Numerické integrovanie

Trapezoidal jednoduchý vzťah

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{h^3}{12}\left|f^{(2)}(\xi)\right|$$

Simpson jednoduchý vzťah

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \frac{h}{3}\left(f(a)+4*f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) - \frac{h^5}{90}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

Simpson 3/8 jednoduchý vzťah

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \frac{3h}{8}\left(f(a)+3*f\left(\frac{a+b}{3}\right)+3*f\left(\frac{2(a+b)}{3}\right)+f(b)\right) - \frac{3h^5}{80}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

Boole jednoduchý vzťah

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \frac{2h}{45}\left(7f(a)+32*f\left(\frac{a+b}{4}\right)+12*f\left(\frac{2(a+b)}{4}\right)+32*f\left(\frac{3(a+b)}{4}\right)+7f(b)\right) - \frac{8h}{94}$$

Trapezoidal zložený vzťah pre krok h

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \frac{h}{2}\left(f(a)+2*\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}}_{\text{vnútorné body}} f(x_i)+f(b)\right) - \frac{(b-a)*h^2}{12}\left|f^{(2)}(\xi)\right|$$

Simpson zložený vzťah pre krok h

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \frac{h}{3}\left(f(a)+4*\underbrace{\sum_{i=1}^{2n-1}}_{\text{vnútorné párne body}} f(x_i)+2*\underbrace{\sum_{i=2}^{2n-2}}_{\text{vnútorné nepárne body}} f(x_i)+f(b)\right) - \frac{(b-a)*h^4}{180}\left|f^{(4)}(\right.$$

Príklad 1

Integrujte funkciu $f(x) = 1 + e^{-x}\sin(4x)$ všetkými metódami na intervale $[0, 1]$. Vo všetkých prípadoch vypočítajte odhad chyby a porovnajte ho so skutočnou chybou, ktorej sme sa dopustili pri výpočte.

```
f[x_] = 1 + Exp[-x] Sin[4 x]
```

```
1 + e^-x Sin[4 x]
```

```
Integrate[f[x], {x, 0, 1}]
```

$$-\frac{-21\,e + 4\,\mathrm{Cos}[4] + \mathrm{Sin}[4]}{17\,e}$$

```
presna = Integrate[f[x], {x, 0, 1}] // N
```

1.30825

Trapezoidal jednoduchý vzťah

Integrujeme podľa vzťahu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{2}\,(f(a) + f(b))$, v konkrétnom prípade teda $\int_0^1 f(x)\,d\,x = \frac{1}{2}\,(f(0) + f(1))$

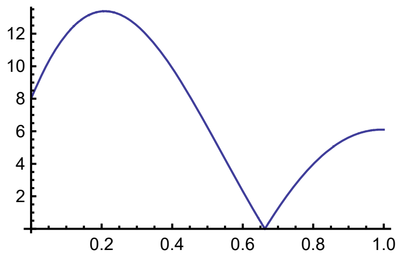
```
TrapezoidalSimple = 1 / 2 * (f[0] + f[1]) // N
```

0.860794

Odhad chyby

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{2}\,(f(a) + f(b)) - \frac{h^3}{12}\left|f^{(2)}(\xi)\right|$$

```
Plot[Abs[f''[x]], {x, 0, 1}]
```




```
FindMaximum[Abs[f''[x]], {x, 0.2}]
```

{13.3823, {x → 0.208965}}

```
1 / 12 * 13.3823 // N
```

1.11519

```
presna - TrapezoidalSimple
```

0.447457

Simpson jednoduchý vzťah

Integrujeme podľa vzťahu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$, v konkrétnom prípade teda $\int_0^1 f(x)\,d\,x = \frac{0.5}{3}\,(f(0) + 4 * f(0.5) + f(1))$

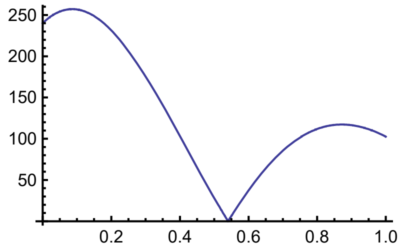
```
SimpsonSimple = 0.5 / 3 * (f[0] + 4 * f[0.5] + f[1]) // N
```

