Digitale Signalverarbeitung WS 2022/23 – 1. Aufgabe

Zeitdiskrete LTI-Systeme

Gruppennummer 21
Stefan Haslhofer, k11908757
Jakob Aschauer, k12007322

---

1. Aufgabe

Approximation eines Sägezahnsignals mittels endlicher Fourier-Reihe

a) Anmerkung: In dieser Aufgabe sei eine Funktion zu implementieren.

Hier soll eine Matlab Funktion implementiert werden, welche die Werte einer beliebigen Fourierreihe zu bestimmten Zeitpunkten berechnet. Die Fourierreihe wird durch einen Koeffizientenvektor für jeweils a und b definiert.

Die koeffizienten a_k sind 0, da keine Cosinus Schwingung in die Fourier-Reihe einfließt.

b_k hingegen wird durch folgende Formel beschrieben:

$$b_k = \frac{2}{\pi} * \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

```
% function that calculates b vector for "Saegezahnsignal"
function ret = coeff (len)
  for k = 1:len
    ret(k) = 2/pi*(-1)^(k-1)/k;
  endfor
end
```

Listing 1: Funktion zur berechnung von b_k

Die Lösung dieses Beispiels finden Sie in `dsv1_1.m`.

b) Anmerkung: In dieser Aufgabe sei ein Plot (Abbildung 1) zu veranschaulichen, der die N = 10; 100; 10000 Harmonische einer Fourier Reihe darstellt.

Wir können feststellen, N10 wohl am exaktesten dargestellt werden kann. Dies liegt daran, dass diese eine geringere Frequenz aufweist und deswegen besser abgetastet werden kann.

Bei N100 hingegen liegen die Spitzenwerte nicht bei 1 sondern nur bei 0.7.

N10000 wird als einfache gerade ($x(t) = 0$) dargestellt, was darauf zurückzuführen ist, dass die Abtastrate genau der Frequenz des Sägezahnsignals entspricht. D.h. die Abtastung erfolgt immer genau am Ende einer Periode, wo der Funktionswert immer 0 ist.

Die Lösung dieses Beispiels finden Sie in `dsv1_1.m`.

c) Anmerkung: In dieser Aufgabe seien diverse Plots zu veranschaulichen.

Abbildung 2 zeigt die Fourier-Koeffizienten a_k und Abbildung 3 zeigt die Fourier-Koeffizienten b_k bis $k = 50$

Da die Sägezahnfunktion keine Cosinus Komponente hat ist a_k dauerhaft 0. Der Absolutbetrag von b_k nimmt mit steigendem k ab, außerdem wechselt das Vorzeichen.

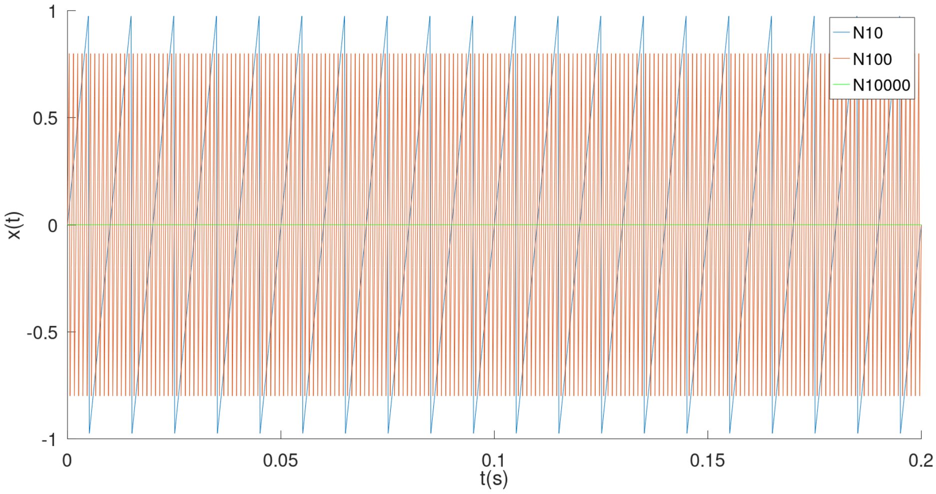

Abbildung 1: Darstellung der Fourier Reihen für N = 10; 100; 10000 Harmonische.

