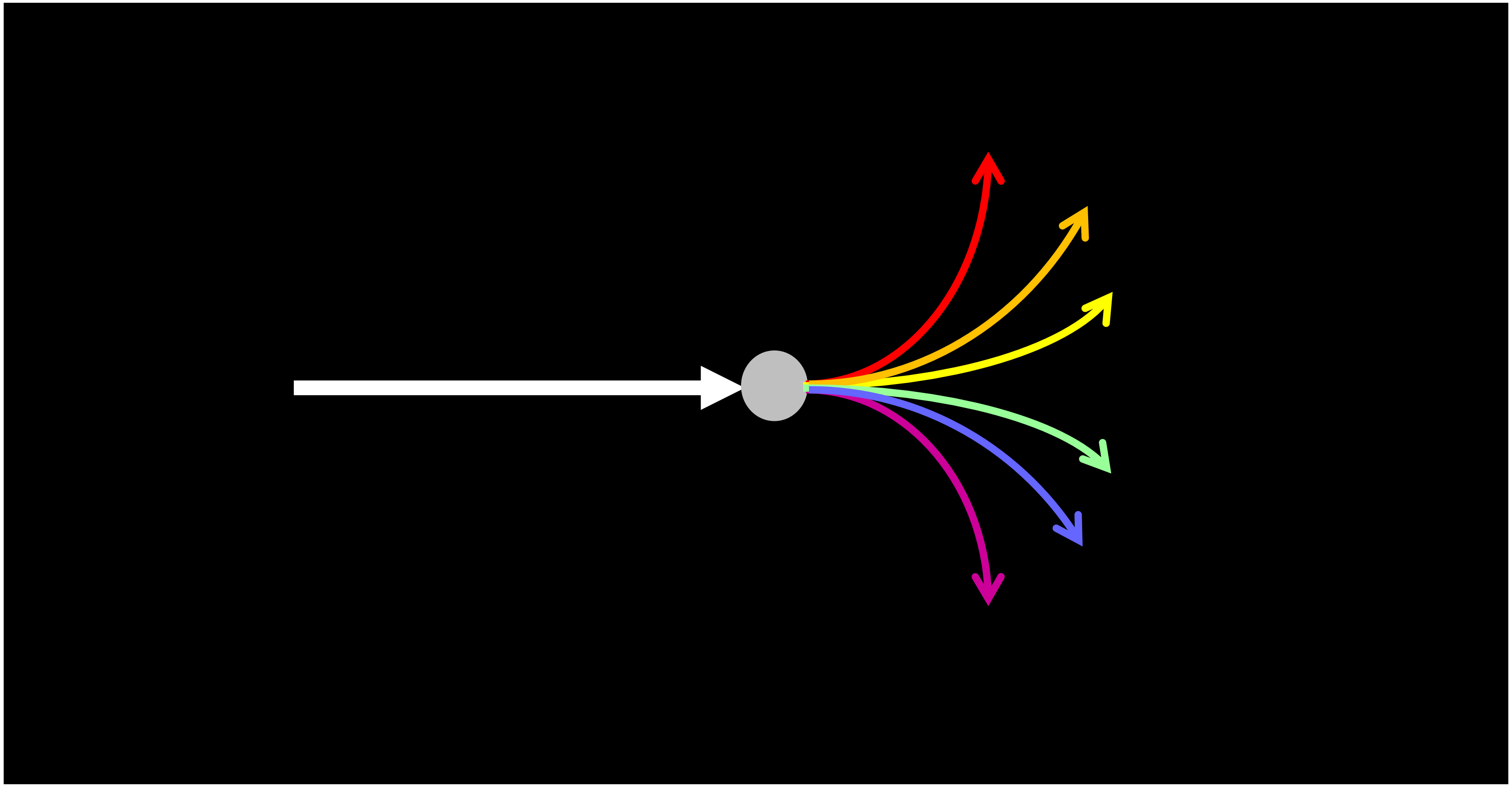
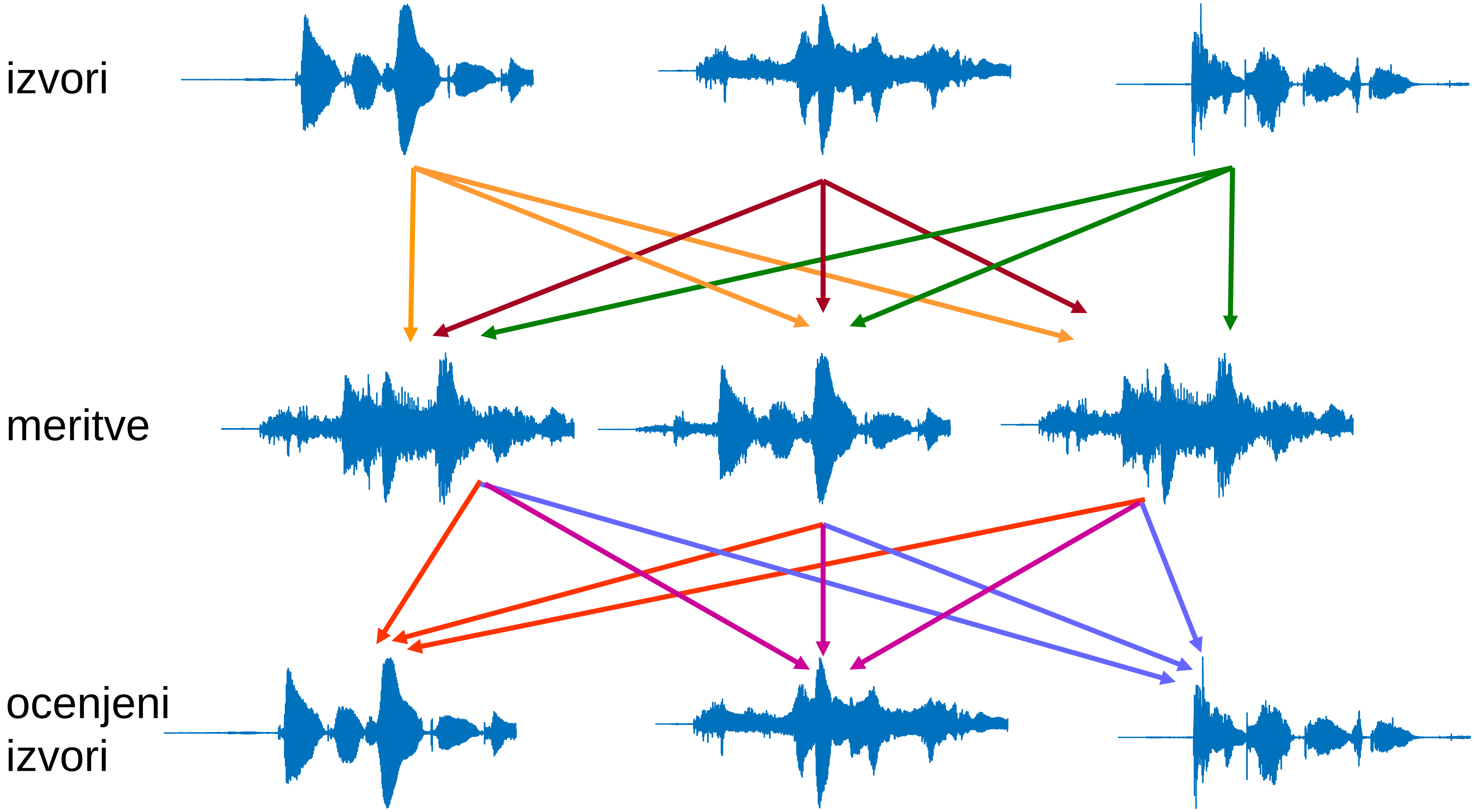
LOČITEV IZVOROV IN ANALIZA NEODVISNIH KOMPONENT

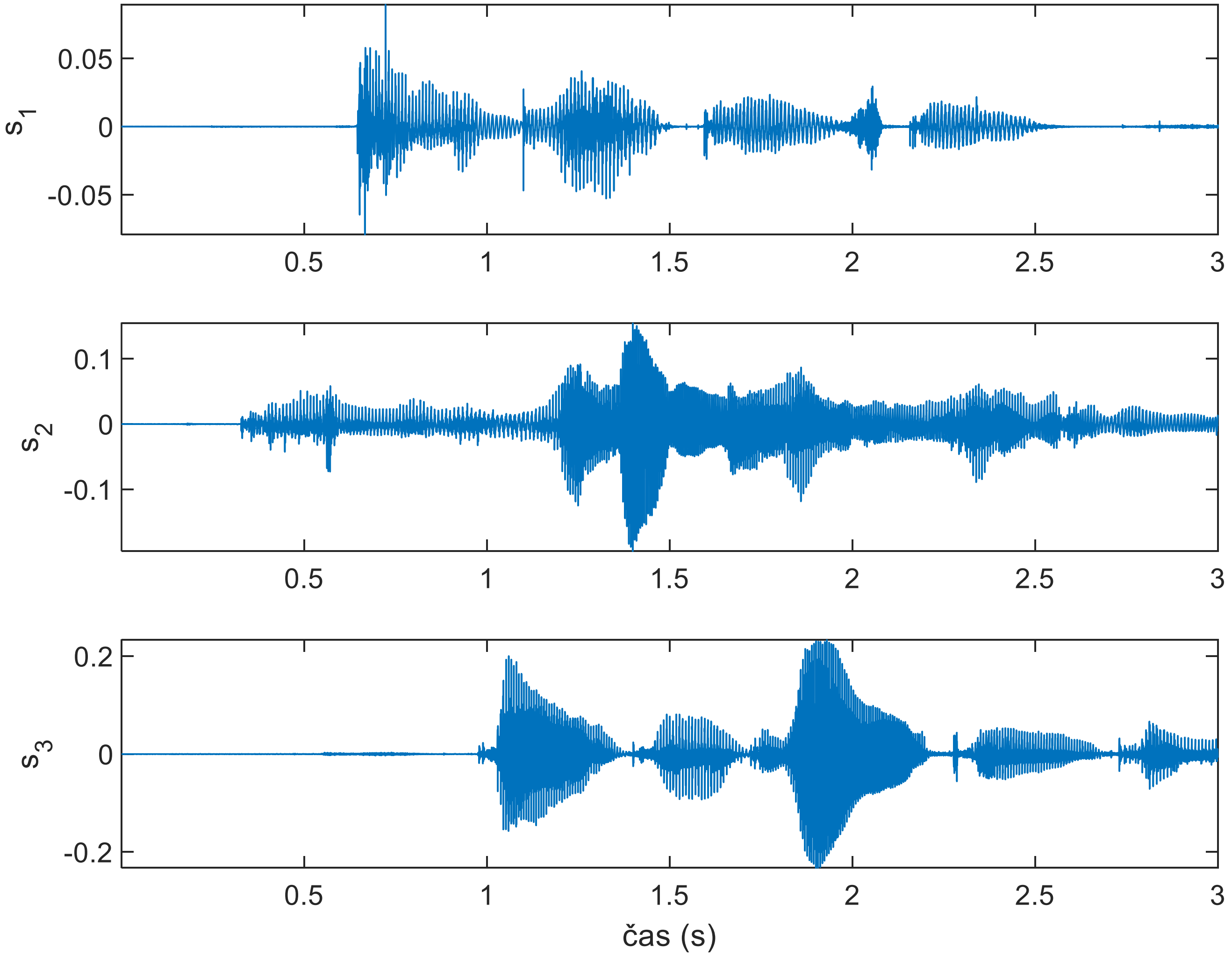
Source separation & Independent component analysis



