

# Lineaire Algebra

Studiejaar '22-'23

HBO-ICT

Rolink, S.  
Schweizer, D.



university of  
applied sciences

Copyright © 2022 Wouter van de Ploeg & Stefan Rolink

PUBLISHED BY NHL STENDEN

NHLSTENDEN.COM

Made with L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the “License”). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at <http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an “AS IS” BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

*Versie 4.16, juni 2022*



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Algemene Informatie</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Vector</b>	<b>9</b>
<b>2.1</b>	<b>Rekenen met vectoren</b>	<b>9</b>
<b>2.2</b>	<b>Vectoren en meetkunde</b>	<b>13</b>
<b>2.3</b>	<b>Vectorvoorstelling van lijn en vlak</b>	<b>15</b>
2.3.1	Definities lijn	15
2.3.2	Definities vlak	16
2.3.3	Berekeningen lijn	17
2.3.4	Berekeningen vlak	18
<b>2.4</b>	<b>Normaalvectoren</b>	<b>19</b>
2.4.1	Normaal van lijn	20
2.4.2	Normaal van vlak	20
<b>2.5</b>	<b>Afstand van punt tot vlak</b>	<b>21</b>
2.5.1	Extra voorbeeld	24
<b>2.6</b>	<b>Opgaven</b>	<b>25</b>
2.6.1	Extra opgaven	25
<b>3</b>	<b>Matrix, rotatie en projectie</b>	<b>27</b>
<b>3.1</b>	<b>Bijzondere matrices</b>	<b>27</b>
<b>3.2</b>	<b>Matrixvermenigvuldiging</b>	<b>29</b>
3.2.1	eigenschappen van matrixvermenigvuldiging	30
<b>3.3</b>	<b>De matrix van een afbeelding bepalen</b>	<b>30</b>
3.3.1	Voorbeeld matrix bepalen van afbeelding (projectie)	32
3.3.2	Het resultaat berekenen	32

<b>3.4</b>	<b>Rotatie</b>	<b>33</b>
3.4.1	De matrix van een rotatie in $\mathbb{R}^2$	33
3.4.2	De matrix van een rotatie in $\mathbb{R}^3$	35
<b>3.5</b>	<b>Projectie</b>	<b>37</b>
3.5.1	De matrix van een projectie in $\mathbb{R}^2$	37
3.5.2	De matrix van een projectie in $\mathbb{R}^3$	40
<b>3.6</b>	<b>Opgaven</b>	<b>42</b>
3.6.1	Extra opgaven	42
<b>4</b>	<b>Spiegeling, translatie en samenstelling</b>	<b>43</b>
<b>4.1</b>	<b>Spiegeling</b>	<b>43</b>
4.1.1	De matrix van een spiegeling in $\mathbb{R}^2$	44
4.1.2	De matrix van een spiegeling in $\mathbb{R}^3$	45
<b>4.2</b>	<b>Translatie</b>	<b>46</b>
4.2.1	Translatie niet lineair	46
4.2.2	Affiene matrix van translatie in $\mathbb{R}^2$	47
4.2.3	Rekenen met een affiene matrix in $\mathbb{R}^2$	47
4.2.4	Een translatie in $\mathbb{R}^3$	48
4.2.5	Rekenen met een affiene matrix in $\mathbb{R}^3$	48
<b>4.3</b>	<b>Samenstelling</b>	<b>49</b>
4.3.1	Samenstelling in $\mathbb{R}^2$	49
4.3.2	Samenstelling met affiene matrices in $\mathbb{R}^2$	50
4.3.3	Samenstelling met affiene matrices in $\mathbb{R}^3$	51
<b>4.4</b>	<b>Opgaven</b>	<b>52</b>
4.4.1	Extra opgaven	52
<b>5</b>	<b>Determinant</b>	<b>53</b>
<b>5.1</b>	<b>Determinant van een <math>2 \times 2</math> matrix</b>	<b>53</b>
5.1.1	Eigenschappen van determinanten	53
<b>5.2</b>	<b>Ontwikkelen van een determinant</b>	<b>54</b>
5.2.1	Rekenhulp determinant	56
<b>5.3</b>	<b>Opgaven</b>	<b>59</b>
5.3.1	Extra opgaven	60
<b>6</b>	<b>Quaternion</b>	<b>61</b>
<b>6.1</b>	<b>Complexe getallen</b>	<b>62</b>
<b>6.2</b>	<b>Quaternionen</b>	<b>63</b>
6.2.1	Rekenschema	64
<b>6.3</b>	<b>Geconjugeerde quaternion</b>	<b>65</b>
<b>6.4</b>	<b>Roteren met quaternionen</b>	<b>65</b>
<b>6.5</b>	<b>Opgaven</b>	<b>68</b>
6.5.1	extra opgaven	68

<b>7</b>	<b>Antwoorden .....</b>	<b>71</b>
7.1	antwoorden hoofdstuk 2	71
7.2	antwoorden hoofdstuk 3	72
7.3	antwoorden hoofdstuk 4	72
7.4	antwoorden hoofdstuk 5	73
7.5	antwoorden hoofdstuk 6	74
	<b>Index van definities .....</b>	<b>77</b>
	<b>Index van eigenschappen .....</b>	<b>79</b>
	<b>Index van voorbeelden .....</b>	<b>81</b>





# 1. Algemene Informatie

## Doelgroep en instroomeisen

Dit dictaat is bedoeld voor 2e jaars studenten HBO-ICT die de specialisatie SE hebben gekozen. Voor deze module gelden geen instroomeisen. Maar het is wel erg handig als je de wiskunde uit het eerste jaar onder de knie hebt.

## Leeruitkomsten

De leeruitkomsten van dit vak zijn dat je

- kunt rekenen met vectoren, matrices, lijnen en vlakken in  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$
- matrices van afbeeldingen in  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  kunt bepalen
- een determinant kunt uitrekenen
- kunt rekenen met quaternionen
- begrip hebt van de mogelijkheden die bovenstaande zaken bieden voor grafische applicaties

## Symbolen

In de wiskunde wordt veel gebruik gemaakt van (misschien onbekende) symbolen. Het is belangrijk om daar precies mee om te gaan. Bijvoorbeeld:  $\vec{a} \neq \hat{a}$ , wat in normale mensentaal betekent: de *vector*  $a$  is iets anders dan de *eenheidsvector*  $a$ . De meeste symbolen in dit dictaat worden algemeen gebruikt in de wiskunde maar er zijn drie speciale alleen voor dit dictaat:

Met het teken  $\Delta$  in de kantlijn wordt een definitie aangegeven.

Met het teken  $\mathbf{V}$  in de kantlijn wordt een voorbeeld aangegeven.

Met het teken  $\mathcal{E}$  in de kantlijn wordt een eigenschap aangegeven.

$\Delta$	Definitie
$\mathbf{V}$	Voorbeeld
$\mathcal{E}$	Eigenschap

Zoals normaal in de wiskunde gebruiken we letters uit het Griekse alfabet, bijvoorbeeld  $\alpha$  (alfa, de Griekse a) de letter die het alfabet z'n naam gegeven heeft, en  $\lambda$  (lambda, de Griekse l)

En toch zijn soms zelfs wiskundigen slordig. Bijvoorbeeld bij het verschil tussen

punten en vectoren. Een punt is heel iets anders dan een vector (zie figuur 2.1), en toch zullen de termen door elkaar gebruikt worden zolang er geen misverstand mogelijk is.

### **Wiskunde lezen**

Bij wiskundige teksten gaat het lezen veel langzamer dan bij 'gewone' teksten. Het is niet raar als je een zin 3 keer moet lezen voor dat je hem snapt. (en dan nog kan het zijn dat je eerst de voorgaande zin nog een keer moet lezen). Kortom lezen en begrijpen van wiskunde kost tijd en oefening.

In de wiskunde is het gebruikelijk om van alles wat je opschrijft ook het bewijs te leveren. Dat doen we in dit dictaat niet, omdat dat te veel zou afleiden, wel wordt zoveel mogelijk uitleg gegeven. Wil je nagaan of de dingen die hier instaan kloppen, dan kun je of het zelf proberen te bewijzen, of opzoeken op internet.

### **Leeswijzer**

Aan het einde van elk hoofdstuk staan opgaven en 'extra opgaven'. Het idee is dat de gewone opgaven in principe genoeg oefening bieden om de stof te beheersen. Wil je toch nog meer oefenen of herhalen dan zijn daarvoor de extra opgaven. In hoofdstuk 2 wordt de basis van vectoren behandeld. Hoofdstuk 3, 4 en 5 gaan over matrices, de belangrijkste hulpmiddelen voor maken van grafische berekeningen, die in alle games en (bewegende) 3D-zaken gebruikt worden. Hoofdstuk 3 gaat over draaiingen en projectie, hoofdstuk 4 over spiegelen, translaties en samenstellingen. Hoofdstuk 5 gaat over een belangrijke eigenschap van matrices: determinanten. Hoofdstuk 6 gaat over een manier van rekenen, quaternionen, met behulp van complexe getallen, om de zogeheten 'Gimbal Lock' te vermijden. En in Hoofdstuk 7 tenslotte staan (korte) antwoorden op de opgaven bij elk hoofdstuk.

Dit dictaat is geschreven in  $\text{\LaTeX}$  (spreek uit: lateg) met behulp van Neovim en Overleaf.



## 2. Vector

In dit hoofdstuk behandelen we vectoren en hoe vectoren in de wiskunde gebruikt worden.

Een *vector* is

een verzameling getallen die in een rij of kolom gerangschikt zijn.

Δ vector

In dit dictaat bestaat een vector alleen uit reële getallen (d.w.z. gehele getallen, breuken en getallen als  $\pi$  of  $\sqrt{2}$ ). Alle reële getallen samen noemen we  $\mathbb{R}$ , de twee-dimensionale ruimte met reële getallen  $\mathbb{R}^2$ , en de drie-dimensionale ruimte  $\mathbb{R}^3$ . Een vector wordt hier geschreven als een kleine letter met een pijltje erboven, bijvoorbeeld  $\vec{b}$  en:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

V vector  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^2$

$\vec{x}$  is een vector in  $\mathbb{R}^3$ , een vector in de drie-dimensionale ruimte,  $\vec{x}$  bestaat uit 3 getallen:  $x_1, x_2$  en  $x_3$ .  $\vec{v}$  is een vector in  $\mathbb{R}^2$ , een twee-dimensionale vector in het platte vlak (en bestaat dus ook maar uit twee getallen:  $x$  en  $y$ ),  $\vec{s}$  een concrete vector in  $\mathbb{R}^3$  en  $\vec{a}$  een concrete vector in  $\mathbb{R}^2$  (zie figuur 2.1).

### 2.1 Rekenen met vectoren

Je kunt op verschillende manieren rekenen met vectoren.

#### Optellen

Het optellen van vectoren doe je door de overeenkomstige elementen van de vectoren bij elkaar op te tellen. Als volgt:

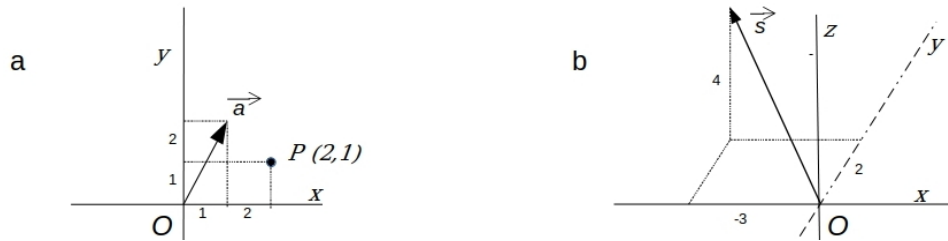


Figure 2.1: (a) De vector  $\vec{a}$  in  $\mathbb{R}^2$  is het 'pijlje' vanuit  $O$ , de oorsprong, naar het punt  $(1,2)$  met een lengte en een richting. Het punt  $P(2,1)$  heeft geen lengte of richting. (b) De vector  $\vec{s}$  in  $\mathbb{R}^3$  loopt iets naar achter omhoog.

De som van twee vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  is:

$$\Delta \text{ som} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Je kunt 2 vectoren alleen maar bij elkaar optellen als ze dezelfde dimensie hebben, dat wil zeggen een gelijk aantal elementen.

$$V \text{ som } \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 \\ -1+6 \\ 2+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$V \text{ som } \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+7 \\ 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (\text{zie figuur 2.2}).$$

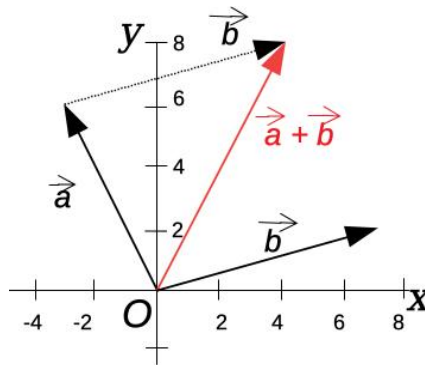


Figure 2.2: De som van de vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  is weer een vector. Ga voor jezelf na dat je de resulterende vector kunt krijgen door  $\vec{a}$  'op'  $\vec{b}$  te plaatsen en andersom.

### Scalair product

Als je een vector vermenigvuldigt met een getal heet dat vermenigvuldigen met een scalar (scalair product). Bij scalaire vermenigvuldiging worden alle elementen van de vector met datzelfde getal vermenigvuldigd.

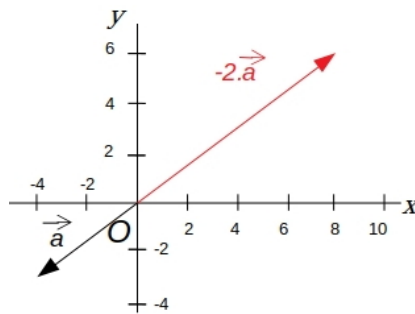
Het scalair product van een getal  $c$  en een vector  $\vec{a}$  is:

$$c \cdot \vec{a} = c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Δ scalair product

Als  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$  en  $c = -2$  dan is  $c \cdot \vec{a} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot -4 \\ -2 \cdot -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ .  
(Zie ook figuur 2.3)

V scalair product

Figure 2.3: Het scalair product van -2 en  $\vec{a}$ **Vershil**

Vectoren van elkaar aftrekken doe je door de overeenkomstige elementen van elkaar af te trekken:

Het verschil tussen twee vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  is:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Δ verschil

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ -1-6 \\ 2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

V verschil  $\mathbb{R}^3$ 

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-7 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (\text{figuur 2.4})$$

V verschil  $\mathbb{R}^2$ 

Net zo als bij het optellen van vectoren geldt bij het aftrekken dat alleen vectoren met dezelfde dimensie van elkaar kunnen worden afgetrokken. Zoals je in figuur 2.4 kunt zien is het verschil van twee vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  hetzelfde als het optellen van de vectoren  $\vec{a}$  en  $-\vec{b}$ . (vergelijk met figuur 2.2)

**Inproduct**

Je kunt niet zomaar 2 vectoren met elkaar vermenigvuldigen. Maar er zijn toch twee manieren om iets te doen wat er op lijkt: Het inwendig en het uitwendig product,

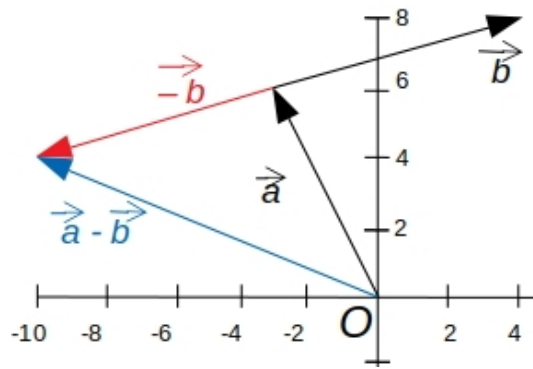


Figure 2.4: Het verschil van de vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  is  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + -\vec{b}$ .

ook wel inproduct en uitproduct genoemd. Het inproduct van twee vectoren is een getal(!), geen vector. We noteren het inproduct als:  $(\vec{a}, \vec{b})$  en we berekenen het als volgt: (We gebruiken hier stippeltjes . . . en het subscript  $n$  om aan te geven dat het over 2 of 3 of nog meer dimensies kan gaan)

Het inproduct van  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  is:

$\Delta$  inproduct  $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

$V$  inproduct bijvoorbeeld, als  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  en  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

dan is  $(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 0 + -1 \cdot 6 + 2 \cdot -4 = 0 - 6 - 8 = -14$

### Loodrechte vectoren

Twee vectoren staan loodrecht op elkaar als de hoek tussen beide vectoren  $90^\circ$  is. Dat leidt de volgende belangrijke eigenschap van het inproduct:

$\mathcal{E}$  inproduct  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$  dan en slechts dan als  $\vec{a}$  loodrecht op  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \neq \vec{0}$  en  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ).  
oftewel in wiskundetaal:  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .

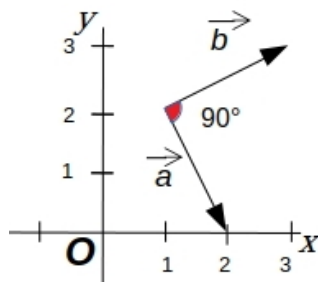


Figure 2.5: De vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  staan loodrecht op elkaar.

Stel dat  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  en  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  dan is  $(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 + -2 \cdot 1 = 0$  Zie figuur 2.5

**V** loodrecht

### Uitproduct

De andere manier waarop je 2 vectoren kunt 'vermenigvuldigen' heet het uitproduct of kruisproduct. Het uitproduct van 2 vectoren levert weer een vector op. Het uitproduct is alleen maar gedefinieerd in  $\mathbb{R}^3$ .

Het uitproduct van  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  is:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ -(a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

**Δ** uitproduct

als  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  en  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  dan is  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 4 \cdot -2 \\ -(-1 \cdot 1 - 4 \cdot 3) \\ -1 \cdot -2 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$

**V** uitproduct

Een belangrijke eigenschap van het uitproduct is de volgende:

**ε** uitproduct

De vector  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  staat loodrecht op  $\vec{a}$  en loodrecht op  $\vec{b}$

Neem  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  en  $\vec{c}$  als hierboven. dan is  $(\vec{c}, \vec{a}) = 10 \cdot -1 + 13 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = -10 + 26 - 16 = 0$  **V** loodrecht  
en  $(\vec{c}, \vec{b}) = 10 \cdot 3 + 13 \cdot -2 - 4 \cdot 1 = 30 - 26 - 4 = 0$

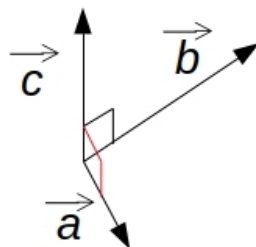


Figure 2.6: De vector  $\vec{c}$  staat loodrecht op  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$ .

