Riešenie nelineárnych rovníc $f(x) = 0$

Programy

Metóda tetív

```
Clear[f, x]
f[x_] =;
x[0] =;
x[1] =;
pocetopakovani =;
tolerancia =;
Do[x[i + 1] = x[i] - f[x[i]] * (x[i] - x[i - 1]) / (f[x[i]] - f[x[i - 1]]) // N;
 If[Abs[f[x[i + 1]]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 1, pocetopakovani}]
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

Newtonova metóda

```
Clear[f, x]
f[x_] =;
x[0] =;
pocetopakovani =;
tolerancia =;
Do[x[i + 1] = x[i] - f[x[i]] / f'[x[i]] // N;
 If[Abs[f[x[i + 1]]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 0, pocetopakovani}]
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

Metóda pevného bodu

```
Clear[x, g];
g[x_] =;
```

```
obr1 = Plot[{Abs[g'[x]], 1}, {x, * , *}]
```

```
x[0] =;
pocetopakovani =;
tolerancia =;

Do[
  x[i + 1] = g[x[i]] // N;
  If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < 10^(-15), Break[]],
  {i, 0, pocetopakovani}];
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

Newton-Ralphsonova metóda

```
Clear[f, x]
f[x_] =;
x[0] =;
k =;
pocetopakovani =;
tolerancia =;
Do[x[i + 1] = x[i] - k * f[x[i]] / f'[x[i]] // N;
 If[Abs[f[x[i + 1]]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 0, pocetopakovani}]
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

Príklad 1

Zadanie príkladu: Nájdite riešenie rovnice $x^2 + \ln x = \frac{10}{x}$ na intervale [0.1, 4].

Zadanie úlohy typu "nájdite riešenie nelineárnej rovnice $x^2 + \ln x = \frac{10}{x}$ " sa skladá z nasledovných čiastkových úloh. Aj keď nie sú jednotlivé body striktne definované, napr. separácia, sú potrebné pre správne riešenie úlohy a preto ich musíme realizovať.

Urobte separáciu koreňov rovnice $x^2 + \ln x = \frac{10}{x}$ na intervale [0.1, 4], určite ich počet a násobnosť.

Jednoduchý koreň nájdite Newtonovou metódou, metódou tetív, Mullerovou metódou, metódou chord, metódou pevného bodu.
Ak ide o viacnásobný koreň, nájdite ho Newton-Ralphstonovou metódou, metódou zníženia násobnosti koreňa, metódou substitúcie funkcie.
Ak je to potrebné použite vhodnú metódu na urýchlenie.

Overte splnenie podmienok použiteľnosti daných metód, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.

Na záver riešenia urobte analýzu problému a vysvetlite, ktoré metódy je/nie je vhodné použiť na riešenie tohto problému a prečo. Závery robte na základe konkrétnych výsledkov predchádzajúcich výpočtov (uveďte ktoré výsledky ste použili).

Metóda tetív

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých koreňov metódou lineárnej interpolácie - metóda tetív.
Vypočítajte odhad absolútnej chyby aproximácie.
Výsledok porovnajte s hodnotou koreňa nájdeného pomocou príkazu `FindRoot[]` (použite parametre príkazu pre metódu tetív)
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Uveďte dvojicu bodov, ktorú nie je vhodné použiť ako štartovacie body pre metódu tetív. Zdôvodnite prečo táto dvojica bodov nie je vhodná.

Newtonova metóda

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých koreňov Newtonovou metódou.
Vypočítajte odhad absolútnej chyby aproximácie.
Výsledok porovnajte s hodnotou koreňa nájdeného pomocou príkazu `FindRoot[]` (použite parametre príkazu pre Newtonovu metódu)
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Uveďte aspoň jeden bod, ktorý nie je vhodné použiť ako štartovací bod pre Newtonovu metódu. Zdôvodnite prečo táto voľba štartovacieho bodu nie je vhodná.

Mullerova metóda

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých koreňov Mullerovou metódou.
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Uveďte aspoň jeden bod, ktorý nie je vhodné použiť ako štartovací bod pre Mullerovu metódu. Zdôvodnite prečo táto voľba štartovacieho bodu nie je vhodná.

Metóda chord

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých koreňov metódou chord.
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Uveďte aspoň jeden bod, ktorý nie je vhodné použiť ako štartovací bod pre metódu chord. Zdôvodnite

prečo táto voľba štartovacieho bodu nie je vhodná.

Metóda pevného bodu

S toleranciou 10^{-4} nájdite približnú hodnotu všetkých koreňov metódou pevného bodu.
Pre každý koreň nájdite konvergentnú iteračnú schému a použite ju na nájdenie koreňa. Nezabudnite overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy a konvergentnosti vami použitej schémy.
Uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Vypočítajte odhad absolútnej chyby aproximácie.
Uveďte aspoň jeden bod, ktorý nie je vhodné použiť ako štartovací bod pre túto metódu. Zdôvodnite prečo táto voľba štartovacieho bodu nie je vhodná.

Newton Ralphsonova metóda

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých VIACNÁSOBNÝCH koreňov Newton-Ralphsonovou metódou.
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte hodnotu parametra k a zdôvodnite túto voľbu, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Uveďte aspoň jeden bod, ktorý nie je vhodné použiť ako štartovací bod pre Newton-Ralphsonovu metódu. Zdôvodnite prečo táto voľba štartovacieho bodu nie je vhodná.

Metóda zníženia násobnosti koreňa

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých VIACNÁSOBNÝCH koreňov touto metódou.
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.

Metóda substitúcie funkcie

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých VIACNÁSOBNÝCH koreňov touto metódou.
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.

Na záver riešenia urobte analýzu problému a vysvetlite, ktoré metódy je/nie je vhodné použiť na riešenie tohto problému a prečo. Porovnajte obe metódy. Ktorá z nich rýchlejšie konverguje? Závery robte na základe konkrétnych výsledkov predchádzajúcich výpočtov (uveďte ktoré výsledky ste použili).

Riešenie:

Rovnicu upravíme do tvaru $f(x) = 0$.

$$x^2 + \ln x = \frac{10}{x}$$

$$x^2 + \ln x - \frac{10}{x} = 0$$

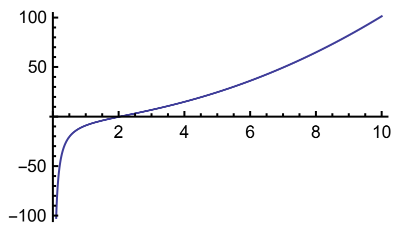
V ďalšom výpočte budeme pracovať s funkciou $f(x) = x^2 + \ln x - \frac{10}{x}$. Funkciu $f(x)$ si nakreslíme. Pomocou nákresu budeme následne analyzovať riešený problém.

```
f[x_] = x^2 + Log[x] - 10 / x
```

$$-\frac{10}{x} + x^2 + \text{Log}[x]$$

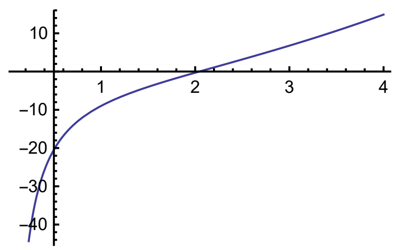
Pozrieme sa na celkový charakter funkcie $f(x)$.

```
Plot[f[x], {x, 0.1, 10}]
```



