathbf{e}}_2 \tag{24a}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_\theta(t) = \vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_\rho(t) = -\sin\theta(t)\, \vec{\mathbf{e}}_1 + \cos\theta(t)\, \vec{\mathbf{e}}_2 \tag{24b}$$

și

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\rho}(t)\, \vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \rho(t)\, \dot{\theta}(t)\, \vec{\mathbf{e}}_\theta(t) \tag{25a}$$

$$\ddot{\vec{\mathbf{x}}}(t) = \big[\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)\big]\, \vec{\mathbf{e}}_\rho(t) + \big[2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)\big]\, \vec{\mathbf{e}}_\theta(t) \tag{25b}$$

(vi) Proiectăm ecuația de mișcare (21a) a planetei **P** pe $\vec{\mathbf{e}}_\rho$ si $\vec{\mathbf{e}}_\theta$:

$$\vec{\mathbf{e}}_\rho : \qquad \mu\, \big(\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\theta}^2\big) = \mathrm{F} \tag{26a}$$

$$\vec{\mathbf{e}}_\theta : \qquad \mu\, \big(2\dot{\rho}\, \dot{\theta} + \rho\, \ddot{\theta}\big) = 0 \tag{26b}$$

Înmulțim ecuația (26b) cu ρ și obținem integrala primă a ariilor, i.e. Legea a II-a a lui Kepler:

$$\boxed{\rho^2(t)\, \dot{\theta}(t) = C, \quad \forall\, t \ge 0} \tag{27}$$

Din ecuația (27) rezultă:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{C}{\rho^2(t)} \tag{28a}$$

și deci $\mathrm{sign}\ \dot{\theta}(t) = \mathrm{sign}\ C = \mathrm{constant}$, i.e. funcția $t \longmapsto \theta(t)$ este (local) inversabilă:

$$\exists\ (\mathrm{local}) \quad \theta \longmapsto t(\theta) \tag{28b}$$

Ținând seama de ecuația (28b), obținem:

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \frac{C}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = -C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{29a}$$

$$\ddot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{C^2}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{29b}$$

Inserăm relațiile (28a) și (29b) în ecuația (26a):

$$\mu\left[-\frac{C^2}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \rho\,\frac{C^2}{\rho^4}\right] = \mathrm{F}$$

Ținând seama de legea de atracție universală și de definiția lui μ, obținem:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} = -\frac{\mathrm{F}\,\rho^2}{\mu\, C^2} = -\left(-f\,\frac{m\,M}{\rho^2}\right)\frac{m+M}{m\,M}\,\frac{\rho^2}{C^2}$$

i.e. ecuația/formula lui Binet:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} = \frac{f\,(m+M)}{C^2}} \tag{30}$$

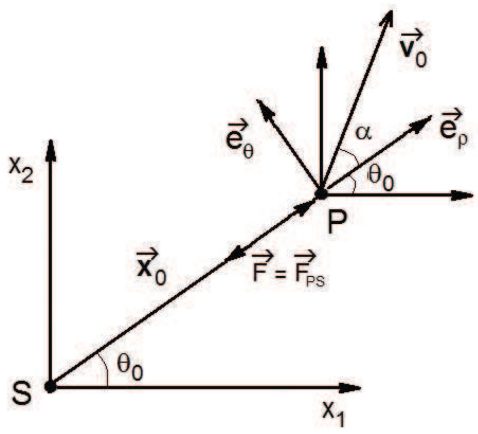

Figure : Problema celor două corpuri – Condițiile inițiale asociate ecuației lui Binet.

