Lineaire Algebra

Studiejaar '22-'23

HBO-ICT

Rolink, S.
Schweizer, D.

NHL STENDEN
university of applied sciences

PUBLISHED BY NHL STENDEN

NHLSTENDEN.COM

Made with LaTeX

Versie 5.10, mei 2023

Inhoudsopgave

1. Algemene Informatie

Doelgroep en instroomeisen

Dit dictaat is bedoeld voor 2e jaars studenten HBO-ICT die de specialisatie SE hebben gekozen. Voor deze module gelden geen instroomeisen. Maar het is wel erg handig als je de wiskunde uit het eerste jaar onder de knie hebt.

Leeruitkomsten

De leeruitkomsten van dit vak zijn dat je

- kunt rekenen met vectoren, matrices, lijnen en vlakken in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$
- matrices van afbeeldingen in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ kunt bepalen
- een determinant kunt uitrekenen
- kunt rekenen met quaternionen
- begrip hebt van de mogelijkheden die bovenstaande zaken bieden voor grafische applicaties

Symbolen

In de wiskunde wordt veel gebruik gemaakt van (misschien onbekende) symbolen. Het is belangrijk om daar precies mee om te gaan. Bijvoorbeeld: $\vec{a} \neq \hat{a}$, wat in normale mensentaal betekent: de *vector a* is iets anders dan de *eenheidsvector a*. De meeste symbolen in dit dictaat worden algemeen gebruikt in de wiskunde maar er zijn drie speciale alleen voor dit dictaat:

Met het teken Δ in de kantlijn wordt een definitie aangegeven.

Met het teken $\mathcal{V}$ in de kantlijn wordt een voorbeeld aangegeven.

Met het teken $\mathcal{E}$ in de kantlijn wordt een eigenschap aangegeven.

Zoals normaal in de wiskunde gebruiken we letters uit het Griekse alfabet, bijvoorbeeld α (alfa, de Griekse a) de letter die het alfabet z'n naam gegeven heeft, en λ (lambda, de Griekse l)

Δ Definitie

$\mathcal{V}$ Voorbeeld

$\mathcal{E}$ Eigenschap

En toch zijn soms zelfs wiskundigen slordig. Bijvoorbeeld bij het verschil tussen punten en vectoren. Een punt is heel iets anders dan een vector (zie figuur 2.1), en toch zullen de termen door elkaar gebruikt worden zolang er geen misverstand mogelijk is.

Wiskunde lezen

Bij wiskundige teksten gaat het lezen veel langzamer dan bij 'gewone' teksten. Het is niet raar als je een zin 3 keer moet lezen voor dat je hem snapt. (en dan nog kan het zijn dat je eerst de voorgaande zin nog een keer moet lezen). Kortom lezen en begrijpen van wiskunde kost tijd en oefening.

In de wiskunde is het gebruikelijk om van alles wat je opschrijft ook het bewijs te leveren. Dat doen we in dit dictaat niet, omdat dat te veel zou afleiden, wel wordt zoveel mogelijk uitleg gegeven. Wil je nagaan of de dingen die hier instaan kloppen, dan kun je of het zelf proberen te bewijzen, of opzoeken op internet.

Leeswijzer

Aan het einde van elk hoofdstuk staan opgaven èn 'extra opgaven'. Het idee is dat de gewone opgaven in principe genoeg oefening bieden om de stof te beheersen. Wil je toch nog meer oefenen of herhalen dan zijn daarvoor de extra opgaven. In hoofdstuk 2 wordt de basis van vectoren behandeld. Hoofdstuk 3, 4 en 5 gaan over matrices, de belangrijkste hulpmiddelen voor maken van grafische berekeningen, die in alle games en (bewegende) 3D-zaken gebruikt worden. Hoofdstuk 3 gaat over draaiingen en projectie, hoofdstuk 4 over spiegelen, translaties en samenstellingen. Hoofdstuk 5 gaat over een belangrijke eigenschap van matrices: determinanten. Hoofdstuk 6 gaat over een manier van rekenen, quaternionen, met behulp van complexe getallen, om de zogeheten 'Gimbal Lock' te vermijden. En in Hoofdstuk 7 tenslotte staan (korte) antwoorden op de opgaven bij elk hoofdstuk.

Dit dictaat is geschreven in LaTeX (spreek uit: lateg) met behulp van Neovim en Overleaf.

2. Vector

In dit hoofdstuk behandelen we vectoren en hoe vectoren in de wiskunde gebruikt worden.

Een *vector* is een verzameling getallen die in een rij of kolom gerangschikt zijn. In dit dictaat bestaat een vector alleen uit reële getallen (d.w.z. gehele getallen, breuken en getallen als π of $\sqrt{2}$). Alle reële getallen samen noemen we $\mathbb{R}$, de twee-dimensionale ruimte met reële getallen $\mathbb{R}^2$, en de drie-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$. Een vector wordt hier geschreven als een kleine letter met een pijltje erboven. Δ vector

Bijvoorbeeld $\vec{b}$ en:

V vector $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}$ is bijv. een vector in $\mathbb{R}^3$, een vector in de drie-dimensionale ruimte. $\vec{x}$ bestaat dus uit 3 getallen: x_1, x_2 en x_3. $\vec{v}$ is een vector in $\mathbb{R}^2$, een twee-dimensionale vector in het platte vlak (en bestaat dus ook maar uit twee getallen: in dit geval x en y), $\vec{s}$ een concrete vector in $\mathbb{R}^3$ en $\vec{a}$ een concrete vector in $\mathbb{R}^2$ (zie figuur 2.1).

2.1 Rekenen met vectoren

Je kunt op verschillende manieren rekenen met vectoren.

Optellen

Het optellen van vectoren doe je door de overeenkomstige elementen van de vectoren bij elkaar op te tellen. Als volgt:

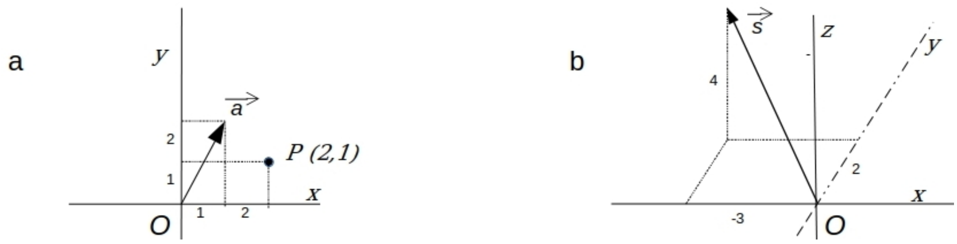

Figure 2.1: *(a) De vector $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^2$ is het 'pijltje' vanuit O, de oorsprong, naar het punt (1,2) met een lengte en een richting. Het punt P(2,1) heeft geen lengte of richting. (b) De vector $\vec{s}$ in $\mathbb{R}^3$ loopt iets naar achter omhoog.*

De som van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is:

Δ som

$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$

Je kunt 2 vectoren alleen maar bij elkaar optellen als ze dezelfde dimensie hebben, dat wil zeggen een gelijk aantal elementen.

Bijvoorbeeld in $\mathbb{R}^3$:

V som $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 \\ -1+6 \\ 2+-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

En in $\mathbb{R}^2$:

V som $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+7 \\ 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$ (zie figuur 2.2)

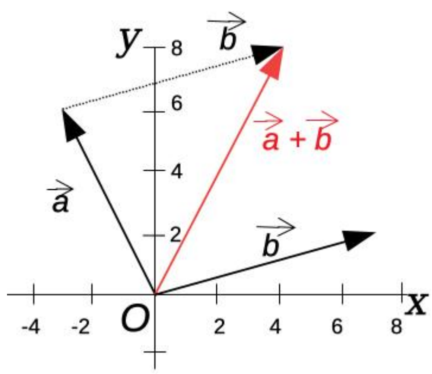

Figure 2.2: *De som van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is weer een vector. Ga voor jezelf na dat je de resulterende vector kunt krijgen door $\vec{a}$ 'op' $\vec{b}$ te plaatsen en andersom.*

Scalair product
Als je een vector vermenigvuldigt met een getal heet dat vermenigvuldigen met een scalar (scalair product). Bij scalaire vermenigvuldiging worden alle elementen van de vector met datzelfde getal vermenigvuldigd.

Het scalair product van een getal c en een vector $\vec{a}$ is: Δ scalair product

$$c \cdot \vec{a} \;=\; c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Ter voorbeeld, als $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $c = -2$, dan is $c \cdot \vec{a}$:

V scalair product

$$c \cdot \vec{a} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot -4 \\ -2 \cdot -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(Zie ook figuur 2.3)}$$

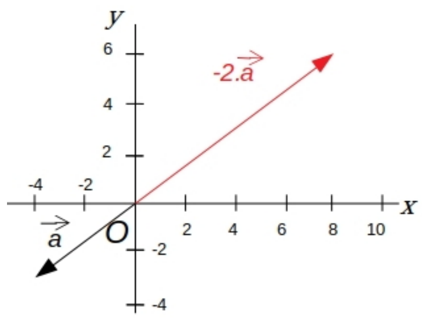

Figure 2.3: *Het scalair product van -2 en $\vec{a}$.*

Verschil
Vectoren van elkaar aftrekken doe je door de overeenkomstige elementen van elkaar af te trekken:

Het verschil tussen twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is: Δ verschil

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Een voorbeeld in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ -1-6 \\ 2--4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

V verschil $\mathbb{R}^3$

En een voorbeeld in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-7 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(zie ook figuur 2.4)}$$

V verschil $\mathbb{R}^2$

Net zo als bij het optellen van vectoren gedlt bij het aftrekken dat alleen vectoren met dezelfde dimensie van elkaar kunnen worden afgetrokken. Zoals je in figuur 2.4 kunt zien is het verschil van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ hetzelfde als het optellen van de vectoren $\vec{a}$ en $-\vec{b}$. (vergelijk met figuur 2.2)

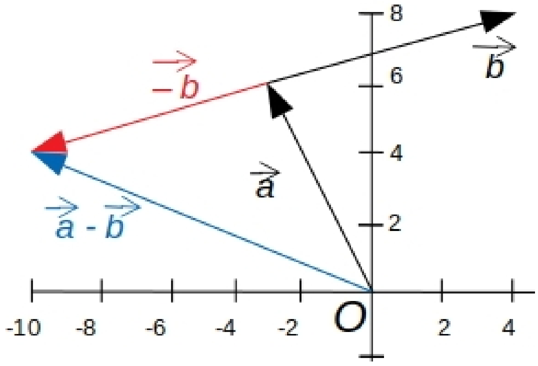

Figure 2.4: *Het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+-\vec{b}$.*

Inproduct

Je kunt niet zomaar 2 vectoren met elkaar vermenigvuldigen. Maar er zijn toch twee manieren om iets te doen wat er op lijkt: Het inwendig en het uitwendig product, ook wel inproduct en uitproduct genoemd. Het inproduct van twee vectoren is een getal(!), geen vector. We noteren het inproduct als: $(\vec{a},\vec{b})$ en we berekenen het als volgt: (We gebruiken hier stippeltjes . . . en het subscript $_n$ om aan te geven dat het over òf 2 òf 3 òf nog meer dimensies kan gaan)

Het inproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is:

Δ inproduct

$$(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$$

Bijvoorbeeld, als $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix}$ dan is $(\vec{a},\vec{b})$:

V inproduct

$$(\vec{a},\vec{b})=3\cdot 0+-1\cdot 6+2\cdot -4=0-6-8=-14$$

Loodrechte vectoren

Twee vectoren staan loodrecht op elkaar als de hoek tussen beide vectoren 90° is. Dat leidt de volgende belangrijke eigenschap van het inproduct:

ε inproduct Als $(\vec{a},\vec{b})=0$, *dan en slechts dan als* staat $\vec{a}$ loodrecht op $\vec{b}$ (voor $\vec{a}\neq\vec{0}$ en $\vec{b}\neq\vec{0}$).

Δ Loodrecht Oftewel in wiskundetaal:

$$(\vec{a},\vec{b})=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

Bijvoorbeeld, stel dat $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ dan is $(\vec{a},\vec{b})$:

V loodrecht

$(\vec{a},\vec{b})=1\cdot 2+-2\cdot 1=0$ (Zie ook figuur 2.5)

Uitproduct

De andere manier waarop je 2 vectoren kunt 'vermenigvuldigen' heet het uitproduct of kruisproduct. Het uitproduct van 2 vectoren levert weer een vector op. Het uitproduct is alleen maar gedefinieerd in $\mathbb{R}^3$.

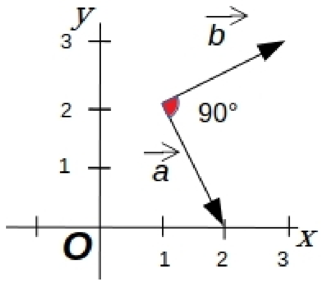

Figure 2.5: *De vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ staan loodrecht op elkaar.*

Het uitproduct van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is: Δ uitproduct

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\cdot b_3 - a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1 - a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Bijvoorbeeld, als $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, dan is $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$: $\mathcal{V}$ uitproduct

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 4\cdot -2 \\ 4\cdot 3 - -1\cdot 1 \\ -1\cdot -2 - \cdot .3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Een belangrijke eigenschap van het uitproduct is de volgende: $\mathcal{E}$ uitproduct

De vector $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ en loodrecht op $\vec{b}$

Neem bijv.: $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ als hierboven,dan is: $\mathcal{V}$ loodrecht

$$\begin{aligned}(\vec{c},\vec{a}) &= 10\cdot -1 + 13\cdot 2 - 4\cdot 4 \\ &= -10 + 26 - 16 \\ &= 0\end{aligned}$$

en:

$$\begin{aligned}(\vec{c},\vec{b}) &= 10\cdot 3 + 13\cdot -2 - 4\cdot 1 \\ &= 30 - 26 - 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

2.2 Vectoren en meetkunde

Er bestaan een aantal meetkundige operaties die we op vectoren kunnen toepassen. Om te beginnen, de norm (of lengte) van een vector.

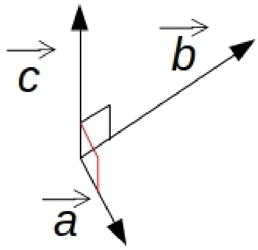

Figure 2.6: *De vector $\vec{c}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ **en** $\vec{b}$.*

Norm

De norm van een vector is de lengte daarvan. Dat is in $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ makkelijk voor te stellen: je neemt gewoon de "lengte van het pijltje". De norm wordt geschreven met 2 verticale streepjes:

Δ norm De norm van een vector $\vec{a}$ is:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \ldots + {a_n}^2}$$

Ter voorbeeld, als $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan is $|\vec{a}|$:

V norm

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

En dit principe werkt ook met hogere dimensies:

$$\text{Als } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dan is } |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-3)^2 + 4^2 + (-1)^2} = 6$$

Eenheidsvector

Δ eenheidsvector Soms is het nodig om vectoren met lengte 1 te hebben: Een eenheidsvector is een vector met lengte 1. Een eenheidsvector wordt genoteerd met een accent circonflexe (^ , dakje).

Bijvoorbeeld:

V eenheidsvector

$$\hat{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Een willekeurige vector $\vec{v}$ is te schalen naar een eenheidsvector door $\vec{v}$ te vermenigvuldigen met $\frac{1}{\text{norm}} = \frac{1}{|\vec{v}|}$. Dat wil zeggen $\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$, oftewel: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

De berekening van een eenheidsvector in 5 dimensies gaat als volgt, als:

V eenheidsvector

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{dan is } |\vec{v}| = 6 \quad \text{(zie boven)}$$

en is $\hat{v}$:

$$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/6 \\ 1/6 \\ -3/6 \\ 4/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/6 \\ -1/2 \\ 2/3 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

Hoek tussen twee vectoren

We kunnen het inproduct gebruiken om de hoek tussen twee vectoren te berekenen. De formule voor de hoek tussen vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gebruikt het inproduct en de norm: Δ hoek

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Daarbij is α (*alfa*) de hoek tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. En cos staat voor cosinus, een maat voor de hoek, die je eenvoudig met je rekenmachine kunt uitrekenen. Zie figuur 2.7

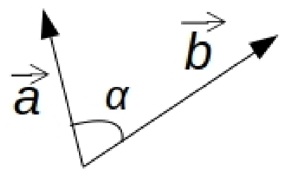

Figure 2.7: *Met α geven we de hoek tussen twee vectoren aan.*

De berekening van een hoek tussen twee vectoren gaat als volgt.

Stel, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan is $(\vec{a}, \vec{b})$: V hoek

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot -3 + -2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = -2$$

De lengte van de twee vectoren zijn:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 0 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Invullen in de formule levert: $\cos\alpha = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15}$. Met de rekenmachine berekenen we het aantal graden van de hoek: $\alpha = \cos^{-1}(-\frac{2}{15}) \approx 97.7°$

2.3 Vectorvoorstelling van lijn en vlak

Uit de lessen Wiskunde Basis is bekend dat de vergelijking van een lijn in $\mathbb{R}^2$ in het algemeen $y = ax + b$ is. Daarnaast bestaan er vectorvoorstellingen en vergelijkingen van lijnen en vlakken.