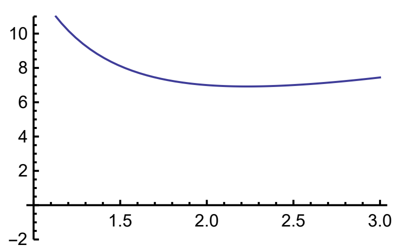
Urobíme separáciu koreňov rovnice. Funkciu $f(x)$ nakreslíme na intervale [0.1, 4].

```
Plot[f[x], {x, 0.1, 4}]
```



Z obrázka nevieme odhadnúť násobnosť koreňa - máme podozrenie, že koreň je viacnásobný. Nakreslíme si preto $f'(x)$ na malom okolí bodu $x = 2$ - v okolí tohto bodu by sa mal nachádzať koreň.

```
Plot[f'[x], {x, 1, 3}, PlotRange → {-2, 11}]
```



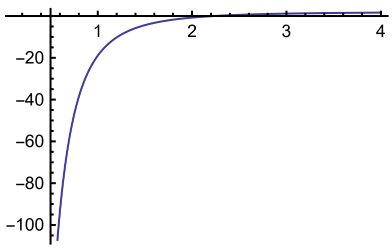
Z obrázka vidíme, že koreň bude len jednoduchý - v okolí bodu $x = 2$ nie sú funkčné hodnoty $f'(x)$ blízke nule.

Poznámka: Ak na základe hodnoty prvej derivácie nevieme rozhodnúť o násobnosti koreňa, musíme si nakresliť aj $f''(x)$, prípadne aj derivácie vyšších rádov. Najmä v prípade vyšších rádov musíte pri vykresľovaní funkcie použiť príkaz **`Evaluate`**. Je potrebné stanoviť prioritu vykonávaných operácií - teda povedať *Mathematice*, že najskôr má vypočítať deriváciu a až následne získaný výsledok zakresliť.

```
D[f[x], {x, 2}]
```

$$2 - \frac{20}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

```
Plot[Evaluate[D[f[x], {x, 2}]], {x, 0.1, 4}]
```



Z grafu funkcie vidíme, že funkcia $f(x)$ na intervale [0.1, 4] je spojitá a má práve jeden koreň. Interval môžeme zúžiť. Na základe obrázku vidíme, že funkcia $f(x)$ má práve jeden koreň na intervale [1.5, 2.5].

Ak by sme potrebovali formálne overiť, že funckai skutočne mení znamienko na intervale [1.5, 2.5], môžeme použiť jednoduchú podmienku: ak $f(a) * f(b) < 0$, potom funkcia $f(x)$ na intervale $[a, b]$ aspoň raz zmení znamienko. V našom prípade stačí overiť, či $f(1.5) * f(2.5) < 0$.

```
f[1.5] * f[2.5] < 0
```

True

Metóda tetív

Na základe separácie koreňov vieme, že na intervale [1.5, 2.5] sa nachádza práve jeden koreň.
Najskôr je potrebné overiť splnenie podmienok riešiteľnosti na tomto intervale

- $f(x)$ je spojitá na [1.5, 2.5].
- $f(x)$ je monotónna na [1.5, 2.5], buď rastúca alebo klesajúca na celom intervale, kde úlohu riešime. V našom prípade je $f(x)$ je rastúca.
- na intervale, kde úlohu riešime sa nachádza PRÁVE JEDEN KOREŇ.

Vidíme to z grafu funkcie, alebo to môžeme overiť splnením podmienky $f(1.5) * f(2.5) < 0$

Ak by sme nechceli dodržiavať formalizmus, inými slovami môžeme povedať: v okolí koreňa je funkcia $f(x)$ spojitá a nemá extrém ani inflexný bod.

Pri metóde tetív je potrebné zvoliť dva štartovacie body, iteračná schéma má tvar

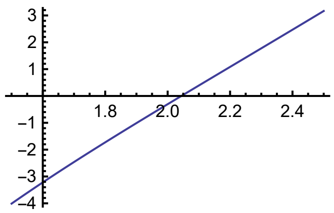
$x_0 =$ ....

$x_1 =$ ....

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i).\ \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Podmienky použitia metódy budú možno porušené v okolí bodu 2.5 - vidíme to z grafu funkcie, ktorý sme nakreslili na intervale [0.1, 10], preto je lepšie voliť štartujúce body menšie ako 2. Pre ďalší výpočet zvolíme štartujúce hodnoty $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$.

```
Plot[f[x], {x, 1.5, 2.5}]
```



Vstupné údaje:

f[x_] definovanie funkcie,

x[0], x[1] štartovacie body

pocetopakovani počet iterácií v cykle

tolerancia presnosť, s ktorou chceme počítať

Úloha vytvor program:

Cyklus [iteračná schéma;

zastavovacia podmienka | $x[i+i]-x[i]$ | < tolerancia, zastav cyklus],

{iračný predpis pre riadiacu premennú cyklu}]

Po prebehnutí cyklu necháme vypočítané hodnoty vypísať do tabuľky.

```
Clear[f, x]
f[x_] = x^2 + Log[x] - 10 / x;
```

```
x[0] = 1;
x[1] = 1.5;
pocetopakovani = 10;
tolerancia = 10^(-10);
```

```
Do[x[i + 1] = x[i] - f[x[i]] * (x[i] - x[i - 1]) / (f[x[i]] - f[x[i - 1]]) // N;
 If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 1, pocetopakovani}]
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
    TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
    TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
0	1	0.5
1	1.5	0.402021
2	1.902020808	0.132969
3	2.034990198	0.00887101
4	2.043861213	0.0000703651
5	2.043931578	2.67468×10^{-8}
6	2.043931605	7.86038×10^{-14}
7	2.043931605	Abs[-2.04393 + x[8]]
8	x[8]	Abs[-x[8] + x[9]]
9	x[9]	Abs[-x[9] + x[10]]
10	x[10]	Abs[-x[10] + x[11]]

Kvôli istote sa pozrime ešte na presný tvar koreňa, pomocou príkazu: `NumberForm [číslo, počet miest]`

```
NumberForm[x[6], 16]
```

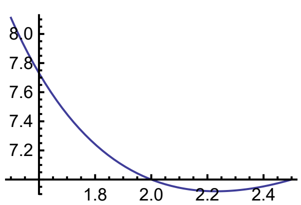
2.043931605061835

Výpočet realizovaný metódou tetív nám našiel približnú hodnotu koreňa rovnice
$x_6 =$ 2.053931605061835. Uvedomte si, že je to len PRIBLIŽNÁ hodnota koreňa, skutočnú hodnotu koreňa nepoznáme, vieme len, že je veľmi blízko tejto vypočítanej hodnoty.
Vypočítajme preto odhad absolútnej chyby aproximácie podľa vzorca pre výpočet odhadu chyby. Tento vzorec nám dáva informáciu o tom, ako blízko sa nachádza nami vypočítaná približná hodnota koreňa x_6 od skutočného koreňa rovnice. Použijeme vzťah z prednášky.

$$|x_i - \alpha| \leq \frac{|f(x_i)|}{m}, \quad \text{kde } m = \min\ |\ f'(x_i)\ | \text{ na intervale } [a, b]$$

Najskôr si nakreslíme deriváciu funkcie $f(x)$ na intervale, na ktorom realizujeme výpočet - [1.5, 2.5].

```
Plot[f'[x], {x, 1.5, 2.5}]
```



Vidíme, že na intervale [1.5, 2.5] derivácia funkcie $- f'(x)$ nadobúda najmenšiu hodnotu niekde v okolí bodu 2.217. Zistili sme to systémom zistím a vidím, odčítaním pomocou zamerania bodu z intervalu.