(vii) Condițiile inițiale asociate ecuației lui Binet (30):

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}}(0) = \vec{\mathbf{x}}_0 \quad \& \quad \vec{\mathbf{v}}(0) = \vec{\mathbf{v}}_0} \tag{31}$$

unde

$$\vec{\mathbf{x}}_0 = \rho_0\, \vec{\mathbf{e}}_\rho(0), \quad \rho_0 := \|\vec{\mathbf{x}}_0\| \quad \& \quad \theta_0 := \sphericalangle(\vec{\mathbf{x}}_0, \vec{\mathbf{e}}_1) \tag{32a}$$

$$\begin{gathered} \vec{\mathbf{v}}_0 = \big(v_0 \cos\alpha\big)\, \vec{\mathbf{e}}_\rho(0) + \big(v_0 \sin\alpha\big)\, \vec{\mathbf{e}}_\theta(0) \\ v_0 := \|\vec{\mathbf{v}}_0\| \quad \& \quad \alpha := \sphericalangle(\vec{\mathbf{v}}_0, \vec{\mathbf{x}}_0) \end{gathered} \tag{32b}$$

Cum au loc relațiile:

$$\vec{\mathbf{x}}(0) = \rho(0)\, \vec{\mathbf{e}}_\rho(0) \tag{33a}$$

$$\vec{\mathbf{v}}(0) = \dot{\rho}(0)\, \vec{\mathbf{e}}_\rho(0) + \rho(0)\, \dot{\theta}(0)\, \vec{\mathbf{e}}_\theta(0) \tag{33b}$$

rezultă:

$$\boxed{\rho(0) = \rho_0 \quad \& \quad \theta(0) = \theta_0} \tag{34a}$$

$$\boxed{\dot{\rho}(0) = v_0 \cos\alpha \quad \& \quad \rho(0)\, \dot{\theta}(0) = v_0 \sin\alpha} \tag{34b}$$

Astfel, se obține și expresia constantei C din integrala primă a ariilor:

$$\boxed{C = \rho^2(t)\, \dot{\theta}(t) = \rho_0\, v_0 \sin\alpha, \quad \forall\ t \geq 0} \tag{34c}$$

Au loc relațiile:

$$\frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{1}{\rho(t)} \tag{35a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{\rho(\theta)}\right) &= -\frac{1}{\rho^2(\theta)}\, \frac{\mathrm{d}\rho(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{\rho^2(t)}\, \frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t}\, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} \\ &= -\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)\, \dot{\theta}(t)} = -\frac{\dot{\rho}(t)}{C} \end{aligned} \tag{35b}$$

Din relațiile (35a) și (35b), împreună cu ecuațiile (34a)–(34c), obținem condițiile inițiale pentru ecuația lui Binet (30):

$$\boxed{\left.\frac{1}{\rho}\right|_{\theta=\theta_0} = \frac{1}{\rho_0}} \tag{36a}$$

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|_{\theta=\theta_0} = -\frac{v_0 \cos\alpha}{\rho_0\, v_0 \sin\alpha} = -\frac{1}{\rho_0 \tan\alpha}} \tag{36b}$$

(viii) Problema Cauchy pentru ecuația lui Binet este dată de:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho(\theta)}\right) + \frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{f\,(m+M)}{C^2} \tag{37a}$$

$$\left.\frac{1}{\rho(\theta)}\right|_{\theta=\theta_0} = \frac{1}{\rho_0} \tag{37b}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{\rho(\theta)}\right)\right|_{\theta=\theta_0} = -\frac{1}{\rho_0 \tan\alpha} \tag{37c}$$

Soluția generală a ecuației lui Binet (37a) este dată de:

$$\boxed{\frac{1}{\rho(\theta)} = A \cos\theta + B \sin\theta + \frac{f\,(m+M)}{C^2}, \qquad A, B \in \mathbb{R}} \tag{38}$$

Din condițiile inițiale (37b) și (37c) rezultă:

$$A = \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{f\,(m+M)}{C^2}\right) \cos\theta_0 + \frac{1}{\rho_0 \tan\alpha} \sin\theta_0 =: \lambda \cos\psi \tag{39a}$$

$$B = \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{f\,(m+M)}{C^2}\right) \sin\theta_0 - \frac{1}{\rho_0 \tan\alpha} \cos\theta_0 =: \lambda \sin\psi \tag{39b}$$

cu $\lambda := \sqrt{A^2 + B^2} \geq 0$ și $\psi := \tan^{-1}(B/A) \in (-\pi, \pi)$.