2.3.1 Definities lijn

Δ lijn $\mathbb{R}^2$ De *vergelijking* van een lijn l in $\mathbb{R}^2$ is:

$$y = ax + b$$

Met a de richtingscoëfficiënt en b een constante (het snijpunt met de y-as).

Ter voorbeeld, neem de lijn l:

V lijn $\mathbb{R}^2$

$$l : y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Hiervan is de richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ en het snijpunt met de y-as 4. (zie ook figuur 2.8)

Δ lijn $\mathbb{R}^2$ De *vectorvoorstelling* van een lijn l in $\mathbb{R}^2$ is:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \qquad \text{of: } \vec{x} = \vec{b} + \lambda\vec{r}$$

Met $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en beginvector (ook wel steunvector genoemd) $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, richtingsvector $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ en λ (lambda) een variabel getal. Let op het verschil tussen een richtings*vector* en een richtings*coëfficiënt*.

Een voorbeeld van een vectorvoorstelling is: $m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zie figuur

V lijn $\mathbb{R}^2$ 2.8. De richtingsvector van m is $\overrightarrow{rv_m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en de beginvector $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

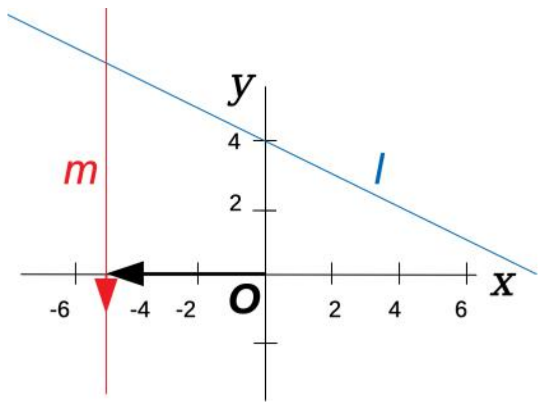

Figure 2.8: *De lijn $l : y = -\frac{1}{2}x + 4$. met $rc = -\frac{1}{2}$ en (los daarvan) de lijn m met de rode richtingsvector en zwarte beginvector.*

2.3.2 Definities vlak

Δ vlak $\mathbb{R}^3$ De *vergelijking* van een vlak V in $\mathbb{R}^3$ is:

$$ax + by + cz = d \qquad (a,\ b,\ c \text{ en } d \text{ zijn constanten})$$

Een voorbeeld van een vergelijking van een vlak V is:

$$V : 2x - 3y + 7z = -5$$ **V vlak $\mathbb{R}^3$**

De *vectorvoorstelling* van een vlak V in $\mathbb{R}^3$ is: **Δ vlak $\mathbb{R}^3$**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \qquad \text{of: } \vec{x} = \vec{b} + \lambda\, \vec{v} + \mu\, \vec{w}$$

Met $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

λ en μ zijn variabele getallen (μ, spreek uit: muu, is de Griekse letter m). En $\vec{b}$ is een constante beginvector en $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zijn richtingsvectoren van vlak V.

Een voorbeeld van een vectorvoorstelling van een vlak V is:

$$V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ **V vlak $\mathbb{R}^3$**

Wat λ (spreek uit: lambda) en μ (spreek uit: muu) zijn wordt verderop bij de berekeningen uitgelegd (zie ook figuur 2.9). In lineaire algebra heb je soms de vergelijking, soms de vectorvoorstelling nodig.

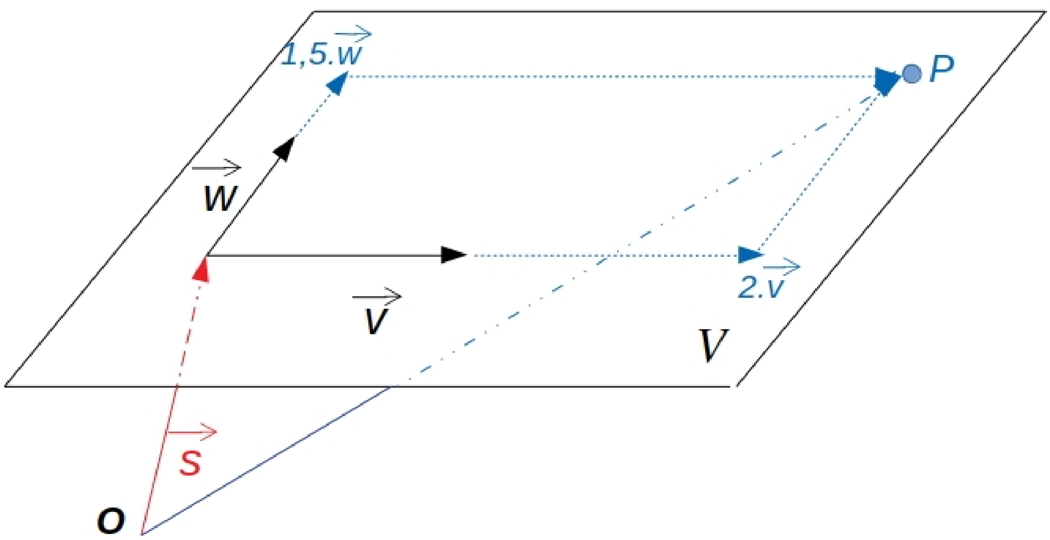

Figure 2.9: *Het (oneindige) vlak V heeft de beginvector $\vec{s}$, en richtingsvectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$. Het punt P ligt op V en kun je vanuit **O**, de oorsprong bereiken door $\vec{s} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$ met $\lambda = 2$ en $\mu = 1{,}5$. Elk punt van V is op zo'n manier te bereiken. Met andere woorden $V : \vec{x} = \vec{s} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$.*

2.3.3 Berekeningen lijn

In deze paragraaf wordt uitgelegd hoe je van een vergelijking een vectorvoorstelling maakt en omgekeerd, zowel voor een lijn in $\mathbb{R}^2$ als een vlak in $\mathbb{R}^3$.

Van vectorvoorstelling lijn naar vergelijking lijn:
Een voorbeeld van een vectorvoorstelling van een lijn l in $\mathbb{R}^2$ is:

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zie ook figuur 2.10. Dat betekent dat de lijn l door het punt $(1,2)$ gaat en als richtingsvector de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ heeft. λ is een parameter, dat wil zeggen dat om een punt op de lijn l te vinden mogen we een waarde voor λ kiezen (2, of 100, of $-\frac{2}{5}$, of ...). Bijvoorbeeld bij $\lambda = 3$:

$$\begin{aligned}
l &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
l &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
l &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 3 \end{pmatrix} \\
l &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \\
l &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vinden we het punt $(7,-1)$ en die dus ligt op de lijn l.

Hoe maken we een vergelijking van l? In een vergelijking komt geen λ voor, dus moeten we zorgen de λ uit de vectorvoorstelling "kwijt te raken". Als je goed naar de vectorvoorstelling van l kijkt, zie je dat het eigenlijk 2 vergelijkingen zijn, één voor de x-coördinaat en één voor de y-coördinaat:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$$

Dit is een stelsel van 2 vergelijkingen en kunnen we 'oplossen' door λ te elimineren ('weg te werken'). Daarvoor moeten een van beide vergelijkingen omzetten in de vorm: $\lambda =$ .... Bijv:

$$\begin{aligned}
x &= 1 + 2\lambda \\
x - 2\lambda &= 1 \\
-2\lambda &= 1 - x \\
\lambda &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x
\end{aligned}$$

Nu we de vergelijking van λ weten, kunnen we deze invullen in de tweede vergelijking (van y):

$$y = 2 - \lambda$$
$$y = 2 - (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x)$$
$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$
$$y = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

Op deze manier hebben we λ dus 'geëlimineerd'. De vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ is dezelfde lijn is als: $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, waar we mee begonnen, zie de tekening in figuur 2.10

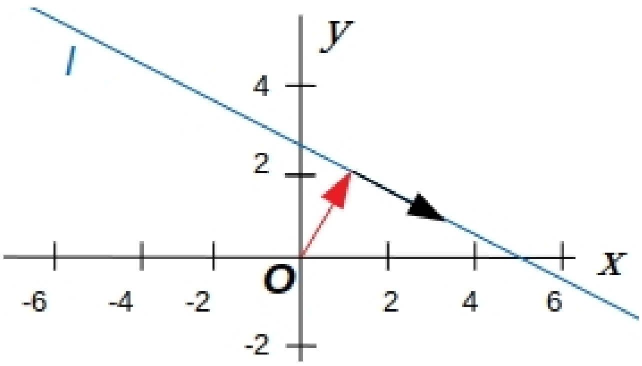

Figure 2.10: *De lijn $l: \; y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$. Let op de steunvector (rood) en de richtingsvector (zwart).*

De lijn l bestaat dus uit alle vectoren (punten) die te schrijven zijn als vectorvoorstelling $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, waarbij elk punt (x, y) waaruit die lijn bestaat voldoet aan de vergelijking: $l: \; y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Van vergelijking lijn naar vectorvoorstelling lijn:
Als we, omgekeerd, van een vergelijking een vectorvoorstelling willen maken moeten we zorgen dat er een parameter λ in de vectorvoorstelling komt. Neem als voorbeeld de vergelijking $y = 3x - 2$. We weten dat we een λ moeten hebben (invoeren). Stel daarvoor dat:

$$x = \lambda$$

Als we dit invullen in de vergelijking, volgt dat $y = 3\lambda - 2$. We hebben nu dus 2 vergelijkingen, een voor y en een voor x:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda - 2 \end{cases}$$

Anders geschreven:

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot \lambda \\ y = -2 + 3 \cdot \lambda \end{cases}$$

Dat schrijven we dan met behulp van vectoren:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.3.4 Berekeningen vlak

Van vergelijking vlak naar vectorvoorstelling vlak:

We hebben gezien dat $ax + by + cz = d$ een vergelijking van een vlak in $\mathbb{R}^3$ is. Net zo als bij een lijn moeten we om een vectorvoorstelling van een vergelijking te maken parameters invoeren (bij een vlak hebben we 2 parameters nodig omdat een vlak twee-dimensionaal is). Die parameters noemen we λ en μ .

Neem als voorbeeld het vlak: $-x + 2y - 2z = 6$.

We stellen nu dat:

$$x = \lambda$$
$$y = \mu$$

Dan kunnen we z uitdrukken in λ en μ. Immers, we vullen $x = \lambda$ en $y = \mu$ in in de vergelijking $-x + 2y - 2z = 6$. Dan geldt dus: $-\lambda + 2\mu - 2z = 6$, dit hoeven dan alleen nog maar even om te schrijven naar de vorm $z = ..$:

$$\begin{aligned} -\lambda + 2\mu - 2z &= 6 \\ 2\mu - 2z &= 6 + \lambda \\ -2z &= 6 + \lambda - 2\mu \\ z &= -3 - \frac{1}{2}\lambda + \mu \end{aligned}$$

In feite hebben we nu 3 vergelijkingen, namelijk:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -3 - \frac{1}{2}\lambda + \mu \end{cases}$$

anders geschreven:

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu \\ y = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \\ z = -3 - \frac{1}{2} \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \end{cases}$$

en dat kunnen we weer schrijven als:

$$V: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wat weer hetzelfde vlak is als waar we mee begonnen $V: -x + 2y - 2z = 6$. De vectorvoorstelling van een vlak kent dus *twee* richtingsvectoren. Zie figuur 2.9.

Van vectorvoorstelling vlak naar vergelijking vlak:
Omgekeerd nemen we de vectorvoorstelling van een vlak V,

bijvoorbeeld:

$$V: \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Om nu een vergelijking te krijgen moeten we λ en μ wegwerken (elimineren). Dat kan als we zien dat de vectorvoorstelling van V eigenlijk 3 vergelijkingen bevat:

$$\begin{cases} x = 1 + 0\lambda + 1\mu \\ y = 3 + 2\lambda + 1\mu \\ z = 6 + 1\lambda + 2\mu \end{cases}$$

Uit de 1^e vergelijking halen we μ:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 0\lambda + 1\mu \\ x &= 1 + \mu \\ x - \mu &= 1 \\ -\mu &= 1 - x \\ \mu &= -1 + x \end{aligned}$$

Dat kunnen we dan weer invullen in de 2^e en 3^e vergelijking:

$$\begin{aligned} y &= 3 + 2\lambda + (-1 + x) \\ y &= 3 + 2\lambda - 1 + x \\ y &= 2 + 2\lambda + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 6 + \lambda + 2(-1 + x) \\ z &= 6 + \lambda - 2 + 2x \\ z &= 4 + \lambda + 2x \end{aligned}$$

Hiermee hebben we 2 nieuwe vergelijkingen. Waarbij μ is geëlimineerd, maar λ nog niet:

$$\begin{cases} y = 2 + 2\lambda + x \\ z = 4 + \lambda + 2x \end{cases}$$

Hieruit kunnen we dan weer λ halen:

$$\begin{aligned} z &= 4 + \lambda + 2x \\ -\lambda + z &= 4 + 2x \\ -\lambda &= 4 + 2x - z \\ \lambda &= -4 - 2x + z \end{aligned}$$

Deze λ kunnen we dan weer invullen in de andere vergelijking:

$$
\begin{aligned}
y &= 2+2\lambda+x \\
y &= 2+2(-4-2x+z)+x \\
y &= 2+-8-4x+2z+x \\
y &= -6-3x+2z
\end{aligned}
$$

Die laatste vergelijking van y lijkt al heel erg op een vergelijking van een vlak. Het enige dat we nu nog hoeven doen is deze om te zetten naar de standaardvorm $ax+by+cz=d$:

$$
\begin{aligned}
y &= -6-3x+2z \\
3x+y &= -6+2z \\
3x+y-2z &= -6
\end{aligned}
$$

En daarmee hebben we de vergelijking van ons vlak bepaald!

2.4 Normaalvectoren

Om goed te kunnen rekenen met lijnen en vlakken hebben we zogeheten normaalvectoren nodig.

2.4.1 Normaal van lijn

Δ normaal lijn

De normaal of normaalvector van een lijn is: de vector $\vec{n}$ die loodrecht staat op de richtingsvector van de lijn. Voor het bepalen van de normaalvector zijn het inproduct en uitproduct handige gereedschappen.

Voorbeeld van een berekening van de normaal van een lijn: Stel we hebben de lijn $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, Zie ook figuur 2.11:

V normaal lijn

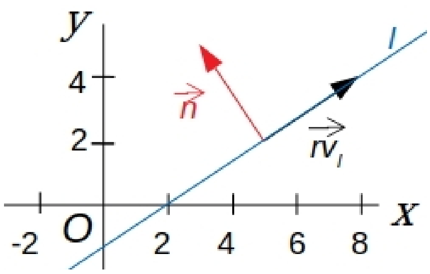

Figure 2.11: *De normaal $\vec{n}$ staat loodrecht op de richtingsvector van l.*

Dan is de richtingsvector van $l : \overrightarrow{rv_l} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Als je naar de lijn kijkt zie je misschien meteen dat $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ er loodrecht op staat. We kunnen het normaal van een lijn ook berekenen aan de hand van het inproduct, immers als daar 0 uitkomt, dan staan de beide vectoren haaks op elkaar.

Hiermee kunnen we ook onze stelling dat $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zou kunnen zijn, testen:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{rv_l}, \vec{n}) &= 3 \cdot -2 + 2 \cdot 3 \\ &= -6 + 6 \\ &= 0\end{aligned}$$

De uitkomst is 0, dus dat klopt. Maar wat nu als we het zo snel 'zien', en het gewoon willen berekenen? Dan kunnen we met behulp van het inproduct en de wetenschap dat er 0 zou moeten uitkomen, op zoek gaan dan een vector waarvoor dat geldt. We stellen dan: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$. Waarbij we dus op zoek moeten naar welke waarde die c heeft, als het inproduct van de vectoren 0 is:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{rv_l}, \vec{n}) &= 0 \\ (\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}) &= 0 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot c &= 0 \\ 3 + 2c &= 0 \\ 2c &= -3 \\ c &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Dus $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Mocht je het nu niet fijn vinden om met vectoren met breuken te rekenen, kunnen we $\vec{n}$ bijv. nog met 2 vermenigvuldigen om zo de breuk weg te halen (Voor het loodrecht zijn maakt het niet uit hoe lang de vector is namelijk):

$$\begin{aligned}\vec{n} &= 2.\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ \vec{n} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Normaal van lijn a.h.v. lineaire vergelijking

Voor het normaal bepalen van een lijn als we een lineaire vergelijking hebben, is een stuk minder rekenwerk. Deze kunnen we namelijk gewoon aflezen.

In het algemeen geldt voor een lineaire vergelijking $ax + by = c$ dat de normaal ervan is: $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Dus ter voorbeeld, is de vergelijking $3x - 4y = -7$, dan is het normaal van die lijn: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. $\mathcal{V}$ normaal lijn

2.4.2 Normaal van vlak

Om goed te kunnen rekenen met vlakken hebben we een normaalvector nodig. Δ normaal vlak
De normaal of normaalvector van een vlak $\vec{n}$ of $\overrightarrow{n_V}$ is: De vector $\vec{n}$ die loodrecht staat op *beide* richtingsvectoren van het vlak. Gelukkig hebben we daarbij ook nog de volgende handige eigenschap:

$\mathcal{E}$ normaal vlak

Als $V: ax+by+cz=d$ dan is: $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ de normaalvector van V.