Ocenjevanje izvorov iz njihovih linearnih mešanic

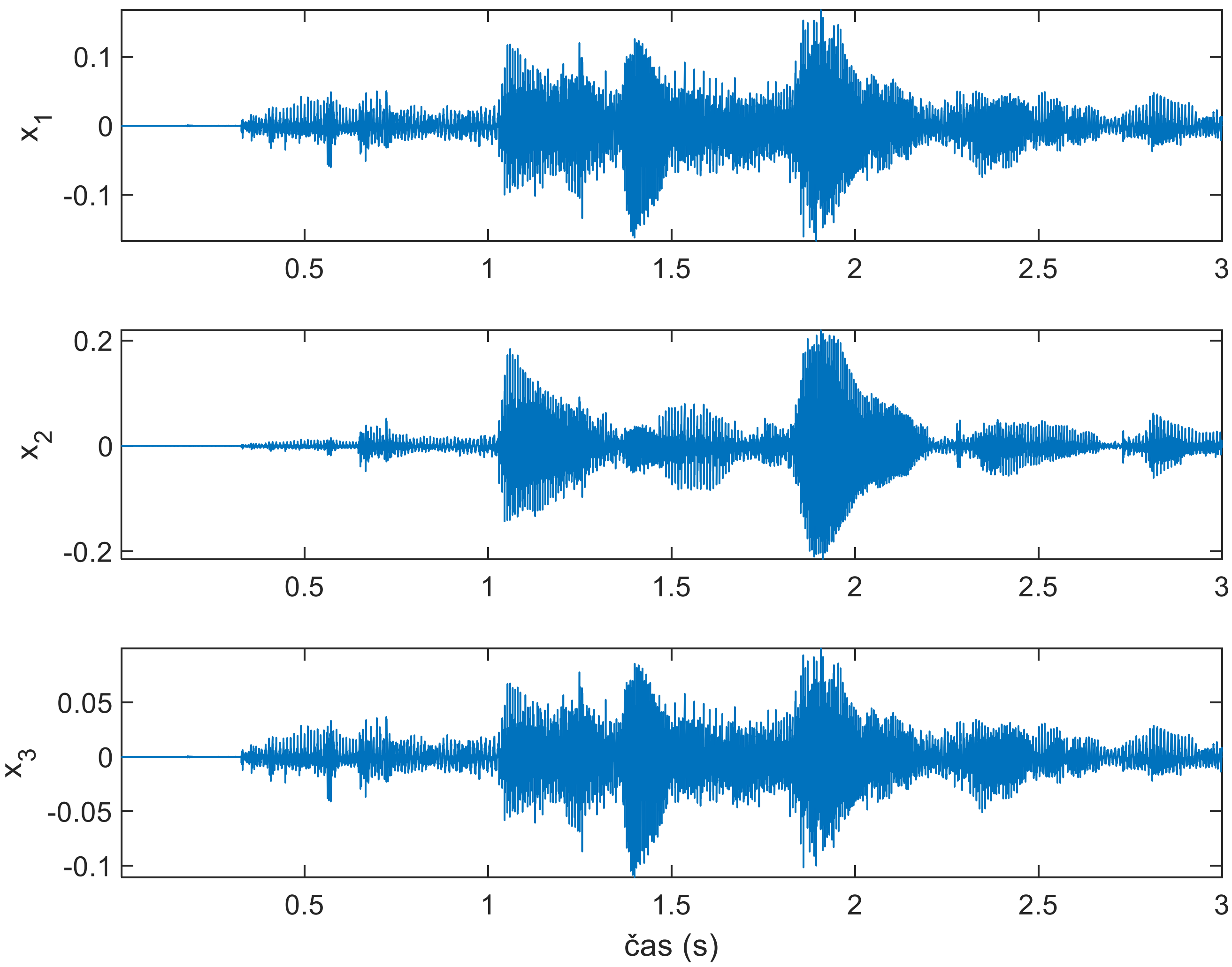


Izvori

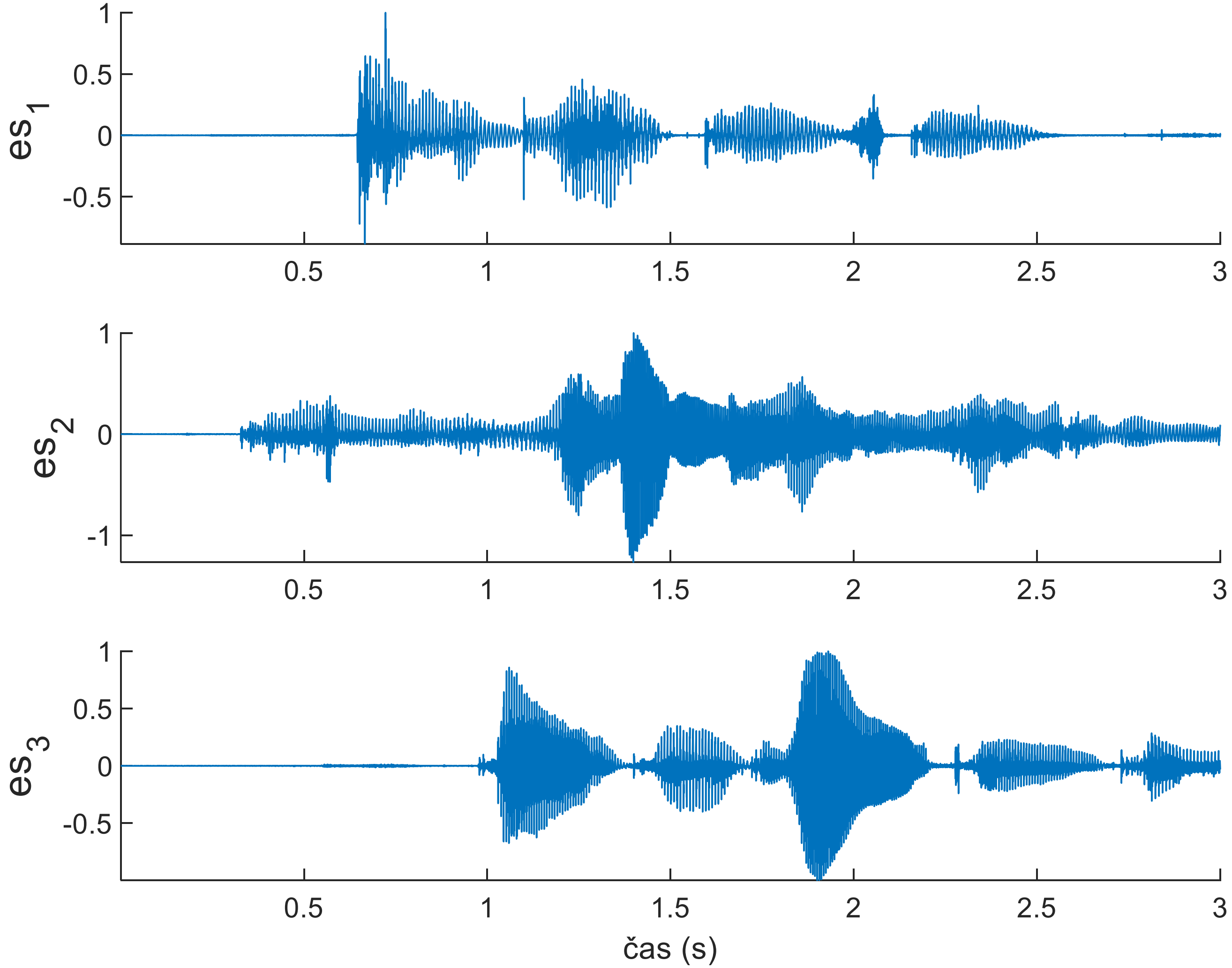


0.05
0
-0.05
s_1
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0.1
0
-0.1
s_2
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0.2
0
-0.2
s_3
0.5
1
1.5
2
2.5
3
čas (s)

Meritve/mešanice izvorov



Ocenjeni izvori



Matematična notacija

Danih naj bo M meritev (digitalnih signalov):

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_M[n] \end{bmatrix} \qquad n = 1, \ldots, N$$

kjer je n vzorec signala.

Matematični model meritev:

$$x_1[n] = a_{11}s_1[n] + a_{12}s_2[n] + a_{13}s_3[n]$$
$$x_2[n] = a_{21}s_1[n] + a_{22}s_2[n] + a_{23}s_3[n]$$
$$x_3[n] = a_{31}s_1[n] + a_{32}s_2[n] + a_{33}s_3[n]$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x}[n] = \mathbf{A}\mathbf{s}[n]$$

takojšnji mešalni model

meritve

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix}$$

izvori

$$\mathbf{s}[n] = \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \end{bmatrix}$$

mešalna matrika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3$$

Mešalna matrika $\mathbf{A}$ je konstantna

mešalni vektroji

Ločitev izvorov

$$s_1[n] = w_{11}x_1[n] + w_{12}x_2[n] + w_{13}x_3[n]$$
$$s_2[n] = w_{21}x_1[n] + w_{22}x_2[n] + w_{23}x_3[n]$$
$$s_3[n] = w_{31}x_1[n] + w_{32}x_2[n] + w_{33}x_3[n]$$

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s}[n] = \begin{bmatrix} s_1[n] \\ s_2[n] \\ s_3[n] \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{w}_1^T \\ \mathbf{w}_2^T \\ \mathbf{w}_3^T \end{matrix}$$

meritve | izvori | separacijska matrika

$$\mathbf{s}[n] = \mathbf{W}\mathbf{x}[n] \qquad s_i[n] = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}[n]$$

Separacijska matrika $\mathbf{W}$ je konstantna.

Idealno $\mathbf{AW} = \mathbf{I}$

$\mathbf{w}_i$ – separacijski vektor

Omejitve in nedoločenosti:

- Izvori so statistično neodvisni

$$\underbrace{p\left(s_1[n], s_2[n], \ldots, s_K[n]\right)}_{\text{skupna verjetnost}} = p\left(s_1[n]\right) p\left(s_2[n]\right) \ldots \underbrace{p\left(s_K[n]\right)}_{\text{verjetnost posameznega izvora}}$$

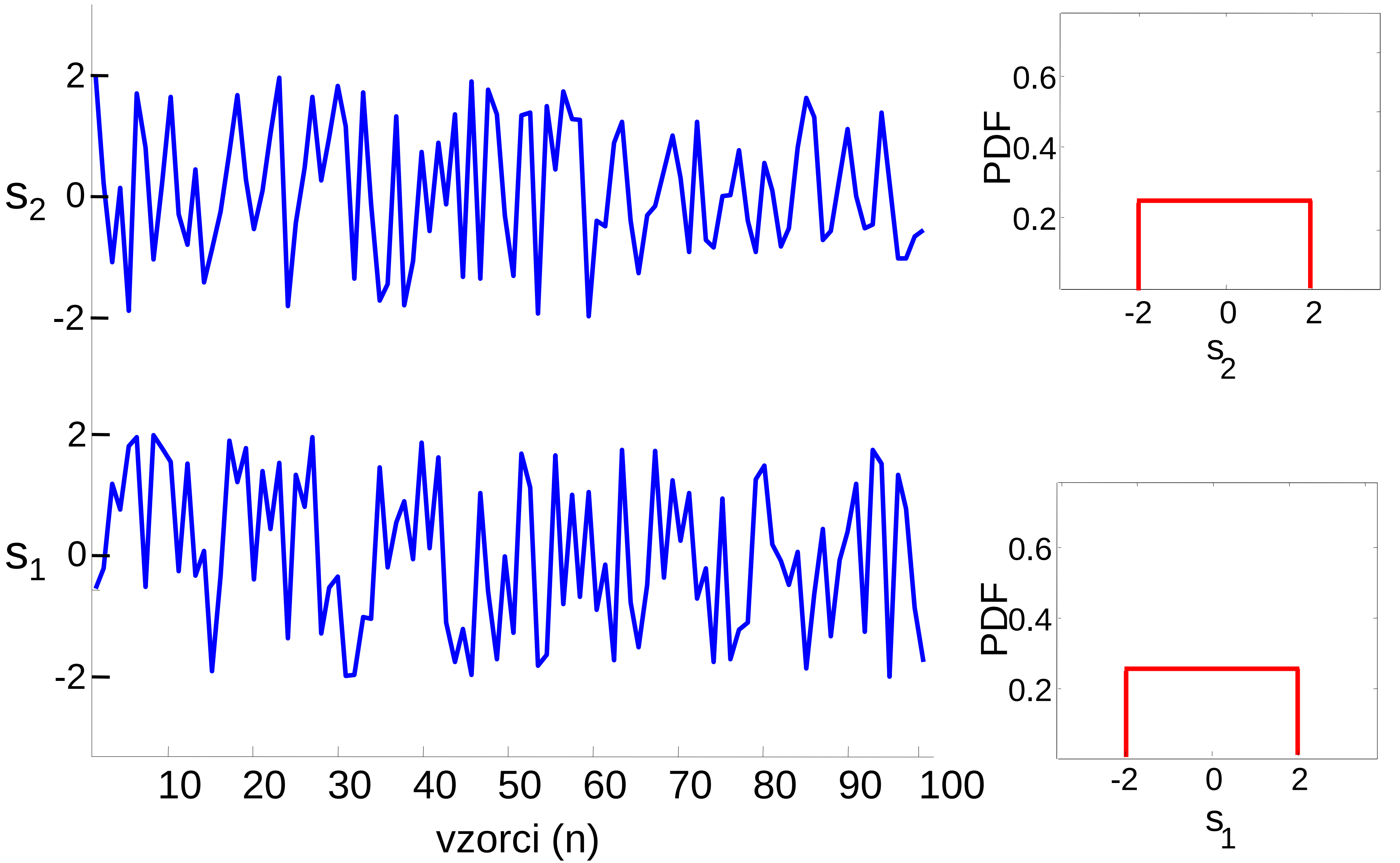
- Energije (variance) izvorov (matrike) ne moremo določiti

$$\forall \alpha_i \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x}[n] = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{1}{\alpha_i} \mathbf{a}_i \right) \left(\alpha_i s_i[n] \right)$$

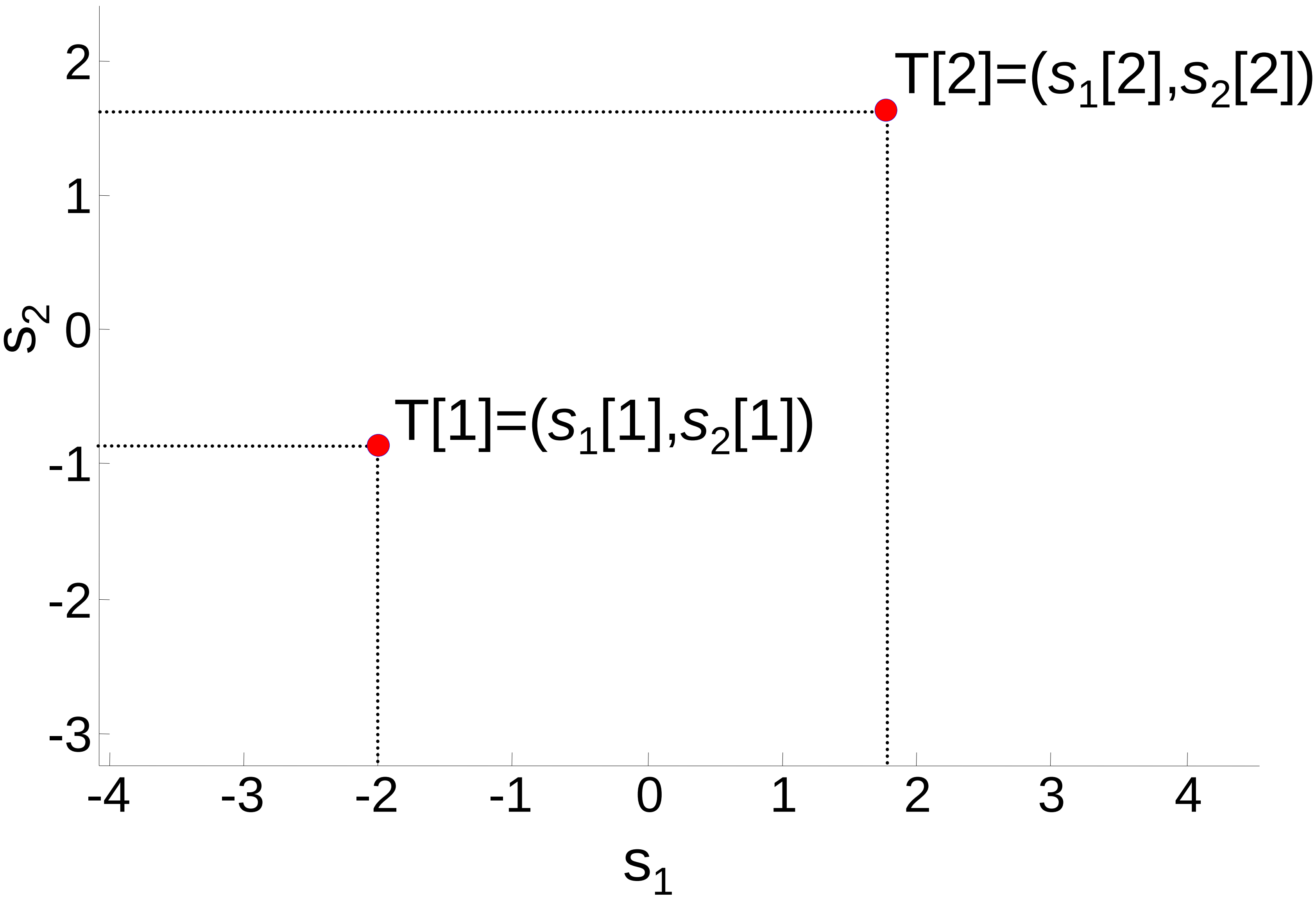
- Vrstni red izvorov je neznan in nedoločljiv

$$\mathbf{x}[n] = \left(\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\right)\mathbf{P}\mathbf{s}[n]$$ $\mathbf{P}$ je permutacijska matrika

