Logică matematică și computațională
Cursul XIII

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2011-2012, semestrul I

1. Semantica lui $\mathcal{L}$

Semantica lui $\mathcal{L}$

- Amintim că am notat cu $\mathcal{L}$ **sistemul formal al calculului propozițional clasic**, pe care l–am studiat sub două aspecte: **sintaxa** și **algebra** sa.
- În acest curs vom continua studiul lui $\mathcal{L}$, ocupându–ne de partea de **semantică**, adică de studiul **valorilor de adevăr** ale enunțurilor.
- Vom atribui enunțurilor două valori posibile de adevăr: 0 și 1, reprezentând respectiv **fals** și **adevărat**, iar aceste valori de adevăr, 0 și 1, vor fi considerate ca elemente ale algebrei Boole standard: $\mathcal{L}_2 = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ (lanțul cu două elemente, cu operațiile și relația de ordine uzuale de algebră Boole).

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Definiții și notații

Următoarele **simboluri** formează **alfabetul** sistemului formal al calculului propozițional clasic:

1. *variabilele propoziționale*, notate, de obicei, u, v, w etc., uneori cu indici, care formează o mulțime infinită; vom nota cu V mulțimea variabilelor propoziționale;
2. *conectorii logici primitivi*:
   $\neg$: *negația* (se citește: "non" sau "not");
   $\rightarrow$: *implicația* (se citește: "implică");
3. parantezele: (,), [, și].

Simbolurile enumerate mai sus se numesc *simboluri primitive* și sunt presupuse a fi două câte două distincte (de exemplu $\neg \notin V$ etc.).

La acestea se adaugă *conectorii logici derivați*, care se definesc pe baza conectorilor logici primitivi, și care vor fi prezentați mai jos.

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Definiție

Șirurile finite și nevide de simboluri primitive se numesc *cuvinte*.

Definiție

Un *enunț* este un cuvânt φ care satisface una dintre condițiile următoare:

- (E_1) φ este o variabilă propozițională;
- (E_2) există un enunț ψ a. î. $\varphi = \neg\psi$;
- (E_3) există două enunțuri ψ și χ a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$.

Definiție

Variabilele propoziționale se numesc *enunțuri atomice* sau *enunțuri elementare*.

Notație

Vom nota cu E mulțimea tuturor enunțurilor.

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Observație

În definiția de mai sus a enunțurilor, se subînțelege faptul că parantezele au rolul obișnuit: aici, parantezele pot încadra enunțuri, și se folosesc pentru a încadra enunțuri compuse în interiorul altor enunțuri compuse, indicând ordinea în care se aplică regulile (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea unui enunț compus (impropriu spus, ordinea "aplicării conectorilor logici primitivi" pentru obținerea acelui enunț). O *parantezare corectă* a unui enunț este o dispunere a parantezelor în interiorul acelui enunț astfel încât fiecare pereche de paranteze să încadreze un (alt) enunț, și, desigur, astfel încât ordinea aplicării regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea enunțului respectiv să fie indicată corect de acea parantezare.

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Observație

Observăm că, în scrierea enunțurilor, dată de definiția de mai sus, conectorii logici primitivi apar scriși la fel ca niște operatori:

- $\neg$ apare scris la fel ca un operator unar;
- $\rightarrow$ apare scris la fel ca un operator binar.

Pentru a evita încărcarea scrierii cu prea multe paranteze, se face următoarea **convenție**: se acordă prioritate mai mare conectorului logic "unar" $\neg$ și prioritate mai mică celui "binar", $\rightarrow$.

Noțiunea de **prioritate** are aici semnificația obișnuită, de determinare a ordinii "aplicării conectorilor logici", corect spus de determinare a ordinii aplicării regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) pentru construirea unui enunț.

Conectorul cu prioritate mai mare "se va aplica" primul, de fapt regula (E_2) se va aplica înaintea regulii (E_3), i. e., pentru orice enunțuri α și β, scrierea $\neg\alpha \rightarrow \beta$ va semnifica $(\neg\alpha) \rightarrow \beta$.

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Observație

Egalitatea între enunțuri care apare în scrierea regulilor (E_2) și (E_3) este egalitatea obișnuită între cuvinte peste un alfabet, între șiruri de simboluri, anume **literal identitatea**, adică egalitatea simbol cu simbol, i. e. egalitatea lungimilor și identitatea (coincidența) simbolurilor de pe aceeași poziție în fiecare cuvânt (ca la șiruri de caractere: identitatea literă cu literă, caracter cu caracter), desigur, modulo parantezarea aleasă.
Adică: două enunțuri **scrise numai cu simboluri primitive** (vom vedea ce sunt simbolurile derivate) sunt *egale* ddacă există câte o parantezare corectă pentru fiecare astfel încât, cu acele parantezări, enunțurile respective să fie literal identice (ca și cuvinte peste alfabetul prezentat mai sus, format din simbolurile primitive).