Bijv. als $V: 7x+3y-z=-20$ dan is $\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\3\\-1\end{pmatrix}$ de normaalvector van V.

V normaal vlak

Let wel op: Alle x-, y- en z-waardes moeten dus aan dezelfde kant van het $=$-teken staan.

Maar wat als we niet de vergelijking maar de vectorvoorstelling van een vlak hebben? Dan kunnen we gebruik maken van de eigenschap dat het uitproduct van 2 vectoren loodrecht staat staat op beide richtingsvectoren.

Als $W: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ dan zijn de richtingsvectoren:

V normaal vlak

$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

en hun uitproduct is :

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot 2-1\cdot 1\\1\cdot 0-2\cdot 2\\2\cdot 1--3\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-4\\2\end{pmatrix}$$

en dus is $\vec{n}=\begin{pmatrix}-7\\-4\\2\end{pmatrix}$ de normaal vector van W. Zie figuur 2.12.

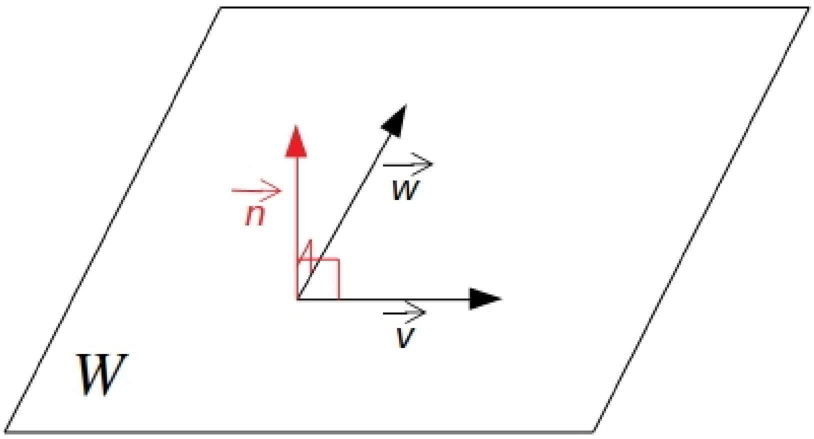

Figure 2.12: *De normaal van vlak W, $\vec{n}=\vec{v}\times\vec{w}$, staat loodrecht op de richtingsvectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$.*

Als we het normaal van het vlak weten, kunnen we ook vrij makkelijk de vergelijking van W bepalen. $\vec{n}=\begin{pmatrix}-7\\-4\\2\end{pmatrix}$ is dan makkelijk in te vullen in algemene vorm:

$ax+by+cz=d$, wordt dan: $-7x-4y+2z=d$. De constante d weten we uiteraard nog niet, maar deze kunnen we uitrekenen:

De vectorvoorstelling van het vlak was namelijk:

$$W:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Als we nu voor λ en μ beide 0 kiezen, dan is W:

$$\begin{aligned}W:\vec{x}&=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\\W:\vec{x}&=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\\W:\vec{x}&=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dus het punt $(0,1,-1)$ ligt dus op het vlak W, met deze wetenschap, kunnen we de missende constante d uitrekenen. We vullen dan gewoon het punt (de x-, y- en z-waarden ervan) in de vergelijking:

$$\begin{aligned}-7x-4y+2z&=d\\-7\cdot0-4\cdot1+2\cdot-1&=d\\0-4-2&=d\\d&=-6\end{aligned}$$

Dus de vergelijking voor W is dus $-7x-4y+2z=-6$.

2.5 Afstand van punt tot vlak

We hebben nu genoeg hulpmiddelen om in $\mathbb{R}^3$ de afstand van een punt tot een vlak uit te kunnen rekenen, zie ook figuur 2.13 en 2.14. Dat gaat in een aantal stappen:

(a) de vergelijking van een vlak bepalen
(b) de normaal van een vlak berekenen
(c) de lijn berekenen die loodrecht op het vlak staat en door P gaat
(d) x, y en z van de lijn l uitdrukken in λ
(e) het snijpunt S van de lijn door P en het vlak bepalen
(f) de afstand tussen P en het snijpunt S uitrekenen

We nemen als voorbeeld voor de berekening het punt P en het vlak V:

$$P:\begin{pmatrix}3\\6\\7\end{pmatrix}\qquad V:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix}$$

V afstand

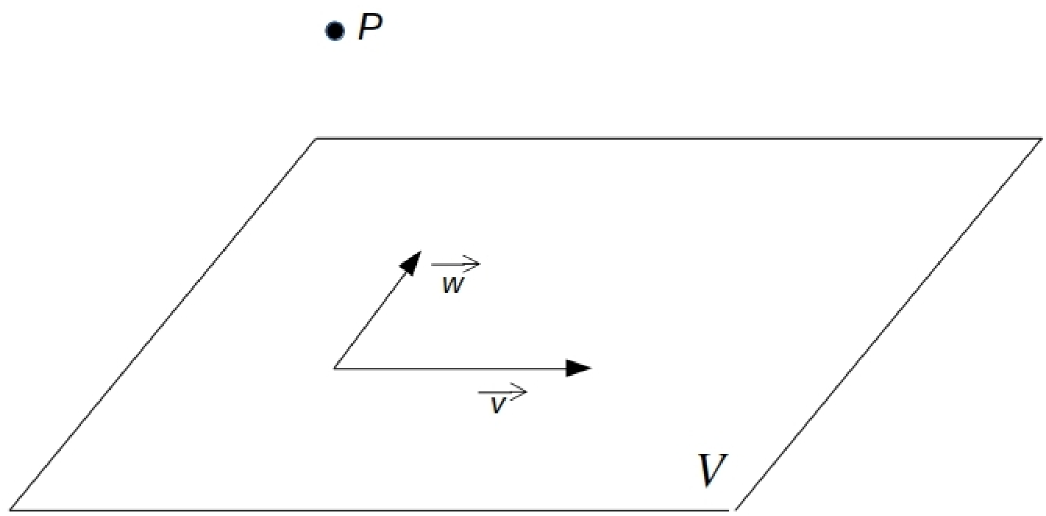

Figure 2.13: *Gevraagd: de afstand tussen P en V, (P is een punt dat boven het vlak V 'zweeft').*

(a) **de vergelijking van een vlak bepalen**

Omdat de vectorvoorstelling van het vlak gegeven is, moeten we daarvan eerst een vergelijking maken. We vinden met de methode van de paragraaf "normaal van vlak" (blz. 23) dat : $V : -x+3y+2z = 1$. Als de vergelijking van het vlak al gegeven is kun je deze stap overslaan natuurlijk.

(b) **de normaal van een vlak berekenen**

Als we de vergelijking van het vlak hebben is het berekenen van de normaal kinderspel. Immers de normaal wordt gegeven door de getallen die in de vergelijking van het vlak staan: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ de normaal vector van V.

(c) **de lijn berekenen die loodrecht op het vlak staat en door P gaat**

De lijn door het punt P die loodrecht op vlak V staat heeft als richtingsvector, de normaal van het vlak. Immers de normaal staat loodrecht op dat vlak. Dus $\overrightarrow{rv_l} = \vec{n}$. En de lijn moet door $P : (3,6,7)$ gaan. Dat betekent dat we $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ als steunvector voor de lijn kunnen gebruiken. Dus de vectorvoorstelling van de lijn is:

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d) **x, y en z van de lijn l uitdrukken in λ**

Net zoals bij een vlak in $\mathbb{R}^3$ bestaat de vectorvoorstelling van de lijn l eigenlijk uit 3 vergelijkingen:

$$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 6 + 3\lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$

(e) **het snijpunt van het vlak V en de lijn l door P bepalen**

Voor het snijpunt van l en V geldt dat het snijpunt zowel op de lijn l ligt als op het vlak V. Anders gezegd: De coördinaten van het snijpunt moeten voldoen aan bovenstaande 3 vergelijkingen van l, maar ook aan de vergelijking voor V. Met andere woorden: we kunnen de x, y en z van hierboven invullen in de vergelijking van het vlak:

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 1 \\ -(3-\lambda) + 3\cdot(6+3\lambda) + 2\cdot(7+2\lambda) &= 1 \\ 14\lambda + 29 &= 1 \\ 14\lambda &= -28 \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$$

(f) **de afstand uitrekenen**

We weten nu dat als $\lambda = -2$ we het snijpunt van l en V hebben. Wat betekent dat? Dat betekent dat als we beginnen in punt P en -2 keer de richtingsvector van l er bij op tellen we op het vlak V terecht komen. Anders gezegd de afstand tussen P en V is 2 keer de lengte van die richtingsvector. Oftewel: de afstand kunnen we bereken met: Afstand $= |\lambda| \cdot |\overrightarrow{rv_l}|$ (Zie ook figuur 2.14):

$$\begin{aligned} \text{Afstand} &= |\lambda| \cdot |\overrightarrow{rv_l}| \\ &= |-2| \cdot \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (2)^2} \\ &= 2 \cdot \sqrt{14} \\ &\approx 7.48 \end{aligned}$$

2.5.1 Extra voorbeeld

Omdat het berekenen van de afstand van een punt naar een vlak vaak lastig word gevonden, is hieronder nog een extra voorbeeld gegeven:

In dit voorbeeld berekenen we wederom de afstand van vlak V en punt P. Hierbij is het volgende gegeven:

V afstand

$$V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad P : \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Omdat het vlak als vectorvoorstelling is gegeven moet deze eerst worden omgeschreven naar vergelijking. Dit is te doen door in het stelsel vergelijkingen λ en μ

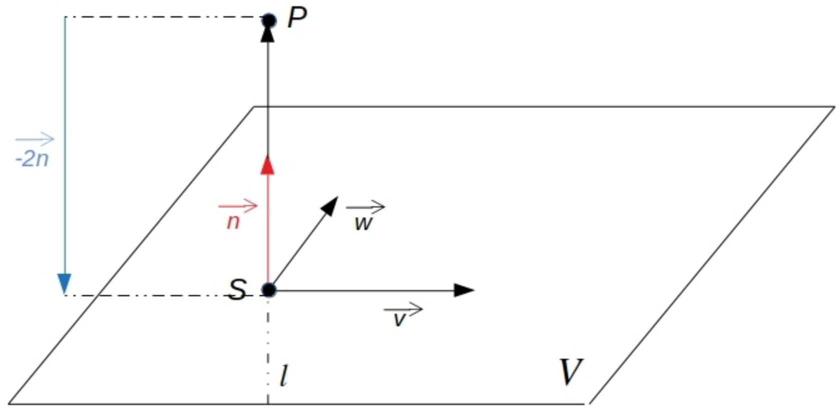

Figure 2.14: *We moeten vanuit P beginnend -2 keer de vector $\vec{n} = r\vec{v}_l$ afpassen om op V te komen. Anders gezegd: de normaal vector van V past precies 2 keer tussen V en P, en dus is de afstand $2 \cdot |\vec{n}| = 2 \cdot |r\vec{v}_l| = 2\sqrt{14}$.*

weg te werken. Eerst zetten we de vectorvoorstelling in een stelsel:

$$\begin{cases} x = -1 - 5\lambda + 2\mu \\ y = -2 + 8\lambda + 3\mu \\ z = 3\lambda - \mu \end{cases}$$

Als we nu de laatste vergelijking omschrijven naar $\mu = 3\lambda - z$ kunnen we μ substitueren. Dan krijgen we:

$$\begin{cases} x = -1 - 5\lambda + 2(3\lambda - z) = -1 + \lambda - 2z \\ y = -2 + 8\lambda + 3(3\lambda - z) = -2 + \lambda - 3z \end{cases}$$

Nu schrijven we de eerste vergelijking om tot $\lambda = x + 1 + 2z$ en substitueren we dit in de tweede. We vinden nu de vergelijking:

$$y = -2 + (x + 1 + 2z) - 3z$$
$$y = -1 + x - z$$

Dit kunnen we weer omschrijven naar: $x - y - z = 1$. Dit gebruiken we om de normaal van het vlak op te stellen, deze wordt gebruikt als richtingsvector van de lijn l:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dan kunnen we de vectorvoorstelling van de lijn l door punt P loodrecht op vlak V maken:

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Deze 3 vergelijkingen vullen we nu in, in de gevonden vergelijking zodat we λ kunnen uitrekenen:

$$\begin{aligned}(-3+\lambda)-(1-\lambda)-(7-\lambda) &= 1\\ -11+3\lambda &= 1\\ 3\lambda &= 12 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4\end{aligned}$$

Nu bereken we de afstand door de gevonden λ te vermenigvuldigen met de lengte van de normaal:

$$\begin{aligned}\text{afstand} &= 4\cdot|\overrightarrow{rv_l}|\\ &= 4\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}\\ &= 4\sqrt{3}\approx 6.93\end{aligned}$$

2.6 Opgaven

1. Bereken $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, en $(\vec{a},\vec{b})$ als $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

2. Bereken de hoek α die de lijnen l en m met elkaar maken in één decimaal nauwkeurig: $l : y = 2x+7$ en $m : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. Wat is de lengte van de vector $\vec{v} = (2,-3,0,2,-5)$?

4. Schaal de vector $\vec{v}$ naar de eenheidsvector $\hat{v}$ als $\vec{v} = (-1,5,7,0,5)$.

5. Bereken de afstand tussen $Q = (7,1,2)$ en $W : 2x-4y+2z = -2$.

6. Bereken de afstand tussen punt P en vlak V, waarvoor geldt:

$$P = (7,0,-2) \qquad V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2.6.1 Extra opgaven

1. Bereken $\vec{d}+\vec{e}$, $\vec{d}-\vec{e}$, en $(\vec{d},\vec{e})$ als $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ en $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Bereken de hoek α die de lijnen m en l met elkaar maken in één decimaal nauwkeurig: $m : y = 3x+1$ en $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. Wat is de lengte van de vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$?

4. Bereken de afstand tussen $Q = (-1,-4,-1)$ en $W : -2x+9y+6z = 1/3$.

5. Bereken de afstand tussen punt P en vlak V, waarvoor geldt:

$$P = (-3,9,-3) \qquad V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3. Matrix, rotatie en projectie

Dit en het volgende hoofdstuk gaan over lineaire afbeeldingen. Lineaire afbeeldingen zijn afbeeldingen die de lineaire eigenschappen van vectoren niet verstoren. Zulke afbeeldingen worden veel gebruikt in vakgebieden als Computer Graphics en Robotica. Een lineaire afbeelding kan geschreven worden met behulp van een matrix. En met een matrix kun je in software makkelijk rekenen

Een matrix is: een verzameling getallen in een rechthoek, gerangschikt in rijen en kolommen. Δ matrix

Een matrix geven we aan met een hoofdletter, bijv:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

V matrix

Daarbij noemen we S een 2×2 matrix, en M een 3×2 matrix.

De algemene vorm van een $m \times n$ matrix is:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Deze matrix heeft m rijen en n kolommen. Meestal beperken we ons tot 2×2 , 3×3 of 4×4 matrices.

3.1 Bijzondere matrices

Een *vector* is: een matrix die bestaat uit één rij of één kolom, en wordt zoals je al weet, *niet* met een hoofdletter aangeduid maar met een kleine en een pijltje erboven. Δ vector

Ter voorbeeld:

V vector

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Δ vierkante matrix

Een vierkante matrix is: Een matrix met evenveel rijen als kolommen. We schrijven dat als een $n \times n$ matrix: Bijvoorbeeld een vierkante, 4×4 matrix: P:

V vierkante matrix

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & 7 \\ 9 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Δ hoofddiagonaal

De hoofddiagonaal van een matrix is: De diagonaal van linksboven naar rechtsonder

Bij $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ staan de getallen -1, 4 en 1 op de hoofddiagonaal

Δ diagonaalmatrix
V hoofddiagonaal

Een diagonaalmatrix is: Een vierkante matrix waar alleen op de hoofddiagonaal getallen $\neq 0$ staan. Ter voorbeeld:

V diagonaalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Δ eenheidsmatrix

Een eenheidsmatrix is: Een diagonaalmatrix waar op de hoofddiagonaal alleen maar 1-en staan. Ter voorbeeld:

V eenheidsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Δ nulmatrix

Een nulmatrix is: Een matrix met alleen maar nullen. Zoals:

V nulmatrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Δ getransponeerd

De getransponeerde matrix A^T van matrix A is: een (andere) matrix waarbij de rijen en kolommen van A zijn verwisseld.

V getransponeerde

Als $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ dan is $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Δ symmetrisch

Een symmetrische matrix is: een matrix A waarbij $A^T = A$.

In feite betekent dat dat de rechterbovenhoek van de matrix gespiegeld wordt in de linkeronderhoek. Bijvoorbeeld:

V symmetrisch

Als $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ dan is $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = A$

3.2 Matrixvermenigvuldiging

Matrixvermenigvuldiging is tamelijk ingewikkeld: Het product van twee matrices is het op een speciale manier vermenigvuldigen van alle elementen van de ene matrix met alle elementen van de andere matrix. Δ matrixprodukt

Het eerste element van het product krijgen we door de getallen in de eerste ***rij*** van de eerste matrix stuk voor stuk te vermenigvuldigen met de getallen van de eerste ***kolom*** van de tweede matrix en dat op te tellen. Dat wordt het eerste getal van de productmatrix. En vervolgens hetzelfde te doen met de tweede rij van de eerste matrix en de eerste kolom van de tweede matrix enzovoort.