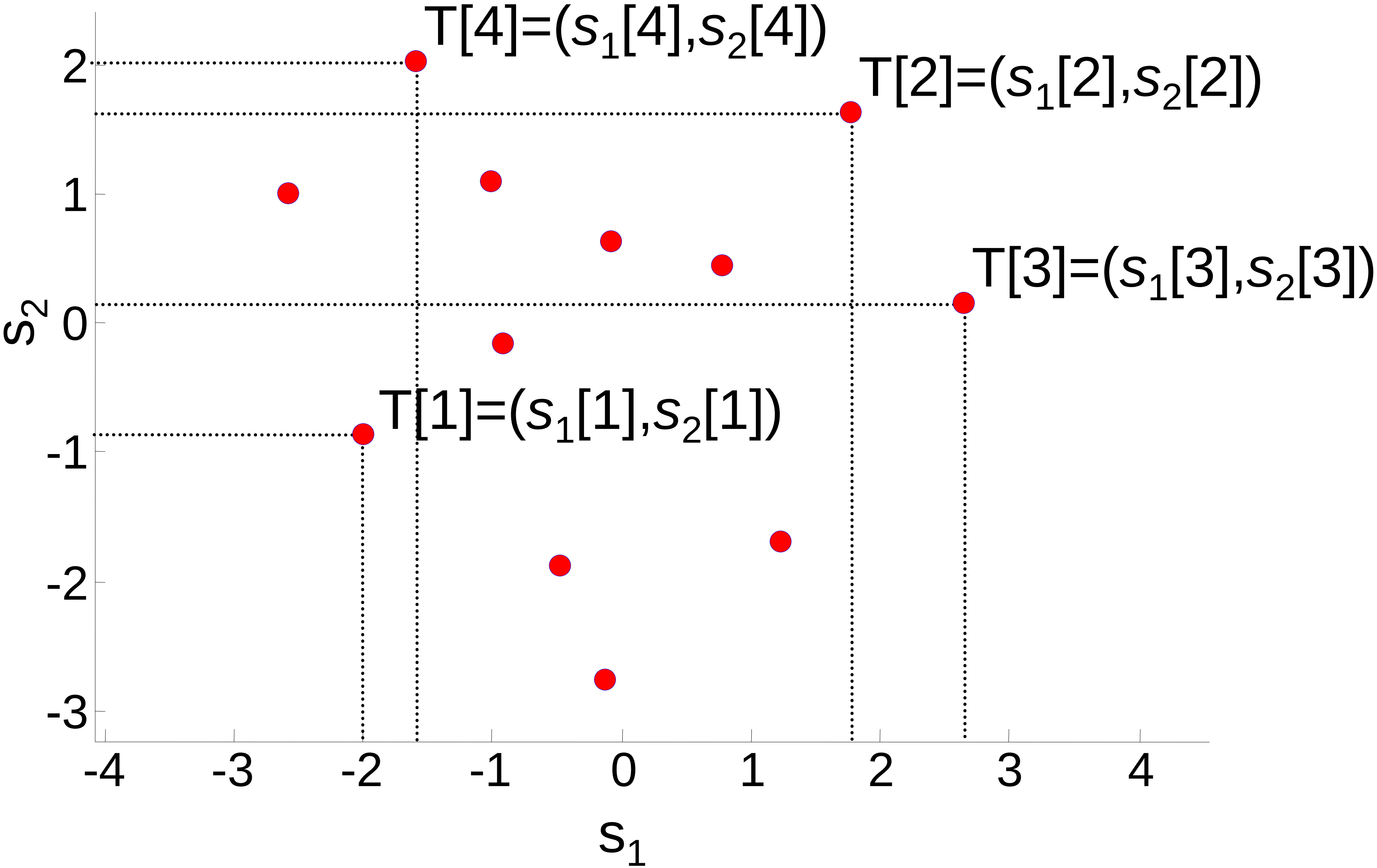
Primer 1: dve meritvi, enakomerna porazdelitev



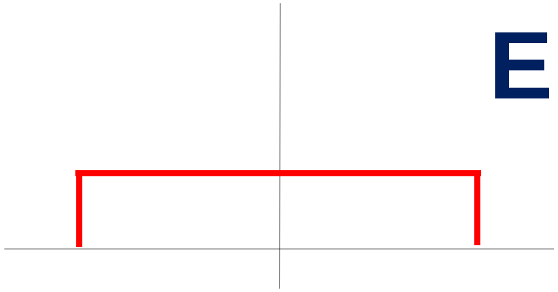
Skupni vektorski prostor



Skupni vektorski prostor



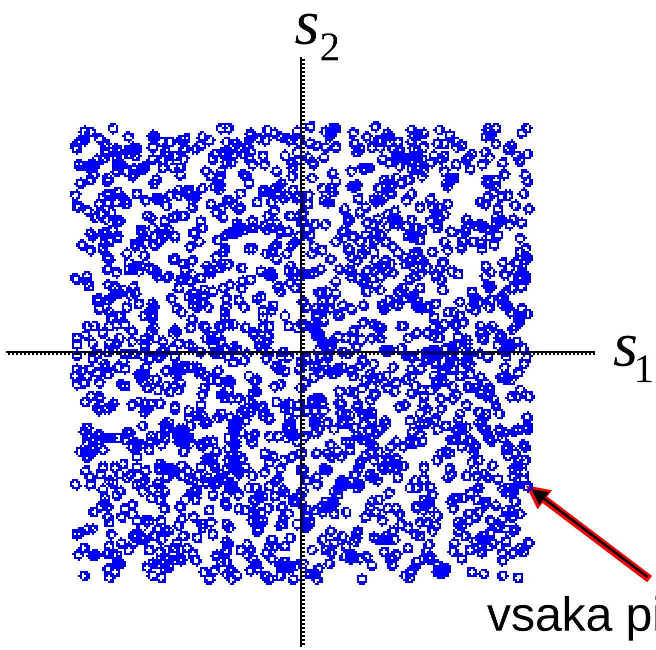
Enakomerna porazdelitev



$$p(s_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \text{če } |s_i| \le \sqrt{3} \\ 0 & \text{drugače} \end{cases}$$

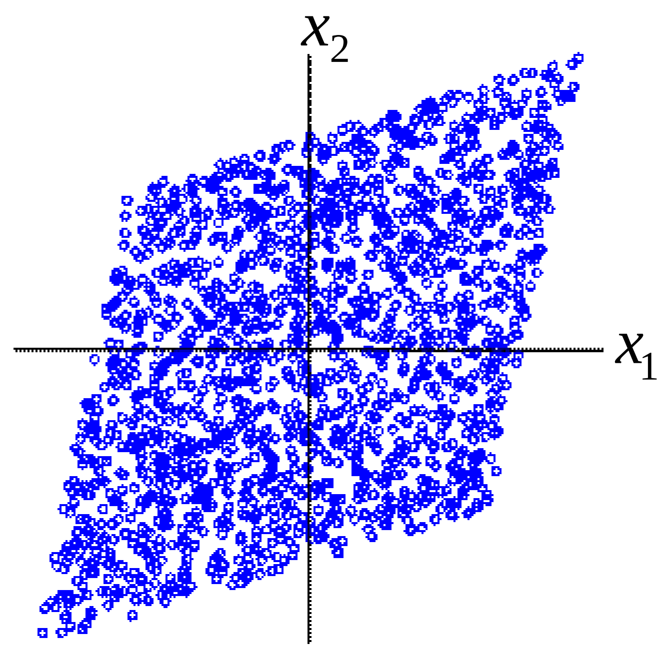
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$$



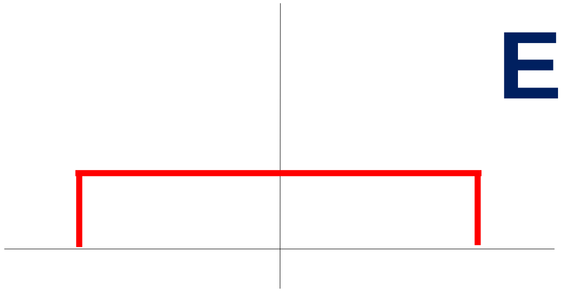
vsaka pika je en (s_1[n], s_2[n]) par

neodvisni izvori



odvisne meritve

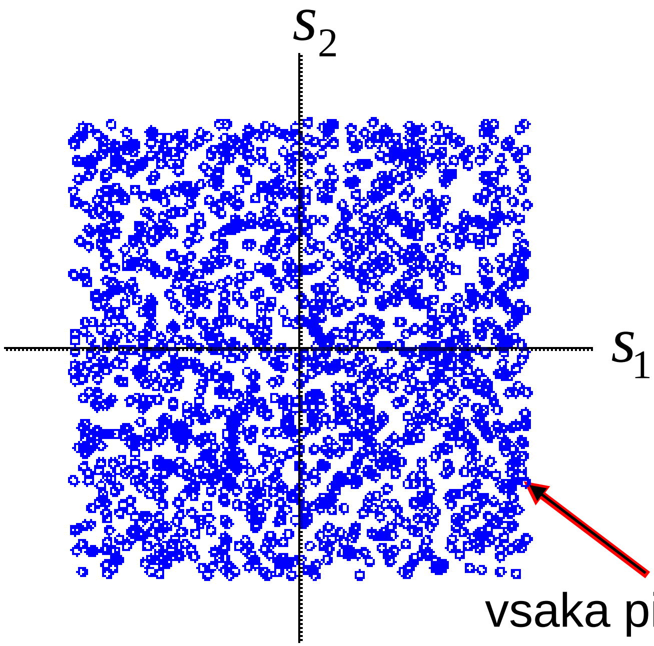
Enakomerna porazdelitev



$$p(s_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \text{če } |s_i| \le \sqrt{3} \\ 0 & \text{drugače} \end{cases}$$

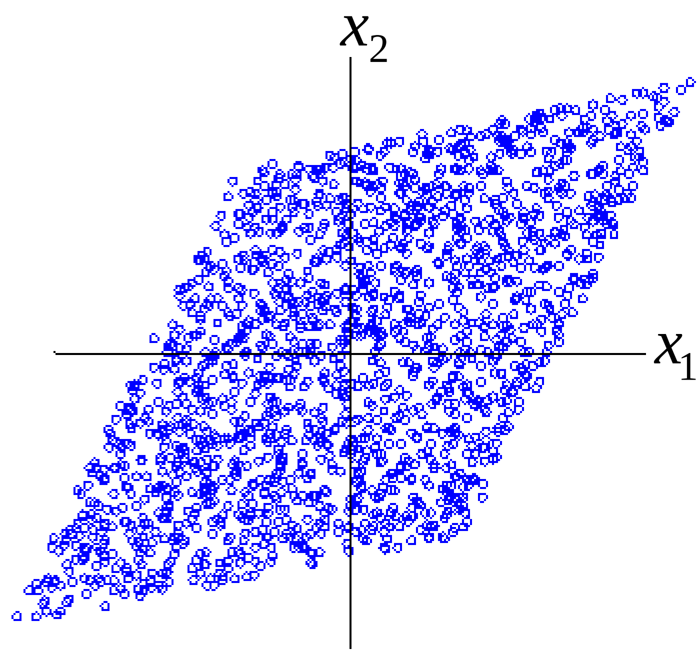
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$$



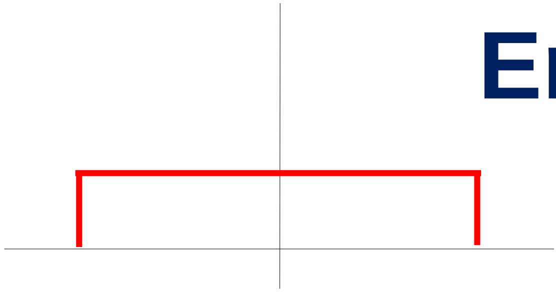
vsaka pika je en
($s_1[n]$, $s_2[n]$) par

neodvisni izvori



odvisne meritve

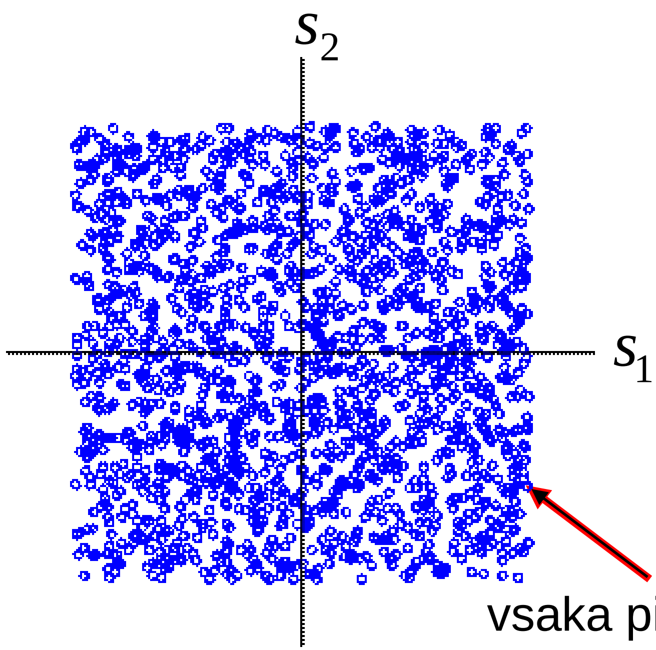
Enakomerna porazdelitev



$$p(s_i)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{3}} & \text{če } |s_i|\le\sqrt{3}\\ 0 & \text{drugače}\end{cases}$$