Remarcă

Dacă recitim observația anterioară, vom remarca faptul că orice enunț se află în **exact una** (i. e. **una și numai una**) dintre cele 3 situații prezentate de regulile (E_1), (E_2) și (E_3).

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Noțiunea de enunț este definită recursiv: se pornește de la variabilele propoziționale și se aplică recursia dată de regulile (E_2) și (E_3).
Din faptul că enunțurile sunt șiruri **finite** de simboluri primitive și observația că, prin aplicarea oricăreia dintre regulile (E_1), (E_2) și (E_3), lungimea enunțului format până la momentul curent crește cu cel puțin câte o unitate, deducem faptul că orice enunț se obține prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) de un număr finit de ori, i. e. printr–un număr finit de aplicări ale regulilor (E_1), (E_2) și (E_3), i. e., pornind de la variabilele propoziționale (evident, de la un număr finit de variabile propoziționale), într–un număr finit de pași, fiecare pas constând în aplicarea unei reguli de recursie: (E_2) sau (E_3).

Notație

Pentru orice enunțuri $\varphi, \psi \in E$, introducem notațiile (abrevierile):

$\varphi \vee \psi := \neg\, \varphi \rightarrow \psi$ (*disjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ “sau“ ψ)

$\varphi \wedge \psi := \neg\, (\varphi \rightarrow \neg\, \psi)$ (*conjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ “și“ ψ)

$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ (*echivalența logică* dintre φ și ψ; se citește: φ “echivalent cu“ ψ)

Simbolurile $\vee$, $\wedge$ și $\leftrightarrow$ se numesc *conectorii logici derivați*.

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Definiție

O *axiomă* a sistemului formal al logicii propoziționale clasice este un enunț de oricare dintre următoarele trei forme, unde $\varphi, \psi, \chi \in E$ sunt enunțuri arbitrare:

$$\begin{array}{ll} (A_1) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (A_2) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ (A_3) & (\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \end{array}$$

Fiecare dintre scrierile (A_1), (A_2) și (A_3) este o *schemă de axiome*, adică o regulă pentru generarea unui număr infinit de axiome.

Axiomele logicii propoziționale clasice se obțin prin înlocuirea, în aceste scheme de axiome, a enunțurilor generice (arbitrare) φ, ψ, χ cu enunțuri precizate (date), adică axiomele sunt enunțuri de una dintre formele (A_1), (A_2) și (A_3), cu φ, ψ și χ enunțuri date.

Prin extensie, vom numi uneori schemele de axiome (A_1), (A_2) și (A_3), simplu, **axiome**.

Notație

Notația uzuală pentru reguli de deducție ale unui sistem logic, pe care o vom folosi în cele ce urmează, este aceasta: $\dfrac{\text{condiția } C_1}{\text{consecința } C_2}$, cu semnificația că: dacă este satisfăcută condiția C_1, atunci este satisfăcută consecința C_2.

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Definiție

Teoremele formale (numite și, simplu, *teoreme*, sau *adevăruri sintactice*) ale logicii propoziționale clasice sunt enunțurile definite prin următoarele trei reguli:

- (T_1) orice axiomă este o teoremă formală;
- (T_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ sunt teoreme formale, atunci φ este o teoremă formală;
- (T_3) orice teoremă formală a logicii propoziționale clasice poate fi obținută prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2) de un număr finit de ori.

Notație

Mulțimea tuturor teoremelor formale va fi notată cu T.

Notație

Faptul că un enunț φ este teoremă formală se notează: $\vdash \varphi$.

Definiție

Regula (T_2) se numește *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică:

$$\frac{\vdash \psi, \ \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\vdash \varphi}.$$

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Definiție

Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulțime de enunțuri. Enunțurile care *se deduc sintactic din ipotezele* Σ, numite și *consecințele sintactice ale lui* Σ, se definesc astfel:

- (CS_1) orice axiomă se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_2) orice enunț $\varphi \in \Sigma$ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_3) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ se deduc sintactic din ipotezele Σ, atunci φ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_4) orice enunț care se deduce sintactic din ipotezele Σ se poate obține prin aplicarea regulilor (CS_1), (CS_2) și (CS_3) de un număr finit de ori.

Notație

Vom nota faptul că un enunț φ se deduce sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ prin: $\Sigma \vdash \varphi$.

Definiție

Regula (CS_3) se numește tot *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia tot "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică:

$$\frac{\Sigma \vdash \psi, \ \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}.$$

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Observație

Noțiunile de **teoremă formală** și **consecință sintactică a unei mulțimi de ipoteze** au fost definite recursiv, la fel ca aceea de enunț.