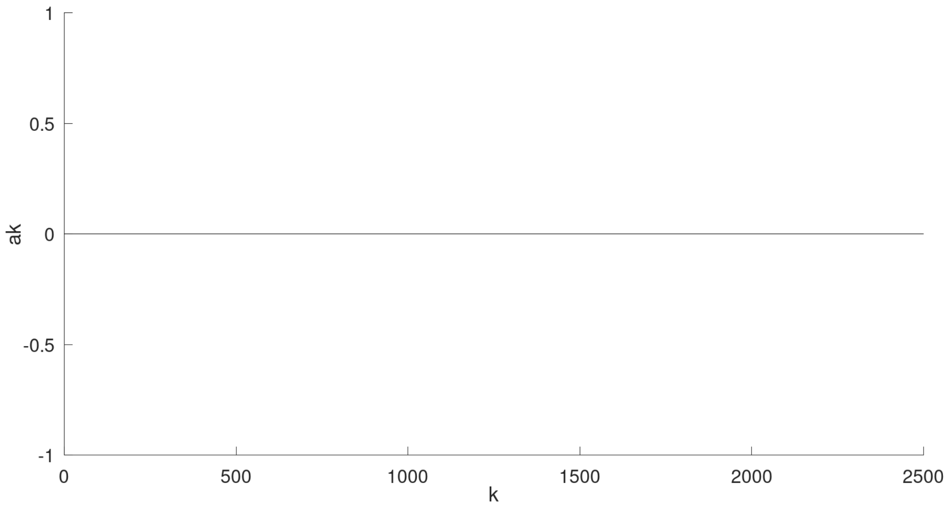

Abbildung 2: Darstellung der Fourier-Koeffizienten a_k.

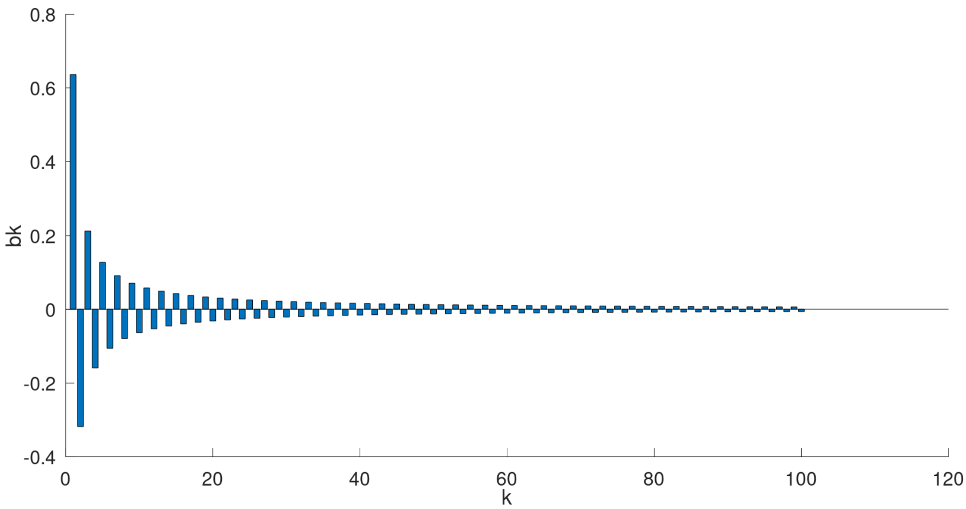

Abbildung 3: Darstellung der Fourier-Koeffizienten b_k bis $k = 50$.

d) Wir wissen bereits:

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}$$

Daraus folgt:

$$c_k = \frac{0 - j * \frac{(-1)^{k-1}}{k}}{2}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-j * (-1)^{k-1}}{2k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

e) Anmerkung: In dieser Aufgabe seien diverse Plots zu veranschaulichen.

Abbildung 4 zeigt die Spektren der Sägezahnfunktion von -40Hz bis 40Hz.