1.32128

Odhad chyby

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4 * f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{h^5}{90}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

```
Plot[Abs[f''''[x]], {x, 0, 1}]
```




```
FindMaximum[Abs[f''''[x]], {x, 0.2}]
```

```
{257.145, {x → 0.0864757}}
```

```
(0.5)^5 / 90 * 257.145 // N
```

```
0.0892865
```

```
Abs[presna - SimpsonSimple]
```

```
0.0130252
```

Simpson $\frac{3}{8}$ jednoduchý vzťah

Integrujeme podľa vzťahu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3*f\left(a + \frac{1}{3}(b-a)\right) + 3*f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) + f(b)\right)$, v konkrétnom prípade teda

$a = 0$

$b = 1$

$h = (b-a)/3 = (1-0)/3 = 1/3$

Integrál môžeme zapísať aj v tvare:

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3*f(a+h) + 3*f(a+2h) + f(b)\right)$,

čiže

$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3*0.333}{8}\left(f(0) + 3*f(1/3) + 3*f(2/3) + f(1)\right)$

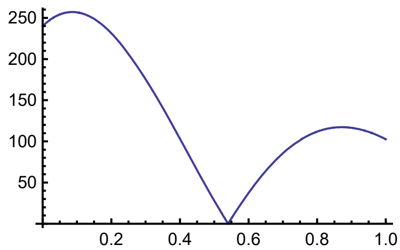
```
Simpson38Simple = 3 * (1 / 3) / 8 * (f[0] + 3 * f[1 / 3] + 3 * f[2 / 3] + f[1]) // N
```

```
1.3144
```

Odhad chyby

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3*f\left(a + \frac{1}{3}(b-a)\right) + 3*f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) + f(b)\right) - \frac{3h^5}{80}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

```
Plot[Abs[f''''[x]], {x, 0, 1}]
```



```
FindMaximum[Abs[f''''[x]], {x, 0.2}]
```

{257.145, {x → 0.0864757}}

```
3 * (0.333) ^5 / 80 * 257.145 // N
```

0.0394849

```
Abs[presna - Simpson38Simple]
```

0.00614621

Boole jednoduchý vzťah

Integrujeme podľa vzťahu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\left(7f(a) + 32*f\left(a + \frac{1}{4}(b-a)\right) + 12*f\left(a + \frac{2}{4}(b-a)\right) + 32*f\left(a + \frac{3}{4}(b-a)\right) + 7f(b)\right),$$

$a = 0$

$b = 1$

$h = (b - a)/4 = (1 - 0)/4 = 1/4$

v konkrétnom prípade teda

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2*0.25}{45}(7*f(0) + 32*f(1/4) + 12*f(2/4) + 32*f(3/4) + 7*f(1))$$

```
BooleSimple = 2 * 0.25 / 45 * (7 * f[0] + 32 * f[1 / 4] + 12 * f[2 / 4] + 32 * f[3 / 4] + 7 f[1]) // N
```

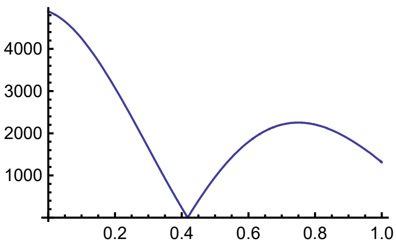
1.30859

Odhad chyby

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$\frac{2h}{45}\left(7f(a) + 32*f\left(a + \frac{1}{4}(b-a)\right) + 12*f\left(a + \frac{2}{4}(b-a)\right) + 32*f\left(a + \frac{3}{4}(b-a)\right) + 7f(b)\right) - \frac{8h^7}{945}\left|f^{(6)}(\xi)\right|$$

```
pom = D[f[x], {x, 6}];
Plot[Abs[pom], {x, 0, 1}]
```




```
FindMaximum[Abs[pom], {x, 0.2}]
```

{4941.09, {x → -0.0360136}}

Vidíme, že príkaz FindMaximum našiel maximum mimo interval [0, 1]. Z obrázka vidíme, že funkcia nadobúda maximum v bode 0.

```
8 * (0.25) ^7 / 945 * f[0] // N
```

5.167×10^{-7}

```
Abs[presna - BooleSimple]
```

0.000341317

Trapezoidal zložený vzťah

Integrujeme podľa vzťahu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{2}\,(f(a)+f(b))$ na každom čiastkovom intervale.