Observație

Amintim mai jos tehnica de demonstrație numită *inducție după un concept*, pe care o intâlnim aici în trei forme:

1. *inducție după enunțuri*
2. *inducție după teoreme formale*
3. *inducție după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*

Acest tip de inducție poate fi privit atât ca **inducție structurală**, cât și ca **inducția obișnuită după un număr natural**.

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Descriem aici *inducția după enunțuri*.
Fie P o proprietate asupra cuvintelor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice variabilă propozițională satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă un enunț ψ satisface proprietatea P, atunci enunțul $\neg\psi$ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri ψ și χ satisfac proprietatea P, atunci enunțul $\psi \to \chi$ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după enunțuri* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Descriem aici *inducția după teoreme formale*.
Fie P o proprietate asupra enunțurilor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \to \varphi$ (sunt teoreme formale și – este corect și cu și fără această adăugire) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după teoreme formale* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs amândoi pașii de mai sus, atunci am demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Descriem aici *inducția după consecințele sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*.
Fie Σ o mulțime de enunțuri și P o proprietate asupra enunțurilor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice enunț din Σ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ (sunt consecințe sintactice ale lui Σ și – este corect și cu și fără această adăugire)) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.

Mnemonic din sintaxa lui $\mathcal{L}$

Notație

Cum am precizat și la începutul acestui curs, am notat cu $\mathcal{L}$ sistemul formal al logicii propoziționale clasice, a cărui sintaxă am amintit–o mai sus.

Remarcă

Amintim că, pentru orice $\Sigma \subseteq E$, orice $\Delta \subseteq E$ și orice $\varphi \in E$, au loc următoarele:

1. $\emptyset \vdash \varphi$ ddacă $\vdash \varphi$;
2. dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$;
3. dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$;
4. dacă $\Sigma \subseteq \Delta$ și $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\Delta \vdash \varphi$.

Teoremă (Teorema deducției)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$ și orice $\varphi, \psi \in E$, are loc următoarea echivalență:

$$\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

(Vom abrevia prin TD această teoremă.)

Mnemonic din algebra lui $\mathcal{L}$

- Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$ este o algebră Boole asociată în mod canonic sistemului formal $\mathcal{L}$.
- Prin această asociere, proprietățile sintactice ale lui $\mathcal{L}$ se reflectă în proprietăți booleene, și invers.
- Fixăm, pentru cele ce urmează, o mulțime de enunțuri $\Sigma \subseteq E$.

Definiție

Definim o relație binară $\sim_\Sigma$ pe mulțimea E a enunțurilor lui $\mathcal{L}$, astfel: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \text{ ddacă } \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Remarcă

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$.

Lemă

$\sim_\Sigma$ este o relație de echivalență pe E.

Notație

Să notăm, pentru fiecare $\varphi \in E$, cu $\hat{\varphi}^\Sigma := \{\psi \in E \mid \varphi \sim_\Sigma \psi\}$ clasa de echivalență a lui φ raportat la relația de echivalență $\sim_\Sigma$, și să considerăm mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma} = \{\hat{\varphi}^\Sigma \mid \varphi \in E\}$.

Mnemonic din algebra lui $\mathcal{L}$

Definiție

Pe mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma}$, definim relația binară $\leq_\Sigma$, prin: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Propoziție

$\leq_\Sigma$ *este bine definită.*

Lemă

$\leq_\Sigma$ *este o relație de ordine parțială pe* $E/_{\sim_\Sigma}$.

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ *este o latice distributivă, în care, pentru orice* $\varphi, \psi \in E$, $\inf\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ *și* $\sup\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.
Vom nota, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ *și* $\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.

Mnemonic din algebra lui $\mathcal{L}$

Propoziție

Vom nota $0_\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \neg \varphi}^{\Sigma}$ *și* $1_\Sigma := \widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^{\Sigma}$*, pentru un* $\varphi \in E$*, arbitrar.*
Această definiție nu depinde de alegerea lui $\varphi \in E$*.*
0_Σ *este minimul, iar* 1_Σ *este maximul posetului* $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$*, prin urmare, conform celor de mai sus:*
$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ *este o latice distributivă mărginită.*

Notație

Pentru orice $\varphi \in E$, notăm: $\overline{\hat{\varphi}^{\Sigma}}^{\Sigma} := \widehat{\neg \varphi}^{\Sigma}$.

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^{\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ *este o algebră Boole.*

Definiție

Algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^{\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ se numește *algebra Lindenbaum-Tarski a lui* Σ *asociată sistemului formal* $\mathcal{L}$.