```
f'[2.217] // N
```

Môžeme použiť aj funkciu programu *Mathematica* na nájdenie minima - to bude určite presnejšie, ako náš odhad. My ale hľadáme odhad, takže na presnosti až tak veľmi nezáleží a príkaz *Mathematice* môže v mnohých situáciách zlyhať.

```
FindMinimum[f '[x], {x, 1.5, 2.5}]
```

```
{6.91933, {x → 2.23176}}
```

Vypočítajme odhad absolútnej chyby aproximácie podľa vzorca pre výpočet odhadu chyby - dosadíme do nasledovného vzťahu.

$|x_i - \alpha| \leq \frac{|f'(x_i)|}{m}$, kde $m = \min \, | \, f'(x_i) \, |$ na intervale $[a, b]$

```
Abs[f[x[6]]] / f '[2.217]
```

7.91159×10^{-14}

Vidíme, že nami vypočítaná aproximácia koreňa rovnice sa od skutočného koreňa líší rádo 10^{-14}, čo je viac ako bola požadovaná presnosť výpočtu a preto môžeme považovať nami vypočítanú aproximáciu koreňa za použiteľnú.

Nami vypočítaný výsledok môžeme porovnať aj s riešením nájdeným pomocou príkazu FindRoot [ ]. Je to príkaz systému *Mathematica*. Ak parametre výpočtu je potrebné uviesť interval - koncové body, v ktorom sa nachádza práve jeden koreň.

```
FindRoot[f[x], {x, 1.5, 2.5}]
```

```
{x → 2.04393}
```

V zadaní ešte žiadali nájsť dvojicu bodov, ktorá nie je vhodnou voľbou štartovacích bodov pre metódu tetív - 0.1 a 0.2. - extrém. Pri METÓDE TETÍV nie je vhodné voliť štartovacie body v blízkosti s približne rovnakou funkčnou hodnotou (dotyčnica je takmer rovnobežná s osou x a pretína ju vo veľmi vzdialenom bode od očakávaného koreňa). Nie je vhodné voliť ani boli v blízkosti extrému funkcie, alebo v blízkosti inflexného bodu.

Newtonova metóda

Na základe separácie koreňov vieme, že na intervale [1.5, 2.5] sa nachádza práve jeden koreň.
Potrebné je overiť splenie podmienok riešiteľnosti

- $f(x)$ je spojitá na [1.5, 2.5]
- $f(x)$ je monotónna na [1.5, 2.5], buď rastúca alebo klesajúca na celom intervale, kde úlohu riešime. V našom prípade je $f(x)$ je rastúca.
- na intervale, kde úlohu riešime sa nachádza PRÁVE JEDEN KOREŇ.
  Vidíme to z grafu funkcie, alebo to môžeme overiť splnením podmienky $f(1.5) * f(2.5) < 0$
- v okolí koreňa existuje derivácia $f'(x)$ - nakreslíme graf derivácie funkcie.

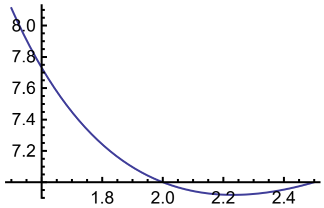
Pri Newtonovej metóde je potrebné zvoliť jeden štartovací bod, iteračná schéma má tvar

$x_0 =. \ldots.$

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Podmienky použitia metódy budú možno porušené v okolí bodu 2.5 - vidíme to z grafu funkcie, ktorý sme nakreslili na intervale [0.1, 10], preto je lepšie voliť štartujúci bod menší ako 2. Pre ďalší výpočet zvolíme štartujúce hodnoty $x_0 = 1$.

```
Plot[f'[x], {x, 1.5, 2.5}]
```



Vidíme, že na intervale [1.5, 2.5] existuje derivácia funkcie a nenadobúda hodnoty blízke nule (to by mohlo viesť ku zlej podmienenosti úlohy).

```
Clear[f, x]
f[x_] = x^2 + Log[x] - 10 / x;
x[0] = 1;
pocetopakovani = 10;
tolerancia = 10^(-10);
```

```
Do[x[i + 1] = x[i] - f[x[i]] / f'[x[i]] // N;
 If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 0, pocetopakovani}]
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
0	1	0.692308
1	1.692307692	0.337352
2	2.029659343	0.0142633
3	2.043922603	9.00229×10^{-6}
4	2.043931605	3.38085×10^{-12}
5	2.043931605	Abs[-2.04393 + x[6]]
6	x[6]	Abs[-x[6] + x[7]]
7	x[7]	Abs[-x[7] + x[8]]
8	x[8]	Abs[-x[8] + x[9]]
9	x[9]	Abs[-x[9] + x[10]]
10	x[10]	Abs[-x[10] + x[11]]

Kvôli istote sa pozrime ešte na presný tvar koreňa, pomocou príkazu: `NumberForm [číslo, počet miest]`

```
NumberForm[x[4], 16]
```

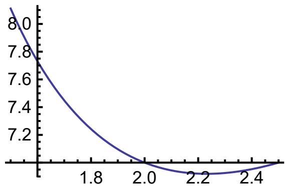
```
2.043931605058533
```

Výpočet realizovaný Newtonovou metódou nám našiel približnú hodnotu koreňa rovnice
$x_4 =$ 2.053931605058533. Uvedomte si, že je to len PRIBLIŽNÁ hodnota koreňa, skutočnú hodnotu koreňa nepoznáme, vieme len, že je veľmi blízko tejto vypočítanej hodnoty.
Vypočítajme preto odhad absolútnej chyby aproximácie podľa vzorca pre výpočet odhadu chyby. Tento vzorec nám dáva informáciu o tom, ako blízko sa nachádza nami vypočítaná približná hodnota koreňa x_4 od skutočného koreňa rovnice. Použijeme vzťah z prednášky.

$|x_i - \alpha| \leq \frac{|f(x_i)|}{m}$, kde $m = \min\ |f'(x_i)|$ na intervale $[a, b]$

Najskôr si nakreslíme deriváciu funkcie $f(x)$ na intervale, na ktorom realizujeme výpočet - [1.5, 2.5].

```
Plot[f'[x], {x, 1.5, 2.5}]
```



Vidíme, že na intervale [1.5, 2.5] derivácia funkcie $-f'(x)$ nadobúda najmenšiu hodnotu niekde v okolí bodu 2.217. Zistili sme to systémom zistím a vidím, odčítaním pomocou zamerania bodu z intervalu.

```
f'[2.217] // N
```

Môžeme použiť aj funkciu programu *Mathematica* na nájdenie minima - to bude určite presnejšie, ako náš odhad. My ale hľadáme odhad, takže na presnosti až tak veľmi nezáleží a príkaz *Mathematice* môže v mnohých situáciách zlyhať.

```
FindMinimum[f'[x], {x, 1.5, 2.5}]
```

```
{6.91933, {x → 2.23176}}
```

Vypočítajme odhad absolútnej chyby aproximácie podľa vzorca pre výpočet odhadu chyby - dosadíme do nasledovného vzťahu.

$|x_i - \alpha| \leq \frac{|f'(x_i)|}{m}$, kde $m = \min\ |f'(x_i)|$ na intervale $[a, b]$

```
Abs[f[x[4]]] / f'[2.217]
```

3.40575×10^{-12}

Vidíme, že nami vypočítaná aproximácia koreňa rovnice sa od skutočného koreňa líši rádo 10^{-12}, čo je viac ako bola požadovaná presnosť výpočtu a preto môžeme považovať nami vypočítanú aproximáciu koreňa za použiteľnú.