Na prvom intervale $[x_0, x_1]$ budeme integrovať podľa vzťahu

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,(f(x_0)+f(x_1))\,.$$

Všeobecne, na ľubovoľnom čiastkovom intervale počítame

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,(f(x_i)+f(x_{i+1}))$$

Budeme počítať s krokom $h = 0.1$, lebo $x_{i+1} - x_i = h$.

Všeobecný vzťah na výpočet má tvar

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)}_{\substack{\text{vnútorné}\\ \text{body}}} + f(b)\right)$$

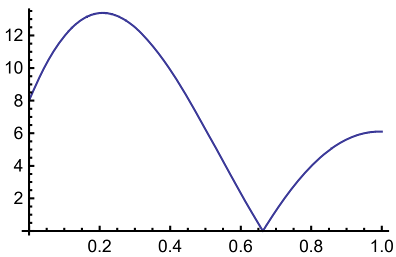
```
TrapezoidalComposite = 0.1 / 2 * (f[0] + 2 * Sum[f[x], {x, 0.1, 0.9, 0.1}] + f[1]) // N
```

1.30434

Odhad chyby

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2*\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}}_{\text{vnútorné body}} f(x_i) + f(b)\right) - \frac{(b-a)*h^2}{12}\left|f^{(2)}(\xi)\right|$$

```
Plot[Abs[f''[x]], {x, 0, 1}]
```




```
FindMaximum[Abs[f''[x]], {x, 0.2}]
```

{13.3823, {x → 0.208965}}

```
(1 - 0) * (0.1^2) / 12 * 13.3823 // N
```

0.0111519

```
presna - TrapezoidalComposite
```

0.00391001

Simpson zložený vzťah

Integrujeme podľa vzťahu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$ na každom čiastkovom intervale.

Na prvom intervale $[x_0, x_1]$ budeme integrovať podľa vzťahu

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, d x = \frac{h}{3}\,(f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2)).$$

Všeobecne, na ľubovoľnom ďalšom čiastkovom intervale počítame

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\, d x = \frac{h}{3}\,(f(x_i) + 4 f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))$$

Budeme počítať s krokom $h = 0.1$. Základný blok bude mať dĺžku 0.2.

POZOR: nezaudnite, že zloženú Simpsonovu metódu sme odvodzovali po blokoch, základný blok sa skladal z dvoch jednoduchých blokov, blok mal dĺžku 2 h.

Všeobecný vzťah na výpočet má tvar

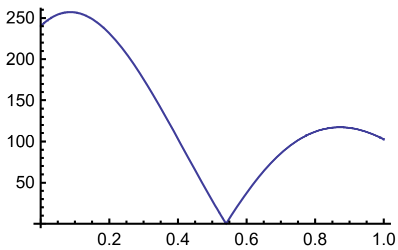
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4 * \underbrace{\sum_{i=1}^{2n-1}}_{\substack{\text{vnútorné}\\ \text{nepárne body}\\ s\text{ krokom } 2h}} f(x_i) + 2 * \underbrace{\sum_{i=2}^{2n-2}}_{\substack{\text{vnútorné}\\ \text{párne body}\\ s\text{ krokom } 2h}} f(x_i) + f(b) \right)$$

```
SimpsonComposite = 0.1 / 3 *
   (f[0] + 4 * Sum[f[x], {x, 0.1, 0.9, 0.2}] + 2 * Sum[f[x], {x, 0.2, 0.8, 0.2}] + f[1]) // N
```

```
1.30828
```

výpočet a odhad chyby

```
Plot[Abs[f''''[x]], {x, 0, 1}]
```




```
FindMaximum[Abs[f''''[x]], {x, 0.2}]
```

```
{257.145, {x → 0.0864757}}
```

```
(1 - 0) * (0.1^4) / 180 * 257.145 // N
```

```
0.000142858
```

```
presna - SimpsonComposite
```

```
-0.0000286843
```