## 2.2 Vectoren en meetkunde

Er bestaan een aantal meetkundige operaties die we op vectoren kunnen toepassen. Om te beginnen, de norm (of lengte) van een vector.

### Norm

De norm van een vector is de lengte daarvan. Dat is in  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^2$  makkelijk voor te stellen: je neemt gewoon de "lengte van het pijltje". De norm wordt geschreven met 2 verticale streepjes:

De norm van een vector  $\vec{a}$  is:

$$\Delta \text{ norm} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$\mathbf{V}$  norm als  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  dan is  $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  en dit principe werkt ook met hogere dimensies:

$$\text{als } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ dan is } |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-3)^2 + 4^2 + (-1)^2} = 6$$

### Eenheidsvector

Soms is het nodig om vectoren met lengte 1 te hebben:

$\Delta$  eenheidsvector Een eenheidsvector is een vector met lengte 1.

Een eenheidsvector wordt genoteerd met een accent circonflexe ( $\hat{\phantom{x}}$ , dakje). Bijvoorbeeld:

$$\mathbf{V} \text{ eenheidsvector} \quad \hat{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Een willekeurige vector  $\vec{v}$  is te schalen naar een eenheidsvector door  $\vec{v}$  te vermenigvuldigen met  $\frac{1}{\text{norm}} = \frac{1}{|\vec{v}|}$ . Dat wil zeggen  $\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ , oftewel:  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

De berekening van een eenheidsvector in 5 dimensies gaat als volgt:

$$\mathbf{V} \text{ eenheidsvector} \quad \text{als } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ dan is } |\vec{v}| = 6 \text{ (zie boven) en is}$$

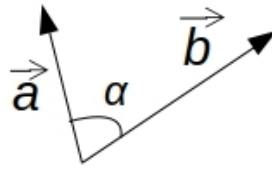
$$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/6 \\ 1/6 \\ -3/6 \\ 4/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/6 \\ -1/2 \\ 2/3 \\ -1/6 \end{pmatrix}$$

### Hoek tussen twee vectoren

We kunnen het inproduct gebruiken om de hoek tussen twee vectoren te berekenen. De formule voor de hoek tussen vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  gebruikt het inproduct en de norm:

$$\Delta \text{ hoek} \quad \cos \alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Daarbij is  $\alpha$  (*alfa*) de hoek tussen de vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$ . En cos staat voor cosinus, een maat voor de hoek, die je eenvoudig met je rekenmachine kunt uitrekenen. Zie figuur 2.7

Figure 2.7: Met  $\alpha$  geven we de hoek tussen twee vectoren aan.

De berekening van een hoek tussen twee vectoren gaat als volgt:

V hoek

Stel  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  dan is  $(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot -3 + -2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = -2$ .

De lengte van de vectoren is:  $|\vec{a}| = \sqrt{9} = 3$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{25} = 5$ .

Invullen in de formule levert:  $\cos \alpha = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15}$ . Met de rekenmachine berekenen

we het aantal graden van de hoek:  $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{15}\right) \approx 97,7^\circ$

## 2.3 Vectorvoorstelling van lijn en vlak

Uit de lessen Wiskunde Basis is bekend dat de vergelijking van een lijn in  $\mathbb{R}^2$  in het algemeen  $y = ax + b$  is. Daarnaast bestaan er vectorvoorstellingen en vergelijkingen van lijnen en vlakken.

### 2.3.1 Definities lijn

De *vergelijking* van een lijn  $l$  in  $\mathbb{R}^2$  is:

$y = ax + b$  met  $a$  de richtingscoëfficiënt en  $b$  een constante (het snijpunt met  $\Delta$  lijn  $\mathbb{R}^2$  de  $y$ -as).

$l: y = -\frac{1}{2}x + 4$ . De richtingscoëfficiënt van  $l$  is  $-\frac{1}{2}$ . en het snijpunt met de  $y$ -as 4. V lijn  $\mathbb{R}^2$  (figuur 2.8)

De *vectorvoorstelling* van een lijn  $l$  in  $\mathbb{R}^2$  is:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad \text{of: } \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{r} \quad \Delta \text{ lijn } \mathbb{R}^2$$

Met  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  en beginvector (ook wel steunvector genoemd)  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , richtingsvector  $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$  en  $\lambda$  (lambda) een variabel getal. Let op het verschil tussen een richtingsvector en een richtingscoëfficiënt.

V lijn  $\mathbb{R}^2$

Een voorbeeld van een vectorvoorstelling is:  $m : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Zie figuur 2.8. De richtingsvector van  $m$  is  $\overrightarrow{rv_m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  en de beginvector  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

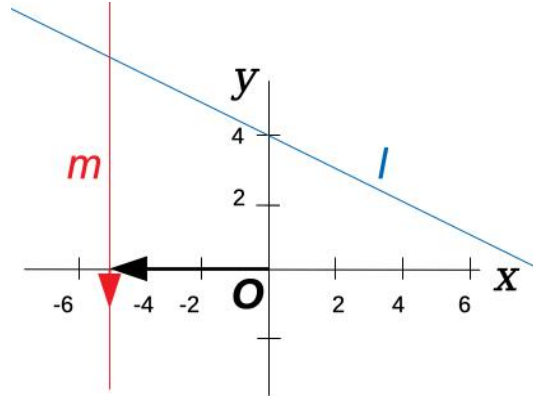


Figure 2.8: De lijn  $l : y = -\frac{1}{2}x + 4$ , met  $r.c. = -\frac{1}{2}$  en (los daarvan) de lijn  $m$  met de rode richtingsvector en zwarte beginvector.

### 2.3.2 Definities vlak

De *vergelijking* van een vlak  $V$  in  $\mathbb{R}^3$  is:

$$\Delta \text{ vlak } \mathbb{R}^3 \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = d. \quad (a, b, c \text{ en } d \text{ zijn constanten})$$

$$V \text{ vlak } \mathbb{R}^3 \quad \text{Een voorbeeld van een vergelijking van een vlak } V \text{ is: } 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -5$$

De *vectorvoorstelling* van een vlak  $V$  in  $\mathbb{R}^3$  is:

$$\Delta \text{ vlak } \mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{of: } \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$$

$$\text{Met } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$\lambda$  en  $\mu$  zijn variabele getallen ( $\mu$ , spreek uit: muu, is de Griekse letter m). En  $\vec{b}$  is een constante beginvector en  $\vec{v}$  en  $\vec{w}$  zijn richtingsvectoren van vlak  $V$ .

$$V \text{ vlak } \mathbb{R}^3 \quad \text{Een voorbeeld van een vectorvoorstelling van een vlak } V \text{ is:}$$

$$V : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Wat  $\lambda$  (spreek uit: lambda) en  $\mu$  (spreek uit: muu) zijn wordt verderop bij de berekeningen uitgelegd (zie ook figuur 2.9.). In lineaire algebra heb je soms de vergelijking, soms de vectorvoorstelling nodig. In de rest van deze paragraaf wordt uitgelegd hoe je van een vergelijking een vectorvoorstelling maakt en omgekeerd, zowel voor een lijn in  $\mathbb{R}^2$  als een vlak in  $\mathbb{R}^3$ .

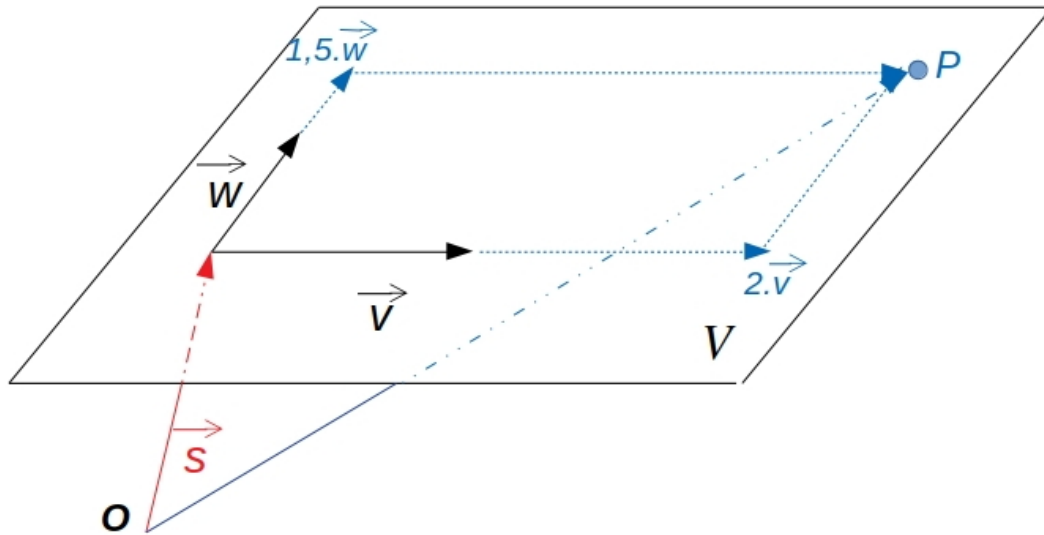


Figure 2.9: Het (oneindige) vlak  $V$  heeft de beginvector  $\vec{s}$ , en richtingsvectoren  $\vec{v}$  en  $\vec{w}$ . Het punt  $P$  ligt op  $V$  en kun je vanuit  $O$ , de oorsprong bereiken door  $\vec{s} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$  met  $\lambda = 2$  en  $\mu = 1,5$ . Elk punt van  $V$  is op zo'n manier te bereiken. Met andere woorden  $V : \vec{x} = \vec{s} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$ .

### 2.3.3 Berekeningen lijn

**Van vectorvoorstelling lijn naar vergelijking lijn:**

Een voorbeeld van een vectorvoorstelling van een lijn  $l$  in  $\mathbb{R}^2$  is:  $l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

(zie figuur 2.10) Dat betekent dat de lijn  $l$  door het punt  $(1, 2)$  gaat en als richtingsvector de vector  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  heeft.  $\lambda$  is een parameter, dat wil zeggen dat om een punt op de lijn  $l$  te vinden mogen we een waarde voor  $\lambda$  kiezen (2, of 100, of  $-\frac{2}{5}$ , of ...). Bijvoorbeeld bij  $\lambda = 3$  vinden we dat het punt  $(7, -1) = (1 + 3 \cdot 2, 2 + 3 \cdot -1)$  op  $l$  ligt. Hoe maken we een vergelijking van  $l$ ? In een vergelijking komt geen  $\lambda$  voor, dus moeten we zorgen de  $\lambda$  uit de vectorvoorstelling "kwijt te raken". Als je goed naar de vectorvoorstelling van  $l$  kijkt, zie je dat het eigenlijk 2 vergelijkingen zijn, één voor de x-coördinaat en één voor de y-coördinaat:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$$

Dit is een stelsel van 2 vergelijkingen en kunnen we 'oplossen' door  $\lambda$  te elimineren ('weg te werken'): Uit de 2<sup>e</sup> vergelijking  $y = 2 - \lambda$  volgt dat  $\lambda = 2 - y$ . Invullen van  $\lambda$  in de 1<sup>e</sup> vergelijking levert  $x = 1 + 2(2 - y)$ . Dan is  $x = 5 - 2y$ , oftewel  $l : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ,

wat dus dezelfde lijn is als:  $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , waar we mee begonnen, zie de tekening in figuur 2.10

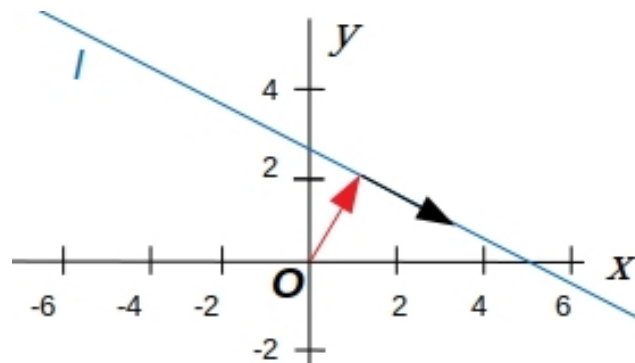


Figure 2.10: De lijn  $l: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ . Let op de steunvector (rood) en de richtingsvector (zwart).

De lijn  $l$  bestaat dus uit alle vectoren (punten) die te schrijven zijn als vectorvoorstelling  $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , waarbij elk punt  $(x, y)$  waaruit die lijn bestaat voldoet aan de vergelijking:  $l: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ .

#### Van vergelijking lijn naar vectorvoorstelling lijn:

Als we, omgekeerd, van een vergelijking een vectorvoorstelling willen maken moeten we zorgen dat er een parameter  $\lambda$  in de vectorvoorstelling komt. Neem als voorbeeld de vergelijking  $y = 3x - 2$ . We weten dat we een  $\lambda$  moeten hebben (invoeren). Stel daarvoor dat  $y = \lambda$  dan volgt uit de vergelijking dat  $\lambda = 3x - 2$  dus  $x = \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}$ . Dan hebben we 2 vergelijkingen, een voor  $y$  en een voor  $x$ :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

Dat schrijven we dan met behulp van vectoren.  $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Ga na dat dit precies dezelfde lijn is als:  $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

(immers we kunnen voor  $\lambda$  1 kiezen, daarmee een nieuw steunpunt,  $(1,1)$ , uitrekenen:  $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en vervolgens  $\lambda$  3 keer zo groot kiezen:  $3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ )

Nog anders geschreven:  $l: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  of:  $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

### 2.3.4 Berekeningen vlak

#### Van vergelijking vlak naar vectorvoorstelling vlak:

We hebben gezien dat  $ax + by + cz = d$  een vergelijking van een vlak in  $\mathbb{R}^3$  is. Net zo als bij een lijn moeten we om een vectorvoorstelling van een vergelijking te maken parameters invoeren (bij een vlak hebben we 2 parameters nodig omdat een vlak twee-dimensionaal is). Die parameters noemen we  $\lambda$  en  $\mu$ . Neem als voorbeeld het

vlak  $-x + 2y - 2z = 6$ . We stellen nu dat  $x = \lambda$  en  $y = \mu$ . Dan kunnen we  $z$  uitdrukken in  $\lambda$  en  $\mu$ . Immers we vullen  $x = \lambda$  en  $y = \mu$  in in de vergelijking  $-x + 2y - 2z = 6$ . Dan geldt dus:  $-\lambda + 2\mu - 2z = 6$ , oftewel  $z = -3 + \mu - \frac{1}{2}\lambda$ . In feite hebben we nu 3 vergelijkingen namelijk:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -3 + \mu - \frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

anders geschreven:

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu \\ y = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \\ z = -3 - \frac{1}{2} \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \end{cases}$$

en dat kunnen we weer schrijven als:  $V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

wat weer hetzelfde vlak is als waar we mee begonnen  $V : -x + 2y - 2z = 6$ . De vectorvoorstelling van een vlak kent dus *twee* richtingsvectoren. Zie figuur 2.9.

#### **Van vectorvoorstelling vlak naar vergelijking vlak:**

Omgekeerd nemen we de vectorvoorstelling van een vlak  $V$ ,

bijvoorbeeld:  $V : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Om nu een vergelijking te krijgen moeten we  $\lambda$  en  $\mu$  wegwerken (eliminieren). Dat kan als we zien dat de vectorvoorstelling van  $V$  eigenlijk 3 vergelijkingen bevat:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 0\lambda + 1\mu \\ x_2 = 3 + 2\lambda + 1\mu \\ x_3 = 6 + 1\lambda + 2\mu \end{cases}$$

Uit de 1<sup>e</sup> vergelijking halen we  $\mu = x_1 - 1$  en dat vullen we in in de 2<sup>e</sup> en 3<sup>e</sup> vergelijking:

$$\begin{cases} x_2 = 3 + 2\lambda + (x_1 - 1) \\ x_3 = 6 + 1\lambda + 2(x_1 - 1) \end{cases}$$

Uit de 2<sup>e</sup> vergelijking halen we dat  $\lambda = x_3 - 4 - 2x_1$  wat we in de 1<sup>e</sup> vergelijking invullen:  $x_2 = 3 + 2(x_3 - 4 - 2x_1) + x_1 - 1$ , anders geschreven:  $3x_1 + x_2 - 2x_3 = -6$ . En dat is precies de algemene vorm van de vergelijking van een vlak.

## **2.4 Normaalvectoren**

Om goed te kunnen rekenen met lijnen en vlakken hebben we zogeheten normaalvectoren nodig.

### 2.4.1 Normaal van lijn

**Δ normaal lijn** De normaal of normaalvector van een lijn is: de vector  $\vec{n}$  die loodrecht staat op de richtingsvector van de lijn.

Voor het bepalen van de normaalvector zijn het inproduct en uitproduct handige gereedschappen.

**V normaal lijn** Voorbeeld van een berekening van de normaal van een lijn

Stel we hebben de lijn  $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ . (Zie figuur 2.11) Dan is de richtingsvector van  $l: \vec{rv}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Misschien zie je meteen dat  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  er loodrecht op staat? Ga na dat  $(\vec{rv}_l, \vec{n}) = 3 \cdot -2 + 2 \cdot 3 = 0$ . Als je dat niet meteen 'ziet', dan kun je het volgende doen: elke vector  $\neq \vec{0}$  kun je schrijven als  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$  waar  $c$  het getal is dat we zoeken. Er moet gelden dat  $(\vec{rv}_l, \vec{n}) = 0$ , immers als twee vectoren loodrecht op elkaar staan moet het inproduct = 0 zijn. Dus  $3 \cdot 1 + 2 \cdot c = 0$ . Daaruit volgt  $c = -\frac{3}{2}$  en dus is  $\begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}$  de vector die we zoeken. Omdat voor het loodrecht zijn het niet uitmaakt hoe lang de vector is mogen we met -2 vermenigvuldigen om de breuk weg te halen:  $\vec{n} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

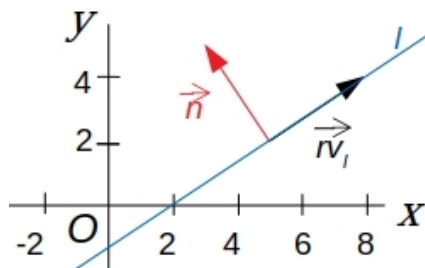


Figure 2.11: De normaal  $\vec{n}$  staat loodrecht op de richtingsvector van  $l$ .