Nami vypočítaný výsledok môžeme porovnať aj s riešením nájdeným pomocou príkazu FindRoot [ ]. Je to príkaz systému *Mathematica*. Ak parametre výpočtu je potrebné uviesť jeden štartovací bod - vtedy bude *Mathematica* používať pre výpočet "vylepšenú Newtonovu" metódu .

```
FindRoot[f[x], {x, 1}]
```

```
{x → 2.04393}
```

V zadaní ešte žiadali nájsť bod, ktorý nie je vhodnou voľbou štartovacieho bodu pre Newtonovu metódu - napr. 0.1   Pri NEWTONOVEJ METODE nie je vhodné voliť štartovací bod v blízkosti extrémov (dotyčnica je takmer rovnobežná s osou x a pretína ju vo veľmi vzdialenom bode od očakávaného koreňa), alebo v blízkosti inflexných bodov (presečníky dotyčníc oscilujú).   Nie je vhodné voliť ani boli v blízkosti extrému funkcie, alebo v blízkosti inflexného bodu.

Metóda pevného bodu

a)

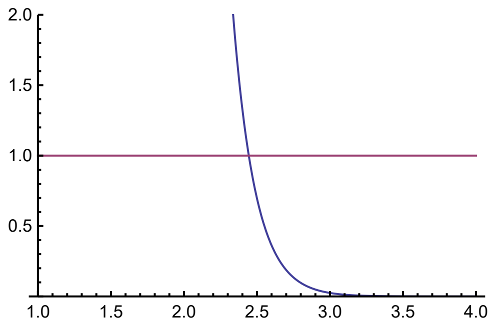
Pred použitím metódy musíme nájsť vhodnú iteračnú schému $x_{i+1} = g(x_i)$.

$$x^2 + \ln x - \frac{10}{x} = 0$$
$$\ln x = \frac{10}{x} - x^2$$
$$x = e^{\frac{10}{x} - x^2}$$

Iteračná schéma bude mať tvar: $x_{i+1} = e^{\frac{10}{x_i} - x_i^2}$

```
Clear[x, g];
g[x_] = Exp[10 / x - x^2];
```

```
obr1 = Plot[{Abs[g'[x]], 1}, {x, 1, 4}, PlotRange → {0, 2}]
```




```
x[0] = 2.5;
pocetopakovani = 20;
tolerancia = 10^(-15);
Do[
  x[i + 1] = g[x[i]] // N;
  If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < tolerancia, Break[]],
  {i, 0, pocetopakovani}];
```

General::unfl : Underflow occurred in computation. ≫

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
    TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
    TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
0	2.5	2.3946
1	0.1053992246	1.58449×10^{41}
2	$1.584486776 \times 10^{41}$	1.58449×10^{41}
3	Underflow[]	Indeterminate
4	Indeterminate	Indeterminate
5	Indeterminate	Indeterminate
6	Indeterminate	Indeterminate
7	Indeterminate	Indeterminate
8	Indeterminate	Indeterminate
9	Indeterminate	Indeterminate
10	Indeterminate	Indeterminate
11	Indeterminate	Indeterminate
12	Indeterminate	Indeterminate
13	Indeterminate	Indeterminate
14	Indeterminate	Indeterminate
15	Indeterminate	Indeterminate
16	Indeterminate	Indeterminate
17	Indeterminate	Indeterminate
18	Indeterminate	Indeterminate
19	Indeterminate	Indeterminate
20	Indeterminate	Indeterminate

b)

Pred použitím metódy musíme nájsť vhodnú iteračnú schému $x_{i+1} = g(x_i)$.

$$x^2 + \ln x - \frac{10}{x} = 0$$

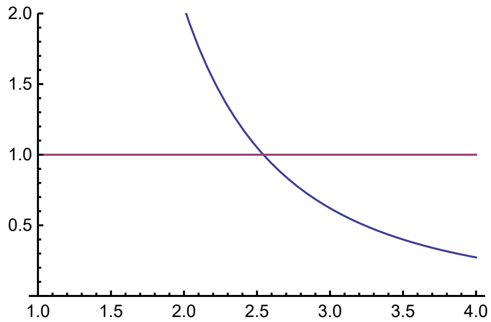
$$\frac{10}{x} = x^2 + \ln x$$

$$x = \frac{10}{x^2 + \ln x}$$

Itertačná schéma: $x_{i+1} = \frac{10}{{x_i}^2 + \ln x_i}$

```
Clear[x, g];
g[x_] = 10 / (x^2 + Log[x]);
```

```
obr1 = Plot[{Abs[g'[x]], 1}, {x, 1, 4}, PlotRange → {0, 2}]
```



```
x[0] = 2.5;
pocetopakovani = 20;
tolerancia = 10^(-15);

Do[
  x[i + 1] = g[x[i]] // N;
  If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < 10^(-15), Break[]],
  {i, 0, pocetopakovani}];

TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\|x_{i+1}-x_i\|$
0	2.5	1.10458
1	1.395422035	2.98977
2	4.385196424	3.9023
3	0.4829009111	20.6951
4	-20.21220758	20.2365
5	0.02429758097 - 0.0001854817806 i	2.71481
6	-2.690504737 + 0.005532375372 i	3.77595
7	1.063402572 - 0.4018870245 i	5.78809
8	4.090083677 + 4.531797452 i	6.31136
9	-0.01387510222 - 0.263068592 i	4.8655
10	-3.06298607 + 3.528507557 i	4.26864
11	-0.04060883891 + 0.5141270048 i	5.8239
12	-2.688076603 - 4.673238562 i	5.01259
13	-0.1853332531 - 0.3301553365 i	4.71621
14	-2.119224224 + 3.971323334 i	3.93972
15	-0.3115742297 + 0.4707842417 i	5.38146
16	-1.761809309 - 4.711578652 i	4.65378
17	-0.3356051797 - 0.2817232959 i	4.35939
18	-1.387226229 + 3.948918698 i	3.66049
19	-0.5283542047 + 0.3906104325 i	5.07969
20	-0.6573183013 - 4.687446488 i	4.58481

```
x[0] = 3;
pocetopakovani = 20;
tolerancia = 10^(-15);

Do[
  x[i + 1] = g[x[i]] // N;
  If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < 10^(-15), Break[]],
  {i, 0, pocetopakovani}];

TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
    TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
    TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
0	3	2.00976
1	0.9902350654	9.31105
2	10.30128625	10.2091
3	0.09220943924	4.3024
4	-4.210189155	4.7191
5	0.5081758036 - 0.08330974717 i	21.2797
6	-17.84082141 + 10.69351744 i	20.7992
7	0.01110094502 + 0.02032491389 i	2.5705
8	-2.456719099 - 0.6989456826 i	4.02676
9	1.530278793 - 0.1344666351 i	2.13133
10	3.516812246 + 0.6376943917 i	2.97613
11	0.6720833063 - 0.2368752444 i	15.3521
12	1.304166674 + 15.10217454 i	15.17
13	-0.04326626867 - 0.007907486243 i	2.29863
14	-1.686714243 + 1.599192832 i	3.07289
15	1.09266258 + 2.90981538 i	4.09431
16	-0.646216321 - 0.7968900194 i	8.80294
17	-1.253019252 + 7.985106285 i	8.01472
18	-0.1522887599 + 0.04632996802 i	2.93279
19	-1.604637072 - 2.501594173 i	1.4563
20	-0.6267378854 - 1.42247028 i	8.05083

c)

Pred použitím metódy musíme nájsť vhodnú iteračnú schému $x_{i+1} = g(x_i)$.