Porovnanie výsledkov

Na záver urobíme porovnávaciu tabuľku

$$\int_0^1 1+e^{-x}\sin(4x)\,dx$$

presná hodnota $\int_0^1 1+e^{-x}\sin(4x)\,dx = 1.30825$

Metóda	výsledok	odhad chyby	|presná - približná|
Trapezoidal jednoduchý vzťah	0.860794	1.11519	0.447457
Simpson jednoduchý vzťah	1.32128	0.0892865	0.0130252
Simpson 3/8 jednoduchý vzťah	1.3144	0.0394849	0.00614621
Boole jednoduchý vzťah	1.30859	0.00255306	0.000341317
Trapezoidal zložený vzťah, $h = 0.1$	1.30434	0.0111519	0.00391001
Simpson zložený vzťah, $h = 0.1$	1.30828	0.000142858	0.0000286843

Príklad 2

Integrujte funkciu $f(x) = \sin(\pi x)$ všetkými metódami na [1, 2]. Vo všetkých prípadoch vypočítajte odhad chyby a porovnajte ho so skutočnou chybou.
POZOR: Výsledkom určitého integrálu môže byť aj záporná hodnota.

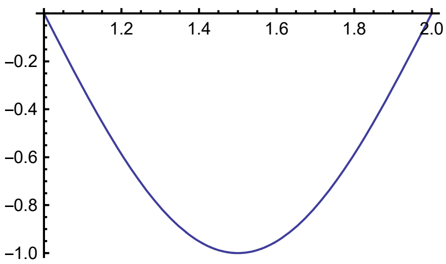
```
presna = Integrate[Sin[Pi x], {x, 1, 2}]
```

$$-\frac{2}{\pi}$$

```
presna = Integrate[Sin[Pi x], {x, 1, 2}] // N
```

-0.63662

```
Plot[Sin[Pi x], {x, 1, 2}]
```



Príklad 3

Príklad 3

Integrujte funkciu $f(x) = 1 + e^{-x}\cos(4x)$ všetkými metódami na [1, 3]. Vo všetkých prípadoch vypočítajte odhad chyby a porovnajte ho so skutočnou chybou

Príklad 4

Integrujte funkciu $f(x) = 1 + e^{-x}\sin(2x)$ všetkými metódami na [2, 3]. Vo všetkých prípadoch vypočítajte odhad chyby a porovnajte ho so skutočnou chybou

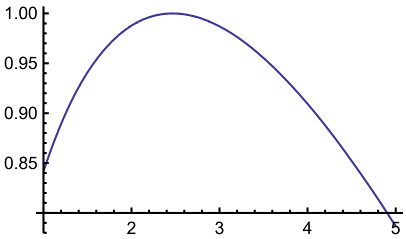
Príklad 5

Integrujte funkciu $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$ všetkými metódami na [1, 5]. Vo všetkých prípadoch vypočítajte odhad chyby a porovnajte ho so skutočnou chybou

```
f[x_] = Sin[Sqrt[x]]
```

Sin[$\sqrt{x}$]

```
Plot[f[x], {x, 1, 5}, PlotRange → All]
```




```
Integrate[f[x], {x, 1, 5}]
```

$2\left(\text{Cos}[1] - \sqrt{5}\,\text{Cos}[\sqrt{5}] - \text{Sin}[1] + \text{Sin}[\sqrt{5}]\right)$

```
presna = Integrate[f[x], {x, 1, 5}] // N
```

