# Izbrani algoritmi

## Sistemi linearnih enačb

Damjan Strnad

# Sistem linearnih enačb

- sistem $n$ enačb z $n$ neznankami $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

- matrično vektorska enačba: $\mathbf{Ax=b}$
- če nobena enačba ni enaka linearni kombinaciji drugih, je sistem enolično rešljiv
- rešitev z inverzom: $\mathbf{x=A^{-1}b}$
  - numerično nestabilna

# Gaussova eliminacija

- povečana matrika Ã:

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \;\; \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

- pretvorba povečane matrike koeficientov v zgornjetrikotno z uporabo naslednjih operacij:
  - zamenjava dveh vrstic matrike
  - zamenjava vrstice z njenim večkratnikom
  - prištevanje večkratnika ene vrstice drugi
- rešitev sistema od $x_n$ proti $x_1$ s substitucijo nazaj

# Gaussova eliminacija – zgled

- rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=[\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}]=\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & -7 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 26 \end{bmatrix}$$

# Gaussova eliminacija – zgled

- rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=[\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}]=\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & -7 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 8 & 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2

# Gaussova eliminacija – zgled

- rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 6 & 2 & 8 & 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2

# Gaussova eliminacija – zgled

- rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 6 & 2 & 8 & 26 \end{bmatrix} \; -2\cdot$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- odštejemo 2-kratnik prve vrstice od tretje
  - prva vrstica je pivotna enačba, vrednost 3 je pivot

# Gaussova eliminacija – zgled

- rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & -8 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- odštejemo 2-kratnik prve vrstice od tretje
  - prva vrstica je pivotna enačba, vrednost 3 je pivot

# Gaussova eliminacija – zgled

- rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & -8 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad +1\cdot$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- odštejemo 2-kratnik prve vrstice od tretje
  - prva vrstica je pivotna enačba, vrednost 3 je pivot
- prištejemo drugo vrstico tretji
  - druga vrstica je pivotna enačba, vrednost 8 je pivot

# Gaussova eliminacija – zgled

- rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- odštejemo 2-kratnik prve vrstice od tretje
  - prva vrstica je pivotna enačba, vrednost 3 je pivot
- prištejemo drugo vrstico tretji
  - druga vrstica je pivotna enačba, vrednost 8 je pivot

# Gaussova eliminacija – zgled

- rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- odštejemo 2-kratnik prve vrstice od tretje
  - prva vrstica je pivotna enačba, vrednost 3 je pivot
- prištejemo drugo vrstico tretji
  - druga vrstica je pivotna enačba, vrednost 8 je pivot
- iz zadnje vrstice dobimo $x_3=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

# Gaussova eliminacija – zgled

- rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- odštejemo 2-kratnik prve vrstice od tretje
  - prva vrstica je pivotna enačba, vrednost 3 je pivot
- prištejemo drugo vrstico tretji
  - druga vrstica je pivotna enačba, vrednost 8 je pivot
- iz zadnje vrstice dobimo $x_3=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
- s substitucijo nazaj izračunamo $x_2=\frac{-7-2x_3}{8}=-1$

# Gaussova eliminacija – zgled

- rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- odštejemo 2-kratnik prve vrstice od tretje
  - prva vrstica je pivotna enačba, vrednost 3 je pivot
- prištejemo drugo vrstico tretji
  - druga vrstica je pivotna enačba, vrednost 8 je pivot
- iz zadnje vrstice dobimo $x_3=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
- s substitucijo nazaj izračunamo $x_2=\frac{-7-2x_3}{8}=-1$
- s substitucijo nazaj izračunamo $x_1=\frac{8-5x_2-2x_3}{3}=4$