V matrixprodukt

$$\text{Als} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{dan is} \quad A.B &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\cdot -4 + -1\cdot 1 + 2\cdot -2 & 3\cdot 5 + -1\cdot 7 + 2\cdot 6 \\ 4\cdot -4 + -5\cdot 1 + 0\cdot -2 & 4\cdot 5 + -5\cdot 7 + 0\cdot 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -17 & 20 \\ -21 & -15 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Hierbij vermenigvuldig je eerst elk zwart getal met het bijbehorende rode getal (3 met -4, daarna -1 met 1 en vervolgens 2 met -2). Die vermenigvuldigingen tel je bij elkaar op met als uitkomst -17. Vervolgens doe je met de zwarte en blauwe getallen hetzelfde om 20 te krijgen, daarna ook met de groene en rode getallen (met -21 als uitkomst), en tot slot groen met blauw combineren met als uitkomst -15.

3.2.1 eigenschappen van matrixvermenigvuldiging

Anders dan bij gewone getallen is matrixvermenigvuldiging niet commutatief. Dat wil zeggen: $2 \times 3 = 3 \times 2$, maar als A en B matrices zijn dan is meestal $A.B \neq B.A$! $\mathcal{E}$ A.B $\neq$ B.A

V A.B $\neq$ B.A

$$\begin{aligned}
A.B &= \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4\cdot 3 + 5\cdot 4 & -4\cdot -1 + 5\cdot -5 & -4\cdot 2 + 5\cdot 0 \\ 1\cdot 3 + 7\cdot 4 & 1\cdot -1 + 7\cdot -5 & 1\cdot 2 + 7\cdot 0 \\ -2\cdot 3 + 6\cdot 4 & -2\cdot -1 + 6\cdot -5 & -2\cdot 2 + 6\cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 & -21 & -8 \\ 31 & -36 & 2 \\ 18 & -28 & -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

maar

$$\begin{aligned}
B.A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -17 & 20 \\ -21 & -15 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\mathcal{E}$ associatief

Matrixvermenigvuldiging is wel associatief.

Dat betekent: $A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

3.3 De matrix van een afbeelding bepalen

We gaan het nu hebben over lineaire afbeeldingen. Een afbeelding binnen dit vak (en binnen de wiskunde) kun je zien als een functie, die de ene verzameling 'af kan beelden' in de andere. Stel je voor je hebt een functie f die ervoor zorgt dat matrix $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ afgebeeld (of omgezet) kan worden naar matrix $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, dan kunnen we dit noteren als:

$$A \xrightarrow{f} B$$

Δ Lin. afbeelding

Lineaire afbeeldingen zijn: afbeeldingen die de 'lineaire combinaties' tussen beide matrices bewaren, voorbeelden hiervan zijn bijvoorbeeld spiegeling, projectie, rotatie.

Om met lineaire afbeeldingen te kunnen rekenen moeten we de matrix bepalen. Jammer genoeg lukt dat niet simpelweg voor translaties (verplaatsingen), maar daarvoor zullen we een oplossing zien in hoofdstuk 4, zodat ook een translatie als matrix geschreven kan worden, en we met elke afbeelding kunnen rekenen. Voor het bepalen van de matrix van een afbeelding, gaan we gebruik maken van basisvectoren.

Δ basisvector

Basisvectoren zijn: vectoren die gecombineerd alle andere vectoren kunnen genereren (maken)

V basis $\mathbb{R}^2$

Basisvectoren voor $\mathbb{R}^2$ zijn: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ want met combinaties van deze twee vectoren kun je alle andere tweedimensionale vectoren maken. Bijv:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V basis $\mathbb{R}^3$

Basisvectoren voor $\mathbb{R}^3$ zijn: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ want met combinaties van deze drie vectoren kun je alle andere driedimensionale vectoren maken. Bijv:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}$ matrix bepalen

De matrix van een afbeelding bestaat uit: het beeld van de basisvectoren

Dus wat de afbeelding doet met elke basisvector levert de matrix van een afbeelding Anders gezegd om de matrix te bepalen van een afbeelding is het genoeg om te berekenen wat de afbeelding doet met basisvectoren.

Stel we weten van afbeelding A alleen wat er met de basisvectoren gebeurt:

V matrix $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Dan is de matrix van $A = \begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\3 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

3.3.1 Voorbeeld matrix bepalen van afbeelding (projectie)

Stel P is de projectie in $\mathbb{R}^2$ op de x-as, dat wil zeggen: alle punten in het vlak worden geprojecteerd op de x-as. Dus de punten uit een tweedimensionale ruimte worden dan terug gebracht naar een eendimensionale ruimte. (zie figuur 3.1).

V matrix $\mathbb{R}^2$

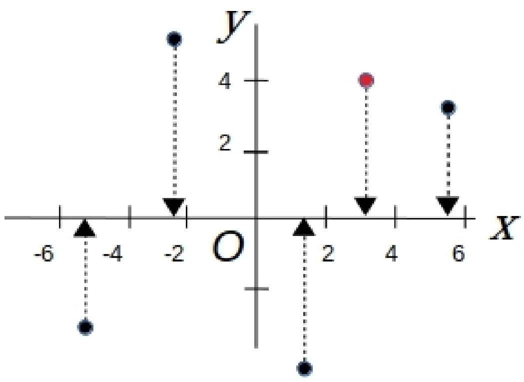

Figure 3.1: *De projectie in $\mathbb{R}^2$ op de x-as; het punt $(3,4)$ komt bijvoorbeeld uit op het punt $(3,0)$.*

Het beeld van de basisvector $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ onder P is $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ gaat naar $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, anders gezegd:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Dan mag je die uitkomsten naast elkaar zetten en is de matrix van $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

3.3.2 Het resultaat berekenen

Als je uit wil rekenen waar een punt of vector "terecht" komt als je een afbeelding toepast dan kun je dat met de matrix uitrekenen door deze matrix te vermenigvuldigen met de vector. In het voorbeeld van de projectie hierboven was

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dat betekent dat een willekeurige vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ terecht komt op:

$$\begin{aligned} P \cdot \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dus: Als je projecteert op de x-as komen alle punten op de x-as terecht, op de plek die de x_1 waarde aangeeft Bijvoorbeeld (zie figuur 3.1) kun je nu uitrekenen dat

$$\begin{aligned} P \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Op zo'n manier kun je ook voor matrix A van hierboven uitrekenen waar een willekeurig punt (v_1, v_2, v_3) in $\mathbb{R}^3$ uitkomt, namelijk door de matrix van A te vermenigvuldigen met de vector $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 - 1 \cdot v_3 \\ 3 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2v_2 - v_3 \\ 3v_1 \\ v_1 + v_2 + v_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En zo kun je ook uitrekenen waar het punt $(3, 2, -1)$ terecht komt als je A er op toepast: $(v_1 = 3, v_2 = 2, v_3 = -1)$:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - -1 \\ 3 \cdot 3 \\ 3 + 2 + -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en dus: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$

3.4 Rotatie

In dit stuk gaan we uitleggen hoe we vergelijkbare matrix-vermenigvuldigen als hierboven kunnen gebruiken om bijv. vectoren te roteren om een bepaald punt.

3.4.1 De matrix van een rotatie in $\mathbb{R}^2$

Net zoals in de vorige voorbeelden hoeven we bij een rotatie alleen maar te bepalen wat er met de basisvectoren gebeurt om de matrix uit te rekenen.

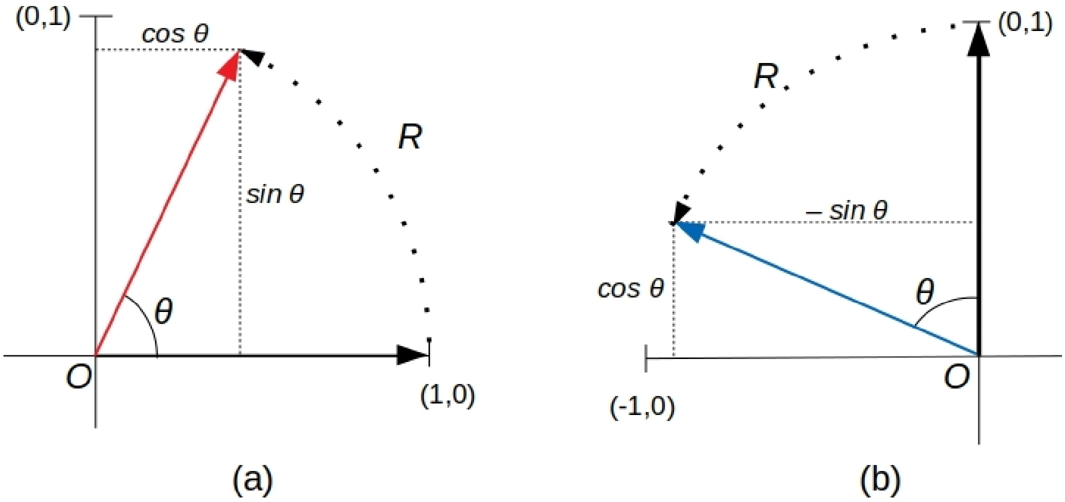

Figure 3.2: *Het resultaat ((a)rood en (b) blauw) van de rotatie tegen de klok in over hoek θ van basisvectoren $\hat{b_x} = (1,0)$ en $\hat{b_y} = (0,1)$.*

Als we roteren in $\mathbb{R}^2$ gaat dat om de oorsprong *O* over een hoek θ (spreek uit: "tèta"). Zie figuur 3.2. In de tekening zien we een rotatie "tegen de klok in over hoek θ".

De basisvectoren zijn $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

We moeten dus bepalen wat er gebeurt met $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Uit het vak Logica weten we wat het beeld van de vectoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ onder de afbeelding R is:

$$R\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad R\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

Anders gezegd: (Let op het minteken!)

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

En dus is de matrix van $R = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Als $\theta = 60°$ dan is $\cos\theta = \cos 60° = 0.5$ en $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (reken uit met de rekenmachine) en dat betekent dat als je linksom draait over $60°$ je matrix wordt:

$$R_{60} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Stel, je wil weten waar het punt $(4,2)$ terecht komt als je over $60°$ linksom draait, dan is dat:

$$\begin{aligned} R_{60} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 - \sqrt{3} \cdot 2 \\ \sqrt{3} \cdot 4 + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 2 - 1.73 \\ 3.46 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.27 \\ 4.46 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

of, op een andere manier opgeschreven:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{60}} \begin{pmatrix} 0.27 \\ 4.46 \end{pmatrix} \quad \text{(zie ook figuur 3.3)}$$

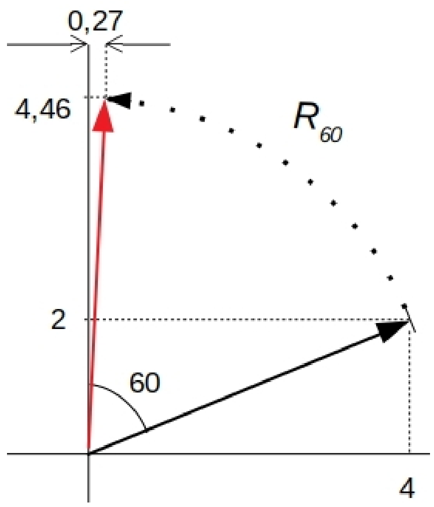

Figure 3.3: *Het beeld van* $(4,2)$ *onder de rotatie* R_{60}.

$\mathcal{E}$ matrix rotatie

De matrix van een rotatie om *O* over de hoek θ in $\mathbb{R}^2$ is altijd

òf (tegen de klok in): $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

òf (met de klok mee): $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Met andere woorden: als je de hoek weet van een rotatie in $\mathbb{R}^2$ hoef je alleen nog de richting, met de klok mee of niet, te bepalen om de matrix op te kunnen schrijven.

3.4.2 De matrix van een rotatie in $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^3$ draaien (roteren) we niet om een punt maar om een as. Het lijkt op wat je met een kurkentrekker doet om een fles wijn te openen. Het is handig om je te realiseren dat draaien om een een as in $\mathbb{R}^3$ betekent dat één coördinaat niet verandert. Namelijk de coördinaat van de as waarom je draait. De draaiing in de andere twee coördinaten is dan eigenlijk een rotatie in $\mathbb{R}^2$. Voor de kritische lezer: Wat als je om een willekeurige vector roteert? Dan geldt het volgende: Elke rotatie in $\mathbb{R}^3$ kun je uitvoeren door eerst een stukje om de x-as, dan om de y-as en daarna om de z-as te roteren.

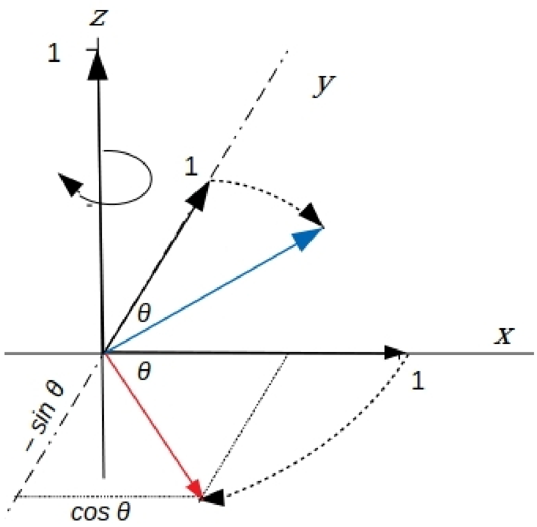

Figure 3.4: *Rotatie in $\mathbb{R}^3$ om de z-as over een hoek θ. Je kunt dit zien als een rotatie in x en y waarbij de z-coördinaat hetzelfde blijft, dus een rotatie in $\mathbb{R}^2$, zie figuur 3.5 Ga na waar de basisvectoren langs de x-, y- en z-as komen na de rotatie.*

Als voorbeeld gaan we een rotatie rechtsom om de z-as over de hoek θ uitrekenen.

We gaan weer bepalen waar de basisvectoren komen na de rotatie. De basisvectoren langs de assen zijn: **V** rotatie $\mathbb{R}^3$

$$\hat{b_x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \hat{b_y} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \hat{b_z} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Zoals in figuur 3.4 te zien is veranderen de z-coördinaten bij geen van de basisvectoren!

Dus bij $\hat{b_x}$ en $\hat{b_y}$ zijn en blijven z-coördinaten $= 0$, en de 3^e basisvector, $\hat{b_z}$ verandert sowieso niet. Als de z-coördinaat van een willekeurig punt niet verandert, is het eigenlijk een rotatie in x en y, oftewel een rotatie in $\mathbb{R}^2$ (zie figuur 3.5).

Let op: we gaan nu met de klok mee dus het min-teken komt op een andere plaats dan bij het vorige voorbeeld van $\mathbb{R}^2$:

$$\hat{b_x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{b_y} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{b_z} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

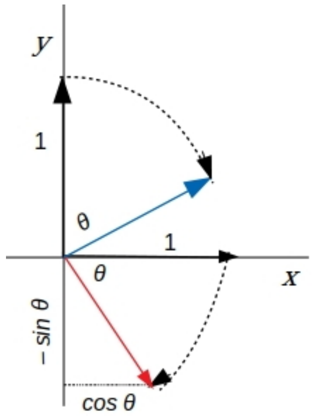

Figure 3.5: *De rotatie in $\mathbb{R}^3$ over hoek θ, gezien als rotatie in $\mathbb{R}^2$. Vergelijk met figuur 3.4.*

En dus is $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

N.B.: Het 2×2 stukje linksboven in de matrix R is hetzelfde als bij een rotatie in $\mathbb{R}^2$.

3.5 Projectie

Δ projectie Projecteren is: Het afbeelden van een object in een lagere dimensie. Dus bijvoorbeeld het feit dat je een 3D spel kunt spelen op een tweedimensionaal beeldscherm! In $\mathbb{R}^2$ doe je dat door punten loodrecht op een lijn te verplaatsen naar die lijn (1-dimensionaal), zie figuur 3.6. In $\mathbb{R}^3$ door punten loodrecht op een vlak te verplaatsen naar dat vlak, zie figuur 3.8.

3.5.1 De matrix van een projectie in $\mathbb{R}^2$

In $\mathbb{R}^2$ is een projectie het loodrecht verplaatsen van punten naar een rechte lijn (zie figuur 3.1, 3.6 en 3.7)

De projectie op de lijn $y = x$.

V projectie $\mathbb{R}^2$ Om de matrix te bepalen moeten we kijken wat er gebeurt met de basisvectoren. Zoals je in figuur 3.6 kunt zien werkt de projectie zo dat beide basisvectoren op dezelfde (paars = rood + blauw) vector terecht komen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{P}{\to} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{P}{\to} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Dat betekent dat:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

De projectie op de lijn $y = 4x$.