$$x^2 + \ln x - \frac{10}{x} = 0$$

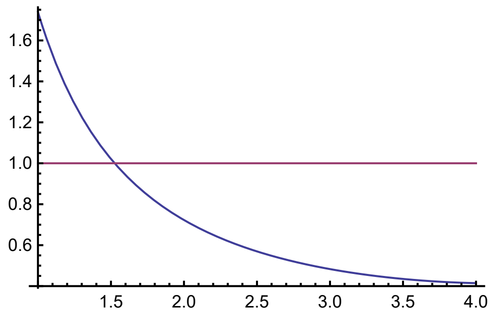
$$x^2 = \frac{10}{x} - \ln x$$

$$x = \sqrt{\frac{10}{x} - \ln x}$$

Iteračná schéma: $x_{i+1} = \sqrt{\frac{10}{x_i} - \ln x_i}$

```
Clear[x, g];
g[x_] = Sqrt[10 / x - Log[x]];
```

```
obr1 = Plot[{Abs[g'[x]], 1}, {x, 1, 4}]
```




```
x[0] = 2.5;
pocetopakovani = 20;
tolerancia = 10^(-15);
Do[
  x[i + 1] = g[x[i]] // N;
  If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < tolerancia, Break[]],
  {i, 0, pocetopakovani}];
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
    TableHeadings → {None, {"i", "xᵢ", "|xᵢ₊₁-xᵢ|"}},
    TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
0	2.5	0.743951
1	1.756049335	0.50924
2	2.265288997	0.36878
3	1.896508752	0.255893
4	2.152401461	0.182785
5	1.969616524	0.127832
6	2.097448824	0.0907164
7	2.006732423	0.0637066
8	2.070439004	0.0450667
9	2.025372284	0.0317156
10	2.057087838	0.0224012
11	2.034686663	0.0157815
12	2.050468197	0.0111382
13	2.039329985	0.007851
14	2.047180987	0.00553894
15	2.041642046	0.00390528
16	2.045547321	0.00275468
17	2.042792638	0.00194247
18	2.044735106	0.00137004
19	2.043365066	0.000966149
20	2.044331215	0.000681402

d)

Pred použitím metódy musíme nájsť vhodnú iteračnú schému $x_{i+1} = g(x_i)$.

$$x^2 + \ln x - \frac{10}{x} = 0$$

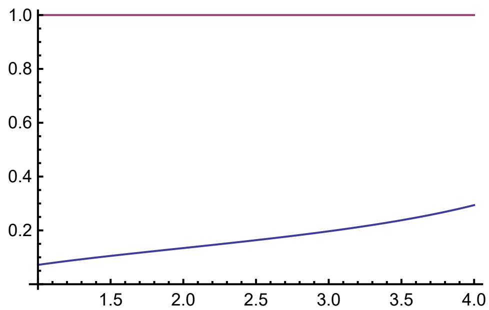
$$x^3 + x \ln x - 10 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{10 - x \ln x}$$

Iteračná schéma: $x_{i+1} = \sqrt[3]{10 - x_i \ln x_i}$

```
Clear[x, g];
g[x_] = (10 - x * Log[x]) ^ (1 / 3);
```

```
obr1 = Plot[{Abs[g'[x]], 1}, {x, 1, 4}]
```




```
x[0] = 2.5;
pocetopakovani = 20;
tolerancia = 10^(-15);
Do[
  x[i + 1] = g[x[i]] // N;
  If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < tolerancia, Break[]],
  {i, 0, pocetopakovani}];
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
    TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
    TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
0	2.5	0.524527
1	1.975473212	0.0776912
2	2.053164424	0.0104986
3	2.042665841	0.00143891
4	2.044104752	0.00019684
5	2.043907913	0.0000269343
6	2.043934847	3.68538×10^{-6}
7	2.043931161	5.04267×10^{-7}
8	2.043931666	6.89984×10^{-8}
9	2.043931597	9.44099×10^{-9}
10	2.043931606	1.2918×10^{-9}
11	2.043931605	1.76756×10^{-10}
12	2.043931605	2.41855×10^{-11}
13	2.043931605	3.30935×10^{-12}
14	2.043931605	4.52971×10^{-13}
15	2.043931605	6.21725×10^{-14}
16	2.043931605	8.88178×10^{-15}
17	2.043931605	1.33227×10^{-15}
18	2.043931605	0.
19	2.043931605	Abs[-2.04393 + x[20]]
20	x[20]	Abs[-x[20] + x[21]]

Záver

NEWTONOVA METÓDA rýchlejšie konverguje ku hľadanému koreňu (na dosiahnutie aproximácie koreňa so žiadanou toleranciou boli potrebné 4 iterácie). METÓDA TETÍV ich potrebovala 6. Na druhej strane však metóda tetív spočítala koreň presnejšie - vidíme to na základe výpočtu v odhade chyby. Metóda pevného bodu konvergovala najpomalšie, bol problém nájsť konvergentnú iteračnú schému. Rovnica nemala viacnásobné korene, preto sme nemohli použiť metódy vhodné pre viacnásobné korene.

Príklad 2 - viacnásobný koreň

Numerickými metódami riešte rovnicu $1 - x.e^{1-x} = 0$ na intervale [-2,4].

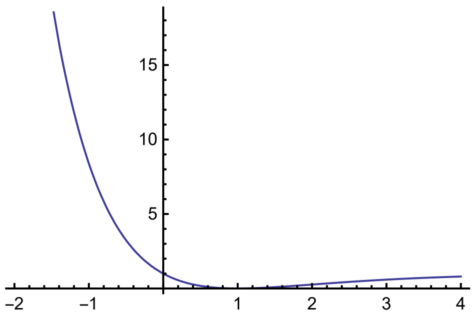
Urobte separáciu koreňov, určite ich počet. Urobte analýzu riešiteľnosti úlohy.
Koreň nájdite vhodnými metódami, pri každej metóde overte splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy.
Pri každej metóde uveďte štartovacie body, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité

v rámci výpočtu.
Výsledky získané jednotlivými metódami porovnajte z hľadiska presnosti a efektivity výpočtu.
Na záver riešenia urobte analýzu problému a vysvetlite, ktoré metódy je/nie je vhodné použiť na riešenie tohto problému a prečo. Závery robte na základe konkrétnych výsledkov predchádzajúcich výpočtov (uveďte ktoré výsledky ste použili).

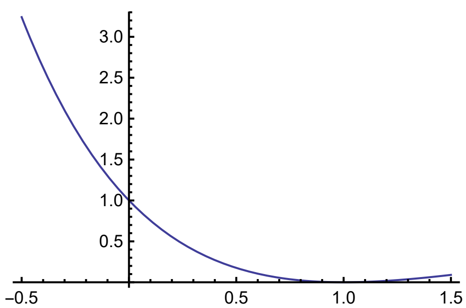
```
f[x_] = 1 - x * Exp[1 - x]
```

$1 - e^{1-x}\, x$

```
Plot[f[x], {x, -2, 4}]
```

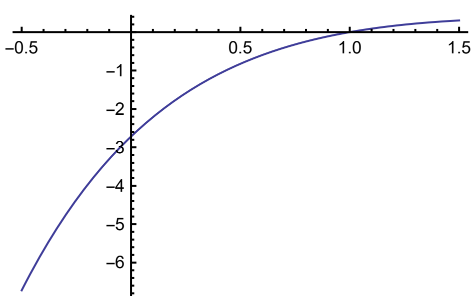



```
Plot[f[x], {x, -0.5, 1.5}]
```



Funkcia je na intervale `[-2,4]` spojitá, konvexná, v okolí bodu $x = 1$ má jeden viacnásobný (pravdepodobne dvojnásobný) koreň.

```
Plot[f'[x], {x, -0.5, 1.5}]
```



Derivácia funkcie $f'(x)$ je monotónna, v okolí predpokladaného koreňa rastúca, konkávna - to znamená funkcia $f(x)$ má v okolí koreňa $x = 1$ dvojnásobný koreň.