# Gaussova eliminacija – zgled

```
GAUSS_ELIMINATION(A,b)
    n ← dim(A)                  // dimenzija sistema enačb
    Ã ← [A b]                   // tvori povečano matriko (ã_{j,n+1}=b_j)
    for k ← 1 to n-1
        poišči najmanjši j≥k, tako da ã_{jk}≠0
        if j=NULL                       // če tak j ne obstaja
            return ni rešitve
        zamenjaj vrstici j in k v Ã
        for j ← k+1 to n
            l_{jk} ← ã_{jk} / ã_{kk}
            for p ← k to n+1
                ã_{jp} ← ã_{jp} – l_{jk}ã_{kp}
    if ã_{nn}=0
        return ni rešitve
    else
        x_n ← ã_{n,n+1} / ã_{nn}        // reši zadnjo vrstico
    for i ← n-1 downto 1                // substitucija nazaj
        x_i ← (1/ã_{ii}) (ã_{i,n+1} − Σ_{j=i+1}^{n} ã_{ij} x_j)
    return x=[x_j]^T_{j=1..n}
```

# Gaussova eliminacija – zgled

- časovna zahtevnost algoritma je O($n^3$)
- delno pivotiranje:
  - izboljšava numerične stabilnosti
  - v vsakem stolpcu iščemo pivotni element največje vrednosti
- Gauss-Jordanova eliminacija:
  - s pivotno enačbo postavljamo na nič tudi elemente nad diagonalo
  - rezultat je diagonalna matrika
  - $x_i = \frac{b_i}{\tilde{a}_{ii}}$

# Gaussova eliminacija – zgled

```
GAUSS_ELIMINATION_PARTIAL_PIVOT(A,b)
    n ← dim(A)                  // dimenzija sistema enačb
    Ã ← [A b]                   // tvori povečano matriko (ã_{j,n+1}=b_j)
    for k ← 1 to n-1
        j ← argmax_{k≤i≤n}(ã_{jk})    // delno pivotiranje
        if ã_{jk}=0                   // če ne obstaja neničelni pivot
            return ni rešitve
        zamenjaj vrstici j in k v Ã
        for j ← k+1 to n
            l_{jk} ← ã_{jk} / ã_{kk}
            for p ← k to n+1
                ã_{jp} ← ã_{jp} – l_{jk}ã_{kp}
    if ã_{nn}=0
        return ni rešitve
    else
        x_n ← ã_{n,n+1} / ã_{nn}          // reši zadnjo vrstico
    for i ← n-1 downto 1                  // substitucija nazaj
```

$$x_i \leftarrow \frac{1}{\tilde{a}_{ii}}\left(\tilde{a}_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j\right)$$

```
    return x=[x_j]^T_{j=1..n}
```

# LU dekompozicija

- ali LU faktorizacija je razcep matrike A:

$$\mathbf{A}=\mathbf{LU}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- **L** je spodnja enotska trikotna matrika
- **U** je zgornja trikotna matrika
- metoda reševanja linearnega sistema z razcepom LU je modifikacija Gaussove eliminacije (GE):
  - $l_{jk}$ so faktorji GE
  - **U** je enaka zgornje trikotni matriki po zaključku GE
  - ista časovna zahtevnost $O(n^3)$ kot GE, a hitrejše izvajanje pri konstantnem **A** in spreminjajočem se **b**

# LU dekompozicija - postopek

- rešujemo sistem **Ax=b**
- matriko **A** z izmenjavami vrstic preoblikujemo, tako da na diagonali nima ničel, iste izmenjave izvedemo na **b** ⇒ **A'**, **b'**
- **A'** razcepimo na **L** in **U** ⇒ **LUx=b'***
- definiramo **y=Ux** ⇒ **Ly=b'**
- rešimo sistem **Ly=b'** s substitucijo naprej, da dobimo **y**
- rešimo sistem **Ux=y** s substitucijo nazaj, da dobimo **x***

# LU dekompozicija - postopek

- rešujemo sistem **Ax=b**
- matriko **A** z izmenjavami vrstic preoblikujemo, tako da na diagonali nima ničel, iste izmenjave izvedemo na **b** ⇒ **A'**, **b'**
- **A'** razcepimo na **L** in **U** ⇒ **LUx=b'***
- definiramo
- rešimo siste … dobimo **y**
- rešimo siste … lobimo **x***