V projectie $\mathbb{R}^2$ Bij de vorige projectie konden we aflezen wat het resultaat van de projectie was. In het algemeen is dat lastiger, en moeten we eerst loodlijnen uitrekenen. Zie figuur

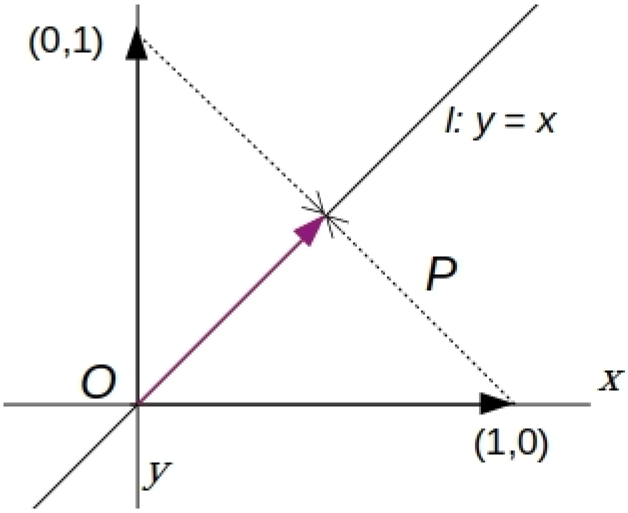

Figure 3.6: *De projectie op de lijn $l: y = x$. Merk op dat beide basisvectoren op dezelfde vector (paars = rood + blauw!) geprojecteerd worden.*

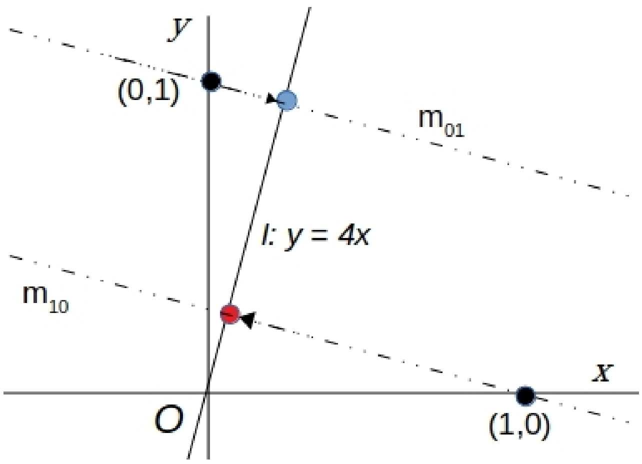

Figure 3.7: *De projectie op de lijn $l: y = 4x$ met loodlijnen m_{10} door $(1,0)$ en m_{01} door $(0,1)$.*

3.7. De loodlijn m_{10} staat loodrecht op l en gaat door het punt $(1,0)$, de loodlijn m_{01} staat ook loodrecht op l maar gaat door het punt $(0,1)$. De vraag is: hoe berekenen we de loodlijnen? Daarvoor maken we gebruik van het volgende eigenschap:

$\mathcal{E}$ rc loodlijn

$$rc_{loodlijn} = \frac{-1}{rc_{origineel}}$$

Waarbij rc de richtingscoëfficiënt is, oftewel de a in de algemene vergelijking van een lijn: $y = ax + b$.

Anders gezegd: de richtingscoëfficiënt van een lijn loodrecht op een andere (het origineel) is het omgekeerde daarvan met een min ervoor. Uit het vak logica komt misschien deze nog wel bekend voor: Als 2 rechte lijnen loodrecht op elkaar staan dan geldt er:

$$rc_{\text{lijn1}} \cdot rc_{\text{lijn2}} = -1$$

V rc loodlijn

Als $l: y = 4x$ dan is de richtingscoëfficiënt van l: $rc_l = 4$ en de richtingscoëfficiënt van de loodlijn $rc_{loodlijn} = -\frac{1}{4}$. Dan weten we dus dat $m_{10}: y = -\frac{1}{4}x + b_{10}$ (b_{10} is een constante, vergelijk met de algemene vergelijking van een lijn hierboven). De constante b_{10} kunnen we uitrekenen doordat we weten dat het punt $(1,0)$ op m_{10} ligt:

$$0 = -\frac{1}{4} \cdot 1 + b_{10} \quad \text{dus is} \quad b_{10} = \frac{1}{4} \quad \text{en} \quad m_{10}: y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

De andere loodlijn gaat op dezelfde manier: $rc_{01} = -\frac{1}{4}$. Dus $m_{01}: y = -\frac{1}{4}x + b_{01}$, en we weten dat $(0,1)$ op m_{01} ligt. Dus:

$$1 = -\frac{1}{4} \cdot 0 + b_{01} \quad \text{dus} \quad b_{01} = 1 \quad \text{en dus} \quad m_{01}: y = -\frac{1}{4}x + 1$$

Als we snijpunten (rood en blauw in figuur 3.7) weten, weten we waar de basisvectoren terecht komen. Voor het snijpunt (rood) van l en m_{10} : geldt:

$$\begin{cases} l: y = 4x \\ m_{10}: y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Dit punt kunnen we uitrekenen door beide stellingen aan elkaar gelijk te stellen en uit te werken:

$$\begin{aligned} 4x &= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \\ 4\frac{1}{4}x &= \frac{1}{4} \\ x &= \frac{1}{17} \end{aligned}$$

Dan hoeven we alleen nog maar een y-waarde te berekenen, door deze x-waarde in $y = 4x$ te stoppen, hieruit volgt: $y = 4 \cdot \frac{1}{17} = \frac{4}{17}$. Het rode snijpunt ligt dus op: $(1/17, 4/17)$. Op dezelfde manier reken het blauwe snijpunt van l en m_{01} uit. Hiervoor geldt:

$$\begin{cases} l: y = 4x \\ m_{01}: y = -\frac{1}{4}x + 1 \end{cases}$$

Waarmee het snijpunt ligt op:

$$\begin{aligned} 4x &= -\frac{1}{4}x + 1 \\ 4\frac{1}{4}x &= 1 \\ x &= \frac{4}{17} \end{aligned}$$

De bijbehorende y-waarde is dan te vinden door deze x-waarde weer in één van de formules in te vullen, bijv. $y = 4x$, hieruit volgt dat $y = 4 \cdot \frac{4}{17} = \frac{16}{17}$.

Het blauwe snijpunt ligt dus op $(4/17, 16/17)$. Met andere woorden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 1/17 \\ 4/17 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 4/17 \\ 16/17 \end{pmatrix}$$

en dus is de matrix van P:

$$P = \begin{pmatrix} 1/17 & 4/17 \\ 4/17 & 16/17 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

3.5.2 De matrix van een projectie in $\mathbb{R}^3$

V projectie $\mathbb{R}^3$

Voor het vinden van de matrix van de projectie P op een vlak in $\mathbb{R}^3$ moeten we bepalen wat er met de drie basisvectoren langs de x-, y-, en z-as gebeurt. We nemen als voorbeeld de projectie op het vlak $W: 2x-3y+z=0$. Het punt $(1,0,0)$ komt op het blauwe punt in het vlak W terecht, $(0,1,0)$ komt op het rode punt in W en $(0,0,1)$ komt op het groene punt in W. Zie figuur 3.8

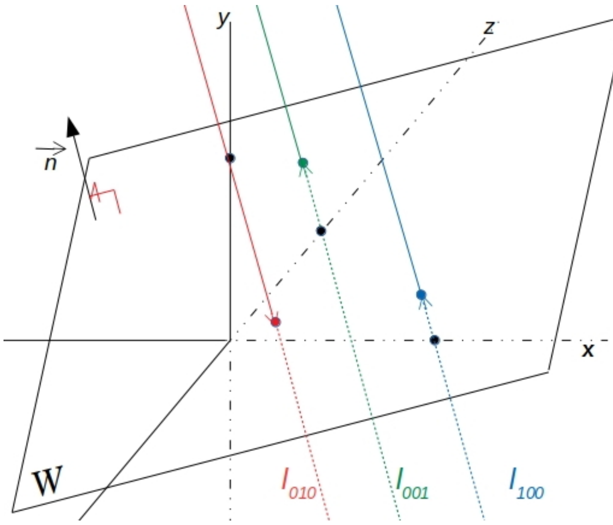

Figure 3.8: *De projectie op het vlak $W: 2x-3y+z=0$ door de oorsprong met de blauwe loodlijn l_{100}, door $(1,0,0)$, de rode l_{010} door $(0,1,0)$ en de groene l_{001} door $(0,0,1)$. N.B.: De snijpunten van de loodlijnen met het vlak W, zijn met respectievelijk rood, groen en blauw aangegeven. Merk op dat de punten $(1,0,0)$ en $(0,0,1)$ 'omhoog' geprojecteerd worden en $(0,1,0)$ 'naar beneden'.*

We moeten de snijpunten van de 3 loodlijnen l_{100}, l_{010} en l_{001} door respectievelijk de punten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$ uitrekenen. We weten dat de richtingsvector van de loodlijnen gelijk is aan de normaalvector van W, dus:

$$\vec{n_W} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daarmee is $l_{100}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{c} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ is de eerste (blauwe) loodlijn.

Voor $\vec{c}$ mogen we elk punt nemen dat op l_{100} ligt, bijv. $(1,0,0)$, dus:

$$l_{100}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Het snijpunt (blauw) van l_{100} en W ligt èn in het vlak èn op de loodlijn, dus geldt:

$$\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \text{èn} \qquad 2x-3y+z=0$$

door x, y en z in te vullen in de 2^e vergelijking vinden we:

$$\begin{aligned}
2(1+2\lambda)-3(-3\lambda)+\lambda &= 0\\
2+4\lambda+9\lambda+\lambda &= 0\\
2+14\lambda &= 0\\
14\lambda &= -2\\
\lambda &= -\frac{1}{7}
\end{aligned}$$

Omdat we $\lambda = -\frac{1}{7}$ mogen invullen in de vectorvoorstelling van de lijn l_{100} betekent dat het snijpunt van l_{100} en W gelijk is aan:

$$\begin{aligned}
l_{100}: \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + -\frac{1}{7}\cdot \begin{pmatrix} 2\\ -3\\ 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/7\\ 3/7\\ -1/7 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 5/7\\ 3/7\\ -1/7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Met andere woorden: $\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 5/7\\ 3/7\\ -1/7 \end{pmatrix}$ Op dezelfde manier vinden we ook de snijpunten van l_{010} en l_{001} met W:

$$\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 6/14\\ 5/14\\ 3/14 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} -2/14\\ 3/14\\ 13/14 \end{pmatrix}$$

En dat betekent dat de matrix van P is:

$$P = \begin{pmatrix} 5/7 & 6/14 & -2/14\\ 3/7 & 5/14 & 3/14\\ -1/7 & 3/14 & 13/14 \end{pmatrix}$$

En dat is is nog iets mooier te schrijven als:

$$P = \begin{pmatrix} 10/14 & 6/14 & -2/14\\ 6/14 & 5/14 & 3/14\\ -2/14 & 3/14 & 13/14 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{14}\cdot \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2\\ 6 & 5 & 3\\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

3.6 Opgaven

1. Transponeer de matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -4 \\ -1 & 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. Wat is de uitkomst van $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$?

3. Geef de matrix R van de rotatie over $62°$ met de klok mee om de x-as, zodat $(0,0,2)$ wordt afgebeeld op $(0, 2\sin 62°, 2\cos 62°)$.

4. Geef de matrix P_1 van de projectie in $\mathbb{R}^3$ op het vlak $y = 3x$.

3.6.1 Extra opgaven

1. Transponeer de matrix $N = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

2. Wat is het product van $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$?

3. Geef de matrix R_1 van de rotatie over $4°$ met de klok mee rond de z-as zodat $(1,0,-2)$ wordt afgebeeld op $(\cos 4°, -\sin 4°, -2)$.

4. Geef de matrix R_2 van de rotatie over $42°$ tegen de klok in rond de y-as zodat $(3,0,0)$ wordt afgebeeld op $(3\cos 42°, 0, -3\sin 42°)$.

5. Geef de matrix R_3 van de rotatie over $36°$ tegen de klok in rond de x-as zodat $(3,0,1)$ wordt afgebeeld op $(3, -\sin 36°, \cos 36°)$.

6. Geef de matrix P_2 van de projectie in $\mathbb{R}^3$ op het vlak $y = x$.

4. Spiegeling, translatie en samenstelling

In dit hoofdstuk gaan we nog een lineaire afbeelding behandelen, namelijk spiegeling. Daarnaast wordt ook translatie behandeld en komen we erachter dat deze niet lineair is. Uiteindelijk gaan we verschillende afbeeldingen combineren (samenstellen).

4.1 Spiegeling

Een spiegeling in $\mathbb{R}^2$ wordt uitgevoerd door vanuit een punt een loodlijn te trekken naar de lijn waarin je spiegelt, en vervolgens die loodlijn even lang door te trekken naar de andere kant van de spiegellijn om het beeld van het originele punt te vinden. Zie figuur 4.1

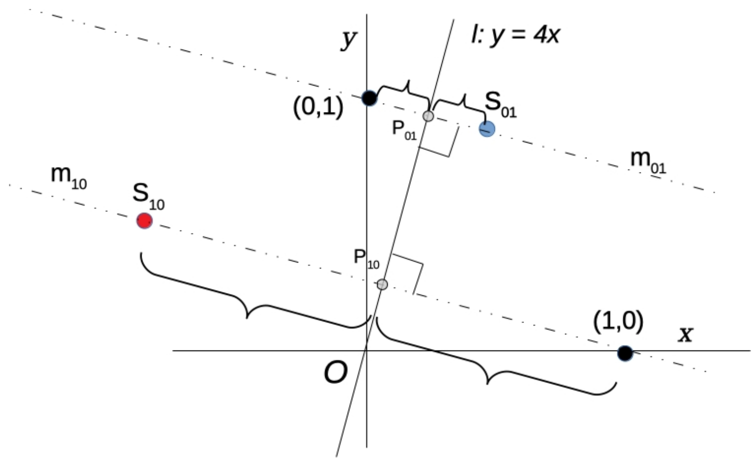

Figure 4.1: *De spiegeling in de lijn $y = 4x$. Het rode punt is het spiegelbeeld van (1,0), het blauwe het spiegelbeeld van (0,1). De grijze punten zijn de projectiepunten.*

4.1.1 De matrix van een spiegeling in $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{V}$ spiegeling $\mathbb{R}^2$

Als voorbeeld nemen we de spiegeling in de lijn $y = 4x$ (figuur 4.1). We kunnen bij een spiegeling gebruik maken van wat we bij een projectie uitgerekend hebben (zie *de matrix van een projectie in* $\mathbb{R}^2$ blz. 40).

P_{10} is het punt waarop $(1,0)$ *geprojecteerd* wordt, en S_{10} het punt waarnaar toe $(1,0)$ *gespiegeld* wordt. Verder stellen we dat $\vec{p} = \overrightarrow{OP_{10}}$. ($\overrightarrow{OP_{10}}$ is de vector van de oorsprong naar punt P_{10}).

Met behulp van figuur 4.2 kun je zien dat, $\overrightarrow{OS_{10}}$ (de vector van de oorsprong naar punt S_{10}) gelijk is aan:

$$\overrightarrow{OS_{10}} = \vec{p} + -\hat{b}_x + \vec{p} = 2\vec{p} - \hat{b}_x$$

Het zal je niet verbazen dat de volgende regel geldt: Als $\vec{p}$ het beeld van een basisvector $\hat{b}$ bij een projectie is dan is $2\vec{p} - \hat{b}$ het beeld van de bijbehorende spiegeling.