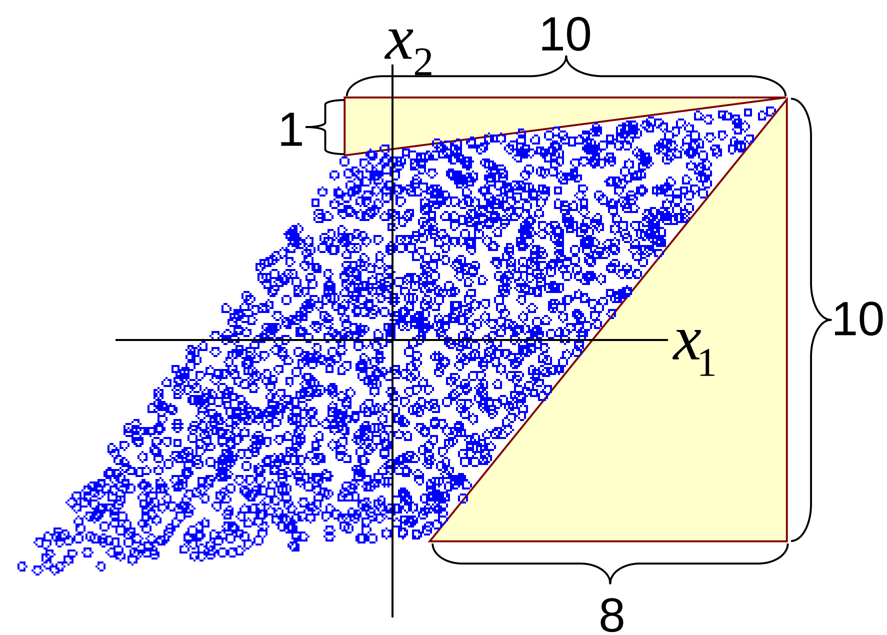
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 10 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{s}$$



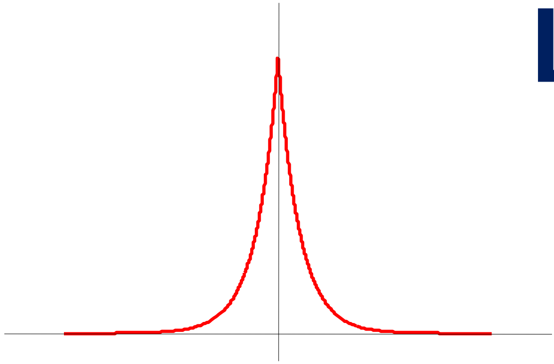
vsaka pika je en (s_1[n], s_2[n]) par

neodvisni izvori



odvisne meritve

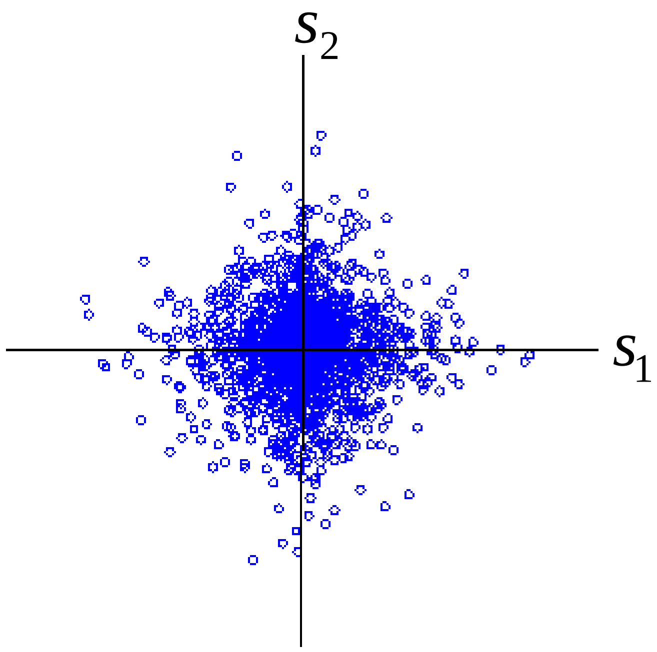
Laplacova porazdelitev



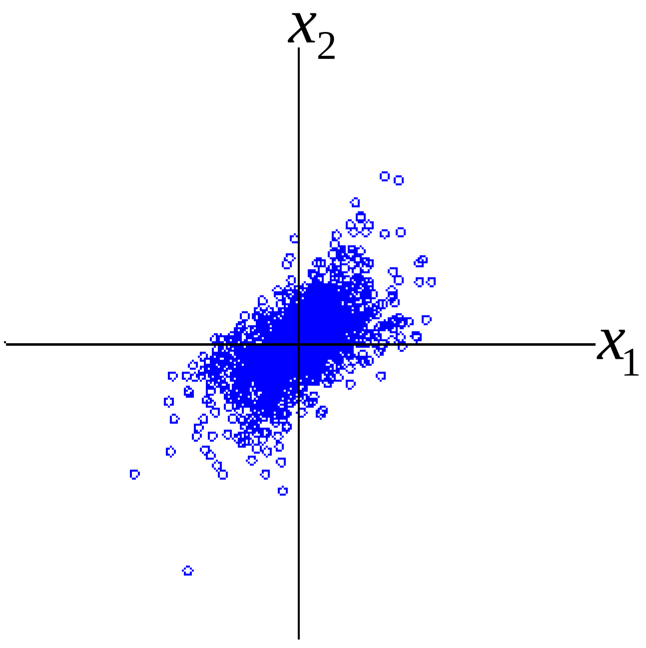
$$p(s_i) = \tfrac{1}{2} e^{-|x|}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$$

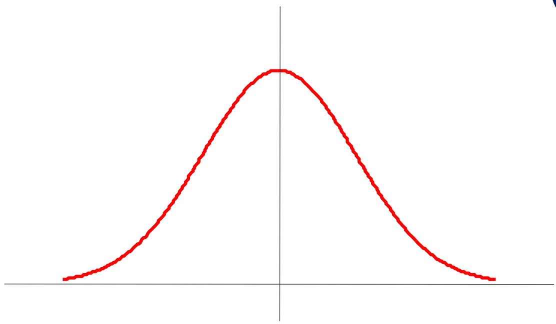


neodvisni izvori



odvisne meritve

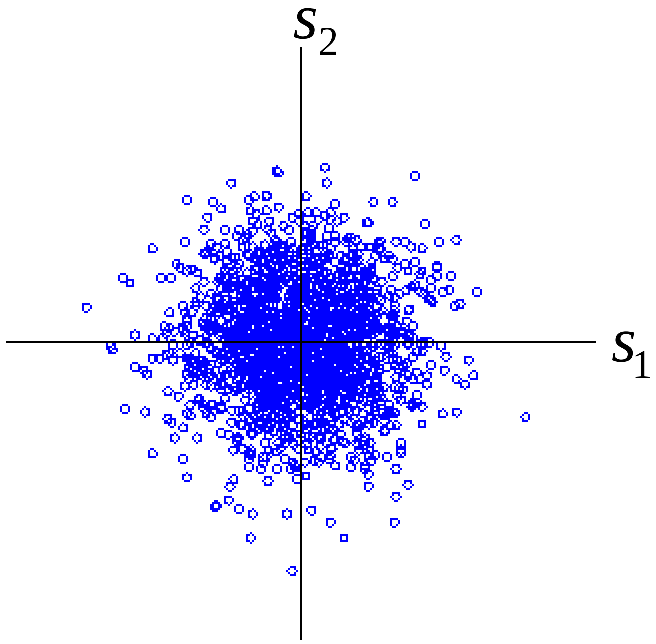
Gaussova porazdelitev



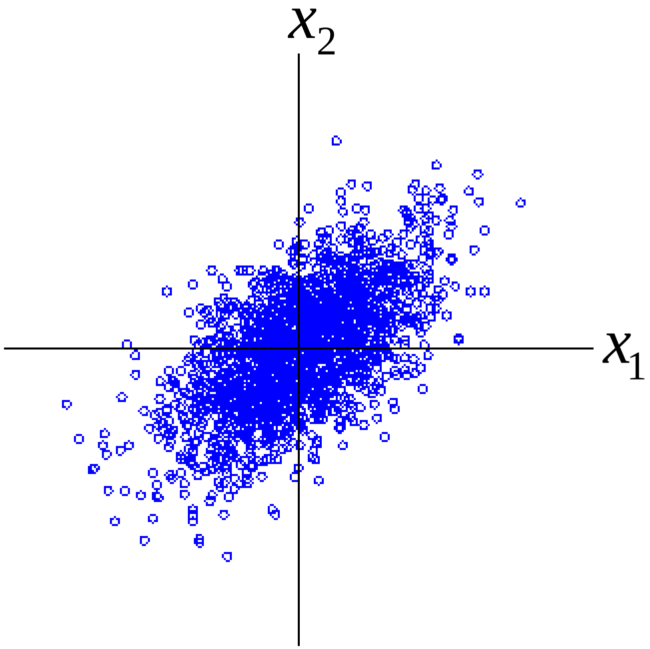
$$p(s_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}$$



neodvisni izvori



odvisne meritve

Korelacijska matrika meritev $\mathbf{x}[\mathrm{n}]$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] = \begin{bmatrix} c(x_1,x_1) & c(x_1,x_2) & \cdots & c(x_1,x_M) \\ c(x_2,x_1) & c(x_2,x_2) & \cdots & c(x_2,x_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c(x_M,x_1) & c(x_M,x_2) & \cdots & c(x_M,x_M) \end{bmatrix}$$

kjer je $c(x_i,x_j) = E(x_i \cdot x_j) = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N} x_i[n]x_j[n]$

- $c(x_i,x_i)$ meri varianco $x_i \rightarrow$ maksimiziraj $c(x_i,x_i)$
- $c(x_i,x_j)$ meri korelacijo med x_i in x_j $\rightarrow$ minimiziraj $c(x_i,x_i)$

Analiza PCA

- Najdi takšno ortonormalno transformacijo $\mathbf{P}$ da bo $\mathbf{y}[n] = \mathbf{P}\mathbf{x}[n]$ in bo

$$\mathbf{C_y} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{y}^T[n]\mathbf{y}[n]$$

  diagonalna matrika.

- Z drugimi besedami,
  - maksimiziraj $c(y_i, y_i)$
  - minimiziraj $c(y_i, y_j) \quad i \neq j$

Linearna transformacija $\mathbf{P}$

- $\mathbf{C_x}$ je simetrična matrika. Diagonalizira jo ortonormalna matrika njenih lastnih vektorjev ($\mathbf{E}$):

$$\mathbf{C_x} = \mathbf{EDE}^T$$

  kjer je:

  - $\mathbf{D}$ diagonalna matrika lastnih vrednosti λ_i matrike $\mathbf{C_x}$. Brez izbube splošnosti lahko privzamemo, da so lastne vrednosti $\lambda_i = \mathbf{D}[\mathrm{i,i}]$ urejene v padajočem vrstnem redu.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3, \ldots, \geq \lambda_M$$

  - $\mathbf{E}$ je matrika ustreznih lastnih vektorjev matrike $\mathbf{C_x}$ (lastni vektorji so stolpci matrike $\mathbf{E}$).

Linearna transformacija $\mathbf{P}$

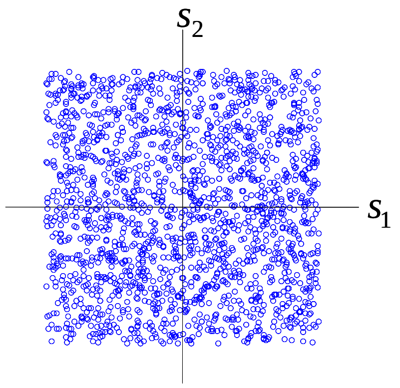
- Matematičen trik: izberi $\mathbf{P}=\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$

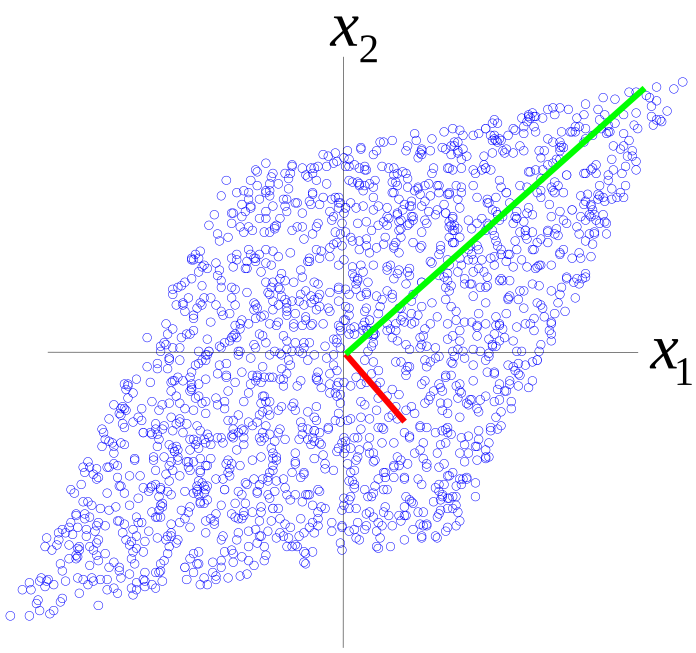
$$
\begin{aligned}
\mathbf{C_y} &= \mathbf{P}\mathbf{C_x}\mathbf{P}^T \\
&= \mathbf{E}^T\mathbf{C_x}\mathbf{E} \\
&= \mathbf{E}^T(\mathbf{EDE})^T\mathbf{E} \\
&= (\mathbf{E}^T\mathbf{E})\mathbf{D}(\mathbf{E}^T\mathbf{E}) \\
&= \mathbf{D}
\end{aligned}
$$