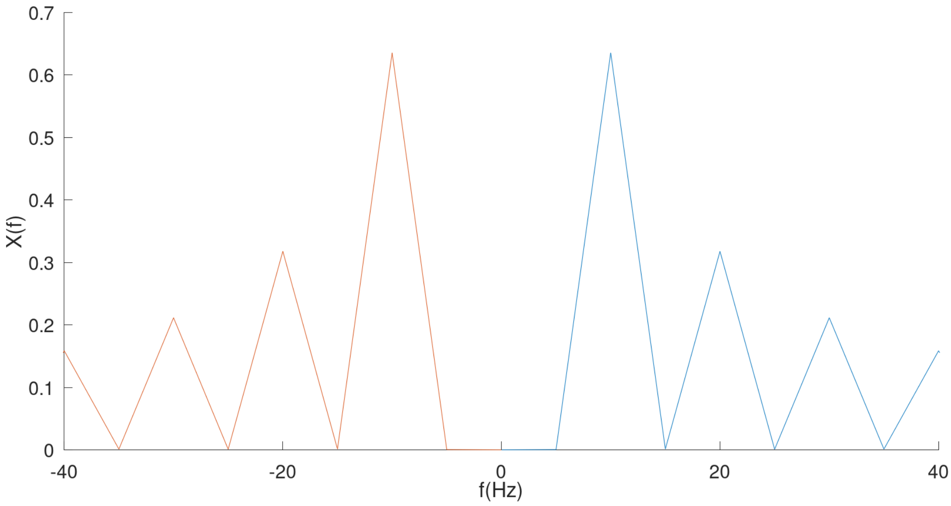

Abbildung 4: Fourier Transformation der Sägezahnfunktion mit $f_0 = 10$ von -40Hz bis 40Hz.

Die Lösung dieses Beispiels finden Sie in `dsv1_1e_fourier_transform.m`.

2. Aufgabe

Es soll folgende Aussage bewiesen werden:

$$x(t) = \hat{X} sin(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet X(f) = \hat{X}\frac{j}{2}(-\sigma(f - f_0) + \sigma(f + f_0))$$

Wir wissen bereits:

1. $$x(t) = \hat{X} e^{j2\pi f_0 t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet X(f) = \hat{X}\sigma(f - f_0)$$

2. $$sin(2\pi k f_0 t) = \frac{j}{2}(-e^{j2\pi k f_0 t} + e^{-j2\pi k f_0 t})$$

Aus 2. folgt:

$$x(t) = \hat{X} sin(2\pi f_0 t) = \hat{X}\frac{j}{2}(-e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$$

Betrachten wir nun 1. korrespondiert $e^{j2\pi f_0 t}$ mit $\sigma(f - f_0)$.
Dadurch gilt tatsächlich:

$$x(t) = \hat{X} sin(2\pi f_0 t) = \hat{X}\frac{j}{2}(-e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \hat{X}\frac{j}{2}(-\sigma(f - f_0) + \sigma(f + f_0))$$

3. Aufgabe

a) Für die gegebenen komplexen Zahlen C_1, C_2, C_3 sollen die Ausdrücke $C_4 bis C_8$ ohne Matlab gelöst werden. Weiters sollen C_1, C_2, C_3 in der komplexen Ebene dargestellt werden

$C_1 = -3 + j5$
$C_2 = \sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$
$C_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}$

$C_4 = C_1 + C_2 = -3 + j5 + \sqrt{2} * e^{-j\frac{3\pi}{4}} = -3 + 5j + (-1 - 1j) = -2 + 4j$

Für die Addition wird zuerst C_2 von der Polarform in die kartesische Form umgewandelt.

Anschließend werden jeweils die Realteile und die Imaginärteile miteinander addiert. Die Umwandlung von C_2 funktioniert folgendermaßen:
$C_2 = a + b * j$
$a = \sqrt{2} * cos(\frac{3\pi}{4}) = -1$
$b = \sqrt{2} * sin(-\frac{3\pi}{4}) = -1$
$C_2 = -1 - 1j$

$C_5 = C_1 * C_2 = (-3 + 5j) * (-1 - 1j) = ((-3) * (-1) - 5 * (-1)) + ((-3) * (-1) + (-1) * 5)j = (3 + 5) + (3 - 5)j = 8 - 5j$

$C_6 = |C_3|^2 = |(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}j)|^2 = a^2 + b^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$C_7 = arg(C_3) = arctan(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}) = arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$C_8 = \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1 * \overline{C_2}}{C_2 * \overline{C_2}} = \frac{(-3+5j)*(-1+1j)}{(-1-1j)*(-1+1j)} = \frac{((-3)*(-1)+5*(-1))+((-1)*5-(-3)*(-1))j}{(-1)^2+(-1)^2} = \frac{(3-5)+((-5)-3)j}{2} = \frac{(-2)+(-8)j}{2} = \frac{-2}{2} + \frac{-8}{2}j = -1 - 4j$
Darstellung von C_1, C_2, C_3 in der komplexen Ebene

b) Für die quadratische Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$ soll eine Lösung sowie deren Betrag ermittelt werden. Weiters soll die gefundene Lösung in der komplexen Ebene dargestellt werden.