$\mathcal{E}$ spiegeling

Nog korter:

Als: $\hat{b} \xrightarrow{P} \vec{p}$ dan $\hat{b} \xrightarrow{S} 2\vec{p} - \hat{b}$ voor elke basisvector $\hat{b}$

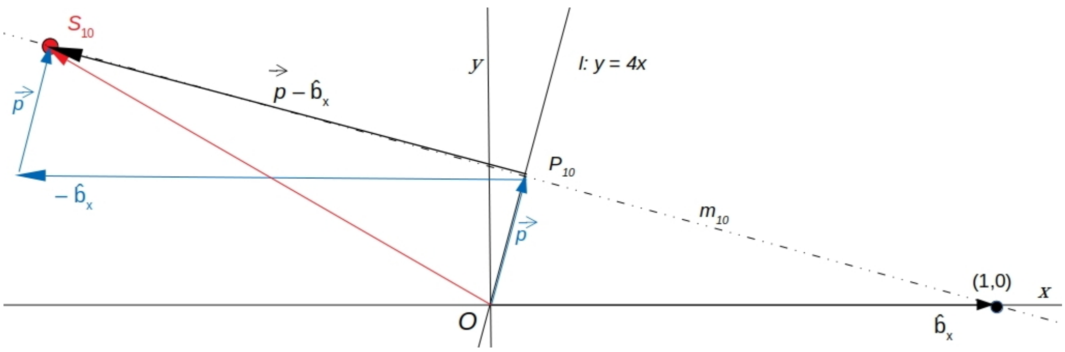

Figure 4.2: *Het blauwe pad volgen is hetzelfde als in één keer de rode vector. En dus geldt: als $\vec{p}$ het beeld van een projectie is, dan is het spiegelbeeld $= 2\vec{p} - \hat{b}$. (bij dit voorbeeld is $\hat{b} = \hat{b}_x$, de basisvector langs de x-as).*

Van de projectie in $\mathbb{R}^2$ weten we dat $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1/17 \\ 4/17 \end{pmatrix}$

dus is:

$$2 \cdot \vec{p} - \hat{b}_x = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1/17 \\ 4/17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/17 - 1 \\ 8/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/17 \\ 8/17 \end{pmatrix}$$

en dat betekent dat:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} -15/17 \\ 8/17 \end{pmatrix}$$

We passen deze eigenschap ook toe om te vinden wat het beeld van $\hat{b}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ onder onze spiegeling is:

Er gold: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix}4/17\\16/17\end{pmatrix}$ dan is $2\vec{p} - \hat{b}_y = 2\cdot\begin{pmatrix}4/17\\16/17\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/17\\15/17\end{pmatrix}$.

dus $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix}8/17\\15/17\end{pmatrix}$

En dus is de matrix van S:

$$S = \begin{pmatrix}-15/17 & 8/17\\ 8/17 & 15/17\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix}-15 & 8\\ 8 & 15\end{pmatrix}$$

Misschien valt je op dat de getallen in de matrix niet toevallig lijken (linksonder en rechtsboven zijn hetzelfde en de andere twee elkaars negatief). Dat is ook niet toevallig. Als je dat handig vindt mag je de uitkomst van een spiegelberekening controleren met de volgende formule:

Als S een spiegeling is in de lijn $y = a\cdot x$, dan is de matrix van de spiegeling: $\mathcal{E}$ spiegeling

$$S = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix}1-a^2 & 2a\\ 2a & a^2-1\end{pmatrix}$$

4.1.2 De matrix van een spiegeling in $\mathbb{R}^3$

Net zoals we bij een spiegeling in $\mathbb{R}^2$ gebruik maken van de projectie (op dezelfde lijn waarin we spiegelen), kunnen we voor een spiegeling in $\mathbb{R}^3$ gebruik maken van de projectie op het vlak waarin we willen spiegelen. Want er geldt dezelfde regel als in $\mathbb{R}^2$:

$\mathcal{E}$ spiegeling

Als $\hat{b} \xrightarrow{P} \vec{p}$ dan $\hat{b} \xrightarrow{S} 2\vec{p} - \hat{b}$ voor elke basisvector $\hat{b}$

Als voorbeeld nemen we de spiegeling in het vlak $W: 2x - 3y + z = 0$. Van de *projectie op* W (zie: 'matrix van een projectie in $\mathbb{R}^3$ ' op blz.44) weten we dat:

$\mathcal{V}$ spiegeling $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{P} \tfrac{1}{14}\begin{pmatrix}10\\6\\-2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{P} \tfrac{1}{14}\begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{P} \tfrac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\13\end{pmatrix}$$

dat betekent dat bij de spiegeling geldt:

Voor $\hat{b}_x$ is $\vec{p} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix}10\\6\\-2\end{pmatrix}$ en $2\vec{p} - \hat{b}_x = 2\cdot\tfrac{1}{14}\begin{pmatrix}10\\6\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\6\\-2\end{pmatrix}$

en dus $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{S} \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\6\\-2\end{pmatrix}$

Voor $\hat{b}_y$ geldt: $2\vec{p} - \hat{b}_y = \dfrac{2}{14}\begin{pmatrix}6\\5\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$

en dus $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{S} \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}$

en voor $\hat{b}_z$ geldt:

$$2\vec{p} - \hat{b}_z = \frac{2}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\13\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}$$

en dus $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow S\ \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}$

Dan is de matrix van S:

$$S = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & 6 & -2\\6 & -2 & 3\\-2 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

4.2 Translatie

Transleren, anders gezegd verschuiven, is een afwijkende afbeelding. Zoals we zullen zien is transleren, in tegenstelling tot roteren, spiegelen en projecteren *niet* lineair. Dat is belangrijk want daarom kunnen we er niet zomaar een matrix van maken. En alleen als we een matrix hebben kunnen we (beter gezegd software) er goed mee rekenen.

4.2.1 Translatie niet lineair

Als voorbeeld nemen we de translatie over de vector $\vec{t} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

V translatie $\mathbb{R}^2$

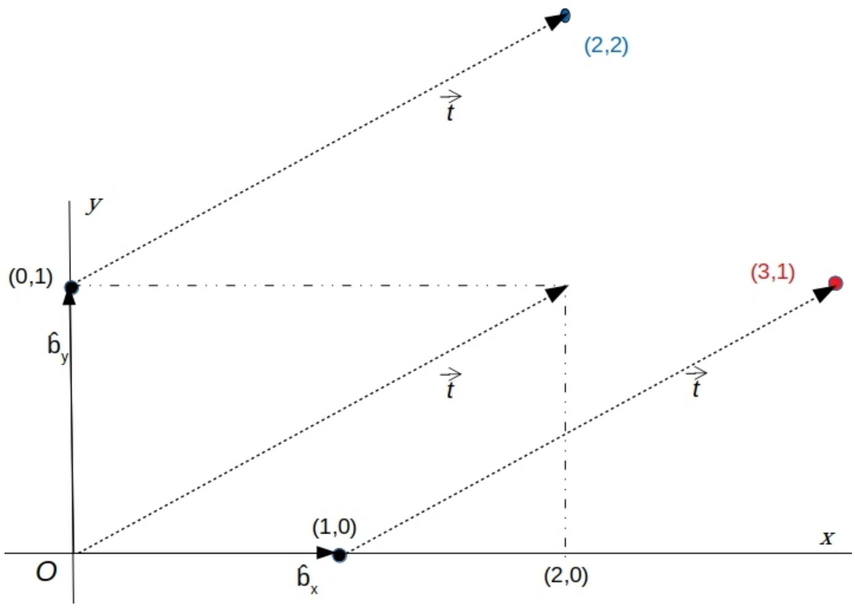

Figure 4.3: *De translatie over de vector $\vec{t}$.*

Je kunt de werking van deze translatie als volgt opschrijven: neem een willekeurige vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dan is het beeld daarvan $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y+1 \end{pmatrix}$.

Je kunt nu op verschillende manieren zien dat een matrix "niet werkt":

Ten eerste: $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en dat ***zou*** betekenen dat $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Op dezelfde manier ***zou*** je zien dat $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dat ***zou*** betekenen dat $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

En ***als*** dat zo zou zijn ***zou*** $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dat ***zou*** betekenen dat het de oorsprong (0,0) niet verschoven zou worden! Overigens heet zo'n redenering als deze "een bewijs uit het ongerijmde".

Ten tweede: als T lineair zou zijn zou moeten gelden:

$$T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b})$$

Bijvoorbeeld als $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ is:

$$T(\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{maar}$$

$$T(\vec{a}) + T(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 0+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{V}$ translatie $\mathbb{R}^2$

Kortom ***een translatie is niet lineair***

$\mathcal{E}$ lineariteit

4.2.2 Affiene matrix van translatie in $\mathbb{R}^2$

Maar er bestaat een truc om toch met een translatie te kunnen rekenen. We voegen aan de translatie een dimensie toe. Dat wil zeggen voor een twee-dimensionale translatie maken we een drie-dimensionale matrix en voor een drie-dimensionale translatie maken we een vier-dimensionale matrix:

Gegeven een translatie vector

Δ affiene matrix

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad \text{dan is } T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{de affiene matrix}$$

Voor de translatie over $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ is de affiene matrix T_a: $T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{V}$ affiene matrix

4.2.3 Rekenen met een affiene matrix in $\mathbb{R}^2$

Δ affiene vector

Om te kunnen rekenen met een affiene matrix moeten we aan alles een dimensie toevoegen: aan punten, vectoren en andere matrices. Dat doen we als volgt:

Als $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dan is $\vec{v}_a = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de *affiene* vector

Bijv:

V affiene vector

Als $\vec{t} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan is de affiene vector $t_a = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nu kunnen we controleren of de affiene matrix voor T klopt. We nemen weer de basisvector langs de x-as $\hat{b}_x$ en voegen ook daar een dimensie aan toe!

$\hat{b}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en dus is $\hat{b}_{xa} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

T_a is in ons geval bij $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dus: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

We kijken wat het beeld van $\hat{b}_{xa} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ onder T_a is:

$$T_a \cdot \hat{b}_{xa} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anders gezegd:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wat is het beeld van de oorsprong onder T_a ? Dan moeten we ook aan de oorsprong een dimensie toevoegen $O_a = (0,0,1)$ Dan is

$$T_a \cdot O_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ dat wil zeggen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.2.4 Een translatie in $\mathbb{R}^3$

Δ affiene matrix

Ook in 3 dimensies is een translatie niet lineair. Dus ook hier voegen we een dimensie toe:

Als $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$ dan is $T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de affiene matrix

Voor de translatie over $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ is de affiene matrix: $T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Δ affiene vector

V affiene matrix

Als $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ dan is $\vec{v}_a = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}$ de affiene vector

Bijvoorbeeld:

Als $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan is $\vec{a}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de affiene vector

V affiene vector

4.2.5 Rekenen met een affiene matrix in $\mathbb{R}^3$

Nu kunnen we rekenen met een drie-dimensionale translatie. Neem dezelfde translatie als hier vlak boven, over de vector $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Neem een willekeurige vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ Dan is de affiene vector $\vec{v}_a = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Het beeld van $\vec{v}$ kunnen we nu uitrekenen:

$$T_a \cdot \vec{v}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+2 \\ v_2+3 \\ v_3-4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dus: $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} v_1+2 \\ v_2+3 \\ v_3-4 \end{pmatrix}$ Bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

V affiene vector

4.3 Samenstelling

Bewegen bestaat natuurlijk niet alleen uit draaien (roteren), spiegelen enzovoort, maar vooral uit combinaties daarvan. Dus is het belangrijk dat we die combinaties ook uit kunnen rekenen (daarom was het belangrijk om ook matrices voor translaties te hebben).

Δ samenstelling

Als A en B matrices zijn dan is: de matrix S van de afbeelding A ***gevolgd*** door B gelijk aan:

$$S = B \cdot A$$

N.B.: voor je gevoel draait de volgorde om! Maar als je goed kijkt zie je dat je eerst A uitvoert en daarna B.

4.3.1 Samenstelling in $\mathbb{R}^2$

Stel dat de rotatie $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en de projectie $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ en we willen *eerst* roteren en *daarna* projecteren, dan is de matrix van die samenstelling:

V samenstelling

$$S = P \cdot R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

maar als we *eerst* willen projecteren en *daarna* roteren, dan is de matrix van die samenstelling:

$$S_2 = R \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Stel dat de rotatie $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ en de projectie $P = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$ en we willen *eerst* projecteren en *daarna* roteren, dan is de matrix van die samenstelling:

V samenstelling

$$\begin{aligned} S = R \cdot P &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1\cdot\cos\theta + 4\cdot -\sin\theta & 4\cdot\cos\theta + 16\cdot -\sin\theta \\ 1\cdot\sin\theta + 4\cdot\cos\theta & 4\cdot\sin\theta + 16\cdot\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{17}\begin{pmatrix} \cos\theta - 4\sin\theta & 4\cos\theta - 16\sin\theta \\ \sin\theta + 4\cos\theta & 4\sin\theta + 16\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.3.2 Samenstelling met affiene matrices in $\mathbb{R}^2$

Als we een translatie in $\mathbb{R}^2$ willen samenstellen met een andere afbeelding moeten we eerst aan alle afbeeldingen een dimensie toevoegen.

Δ affiene matrix

Als $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ dan is de affiene matrix daarvan, $A_a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

V affiene samenst.

Stel T is de translatie over $\vec{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en dat we daarnaast willen roteren met $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en willen met $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ spiegelen. Dan zijn de affiene matrices:

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dan is de samenstelling van de drie, bij eerst spiegelen, dan transleren en tot slot roteren:

$$\begin{aligned} R_a \cdot T_a \cdot S_a &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.3.3 Samenstelling met affiene matrices in $\mathbb{R}^3$

Als we een translatie in $\mathbb{R}^3$ willen samenstellen met een andere afbeelding moeten we, net als in $\mathbb{R}^2$ eerst aan alle afbeeldingen een dimensie toevoegen.

Δ affiene matrix

Als $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ dan is $A_a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de affiene matrix van A.

Stel T is de translatie over $\vec{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, en $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

V affiene samenst.

Dan zijn de affiene matrices:

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en dan is de samenstelling van eerst P, dan T en tot slot R:

$$\begin{aligned} R_a \cdot T_a \cdot P_a &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dit alles betekent tot slot dat als $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ een willekeurige vector in $\mathbb{R}^3$ is, dan is het beeld van $\vec{v}$ onder $R_a \cdot T_a \cdot P_a$:

$$\vec{v} \xrightarrow{R_a \cdot T_a \cdot P_a} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 + v_2 + 7 \\ v_1 + v_2 - v_3 - 1 \\ -v_1 + v_3 + 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dus bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R \cdot T \cdot P} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R \cdot T \cdot P} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R \cdot T \cdot P} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4.4 Opgaven

1. Geef de affiene matrix van de translatie T die punt $(3,2)$ afbeeldt op $(5,-2)$.
2. Geef de matrix van de spiegeling S_1 in $\mathbb{R}^3$ in de vlak $x = 3y$
3. Gegeven de translatie T_3 die punt $(1,2)$ afbeeldt op punt $(3,-2)$ en de rotatie $R = \begin{pmatrix} \cos 62° & \sin 62° \\ -\sin 62° & \cos 62° \end{pmatrix}$.
   Geef de matrix van de samengestelde afbeelding B die bestaat uit R gevolgd door T_3. N.B.: Je moet eerst T_3 en R affien maken!
4. Gegeven de translatie T_4 die punt $(-1,0,3)$ afbeeldt op punt $(2,-1,4)$ en de spiegeling $S = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Geef de matrix van de afbeelding C die bestaat uit de translatie gevolgd door de spiegeling.

4.4.1 Extra opgaven

1. Geef de matrix van de spiegeling S_2 in $\mathbb{R}^3$ in het vlak $y = 2x$
2. Geef de matrix van de spiegeling S_3 in $\mathbb{R}^3$ in het vlak $z = -\frac{1}{3}y$
3. Geef de affiene matrix van de translatie T_1 die punt $(5,1,2)$ afbeeldt op $(0,1,6)$.
4. Geef de affiene matrix van de translatie T_2 die punt $(9,0,-1)$ afbeeldt op $(6,2,-2)$.
5. Geef de matrix van de afbeelding A die samengesteld is uit S_2, gevolgd door T_1, gevolgd door S_3.

5. Determinant

De determinant van een matrix is binnen de lineaire algebra en meetkunde belangrijk begrip. De determinant is in de meetkunde een oppervlakte of inhoud van een ruimte. In de lineaire algebra geeft een determinant belangrijke informatie over een matrix.

5.1 Determinant van een $2{\times}2$ matrix

De determinant van

Δ determinant $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{is} \quad |A| = ad - bc$$

Dat mag je ook schrijven als $det(A)$, of als $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Bijvoorbeeld:

V determinant $\mathbb{R}^2$

$$\text{Als } A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{dan is} \quad |A| = -1 \cdot -3 \; - \; 2 \cdot 5 = -7$$

5.1.1 Eigenschappen van determinanten

Vierkante matrix

De determinant van *niet* vierkante matrices (bv (2×3) of (5×4)) bestaat niet.

Eenheidsmatrix

De determinant van de eenheidsmatrix (een matrix waarin op de hoofddiagonaal allen enen staan) is $= 1$.

Inverse matrix

De determinant wordt gebruikt om te bepalen of een matrix een inverse heeft. Anders gezegd: of je een beweging ook weer terug kunt draaien, ongedaan kunt maken.

$\mathcal{E}$ det(A) $\neq 0$

Als $|A| \neq 0$ dan heeft A een inverse (is omkeerbaar)
Je kunt zelfs de inverse van een matrix uitrekenen (als de determinant $\neq 0$):

$\mathcal{E}$ inverse $\mathbb{R}^2$

Als $|A| \neq 0$ dan is in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bijvoorbeeld:

$\mathcal{V}$ inverse $\mathbb{R}^2$

Stel $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ dan is $|A| = -7$ en $A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Nu kunnen we controleren of de inverse echt de omgekeerde is door A en A^{-1} met elkaar te vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1\cdot -3 + 5\cdot -2 & -1\cdot -5 + 5\cdot -1 \\ 2\cdot -3 + -3\cdot -2 & 2\cdot -5 + -3\cdot -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathcal{E}$ $det(A^T) = det(A)$

De determinant van een getransponeerde matrix is hetzelfde als de determinant van de matrix zelf:

We nemen weer als voorbeeld de matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ dan is $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

en dus is:

$\mathcal{V}$ $det(A^T) = det(A)$

$$|A^T| = -1\cdot -3 - 2\cdot 5 = -7 = |A|$$

$\mathcal{E}$ rijen gelijk

Als een matrix twee of meer gelijke rijen (of kolommen) heeft dan is de determinant gelijk aan 0:

We nemen als voorbeeld de matrix: $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ en zien dat:

$\mathcal{V}$ gelijke rijen

$$|A| = -1\cdot 5 - -1\cdot 5 = 0$$

$\mathcal{E}$ rij, kolom = 0

Als in een matrix een hele rij of kolom gelijk is 0 dan is $|A| = 0$

We nemen als voorbeeld de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en zien dat:

$\mathcal{V}$ kolom, rij = 0

$$|A| = 0\cdot 2 - 0\cdot 5 = 0$$

5.2 Ontwikkelen van een determinant

Natuurlijk willen we ook de determinant van 3×3 en 4×4 matrices (en hogere dimensies) uit kunnen rekenen. Daar bestaat een mooi recursief algoritme voor. Om te beginnen met een 3×3 determinant:

De determinant van

Δ determinant $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ is } |A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

In woorden: Je ontwikkelt de determinant naar de 1^e rij door voor a_{11} de rij en kolom waar a_{11} in staat 'door te strepen' en daarna a_{11} te vermenigvuldigen met de determinant van de getallen die overblijven:

Dus, voor a_{11}: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

voor a_{21}: $\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ **N.B. bij a_{21} komt er een min-teken bij!**

en voor a_{31}: $\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix}$

Voorbeeld van een 3×3 determinant:

als $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ dan is $|A|$:

V determinant $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} |A| &= -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot (2 \cdot 2 \ - \ -1 \cdot 6) - 4 \cdot (0 \cdot 2 \ - \ 3 \cdot 6) + 1 \cdot (0 \cdot -1 \ - \ 3 \cdot 2) \\ &= -5 \cdot 10 - 4 \cdot -18 \ + \ 1 \cdot -6 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Δ determinant $\mathbb{R}^n$

De formule voor de determinant van een $n \times n$ matrix gaat natuurlijk ook recursief:

$$\text{Als} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{dan is}$$

$$|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \dots - \dots + \dots - \dots \dots \dots$$

$$\pm a_{n1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1\ 2} & a_{n-1\ 3} & \dots & a_{n-1\ n} \end{vmatrix}$$

Oef! Daar kunnen we wel wat trucjes bij gebruiken die in de volgende paragraaf behandeld worden.