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
    return L,U
```

# LU dekompozicija - postopek

- rešujemo sistem **Ax=b**
- matriko **A** z ... ako da na diagona ... o na **b** ⇒ **A'**, **b'**
- **A'** razcepin
- definiramo
- rešimo siste ... bimo **y**
- rešimo sistem **Ux=y** s substitucijo nazaj, da dobimo **x***

LU_SOLVE(**L**,**U**,**b**)

    n ← dim(**L**)

    **for** i ← 1 **to** n        // subst. naprej

$$y_i \leftarrow b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$$

    **for** i ← n **downto** 1  // subst. nazaj

$$x_i \leftarrow \frac{1}{u_{ii}} \left( y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right)$$

    **return x**

# LU dekompozicija – zgled

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 26 \end{bmatrix}$$

# LU dekompozicija – zgled

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2

# LU dekompozicija – zgled

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A'}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b'}=\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2

# LU dekompozicija – zgled

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A'}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b'}=\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- izračunamo razcep **A'** na **L** in **U**

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

# LU dekompozicija – zgled

$$\begin{aligned} 8x_2 + 2x_3 &= -7 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b'} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- izračunamo razcep **A'** na **L** in **U**

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- s substitucijo naprej rešimo sistem **Ly=b'**

# LU dekompozicija – zgled

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A'}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b'}=\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- izračunamo razcep **A'** na **L** in **U**

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

- s substitucijo naprej rešimo sistem **Ly**=**b'**
- s substitucijo nazaj rešimo sistem **Ux**=**y**

# LU dekompozicija – zgled

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A'}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b'}=\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- izračunamo razcep **A'** na **L** in **U**

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

- s substitucijo naprej rešimo sistem **Ly**=**b'**
- s substitucijo nazaj rešimo sistem **Ux**=**y**
- vrednost $l_{ij}$ je obratno predznačen faktor vrstice *j*, ki smo jo pri Gaussovi eliminaciji prišteli vrstici *i*

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
```

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi vse stolpce matrike

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi vse stolpce matrike
- diagonalni element prepišemo iz **A** v **U**

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi v
- diagonalni element prepišemo iz **A** v **U**
- izračunamo del stolpca pod diagonalo **L** (deljenje istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagonalo **L** (deljenje istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & ? & ? \\ 6 & ? & ? \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona
istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona
  istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & {\color{red}8} & ?\\ 6 & ? & ?\end{bmatrix}\quad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & ? & 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & ? & ?\\ 0 & 0 & ?\end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & \color{red}{2} \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & \color{red}{2} \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona
istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & 8 & \color{red}{2}\\ 6 & ? & ?\end{bmatrix}\quad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & ? & 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & ? & ?\\ 0 & 0 & ?\end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & 8 & 2\\ 6 & 2 & 8\end{bmatrix}\quad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & ? & 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & ? & ?\\ 0 & 0 & ?\end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona
istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & \color{red}{-8} & ? \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona
istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & 8 & 2\\ 6 & -8 & 8\end{bmatrix} \quad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & ? & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & ? & ?\\ 0 & 0 & ?\end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona… istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & -8 & \color{red}{4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona
  istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & -8 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & ? & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona
istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)
- pomaknemo se v naslednji stolpec **A** in ponovimo postopek

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & 8 & 2\\ 6 & -8 & 4\end{bmatrix}\ \mathbf{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & ? & 1\end{bmatrix}\ \mathbf{U}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & 8 & ?\\ 0 & 0 & ?\end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona… istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)
- pomaknemo se v naslednji stolpec **A** in ponovimo postopek

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & -8 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona... istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)
- pomaknemo se v naslednji stolpec **A** in ponovimo postopek

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & -8 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona
  istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)
- pomaknemo se v naslednji stolpec **A** in ponovimo postopek

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & -8 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)
- pomaknemo se v naslednji stolpec **A** in ponovimo postopek

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & -8 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona
  istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)
- pomaknemo se v naslednji stolpec **A** in ponovimo postopek