Mnemonic din algebra lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Dacă notăm cu $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$ surjecția canonică ($p_\Sigma(\varphi) := \hat{\varphi}^\Sigma$ pentru orice $\varphi \in E$), atunci, oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele identități (unde $\to_\Sigma$ și $\leftrightarrow_\Sigma$ sunt, respectiv, implicația și echivalența booleană în algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$):

1. $p_\Sigma(\varphi \vee \psi) = p_\Sigma(\varphi) \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
2. $p_\Sigma(\varphi \wedge \psi) = p_\Sigma(\varphi) \wedge_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
3. $p_\Sigma(\neg\, \varphi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma$;
4. $p_\Sigma(\varphi \to \psi) = p_\Sigma(\varphi) \to_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
5. $p_\Sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = p_\Sigma(\varphi) \leftrightarrow_\Sigma p_\Sigma(\psi)$.

Cele cinci identități de mai sus arată cum conectorii logici sunt convertiți în operații booleene.

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$.

Mnemonic din algebra lui $\mathcal{L}$

Notație

În cazul în care $\Sigma = \emptyset$:

- relația de echivalență $\sim_\emptyset$ se notează, simplu, $\sim$,
- clasele ei de echivalență $\hat{\varphi}^\emptyset$ ($\varphi \in E$) se notează $\hat{\varphi}$,
- relația de ordine $\leq_\emptyset$ se notează $\leq$,
- iar operațiile $\vee_\emptyset$, $\wedge_\emptyset$, $\bar{\cdot}^\emptyset$, $0_\emptyset$ și $1_\emptyset$ se notează, respectiv, $\vee$, $\wedge$, $\bar{\cdot}$, 0 și 1.

Notație

Tot în acest caz, vom nota surjecția canonică $p_\emptyset$ cu $p : E \rightarrow E/_\sim$ (pentru orice $\varphi \in E$, $p(\varphi) := \hat{\varphi}$).

Definiție

Algebra Boole $(E/_\sim, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ se numește *algebra Lindenbaum-Tarski asociată sistemului formal* $\mathcal{L}$.

- Lema anterioară devine, în acest caz, o caracterizare a teoremelor formale:

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi$ *ddacă* $\hat{\varphi} = 1$.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Definiție

O *interpretare* (*evaluare*, *semantică*) a lui $\mathcal{L}$ este o funcție oarecare $h : V \to \mathcal{L}_2$.

Propoziție

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există o unică funcție $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care satisface următoarele proprietăți:

- (a) $\tilde{h}(u) = h(u)$, *pentru orice* $u \in V$;
- (b) $\tilde{h}(\neg \varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)}$, *pentru orice* $\varphi \in E$;
- (c) $\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)$, *pentru orice* $\varphi, \psi \in E$.

Observație

Condiția (a) din propoziția anterioară spune că $\tilde{h}\mid_V = h$, adică funcția $\tilde{h}$ prelungește pe h la E.
În condițiile (b) și (c), în membrii stângi, în argumentele lui $\tilde{h}$, $\neg$ și $\to$ sunt conectorii logici primitivi, pe când, în membrii drepți, $\bar{\cdot}$ și $\to$ sunt operațiile de complementare și, respectiv, implicație ale algebrei Boole $\mathcal{L}_2$. Așadar, putem spune că funcția $\tilde{h}$ transformă conectorii logici în operații booleene în algebra Boole standard.
Vom păstra notația $\tilde{h}$ pentru această unică funcție depinzând de interpretarea h.

Demonstrația propoziției anterioare: Demonstrăm existența și unicitatea lui $\tilde{h}$ prin inducție după conceptul de enunț.

Fie $h : V \to \mathcal{L}_2$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$.

Orice enunț φ se află în una **și numai una** dintre situațiile următoare (**numai una** pentru că, dacă nu se folosesc conectorii logici derivați, atunci două enunțuri coincid ddacă sunt **literal identice** ca șiruri de simboluri peste alfabetul lui $\mathcal{L}$, exceptând, eventual, folosiri diferite ale parantezelor, care nu influențează regulile de mai jos):

- (E_1) $\quad \varphi \in V$ (φ este variabilă propozițională)
- (E_2) $\quad$ există $\psi \in E$, a. î. $\varphi = \neg\psi$
- (E_3) $\quad$ există $\psi, \chi \in E$, a. î. $\varphi = \psi \to \chi$

și φ se obține într–un număr finit de pași pornind de la variabile propoziționale și aplicând cele trei reguli de mai sus.