### 2.4.2 Normaal van vlak

Om goed te kunnen rekenen met vlakken hebben we een normaalvector nodig.

**Δ normaal vlak** De normaal of normaalvector van een vlak  $\vec{n}$  of  $\vec{n}_V$  is: de vector  $\vec{n}$  die loodrecht staat op *beide* richtingsvectoren van het vlak.

Gelukkig hebben we daarbij ook nog de volgende handige eigenschap:

**ℰ normaal vlak** als  $V: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$  dan is:  $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  de normaalvector van  $V$ .

**V normaal vlak** als  $V: 7x_1 + 3x_2 - x_3 = -20$  dan is  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  de normaalvector van  $V$ .

Maar wat als we niet de vergelijking maar de vectorvoorstelling van een vlak hebben?

Dan kunnen we gebruik maken van de eigenschap dat het uitproduct van 2 vectoren loodrecht staat op beide richtingsvectoren.

$$\text{als } W : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$V$  normaal vlak

dan zijn de richtingsvectoren:  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{en hun uitproduct is : } \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ -(2 \cdot 2 - 1 \cdot 0) \\ 2 \cdot 1 - (-3 \cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en dus is  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$  de normaal vector van  $W$ . Zie figuur 2.12

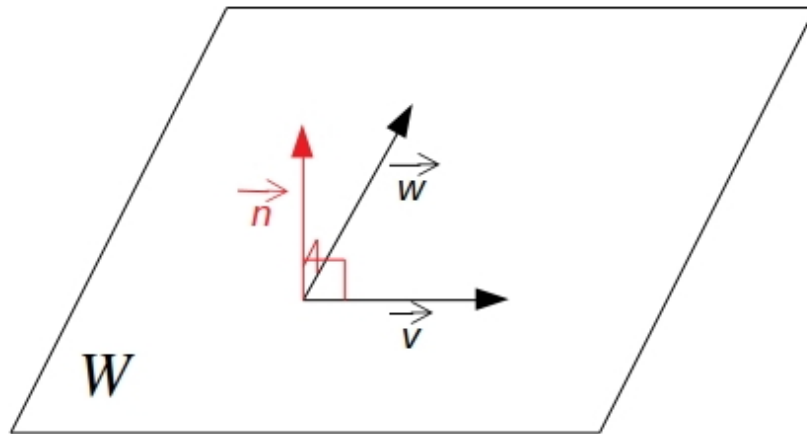


Figure 2.12: De normaal van vlak  $W$ ,  $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ , staat loodrecht op de richtingsvectoren  $\vec{v}$  en  $\vec{w}$ .

De vergelijking van  $W$  is dan  $-7x - 4y + 2z = c$ . De constante  $c$  weten nog niet maar kunnen we uitrekenen doordat we weten dat het punt  $(0, 1, -1)$  op  $W$  ligt, want dat is de vaste vector. (dat kun je ook zien als je  $\lambda$  en  $\mu$  beide 0 stelt: dan is het

$$\text{punt } \begin{pmatrix} 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ -1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Vul de } x, y \text{ en } z\text{-waarde van het vaste punt in in}$$

de vergelijking  $-7x - 4y + 2z = c$  en er volgt dat  $c = -7 \cdot 0 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot -1 = -6$ . Dus  $W : -7x - 4y + 2z = -6$ , of, wat op hetzelfde neerkomt:  $W : 7x + 4y - 2z = 6$

## 2.5 Afstand van punt tot vlak

We hebben nu genoeg hulpmiddelen om in  $\mathbb{R}^3$  de afstand van een punt tot een vlak uit te kunnen rekenen. Dat doen we door een lijn  $l$  loodrecht op het vlak  $V$  te tekenen,  $l$  snijdt  $V$  in  $S$  en dan is de afstand tussen  $P$  en  $V$  gelijk aan de afstand tussen  $P$  en  $S$ . Zie figuur 2.13. en 2.14.

Dat gaat in een aantal stappen:

- de vergelijking van een vlak bepalen
- de normaal van een vlak berekenen

- (c) de lijn berekenen die loodrecht op het vlak staat en door  $P$  gaat
- (d)  $x$ ,  $y$  en  $z$  van de lijn  $l$  uitdrukken in  $\lambda$
- (e) het snijpunt  $S$  van de lijn door  $P$  en het vlak bepalen
- (f) de afstand tussen  $P$  en het snijpunt  $S$  uitrekenen

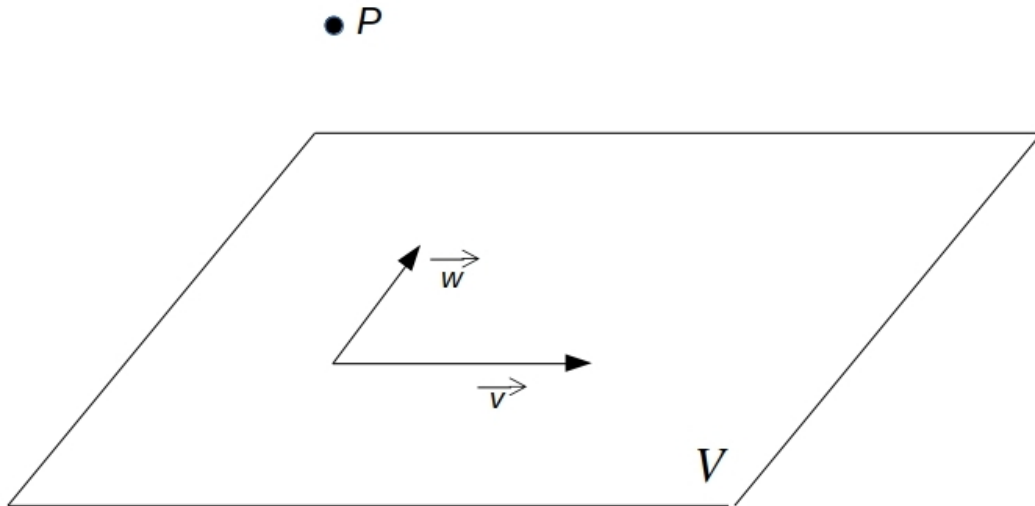


Figure 2.13: *Gevraagd: de afstand tussen  $P$  en  $V$ , ( $P$  is een punt dat boven het vlak  $V$  'zweeft').*

**V afstand** We nemen als voorbeeld voor de berekening

het punt  $P : (3, 6, 7)$  en het vlak  $V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ .

**(a) de vergelijking van een vlak bepalen**

Omdat de vectorvoorstelling van het vlak gegeven is, moeten we daarvan eerst een vergelijking maken. We vinden met de methode van de paragraaf "normaal van vlak" (blz. 20) dat :  $V : -x + 3y + 2z = 1$ . Als de vergelijking van het vlak al gegeven is kun je deze stap overslaan natuurlijk.

**(b) de normaal van een vlak berekenen**

Als we de vergelijking van het vlak hebben is het berekenen van de normaal kinderspel. Immers de normaal wordt gegeven door de getallen die in de

vergelijking van het vlak staan:  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  de normaal vector van  $V$ .

NB: Let op: De normaal kun je alleen uit de vergelijking van het vlak aflezen als "de  $x$ ,  $y$  en  $z$  aan de linkerkant van het = - teken staan". Dus als je bijv.

als vergelijking  $3x + z = 2 - y$  hebt, dan is de normaal NIET  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  maar  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

omdat uit  $3x + z = 2 - y$  volgt dat  $3x + y + z = 2$  ( $x$ ,  $y$  en  $z$  aan de linkerkant).

**(c) de lijn berekenen die loodrecht op het vlak staat en door  $P$  gaat**

De lijn door het punt  $P$  die loodrecht op vlak  $V$  staat heeft als richtingsvector . . de normaal van het vlak. Immers de normaal staat loodrecht op dat vlak.

Dus  $\vec{r}\vec{v}_l = \vec{n}$ . En de lijn moet door  $P : (3, 6, 7)$  gaan. Dat betekent dat we  $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$  als steunvector voor de lijn kunnen gebruiken. Dus de vectorvoorstelling van de lijn is:  $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) **x, y en z van de lijn  $l$  uitdrukken in  $\lambda$**

Net zoals bij een vlak in  $\mathbb{R}^3$  bestaat de vectorvoorstelling van de lijn  $l$  eigenlijk uit 3 vergelijkingen:

$$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 6 + 3\lambda \\ z = 7 + 2\lambda \end{cases}$$

(e) **het snijpunt van het vlak en de lijn door P bepalen**

Voor het snijpunt van  $l$  en  $V$  geldt dat het snijpunt zowel op  $l$  ligt als op  $V$ . Anders gezegd: De coördinaten van het snijpunt moeten voldoen aan bovenstaande 3 vergelijkingen van  $l$ , maar ook aan de vergelijking voor  $V$ . Met andere woorden: we kunnen de x, y en z van hierboven invullen in de vergelijking van het vlak:

$$-(3 - \lambda) + 3 \cdot (6 + 3\lambda) + 2 \cdot (7 + 2\lambda) = 1$$

$$\text{of } 14\lambda + 29 = 1$$

$$\text{of } \lambda = -2$$

(f) **de afstand uitrekenen**

We weten nu dat als  $\lambda = -2$  we het snijpunt van  $l$  en  $V$  hebben. Wat betekent dat? Dat betekent dat als we beginnen in punt P en -2 keer de richtingsvector van  $l$  er bij op tellen we op het vlak  $V$  terecht komen. Anders gezegd de afstand tussen P en V is 2 keer de lengte van die richtingsvector. Oftewel: afstand =  $2 \cdot |\vec{r}\vec{v}_l| = 2 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{14}$ . Zie figuur 2.14

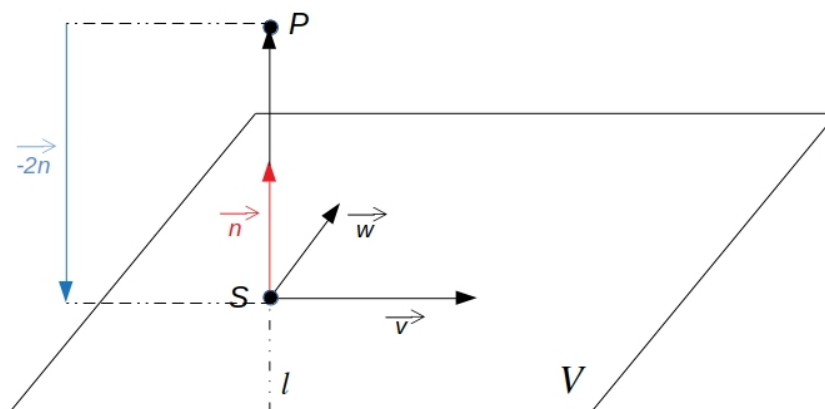


Figure 2.14: We moeten vanuit P beginnend -2 keer de vector  $\vec{n} = \vec{r}\vec{v}_l$  afpassen om op  $V$  te komen. Anders gezegd: de normaal vector van  $V$  past precies 2 keer tussen  $V$  en  $P$ , en dus is de afstand  $2 \cdot |\vec{n}| = 2 \cdot |\vec{r}\vec{v}_l| = 2\sqrt{14}$ .

### 2.5.1 Extra voorbeeld

Omdat het berekenen van de afstand van een punt naar een vlak vaak lastig wordt gevonden, is hieronder nog een extra voorbeeld gegeven:

**V afstand** In dit voorbeeld berekenen we wederom de afstand van vlak  $V$  en punt  $P$ . Hierbij is het volgende gegeven:

$$V: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en } P: (-3, 1, 7).$$

Omdat het vlak als vectorvoorstelling is gegeven moet deze eerst worden omgeschreven naar vergelijking. Dit is te doen door in het stelsel vergelijkingen  $\lambda$  en  $\mu$  weg te werken. Eerst zetten we de vectorvoorstelling in een stelsel:

$$\begin{cases} x = -1 - 5\lambda + 2\mu \\ y = -2 + 8\lambda + 3\mu \\ z = 3\lambda - \mu \end{cases}$$

Als we nu de laatste vergelijking omschrijven naar  $\mu = 3\lambda - z$  kunnen we  $\mu$  substitueren. Dan krijgen we:

$$\begin{cases} x = -1 - 5\lambda + 2(3\lambda - z) = -1 + \lambda - 2z \\ y = -2 + 8\lambda + 3(3\lambda - z) = -2 + \lambda - 3z \end{cases}$$

Nu schrijven we de eerste vergelijking om tot  $\lambda = x + 1 + 2z$  en substitueren we dit in de tweede. We vinden nu de vergelijking:

$$\begin{aligned} y &= -2 + (x + 1 + 2z) - 3z \\ y &= -1 + x - z \end{aligned}$$

Dit kunnen we weer omschrijven naar:  $x - y - z = 1$ . Dit gebruiken we om de normaal van het vlak op te stellen, deze wordt gebruikt als richtingsvector van de lijn  $l$ :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dan kunnen we de vectorvoorstelling van de lijn  $l$  door punt  $P$  loodrecht op vlak  $V$  maken:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Deze 3 vergelijkingen vullen we nu in, in de gevonden vergelijking zodat we  $\lambda$  kunnen uitrekenen:

$$\begin{aligned} (-3 + \lambda) - (1 - \lambda) - (7 - \lambda) &= 1 \\ -11 + 3\lambda &= 1 \\ 3\lambda &= 12 \Rightarrow \lambda = 4 \end{aligned}$$

Nu bereken we de afstand door de gevonden  $\lambda$  te vermenigvuldigen met de lengte van de normaal:

$$\begin{aligned} \text{afstand} &= 4 \cdot |\vec{r}_l| \\ &= 4 \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \\ &= 4\sqrt{3} \approx 6.93 \end{aligned}$$



## 2.6 Opgaven

1. Bereken  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ , en  $(\vec{a}, \vec{b})$  als  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$
2. Bereken de hoek  $\alpha$  die de lijnen  $l$  en  $m$  met elkaar maken in één decimaal nauwkeurig:  $l: y = 2x + 7$  en  $m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
3. Wat is de lengte van de vector  $\vec{v} = (2, -3, 0, 2, -5)$ ?
4. Schaal de vector  $\vec{v}$  naar de eenheidsvector  $\hat{v}$  als  $\vec{v} = (-1, 5, 7, 0, 5)$ .
5. Bereken de afstand tussen  $P = (7, 0, -2)$  en  $V: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
6. Bereken de afstand tussen  $Q = (7, 1, 2)$  en  $W: 2x - 4y + 2z = -2$ .

### 2.6.1 Extra opgaven

1. Bereken  $\vec{d} + \vec{e}$ ,  $\vec{d} - \vec{e}$ , en  $(\vec{d}, \vec{e})$  als  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  en  $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. Bereken de hoek  $\alpha$  die de lijnen  $m$  en  $l$  met elkaar maken in één decimaal nauwkeurig:  $m: y = 3x + 1$  en  $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
3. Wat is de lengte van de vector  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ?
4. Bereken de afstand tussen  $P = (-3, 9, -3)$  en  $V: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
5. Bereken de afstand tussen  $Q = (-1, -4, -1)$  en  $W: -2x + 9y + 6z = 1/3$ .



### 3. Matrix, rotatie en projectie

Dit en het volgende hoofdstuk gaan over lineaire afbeeldingen. Lineaire afbeeldingen zijn afbeeldingen die de lineaire eigenschappen van vectoren niet verstoren. Zulke afbeeldingen worden veel gebruikt in vakgebieden als Computer Graphics en Robotica. Een lineaire afbeelding kan geschreven worden met behulp van een matrix. En met een matrix kun je in software makkelijk rekenen

Een matrix is:

een verzameling getallen in een rechthoek, gerangschikt in rijen en kolommen.  $\Delta$  matrix

Een matrix geven we aan met een hoofdletter:  $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$   $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$   $V$  matrix

Daarbij noemen we  $S$  een  $2 \times 2$  matrix, en  $M$  een  $3 \times 2$  matrix.

De algemene vorm van een  $m \times n$  matrix is:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Deze matrix heeft  $m$  rijen en  $n$  kolommen. Meestal beperken we ons tot  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$  of  $4 \times 4$  matrices.

#### 3.1 Bijzondere matrices

Een *vector* is:

een matrix die bestaat uit één rij of één kolom, en wordt zoals je al weet, *niet* met  $\Delta$  vector

een hoofdletter aangeduid maar met een kleine en een pijltje erboven.

**V** vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

**Δ** vierkante matrix Een vierkante matrix is:  
een matrix met evenveel rijen als kolommen. We schrijven dat als een  $n \times n$  matrix:

**V** vierkante matrix  $P = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & 7 \\ 9 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  is een vierkante,  $4 \times 4$  matrix:

**Δ** hoofddiagonaal De hoofddiagonaal van een matrix is:  
de diagonaal van linksboven naar rechtsonder

**V** hoofddiagonaal bij  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  staan de getalen -1, 4 en 1 op de hoofddiagonaal

**Δ** diagonaalmatrix Een diagonaalmatrix is:  
een vierkante matrix waar alleen op de hoofddiagonaal getallen  $\neq 0$  staan.

**V** diagonaalmatrix  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Δ** eenheidsmatrix Een eenheidsmatrix is:  
een diagonaalmatrix waar op de hoofddiagonaal alleen maar 1 -en staan.

**V** eenheidsmatrix  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Δ** nulmatrix Een nulmatrix is:  
een matrix met alleen maar nullen.

**V** nulmatrix  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

De getransponeerde matrix  $A^T$  van matrix  $A$  is:  
een (andere) matrix waarbij de rijen en kolommen van  $A$  zijn verwisseld.

Δ getransponeerd

$$\text{Als } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ dan is } A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

V getransponeerd

Een symmetrische matrix is:  
een matrix  $A$  waarbij  $A^T = A$ .

Δ symmetrisch

In feite betekent dat dat de rechterbovenhoek van de matrix gespiegeld wordt in de linkeronderhoek.

$$\text{Als } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ dan is } A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = A$$

V symmetrisch

### 3.2 Matrixvermenigvuldiging

Matrixvermenigvuldiging is tamelijk ingewikkeld:

Het product van twee matrices is het op een speciale manier vermenigvuldigen van alle elementen van de ene matrix met alle elementen van de andere matrix.

Δ matrixproduct

Het eerste element van het product krijgen we door de getallen in de eerste **rij** van de eerste matrix stuk voor stuk te vermenigvuldigen met de getallen van de eerste **kolom** van de tweede matrix en dat op te tellen. Dat wordt het eerste getal van de productmatrix. En vervolgens hetzelfde te doen met de tweede rij van de eerste matrix en de eerste kolom van de tweede matrix enzovoort.