Ecuația (38) devine:

$$\boxed{\frac{1}{\rho(\theta)} = \lambda\,\cos(\theta-\psi) + \frac{f\,(m+M)}{C^2}} \tag{40}$$

cu $\lambda := \sqrt{A^2+B^2} \geq 0$ și $\psi := \tan^{-1}(B/A) \in (-\pi,\pi)$.

Cu notațiile:

$$\boxed{\frac{e}{p} := \lambda \quad \& \quad \frac{1}{p} := \frac{f\,(m+M)}{C^2}} \tag{41}$$

soluția generală a ecuației lui Binet devine:

$$\boxed{\rho(\theta) = \frac{p}{1+e\,\cos(\theta-\psi)}} \tag{42}$$

i.e. ecuația unei conice cu:

- originea în focarul **S**;
- excentricitatea e;
- parametrul p;
- axa focală de ecuație $\theta = \psi$.

Din ecuațiile (41) obținem:

$$\boxed{p = \frac{C^2}{f\,(m+M)} = \frac{\rho_0^2\,v_0^2\,\sin^2\alpha}{f\,(m+M)}} \tag{43a}$$

$$\boxed{e = \lambda\,p = \sqrt{A^2+B^2}\,\frac{C^2}{f\,(m+M)}} \tag{43b}$$

Din ecuațiile (39a) și (39b), obținem:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{f\,(m+M)}{C^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho_0\,\tan\alpha}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\rho_0^2\,\sin^2\alpha} - \frac{2\,f\,(m+M)}{C^2\,\rho_0} + \frac{f^2\,(m+M)^2}{C^4} \\
&= \frac{v_0^2}{C^2} - \frac{2\,f\,(m+M)}{C^2\,\rho_0} + \frac{f^2\,(m+M)^2}{C^4} \\
&= \frac{f^2\,(m+M)^2}{C^4}\left[1 + \frac{C^2}{f^2\,(m+M)^2}\left(v_0^2 - \frac{2\,f\,(m+M)}{\rho_0}\right)\right]
\end{aligned} \tag{44}$$

Astfel, ecuația (43b) devine:

$$\boxed{e = \sqrt{1 + \frac{C^2}{f^2\,(m+M)^2}\,h}, \qquad h := v_0^2 - \frac{2\,f\,(m+M)}{\rho_0}} \tag{45}$$

Rezultă:

(a) $h < 0 \Longrightarrow 0 < e < 1 \Longrightarrow$ traiectoria (42) este o elipsă , i.e. Legea I a lui Kepler;

(b) $h = 0 \Longrightarrow e = 1 \Longrightarrow$ traiectoria (42) este o parabolă;

(c) $h > 0 \Longrightarrow e > 1 \Longrightarrow$ traiectoria (42) este o hiperbolă.

Observații:

(A) Semnul constantei h și, în consecință, traiectoria planetei **P** nu depind de θ_0 și α, ci de doar de $\rho_0 := \|\vec{\mathbf{x}}_0\|$ și $v_0 := \|\vec{\mathbf{v}}_0\|$

(B) Constanta h intervine în Teorema energiei:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\,\mu\,v^2\right) &= \vec{\mathbf{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}} = \mathrm{F}\,\vec{\mathbf{e}}_\rho\cdot\mathrm{d}\big(\rho\,\vec{\mathbf{e}}_\rho\big) = \mathrm{F}\,\vec{\mathbf{e}}_\rho\cdot\big(\mathrm{d}\rho\,\vec{\mathbf{e}}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\theta\,\vec{\mathbf{e}}_\theta\big) \\
&= -\frac{\mu\,f\,(m+M)}{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \mu\,f\,(m+M)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)
\end{aligned} \tag{46}$$

Integrăm relația (46) între momentele $t = 0$ și $t > 0$:

$$\frac{1}{2}\,\mu\,(v^2 - v_0^2) = \mu\,f\,(m+M)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)$$

Astfel, obținem:

$$\boxed{v^2 - \frac{2\,f\,(m+M)}{\rho} = v_0^2 - \frac{2\,f\,(m+M)}{\rho_0} =: h} \tag{47}$$