3.73169

Trapezoidal jednoduchý vzťah

Integrujeme podľa vzťahu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$, v konkrétnom prípade teda $\int_1^5 f(x)\,dx = \frac{4}{2}(f(1) + f(5))$

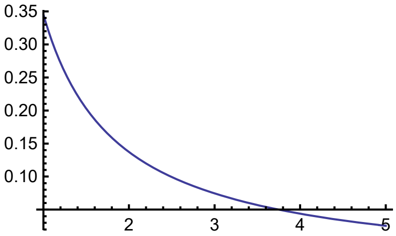
```
TrapezoidalSimple = 4 / 2 * (f[1] + f[5]) // N
```

3.25644

Odhad chyby

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{h^3}{12}\left|f^{(2)}(\xi)\right|$$

```
Plot[Abs[f''[x]], {x, 1, 5}]
```



Z obrázka vidíme, že maximum druhá derivácia nadobúda v bode 1

```
(4^3) / 12 * Abs[f''[1]] // N
```

1.84236

```
presna - TrapezoidalSimple
```

0.475249

Simpson jednoduchý vzťah

Integrujeme podľa vzťahu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$, v konkrétnom prípade teda $\int_1^5 f(x)\,dx = \frac{2}{3}\,(f(1) + 4 * f(3) + f(5))$

$a = 1$

$b = 5$

$h = (b - a)/2 = (5 - 1)/2 = 4/2 = 2$

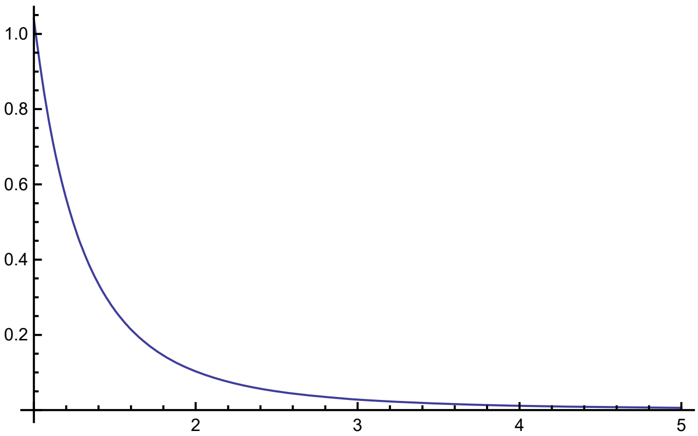
```
SimpsonSimple = 2 / 3 * (f[1] + 4 * f[3] + f[5]) // N
```

3.71755

Odhad chyby

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4 * f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{h^5}{90}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

```
Plot[Abs[f''''[x]], {x, 1, 5}, PlotRange → All]
```



Odhad chyby určíme podľa vzťahu $\frac{h^5}{90}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$

```
2^5 / 90 Abs[D[f[x], {x, 4}] /. x → 1] // N
```

```
0.369851
```

Vidíme, že odhad chyby vypočítaný podľa vzorca je horší ako skutočná chyba, ktorej sme sa dopustili.

```
Abs[presna - SimpsonSimple]
```

```
0.014138
```

Simpson $\frac{3}{8}$ jednoduchý vzťah

Integrujeme podľa vzťahu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3*f\left(a + \frac{1}{3}(b-a)\right) + 3*f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) + f(b)\right)$, v konkrétnom prípade teda

$a = 1$

$b = 5$

$h = (b-a)/3 = (5-1)/3 = 4/3$

Integrál môžeme zapísať aj v tvare:

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3*f(a+h) + 3*f(a+2h) + f(b)\right)$,

čiže

$\int_1^5 f(x)\,dx = \frac{3*\frac{4}{3}}{8}\left(f(1) + 3*f(1+4/3) + 3*f(1+8/3) + f(5)\right)$