Zum Lösen der Gleichung wird folgende Formel verwendet:
$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
$z_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$
$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$

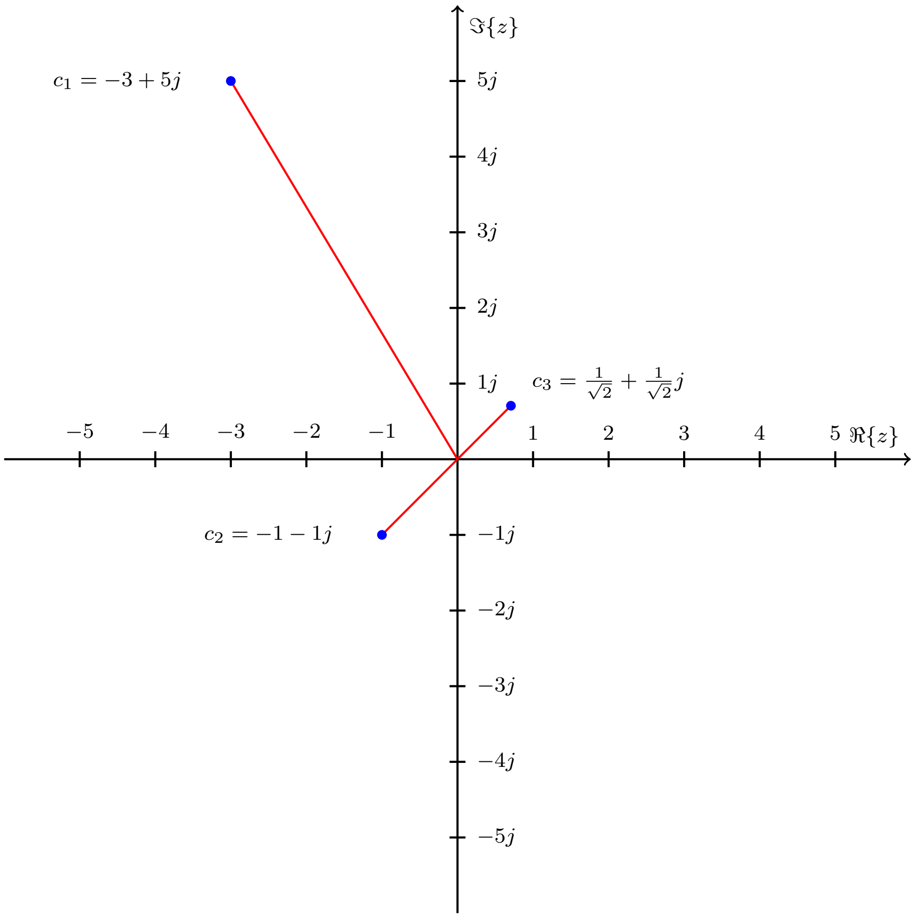

Abbildung 5: Darstellung der komplexen Lösungen z_1 und z_2 in der komplexen Ebene

$|z_1| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$

$|z_2| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$

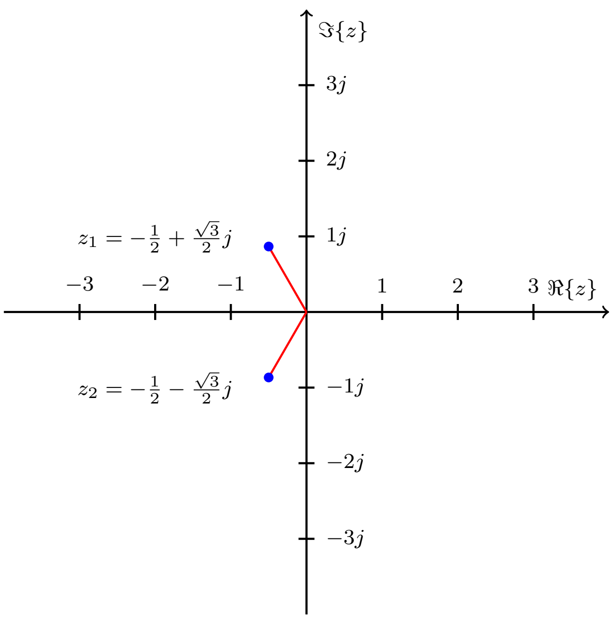

Abbildung 6: Darstellung der komplexen Lösungen z_1 und z_2 in der komplexen Ebene

c) In dieser Aufgabe seien Plots der komplexwertigen Funktionen $x_1(t)$ und $X_2(f)$ zu veranschaulichen