5.2.1 Rekenhulp determinant

$\mathcal{E}$ ontwikkelen

Je mag een determinant uitrekenen met behulp van de 1^e kolom, maar dat mag ook met behulp van de 2^e rij of de laatste kolom of ...

Je moet alleen wel rekening houden met minnen en plussen volgens onderstaand

$$\text{schema:} \begin{matrix} + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Dus als je bijvoorbeeld naar de 2^e rij ontwikkelt dan begin je met een $-$, daarna $+$ en je wisselt de $-$ en $+$ af:

$\mathcal{V}$ ontwikkelen

$$\text{Als } A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan is}$$

$$\begin{aligned} |A| &= -4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - -1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -4 \cdot (0 \cdot 2 - 6 \cdot 3) + 2 \cdot (-5 \cdot 2 - 1 \cdot 3) + 1 \cdot (-5 \cdot 6 - 1 \cdot 0) \\ &= -4 \cdot -18 + 2 \cdot -13 + 1 \cdot -30 \\ &= 16 \end{aligned}$$

En dat is hetzelfde als we als antwoord kregen op de vorige bladzij.

Als je een kolom (een aantal keer) bij een andere kolom optelt blijft de determinant hetzelfde. En omdat: $det(A^T) = det(A)$, geldt datzelfde dus ook voor rijen! $\mathcal{E}$ optellen $det(A)$

Bijvoorbeeld, stel we hebben de matrix A: $\mathcal{V}$ optellen $det(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Dat ziet indrukwekkend uit, maar als we de 1^e kolom met 2 vermenigvuldigen en bij de 2^e kolom optellen dan is

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2+2\cdot 1 & 3 & 2 \\ 3 & -6+2\cdot 3 & 0 & 7 \\ -2 & 4+2\cdot -2 & 1 & 5 \\ -1 & 2+2\cdot -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En, als een hele kolom 0 is, dan is de determinant 0, dus $|A| = 0$

Als een hele rij of kolom 0 maken niet lukt kunnen we het toch veel eenvoudiger maken. Stel we hebben $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & 9 & 6 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Een hele rij of kolom kunnen we hier inderdaad niet 0 maken, maar we kunnen wel zorgen dat zo veel mogelijk 0 worden. Om te beginnen trekken we 3 keer de 1^e rij van de 2^e rij af. Dan is:

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & 9 & 6 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4-3\cdot 1 & -6-3\cdot -2 & 9-3\cdot 3 & 6-3\cdot 2 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\
&= 1\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} + -2\cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} - -1\cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Omdat de determinant immers 0 is, als een rij of kolom enkel nullen bevat, blijft over:

$$
= 0 - 1\cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} + 0 - 0 = -1\cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}
$$

Je hoeftnu dus enkel te ontwikkelen naar de 2^e rij! Nu kun je de 2^e kolom van de 1^e aftrekken:

$$
\begin{aligned}
&= -1\cdot \begin{vmatrix} -2-3 & 3 & 2 \\ 1-1 & 1 & 5 \\ 2-2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\
&= -1\cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\
&= -1\cdot -5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\
&= -1\cdot -5\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\
&= -1\cdot -5\cdot (1\cdot -4 - 2\cdot 5) \\
&= -1\cdot -5\cdot (-4-10) \\
&= -1\cdot -5\cdot -14 \\
&= -70
\end{aligned}
$$

5.3 Opgaven

Bereken de determinanten van de volgende matrices:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{F} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{G} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 8 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.3.1 Extra opgaven

Bereken de determinanten van de volgende matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 3 \\ -7 & 5 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 11 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 8 & -6 \\ 9 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Quaternion

In software voor 3D-applicaties wordt eigenlijk niet de rotatie-methode gebruikt zoals die in hoofdstuk 3 is beschreven. Vaker wordt de methode van Euler gebruikt, maar die levert problemen op als je over 3 assen roteert. Dat probleem wordt de Gimbal Lock genoemd. Als twee assen over elkaar heen liggen is er een 'vrijheidsgraad' verdwenen en kan een object dus maar in twee richtingen roteren, waar drie richtingen gewenst zijn. Kijk gerust op YouTube wat info hierover, dit probleem is namelijk makkelijker te snappen met een animatie ervan. Dit is een probleem dat zich zowel in computer graphics als in robotica voor doet. Quaternionen hebben dit probleem niet en worden dan ook veelvuldig ingezet bij rotaties in robotica en computer graphics. Om quaternionen te begrijpen en te kunnen gebruiken moeten we eerst even iets over complexe getallen uitleggen.

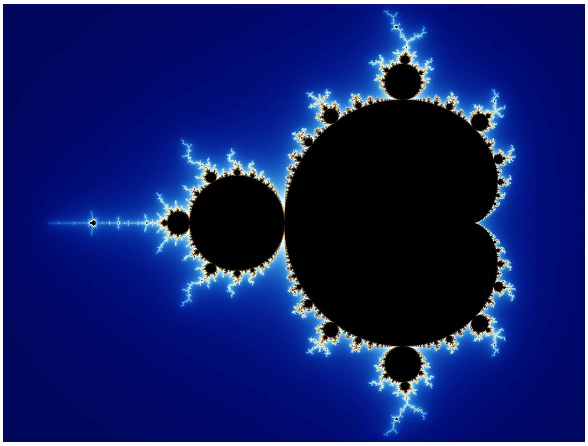

Figure 6.1: *Voorbeeld van een fractal, de Mandelbrotverzameling (Bron: Wikipedia). Tip: Martin Molema kan je over dergelijke figuren van alles vertellen en laten zien.*

6.1 Complexe getallen

Complexe getallen (en quaternionen) zijn zeer handige 'rekenhulpjes' in scala aan werkvelden, zoals in de 3D-simulaties, meet- regeltechniek, signaalbewerking en in de elektrotechniek. Ze zijn daarnaast ook een belangrijk in fractals, daar kun je van die mooie wiskunde figuren uit maken, zoals figuur 6.1.

Complexe getallen zijn een uitbreiding van de reële getallen. Bij het vak discrete wiskunde heb je inmiddels een aantal getalverzamelingen geleerd. bijvoorbeeld $\mathbb{N}$, de natuurlijke getallen. Dit zijn alle gehele getallen vanaf 0, dus $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Wil je ook iets doen met negatieve getallen? Bijv. $3 - 4 = ?$, Dan is de verzameling $\mathbb{N}$ dus niet toereikend. Je moet dan uitwijken naar een uitbreiding. Bijv. $\mathbb{Z}$, de gehele getallen, deze omvat naast alle getallen van $\mathbb{N}$, ook de negatieve getallen, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Echter als je $\frac{1}{2} = ?$ wil uitrekenen is ook deze verzameling niet genoeg. Daarvoor kunnen we uitwijken naar de rationele getallen ($\mathbb{Q}$, deze omvat naast alles van $\mathbb{Z}$, ook breuken) of direct naar $\mathbb{R}$, de reële getallen, deze verzameling omvat naast alle getallen van $\mathbb{Q}$ ook bijzondere getallen die niet uit te drukken zijn in een breuk, zoals $\sqrt{2}$ of π.

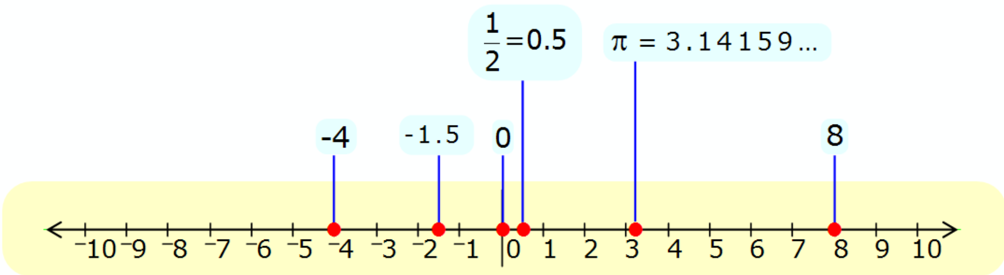

Figure 6.2: $\mathbb{R}$ omvat elk denkbaar getal op een lijn.

Maar wat nu als je bijv. x probeert op te lossen uit de volgende vergelijking?

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &= 0 \\
x^2 &= -1 \\
x &= \sqrt{-1} \qquad ???
\end{aligned}
$$

Er is geen enkel getal in $\mathbb{R}$ waarvan je de wortel kunt nemen zodat er -1 uitkomt. Wellicht heb je ooit wel gehoord van een docent wiskunde dat $\sqrt{-1}$ dan ook 'niet kan' en op zich klopt dat, voor $\mathbb{R}$ althans. Maar met complexe getallen is dit wel op te lossen. Complexe getallen hebben namelijk een 'imaginair deel', i en daarvoor geldt:

Δ imaginair

$$i^2 = -1$$

In het bovenstaande voorbeeld zou $x = i$, dus een oplossing zijn. Vaak worden complexe getallen toegepast als er geen (of lastig een) oplossing in $\mathbb{R}$ gevonden kan worden. Men zet dan het getal om in een complex getal, voert daarin allerlei berekeningen uit, en zet het dan weer om naar een reëel getal (Dat laatste gaat in dit kleine voorbeeld echter niet).

We definiëren een complex getal z als: $z = a + bi$ met a en b reële getallen

Δ getal in $\mathbb{C}$

Bijvoorbeeld, $z = 2 + 3i$ is een complex getal. Complexe getallen ($\mathbb{C}$) kun je zien als 2-dimensionale getallen, zie ook figuur 6.3.

∇ getal in $\mathbb{C}$

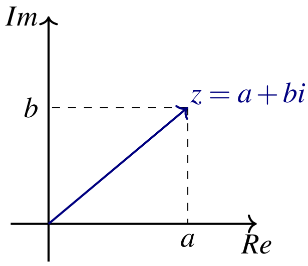

Figure 6.3: Complexe getallen kun je zien als 2-dimensionaal, waarbij een getal z een 'reëel deel' a heeft en een 'imaginair deel' bi.

We zeggen ook wel dat z bestaat uit een reëel deel a en een imaginair deel bi. Je kunt met complexe getallen net zo rekenen als met reële getallen als je maar rekening houdt met $i^2 = -1$. Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}(1-i)^2 &= (1-i)\cdot(1-i)\\ &= (1\cdot 1) + (1\cdot -i) + (-i\cdot 1) + (-i\cdot -i)\\ &= 1 - i - i - 1\\ &= -2i\end{aligned}$$

∇ imaginair

6.2 Quaternionen

Quaternionen zijn een uitbreiding van complexe getallen, ze worden aangegeven met $\mathbb{H}$. In plaats van één imaginair deel heb je er hier drie:

Een quaternion is:

Δ quaternion

$q = a + bi + cj + dk$ Waarbij: a, b, c, d ***reëel*** zijn, en i, j, k ***imaginair***

Je zou Quaternionen dus kunnen zien als vier-dimensionale getallen, al is dat wat moeilijk grafisch voor te stellen. Bij Quaternionen voldoen i, j, k zich aan de volgende regels:

$$i^2 = j^2 = k^2 = i\cdot j\cdot k = -1$$

$$\begin{array}{ll} i\cdot j = k & j\cdot i = -k\\ i\cdot k = -j & k\cdot i = j\\ j\cdot k = i & k\cdot j = -i\end{array}$$

Met a, b, c en d kun je gewoon rekenen, omdat het reële getallen zijn. Ter voorbeeld: $q_1 = 2 - i + 2j - 3k$ is een quaternion, net als $q_2 = -j + k$.

∇ quaternion

6.2.1 Rekenschema

Voor het berekenen van de rotatie wordt gebruik gemaakt van quaternion vermenigvuldiging. Twee quaternionen met elkaar vermenigvuldigen gaat via onderstaande tabel:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Je zoekt *eerst* in de 1^e kolom (blauw) welke van i, j of k je nodig hebt en *daarna* het volgende imaginaire getal in de 1^e rij (rood). Op het kruispunt staat het resultaat van de vermenigvuldiging (de volgorde is belangrijk omdat bijv. $i \cdot k = -j$ maar $k \cdot i = j$!)

Als $q_1 = 6 + 3i - 5j + 2k$ en $q_2 = 2 + i + 4j - 2k$ wat is dan $q_1 \cdot q_2$? Daarvoor zijn er 2 manieren:

V quaterniontabel

1. invullen in tabel

Dit is de handigste manier: Schrijf de eerste quaternion in de eerste kolom en de tweede quaternion in de eerste rij. Vul op de kruispunten de vermenigvuldigingen in met de regels uit het schema. Bijvoorbeeld op het kruispunt van de 3^e rij en de 5^e kolom: $3i \cdot -2k = -6ik$ en omdat $i \cdot k = -j$ is de uitkomst $--6j = 6j$.

$q_1 \cdot q_2$	2	i	4j	-2k
6	12	6i	24j	-12k
3i	6i	-3	12k	6j
-5j	-10j	5k	20	10i
2k	4k	2j	-8i	4

Nu kun je het antwoord van linksbovenin tot rechtsonderin af lezen in de tabel. Daarna verzamel je alle i, j en k:

$$
\begin{aligned}
q_1 \cdot q_2 &= 12 + 6i + 24j - 12k + 6i - 3 + 12k + 6j - 10j + 5k + 20 + 10i + 4k + 2j - 8i + 4 \\
&= 12 - 3 + 20 + 4 + (6 + 6 + 10 - 8)i + (24 + 6 - 10 + 2)j + (-12 + 12 + 5 + 4)k \\
&= 33 + 14i + 22j + 9k
\end{aligned}
$$

2. Uitschrijven

Je schrijft alle vermenigvuldigingen op en kijkt per vermenigvuldiging in de tabel wat er uit komt. 'Haakjes wegwerken' dus, weer een flashback naar het vak logica:

$$
\begin{aligned}
q_1 \cdot q_2 &= (6+3i-5j+2k)\cdot(2+i+4j-2k) \\
&= 6\cdot 2+6i+6\cdot 4j+6\cdot -2k && \text{'gewoon' vermenigvuldigen} \\
&\quad +3i\cdot 2+3i\cdot i+3i\cdot 4j+3i\cdot -2k && i \text{ in } 1^e \text{ kolom opzoeken} \\
&\quad +-5j\cdot 2+-5j\cdot i+-5j\cdot 4j+-5j\cdot -2k && j \text{ in } 1^e \text{ kolom opzoeken} \\
&\quad +2k\cdot 2+2k\cdot i+2k\cdot 4j+2k\cdot -2k && k \text{ in } 1^e \text{ kolom opzoeken} \\
&= 12+6i+24j-12k \\
&\quad +6i-3+12k+6j \\
&\quad -10j+5k+20+10i \\
&\quad +4k+2j-8i+4 && \text{nu alle } i,j \text{ en } k \text{ bij elkaar zoeken} \\
&= 12-3+20+4 \\
&\quad +(6+6+10-8)i \\
&\quad +(24+6-10+2)j \\
&\quad +(-12+12+5+4)k \\
&= 33+14i+22j+9k
\end{aligned}
$$

6.3 Geconjugeerde quarternion

Een quaternion kan geconjugeerd worden en dit is ook nodig voor het berekenen van een rotatie. Een geconjugeerde quaternion wordt genoteerd als q^* en wordt in algemene vorm als volgt geschreven:

Δ geconjugeerd

Als $q = a+bi+cj+dk$ dan is: $q^* = a-bi-cj-dk$

Let op! Alleen de imaginaire delen i, j en k veranderen van plus naar min (of andersom). Het reële deel (a) blijft zoals het is.

We doen even een paar voorbeeldjes:

Stel: $q = 1-2i+3j+k$ dan is $q^* = 1+2i-3j-k$

En als: $q = i-3j$ dan is $q^* = -i+3j$

$\mathcal{V}$ geconjugeerd

6.4 Roteren met quaternionen

We gebruiken quaternionen om te roteren. Daarvoor moeten we dan wel eerst de punten van $\mathbb{R}^3$ omzetten naar quaternionen.