Fiecărui $\varphi \in E$ îi asociem un element al lui $\mathcal{L}_2$, pe care îl notăm cu $\tilde{h}(\varphi)$, astfel:

1. dacă $\varphi \in V$, atunci $\tilde{h}(\varphi) := h(\varphi)$
2. dacă $\varphi = \neg\psi$ pentru un $\psi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ a fost definită, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \overline{\tilde{h}(\psi)}$
3. dacă $\varphi = \psi \to \chi$ pentru două enunțuri $\psi, \chi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ și $\tilde{h}(\chi)$ au fost definite, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\chi)$

Semantica lui $\mathcal{L}$

Principiul inducției după conceptul de enunț ne asigură că, urmând cele trei reguli anterioare, se definesc, recursiv, valorile $\tilde{h}(\varphi)$, pentru toate $\varphi \in E$.
Faptul că orice $\varphi \in E$ se află în una **și numai una** dintre cele trei situații de mai sus arată că lui φ nu i se pot asocia două valori distincte prin această recursie, i. e. valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$ este unic determinată de φ.
Aceste două proprietăți (existența și unicitatea lui $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$, pentru orice $\varphi \in E$) arată că am obținut o funcție $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ complet și corect definită, care asociază fiecărui $\varphi \in E$ valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$.
De asemenea, $\tilde{h}$ satisface condițiile (a), (b) și (c) din enunț, prin chiar definiția ei.
Am încheiat demonstrația existenței unei funcții $\tilde{h}$ care satisface cerințele din enunț, și fixăm această funcție pentru cele ce urmează, anume demonstrația unicității ei.
Fie $g : E \to \mathcal{L}_2$ o funcție care satisface aceste trei condiții:

- (a_g) $\quad g(u) = h(u)$, pentru orice $u \in V$;
- (b_g) $\quad g(\neg\varphi) = \overline{g(\varphi)}$, pentru orice $\varphi \in E$;
- (c_g) $\quad g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$, pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Acum fie $\varphi \in E$, arbitrar, fixat. Vom demonstra prin inducție după conceptul de enunț că $\tilde{h}(\varphi) = g(\varphi)$.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Definiția unui enunț arată că ne situăm în unul dintre aceste trei cazuri:

- (E_1) $\quad \varphi \in V$; atunci (a) și (a_g) ne dau: $\tilde{h}(\varphi) = h(\varphi) = g(\varphi)$;
- (E_2) $\quad \varphi = \neg\,\psi$ pentru un $\psi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi) = g(\psi)$; atunci (b) și (b_g) implică: $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\neg\,\psi) = \overline{\tilde{h}(\psi)} = \overline{g(\psi)} = g(\neg\,\psi) = g(\varphi)$;
- (E_3) $\quad \varphi = \psi \rightarrow \chi$ pentru două enunțuri $\psi, \chi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi) = g(\psi)$ și $\tilde{h}(\chi) = g(\chi)$; atunci (c) și (c_g) arată că: $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi \rightarrow \chi) = \tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\chi) = g(\psi) \rightarrow g(\chi) = g(\psi \rightarrow \chi) = g(\varphi)$.

Am demonstrat că $\tilde{h}(\varphi) = g(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$, i. e. $\tilde{h} = g$, așadar $\tilde{h}$ este unic cu proprietățile din enunț.

Corolar

Pentru orice interpretare h și orice $\varphi, \psi \in E$, au loc:

- (d) $\quad \tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$
- (e) $\quad \tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$
- (f) $\quad \tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$

Demonstrație: Imediat, din definițiile conectorilor logici derivați și proprietățile operațiilor într–o algebră Boole.

Definiție

- Spunem că un enunț φ este *adevărat într–o interpretare h* sau că *h satisface* φ ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$; φ se zice *fals în interpretarea h* ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 0$. Faptul că enunțul φ este adevărat într–o interpretare h se notează cu: $h \vDash \varphi$.
- Un enunț φ se zice *universal adevărat* ddacă φ este adevărat în orice interpretare; faptul că φ este universal adevărat se notează cu: $\vDash \varphi$. Enunțurile universal adevărate se mai numesc *adevărurile semantice* sau *tautologiile lui* $\mathcal{L}$.
- Faptul că o mulțime Σ de enunțuri are proprietatea că toate elementele sale sunt adevărate într–o interpretare h se notează cu: $h \vDash \Sigma$; în acest caz, spunem că *h satisface* Σ sau că h este un *model pentru* Σ.
- Dacă Σ este o mulțime de enunțuri cu proprietatea că există un model pentru Σ, atunci spunem că Σ *admite un model*.
- Date un enunț φ și o mulțime de enunțuri Σ, spunem că φ *se deduce semantic din* Σ sau că φ *este o consecință semantică a lui* Σ ddacă φ este adevărat în orice interpretare h a. î. $h \vDash \Sigma$; acest lucru se notează cu: $\Sigma \vDash \varphi$.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Uneori, funcţia $\tilde{h}$ asociată unei interpretări h este numită tot *interpretare*. Valoarea unei interpretări într–un anumit enunţ, uneori numită interpretarea acelui enunţ, este valoarea de adevăr 0 sau 1 care se obţine atunci când se atribuie, prin acea interpretare, valori de adevăr din $\mathcal{L}_2$ tuturor variabilelor propoziţionale care apar în acel enunţ. Un enunţ universal adevărat, i. e. un adevăr semantic, o tautologie, este un enunţ a cărui valoare de adevăr este 1 pentru orice valori de adevăr atribuite variabilelor propoziţionale care apar în acel enunţ.