Metóda tetív

Podmienky metódy v okolí bodu $x = 1$ nie sú splnené, napriek tomu sa môžeme pokúsiť metódu použiť - aby sme mohli porovnať výsledky s metódami, ktoré sú určené na hľadanie viacnásobných koreňov.

```
Clear[f, x]
f[x_] = 1 - x * Exp[1 - x];
x[0] = 1.2;
x[1] = 2;
pocetopakovani = 20;
tolerancia = 10^(-8);
Do[x[i + 1] = x[i] - f[x[i]] * (x[i] - x[i - 1]) / (f[x[i]] - f[x[i - 1]]) // N;
 If[Abs[f[x[i + 1]]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 1, pocetopakovani}]
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
0	1.2	0.8
1	2	0.85682
2	1.143180166	0.0313341
3	1.111846042	0.0517684
4	1.060077664	0.0220371
5	1.038040602	0.0151149
6	1.022925739	0.00875853
7	1.014167212	0.00546237
8	1.008704844	0.00333241
9	1.005372438	0.0020577
10	1.003314735	0.0012676
11	1.002047138	0.000782656
12	1.001264482	0.000483227
13	1.000781255	0.000298512
14	1.000482743	0.000184427
15	1.000298316	0.000113961
16	1.000184355	0.0000704226
17	1.000113932	Abs[-1.00011 + x[18]]
18	x[18]	Abs[-x[18] + x[19]]
19	x[19]	Abs[-x[19] + x[20]]
20	x[20]	Abs[-x[20] + x[21]]

Newtonova metóda

Podmienky metódy v okolí bodu $x = 1$ nie sú splnené, napriek tomu sa môžeme pokúsiť metódu použiť - aby sme mohli porovnať výsledky s metódami, ktoré sú určené na hľadanie viacnásobných koreňov.

```
Clear[f, x]
f[x_] = 1 - x * Exp[1 - x];
x[0] = 1.2;
pocetopakovani = 20;
tolerancia = 10^(-8);
Do[x[i + 1] = x[i] - f[x[i]] / f'[x[i]] // N;
 If[Abs[f[x[i + 1]]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 0, pocetopakovani}]
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
    TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
    TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\|x_{i+1}-x_i\|$
0	1.2	0.107014
1	1.092986209	0.0479683
2	1.045017899	0.0228506
3	1.022167345	0.011166
4	1.011001318	0.00552089
5	1.005480432	0.00274523
6	1.002735203	0.00136885
7	1.001366354	0.000683488
8	1.000682866	0.000341511
9	1.000341355	0.000170697
10	1.000170658	0.0000853339
11	1.000085324	Abs[-1.00009 + x[12]]
12	x[12]	Abs[-x[12] + x[13]]
13	x[13]	Abs[-x[13] + x[14]]
14	x[14]	Abs[-x[14] + x[15]]
15	x[15]	Abs[-x[15] + x[16]]
16	x[16]	Abs[-x[16] + x[17]]
17	x[17]	Abs[-x[17] + x[18]]
18	x[18]	Abs[-x[18] + x[19]]
19	x[19]	Abs[-x[19] + x[20]]
20	x[20]	Abs[-x[20] + x[21]]

Metóda pevného bodu - 1. schéma

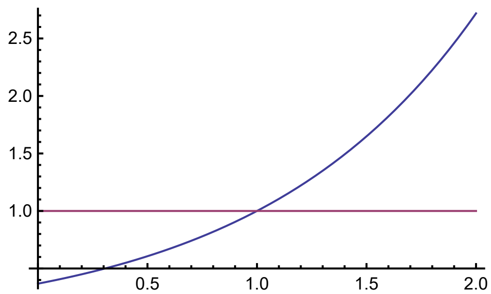
Pred použitím metódy musíme nájsť vhodnú iteračnú schému $x_{i+1} = g(x_i)$.

$$1 - x.e^{1-x} = 0$$
$$x\,.\,e^{1-x} = 1$$
$$e^{1-x} = \frac{1}{x}$$
$$x = \frac{1}{e^{1-x}}$$

Hľadaná iteračná schéma bude mať tvar $x_{i+1} = g(x_i)$, čiže $x_{i+1} = \frac{1}{e^{1-x_i}}$

```
Clear[x, g];
g[x_] = 1 / Exp[1 - x];

obr1 = Plot[{Abs[g'[x]], 1}, {x, 0, 2}]
```




```
x[0] = 0.7;
pocetopakovani = 50;
tolerancia = 10^(-8);;

Do[
  x[i + 1] = g[x[i]] // N;
  If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < 10^(-15), Break[]],
  {i, 0, pocetopakovani}];

TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
    TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
    TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
0	0.7	0.0408182
1	0.7408182207	0.0308645
2	0.7716827343	0.024189
3	0.795871717	0.0194861
4	0.8153577679	0.0160439
5	0.8314016795	0.0134465
6	0.8448481935	0.011437
7	0.8562851779	0.00984954
8	0.8661347153	0.00857318
9	0.8747078932	0.00753126
10	0.8822391569	0.00666946
11	0.8889086158	0.00594835
12	0.8948569694	0.00533879
13	0.9001957579	0.00481881
14	0.9050145644	0.00437161
15	0.9093861791	0.00398419
16	0.9133703673	0.0036463
17	0.9170166657	0.00334982
18	0.9203664857	0.00308823
19	0.9234547173	0.00285625
20	0.9263109675	0.00264956
21	0.9289605255	0.0024646
22	0.9314251238	0.00229842

23	0.9337235438	0.00214856
24	0.9358721009	0.00201294
25	0.9378850372	0.0018898
26	0.9397748414	0.00177767
27	0.9415525111	0.00167526
28	0.943227769	0.00158147
29	0.9448092432	0.00149537
30	0.9463046167	0.00141614
31	0.9477207541	0.00134305
32	0.9490638076	0.0012755
33	0.9503393075	0.00121293
34	0.9515522385	0.00115487
35	0.952707106	0.00110089
36	0.9538079921	0.00105061
37	0.9548586042	0.00100371
38	0.9558623173	0.000959893
39	0.9568222106	0.000918888
40	0.9577410987	0.000880461
41	0.95862156	0.000844401
42	0.959465961	0.000810516
43	0.9602764771	0.000778635
44	0.9610551121	0.000748603
45	0.9618037147	0.000720278
46	0.9625239931	0.000693535
47	0.963217528	0.000668257
48	0.9638857847	0.000644338
49	0.9645301231	0.000621684
50	0.9651518071	0.000600206

Metóda pevného bodu - 2. schéma

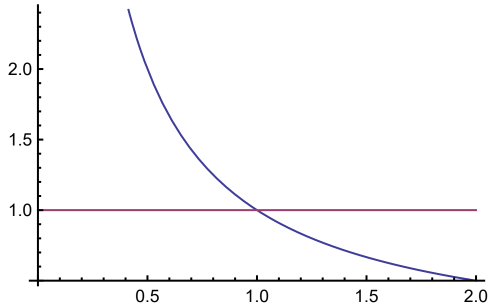
Pred použitím metódy musíme nájsť vhodnú iteračnú schému $x_{i+1} = g(x_i)$.

s $$1 - x.e^{1-x} = 0$$
$$x\,.\,e^{1-x} = 1$$
$$e^{1-x} = \frac{1}{x}$$
$$\ln\left(e^{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$1 - x = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$1 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{x}$$

Hľadaná iteračná schéma bude mať tvar $x_{i+1} = g(x_i)$, čiže $x_{i+1} = 1 - \ln\left(\frac{1}{x_i}\right)$