ker $\mathbf{E}^{-1}=\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$

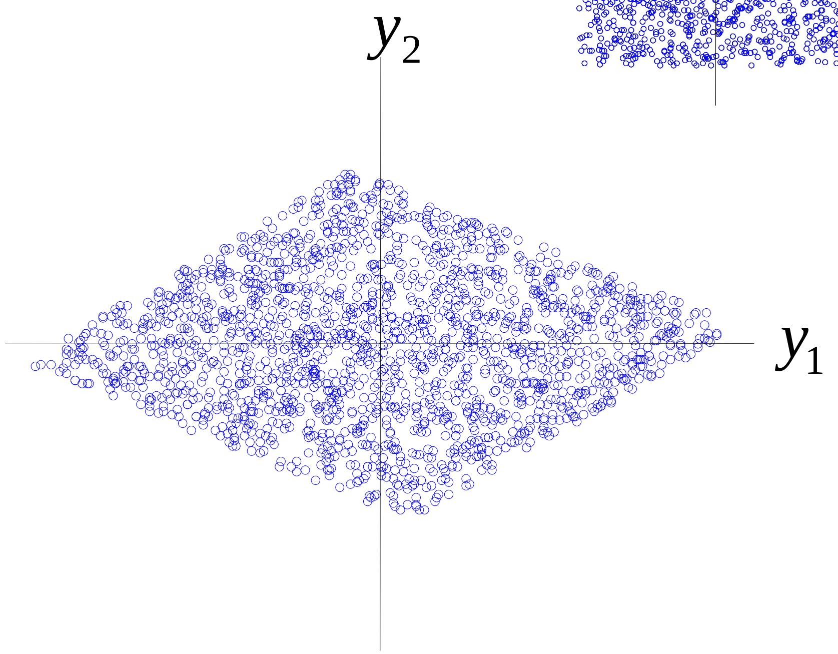
Neodvisne komponente & PCA

Enakomerna porazdelitev





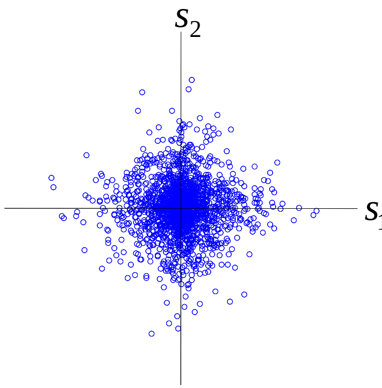
mešanica izvorov

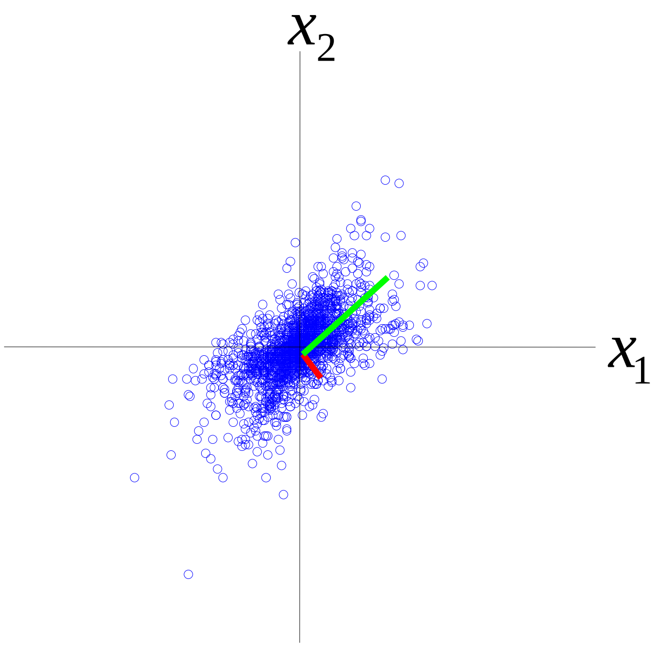


poglavitne komponente

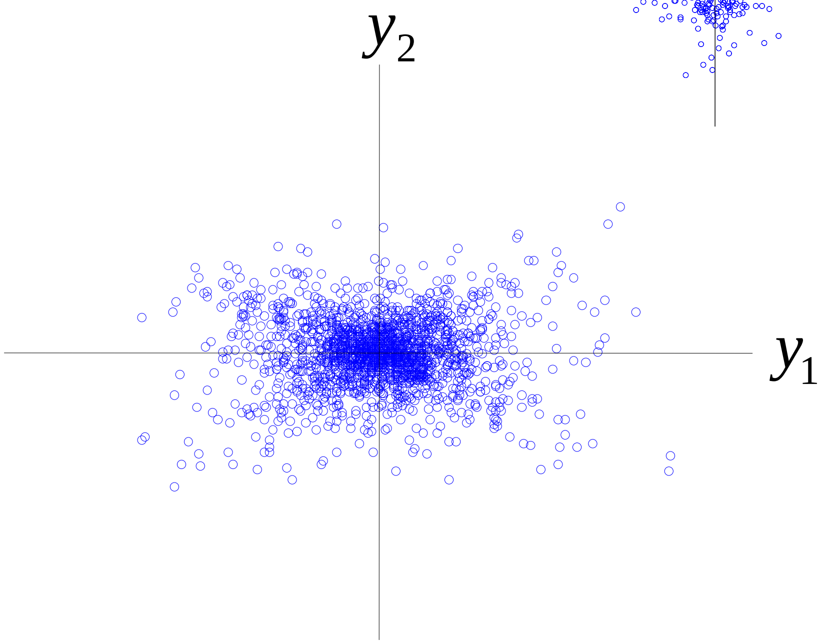
Neodvisne komponente & PCA

Laplaceova porazdelitev





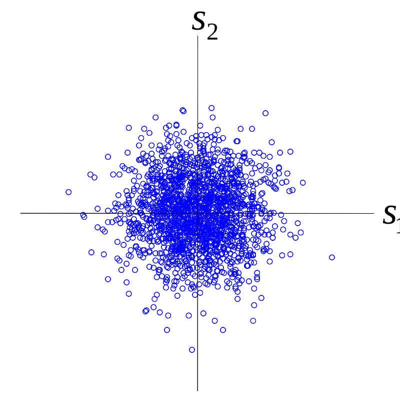
mešanica izvorov

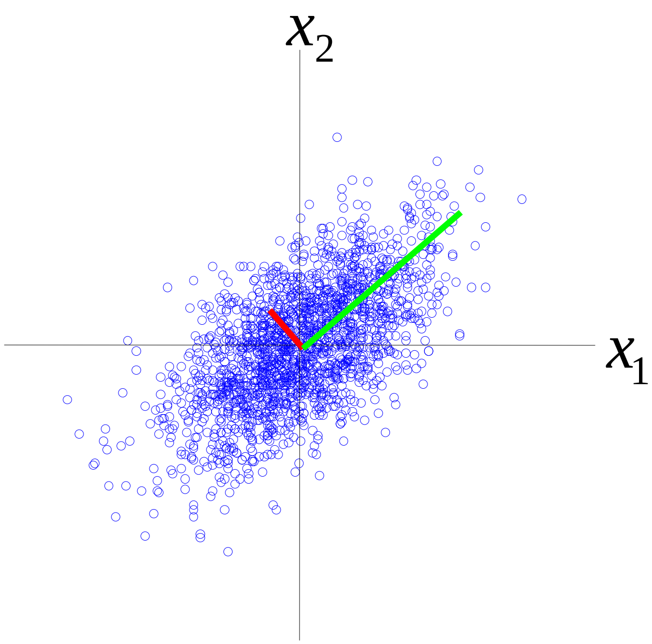


poglavitne komponente

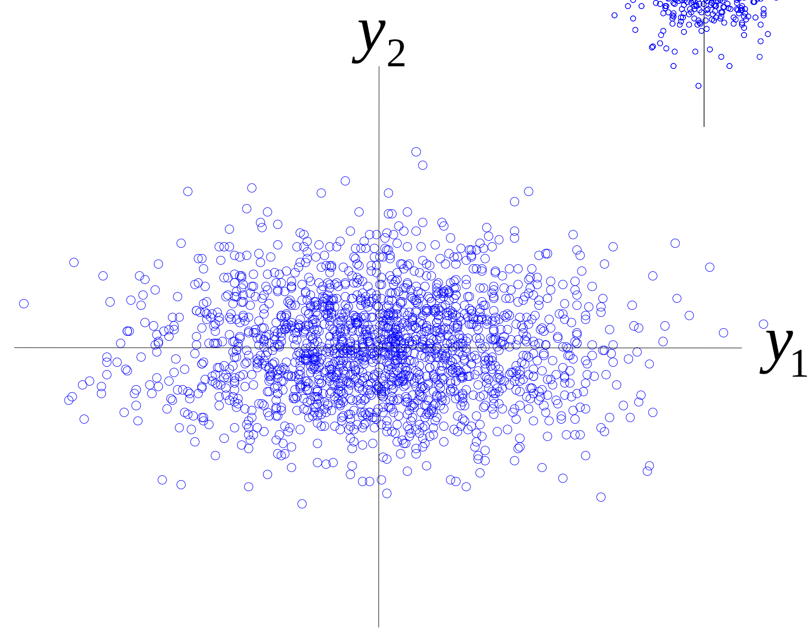
Neodvisne komponente & PCA

Normalna (Gaussova) porazdelitev





mešanica izvorov



poglavitne komponente

Nekoreliranost in prostorsko beljenje

- Pobeljene komponente:
  - so nekorelirane (tako kot pri PCA)
  - imajo varianco enako 1
- Beljenje je razširitev analize PCA:

PCA:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{P}\mathbf{x}[n]$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}^T$$

Beljenje:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{V}\mathbf{x}[n]$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] = \mathbf{C}_{\mathbf{x}} = \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T$$

Beljenje je le polovica analize ICA

- po definiciji: $\mathbf{y}[n] = \mathbf{V}\mathbf{x}[n]$, $\mathbf{V} = \mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\mathbf{y}} &= \mathbf{V}\mathbf{C}_{\mathbf{x}}\mathbf{V}^T \\
&= \left(\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{E}^T\right)\left(\mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{E}^T\right)\left(\mathbf{E}\mathbf{D}^{-1/2}\right) \\
&= \mathbf{D}^{-1/2}\left(\mathbf{E}^T\mathbf{E}\right)\mathbf{D}\left(\mathbf{E}^T\mathbf{E}\right)\mathbf{D}^{-1/2} \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}
$$

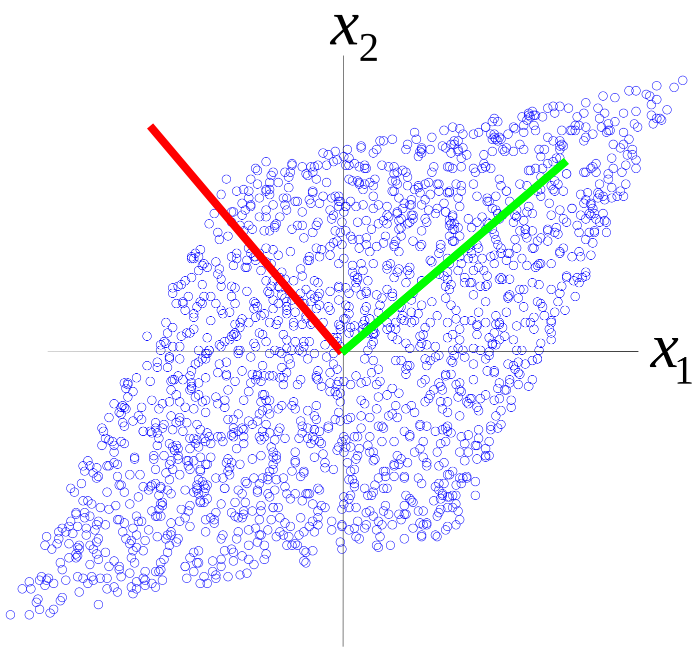
za unitarno matriko $\mathbf{U}$ imamo

$$
\mathbf{z}[n] = \mathbf{U}\mathbf{y}[n] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_{\mathbf{z}} = \mathbf{U}\mathbf{C}_{\mathbf{y}}\mathbf{U}^T = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}
$$

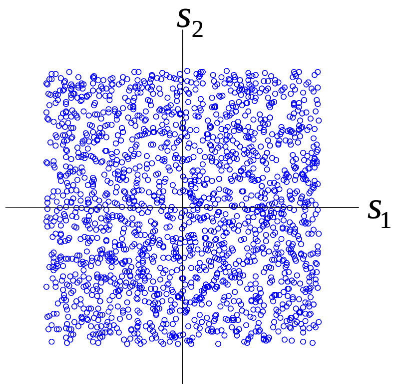
(unitarna matrika $\mathbf{U}$ ustreza rotaciji)