V matrixproduct

$$\begin{aligned} \text{Als } A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \\ \text{dan is } A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot -4 + -1 \cdot 1 + 2 \cdot -2 & 3 \cdot 5 + -1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 \\ 4 \cdot -4 + -5 \cdot 1 + 0 \cdot -2 & 4 \cdot 5 + -5 \cdot 7 + 0 \cdot 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -17 & 20 \\ -21 & -15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hierbij vermenigvuldig je eerst elk zwart getal met het bijbehorende rode getal (3 met -4, daarna -1 met 1 en vervolgens 2 met -2). Die vermenigvuldigingen tel je bij

elkaar op met als uitkomst -17. Vervolgens doe je met de zwarte en blauwe getallen hetzelfde om 20 te krijgen, daarna ook met de groene en rode getallen (met -21 als uitkomst), en tot slot groen met blauw combineren met als uitkomst -15.

### 3.2.1 eigenschappen van matrixvermenigvuldiging

$\mathcal{E}$   $A \cdot B \neq B \cdot A$  Anders dan bij gewone getallen is matrixvermenigvuldiging niet commutatief. Dat wil zeggen:  $2 \times 3 = 3 \times 2$ , maar als  $A$  en  $B$  matrices zijn dan is meestal  $A \cdot B \neq B \cdot A$ !

$\forall A \cdot B \neq B \cdot A$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 & -4 \cdot -1 + 5 \cdot -5 & -4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \\ 1 \cdot 3 + 7 \cdot 4 & 1 \cdot -1 + 7 \cdot -5 & 1 \cdot 2 + 7 \cdot 0 \\ -2 \cdot 3 + 6 \cdot 4 & -2 \cdot -1 + 6 \cdot -5 & -2 \cdot 2 + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -21 & -8 \\ 31 & -36 & 2 \\ 18 & -28 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

maar

$$\begin{aligned} B \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -17 & 20 \\ -21 & -15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathcal{E}$  associatief Matrixvermenigvuldiging is wel associatief. Dat betekent:  $A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

## 3.3 De matrix van een afbeelding bepalen

We gaan het nu hebben over lineaire afbeeldingen. Een afbeelding binnen dit vak (en binnen de wiskunde) kun je zien als een functie, die de ene verzameling 'af kan beelden' in de andere. Stel je voor je hebt een functie  $f$  die ervoor zorgt dat matrix

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  afgebeeld (of omgezet) kan worden naar matrix  $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ , dan kunnen we

dit noteren als:  $A \xrightarrow{f} B$ .

$\Delta$  Lin. afbeelding Lineaire afbeeldingen zijn: afbeeldingen die de 'lineaire combinaties' tussen beide matrices bewaren, voorbeelden hiervan zijn bijvoorbeeld spiegeling, projectie, rotatie.

Om met lineaire afbeeldingen te kunnen rekenen moeten we de matrix bepalen. Jammer genoeg lukt dat niet simpelweg voor translaties (verplaatsingen), maar

daarvoor zullen we een oplossing zien in hoofdstuk 4, zodat ook een translatie als matrix geschreven kan worden, en we met elke afbeelding kunnen rekenen. Voor het bepalen van de matrix van een afbeelding, gaan we gebruik maken van basisvectoren.

Basisvectoren zijn:

$\Delta$  basisvector

vectoren die gecombineerd alle andere vectoren kunnen genereren (maken)

Basisvectoren voor  $\mathbb{R}^2$  zijn:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  want met combinaties van deze twee  $\mathbf{V}$  basis  $\mathbb{R}^2$  vectoren kun je alle andere tweedimensionale vectoren maken. Bijv:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basisvectoren voor  $\mathbb{R}^3$  zijn:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  want met combinaties van  $\mathbf{V}$  basis  $\mathbb{R}^3$  deze drie vectoren kun je alle andere driedimensionale vectoren maken. Bijv:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De matrix van een afbeelding bestaat uit: het beeld van de basisvectoren

$\mathcal{E}$  matrix bepalen

Dus wat de afbeelding doet met elke basisvector levert de matrix van een afbeelding. Anders gezegd om de matrix te bepalen van een afbeelding is het genoeg om te berekenen wat de afbeelding doet met basisvectoren.

Stel we weten van afbeelding  $A$  alleen wat er met de basisvectoren gebeurt:

$\mathbf{V}$  matrix  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dan is de matrix van  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

### 3.3.1 Voorbeeld matrix bepalen van afbeelding (projectie)

V matrix  $\mathbb{R}^2$

Stel  $P$  is de projectie in  $\mathbb{R}^2$  op de  $x$ -as, dat wil zeggen: alle punten in het vlak worden geprojecteerd op de  $x$ -as. Dus de punten uit een tweedimensionale ruimte worden dan terug gebracht naar een eendimensionale ruimte. (zie figuur 3.1).

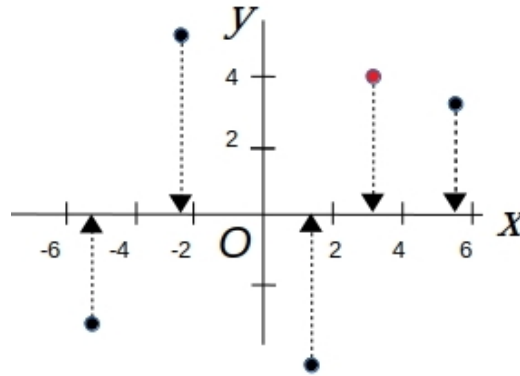


Figure 3.1: De projectie in  $\mathbb{R}^2$  op de  $x$ -as; het punt  $(3,4)$  komt bijvoorbeeld uit op het punt  $(3,0)$ .

Het beeld van de basisvector  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  onder  $P$  is  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  gaat naar  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , anders gezegd:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dan mag je die uitkomsten naast elkaar zetten en is de matrix van  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

### 3.3.2 Het resultaat berekenen

Als je uit wil rekenen waar een punt of vector "terecht" komt als je een afbeelding toepast dan kun je dat met de matrix uitrekenen door deze matrix te vermenigvuldigen met de vector. In het voorbeeld van de projectie hierboven was  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Dat betekent dat een willekeurige vector  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  terecht komt op:

$$\begin{aligned} P \cdot \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Dus: Als je projecteert op de x-as komen alle punten op de x-as terecht, op de plek die de  $x_1$  waarde aangeeft. Bijvoorbeeld (zie figuur 3.1) kun je nu uitrekenen dat

$$\begin{aligned} P \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Op zo'n manier kun je ook voor matrix  $A$  van hierboven uitrekenen waar een willekeurig punt  $(v_1, v_2, v_3)$  in  $\mathbb{R}^3$  uitkomt, namelijk door de matrix van  $A$  te vermenigvuldigen met de vector  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 \\ 3 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2v_2 - v_3 \\ 3v_1 \\ v_1 + v_2 + v_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En zo kun je ook uitrekenen waar het punt  $(3, 2, -1)$  terecht komt als je  $A$  er op toepast: ( $v_1 = 3, v_2 = 2, v_3 = -1$ ):

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \\ 3 \cdot 3 + (-1) \\ 3 + 2 + (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{en dus: } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 3.4 Rotatie

In dit stuk gaan we uitleggen hoe we vergelijkbare matrix-vermenigvuldigen als hierboven kunnen gebruiken om bijv. vectoren te roteren om een bepaald punt.

### 3.4.1 De matrix van een rotatie in $\mathbb{R}^2$

Net zoals in de vorige voorbeelden hoeven we bij een rotatie alleen maar te bepalen wat er met de basisvectoren gebeurt om de matrix uit te rekenen. Als we roteren in  $\mathbb{R}^2$  gaat dat om de oorsprong  $O$  over een hoek  $\theta$  (spreek uit: "tèta"). Zie figuur 3.2. In de tekening zien we een rotatie "tegen de klok in over hoek  $\theta$ ".

De basisvectoren zijn  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

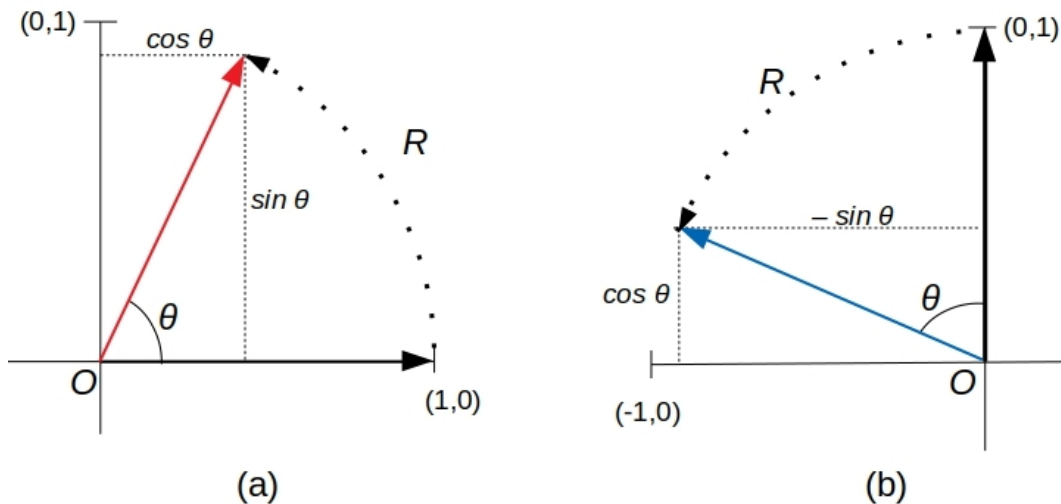


Figure 3.2: Het resultaat ((a) *rood* en (b) *blauw*) van de rotatie tegen de klok in over hoek  $\theta$  van basisvectoren  $\hat{b}_x = (1,0)$  en  $\hat{b}_y = (0,1)$ .

We moeten dus bepalen wat er gebeurt met  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Uit het vak Logica weten we wat het beeld van de vectoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  onder de afbeelding  $R$  is:  $R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$  en  $R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ .

Anders gezegd:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$  Let op het minteken!

En dus is de matrix van  $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

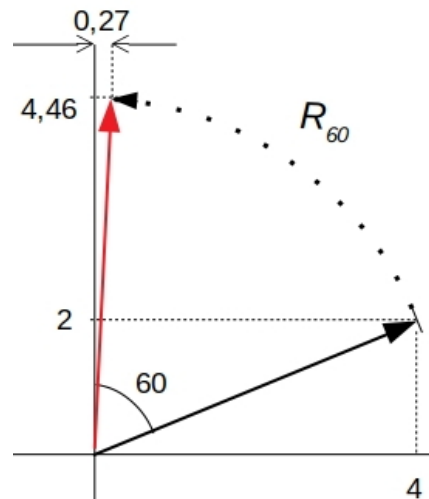
**V rotatie 60** Als  $\theta = 60^\circ$  dan is  $\cos \theta = \cos 60^\circ = 0.5$  en  $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  (reken uit met de rekenmachine) en dat betekent dat als je linksom draait over  $60^\circ$  je matrix wordt:

$$R_{60} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Stel, je wil weten waar het punt  $(4,2)$  terecht komt als je over  $60^\circ$  linksom draait, dan is dat:

$$\begin{aligned} R_{60} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 - \sqrt{3} \cdot 2 \\ \sqrt{3} \cdot 4 + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 2 - 1.73 \\ 3.46 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.27 \\ 4.46 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

of, op een andere manier opgeschreven:  $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{60}} \begin{pmatrix} 0.27 \\ 4.46 \end{pmatrix}$  (figuur 3.3)

Figure 3.3: Het beeld van  $(4, 2)$  onder de rotatie  $R_{60}$ .

De matrix van een rotatie om  $O$  over de hoek  $\theta$  in  $\mathbb{R}^2$  is altijd

$\mathcal{E}$  matrix rotatie

òf (tegen de klok in):  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

òf (met de klok mee):  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Met andere woorden: als je de hoek weet van een rotatie in  $\mathbb{R}^2$  hoef je alleen nog de richting, met de klok mee of niet, te bepalen om de matrix op te kunnen schrijven.

### 3.4.2 De matrix van een rotatie in $\mathbb{R}^3$

In  $\mathbb{R}^3$  draaien (roteren) we niet om een punt maar om een as. Het lijkt op wat je met een kurkentrekker doet om een fles wijn te openen. Het is handig om je te realiseren dat draaien om een as in  $\mathbb{R}^3$  betekent dat één coördinaat niet verandert. Namelijk de coördinaat van de as waarom je draait. De draaiing in de andere twee coördinaten is dan eigenlijk een rotatie in  $\mathbb{R}^2$ . Voor de kritische lezer: Wat als je om een willekeurige vector roteert? Dan geldt het volgende: Elke rotatie in  $\mathbb{R}^3$  kun je uitvoeren door eerst een stukje om de x-as, dan om de y-as en daarna om de z-as te roteren.

Als voorbeeld gaan we een rotatie rechtsom om de z-as over de hoek  $\theta$  uitrekenen.  $\mathbf{V}$  rotatie  $\mathbb{R}^3$

We gaan weer bepalen waar de basisvectoren komen na de rotatie. De basisvectoren langs de assen zijn:

$$\hat{b}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{b}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{b}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zoals in figuur 3.4 te zien is veranderen de z-coördinaten bij geen van de basisvectoren!

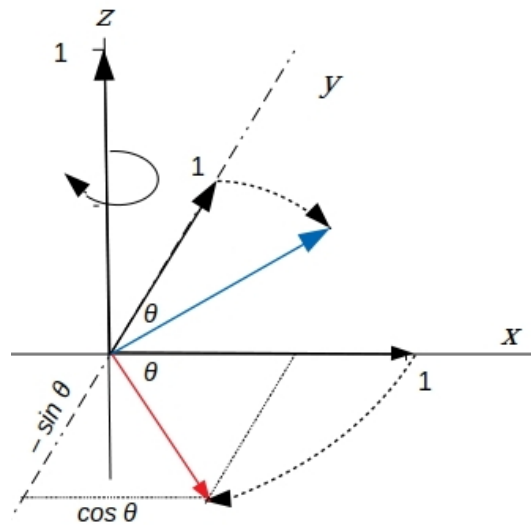


Figure 3.4: Rotatie in  $\mathbb{R}^3$  om de z-as over een hoek  $\theta$ . Je kunt dit zien als een rotatie in x en y waarbij de z-coördinaat hetzelfde blijft, dus een rotatie in  $\mathbb{R}^2$ , zie figuur 3.5 Ga na waar de basisvectoren langs de x-, y- en z-as komen na de rotatie.

Dus bij  $\hat{b}_x$  en  $\hat{b}_y$  zijn en blijven z-coördinaten = 0, en de 3<sup>e</sup> basisvector,  $\hat{b}_z$  verandert sowieso niet. Als de z-coördinaat van een willekeurig punt niet verandert, is het eigenlijk een rotatie in x en y, oftewel een rotatie in  $\mathbb{R}^2$  (zie figuur 3.5).

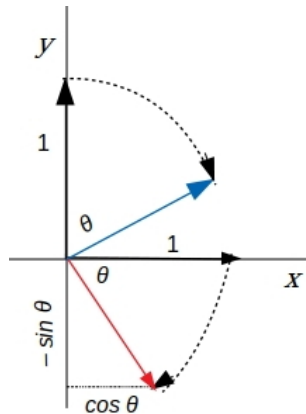


Figure 3.5: De rotatie in  $\mathbb{R}^3$  over hoek  $\theta$ , gezien als rotatie in  $\mathbb{R}^2$ . Vergelijk met figuur 3.4.

Let op: we gaan nu met de klok mee dus het min-teken komt op een andere plaats dan bij het vorige voorbeeld van  $\mathbb{R}^2$ :

$$\hat{b}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{b}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{b}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{En dus is } R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NB: Het 2x2 stukje linksboven in de matrix  $R$  is hetzelfde als bij een rotatie in  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.5 Projectie

Projecteren is:

het afbeelden van een object in een lagere dimensie.

Δ projectie

Dus bijvoorbeeld het feit dat je een 3D spel kunt spelen op een tweedimensionaal beeldscherm! In  $\mathbb{R}^2$  doe je dat door punten loodrecht op een lijn te verplaatsen naar die lijn (1-dimensionaal), zie figuur 3.6. In  $\mathbb{R}^3$  door punten loodrecht op een vlak te verplaatsen naar dat vlak, zie figuur 3.8.

#### 3.5.1 De matrix van een projectie in $\mathbb{R}^2$

In  $\mathbb{R}^2$  is een projectie het loodrecht verplaatsen van punten naar een rechte lijn (zie figuur 3.1, 3.6 en 3.7)

De projectie op de lijn  $y = x$ .

V projectie  $\mathbb{R}^2$

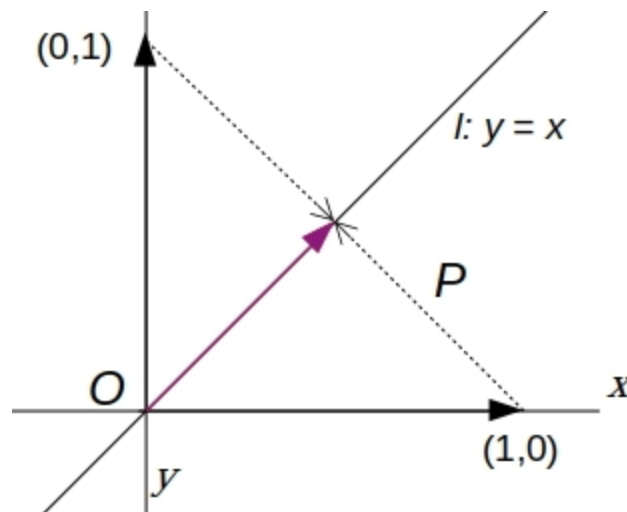


Figure 3.6: De projectie op de lijn  $l : y = x$ . Merk op dat beide basisvectoren op dezelfde vector (paars = rood + blauw!) geprojecteerd worden.

Om de matrix te bepalen moeten we kijken wat er gebeurt met de basisvectoren. Zoals je in figuur 3.6 kunt zien werkt de projectie zo dat beide basisvectoren op dezelfde (paars = rood + blauw) vector terecht komen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}. \quad \text{Dat betekent dat } P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

V projectie  $\mathbb{R}^2$

De projectie op de lijn  $y = 4x$ .