$x_1(t) = 2 * e^{j*t*2*\pi*f_0}$ für $f_0 = 1kHz$ und $0 < t < 3ms$

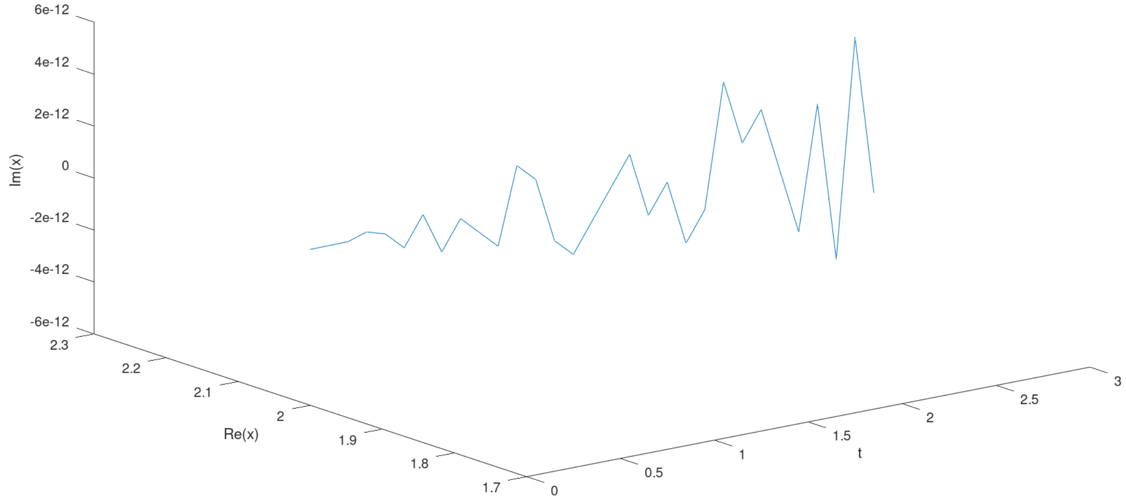

Abbildung 7: $x_1(t)$ in der komplexen Ebene Ri/Im

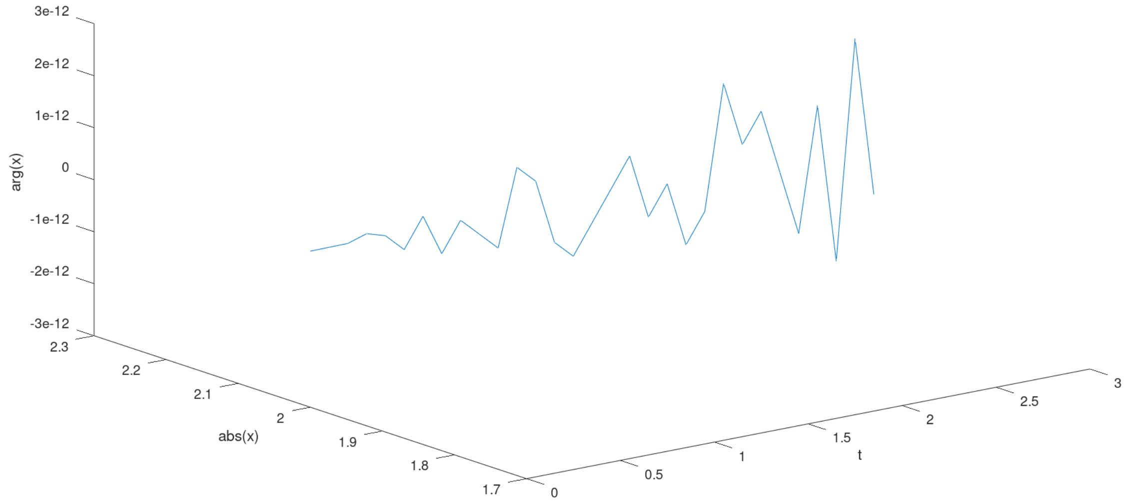

Abbildung 8: $x_1(t)$ in der komplexen Ebene abs/arg

$X_2(f) = sinc(\pi * f * T_0) * e^{-j*\pi*f*T_0}$ für $T_0 = 1ms$ und $-5kHz \leq f \leq 5kHz$