În cele ce urmează, vom vedea două rezultate deosebit de importante privind sistemul formal $\mathcal{L}$: **Teorema de completitudine** şi o generalizare a ei, **Teorema de completitudine tare**, numită şi **Teorema de completitudine extinsă**. **Teorema de completitudine a lui** $\mathcal{L}$ afirmă că adevăruriler sintactice ale lui $\mathcal{L}$ coincid cu adevărurile semantice ale lui $\mathcal{L}$, i. e. teoremele formale ale lui $\mathcal{L}$ sunt exact enunţurile universal adevărate, tautologiile lui $\mathcal{L}$. **Teorema de completitudine tare pentru** $\mathcal{L}$ afirmă că, în $\mathcal{L}$, consecinţele sintactice ale unei mulţimi Σ de enunţuri coincid cu consecinţele semantice ale lui Σ, i. e. enunţurile care se deduc sintactic din Σ sunt exact enunţurile care se deduc semantic din Σ.

Teoremă (Teorema de completitudine tare (extinsă) pentru $\mathcal{L}$)

Pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ,

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \vDash \varphi.$$

Demonstrație: "$\Rightarrow$:" Presupunem că $\Sigma \vdash \varphi$. Demonstrăm că $\Sigma \vDash \varphi$.
Fie $h : V \to \mathcal{L}_2$, a. î. $h \vDash \Sigma$, arbitrară. Avem de demonstrat că $\tilde{h}(\varphi) = 1$ în $\mathcal{L}_2$.
Procedăm prin inducție după conceptul de consecință sintactică a mulțimii de ipoteze Σ.
$\Sigma \vdash \varphi$ înseamnă că φ se găsește în una dintre următoarele situații:

- (CS_1) $\quad\varphi$ este o axiomă; aici avem subcazurile:
  axioma (A_1): există $\psi, \chi \in E$ a. î. $\varphi = \psi \to (\chi \to \psi)$;
  atunci $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) \to (\tilde{h}(\chi) \to \tilde{h}(\psi)) = \overline{\tilde{h}(\psi)} \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} \vee \tilde{h}(\psi) = 1 \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} = 1$;

axioma (A_2): există $\alpha, \beta, \gamma \in E$ a. î.
$\varphi = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$;
dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$, $b := \tilde{h}(\beta)$ și $c := \tilde{h}(\gamma)$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$ în $\mathcal{L}_2$,
unde $1 \rightarrow 0 = 0$, iar celelalte trei implicații au valoarea 1;
așadar, dacă $a = 0$, atunci $\tilde{h}(\varphi) = 1 \rightarrow (1 \rightarrow 1) = 1 \rightarrow 1 = 1$;
dacă $a = 1$ și $b \rightarrow c = 0$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = 0 \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$;
dacă $b \rightarrow c = 1$, atunci $b \leq c$, și deci
$a \rightarrow b = \overline{a} \vee b \leq \overline{a} \vee c = a \rightarrow c$,
prin urmare $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) = 1$, deci
$\tilde{h}(\varphi) = (a \rightarrow 1) \rightarrow 1 = 1$;

axioma (A_3): există $\alpha, \beta \in E$ a. î. $\varphi = (\neg\,\alpha \rightarrow \neg\,\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;
dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$ și $b := \tilde{h}(\beta)$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = (\overline{a} \rightarrow \overline{b}) \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$,
pentru că [$b \leq a$ ddacă $\overline{a} \leq \overline{b}$],
și deci [$b \rightarrow a = 1$ ddacă $\overline{a} \rightarrow \overline{b} = 1$],
iar în caz contrar ambele implicații sunt 0,
pentru că ne situăm în $\mathcal{L}_2$,

deci $\bar{a} \to \bar{b} = b \to a$, prin urmare $(\bar{a} \to \bar{b}) \to (b \to a) = 1$;

- (CS_2) $\varphi \in \Sigma$; atunci $\tilde{h}(\varphi) = 1$, pentru că $h \vDash \Sigma$;
- (CS_3) există $\psi \in E$, a. î. $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$, $\tilde{h}(\psi) = 1$ și $\tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$ (aceste două egalități pentru valori ale lui $\tilde{h}$ reprezintă **ipoteza de inducție**); atunci $\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$, așadar $1 = \tilde{h}(\psi) \leq \tilde{h}(\varphi)$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

Demonstrația implicației directe este încheiată.

