PROGRAMARE LOGICĂ
SEMINAR 5
- RESCRIERI -

Exerciţiul 1: *Determinaţi r_1 şi r_2 astfel încât sistemul de rescriere*

$$R = \{f(g(x)) \to r_1, g(h(y)) \to r_2\}$$

să fie confluent.

Rezolvare: Observaţi că o soluţie trivială este $r_1 = f(g(x))$ si $r_2 = g(h(y))$. În acest caz, evident R este confluent, dar nu se termină.

O soluţie alternativă netrivială şi care conduce la un sistem complet este următoarea. Începem prin a calcula perechile critice generate de $f(g(x)) \to r_1$ şi $g(h(y)) \to r_2$. Analizăm subtermenii lui $f(g(x))$ care nu sunt variabile:

- $t := g(x)$. În acest caz $c = f(z)$ şi $\theta(x) = h(y)$ este cgu pt $g(x)$ şi $g(h(y))$. Obţinem perechea critică $(\theta(r_1), f(\theta(r_2)))$.
- $t := f(g(x))$. Observaţi că în acest caz nu există cgu pentru $f(g(x))$ şi $g(h(y))$.

Pentru ca R să fie confluent trebuie să alegem r_1 şi r_2 astfel încât $\theta(r_1) \downarrow f(\theta(r_2))$. Luând $r_1 := g(x)$ şi $r_2 = g(y)$, obţinem $\theta(g(x)) = g(h(y)) \to g(y)$ şi $f(\theta(g(y))) = f(g(y)) \to g(y)$.

Exerciţiul 2: *Demonstraţi următoarele afirmaţii sau găsiţi un contraexemplu.*

(a) $\stackrel{+}{\longleftrightarrow} \; = \; \stackrel{+}{\longrightarrow} \cup (\stackrel{+}{\longrightarrow})^{-1}$

(b) $\stackrel{+}{\longleftarrow} \; = \; (\stackrel{+}{\longrightarrow})^{-1}$

Rezolvare:

(a) Afirmaţia nu este adevărată. De exemplu, pentru $a_1 \longrightarrow a_2$ avem

$\stackrel{+}{\longleftrightarrow} \; = \; \{(a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_1, a_1), (a_2, a_2)\}$

$\stackrel{+}{\longrightarrow} \cup (\stackrel{+}{\longrightarrow})^{-1} \; = \; \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$

(b) Evident, dacă $a \stackrel{+}{\longleftarrow} b$, atunci şi $b \stackrel{+}{\longrightarrow} a$. Invers, dacă $b \stackrel{+}{\longrightarrow} a$, atunci evident şi $a \stackrel{+}{\longleftarrow} b$.

Exerciţiul 3: *Demonstraţi următoarele afirmaţii sau găsiţi un contraexemplu.*

(a) $\stackrel{+}{\longrightarrow}$ *este o ordine parţială strictă* $\Longleftrightarrow$ $\longrightarrow$ *este aciclică.*

(b) $\stackrel{*}{\longrightarrow}$ *este o ordine parţială* $\Longleftrightarrow$ $\longrightarrow$ *este aciclică.*

Teorie: Pentru o relaţie binară $\longrightarrow$, $\stackrel{+}{\longrightarrow}$ este închiderea tranzitivă, iar $\stackrel{*}{\longrightarrow}$ este închiderea reflexivă şi tranzitivă.

O relaţie binară $\longrightarrow$ pe A este o *ordine parţială strictă* dacă este *ireflexivă* (pentru orice $x \in A$, nu există $x \longrightarrow x$), *tranzitivă* şi *asimetrică* (pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \longrightarrow y$, atunci nu există $y \longrightarrow x$).

O relaţie binară $\longrightarrow$ pe A este o *ordine parţială* dacă este *reflexivă* (pentru orice $x \in A$, există $x \longrightarrow x$), *tranzitivă* şi *antisimetrică* (pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \longrightarrow y$ şi $y \longrightarrow x$, atunci $x = y$).

O relaţie binară $\longrightarrow$ pe A este *aciclică* dacă nu există $x \in A$ astfel încât $x \stackrel{+}{\longrightarrow} x$.

Rezolvare:

(a) ("$\Rightarrow$") Din ireflexivitatea relaţiei $\stackrel{+}{\longrightarrow}$, obţinem că $\longrightarrow$ este aciclică.

("$\Leftarrow$") Prin definiţie, $\stackrel{+}{\longrightarrow}$ este tranzitivă. Cum $\longrightarrow$ este aciclică, rezultă că $\stackrel{+}{\longrightarrow}$ este ireflexivă. Presupunem prin absurd că $\stackrel{+}{\longrightarrow}$ nu este asimetrică, i.e. există $a, b \in A$ astfel încât $a \stackrel{+}{\longrightarrow} b$ şi $b \stackrel{+}{\longrightarrow} a$. Din tranzitivitate obţinem $a \stackrel{+}{\longrightarrow} a$, ceea ce contrazice aciclicitatea relaţiei $\longrightarrow$.

(b) Avem următorul contraexemplu: închiderea reflexivă şi tranzitivă a relaţiei $\{a \longrightarrow a \mid a \in \mathbb{N}\}$ este o ordine parţială, dar relaţia $\longrightarrow$ nu este aciclică.

Exerciţiul 4: *Demonstraţi următoarea afirmaţie sau găsiţi un contraexemplu: orice relaţie binară care se termină este mărginită.*

Teorie: O relaţie binară $\longrightarrow$ pe A este *mărginită* dacă pentru orice element $a \in A$, lungimile drumurilor din a sunt mărginite.

Rezolvare: Evident o relaţie mărginită se termină. Afirmaţia inversă nu este adevărată după cum se poate vedea în următorul contraexemplu. Fie următoarea relaţie binară pe $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$:

$$\{\perp \longrightarrow n \mid n \in \mathbb{N}\} \ \cup \ \{n+1 \longrightarrow n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\begin{tikzcd}
0 & 1 \arrow[l] & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
& \perp \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}$$

Cum pentru orice $x \in \mathbb{N} \cup \{\perp\}$, avem $x \xrightarrow{*} 0$, evident relaţia se termină. Dar $\longrightarrow$ nu este mărginită deoarece nu avem nicio limită superioară pentru reducerile din $\perp$, i.e. există reduceri de orice lungime nevidă din $\perp$ (pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, avem o reducere $\perp \xrightarrow{n} 0$).

Observaţie: O relaţie care nu se ramifică la infinit se termină $\Longleftrightarrow$ este marginită.