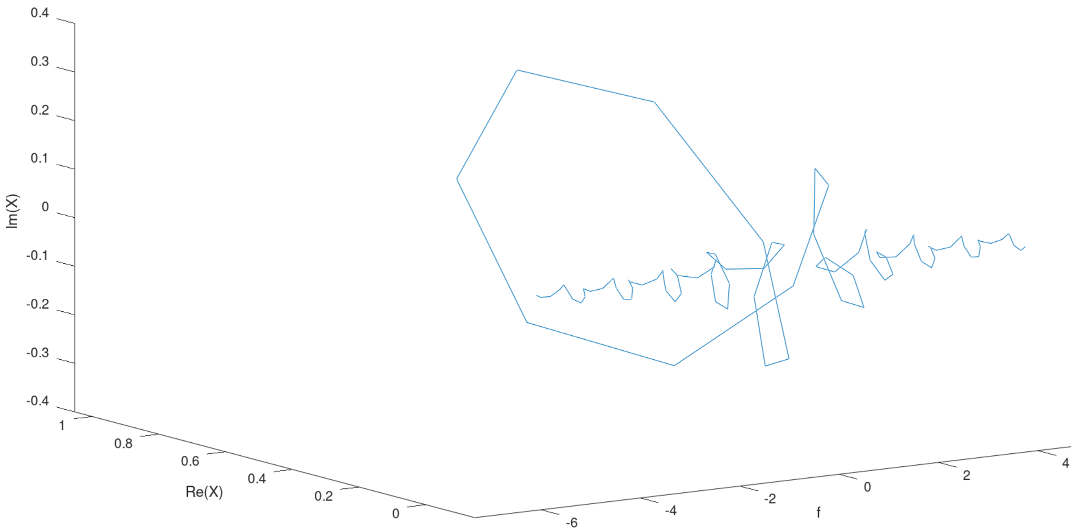

Abbildung 9: $X_2(f)$ in der komplexen Ebene Ri/Im

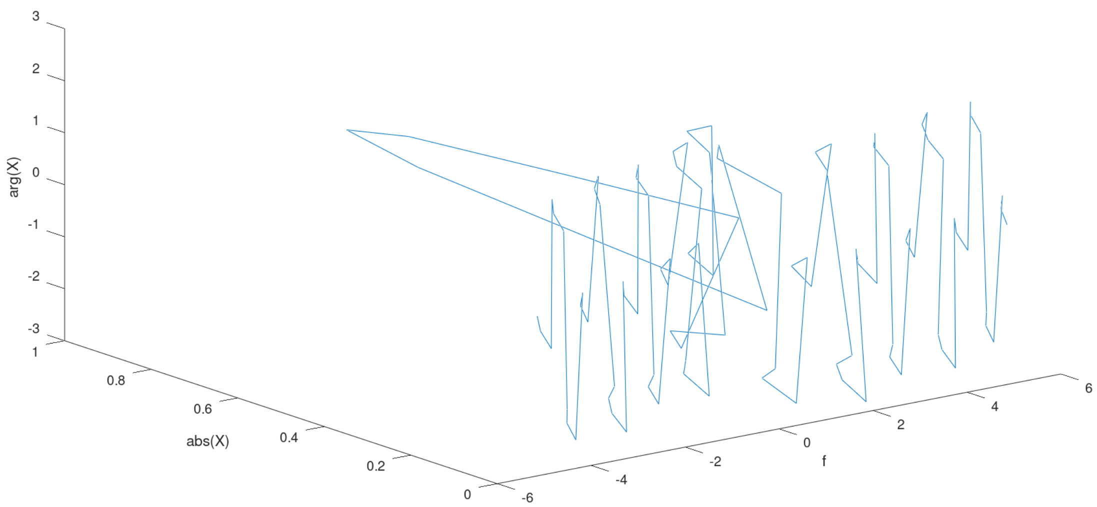

Abbildung 10: $X_2(f)$ in der komplexen Ebene abs/arg