Δ puntquaternion

Als $P = (x,y,z)$ in $\mathbb{R}^3$ dan is het puntquaternion dat er bij hoort: $p = xi+yj+zk$

Stel: $P = (1,3,-2)$ dan is het puntquaternion p dat er bij hoort:

$$p = 0+1\cdot i+3j-2k \; = i+3j-2k$$

$\mathcal{V}$ puntquaternion

Δ quaternionrotatie

Voor het berekenen van een rotatie in $\mathbb{R}^3$ geldt de volgende formule: Als p een punt en q_r een rotatie is in $\mathbb{R}^3$ dan is: het geroteerde punt $p' = q_r \cdot p.q_r^*$

Bijvoorbeeld: Stel $P = (3,0,1)$ en $q_r = 2j - k$ wat is dan $q_r \cdot p \cdot q_r^*$?

V quaternionrotatie

$$p = 0 + 3i + 0 \cdot j + k = 3i + k$$
$$q_r^* = 0 + 0 \cdot i - 2j + k = -2j + k$$

Dan is de tabel voor $p \cdot q_r^*$: (p in de 1^e kolom, q_r^* in de 1^e rij)

$p \cdot q_r^*$	0	0	-2j	k
0	0	0	0	0
3i	0	0	-6k	-3j
0	0	0	0	0
k	0	0	2i	-1

En dus is $p \cdot q_r^* = -1 + 2i - 3j - 6k$

Daarna met de tabel $q_r \cdot (p \cdot q_r^*)$ uitrekenen (q_r in de 1^e kolom, $p \cdot q_r^*$: in de 1^e rij)

$q_r \cdot (p.q_r^*)$	-1	2i	-3j	-6k
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
2j	-2j	-4k	6	-12i
-k	k	-2j	-3i	-6

en dus is $p' = q_r \cdot (p \cdot q_r^*) = -15i - 4j - 3k$. Dat betekent dat het punt $P = (3,0,1)$ onder het quaternion $q_r = 2j - k$ afgebeeld wordt op het punt $P' = (-15,-4,-3)$.

Dat is een vreemde rotatie (want de afstand tot de oorsprong wordt ineens groter). Dat komt omdat we voor q_r wat gemakkelijke waardes hebben genomen en dat is geen echt rotatiequaternion.

Δ quaternionrotatie

Daarom hebben we de volgende definitie nodig: Gegeven de eenheidsvector $\hat{v}$ en de hoek α dan is: het rotatiequaternion:

$$q_r = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{v}_1 i + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{v}_2 j + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{v}_3 k$$

Ter voorbeeld: Stel $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan is $\hat{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (omdat $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$)

V quaternionrotatie

Stel verder dat we over $\alpha = 180°$ willen roteren, dan is $\frac{180°}{2} = 90°$. We weten dat $\cos(90°) = 0$ en $\sin(90°) = 1$ En dus is:

$$q_r = \cos\left(\frac{180}{2}\right) + \sin\left(\frac{180}{2}\right) \cdot -\frac{3}{5} \cdot i + \sin\left(\frac{180}{2}\right) \cdot 0 \cdot j + \sin\left(\frac{180}{2}\right) \cdot \frac{4}{5} \cdot k$$
$$q_r = \cos(90) - \frac{3}{5} \cdot \sin(90) \cdot i + \frac{4}{5} \cdot \sin(90) \cdot k$$
$$q_r = 0 - \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot i + \frac{4}{5} \cdot 1 \cdot k$$
$$q_r = -\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}k$$

We nemen dezelfde vector en hoek als hierboven. Stel verder dat we $P = (-1,-1,0)$ willen roteren. Dan is het puntquaternion p:

V quaternionrotatie

$$p = -i - j$$

We hadden $q_r = -\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}k$ en dus is q_r^*:

$$q_r^* = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}k$$

Eerst moeten we $p \cdot q_r^*$ uitrekenen:

$p \cdot q_r^*$	0	$3/5i$	0	$-4/5k$
0	0	0	0	0
-i	0	$3/5$	0	$-4/5j$
-j	0	$3/5k$	0	$4/5i$
0	0	0	0	0

En dus is $p \cdot q_r^* = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i - \frac{4}{5}j + \frac{3}{5}k$

Anders geschreven:

$$p \cdot q_r^* = \frac{1}{5}(3 + 4i - 4j + 3k)$$

Dit vullen we in in de 1^e rij en q_r in de 1^e kolom om $q_r \cdot (p \cdot q_r^*)$ te berekenen:

$q_r \cdot (p \cdot q_r^*)$	3	4i	-4j	3k	$\times \frac{1}{5}$
0	0	0	0	0	
-3i	-9i	12	12k	9j	
0	0	0	0	0	
4k	12k	16j	16i	-12	
$\times \frac{1}{5}$					

Om de berekening overzichtelijk te houden zijn de breuken 'buiten haakjes gehaald'. Zowel voor q_r als voor $p \cdot q_r^*$ is dat $\frac{1}{5}$.

Dat betekent dat we alles met $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ moeten vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned} p' &= q_r \cdot (p \cdot q_r^*) \\ &= \frac{1}{25}(-9i + 12 + 12k + 9j + 12k + 16j + 16i - 12) \\ &= \frac{1}{25}(7i + 25j + 24k) \end{aligned}$$

En dat betekent dat het punt $P = (-1, -1, 0)$ waar we mee begonnen geroteerd wordt naar P':

$$P' = \begin{pmatrix} 7/25 \\ 25/25 \\ 24/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.28 \\ 1 \\ 0.96 \end{pmatrix}$$

Zie ook figuur 6.4

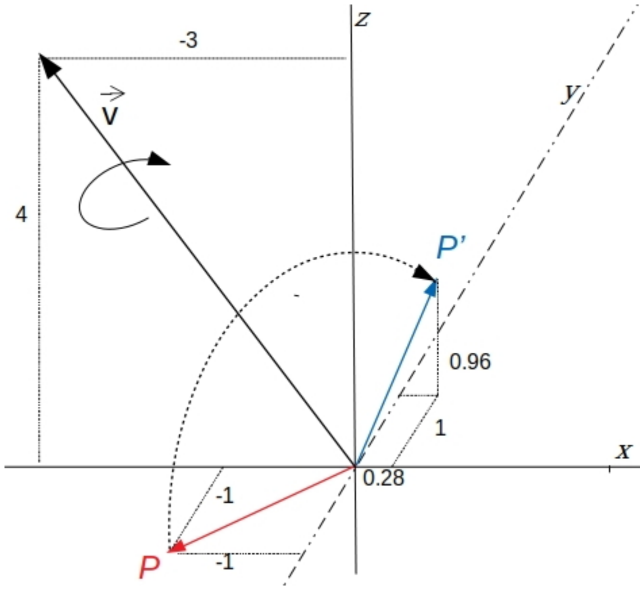

Figure 6.4: *De rotatie om* $\vec{v}$ *over* $180°$. $P(-1,-1,0)$, *wordt geroteerd naar* $P' = (0.28, 1, 0.96)$.

6.5 Opgaven

1. Gegeven $P(-2,2,9)$ en de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. We roteren over $84°$. Geef het puntquaternion p en het geconjugeerde rotatiequaternion q_r^*.

2. Gegeven $P(23,-15,7)$ en de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$. We roteren over $42°$. Geef het puntquaternion p en het geconjugeerde rotatiequaternion q_r^*.

3. Gegeven $a = 2i - 4j + 5k$ en $b = 7 + 2i + j$. Bereken het product: $a \cdot b$

4. Gegeven $c = -16 - 2i + 3j + 2k$ en $d = -1 + 4i + 2k$. Bereken het product: $c \cdot d$

5. Gegeven $P(-2,0,5)$ en de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. We roteren over $60°$. Gebruik quaternionen om het beeld van P onder deze rotatie uit te rekenen.

6.5.1 extra opgaven

1. Gegeven $P(2,2,0)$ en de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. We roteren over $42°$. Geef het puntquaternion p en het geconjugeerde rotatiequaternion q_r^*.
2. Gegeven $P(6,-2,3)$ en de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$. We roteren over $84°$. Geef het puntquaternion p en het geconjugeerde rotatiequaternion q_r^*.
3. Gegeven $e = 3 + 2j - k$ en $f = 2i + 3j + 3k$. Bereken het product: $e \cdot f$
4. Gegeven $P(-2,0,0)$ en de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$. We roteren over $60°$. Gebruik quaternionen om het beeld van P onder deze rotatie uit te rekenen.
5. Schrijf een programma dat quaternionen kan vermenigvuldigen.
6. Schrijf een programma dat quaternionrotatie kan uitvoeren (dus gegeven een willekeurige vector $\vec{v}$, hoek α en punt P, kan uitrekenen waar P' onder de rotatie uitkomt).

7. Antwoorden

7.1 antwoorden hoofdstuk 2

1. $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\6\\7\end{pmatrix} \qquad \vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\-3\\-2\\-7\end{pmatrix}, \qquad (\vec{a},\vec{b})=0$
2. $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{13}}\right)\approx 119.7^\circ$
3. De lengte van $\vec{v}$ is $|\vec{v}| = \sqrt{42}$
4. $|\vec{v}|=10$ en dus $\hat{v}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\5\\7\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.1\\0.5\\0.7\\0\\0.5\end{pmatrix}$
5. afstand $=\frac{2}{3}\sqrt{24}\approx 3.27$
6. afstand $=3\sqrt{3}\approx 5.2$

antwoorden extra opgaven hoofdstuk 2

1. $\vec{d}+\vec{e}=\begin{pmatrix}4\\5\\-2\\7\end{pmatrix} \qquad \vec{d}-\vec{e}=\begin{pmatrix}2\\-9\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad (\vec{d},\vec{e})=3-14+10=-1$
2. $(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix})=-5$ en dus $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{-5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{25}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)\approx 108.4$
3. De lengte van $\vec{w}$ is $|\vec{w}| = \sqrt{82}\approx 9.06$
4. afstand $= 11/3$
5. afstand $=\frac{420}{1928}\cdot\sqrt{1928}=\frac{105}{482}\cdot\sqrt{1928}\approx 9.57$

7.2 antwoorden hoofdstuk 3

1. $M^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$
2. Het product is: $\begin{pmatrix} 14 & 52 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$
3. De rotatie R is: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 62° & \sin 62° \\ 0 & -\sin 62° & \cos 62° \end{pmatrix}$
4. De projectie P_1 is: $\begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 0 \\ 3/10 & 9/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

antwoorden extra opgaven hoofdstuk 3

1. $N^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 9 \\ -3 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. Het product is: $\begin{pmatrix} 20 & 3 & 0 \\ 40 & 6 & 0 \\ 8 & -11 & -12 \end{pmatrix}$
3. De rotatie R_1 is: $\begin{pmatrix} \cos 4° & \sin 4° & 0 \\ -\sin 4° & \cos 4° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. De rotatie R_2 is: $\begin{pmatrix} \cos 42° & 0 & \sin 42° \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 42° & 0 & \cos 42° \end{pmatrix}$
5. De rotatie R_3 is: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 36° & -\sin 36° \\ 0 & \sin 36° & \cos 36° \end{pmatrix}$
6. De projectie P_2 is: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7.3 antwoorden hoofdstuk 4

1. $T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $S = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$
3. $T_{3a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $R_a = \begin{pmatrix} \cos 62° & \sin 62° & 0 \\ -\sin 62° & \cos 62° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dus $B = \begin{pmatrix} \cos 62° & \sin 62° & 2 \\ -\sin 62° & \cos 62° & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $T_{4a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $S_a = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ dus $C = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

antwoorden extra opgaven hoofdstuk 4

1. $S_2 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
2. $S_3 = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$
3. $T_{1a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $T_{2a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.

$$S_3 \cdot T_{1a} \cdot S_2 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 20 & 0 & -125 \\ 16 & 12 & -15 & -60 \\ -12 & -9 & -20 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

7.4 antwoorden hoofdstuk 5

A 5
B 0
C 0
D -55
E -55
F 0
G 100
H 34

antwoorden extra opgaven hoofdstuk 5

A 0
B 10
C 2
D 30
E 0
F 18

G 1

7.5 antwoorden hoofdstuk 6

1.

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

$$p = -2i + 2j + 9k$$

$$q_r^* = \cos(42°) + \frac{4\sin(42°)}{5}i - \frac{3\sin(42°)}{5}k$$

2.

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} 6/11 \\ -6/11 \\ -7/11 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$p = 23i - 15j + 7k$$

$$q_r^* = \cos(21°) - \frac{6\sin(21°)}{11}i + \frac{6\sin(21°)}{11}j - \frac{7\sin(21°)}{11}k$$

3.

$a \cdot b$	7	2i	j	0k
0	0	0	0	0
2i	14i	-4	2k	0
-4j	-28j	8k	4	0
5k	35k	10j	-5i	0

$$a \cdot b = -4 + 4 + 14i - 5i - 28j + 10j + 2k + 8k + 35k = 9i - 18j + 45k$$

4.

$c \cdot d$	-1	4i	0j	2k
-16	16	-64i	0	-32k
2i	2i	8	0	4j
3j	-3j	-12k	0	6i
2k	-2k	8j	0	-4

$$c \cdot d = 16 + 8 - 4 - 64i + 2i + 6i + 4j - 3j + 8j - 32k - 12k - 2k = 20 - 56i + 9j - 46k$$

5.

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p = -2i + 5k$$

$$q_r = \cos(30°) - \sin(30°)i = \cos(30°) - 0,5i$$

$$q_r^* = \cos(30°) + \sin(30°)i = \cos(30°) + 0,5i$$

$q_r \cdot p$	0	-2i	0j	5k
$\cos(30°)$	0	$-2\cos(30°)i$	0	$5\cos(30°)k$
-0,5i	0	-1	0	2,5j
0j	0	0	0	0
0k	0	0	0	0

$$q_r \cdot p = -1 - 2\cos(30°)i + 2,5j + 5\cos(30°)k$$

$(q_r \cdot p) \cdot q_r^*$	$\cos(30°)$	0,5i	0j	0k
-1	$-\cos(30°)$	-0,5i	0	0
$-2\cos(30°)i$	-1,5i	$\cos(30°)$	0	0
2,5j	$2,5\cos(30°)j$	-1,25k	0	0
$5\cos(30°)k$	3,75k	$2,5\cos(30°)j$	0	0

$$p' = (q_r \cdot p) \cdot q_r^* = -2i + 5\cos(30°)j + 2,5k$$

D.w.z. het punt P komt terecht op $P' = \begin{pmatrix} -2 \\ 5\cos(30°) \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 5\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix}$

antwoorden extra opgaven hoofdstuk 6

1.

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} 4/6 \\ -2/6 \\ 4/6 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad p = 2i + 2j$$

$$q_r = \cos(21°) + \frac{2}{3}\sin(21°)i - \frac{1}{3}\sin(21°)j + \frac{2}{3}\sin(21°)k$$

$$q_r^* = \cos(21°) - \frac{2}{3}\sin(21°)i + \frac{1}{3}\sin(21°)j - \frac{2}{3}\sin(21°)k$$

2.

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad p = 6i - 2j + 3k$$

$$q_r = \cos(42°) - \frac{2}{3}\sin(42°)i + \frac{2}{3}\sin(42°)j + \frac{1}{3}\sin(42°)k$$

$$q_r^* = \cos(42°) + \frac{2}{3}\sin(42°)i - \frac{2}{3}\sin(42°)j - \frac{1}{3}\sin(42°)k$$

3.

$e \cdot f$	0	2i	3j	3k
3	0	6i	9j	9k
0i	0	0	0	0
2j	0	-4k	-6	6i
-k	0	-2j	3i	3

$$e \cdot f = -6 + 3 + 6i + 6i + 3i + 9j - 2j + 9k - 4k = -3 + 15i + 7j + 5k$$

4.

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p = -2i$$

$$q_r = \cos(30°) + \sin(30°)j = \cos(30°) + \frac{1}{2}j$$

$$q_r^* = \cos(30°) - \sin(30°)j = \cos(30°) - \frac{1}{2}j$$

$q_r \cdot p$	0	-2i	0j	0k
$\cos(30°)$	0	$-2\cos(30°)i$	0	0
0i	0	0	0	0
$^1/_2 j$	0	k	0	0
0k	0	0	0	0

$$q_r \cdot p = -2\cos(30°)i + k$$

$(q_r \cdot p) \cdot q_r^*$	$\cos(30°)$	0i	$-^1/_2 j$	0k
0	0	0	0	0
$-2\cos(30°)i$	$^{-3}/_2 i$	0	$\cos(30°)k$	0
0j	0	0	0	0
$1k$	$\cos(30°)k$	0	$^1/_2 i$	0

$$\begin{aligned} p' &= (q_r \cdot p) \cdot q_r^* \\ &= -\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}i + \cos(30°)k + \cos(30°)k \\ &= -i + 2\cos(30°)k \end{aligned}$$

en dus komt punt $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ terecht op punt $P' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2\cos(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Index van definities

Index van eigenschappen

Index van voorbeelden

NHL STENDEN

university of applied sciences