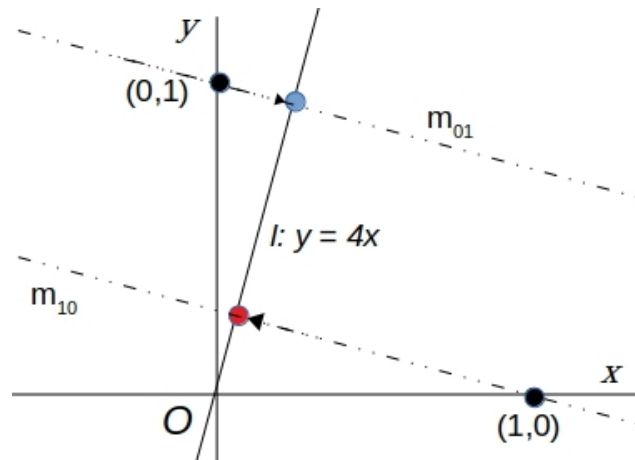


Figure 3.7: De projectie op de lijn  $l: y = 4x$  met loodlijnen  $m_{10}$  door  $(1,0)$  en  $m_{01}$  door  $(0,1)$ .

Bij de vorige projectie konden we aflezen wat het resultaat van de projectie was. In het algemeen is dat lastiger, en moeten we eerst loodlijnen uitrekenen. Zie figuur 3.7. De loodlijn  $m_{10}$  staat loodrecht op  $l$  en gaat door het punt  $(1,0)$ , de loodlijn  $m_{01}$  staat ook loodrecht op  $l$  maar gaat door het punt  $(0,1)$ . De vraag is: hoe berekenen we de loodlijnen? Daarvoor maken we gebruik van het volgende eigenschap:

$\mathcal{E}$  rc loodlijn 
$$rc_{loodlijn} = \frac{-1}{rc_{origineel}}$$

Waarbij  $rc$  de richtingscoëfficiënt is, oftewel de  $a$  in de algemene vergelijking van een lijn:  $y = ax + b$ .

Anders gezegd: de richtingscoëfficiënt van een lijn loodrecht op een andere (het origineel) is het omgekeerde daarvan met een min ervoor. Uit het vak logica komt misschien deze nog wel bekend voor: Als 2 rechte lijnen loodrecht op elkaar staan dan geldt er  $rc_{lijn1} \cdot rc_{lijn2} = -1$

V rc loodlijn Als  $l: y = 4x$  dan is de richtingscoëfficiënt van  $l$ :  $rc_l = 4$  en de richtingscoëfficiënt van de loodlijn  $rc_{loodlijn} = -\frac{1}{4}$ . Dan weten we dus dat  $m_{10}: y = -\frac{1}{4}x + b_{10}$  ( $b_{10}$  is een constante, vergelijk met de algemene vergelijking van een lijn hierboven). De constante  $b_{10}$  kunnen we uitrekenen doordat we weten dat het punt  $(1,0)$  op  $m_{10}$  ligt:  $0 = -\frac{1}{4} \cdot 1 + b_{10}$  dus is  $b_{10} = \frac{1}{4}$  en  $m_{10}: y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ . De andere loodlijn gaat op dezelfde manier:  $rc_{01} = -\frac{1}{4}$ . Dus  $m_{01}: y = -\frac{1}{4}x + b_{01}$ , en we weten dat  $(0,1)$  op  $m_{01}$  ligt. Dus  $1 = -\frac{1}{4} \cdot 0 + b_{01}$  dus  $b_{01} = 1$  en dus  $m_{01}: y = -\frac{1}{4}x + 1$ . Als we snijpunten (rood en blauw in figuur 3.7) weten, weten we waar de basisvectoren terecht komen.

Voor het snijpunt (rood) van  $l$  en  $m_{10}$  : geldt:

$$\begin{cases} l : y = 4x \\ m_{10} : y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Dit punt kunnen we uitrekenen door beide stellingen aan elkaar gelijk te stellen en uit te werken:

$$\begin{aligned} 4x &= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \\ 4\frac{1}{4}x &= \frac{1}{4} \\ x &= \frac{1}{17} \end{aligned}$$

Dan hoeven we alleen nog maar een y-waarde te berekenen, door deze x-waarde in  $y = 4x$  te stoppen, hieruit volgt:  $y = \frac{4}{17}$ . Het rode snijpunt ligt dus op:  $(\frac{1}{17}, \frac{4}{17})$ .

Op dezelfde manier reken het blauwe snijpunt van  $l$  en  $m_{01}$  uit. Hiervoor geldt:

$$\begin{cases} l : y = 4x \\ m_{01} : y = -\frac{1}{4}x + 1 \end{cases}$$

Waarmee het snijpunt ligt op:

$$\begin{aligned} 4x &= -\frac{1}{4}x + 1 \\ 4\frac{1}{4}x &= 1 \\ x &= \frac{4}{17} \end{aligned}$$

De bijbehorende y-waarde hierbij is daarmee:  $\frac{16}{17}$ . Het blauwe snijpunt ligt dus op  $(\frac{4}{17}, \frac{16}{17})$ . is.

Met andere woorden:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 1/17 \\ 4/17 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 4/17 \\ 16/17 \end{pmatrix}$

en dus is de matrix van  $P = \begin{pmatrix} 1/17 & 4/17 \\ 4/17 & 16/17 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

3.5.2 De matrix van een projectie in  $\mathbb{R}^3$ 

V projectie  $\mathbb{R}^3$

Voor het vinden van de matrix van de projectie  $P$  op een vlak in  $\mathbb{R}^3$  moeten we bepalen wat er met de drie basisvectoren langs de  $x$ -,  $y$ -, en  $z$ -as gebeurt. We nemen als voorbeeld de projectie op het vlak  $W : 2x - 3y + z = 0$ . Het punt  $(1,0,0)$  komt op het blauwe punt in het vlak  $W$  terecht,  $(0,1,0)$  komt op het rode punt in  $W$  en  $(0,0,1)$  komt op het groene punt in  $W$ . Zie figuur 3.8

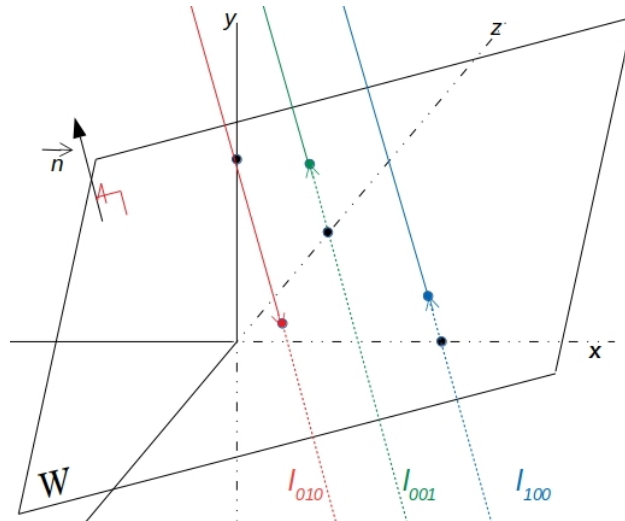


Figure 3.8: De projectie op het vlak  $W : 2x - 3y + z = 0$  door de oorsprong met de blauwe loodlijn  $l_{100}$ , door  $(1,0,0)$ , de rode  $l_{010}$  door  $(0,1,0)$  en de groene  $l_{001}$  door  $(0,0,1)$ . NB: De snijpunten van de loodlijnen met het vlak  $W$ , zijn met respectievelijk rood, groen en blauw aangegeven. Merk op dat de punten  $(1,0,0)$  en  $(0,0,1)$  'omhoog' geprojecteerd worden en  $(0,1,0)$  'naar beneden'.

We moeten de snijpunten van de 3 loodlijnen  $l_{100}$ ,  $l_{010}$  en  $l_{001}$  door respectievelijk de punten  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$  en  $(0,0,1)$  uitrekenen. We weten dat de richtingsvector van de loodlijnen gelijk is aan de normaalvector van  $W$  :  $\vec{n}_W = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Dus  $l_{100} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{c} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  is de eerste (blauwe) loodlijn.

Voor  $\vec{c}$  mogen we elk punt nemen dat op  $l_{100}$  ligt, bv  $(1,0,0)$ , dus

$$l_{100} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Het snijpunt (blauw) van  $l_{100}$  en  $W$  ligt èn in het vlak èn op de loodlijn, dus geldt:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{èn} \quad 2x - 3y + z = 0$$



door  $x$ ,  $y$  en  $z$  in te vullen in de 2<sup>e</sup> vergelijking vinden we:

$$\begin{aligned} 2(1 + 2\lambda) - 3(-3\lambda) + \lambda &= 0 \\ 2 + 4\lambda + 9\lambda + \lambda &= 0 \\ 2 + 14\lambda &= 0 \\ 14\lambda &= -2 \\ \lambda &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

Omdat we  $\lambda = -\frac{1}{7}$  mogen invullen in de vectorvoorstelling van de lijn  $l_{100}$  betekent dat het snijpunt van  $l_{100}$  en  $W$  gelijk is aan:

$$\begin{aligned} l_{100}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/7 \\ 3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5/7 \\ 3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Met andere woorden:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 5/7 \\ 3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}$

Op dezelfde manier vinden we ook de snijpunten van  $l_{010}$  en  $l_{001}$  met  $W$ :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 6/14 \\ 5/14 \\ 3/14 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} -2/14 \\ 3/14 \\ 13/14 \end{pmatrix}.$$

En dat betekent dat de matrix van  $P = \begin{pmatrix} 5/7 & 6/14 & -2/14 \\ 3/7 & 5/14 & 3/14 \\ -1/7 & 3/14 & 13/14 \end{pmatrix}.$

En dat is is nog iets mooier te schrijven als:

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 10/14 & 6/14 & -2/14 \\ 6/14 & 5/14 & 3/14 \\ -2/14 & 3/14 & 13/14 \end{pmatrix} \\ P &= \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3.6 Opgaven

1. Transponeer de matrix  $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -4 \\ -1 & 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
2. Wat is de uitkomst van  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ?
3. Geef de matrix  $R$  van de rotatie over  $62^\circ$  met de klok mee om de x-as, zodat  $(0,0,2)$  wordt afgebeeld op  $(0, 2 \sin 62^\circ, 2 \cos 62^\circ)$ .
4. Geef de matrix  $P_1$  van de projectie in  $\mathbb{R}^3$  op het vlak  $y = 3x$ .

#### 3.6.1 Extra opgaven

1. Transponeer de matrix  $N = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & 6 & -1 \end{pmatrix}$
2. Wat is het product van  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ?
3. Geef de matrix  $R_1$  van de rotatie over  $4^\circ$  met de klok mee rond de z-as zodat  $(1,0,-2)$  wordt afgebeeld op  $(\cos 4^\circ, -\sin 4^\circ, -2)$ .
4. Geef de matrix  $R_2$  van de rotatie over  $42^\circ$  tegen de klok in rond de y-as zodat  $(3,0,0)$  wordt afgebeeld op  $(3 \cos 42^\circ, 0, -3 \sin 42^\circ)$ .
5. Geef de matrix  $R_3$  van de rotatie over  $36^\circ$  tegen de klok in rond de x-as zodat  $(3,0,1)$  wordt afgebeeld op  $(3, -\sin 36^\circ, \cos 36^\circ)$ .
6. Geef de matrix  $P_2$  van de projectie in  $\mathbb{R}^3$  op het vlak  $y = x$ .

## 4. Spiegeling, translatie en samenstelling

In dit hoofdstuk gaan we nog een lineaire afbeeldingen behandelen, namelijk spiegeling. Daarnaast wordt ook translatie behandeld en komen we erachter dat deze niet lineair is. Uiteindelijk gaan we verschillende afbeeldingen combineren (samenstellen).

### 4.1 Spiegeling

Een spiegeling in  $\mathbb{R}^2$  wordt uitgevoerd door vanuit een punt een loodlijn te trekken naar de lijn waarin je spiegelt, en vervolgens die loodlijn even lang door te trekken naar de andere kant van de spiegellijn om het beeld van het originele punt te vinden. Zie figuur 4.1

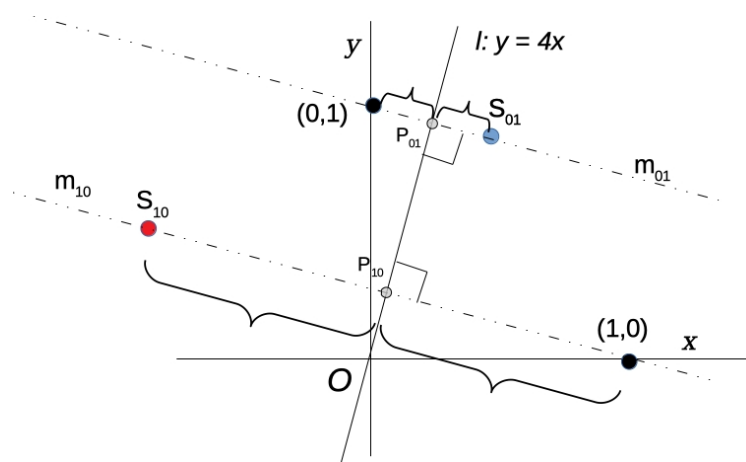


Figure 4.1: De spiegeling in de lijn  $y = 4x$ . Het rode punt is het spiegelbeeld van  $(1,0)$ , het blauwe het spiegelbeeld van  $(0,1)$ . De grijze punten zijn de projectiepunten.

### 4.1.1 De matrix van een spiegeling in $\mathbb{R}^2$

V spiegeling  $\mathbb{R}^2$

Als voorbeeld nemen we de spiegeling in de lijn  $y = 4x$  (figuur 4.1).

We kunnen bij een spiegeling gebruik maken van wat we bij een projectie uitgerekend hebben (zie *de matrix van een projectie in  $\mathbb{R}^2$*  blz 37).  $P_{10}$  is het punt waarop  $(1,0)$  *geprojecteerd* wordt, en  $S_{10}$  het punt waarnaar toe  $(1,0)$  *gespiegeld* wordt. Verder stellen we dat  $\vec{p} = \overrightarrow{OP_{10}}$ . ( $\overrightarrow{OP_{10}}$  is de vector van de oorsprong naar punt  $P_{10}$ ) Met behulp van figuur 4.2 kun je zien dat  $\overrightarrow{OS_{10}} = \vec{p} + (-\hat{b}_x) + \vec{p} = 2\vec{p} - \hat{b}_x$ .

Het zal je niet verbazen dat de volgende regel geldt:

Als  $\vec{p}$  het beeld van een basisvector  $\hat{b}$  bij een projectie is dan is  $2\vec{p} - \hat{b}$  het beeld van de bijbehorende spiegeling. Nog korter:

$\mathcal{E}$  spiegeling als  $\hat{b} \xrightarrow{P} \vec{p}$  dan  $\hat{b} \xrightarrow{S} 2\vec{p} - \hat{b}$  voor elke basisvector  $\hat{b}$

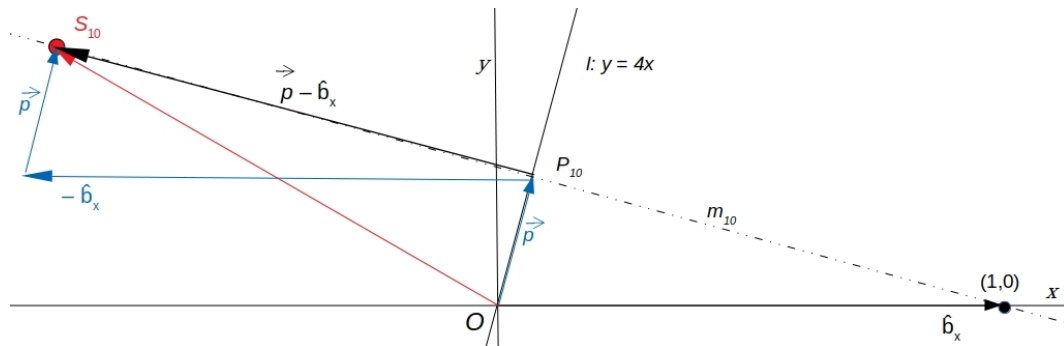


Figure 4.2: Het blauwe pad volgen is hetzelfde als in één keer de rode vector. En dus geldt: als  $\vec{p}$  het beeld van een projectie is, dan is het spiegelbeeld  $= 2\vec{p} - \hat{b}$ . (bij dit voorbeeld is  $\hat{b} = \hat{b}_x$ , de basisvector langs de x-as).

Van de projectie in  $\mathbb{R}^2$  weten we dat  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1/17 \\ 4/17 \end{pmatrix}$

$$\text{dus is } 2 \cdot \vec{p} - \hat{b}_x = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1/17 \\ 4/17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/17 - 1 \\ 8/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/17 \\ 8/17 \end{pmatrix}$$

$$\text{en dat betekent dat } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} -15/17 \\ 8/17 \end{pmatrix}.$$

We passen deze eigenschap ook toe om te vinden wat het beeld van  $\hat{b}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  onder onze spiegeling is:

$$\text{Er gold: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} 4/17 \\ 16/17 \end{pmatrix} \quad \text{dan is } 2\vec{p} - \hat{b}_y = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4/17 \\ 16/17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/17 \\ 15/17 \end{pmatrix}.$$

$$\text{dus } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \begin{pmatrix} 8/17 \\ 15/17 \end{pmatrix}$$

$$\text{En dus is de matrix van } S = \begin{pmatrix} -15/17 & 8/17 \\ 8/17 & 15/17 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 8 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$$

Misschien valt je op dat de getallen in de matrix niet toevallig lijken (linksonder

en rechtsboven zijn hetzelfde en de andere twee elkaars negatief). Dat is ook niet toevallig. Als je dat handig vindt mag je de uitkomst van een spiegelberekening controleren met de volgende formule:

Als  $S$  een spiegeling is in de lijn  $y = a \cdot x$ , dan is de matrix van de spiegeling

$\mathcal{E}$  spiegeling

$$S = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix}$$

#### 4.1.2 De matrix van een spiegeling in $\mathbb{R}^3$

Net zoals we bij een spiegeling in  $\mathbb{R}^2$  gebruik maken van de projectie (op dezelfde lijn waarin we spiegelen), kunnen we voor een spiegeling in  $\mathbb{R}^3$  gebruik maken van de projectie op het vlak waarin we willen spiegelen. Want er geldt dezelfde regel als in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\text{als } \hat{b} \xrightarrow{P} \vec{p} \quad \text{dan} \quad \hat{b} \xrightarrow{S} 2\vec{p} - \hat{b} \quad \text{voor elke basisvector } \hat{b}$$

$\mathcal{E}$  spiegeling

Als voorbeeld nemen we de spiegeling in het vlak  $W : 2x - 3y + z = 0$ .