```
Clear[x, g];
g[x_] = 1 - Log[1 / x];
```

```
obr1 = Plot[{Abs[g'[x]], 1}, {x, 0, 2}]
```




```
x[0] = 1.5;
pocetopakovani = 50;
tolerancia = 10^(-8);;

Do[
  x[i + 1] = g[x[i]] // N;
  If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < 10^(-15), Break[]],
  {i, 0, pocetopakovani}];

TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
    TableHeadings → {None, {"i", "x_i", "|x_{i+1}-x_i|"}},
    TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
0	1.5	0.0945349
1	1.405465108	0.0650968
2	1.340368286	0.0474239
3	1.292944416	0.0360223
4	1.256922111	0.0282561
5	1.228665963	0.022737
6	1.205928998	0.0186788
7	1.187250223	0.0156103
8	1.171639896	0.0132355
9	1.158404388	0.0113609
10	1.147043531	0.00985574
11	1.137187789	0.00862943
12	1.128558363	0.00761733
13	1.120941033	0.00677249
14	1.114168541	0.00606012
15	1.108108423	0.00545398
16	1.102654439	0.00493404
17	1.097720399	0.00448473
18	1.093235665	0.00409387
19	1.089141799	0.00375175
20	1.085390046	0.00345063
21	1.081939411	0.00318423
22	1.078755182	0.00294741
23	1.075807767	0.00273598
24	1.073071791	0.00254642

25	1.070525368	0.00237584
26	1.068149526	0.00222179
27	1.065927736	0.0020822
28	1.063845534	0.00195533
29	1.061890206	0.00183967
30	1.060050533	0.00173395
31	1.058316579	0.00163707
32	1.056679513	0.00154806
33	1.055131457	0.00146609
34	1.053665363	0.00139046
35	1.052274907	0.00132051
36	1.050954399	0.0012557
37	1.049698702	0.00119553
38	1.048503173	0.00113958
39	1.047363597	0.00108745
40	1.046276147	0.00103881
41	1.045237334	0.00099336
42	1.044243973	0.00095082
43	1.043293153	0.000910949
44	1.042382204	0.000873529
45	1.041508674	0.000838364
46	1.04067031	0.000805276
47	1.039865035	0.000774104
48	1.03909093	0.000744705
49	1.038346225	0.000716946
50	1.03762928	0.000690707

Newton-Ralphsonova metóda - pre viacnásobný koreň

Podmienky metódy v okolí bodu $x = 1$ sú splnené - funkcia je konvexná, má dvojnásobný koreň v okolí tohto bodu. Zvolíme $k = 2$.

```
Clear[f, x]
f[x_] = 1 - x * Exp[1 - x];
x[0] = 1.2;
pocetopakovani = 10;
tolerancia = 10^(-8);
k = 2;

Do[x[i + 1] = x[i] - k * f[x[i]] / f'[x[i]] // N;
 If[Abs[f[x[i + 1]]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 0, pocetopakovani}]
```

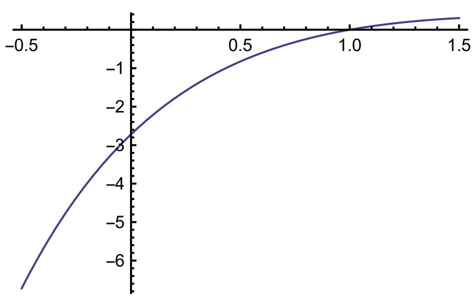
```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
    TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
    TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
0	1.2	0.214028
1	0.9859724184	0.0139622
2	0.9999346384	Abs[-0.999935 + x[3]]
3	x[3]	Abs[-x[3] + x[4]]
4	x[4]	Abs[-x[4] + x[5]]
5	x[5]	Abs[-x[5] + x[6]]
6	x[6]	Abs[-x[6] + x[7]]
7	x[7]	Abs[-x[7] + x[8]]
8	x[8]	Abs[-x[8] + x[9]]
9	x[9]	Abs[-x[9] + x[10]]
10	x[10]	Abs[-x[10] + x[11]]

Metóda substitúcie funkcie s cieľom znížiť násobnosť koreňa - budeme hľadať koreň derivácie funkcie $f'(x)$

Podmienky metódy v okolí bodu $x = 1$ sú splnené - funkcia $f'(x)$ je rastúca, má v okolí bodu $x = 1$ jednoduchý koreň.

```
Plot[f'[x], {x, -0.5, 1.5}]
```




```
Clear[f, x]
f[x_] = D[1 - x * Exp[1 - x], x]
x[0] = 1.2;
pocetopakovani = 10;
tolerancia = 10^(-8);

Do[x[i + 1] = x[i] - f[x[i]] / f'[x[i]] // N;
 If[Abs[f[x[i + 1]]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 0, pocetopakovani}]
```

$-e^{1-x} + e^{1-x}\,x$

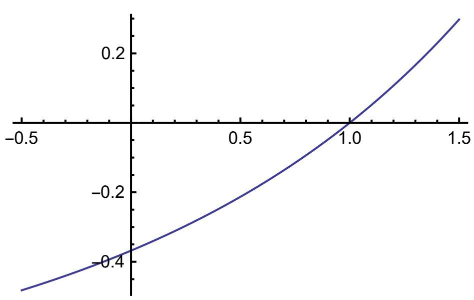
```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
    TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
    TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i\rvert$
0	1.2	0.25
1	0.95	0.047619
2	0.9976190476	0.0023753
3	0.9999943445	5.65544×10^{-6}
4	1.	Abs[-1. + x[5]]
5	x[5]	Abs[-x[5] + x[6]]
6	x[6]	Abs[-x[6] + x[7]]
7	x[7]	Abs[-x[7] + x[8]]
8	x[8]	Abs[-x[8] + x[9]]
9	x[9]	Abs[-x[9] + x[10]]
10	x[10]	Abs[-x[10] + x[11]]

Metóda zníženia násobnosti koreňa pomocou substitúcie - budeme hľadať koreň derivácie funkcie $\frac{f(x)}{f'(x)}$

Podmienky metódy v okolí bodu $x = 1$ sú splnené - funkcia $f'(x)$ je rastúca, má v okolí bodu $x = 1$ jednoduchý koreň.

```
Plot[f[x] / f'[x], {x, -0.5, 1.5}]
```




```
Clear[f, x]
f[x_] = (1 - x * Exp[1 - x]) / D[1 - x * Exp[1 - x], x]
x[0] = 1.2;
pocetopakovani = 10;
tolerancia = 10^(-8);

Do[x[i + 1] = x[i] - f[x[i]] / f'[x[i]] // N;
 If[Abs[f[x[i + 1]]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 0, pocetopakovani}]
```

$$\frac{1 - e^{1-x}\, x}{-e^{1-x} + e^{1-x}\, x}$$

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

i	x_i	$\lvert x_{i+1}-x_i\rvert$
0	1.2	0.187105
1	1.012894909	0.0128396
2	1.000055307	0.0000553062
3	1.000000001	Abs[-1. + x[4]]
4	x[4]	Abs[-x[4] + x[5]]
5	x[5]	Abs[-x[5] + x[6]]
6	x[6]	Abs[-x[6] + x[7]]
7	x[7]	Abs[-x[7] + x[8]]
8	x[8]	Abs[-x[8] + x[9]]
9	x[9]	Abs[-x[9] + x[10]]
10	x[10]	Abs[-x[10] + x[11]]