# LU dekompozicija – zgled

- podrobnejši opis postopka izračuna razcepa:

$$\mathbf{A'}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & 8 & 2\\ 6 & -8 & 6\end{bmatrix}\quad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ 0 & 8 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

```
LU_DECOMPOSITION(A)
    n ← dim(A)
    for k ← 1 to n
        u_kk ← a_kk
        for i ← k+1 to n
            l_ik ← a_ik / u_kk
            u_ki ← a_ki
        for i ← k+1 to n
            for j ← k+1 to n
                a_ij ← a_ij - l_ik u_kj
```

- zunanja zanka (števec *k*) gre skozi
- diagonalni element prepišemo iz **A**
- izračunamo del stolpca pod diagona
  istoležnega elementa **A** z diagonalnim elementom)
- izračunamo del vrstice desno od diagonale **U** (prepišemo istoležni element **A**)
- preračunamo del matrike **A** pod trenutno vrstico in desno od trenutnega stolpca (od vsakega elementa odštejemo produkt elementa **L** v isti vrstici trenutnega stolpca z elementom **U** v istem stolpcu trenutne vrstice)
- pomaknemo se v naslednji stolpec **A** in ponovimo postopek

# Gauss-Seidelova metoda

- iterativna metoda, ki sistem linearnih enačb rešuje s približevanjem rešitvi iz njene začetne aproksimacije $\mathbf{x}^{(0)}$
- uporabno za dinamični linearni sistem, pri katerem se matrika A počasi spreminja
  - rešitev v naslednjem trenutku je blizu prejšnje rešitve
  - prejšnjo rešitev uporabimo kot začetno aproksimacijo
- metoda gotovo konvergira, če je matrika **A**:
  - diagonalno dominantna (vrednosti na diagonali so večje ali enake vsoti ostalih vrednosti v vrstici), ali
  - simetrična pozitivno definitna (za vsak $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ velja $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$)
- zaključni pogoj je podan z želeno natančnostjo rešitve ε

# Gauss-Seidelova metoda

- izpeljava metode:
  - **A** in **b** preoblikujemo, da ni ničel na diagonali **A**
  - delimo vsako vrstico matrike **A** z njenim diagonalnim elementom (na diagonali dobimo enice)
  - **A** zapišemo kot **A**=**I**+**L**+**U** ⇒ (**I**+**L**+**U**)**x**=**b** ⇒ **x**=**b**-**Lx**-**Ux**
  - **L** in **U** nista enaki kot pri LU razcepu
  - zapišemo iterativno enačbo $\mathbf{x}^{(m+1)}=\mathbf{b}-\mathbf{L}\mathbf{x}^{(m+1)}-\mathbf{U}\mathbf{x}^{(m)}$

```
GAUSS_SEIDEL(A,b,x(0),ε,N)
    for m ← 0 to N-1            // max. št. iteracij
        for j ← 1 to n
            x_j^(m+1) ← (1/a_jj) (Σ_{k=1}^{j-1} a_jk x_k^(m+1) + Σ_{k=j+1}^{n} a_jk x_k^(m) − b_j)
        if ‖x(m+1)-x(m)‖<ε
            return x(m+1)
    return ni rešitve
```

$$x_j^{(m+1)} \leftarrow -\frac{1}{a_{jj}}\left(\sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}x_k^{(m+1)} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k^{(m)} - b_j\right)$$

# Gauss-Seidelova metoda – zgled

- izvedimo eno iteracijo Gauss-Seidelove metode za naslednji primer, če je $\mathbf{x}^{(0)}=[1 \;\; -1 \;\; 2]^T$:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 5x_1+3x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 26 \end{bmatrix}$$

# Gauss-Seidelova metoda – zgled

- izvedimo eno iteracijo Gauss-Seidelove metode za naslednji primer, če je $\mathbf{x}^{(0)}=[1 \ \ -1 \ \ 2]^T$:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 5x_1+3x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2