$\mathcal{V}$  spiegeling  $\mathbb{R}^3$

Van de *projectie op  $W$*  (zie: 'matrix van een projectie in  $\mathbb{R}^3$ ' op blz.40) weten we dat:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

dat betekent dat bij de spiegeling geldt:

$$\text{voor } \hat{b}_x \text{ is } \vec{p} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad 2\vec{p} - \hat{b}_x = 2 \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{en dus } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Voor } \hat{b}_y \text{ geldt: } 2\vec{p} - \hat{b}_y = \frac{2}{14} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{en dus } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{en voor } \hat{b}_z \text{ geldt: } 2\vec{p} - \hat{b}_z = \frac{2}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{en dus } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dan is de matrix van } S = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

## 4.2 Translatie

Transleren, anders gezegd verschuiven, is een afwijkende afbeelding. Zoals we zullen zien is transleren, in tegenstelling tot roteren, spiegelen en projecteren *niet* lineair. Dat is belangrijk want daarom kunnen we er niet zomaar een matrix van maken. En alleen als we een matrix hebben kunnen we (beter gezegd software) er goed mee rekenen.

### 4.2.1 Translatie niet lineair

V translatie  $\mathbb{R}^2$

Als voorbeeld nemen we de translatie over de vector  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  
Je kunt de werking van deze translatie als volgt opschrijven:

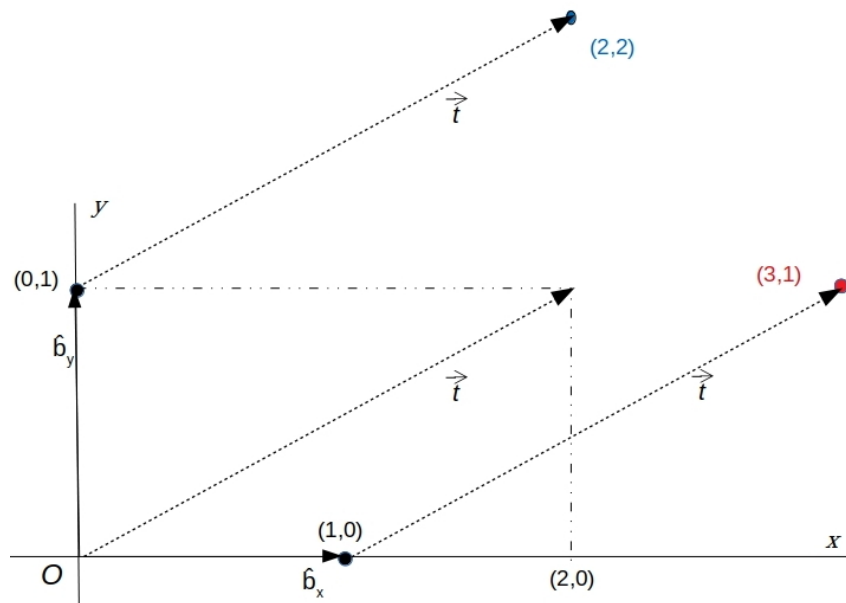


Figure 4.3: De translatie over de vector  $\vec{t}$ .

neem een willekeurige vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dan is het beeld daarvan  $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y+1 \end{pmatrix}$ .

Je kunt nu op verschillende manieren zien dat een matrix "niet werkt":

**Ten eerste:**  $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  en dat **zou** betekenen dat  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Op dezelfde manier **zou** je zien dat  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Dat **zou** betekenen dat  $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  En **als** dat zo zou zijn **zou**  $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  Dat **zou** betekenen dat het de oorsprong  $(0,0)$  niet verschoven zou worden! Overigens heet zo'n redenering als deze "een bewijs uit het ongerijmde".

**Ten tweede:** als  $T$  lineair zou zijn zou moeten gelden

$$T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b})$$

dus bijvoorbeeld voor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  is

$$T(\vec{a} + \vec{b}) = T\begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{maar}$$

$$T(\vec{a}) + T(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 0+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0+2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kortom **een translatie is niet lineair**

⊗ lineariteit

#### 4.2.2 Affiene matrix van translatie in $\mathbb{R}^2$

Maar er bestaat een truc om toch met een translatie te kunnen rekenen. We voegen aan de translatie een dimensie toe. Dat wil zeggen voor een twee-dimensionale translatie maken we een drie-dimensionale matrix en voor een drie-dimensionale translatie maken we een vier-dimensionale matrix:

Gegeven een translatie vector

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad \text{dan is } T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{de affiene matrix}$$

Δ affiene matrix

$$\text{voor de translatie over } \vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ is de affiene matrix } T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V affiene matrix

#### 4.2.3 Rekenen met een affiene matrix in $\mathbb{R}^2$

Om te kunnen rekenen met een affiene matrix moeten we aan alles een dimensie toevoegen: aan punten, vectoren en andere matrices. Dat doen we als volgt:

$$\text{Als } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ dan is } \vec{v}_a = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{de affiene vector}$$

Δ affiene vector

$$\text{Bijv. als } \vec{t} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ dan is de affiene vector } t_a = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

V affiene vector

Nu kunnen we controleren of de affiene matrix voor  $T$  klopt. We nemen weer de basisvector langs de x-as  $\hat{b}_x$  en voegen ook daar een dimensie aan toe!

$$\hat{b}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en dus is } \hat{b}_{xa} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$T_a \text{ is in ons geval bij } \vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dus: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{We kijken wat het beeld van } \hat{b}_{xa} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ onder } T_a \text{ is:}$$

$$T_a \cdot \hat{b}_{xa} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Anders gezegd:} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wat is het beeld van de oorsprong onder  $T_a$ ? Dan moeten we ook aan de oorsprong een dimensie toevoegen  $O_a = (0, 0, 1)$  Dan is

$$T_a \cdot O_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dat wil zeggen} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### 4.2.4 Een translatie in $\mathbb{R}^3$

Ook in 3 dimensies is een translatie niet lineair. Dus ook hier voegen we een dimensie toe:

$\Delta$  affiene matrix      Als  $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$  dan is  $T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  de affiene matrix

$V$  affiene matrix      Voor de translatie over  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$  is de affiene matrix  $T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Delta$  affiene vector      Als  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  dan is  $\vec{v}_a = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}$  de affiene vector

$V$  affiene vector      Als  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$  dan is  $\vec{a}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  de affiene vector

#### 4.2.5 Rekenen met een affiene matrix in $\mathbb{R}^3$

Nu kunnen we rekenen met een drie-dimensionale translatie. Neem dezelfde translatie als hier vlak boven, over de vector  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

Neem een willekeurige vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Dan is de affiene vector  $\vec{v}_a = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Het beeld van  $\vec{v}$  kunnen we nu uitrekenen:



$$T_a \cdot \vec{v}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 2 \\ v_2 + 3 \\ v_3 - 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dus  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} v_1 + 2 \\ v_2 + 3 \\ v_3 - 4 \end{pmatrix}.$

bijvoorbeeld  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

### 4.3 Samenstelling

Bewegen bestaat natuurlijk niet alleen uit draaien (roteren), spiegelen enzovoort, maar vooral uit combinaties daarvan. Dus is het belangrijk dat we die combinaties ook uit kunnen rekenen (daarom was het belangrijk om ook matrices voor translaties te hebben).

Als  $A$  en  $B$  matrices zijn dan is:

Δ samenstelling

de matrix  $S$  van de afbeelding  $A$  **gevolgd** door  $B$  gelijk aan:  $S = B \cdot A$

NB voor je gevoel draait de volgorde om! Maar als je goed kijkt zie je dat je eerst  $A$  uitvoert en daarna  $B$ .

#### 4.3.1 Samenstelling in $\mathbb{R}^2$

Stel dat de rotatie  $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  en de projectie  $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

V samenstelling

en we willen *eerst* roteren en *daarna* projecteren, dan is de matrix van die samenstelling:

$$S = P \cdot R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

maar als we *eerst* willen projecteren en *daarna* roteren, dan is de matrix van die samenstelling:

$$S_2 = R \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Stel dat de rotatie  $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  en de projectie  $P = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

V samenstelling

en we willen *eerst* projecteren en *daarna* roteren,

dan is de matrix van die samenstelling:

$$\begin{aligned} S = R \cdot P &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 \cdot \cos \theta + 4 \cdot -\sin \theta & 4 \cdot \cos \theta + 16 \cdot -\sin \theta \\ 1 \cdot \sin \theta + 4 \cdot \cos \theta & 4 \cdot \sin \theta + 16 \cdot \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{17} \begin{pmatrix} \cos \theta - 4 \sin \theta & 4 \cos \theta - 16 \sin \theta \\ \sin \theta + 4 \cos \theta & 4 \sin \theta + 16 \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.3.2 Samenstelling met affiene matrices in $\mathbb{R}^2$

Als we een translatie in  $\mathbb{R}^2$  willen samenstellen met een andere afbeelding moeten we eerst aan alle afbeeldingen een dimensie toevoegen.

$$\text{Als } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta \text{ affiene matrix} \quad \text{dan is de affiene matrix daarvan, } A_a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V affiene samenst. Stel  $T$  is de translatie over  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  en dat we daarnaast willen roteren met

$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  en willen met  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Dan zijn de affiene matrices:

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dan is de samenstelling van de drie, bij eerst spiegelen, dan transleren en tot slot roteren:

$$\begin{aligned} R_a \cdot T_a \cdot S_a &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 4.3.3 Samenstelling met affine matrices in $\mathbb{R}^3$

Als we een translatie in  $\mathbb{R}^3$  willen samenstellen met een andere afbeelding moeten we, net als in  $\mathbb{R}^2$  eerst aan alle afbeeldingen een dimensie toevoegen.

$$\text{Als } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ dan is } A_a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ de affine matrix } \Delta \text{ affine matrix}$$

van  $A$ .

$$\text{Stel } T \text{ is de translatie over } \vec{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ en } R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ en } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{V} \text{ affine samenst.}$$

Dan zijn de affine matrices:

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en dan is de samenstelling van eerst  $P$ , dan  $T$  en tot slot  $R$ :

$$\begin{aligned} R_a \cdot T_a \cdot P_a &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dit alles betekent tot slot dat als  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  een willekeurige vector in  $\mathbb{R}^3$  is,

dan is het beeld van  $\vec{v}$  onder  $R_a \cdot T_a \cdot P_a$ :

$$\begin{aligned} \vec{v} &\xrightarrow{R_a \cdot T_a \cdot P_a} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -v_1 + v_2 + 7 \\ v_1 + v_2 - v_3 - 1 \\ -v_1 + v_3 + 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dus bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R \cdot T \cdot P} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R \cdot T \cdot P} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R \cdot T \cdot P} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

#### 4.4 Opgaven

1. Geef de affine matrix van de translatie  $T$  die punt  $(3,2)$  afbeeldt op  $(5,-2)$ .

2. Geef de matrix van de spiegeling  $S_1$  in  $\mathbb{R}^3$  in de lijn  $x = 3y$

3. Gegeven de translatie  $T_3$  die punt  $(1,2)$  afbeeldt op punt  $(3,-2)$  en de rotatie

$$R = \begin{pmatrix} \cos 62^\circ & \sin 62^\circ \\ -\sin 62^\circ & \cos 62^\circ \end{pmatrix}.$$

Geef de matrix van de samengestelde afbeelding  $B$  die bestaat uit  $R$  gevolgd door  $T_3$ . NB: je moet eerst  $T_3$  en  $R$  affien maken!

4. Gegeven de translatie  $T_4$  die punt  $(-1,0,3)$  afbeeldt op punt  $(2,-1,4)$  en de

spiegeling  $S = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ . Geef de matrix van de afbeelding  $C$  die

bestaat uit de translatie gevolgd door de spiegeling.

##### 4.4.1 Extra opgaven

1. Geef de matrix van de spiegeling  $S_2$  in  $\mathbb{R}^3$  in het vlak  $y = 2x$

2. Geef de matrix van de spiegeling  $S_3$  in  $\mathbb{R}^3$  in het vlak  $z = -\frac{1}{3}y$

3. Geef de affine matrix van de translatie  $T_1$  die punt  $(5,1,2)$  afbeeldt op  $(0,1,6)$ .

4. Geef de affine matrix van de translatie  $T_2$  die punt  $(9,0,-1)$  afbeeldt op  $(6,2,-2)$ .

5. Geef de matrix van de afbeelding  $A$  die samengesteld is uit  $S_2$ , gevolgd door  $T_1$ , gevolgd door  $S_3$ .

## 5. Determinant

De determinant van een matrix is binnen de lineaire algebra en meetkunde belangrijk begrip. De determinant is in de meetkunde een oppervlakte of inhoud van een ruimte. In de lineaire algebra geeft een determinant belangrijke informatie over een matrix.

### 5.1 Determinant van een $2 \times 2$ matrix

De determinant van

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{is} \quad |A| = ad - bc$$

$\Delta$  determinant  $\mathbb{R}^2$

Dat mag je ook schrijven als  $\det(A)$ , of als  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ .

$$\text{Als } A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{dan is} \quad |A| = -1 \cdot -3 - 2 \cdot 5 = -7$$

$\nabla$  determinant

#### 5.1.1 Eigenschappen van determinanten

*Vierkante matrix*

De determinant van *niet* vierkante matrices (bv  $(2 \times 3)$  of  $(5 \times 4)$ ) bestaat niet.

*Eenheidsmatrix*

De determinant van de eenheidsmatrix (een matrix waarin op de hoofddiagonaal allen enen staan) is  $= 1$ .

*Inverse matrix*

De determinant wordt gebruikt om te bepalen of een matrix een inverse heeft. Anders gezegd: of je een beweging ook weer terug kunt draaien, ongedaan kunt maken.

**E**  $\det(A) \neq 0$  Als  $|A| \neq 0$  dan heeft  $A$  een inverse (is omkeerbaar)

Je kunt zelfs de inverse van een matrix uitrekenen (als de determinant  $\neq 0$ ):

inverse berekenen Als  $|A| \neq 0$  dan is in  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

inverse berekenen Stel  $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  dan is  $|A| = -7$  en  $A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Nu kunnen we controleren of de inverse echt de omgekeerde is door  $A$  en  $A^{-1}$  met elkaar te vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 \cdot -3 + 5 \cdot -2 & -1 \cdot -5 + 5 \cdot -1 \\ 2 \cdot -3 + -3 \cdot -2 & 2 \cdot -5 + -3 \cdot -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**E**  $\det(A^T) = \det(A)$  De determinant van een getransponeerde matrix is hetzelfde als de determinant van de matrix zelf:

**V**  $\det(A^T) = \det(A)$  We nemen weer als voorbeeld de matrix  $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  dan is  $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$  en dus is  $|A^T| = -1 \cdot -3 - 2 \cdot 5 = -7 = |A|$

**E** rijen gelijk Als een matrix twee of meer gelijke rijen (of kolommen) heeft dan is de determinant = 0:

**V** gelijke rijen We nemen als voorbeeld de matrix  $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

en zien dat  $|A| = -1 \cdot 5 - (-1) \cdot 5 = 0$

**E** rij, kolom = 0 Als in een matrix een hele rij of kolom gelijk is 0 dan is  $|A| = 0$

**V** kolom, rij = 0 We nemen als voorbeeld de matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

en zien dat  $|A| = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 5 = 0$

## 5.2 Ontwikkelen van een determinant

Natuurlijk willen we ook de determinant van  $3 \times 3$  en  $4 \times 4$  matrices (en hogere dimensies) uit kunnen rekenen. Daar bestaat een mooi recursief algoritme voor. Om te beginnen met een  $3 \times 3$  determinant:

De determinant van

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ is } |A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad \Delta \text{ determinant } \mathbb{R}^3$$

In woorden: Je ontwikkelt de determinant naar de 1<sup>e</sup> rij door voor  $a_{11}$  de rij en kolom waar  $a_{11}$  in staat 'door te strepen' en daarna  $a_{11}$  te vermenigvuldigen met de

determinant van de getallen die overblijven:  $\begin{pmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

voor  $a_{21}$  :  $\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  **N.B. bij  $a_{21}$  komt er een min-teken bij!**

en voor  $a_{31}$  :  $\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix}$

Voorbeeld van een 3×3 determinant:

$\nabla$  determinant  $\mathbb{R}^3$

als  $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$  dan is

$$\begin{aligned} |A| &= -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot (2 \cdot 2 - (-1) \cdot 6) - 4 \cdot (0 \cdot 2 - 3 \cdot 6) + 1 \cdot (0 \cdot (-1) - 3 \cdot 2) \\ &= -5 \cdot 10 - 4 \cdot (-18) + 1 \cdot (-6) \\ &= 16 \end{aligned}$$

Δ determinant  $\mathbb{R}^n$

De formule voor de determinant van een  $n \times n$  matrix gaat natuurlijk ook recursief:

$$\text{Als } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ dan is}$$

$$|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \dots - \dots + \dots - \dots \dots \dots$$

$$\pm a_{n1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Oef! Daar kunnen we wel wat trucjes bij gebruiken die in de volgende paragraaf behandeld worden.

### 5.2.1 Rekenhulp determinant

ℰ ontwikkelen

Je mag een determinant uitrekenen met behulp van de 1<sup>e</sup> kolom, maar dat mag ook met behulp van de 2<sup>e</sup> rij of de laatste kolom of ...

Je moet alleen wel rekening houden met minnen en plussen volgens onderstaand schema:

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

V ontwikkelen Dus als je bijvoorbeeld naar de 2<sup>e</sup> rij ontwikkelt dan begin je met een − ,



daarna + en je wisselt de – en + af:

$$\begin{aligned} \text{als } A &= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan is} \\ |A| &= -4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -4 \cdot (0 \cdot 2 - 6 \cdot 3) + 2 \cdot (-5 \cdot 2 - 1 \cdot 3) + 1 \cdot (-5 \cdot 6 - 1 \cdot 0) \\ &= -4 \cdot -18 + 2 \cdot -13 + 1 \cdot -30 \\ &= 16 \end{aligned}$$

En dat is hetzelfde als we als antwoord kregen op de vorige bladzij.

Als je een kolom (een aantal keer) bij een andere kolom optelt blijft de determinant hetzelfde; datzelfde geldt voor rijen

$$\text{Stel we hebben de matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}. \quad \text{V optellen } \det(A)$$

Dat ziet indrukwekkend uit, maar als we de 1<sup>e</sup> kolom met 2 vermenigvuldigen en bij de 2<sup>e</sup> kolom optellen dan is

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2+2 \cdot 1 & 3 & 2 \\ 3 & -6+2 \cdot 3 & 0 & 7 \\ -2 & 4+2 \cdot -2 & 1 & 5 \\ -1 & 2+2 \cdot -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En, als een hele kolom 0 is, dan is de determinant 0, dus  $|A| = 0$

Als een hele rij of kolom 0 maken niet lukt kunnen we het toch veel eenvoudiger

maken. Stel we hebben  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & 9 & 6 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ .

We trekken 3 keer de 1<sup>e</sup> rij van de 2<sup>e</sup> rij af. Dan is

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & 9 & 6 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4-3 \cdot 1 & -6-3 \cdot (-2) & 9-3 \cdot 3 & 6-3 \cdot 2 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Omdat de determinant immers 0 is, als een rij of kolom enkel nullen bevat, blijft over:

$$= 0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} + 0 - 0$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{Je hoeft nu dus enkel te ontwikkelen naar de 2<sup>e</sup> rij!}$$

Je kunt nu de 2<sup>e</sup> kolom van de 1<sup>e</sup> aftrekken:

$$\begin{aligned}
 &= -1 \cdot \begin{vmatrix} -2-3 & 3 & 2 \\ 1-1 & 1 & 5 \\ 2-2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\
 &= -1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\
 &= -1 \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\
 &= -1 \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\
 &= -1 \cdot (-5) \cdot (1 \cdot (-4) - 2 \cdot 5) \\
 &= -1 \cdot (-5) \cdot (-4 - 10) \\
 &= -1 \cdot (-5) \cdot -14 \\
 &= -70
 \end{aligned}$$

**5.3 Opgaven**

Bereken de determinanten van de volgende matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ 8 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**5.3.1 Extra opgaven**

Bereken de determinanten van de volgende matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 3 \\ -7 & 5 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 11 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 8 & -6 \\ 9 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

## 6. Quaternion

In software voor 3D-applicaties wordt eigenlijk niet de rotatie-methode gebruikt zoals die in hoofdstuk 3 is beschreven. Vaker wordt de methode van Euler gebruikt, maar die levert problemen op als je over 3 assen roteert. Dat probleem wordt de Gimbal Lock genoemd. Als twee assen over elkaar heen liggen is er een 'vrijheidsgraad' verdwenen en kan een object dus maar in twee richtingen roteren, waar drie richtingen gewenst zijn. Zoek gerust op YouTube even wat info hierover, dit probleem is namelijk makkelijker te snappen met een animatie ervan. Dit is een probleem dat zich zowel in computer graphics als in robotica voor doet. Quaternionen hebben dit probleem niet en worden dan ook veelvuldig ingezet bij rotaties in robotica en computer graphics. Om quaternionen te begrijpen en te kunnen gebruiken moeten we eerst even iets over complexe getallen uitleggen.

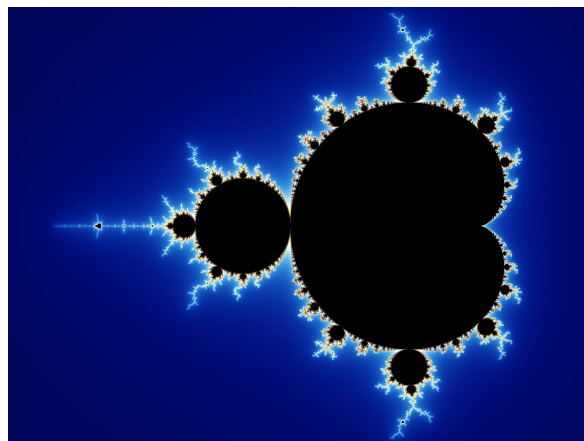


Figure 6.1: Voorbeeld van een fractal, de Mandelbrotverzameling (Bron: Wikipedia).  
Tip: Martin Molema kan je over dergelijke figuren van alles vertellen en laten zien.

## 6.1 Complexe getallen

Complexe getallen (en quaternionen) zijn zeer handige 'rekenhulpjes' in scala aan werkelden, zoals in de 3D-simulaties, meet- regeltechniek, signaalbewerking en in de elektrotechniek. Ze zijn daarnaast ook een belangrijk in fractals, daar kun je van die mooie wiskunde figuren uit maken, zoals figuur 6.1.

Complexe getallen zijn een uitbreiding van de reële getallen. Bij het vak discrete wiskunde heb je inmiddels een aantal getalverzamelingen geleerd. bijvoorbeeld  $\mathbb{N}$ , de natuurlijke getallen. Dit zijn alle gehele getallen vanaf 0, dus  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Wil je ook iets doen met negatieve getallen? Bijv.  $3 - 4 = ?$ , Dan is de verzameling  $\mathbb{N}$  dus niet toereikend. Je moet dan uitwijken naar een uitbreiding. Bijv.  $\mathbb{Z}$ , de gehele getallen, deze omvat naast alle getallen van  $\mathbb{N}$ , ook de negatieve getallen,  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

Echter als je  $\frac{1}{2} = ?$  wil uitrekenen is ook deze verzameling niet genoeg. Daarvoor kunnen we uitwijken naar de rationale getallen ( $\mathbb{Q}$ , deze omvat naast alles van  $\mathbb{Z}$ , ook breuken) of direct naar  $\mathbb{R}$ , de reële getallen, deze verzameling omvat naast alle getallen van  $\mathbb{Q}$  ook bijzondere getallen die niet uit te drukken zijn in een breuk, zoals  $\sqrt{2}$  of  $\pi$ .

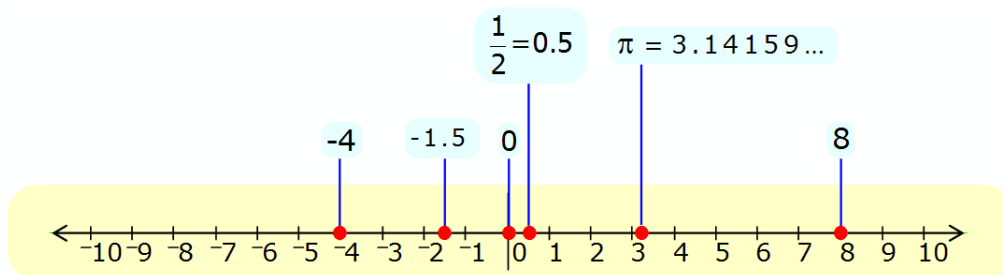


Figure 6.2:  $\mathbb{R}$  omvat elk denkbaar getal op een lijn.

Maar wat nu als je bijv.  $x$  probeert op te lossen uit de volgende vergelijking?

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1} \quad ???$$

Er is geen enkel getal in  $\mathbb{R}$  waarvan je de wortel kunt nemen zodat er  $-1$  uitkomt. Wellicht heb je ooit wel gehoord van een docent wiskunde dat  $\sqrt{-1}$  dan ook 'niet kan' en op zich klopt dat, voor  $\mathbb{R}$  althans. Maar met complexe getallen is dit wel op te lossen. Complexe getallen hebben namelijk een 'imaginair deel',  $i$  en daarvoor geldt:

$\Delta$  imaginair  $i^2 = -1$ .

In het bovenstaande voorbeeld zou  $x = i$ , dus een oplossing zijn. Vaak worden complexe getallen toegepast als er geen (of lastig een) oplossing in  $\mathbb{R}$  gevonden kan worden. Men zet dan het getal om in een complex getal, voert daarin allerlei berekeningen uit, en zet het dan weer om naar een reëel getal (Dat laatste gaat in

dit kleine voorbeeld echter niet).

We definiëren een complex getal  $z$  als:

$$z = a + bi \quad \text{met } a \text{ en } b \text{ reële getallen}$$

Δ getal in  $\mathbb{C}$

Bijvoorbeeld,  $z = 2 + 3i$  is een complex getal. Complexe getallen ( $\mathbb{C}$ ) kun je zien als 2-dimensionale getallen, zie ook figuur 6.3. V getal in  $\mathbb{C}$

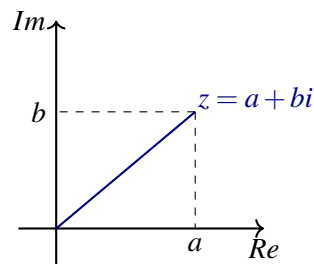


Figure 6.3: Complexe getallen kun je zien als 2-dimensionaal, waarbij een getal  $z$  een 'reëel deel'  $a$  heeft en een 'imaginair deel'  $bi$ .

We zeggen ook wel dat  $z$  bestaat uit een reëel deel  $a$  en een imaginair deel  $bi$ . Je kunt met complexe getallen net zo rekenen als met reële getallen als je maar rekening houdt met  $i^2 = -1$ . Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} (1-i)^2 &= (1-i) \cdot (1-i) \\ &= (1 \cdot 1) + (1 \cdot -i) + (-i \cdot 1) + (-i \cdot -i) \\ &= 1 - i - i - 1 \\ &= -2i \end{aligned}$$

## 6.2 Quaternionen

Quaternionen zijn een uitbreiding van complexe getallen, ze worden aangegeven met  $\mathbb{H}$ . In plaats van één imaginair deel heb je er hier drie:

Een quaternion is:

$$q = a + bi + cj + dk \quad \text{Waarbij } a, b, c, d \text{ reëel zijn, en } i, j, k \text{ imaginair}$$

Δ quaternion

Je zou Quaternionen dus kunnen zien als vier-dimensionale getallen, al is dat wat moeilijk grafisch voor te stellen. Bij Quaternionen voldoen  $i, j, k$  zich aan de volgende regels:

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$$

$$\begin{aligned} i \cdot j &= k & j \cdot i &= -k \\ i \cdot k &= -j & k \cdot i &= j \\ j \cdot k &= i & k \cdot j &= -i \end{aligned}$$

Met  $a, b, c$  en  $d$  kun je gewoon rekenen, omdat het reële getallen zijn.

Ter voorbeeld:  $q_1 = 2 - i + 2j - 3k$  is een quaternion, net als  $q_2 = -j + k$ .

V quaternion

### 6.2.1 Rekenschema

Voor het berekenen van de rotatie wordt gebruik gemaakt van quaternion vermenigvuldiging. Twee quaternionen met elkaar vermenigvuldigen gaat via onderstaande tabel:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Je zoekt *eerst* in de 1<sup>e</sup> kolom ( **blauw** ) welke van  $i$ ,  $j$  of  $k$  je nodig hebt en *daarna* het volgende imaginaire getal in de 1<sup>e</sup> rij ( **rood** ). Op het kruispunt staat het resultaat van de vermenigvuldiging (de volgorde is belangrijk omdat bv  $i \cdot k = -j$  maar  $k \cdot i = j$  !)

V quaterniontabel als  $q_1 = 6 + 3i - 5j + 2k$  en  $q_2 = 2 + i + 4j - 2k$  wat is dan  $q_1 \cdot q_2$ ?  
Daarvoor zijn er 2 manieren:

**1. invullen in tabel** Dit is de handigste manier: Schrijf de eerste quaternion in de eerste kolom en de tweede quaternion in de eerste rij. Vul op de kruispunten de vermenigvuldigingen in met de regels uit het schema. Bijvoorbeeld op het kruispunt van de 3<sup>e</sup> rij en de 5<sup>e</sup> kolom:  $3i \cdot -2k = -6ik$  en omdat  $i \cdot k = -j$  is de uitkomst  $- -6j = 6j$ .

$q_1 \cdot q_2$	2	i	4j	-2k
6	12	6i	24j	-12k
3i	6i	-3	12k	6j
-5j	-10j	5k	20	10i
2k	4k	2j	-8i	4

Nu kun je het antwoord van linksbovenin tot rechtsonderin af lezen in de tabel. Daarna verzamel je alle  $i$ ,  $j$  en  $k$ :

$$\begin{aligned}
 q_1 \cdot q_2 &= 12 + 6i + 24j - 12k + 6i - 3 + 12k + 6j - 10j + 5k + 20 + 10i + 4k + 2j - 8i + 4 \\
 &= 12 - 3 + 20 + 4 + (6 + 6 + 10 - 8)i + (24 + 6 - 10 + 2)j + (-12 + 12 + 5 + 4)k \\
 &= 33 + 14i + 22j + 9k
 \end{aligned}$$



**2. Uitschrijven:** Je schrijft alle vermenigvuldigingen op en kijkt per vermenigvuldiging in de tabel wat er uit komt. 'Haakjes wegwerken' dus, weer een flashback naar het vak logica:

$$\begin{aligned}
 q_1 \cdot q_2 &= (6 + 3i - 5j + 2k) \cdot (2 + i + 4j - 2k) \\
 &= 6 \cdot 2 + 6i + 6 \cdot 4j + 6 \cdot -2k && \text{'gewoon' vermenigvuldigen} \\
 &\quad + 3i \cdot 2 + 3i \cdot i + 3i \cdot 4j + 3i \cdot -2k && i \text{ in } 1^e \text{ kolom opzoeken} \\
 &\quad + -5j \cdot 2 + -5j \cdot i + -5j \cdot 4j + -5j \cdot -2k && j \text{ in } 1^e \text{ kolom opzoeken} \\
 &\quad + 2k \cdot 2 + 2k \cdot i + 2k \cdot 4j + 2k \cdot -2k && k \text{ in } 1^e \text{ kolom opzoeken} \\
 &= 12 + 6i + 24j - 12k \\
 &\quad + 6i - 3 + 12k + 6j \\
 &\quad - 10j + 5k + 20 + 10i \\
 &\quad + 4k + 2j - 8i + 4 && \text{nu alle } i, j \text{ en } k \text{ bij elkaar zoeken} \\
 &= 12 - 3 + 20 + 4 + (6 + 6 + 10 - 8)i + (24 + 6 - 10 + 2)j + (-12 + 12 + 5 + 4)k \\
 &= 33 + 14i + 22j + 9k
 \end{aligned}$$

### 6.3 Geconjugeerde quaternion

Een quaternion kan geconjugerd worden en dit is ook nodig voor het berekenen van een rotatie. Een geconjugeerde quaternion wordt genoteerd als  $q^*$  en wordt in algemene vorm als volgt geschreven:

$$\text{Als } q = a + bi + cj + dk \quad \text{dan is:} \quad q^* = a - bi - cj - dk \quad \Delta \text{ geconjugerd}$$

We doen even een paar voorbeeldjes:

$$\begin{aligned}
 \text{Stel } q &= 1 - 2i + 3j + k \text{ dan is } q^* = 1 + 2i - 3j - k && \mathbf{V} \text{ geconjugerd} \\
 \text{Als } q &= i - 3j \text{ dan is } q^* = -i + 3j
 \end{aligned}$$

### 6.4 Roteren met quaternionen

We gebruiken quaternionen om te roteren. Daarvoor moeten we dan wel eerst de punten van  $\mathbb{R}^3$  omzetten naar quaternionen.

$$\text{Als } P = (x, y, z) \text{ in } \mathbb{R}^3 \text{ dan is} \quad \Delta \text{ puntquaternion}$$

$$\text{het puntquaternion dat er bij hoort:} \quad p = xi + yj + zk$$

$$\text{Stel } P = (1, 3, -2) \text{ dan is } p = 0 + 1 \cdot i + 3j - 2k = i + 3j - 2k \quad \mathbf{V} \text{ puntquaternion}$$

$$\text{het puntquaternion dat er bij hoort}$$

Voor het berekenen van een rotatie in  $\mathbb{R}^3$  geldt de volgende formule:

$$\text{Als } p \text{ een punt en } q_r \text{ een rotatie is in } \mathbb{R}^3 \text{ dan is:} \quad \Delta \text{ quaternionrotatie}$$

$$\text{het geroteerde punt} \quad p' = q_r \cdot p \cdot q_r^*$$

✓ quaternionrotatie Stel  $P = (3, 0, 1)$  en  $q_r = 2j - k$  wat is dan  $q_r \cdot p \cdot q_r^*$  ?

$$p = 3i + k = 0 + 3i + 0 \cdot j + k$$

$$q_r^* = -2j + k = 0 + 0 \cdot i - 2j + k$$

dan is de tabel voor  $p \cdot q_r^*$ : (p in de 1<sup>e</sup> kolom,  $q_r^*$  : in de 1<sup>e</sup> rij)

$p \cdot q_r^*$	0	0	-2j	k
0	0	0	0	0
3i	0	0	-6k	-3j
0	0	0	0	0
k	0	0	2i	-1

en dus  $p \cdot q_r^* = -1 + 2i - 3j - 6k$ .

Daarna met de tabel  $q_r \cdot (p \cdot q_r^*)$  uitrekenen ( $q_r$  in de 1<sup>e</sup> kolom,  $p \cdot q_r^*$  : in de 1<sup>e</sup> rij)

$q_r \cdot (p \cdot q_r^*)$	-1	2i	-3j	-6k
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
2j	-2j	-4k	6	-12i
-k	k	-2j	-3i	-6

en dus is  $p' = q_r \cdot (p \cdot q_r^*) = -15i - 4j - 3k$ . Dat betekent dat het punt  $P = (3, 0, 1)$  onder het quaternion  $q_r = 2j - k$  afgebeeld wordt op het punt  $P' = (-15, -4, -3)$ . Dat is een vreemde rotatie (want de afstand tot de oorsprong wordt ineens groter) . Dat komt omdat we voor  $q_r$  wat gemakkelijke waardes hebben genomen en dat is geen echt rotatiequaternion.

Daarom hebben we de volgende definitie nodig:

Δ quaternionrotatie Gegeven de eenheidsvector  $\hat{v}$  en de hoek  $\alpha$  dan is:  
het rotatiequaternion:  $q_r = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{v}_1 i + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{v}_2 j + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{v}_3 k$ .

✓ quaternionrotatie Stel  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  dan is  $\hat{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  (omdat  $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ )

Stel verder dat we over  $\alpha = 180^\circ$  willen roteren, dan is  $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

We weten dat  $\cos(90^\circ) = 0$  en  $\sin(90^\circ) = 1$  En dus is:

$$q_r = \cos\left(\frac{180}{2}\right) + \sin\left(\frac{180}{2}\right) \cdot -\frac{3}{5} \cdot i + \sin\left(\frac{180}{2}\right) \cdot 0 \cdot j + \sin\left(\frac{180}{2}\right) \cdot \frac{4}{5} \cdot k$$

$$q_r = \cos(90) - \frac{3}{5} \cdot \sin(90) \cdot i + \frac{4}{5} \cdot \sin(90) \cdot k$$

$$q_r = 0 - \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot i + \frac{4}{5} \cdot 1 \cdot k$$

$$q_r = -\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}k$$

We nemen dezelfde vector en hoek als hierboven.