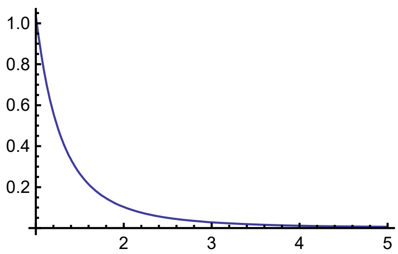
```
Simpson38Simple = 3 * (4 / 3) / 8 * (f[1] + 3 * f[1 + 4 / 3] + 3 * f[1 + 2 * 4 / 3] + f[5]) // N
```

```
3.7248
```

Odhad chyby

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3*f\left(a + \frac{1}{3}(b-a)\right) + 3*f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) + f(b)\right) - \frac{3h^5}{80}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

```
Plot[Abs[f''''[x]], {x, 1, 5}, PlotRange → All]
```



Odhad chyby určíme podľa vzťahu $\frac{3\,h^5}{80}\left|f^{(4)}(\xi)\right|$

```
3 × (4 / 3) ^5 / 80 Abs[D[f[x], {x, 4}] /. x → 1] // N
```

```
0.164378
```

Vidíme, že odhad chyby vypočítaný podľa vzorca je horší ako skutočná chyba, ktorej sme sa dopustili.

```
Abs[presna - Simpson38Simple]
0.00689266
```

Boole jednoduchý vzťah

Integrujeme podľa vzťahu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\left(7f(a) + 32*f\left(a+\tfrac{1}{4}(b-a)\right) + 12*f\left(a+\tfrac{2}{4}(b-a)\right) + 32*f\left(a+\tfrac{3}{4}(b-a)\right) + 7f(b)\right),$$

$a = 1$

$b = 5$

$h = (b-a)/4 = (5-1)/4 = 4/4 = 1$

Integrál môžeme zapísať aj v tvare

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\left(7f(a) + 32*f(a+h) + 12*f(a+2h) + 32*f(a+3h) + 7f(b)\right)$$

v konkrétnom prípade teda $\int_1^5 f(x)\,dx = \frac{2*1}{45}(7*f(1) + 32*f(2) + 12*f(3) + 32*f(4) + 7*f(5))$

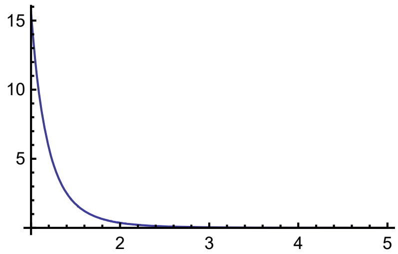
```
BooleSimple = (2 * 1) / 45 * (7 * f[1] + 32 * f[2] + 12 * f[3] + 32 * f[4] + 7 f[5]) // N
3.73102
```

Odhad chyby

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$\frac{2h}{45}\left(7f(a) + 32*f\left(a+\frac{1}{4}(b-a)\right) + 12*f\left(a+\frac{2}{4}(b-a)\right) + 32*f\left(a+\frac{3}{4}(b-a)\right) + 7f(b)\right) - \frac{8h^7}{945}\left|f^{(6)}(\xi)\right|$$

```
pom = D[f[x], {x, 6}];
Plot[Abs[pom], {x, 1, 5}, PlotRange → All]
```



Odhad chyby určíme podľa vzťahu $\frac{8h^7}{945}\left|f^{(6)}(\xi)\right|$

```
8 × 1^7 / 945 Abs[D[f[x], {x, 6}] /. x → 1] // N
0.132201
```

Vidíme, že odhad chyby vypočítaný podľa vzorca je horší ako skutočná chyba, ktorej sme sa dopustili.

```
Abs[presna - BooleSimple]
0.000671864
```

Trapezoidal zložený vzťah (Composite Trapezoidal)

Integrujeme podľa vzťahu $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,(f(a) + f(b))$ na každom čiastkovom intervale.

Na prvom intervale $[x_0, x_1]$ budeme integrovať podľa vzťahu

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,(f(x_0) + f(x_1))\,.$$

Všeobecne, na ľubovoľnom čiastkovom intervale počítame

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Budeme počítať s krokom $h = 0.1$, lebo $x_{i+1} - x_i = h$.