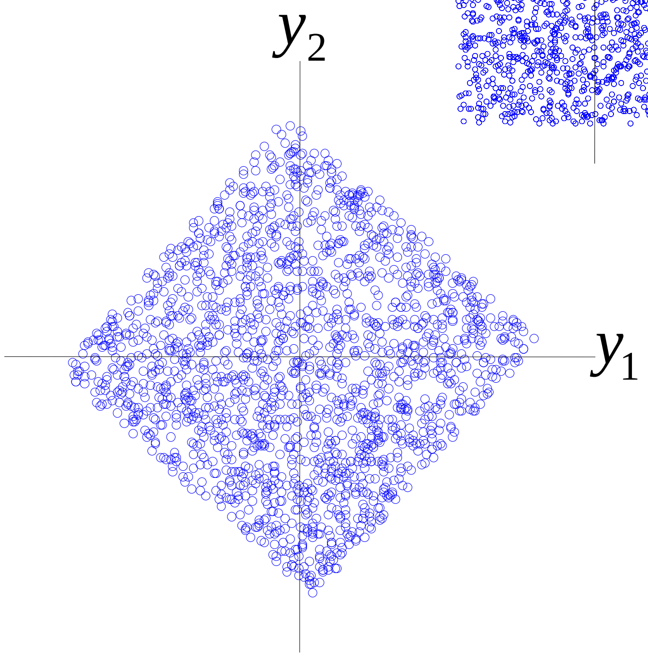
Beljenje je le polovica analize ICA

Enakomerna porazdelitev



mešanica izvorov

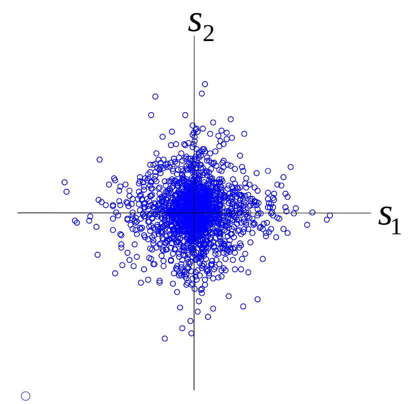


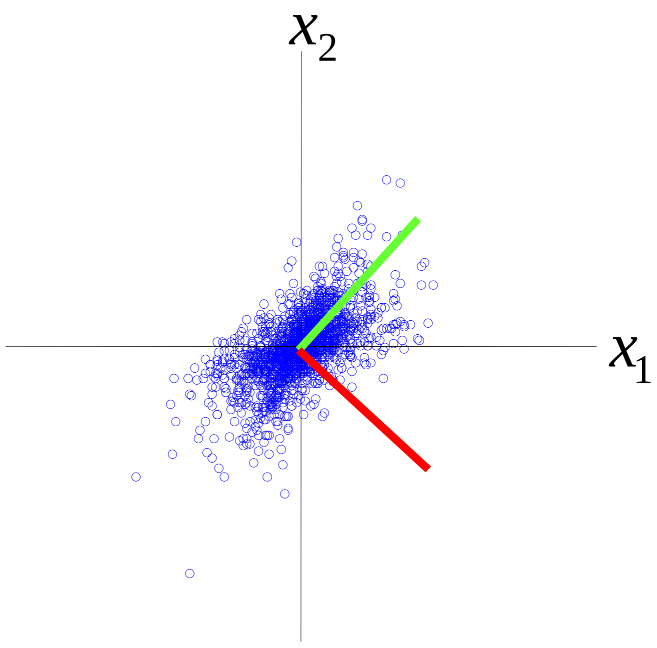


pobeljene meritve

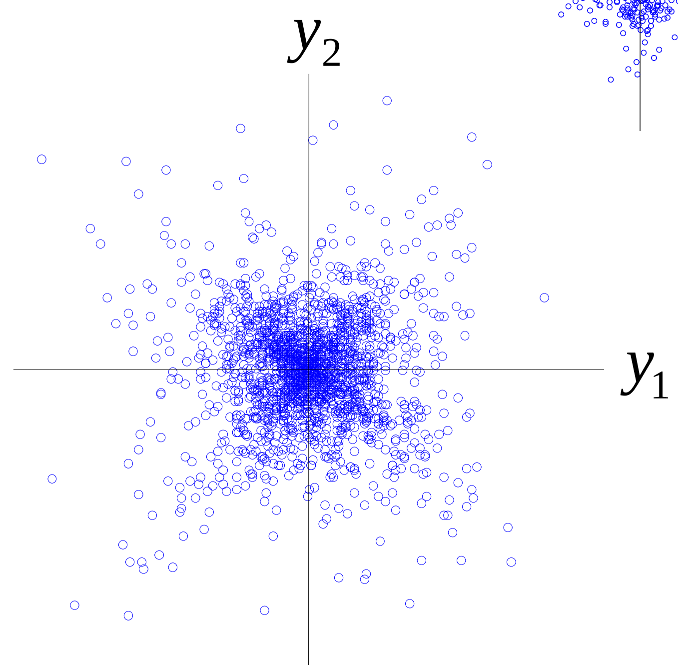
Beljenje je le polovica analize ICA

Laplaceova porazdelitev





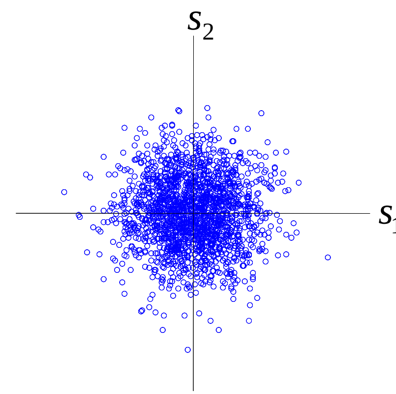
mešanica izvorov

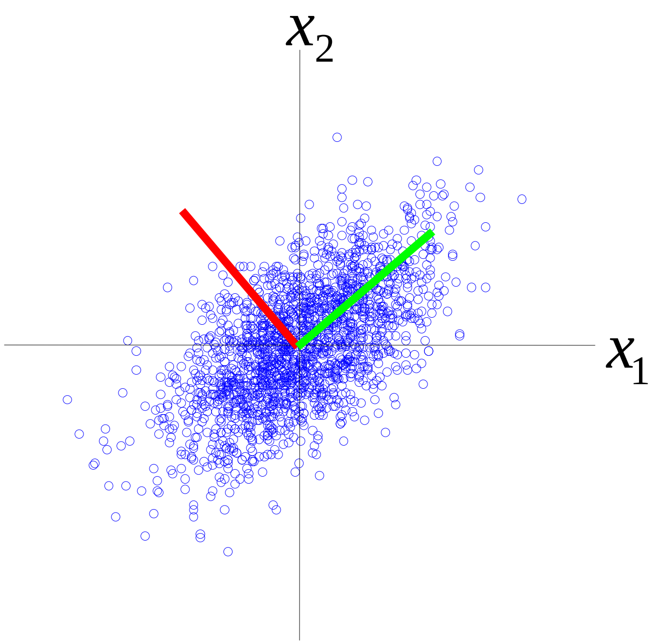


pobeljene meritve

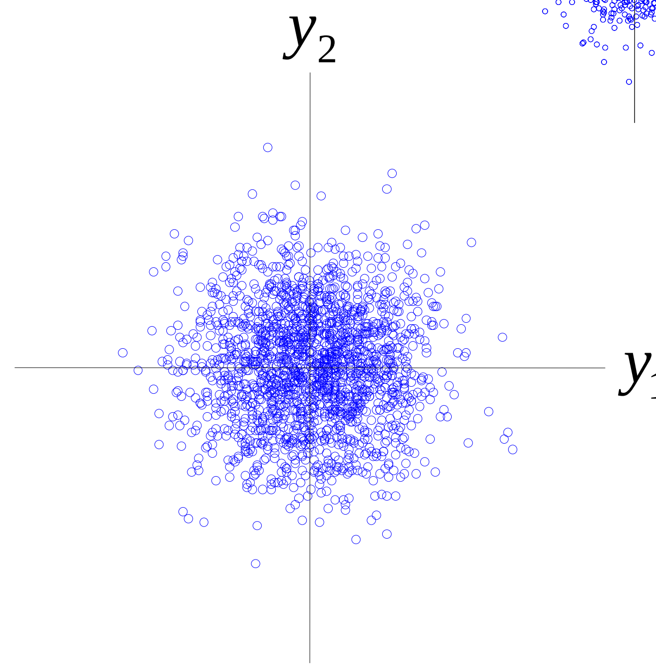
Beljenje je le polovica analize ICA

Normalna porazdelitev





mešanica izvorov



pobeljene meritve

Normalna (Gaussova) porazdelitev je invariantna na rotacijo, zato so izvori z normalno porazdelitvijo v analizi ICA prepovedani

ICA je več kot beljenje

- neodvisne naključne spremenljivke se vedno nekorelirane

matematično upanje (v praksi povprečna vrednost)

$$E(y_1 y_2) = E(y_1)E(y_2)$$

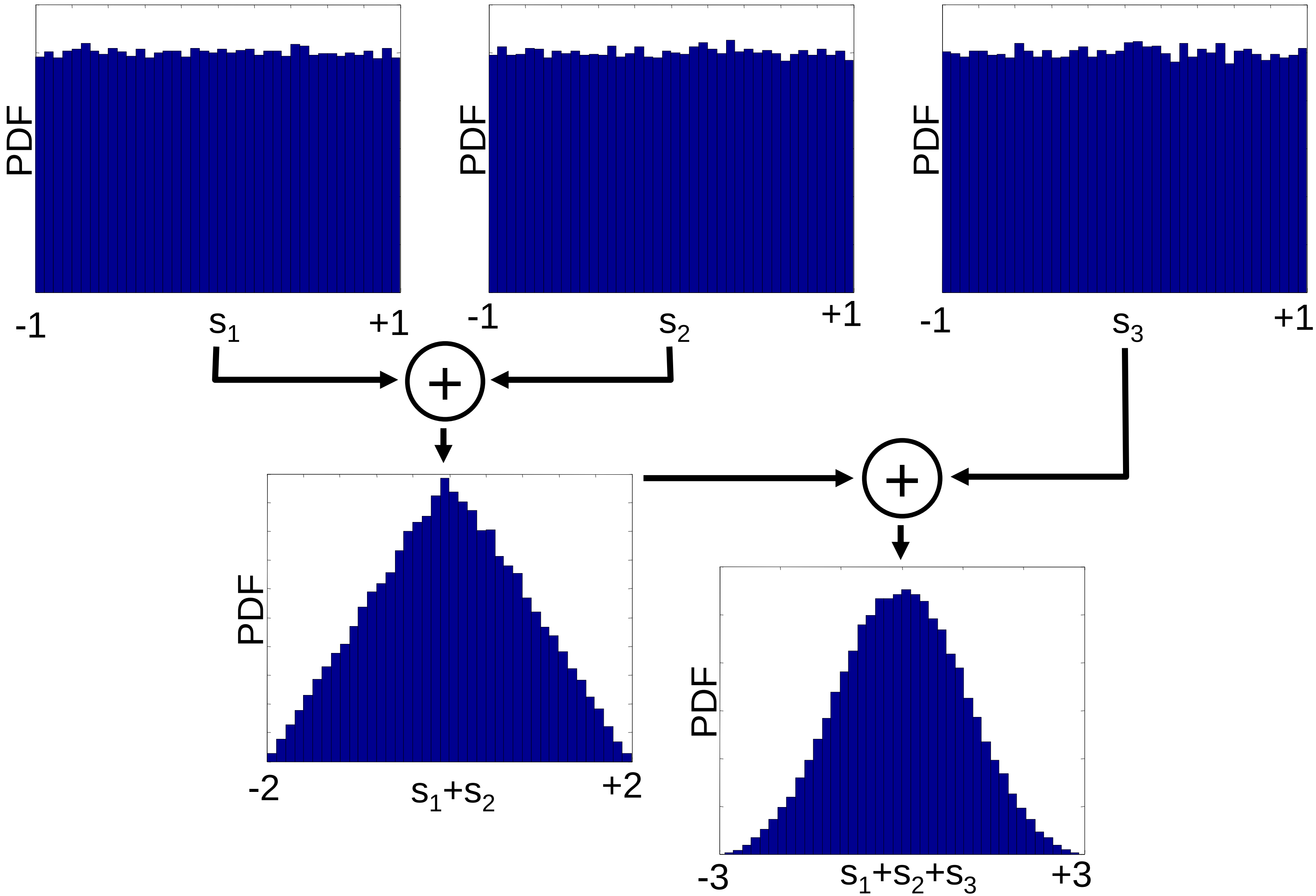
- nekorelirane naključne spremenljivke niso nujno neodvisne
  - zgled: $(y_1, y_2) = \{(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)\}$

- kriterij neodvisnosti:

$$E(f(y_1)f(y_2)) = E(f(y_1))E(f(y_2))$$

kjer je $f(.)$ katerakoli nelinearna funkcija (npr. $f(y)=y^2$, $f(y)=|y|$)

Nenormalnost je neodvisnost



Nenormalnost je neodvisnost

- Centralni limitni teorem:
  - porazdelitev vsote neodvisnih spremenljivk limitira h Gaussovi (normalni) porazdelitvi
  - porazdelitev vsote neodvisnih spremenljivk

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_K s_K$$

  postane najmanj Gaussova, ko je vsota natanko enaka enemu izmed izvorov s_i t.j., ko so vsi a_i razen enega enaki 0.

- Ideja: *minimiziraj gaussovskost ocenjenega izvora* $s_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}$, kjer je $\mathbf{w}_i$ separacijski vektor, ki ga moramo določiti.

Merila negaussovskosti:

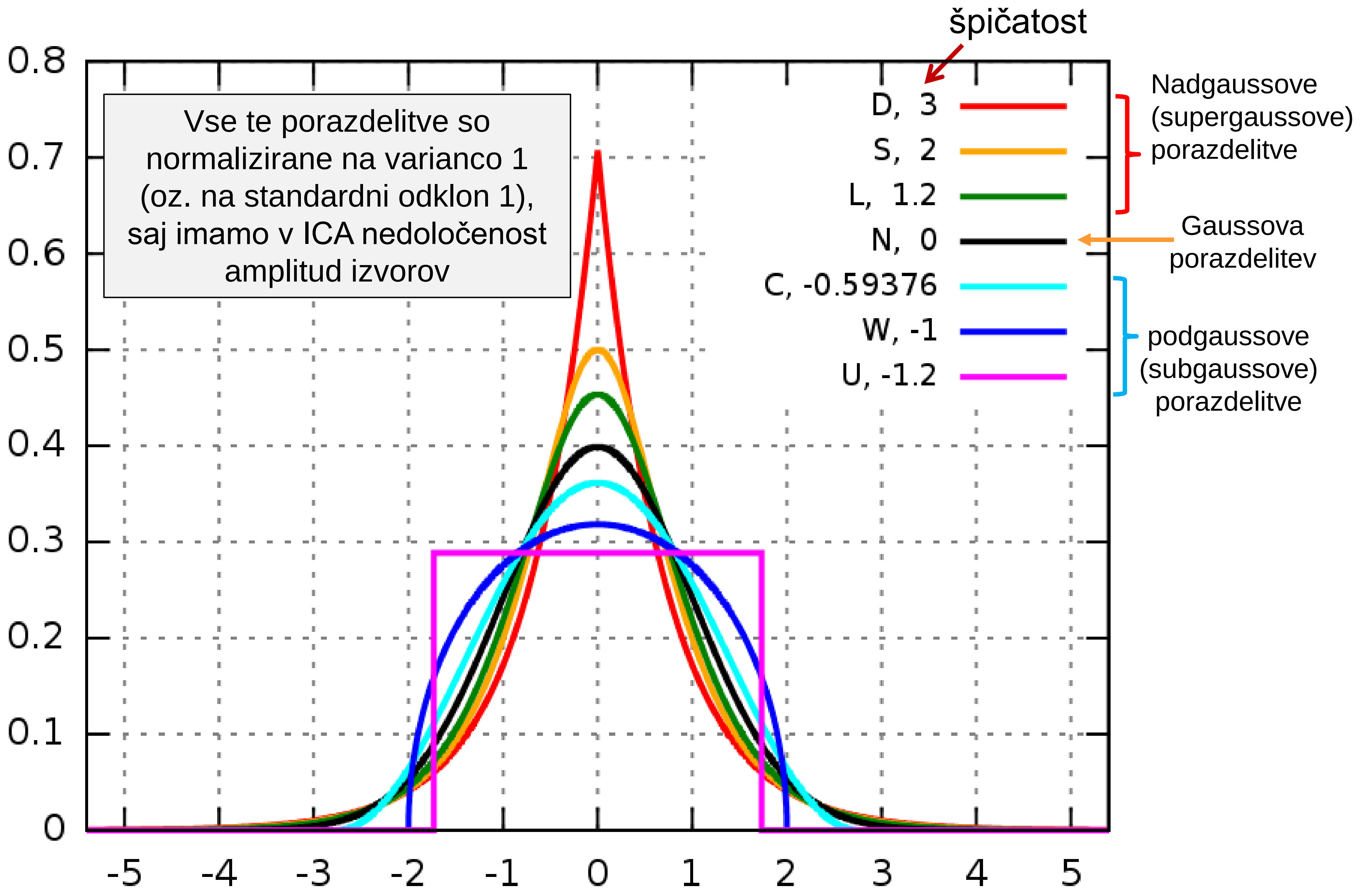
Špičatost (kurtosis)

$$kurt(s_i) = E\left\{{s_i}^4\right\} - 3\left(E\left\{{s_i}^2\right\}\right)^2$$