# Gauss-Seidelova metoda – zgled

- izvedimo eno iteracijo Gauss-Seidelove metode za naslednji primer, če je $\mathbf{x}^{(0)}=[1\ \ -1\ \ 2]^T$:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 5x_1+3x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \mathbf{A'}=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b'}=\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- $j$=1: $x_1^{(1)}=-\frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2^{(0)}+a_{13}x_3^{(0)}-b_1\right)=-\frac{1}{5}\left(3\cdot(-1)+2\cdot 2-8\right)=\frac{7}{5}$

# Gauss-Seidelova metoda – zgled

- izvedimo eno iteracijo Gauss-Seidelove metode za naslednji primer, če je $\mathbf{x}^{(0)}=[1\ \ -1\ \ 2]^T$:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 5x_1+3x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}'=\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- *j*=1: $x_1^{(1)}=-\frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2^{(0)}+a_{13}x_3^{(0)}-b_1\right)=-\frac{1}{5}\left(3\cdot(-1)+2\cdot2-8\right)=\frac{7}{5}$
- *j*=2: $x_2^{(1)}=-\frac{1}{a_{22}}\left(a_{21}x_1^{(1)}+a_{23}x_3^{(0)}-b_2\right)=-\frac{1}{8}\left(0\cdot\frac{7}{5}+2\cdot2+7\right)=-\frac{11}{8}$

# Gauss-Seidelova metoda – zgled

- izvedimo eno iteracijo Gauss-Seidelove metode za naslednji primer, če je $\mathbf{x}^{(0)}=[1\ \ -1\ \ 2]^T$:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 5x_1+3x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}'=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}'=\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- *j*=1: $x_1^{(1)}=-\frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2^{(0)}+a_{13}x_3^{(0)}-b_1\right)=-\frac{1}{5}\left(3\cdot(-1)+2\cdot 2-8\right)=\frac{7}{5}$
- *j*=2: $x_2^{(1)}=-\frac{1}{a_{22}}\left(a_{21}x_1^{(1)}+a_{23}x_3^{(0)}-b_2\right)=-\frac{1}{8}\left(0\cdot\frac{7}{5}+2\cdot 2+7\right)=-\frac{11}{8}$
- *j*=3: $x_3^{(1)}=-\frac{1}{a_{33}}\left(a_{31}x_1^{(1)}+a_{32}x_2^{(1)}-b_3\right)=-\frac{1}{8}\left(6\cdot\frac{7}{5}-2\cdot\frac{11}{8}-26\right)=\frac{407}{160}$

# Gauss-Seidelova metoda – zgled

- izvedimo eno iteracijo Gauss-Seidelove metode za naslednji primer, če je $\mathbf{x}^{(0)}=[1\ \ -1\ \ 2]^T$:

$$\begin{aligned} 8x_2+2x_3 &= -7 \\ 5x_1+3x_2+2x_3 &= 8 \\ 6x_1+2x_2+8x_3 &= 26 \end{aligned} \qquad \mathbf{A'}=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b'}=\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix}$$

- zamenjamo vrstici 1 in 2
- $j$=1: $x_1^{(1)}=-\frac{1}{a_{11}}\left(a_{12}x_2^{(0)}+a_{13}x_3^{(0)}-b_1\right)=-\frac{1}{5}\left(3\cdot(-1)+2\cdot 2-8\right)=\frac{7}{5}$
- $j$=2: $x_2^{(1)}=-\frac{1}{a_{22}}\left(a_{21}x_1^{(1)}+a_{23}x_3^{(0)}-b_2\right)=-\frac{1}{8}\left(0\cdot\frac{7}{5}+2\cdot 2+7\right)=-\frac{11}{8}$
- $j$=3: $x_3^{(1)}=-\frac{1}{a_{33}}\left(a_{31}x_1^{(1)}+a_{32}x_2^{(1)}-b_3\right)=-\frac{1}{8}\left(6\cdot\frac{7}{5}-2\cdot\frac{11}{8}-26\right)=\frac{407}{160}$
- $\mathbf{x}^{(1)}=[1.4\ \ \ -1.375\ \ \ 2.544]$