Všeobecný vzťah na výpočet má tvar

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)}_{\text{vnútorné body}} + f(b)\right)$$

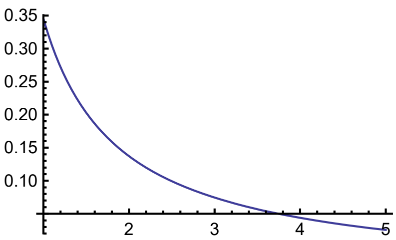
```
TrapezoidalComposite = 0.1 / 2 * (f[1] + 2 * Sum[f[x], {x, 1.1, 4.9, 0.1}] + f[5]) // N
```

3.73135

Odhad chyby

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2*\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)}_{\text{vnútorné body}} + f(b)\right) - \frac{(b-a)*h^2}{12}\left|f^{(2)}(\xi)\right|$$

```
Plot[Abs[f''[x]], {x, 1, 5}]
```



$f''(x)$ je nadobúda svoje maximum na intervale $[1, 5]$ v bode $x = 1$. Maximum má hodnotu $f''(1)$.

```
Abs[(5 - 1) * (0.1^2) / 12 * f''[1]] // N
```

0.00115148

```
presna - TrapezoidalComposite
```

0.000340088

Simpson zložený vzťah (Composite Simpson)

Integrujeme podľa vzťahu $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$ na každom čiastkovom intervale.

Na prvom intervale $[x_0, x_1]$ budeme integrovať podľa vzťahu

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,(f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2)).$$

Všeobecne, na ľubovoľnom ďalšom čiastkovom intervale počítame

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,(f(x_i) + 4 f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))$$

$h = 0.1$ 0.2

$2h$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$[x_0\ x_1]$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,(f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2))$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,(f(x_i) + 4 f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}))$$

Budeme počítať s krokom $h = 0.1$. Základný blok bude mať dĺžku 0.2.

POZOR: nezaudnite, že zloženú Simpsonovu metódu sme odvodzovali po blokoch, základný blok sa skladal z dvoch jednoduchých blokov, blok mal dĺžku 2 h.

Všeobecný vzťah na výpočet má tvar

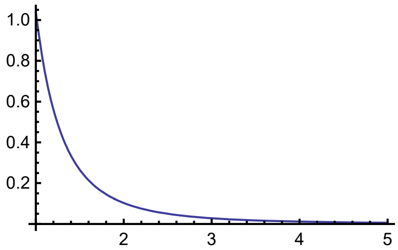
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4 * \underbrace{\sum_{i=1}^{2n-1}}_{\substack{\text{vnútorné}\\ \text{nepárne body}\\ s\text{ krokom } 2h}} f(x_i) + 2 * \underbrace{\sum_{i=2}^{2n-2}}_{\substack{\text{vnútorné}\\ \text{párne body}\\ s\text{ krokom } 2h}} f(x_i) + f(b) \right) - \frac{(b-a) * h^4}{180} \left| f^{(4)}(\xi) \right|$$

```
SimpsonComposite = 0.1 / 3 *
   (f[1] + 4 * Sum[f[x], {x, 1.1, 4.9, 0.2}] + 2 * Sum[f[x], {x, 1.2, 4.8, 0.2}] + f[5]) // N
```

3.73169

výpočet a odhad chyby

```
Plot[Abs[f''''[x]], {x, 1, 5}, PlotRange → All]
```



dosadíme do vzťahu $\frac{(b-a) * h^4}{180} \left| f^{(4)}(\xi) \right|$, krok $h = 0.1$

```
((5 - 1) * 0.1^4 / 180 ) Abs[D[f[x], {x, 4}] /. x → 1] // N
```

2.31157×10^{-6}

Vidíme, že odhad chyby vypočítaný podľa vzorca je horší ako skutočná chyba, ktorej sme sa dopustili. Skutočná chyba je úplne maličká - výpočet je super presný.

```
presna - SimpsonComposite
```

2.39984×10^{-7}

Porovnanie výsledkov

Na záver urobíme porovnávaciu tabuľku- rovnako ako v príklade 1