"$\Leftarrow$:" Ipoteza acestei implicații este că $\Sigma \vDash \varphi$.
Presupunem prin absurd că $\Sigma \nvdash \varphi$. Atunci $\hat{\varphi}^{\Sigma} \neq 1$ în algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$.
Aplicând **Teorema de reprezentare a lui Stone** algebrei Boole $E/_{\sim_\Sigma}$, obținem că există o mulțime $X \neq \emptyset$ și există un morfism boolean injectiv $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$.
$\hat{\varphi}^{\Sigma} \neq 1$ în $E/_{\sim_\Sigma}$ și $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X$ este injectiv, prin urmare $d(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \neq d(1) = 1$, deci $d(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \neq 1$(= funcția constantă 1) în $\mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$, așadar există un element $x \in X$ cu $d(\hat{\varphi}^{\Sigma})(x) \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$.
Fie $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$, definită prin: pentru orice $f \in \mathcal{L}_2^X$, $\pi(f) := f(x) \in \mathcal{L}_2$.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Se arată ușor că π este un morfism boolean. De exemplu, să verificăm comutarea lui π cu $\vee$, iar comutările lui π cu celelalte operații de algebre Boole se demonstrează analog: pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_2^X$,
$\pi(f \vee g) = (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) = \pi(f) \vee \pi(g)$ în $\mathcal{L}_2$.
Considerăm următoarele funcții: incluziunea $i : V \to E$ ($i(u) := u$ pentru fiecare $u \in V$), surjecția canonică $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$, morfismul boolean injectiv $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X$ considerat mai sus și morfismul boolean $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$ considerat mai sus. Să notăm compunerea acestor funcții cu h: $h := \pi \circ d \circ p_\Sigma \circ i$;
$h : V \to \mathcal{L}_2$ este o interpretare.
Demonstrăm, prin inducție după conceptul de enunț, că, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$. Folosim definiția lui $\tilde{h}$.

- (E_1) dacă $\alpha \in V$, atunci $\tilde{h}(\alpha) = h(\alpha) = \pi(d(p_\Sigma(i(\alpha)))) = \pi(d(p_\Sigma(\alpha))) = \pi(d(\hat{\alpha}^\Sigma)) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$;
- (E_2) dacă $\alpha = \neg\beta$, pentru un $\beta \in E$ cu $\tilde{h}(\beta) = d(\hat{\beta}^\Sigma)(x)$ (**ipoteza de inducție**), atunci $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\neg\beta) = \overline{\tilde{h}(\beta)} = \overline{d(\hat{\beta}^\Sigma)(x)} = (\overline{d(\hat{\beta}^\Sigma)})(x) = d(\overline{\hat{\beta}^\Sigma}^{\Sigma})(x) = d(\widehat{\neg\beta}^\Sigma)(x) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$;

- (E_3) dacă $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$, pentru $\beta, \gamma \in E$ cu $\tilde{h}(\beta) = d(\hat{\beta}^{\Sigma})(x)$ și $\tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\gamma}^{\Sigma})(x)$ (**ipoteza de inducție**), atunci $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\beta \rightarrow \gamma) = \tilde{h}(\beta) \rightarrow \tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\beta}^{\Sigma})(x) \rightarrow d(\hat{\gamma}^{\Sigma})(x) = (d(\hat{\beta}^{\Sigma}) \rightarrow d(\hat{\gamma}^{\Sigma}))(x) = d(\hat{\beta}^{\Sigma} \rightarrow_{\Sigma} \hat{\gamma}^{\Sigma})(x) = d(\widehat{\beta \rightarrow \gamma}^{\Sigma})(x) = d(\hat{\alpha}^{\Sigma})(x)$.

Demonstrația prin inducție este încheiată. Așadar, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\hat{\alpha}^{\Sigma})(x)$.
În particular, pentru $\alpha := \varphi$, $\tilde{h}(\varphi) = d(\hat{\varphi}^{\Sigma})(x) \neq 1$.
Demonstrăm că $h \vDash \Sigma$.
Fie $\sigma \in \Sigma$, arbitrar, fixat.
Conform identității stabilite mai sus, $\tilde{h}(\sigma) = d(\hat{\sigma}^{\Sigma})(x)$.
Cine este $\hat{\sigma}^{\Sigma}$ (clasa lui σ în algebra Boole $E/_{\sim_{\Sigma}}$)?
Conform definiției claselor echivalenței $\sim_{\Sigma}$, unei proprietăți a consecințelor sintactice, **Teoremei deducției**, faptului că $\sigma \in \Sigma$, și deci și $\Sigma \vdash \sigma$, $\hat{\sigma}^{\Sigma} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \leftrightarrow \tau\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \rightarrow \tau \text{ și } \Sigma \vdash \tau \rightarrow \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \tau \text{ și } \Sigma \cup \{\tau\} \vdash \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \tau\} = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$, oricare ar fi $\gamma \in E$, pentru că, în conformitate cu **Principiul terțului exclus**, $\vdash \gamma \vee \neg\gamma$, prin urmare $\Sigma \vdash \gamma \vee \neg\gamma$, așadar $\gamma \vee \neg\gamma \in \hat{\sigma}^{\Sigma}$ conform egalității de mulțimi pe care tocmai am stabilit–o, i. e. $\gamma \vee \neg\gamma \sim_{\Sigma} \sigma$, deci $\hat{\sigma}^{\Sigma} = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$.