- Špičatost je 0 za Gaussove naključne spremenljivke
- Če ima s varianco enako 1 ($E\{s^2\}=1$), potem je

$$kurt(s_i) = E\left\{{s_i}^4\right\} - 3$$

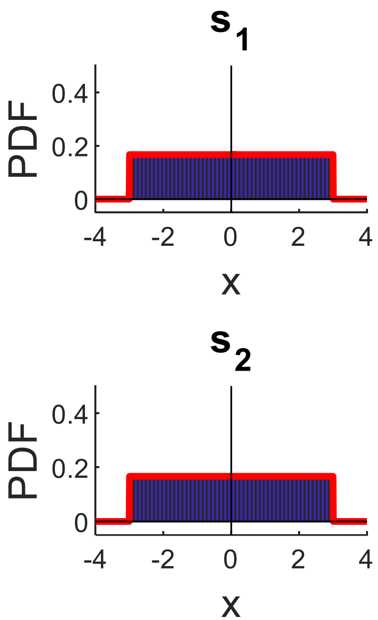
Špičatost & gostota verjetnosti (PDF)



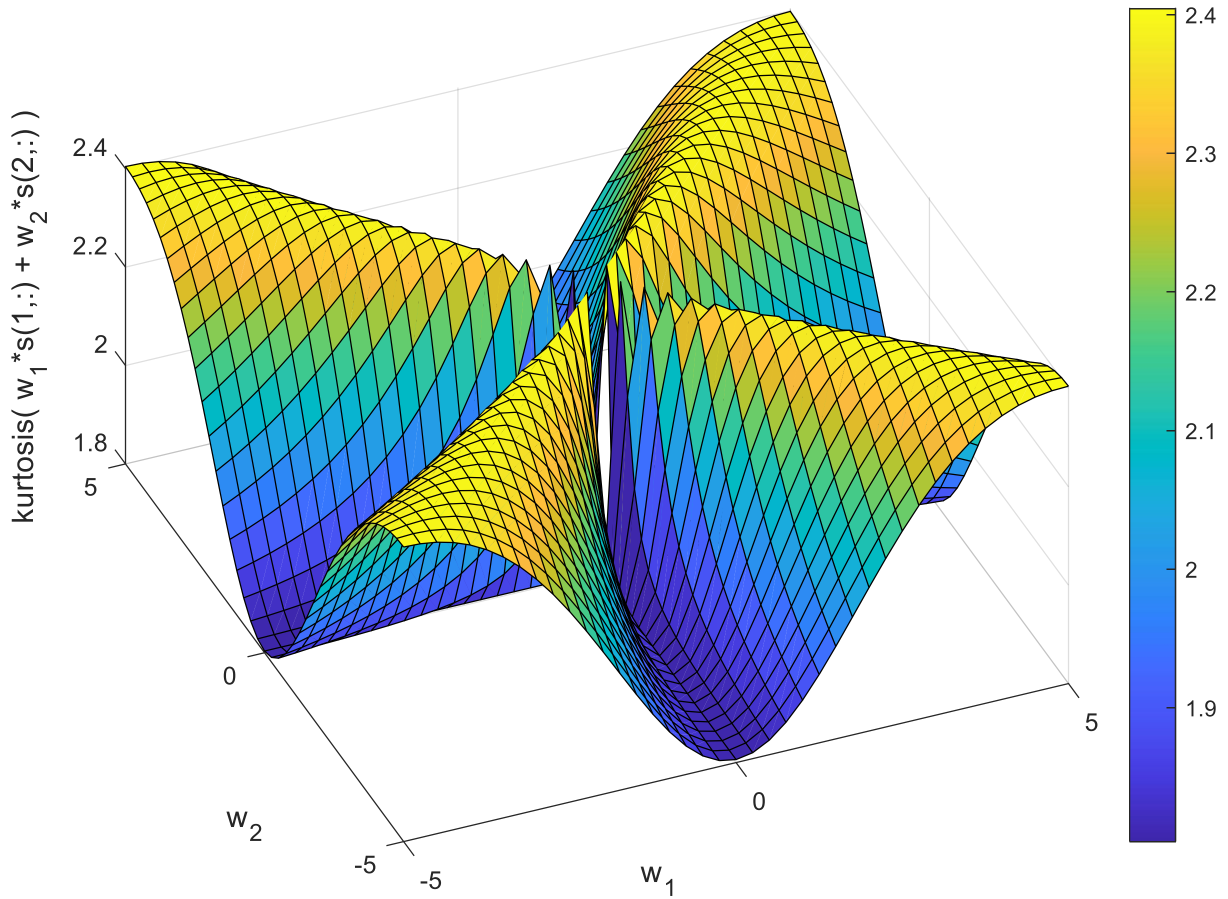
Vir: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_symmetric_pdfs.svg

Špičatost & ločitev izvorov

Enakomerna porazdelitev amplitud vzorcev izvorov



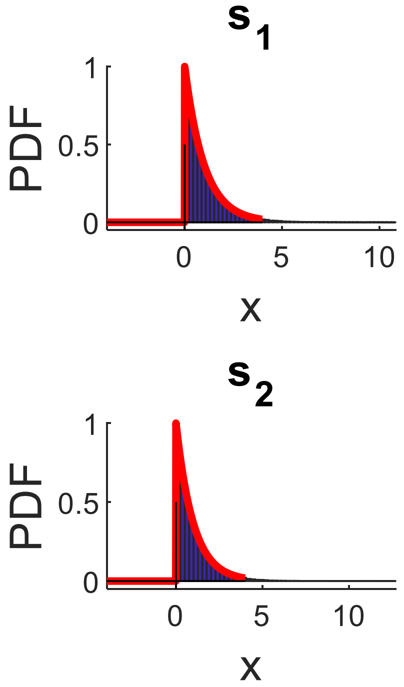
Vrednost špičatosti pri različnih linearnih kombinacijah izvorov



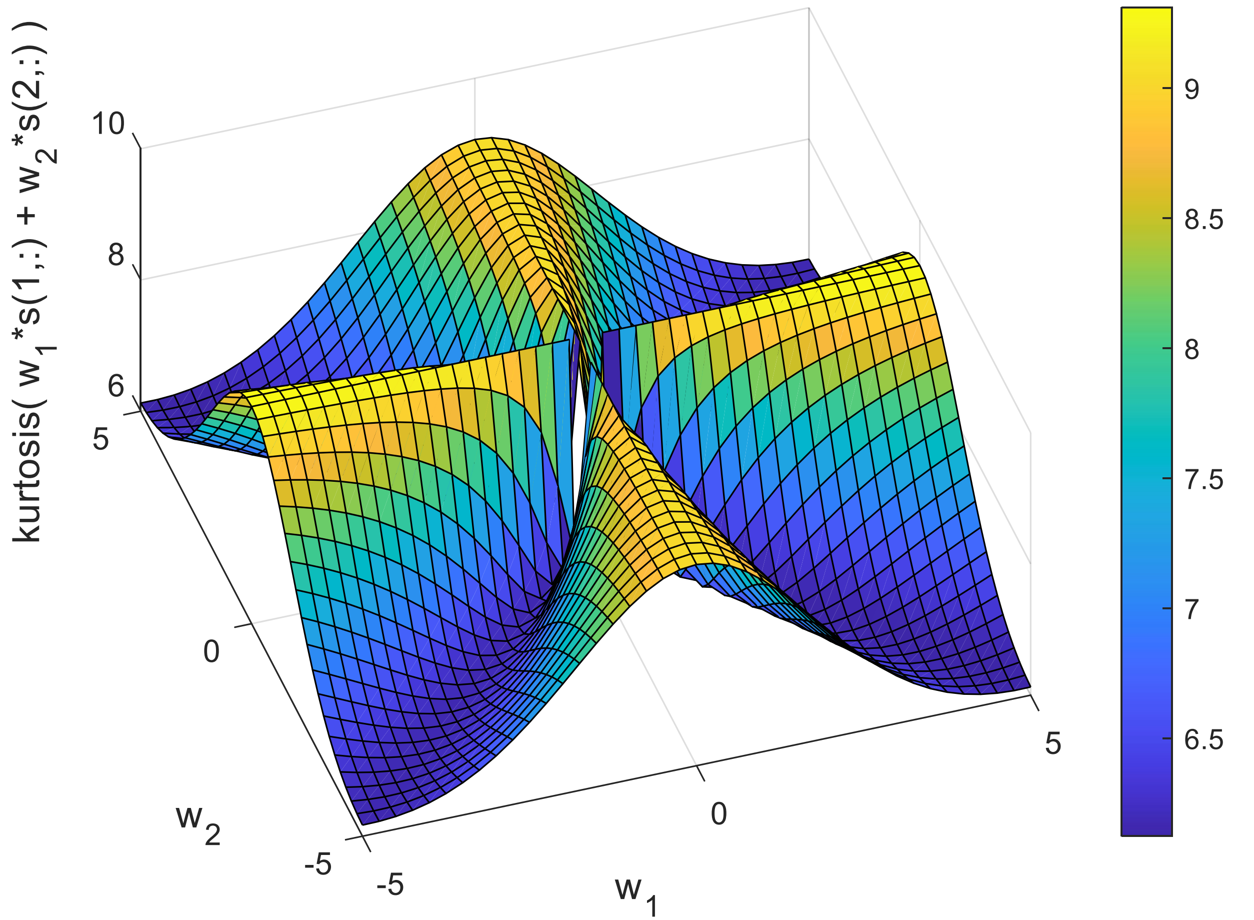
Ker špičatost uporabimo za iskanje maksimumov in minimumov, lahko izpustimo tudi odštevanje „-3“ in uporabimo samo $E\{{s_i}^4\}$

Špičatost & ločitev izvorov

Eksponentna porazdelitev amplitud vzorcev izvorov

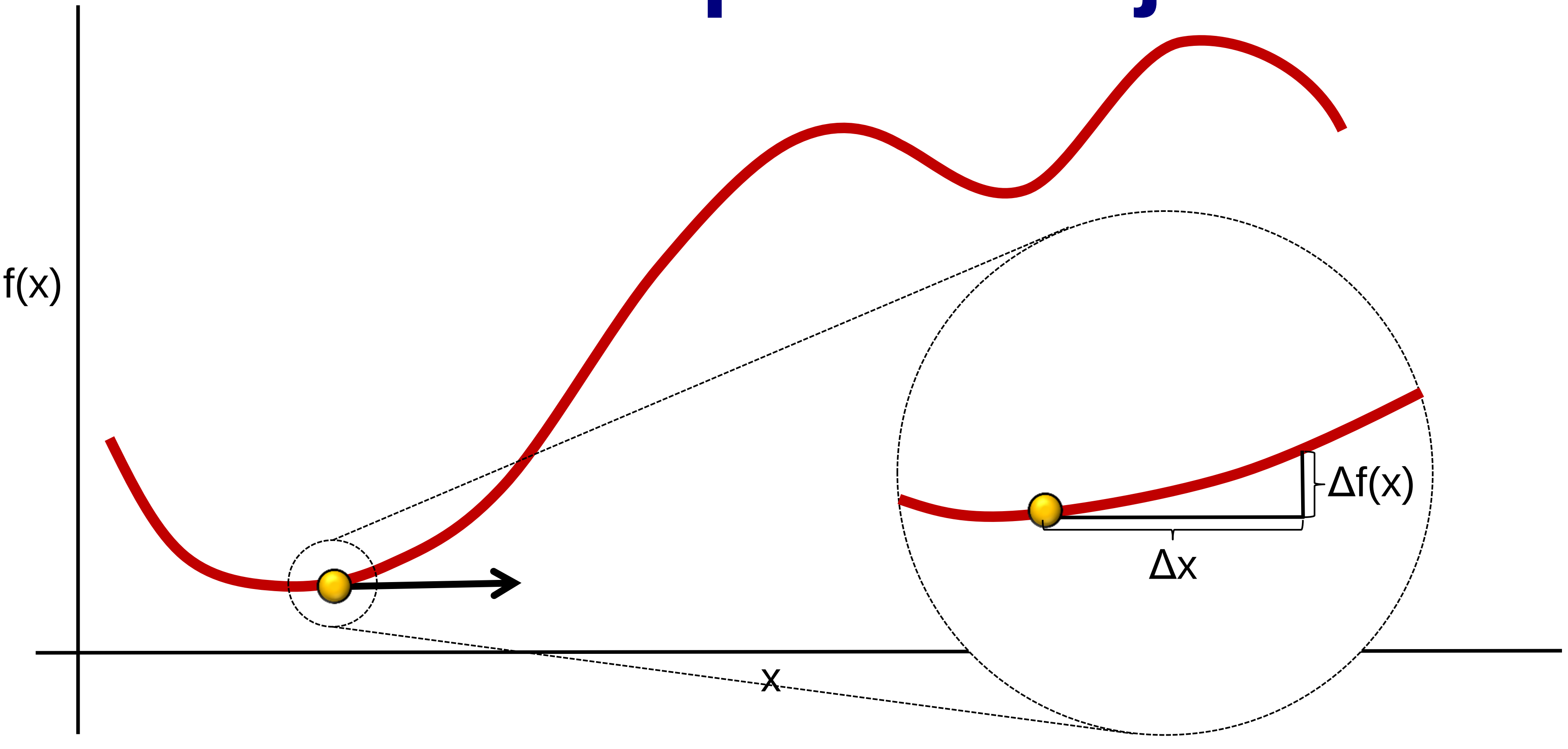


Vrednost špičatosti pri različnih linearnih kombinacijah izvorov



Ker špičatost uporabimo za iskanje maksimumov in minimumov, lahko izpustimo tudi odštevanje „-3“ in uporabimo samo $E\{{s_i}^4\}$