(C) Direcția axei focale a conicei este dată de ψ, din ec. (39a)–(39b):

$$\boxed{\psi = \tan^{-1}(B/A)} \tag{48}$$

(ix) Cazul traiectoriei eliptice

În cazul traiectoriei eliptice a planetei **P**, au loc relațiile:

$$p = \frac{b^2}{a} \overset{(43a)}{=} \frac{C^2}{f\,(m+M)} = \frac{\rho_0^2\, v_0^2\, \sin^2\alpha}{f\,(m+M)} \tag{49a}$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \overset{(45)}{=} \sqrt{1+\frac{C^2}{f^2\,(m+M)^2}\,h} \tag{49b}$$

Din ecuațiile (49a) și (49b) obținem:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{f\,(m+M)} \tag{50a}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = -\frac{C^2}{f^2\,(m+M)^2}\,h = \frac{C^2}{f^2\,(m+M)^2}\left[\frac{2\,f\,(m+M)}{\rho_0} - v_0^2\right] \tag{50b}$$

Împărțim ecuația (50a) la (50b) și obținem:

$$\boxed{a = \frac{f\,(m+M)}{\dfrac{2\,f\,(m+M)}{\rho_0} - v_0^2}} \tag{51}$$

i.e. a nu depinde de direcția α a vitezei inițiale $\vec{\mathbf{v}}_0$.

Din relațiile (50a) și (51) rezultă:

$$b = a\,\frac{|C|}{\sqrt{f\,(m+M)}} = \frac{\sqrt{f\,(m+M)}}{\sqrt{\dfrac{2\,f\,(m+M)}{\rho_0} - v_0^2}}\;\frac{\rho_0\, v_0\,|\sin\alpha|}{\sqrt{f\,(m+M)}}$$

$$\boxed{b = \frac{\rho_0\, v_0\,|\sin\alpha|}{\sqrt{\dfrac{2\,f\,(m+M)}{\rho_0} - v_0^2}}} \tag{52}$$

i.e. b depinde de direcția α a vitezei inițiale $\vec{\mathbf{v}}_0$.

Durata perioadei de revoluție (T) se obține din Teorema ariilor (27):

$$\rho^2(t)\,\dot{\theta}(t) = C \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{|C|}{\rho^2(\theta)} \quad\Longrightarrow\quad \rho^2(\theta)\,d\theta = |C|\,dt$$

Prin integrare rezultă:

$$\int_0^{\mathrm{T}} |C|\,dt = 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,\rho^2(\theta)\,d\theta \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{T} = \frac{2\,\pi\,a\,b}{|C|} \tag{53}$$

Inserând expresiile lui a și b în ecuația (53), obținem:

$$\boxed{\mathrm{T} = \frac{2\,\pi\,f\,(m+M)}{\left[\dfrac{2\,f\,(m+M)}{\rho_0} - v_0^2\right]^{3/2}}} \tag{54}$$

de unde rezultă

$$\frac{\mathrm{T}^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{f\,(m+M)} = \frac{4\,\pi^2}{f\,(1+m/M)} \tag{55}$$

Din ecuația (55), pentru orice două planete $\mathbf{P}_1$ și $\mathbf{P}_2$, obținem:

$$\begin{aligned}\frac{(\mathrm{T}^2/a^3)_1}{(\mathrm{T}^2/a^3)_2} &= \frac{1+m_2/M}{1+m_1/M} = \frac{(1+m_2/M)\,(1-m_1/M)}{(1+m_1/M)\,(1-m_1/M)}\\ &= \frac{1+\left[(m_2/M)-(m_1/M)\right]-(m_1/M)\,(m_2/M)}{1-(m_1/M)^2}\\ &\approx 1+\left[(m_2/M)-(m_1/M)\right]-(m_1/M)\,(m_2/M) \approx 1\end{aligned} \tag{56}$$

i.e. este satisfăcută Legea a III-a a lui Kepler.

Am demonstrat:

Teorema 2

Dacă forța exercitată de Soare asupra celorlalte planete este dată de legea de atracție universală a lui Newton (1) și $h := v_0^2 - \dfrac{2\,f\,(m+M)}{\rho_0} < 0$, atunci sunt satisfăcute legile lui Kepler (I)–(III).