Programy

Metóda tetív

```
Clear[f, x]
f[x_] =;
x[0] =;
x[1] =;
pocetopakovani =;
tolerancia =;
Do[x[i + 1] = x[i] - f[x[i]] * (x[i] - x[i - 1]) / (f[x[i]] - f[x[i - 1]]) // N;
 If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 1, pocetopakovani}]
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

Newtonova metóda

```
Clear[f, x]
f[x_] =;
x[0] =;
pocetopakovani =;
tolerancia =;
Do[x[i + 1] = x[i] - f[x[i]] / f'[x[i]] // N;
 If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 0, pocetopakovani}]
```

```
TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

Metóda pevného bodu

```
Clear[x, g];
g[x_] =;

obr1 = Plot[{Abs[g'[x]], 1}, {x, * , *}]

x[0] =;
pocetopakovani =;
tolerancia =;


Do[
  x[i + 1] = g[x[i]] // N;
  If[Abs[x[i + 1] - x[i]] < 10^(-15), Break[]],
  {i, 0, pocetopakovani}];

TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

Newton-Ralphsonova metóda

```
Clear[f, x]
f[x_] =;
x[0] =;
k =;
pocetopakovani =;
tolerancia =;
Do[x[i + 1] = x[i] - k * f[x[i]] / f'[x[i]] // N;
 If[Abs[f[x[i + 1]]] < tolerancia, Break[]],
 {i, 0, pocetopakovani}]

TableForm[Table[{i, NumberForm[x[i], 10], Abs[x[i + 1] - x[i]]}, {i, 0, pocetopakovani}],
     TableHeadings → {None, {"i", "xi", "|xi+1-xi|"}},
     TableSpacing → {1, 5}]
```

Úlohy na samostatné riešenie

Zadanie úlohy typu “nájdite riešenie nelineárnej rovnice ... ... “ sa skladá z nasledovných čiastkových úloh. Aj keď nie sú jednotlivé body striktne definované, napr. separácia, sú potrebné pre správne riešenie úlohy a preto ich musíme realizovať.

Numerickými metódami riešte rovnicu

$-60.8338 + 39.9518\,x + 45.7178\,x^2 - 18.9403\,x^3 - 13.145\,x^4 + 1.55\,x^5 + x^6 = 0$ na intervale $[-5, 4]$, určite počet a násobnosť koreňov tejto rovnice. Nájdite ich a urobte analýzu riešiteľnosti úlohy,

Jednoduchý koreň nájdite Newtonovou metódou, metódou tetív, Mullerovou metódou, metódou chord, metódou pevného bodu.
Ak ide o viacnásobný koreň, nájdite ho Newton-Ralphstonovou metódou, metódou zníženia násobnosti koreňa, metódou substitúcie funkcie.
Ak je to potrebné použite vhodnú metódu na urýchlenie.

Overte splnenie podmienok použiteľnosti daných metód, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.

Na záver riešenia urobte analýzu problému a vysvetlite, ktoré metódy je/nie je vhodné použiť na riešenie tohto problému a prečo. Závery robte na základe konkrétnych výsledkov predchádzajúcich výpočtov (uveďte ktoré výsledky ste použili).

Metóda tetív
S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých koreňov metódou lineárnej interpolácie - metóda tetív.
Vypočítajte odhad absolútnej chyby aproximácie.
Výsledok porovnajte s hodnotou koreňa nájdeného pomocou príkazu `FindRoot[]` (použite parametre príkazu pre metódu tetív)
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Uveďte dvojicu bodov, ktorú nie je vhodné použiť ako štartovacie body pre metódu tetív. Zdôvodnite prečo táto dvojica bodov nie je vhodná.

Newtonova metóda
S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých koreňov Newtonovou metódou.
Vypočítajte odhad absolútnej chyby aproximácie.
Výsledok porovnajte s hodnotou koreňa nájdeného pomocou príkazu `FindRoot[]` (použite parametre príkazu pre Newtonovu metódu)
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Uveďte aspoň jeden bod, ktorý nie je vhodné použiť ako štartovací bod pre Newtonovu metódu. Zdôvodnite prečo táto voľba štartovacieho bodu nie je vhodná.

Mullerova metóda

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých koreňov Mullerovou metódou.
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Uveďte aspoň jeden bod, ktorý nie je vhodné použiť ako štartovací bod pre Mullerovu metódu. Zdôvodnite prečo táto voľba štartovacieho bodu nie je vhodná.

Metóda chord

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých koreňov metódou chord.
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Uveďte aspoň jeden bod, ktorý nie je vhodné použiť ako štartovací bod pre metódu chord. Zdôvodnite prečo táto voľba štartovacieho bodu nie je vhodná.

Metóda pevného bodu

S toleranciou 10^{-4} nájdite približnú hodnotu všetkých koreňov metódou pevného bodu.
Pre každý koreň nájdite konvergentnú iteračnú schému a použite ju na nájdenie koreňa. Nezabudnite overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy a konvergentnosti vami použitej schémy.
Uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Vypočítajte odhad absolútnej chyby aproximácie.
Uveďte aspoň jeden bod, ktorý nie je vhodné použiť ako štartovací bod pre túto metódu. Zdôvodnite prečo táto voľba štartovacieho bodu nie je vhodná.

Newton Ralphsonova metóda

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých VIACNÁSOBNÝCH koreňov Newton-Ralphsonovou metódou.
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte hodnotu parametra k a zdôvodnite túto voľbu, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.
Uveďte aspoň jeden bod, ktorý nie je vhodné použiť ako štartovací bod pre Newton-Ralphsonovu metódu. Zdôvodnite prečo táto voľba štartovacieho bodu nie je vhodná.

Metóda zníženia násobnosti koreňa pomocou substitúcie $f(x)/f'(x)$.

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých VIACNÁSOBNÝCH koreňov touto metódou.
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.

Metóda substitúcie funkcie s cieľom znížiť násobnosť koreňa

S toleranciou 10^{-10} nájdite približnú hodnotu všetkých VIACNÁSOBNÝCH koreňov touto metódou.
NEZABUDNITE overiť splnenie podmienok použiteľnosti danej metódy, uveďte štartovacie body, uveďte iteračnú schému, prípadne iné obmedzujúce podmienky, ktoré boli použité v rámci výpočtu.

Na záver riešenia urobte analýzu problému a vysvetlite, ktoré metódy je/nie je vhodné použiť na riešenie tohto problému a prečo. Porovnajte obe metódy. Ktorá z nich rýchlejšie konverguje? Závery robte na základe konkrétnych výsledkov predchádzajúcich výpočtov (uveďte ktoré výsledky ste použili).

Ďalšie príklady na riešenie:

$$25.3523 - 2.7945\, x - 4.77\, x^2 + x^3 = 0$$
$$12.1489 - 2.1465\, x - 3.57\, x^2 + x^3 = 0$$
$$-170.94 + 39.7535\, x + 27.735\, x^2 - 10.75\, x^3 + x^4 = 0$$
$$-45.2028 - 28.1089\, x + 5.0508\, x^2 + 6.13\, x^3 + x^4 = 0$$
$$-44.5334 - 9.5504\, x + 4.37\, x^2 + x^3 = 0$$