Stel verder dat we  $P = (-1, -1, 0)$  willen roteren.

Dan is  $p = -i - j$  het puntquaternion.

We hadden  $q_r = -\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}k$

en dus is  $q_r^* = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}k$ .

Eerst moeten we  $p \cdot q_r^*$  uitrekenen:

$p \cdot q_r^*$	0	$\frac{3}{5}i$	0	$-\frac{4}{5}k$
0	0	0	0	0
-i	0	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}j$
-j	0	$\frac{3}{5}k$	0	$\frac{4}{5}i$
0	0	0	0	0

En dus is  $p \cdot q_r^* = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i - \frac{4}{5}j + \frac{3}{5}k$ .

Anders geschreven:  $p \cdot q_r^* = \frac{1}{5}(3 + 4i - 4j + 3k)$ .

Dit vullen we in in de 1<sup>e</sup> rij en  $q_r$  in de 1<sup>e</sup> kolom om  $q_r \cdot (p \cdot q_r^*)$  te berekenen:

$q_r \cdot (p \cdot q_r^*)$	3	4i	-4j	3k	$\times \frac{1}{5}$
0	0	0	0	0	
-3i	-9i	12	12k	9j	
0	0	0	0	0	
4k	12k	16j	16i	-12	
$\times \frac{1}{5}$					

Om de berekening overzichtelijk te houden zijn de breuken 'buiten haakjes gehaald'.

Zowel voor  $q_r$  als voor  $p \cdot q_r^*$  is dat  $\frac{1}{5}$ .

Dat betekent dat we alles met  $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$  moeten vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned}
 p' &= q_r \cdot (p \cdot q_r^*) \\
 &= \frac{1}{25}(-9i + 12 + 12k + 9j + 12k + 16j + 16i - 12) \\
 &= \frac{1}{25}(7i + 25j + 24k)
 \end{aligned}$$

En dat betekent dat het punt  $P = (-1, -1, 0)$  waar we mee begonnen geroteerd wordt naar  $P' = (\frac{7}{25}, \frac{25}{25}, \frac{24}{25}) = (0.28, 1, 0.96)$ , zie figuur 6.4.

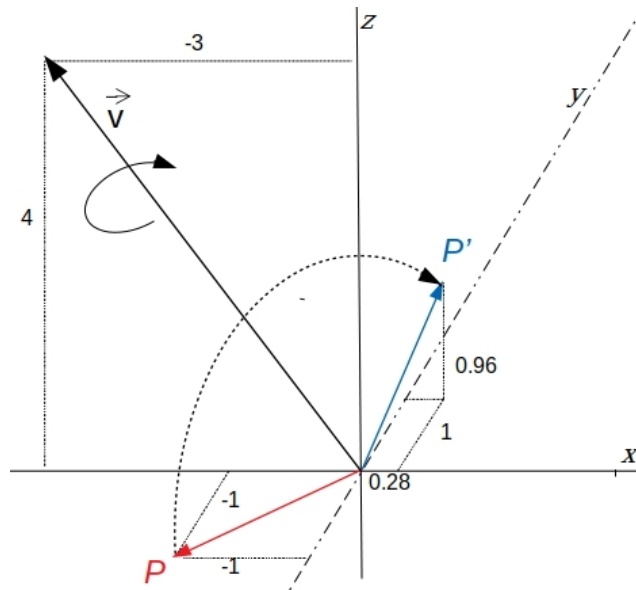


Figure 6.4: De rotatie om  $\vec{v}$  over  $180^\circ$ .  $P(-1, -1, 0)$  rood, wordt geroteerd naar  $P' = (0.28, 1, 0.96)$ , blauw.

## 6.5 Opgaven

1. Gegeven  $P(-2, 2, 9)$  en de vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ . We roteren over  $84^\circ$ . Geef het puntquaternion  $p$  en het geconjugeerde rotatiequaternion  $q_r^*$ .
2. Gegeven  $P(23, -15, 7)$  en de vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ . We roteren over  $42^\circ$ . Geef het puntquaternion  $p$  en het geconjugeerde rotatiequaternion  $q_r^*$ .
3. Gegeven  $a = 2i - 4j + 5k$  en  $b = 7 + 2i + j$ . Bereken het product  $a \cdot b$ .
4. Gegeven  $c = -16 - 2i + 3j + 2k$  en  $d = -1 + 4i + 2k$ . Bereken het product  $c \cdot d$ .
5. Gegeven  $P(-2, 0, 5)$  en de vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . We roteren over  $60^\circ$ . Gebruik quaternions om het beeld van  $P$  onder deze rotatie uit te rekenen.

### 6.5.1 extra opgaven

1. Gegeven  $P(2, 2, 0)$  en de vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ . We roteren over  $42^\circ$ . Geef het puntquaternion  $p$  en het geconjugeerde rotatiequaternion  $q_r^*$ .

2. Gegeven  $P(6, -2, 3)$  en de vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ . We roteren over  $84^\circ$ . Geef het puntquaternion  $p$  en het geconjugeerde rotatiequaternion  $q_r^*$ .
3. Gegeven  $e = 2 + 2j - k$  en  $f = 2i + 3j + 3k$ . Bereken het product  $e \cdot f$ .
4. Gegeven  $P(-2, 0, 0)$  en de vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ . We roteren over  $60^\circ$ . Gebruik quaternionen om het beeld van  $P$  onder deze rotatie uit te rekenen.
5. Schrijf een programma dat quaternionen kan vermenigvuldigen.
6. Schrijf een programma dat quaternionrotatie kan uitvoeren (dus gegeven een willekeurige vector  $\vec{v}$ , hoek  $\alpha$  en punt  $P$ , kan uitrekenen waar  $P'$  onder de rotatie uitkomt).



## 7. Antwoorden

### 7.1 antwoorden hoofdstuk 2

$$1. \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad (\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$2. \quad \alpha = \cos^{-1} \left( \frac{-4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} \right) \approx 119.7$$

$$3. \quad \text{De lengte van } \vec{v} \text{ is } |\vec{v}| = \sqrt{42}$$

$$4. \quad |\vec{v}| = 10 \text{ en dus } \hat{v} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.5 \\ -0.7 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad \text{afstand} = \frac{7}{9} \sqrt{18} \approx 3.3$$

$$6. \quad \text{afstand} = \frac{2}{3} \sqrt{24} \approx 3.27$$

### antwoorden extra opgaven hoofdstuk 2

$$1. \quad \vec{d} + \vec{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{d} - \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (\vec{d}, \vec{e}) = 3 - 14 + 10 = -1$$

$$2. \quad \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = -5 \text{ en dus } \alpha = \cos^{-1} \left( \frac{-5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{25}} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{-1}{\sqrt{10}} \right) \approx 108.4$$

$$3. \quad \text{De lengte van } \vec{w} \text{ is } |\vec{w}| = \sqrt{82} \approx 9.06$$

$$4. \quad \text{afstand} = \frac{420}{1928} \cdot \sqrt{1928} = \frac{105}{482} \cdot \sqrt{1928} \approx 9.57$$

$$5. \quad \text{afstand} = 11/3$$

### 7.2 antwoorden hoofdstuk 3

1.  $M^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$
2. Het product is:  $\begin{pmatrix} 14 & 52 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$
3. De rotatie  $R$  is:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 62^\circ & \sin 62^\circ \\ 0 & -\sin 62^\circ & \cos 62^\circ \end{pmatrix}$
4. De projectie  $P_1$  is:  $\begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 0 \\ 3/10 & 9/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

### antwoorden extra opgaven hoofdstuk 3

1.  $N^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 9 \\ -3 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. Het product is:  $\begin{pmatrix} 20 & 3 & 0 \\ 40 & 6 & 0 \\ 8 & -11 & -12 \end{pmatrix}$
3. De rotatie  $R_1$  is:  $\begin{pmatrix} \cos 4^\circ & \sin 4^\circ & 0 \\ -\sin 4^\circ & \cos 4^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. De rotatie  $R_2$  is:  $\begin{pmatrix} \cos 42^\circ & 0 & \sin 42^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 42^\circ & 0 & \cos 42^\circ \end{pmatrix}$
5. De rotatie  $R_3$  is:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 36^\circ & -\sin 36^\circ \\ 0 & \sin 36^\circ & \cos 126^\circ \end{pmatrix}$
6. De projectie  $P_2$  is:  $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

### 7.3 antwoorden hoofdstuk 4

1.  $T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.  $S = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.  $T_{3a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  en  $R_a = \begin{pmatrix} \cos 62^\circ & \sin 62^\circ & 0 \\ -\sin 62^\circ & \cos 62^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  dus  $B = \begin{pmatrix} \cos 62^\circ & \sin 62^\circ & 2 \\ -\sin 62^\circ & \cos 62^\circ & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



$$4. T_{4a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } S_a = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ dus } C = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

**antwoorden extra opgaven hoofdstuk 4**

$$1. S_2 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2. S_3 = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$3. T_{1a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. T_{2a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. S_3 \cdot T_{1a} \cdot S_2 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 20 & 0 & -125 \\ 16 & 12 & -15 & -60 \\ -12 & -9 & 70 & 280 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

**7.4 antwoorden hoofdstuk 5**

- A 5
- B 0
- C 0
- D -55
- E -55
- F 0
- G 100
- H 34

**antwoorden extra opgaven hoofdstuk 5**

- A 0
- B 10
- C 2
- D 30
- E 0
- F 18
- G 1

## 7.5 antwoorden hoofdstuk 6

$$1. \hat{v} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} \quad p = -2i + 2j + 9k \quad q_r^* = \cos(42^\circ) + \frac{4\sin(42^\circ)}{5}i - \frac{3\sin(42^\circ)}{5}k$$

$$2. \hat{v} = \begin{pmatrix} 6/11 \\ -6/11 \\ -7/11 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad p = 23i - 15j + 7k$$

$$q_r^* = \cos(21^\circ) - \frac{6\sin(21^\circ)}{11}i + \frac{6\sin(21^\circ)}{11}j - \frac{7\sin(21^\circ)}{11}k$$

$a \cdot b$	7	2i	j	0k
0	0	0	0	0
2i	14i	-4	2k	0
-4j	-28j	8k	4	0
5k	35k	10j	-5i	0

3.

$$a \cdot b = -4 + 4 + 14i - 5i - 28j + 10j + 2k + 8k + 35k = 9i - 18j + 45k$$

4.

$c \cdot d$	-1	4i	0j	2k
-16	16	-64i	0	-32k
2i	2i	8	0	4j
3j	-3j	-12k	0	6i
2k	-2k	8j	0	-4

$$c \cdot d = 16 + 8 - 4 - 64i + 2i + 6i + 4j - 3j + 8j - 32k - 12k - 2k = 20 - 56i + 15j - 46k$$

$$5. \hat{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p = -2i + 5k$$

$$q_r = \cos(30^\circ) - \sin(30^\circ)i = \cos(30^\circ) - 0,5i$$

$$q_r^* = \cos(30^\circ) + \sin(30^\circ)i = \cos(30^\circ) + 0,5i$$

$q_r \cdot p$	0	-2i	0j	5k
$\cos(30^\circ)$	0	$-2\cos(30^\circ)i$	0	$5\cos(30^\circ)k$
-0,5i	0	-1	0	2,5j
0j	0	0	0	0
0k	0	0	0	0

$$q_r \cdot p = -1 - 2\cos(30^\circ)i + 2,5j + 5\cos(30^\circ)k$$

$(q_r \cdot p) \cdot q_r^*$	$\cos(30^\circ)$	0,5i	0j	0k
-1	$-\cos(30^\circ)$	-0,5i	0	0
$-2\cos(30^\circ)i$	-1,5i	$\cos(30^\circ)$	0	0
2,5j	$2,5\cos(30^\circ)j$	-1,25k	0	0
$5\cos(30^\circ)k$	3,75k	$2,5\cos(30^\circ)j$	0	0

$$p' = (q_r \cdot p) \cdot q_r^* = -2i + 5\cos(30^\circ)j + 2,5k$$

$$\text{D.w.z. het punt P komt terecht op } P' = \begin{pmatrix} -2 \\ 5\cos(30^\circ) \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 5\sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix}$$

## antwoorden extra opgaven hoofdstuk 6

$$1. \hat{v} = \begin{pmatrix} 4/6 \\ -2/6 \\ 4/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad p = 2i + 2j$$

$$q_r = \cos(21^\circ) + \frac{2}{3}\sin(21^\circ)i - \frac{1}{3}\sin(21^\circ)j + \frac{2}{3}\sin(21^\circ)k$$

$$q_r^* = \cos(21^\circ) - \frac{2}{3}\sin(21^\circ)i + \frac{1}{3}\sin(21^\circ)j - \frac{2}{3}\sin(21^\circ)k$$

$$2. \hat{v} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad p = 6i - 2j + 3k$$

$$q_r = \cos(42^\circ) - \frac{2}{3}\sin(42^\circ)i + \frac{2}{3}\sin(42^\circ)j + \frac{1}{3}\sin(42^\circ)k$$

$$q_r^* = \cos(42^\circ) + \frac{2}{3}\sin(42^\circ)i - \frac{2}{3}\sin(42^\circ)j - \frac{1}{3}\sin(42^\circ)k$$

$$3.$$

$e \cdot f$	0	2i	3j	3k
3	0	6i	9j	9k
0i	0	0	0	0
2j	0	-4k	-6	6i
-k	0	-2j	3i	3

$$e \cdot f = -6 + 3 + 6i + 6i + 3i + 9j - 2j + 9k - 4k = -3 + 15i + 7j + 5k$$

$$4. \hat{v} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p = -2i$$

$$q_r = \cos(30^\circ) + \frac{1}{7}\sin(30^\circ)j = \cos(30^\circ) + \frac{1}{14}j$$

$$q_r^* = \cos(30^\circ) - \frac{1}{7}\sin(30^\circ)j = \cos(30^\circ) - \frac{1}{14}j$$

$q_r \cdot p$	0	-2i	0j	0k
$\cos(30^\circ)$	0	$-2\cos(30^\circ)i$	0	0
0i	0	0	0	0
$1/14j$	0	$1/7k$	0	0
0k	0	0	0	0

$$q_r \cdot p = -2\cos(30^\circ)i + \frac{1}{7}k$$

$(q_r \cdot p) \cdot q_r^*$	$\cos(30^\circ)$	0i	$-1/14j$	0k
0	0	0	0	0
$-2\cos(30^\circ)i$	$-3/2i$	0	$1/7\cos(30^\circ)k$	0
0j	0	0	0	0
$1/7k$	$1/7\cos(30^\circ)k$	0	$1/98i$	0

$$\begin{aligned}p' &= q_r \cdot p \cdot q_r^* \\&= -\frac{3}{2}i + \frac{1}{98}i + \frac{1}{7}\cos(30^\circ)k + \frac{1}{7}\cos(30^\circ)k \\&= -\frac{147}{98}i + \frac{1}{98}i + \frac{2}{7}\cos(30^\circ)k \\&= -\frac{146}{98}i + \frac{2}{7}\cos(30^\circ)k \\&= -\frac{73}{49}i + \frac{2}{7}\cos(30^\circ)k\end{aligned}$$

en dus komt punt  $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  terecht op punt  $P' = \begin{pmatrix} -73/49 \\ 0 \\ 2/7\cos(30^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -73 \\ 0 \\ 7\sqrt{3} \end{pmatrix}$



## Index van definities

affiene matrix, 47, 48, 50, 51  
affiene vector, 47, 48

basisvector, 31

determinant  $\mathbb{R}^2$ , 53  
determinant  $\mathbb{R}^3$ , 55  
determinant  $\mathbb{R}^n$ , 56  
diagonaalmatrix, 28

eenheidsmatrix, 28  
eenheidsvector, 14

geconjugerd, 65  
getal in  $\mathbb{C}$ , 63  
getransponeerd, 29

hoek, 14  
hoofddiagonaal, 28

imaginair, 62  
inproduct, 12

lijn  $\mathbb{R}^2$ , 15  
Lin. afbeelding, 30

matrix, 27  
matrixprodukt, 29

norm, 14  
normaal lijn, 20  
normaal vlak, 20  
nulmatrix, 28

projectie, 37  
puntquaternion, 65

quaternion, 63  
quaternionrotatie, 65, 66

samenstelling, 49  
scalair product, 10  
som, 10  
symmetrisch, 29

uitproduct, 13

vector, 9, 27  
verschil, 11  
vierkante matrix, 28  
vlak  $\mathbb{R}^3$ , 16





## Index van eigenschappen

$\det(A) \neq 0$ , 54

$\det(A^T) = \det(A)$ , 54

$A \cdot B \neq B \cdot A$ , 30

associatief, 30

inproduct, 12

inverse berekenen, 54

lineariteit, 47

matrix bepalen, 31

matrix rotatie, 34

normaal vlak, 20

ontwikkelen, 56

optellen  $\det(A)$ , 57

rc loodlijn, 38

rij, kolom = 0, 54

rijen gelijk, 54

spiegeling, 44, 45

uitproduct, 13







## Index van voorbeelden

$\det(A^T) = \det(A)$ , 54

$A.B \neq B.A$ , 30

affiene matrix, 47, 48

affiene samenst., 50, 51

affiene vector, 47, 48

afstand, 22, 24

basis  $\mathbb{R}^2$ , 31

basis  $\mathbb{R}^3$ , 31

determinant, 53

determinant  $\mathbb{R}^3$ , 55

diagonaalmatrix, 28

eenheidsmatrix, 28

eenheidsvector, 14

geconjugerd, 65

gelijke rijen, 54

getal in  $\mathbb{C}$ , 63

getransponeerde, 29

hoek, 15

hoofddiagonaal, 28

inproduct, 12

inverse berekenen, 54

kolom, rij = 0, 54

lijn  $\mathbb{R}^2$ , 15

loodrecht, 12, 13

matrix, 27

matrix  $\mathbb{R}^2$ , 32

matrix  $\mathbb{R}^3$ , 31

matrixprodukt, 29

norm, 14

normaal lijn, 20

normaal vlak, 20, 21

nulmatrix, 28

ontwikkelen, 56

optellen  $\det(A)$ , 57

projectie  $\mathbb{R}^2$ , 37, 38

projectie  $\mathbb{R}^3$ , 40

puntquaternion, 65

quaternion, 63

quaternionrotatie, 66, 67

quaterniontabel, 64

rc loodlijn, 38

rotatie  $\mathbb{R}^3$ , 35

rotatie 60, 34

samenstelling, 49

scalair product, 11

som  $\mathbb{R}^2$ , 10



university of  
applied sciences