Așadar, $\tilde{h}(\sigma) = d(\hat{\sigma}^{\Sigma})(x) = d(1_{\Sigma})(x) = 1(x) = 1$ (funcția constantă 1 aplicată în x).
Deci $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$, adică $h \vDash \Sigma$.
Am găsit o interpretare h cu proprietățile: $h \vDash \Sigma$ și $\tilde{h}(\varphi) \neq 1$, ceea ce înseamnă că $\Sigma \nvDash \varphi$. Am obținut o contradicție cu ipoteza acestei implicații. Așadar, $\Sigma \vdash \varphi$, ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Teoremă (Teorema de completitudine pentru $\mathcal{L}$)

Pentru orice enunț φ,

$$\vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Demonstrație: Se aplică **Teorema de completitudine tare** pentru $\Sigma = \emptyset$.

Remarcă

Uneori,

- implicația $\vdash \varphi \Rightarrow \vDash \varphi$ este numită *corectitudinea lui $\mathcal{L}$*,
- iar implicația $\vdash \varphi \Leftarrow \vDash \varphi$ este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Dar, cel mai adesea, **echivalența** din teorema anterioară este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Corolar (noncontradicția lui $\mathcal{L}$)

Niciun enunț φ nu satisface și $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\,\varphi$.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că există un enunț φ a. î. $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\,\varphi$. Atunci, conform **Teoremei de completitudine**, $\vDash \varphi$ și $\vDash \neg\,\varphi$, i. e., pentru orice interpretare h, avem: $\tilde{h}(\varphi) = 1$ și $1 = \tilde{h}(\neg\,\varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)} = \overline{1} = 0$, deci $0 = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este o contradicție.

Remarcă

Nu există $\varphi \in E$ și $\Sigma \subseteq E$ a. î. $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg\,\varphi$. Acest fapt se demonstrează la fel ca și corolarul anterior, dar invocând **Teorema de completitudine tare** în locul **Teoremei de completitudine**.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Propoziție

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ *și orice* $\Sigma \subseteq E$ *a. î.* $h \vDash \Sigma$, *există un unic morfism boolean* $\overline{h}^{\Sigma} : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2$ *care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice* $\varphi \in E$, $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) := \tilde{h}(\varphi)$*:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p_\Sigma"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_{\sim_\Sigma} \arrow[dl, "\overline{h}^{\Sigma}"] \\ & \mathcal{L}_2 & \end{tikzcd}$$

Demonstrație: Unicitatea lui $\overline{h}^{\Sigma}$ rezultă din condiția ca $\overline{h}^{\Sigma}$ să închidă comutativ această diagramă, care face ca singura definiție posibilă pentru $\overline{h}^{\Sigma}$ să fie: pentru orice $\varphi \in E$, $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(p_\Sigma(\varphi)) := \tilde{h}(\varphi)$.

Cu această definiție, $\overline{h}^{\Sigma}$ devine morfism Boolean. De exemplu, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,
$\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma} \vee_\Sigma \hat{\psi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}) = \tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi) = \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \vee \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\psi}^{\Sigma})$. La fel se demonstrează comutarea lui $\overline{h}^{\Sigma}$ cu celelalte operații de algebră Boole.

Rămâne de demonstrat buna definire a lui $\overline{h}^{\Sigma}$, i. e. independența sa de reprezentanții claselor din $E/_{\sim_\Sigma}$. Fie $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\hat{\varphi}^{\Sigma} = \hat{\psi}^{\Sigma}$, ceea ce este echivalent cu $\varphi \sim_\Sigma \psi$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, ceea ce este echivalent cu $\Sigma \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$, conform **Teoremei de completitudine tare**. Dar $h \vDash \Sigma$, așadar $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$, adică $\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi)$, i. e. $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\psi}^{\Sigma})$. Așadar $\overline{h}^{\Sigma}$ este bine definit.

Corolar

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există un unic morfism boolean $\overline{h} : E/_\sim \to \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\overline{h}(\hat{\varphi}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_\sim \arrow[dl, "\overline{h}"] \\
& \mathcal{L}_2 &
\end{tikzcd}$$

Demonstrație: Se aplică propoziția precedentă pentru $\Sigma = \emptyset$.

Observație

Recomand cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, precum și alte lucrări din acea listă, pentru studiul **sistemelor deductive**, al **mulțimilor consistente** și a legăturii lor cu mulțimile care admit modele și cu **Teorema de completitudine** și **Teorema de completitudine tare**.