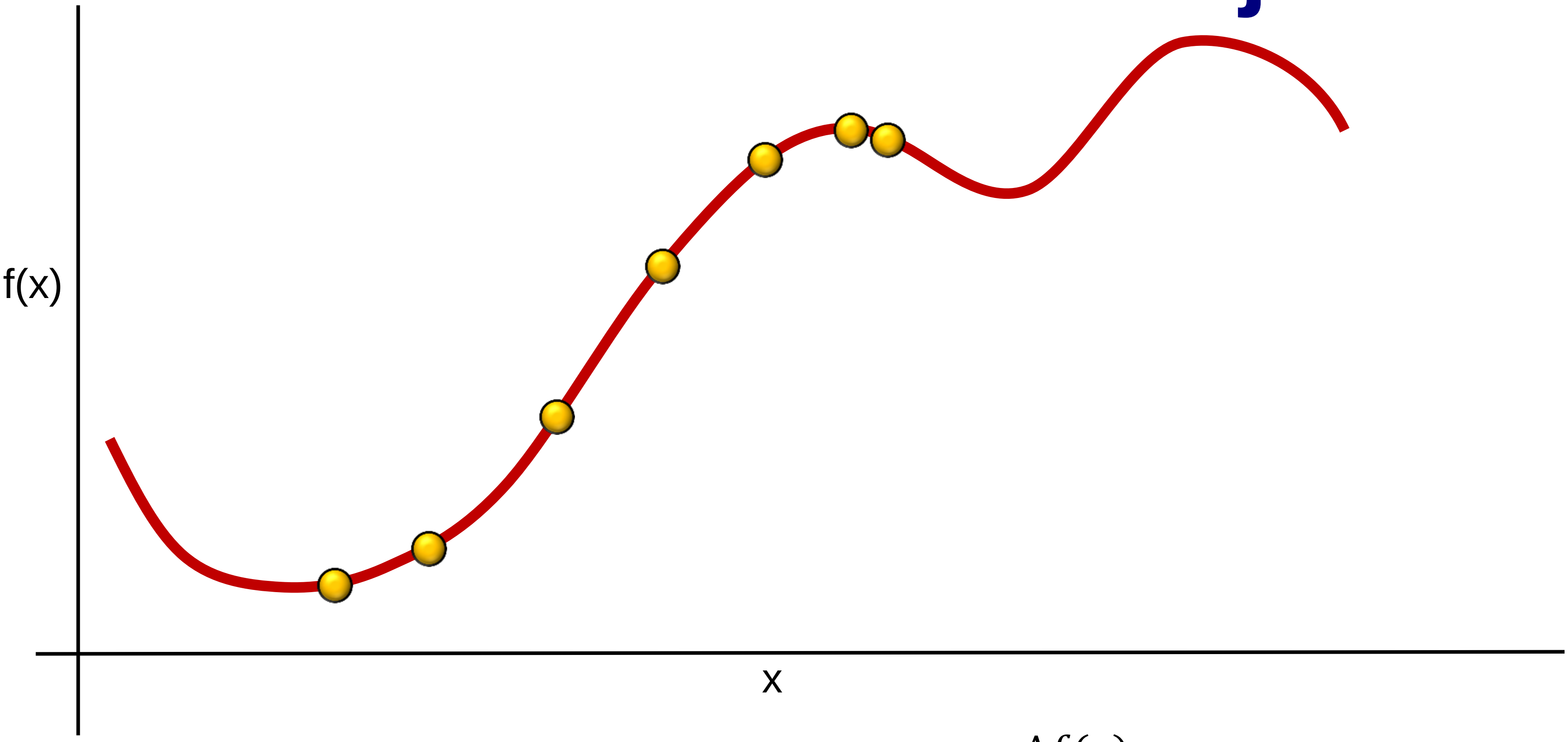
Gradientna optimizacija



gradientna maksimizacija: $x = x + \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

gradientna minimizacija: $x = x - \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

Gradientna maksimizacija

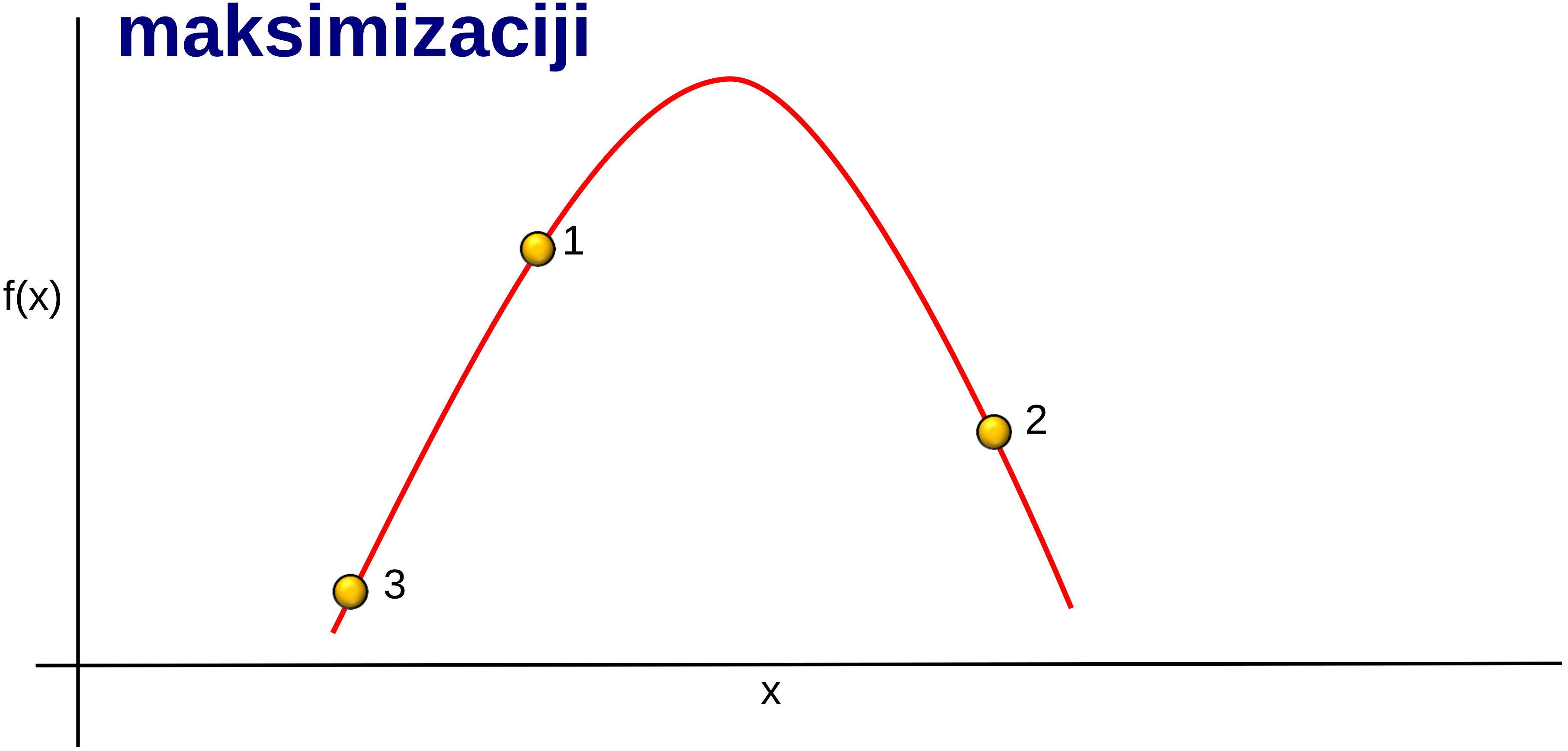


gradientna maksimizacija: $x = x + \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

Pojasnite dolžino koraka ob vsakem skoku. Od česa je odvisna dolžina skoka?

Lokalni vs. globalni optimum?

Problem prevelikih korakov pri gradientni maksimizaciji

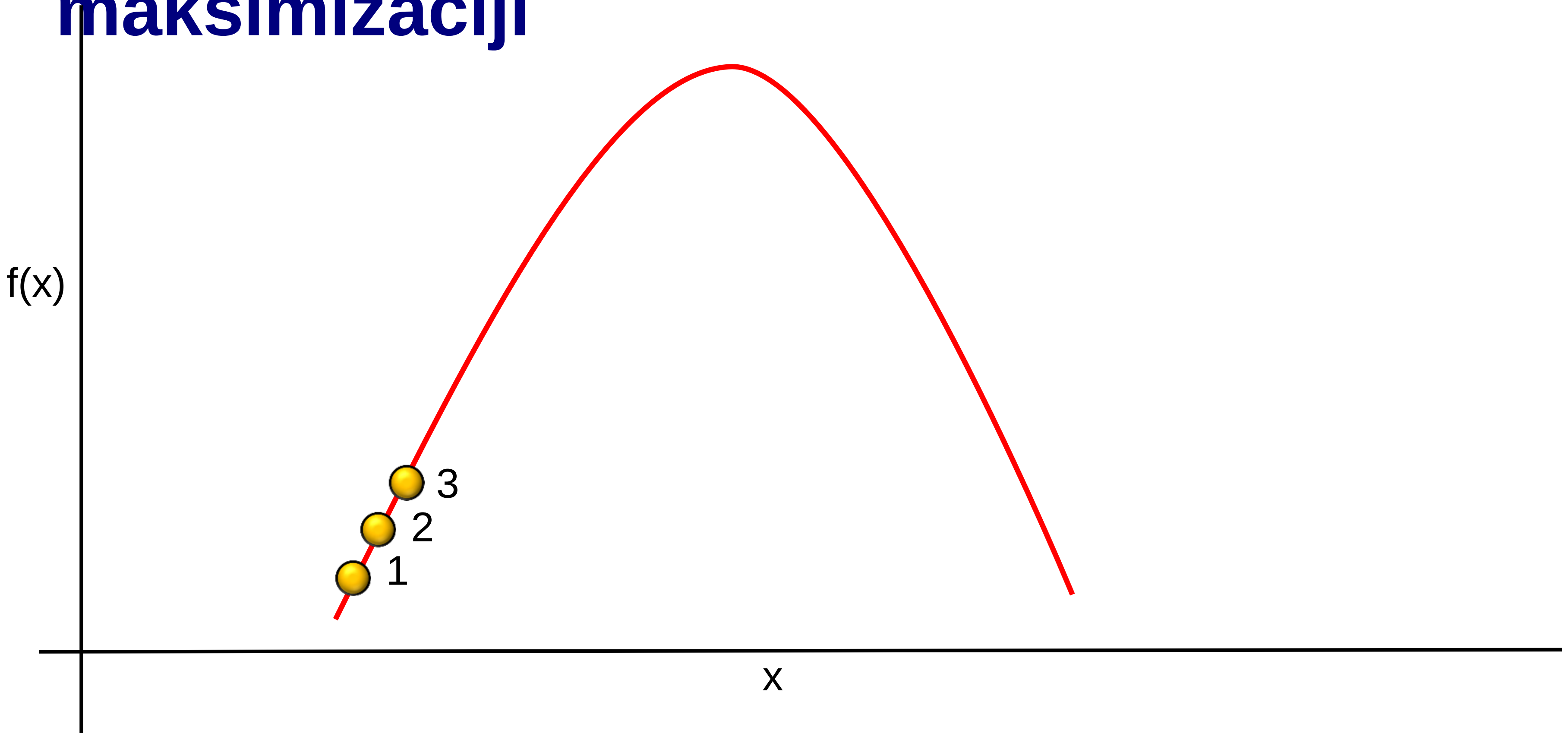


gradientna maksimizacija: $x = x + \alpha \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ α>1

Pojasnite dolžino koraka ob vsakem skoku. Od česa je odvisna dolžina skoka?

Lokalni vs. globalni optimum?

Problem premajhnih korakov pri gradientni maksimizaciji



gradientna maksimizacija: $x = x + \alpha \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ $\alpha \ll 1$

Pojasnite dolžino koraka ob vsakem skoku. Od česa je odvisna dolžina skoka?

Lokalni vs. globalni optimum?

Gradientni pristop k optimizaciji:
(x – dve meritvi, trenutno ocenjujemo en izvor)

1. Inicializiramo ločitveni vektor: $\mathbf{w}_i = [1,0]$

2. Rekonstruiramo i-ti izvor s_i : $s_i(n) = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}(n)$

3. Osvežimo ločitveni vektor: $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i + \alpha \dfrac{\partial f(s_i(n))}{\partial \mathbf{w}_i}$

4. Normaliziramo ločitveni vektor: $\mathbf{w}_i = \dfrac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$
(da preprečimo trivialno rešitev $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$)

optimizacija

$f(s_i(\mathrm{n}))$ - skalarna merilna funkcija, npr. *kurt*

Gradientni pristop k optimizaciji: *špičatost* *(zanemarimo -3 v enačbi špičatosti)*

$$f(s_i) = E\{s_i^4\} = \frac{1}{N}\sum_n s_i^4[n]$$

$$s_i[n] = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}[n]$$

$$\frac{\partial f(s_i)}{\partial \mathbf{w}_i} = \frac{\partial f(s_i)}{\partial s_i}\frac{\partial s_i}{\partial \mathbf{w}_i} = 4E\{s_i^3 \mathbf{x}\}$$

$$= 4\frac{1}{N}\sum_n s_i^3[n]\,\mathbf{x}[n]$$

2. Osvežimo ločitveni vektor:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i + \alpha 4 \frac{1}{N}\sum_n \left(s_i^3[n] \cdot \mathbf{x}[n]\right)$$

Gradientni pristop k optimizaciji: *špičatost* (x – dve meritvi, trenutno ocenjujemo en izvor)

1. Inicializiramo ločitveni vektor: $\mathbf{w}_i = [1,0]$

2. Rekonstruiramo i-ti izvor s_i : $s_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x}$

3. Osvežimo ločitveni vektor: $\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i + \alpha 4 \frac{1}{N} \sum_n \left(s_i^3[n] \cdot \mathbf{x}[n] \right)$

4. Normaliziramo ločitveni vektor: $\mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\left\| \mathbf{w}_i \right\|}$
(da preprečimo trivialno rešitev $\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$)

optimizacija

Iterativno ponavljamo korake 2-4, dokler se s_i spreminja

Primer predstavljene gradientne optimizacije:

http://research.ics.tkk.fi/ica/fastica/

Praktične opombe

- Predobdelava s filtriranjem je dovoljena!
  - filtriranje ohranja mešalni model (mešalno matriko)
  - zmanjša šum
- Predobdelava z analizo PCA je dovoljena!
  - zmanjša dimenzijo problema (odstrani nepotrebne meritve)
  - zmanjša šum
- Izbira algoritma ICA:
  - sočasna ocenitev vseh izvorov vs. sekvenčna ocenitev posameznih izvorov
  - izbira kriterijske (optimizacijske) funkcije: špičatost, negentropija, Kullback–Leiblerjeva divergenca, maxinfo,…
  - realnočasovna vs. paketna ločitev izvorov

Ločitev izvorov z uporabo časovne strukture

- osnovna premisa analize ICA

$$\forall \Delta n; \quad E\left\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n+\Delta n]\right\}=0$$

$$\forall \Delta n; \quad E\left\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\right\}=E\left\{\mathbf{x}[n+\Delta n]\mathbf{x}^T[n+\Delta n]\right\}$$

- signali navadno vsebujejo več strukture kot naključne spremenljivke
  - ločitev s pomočjo avtokovariance:

$$E\left\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n+\Delta n]\right\}\neq 0$$

  - ločitev s pomočjo nestacionarnosti:

$$E\left\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\right\}\neq E\left\{\mathbf{x}[n+\Delta n]\mathbf{x}^T[n+\Delta n]\right\}$$

Primer ločitve izvorov s pomočjo avtokovariance:

SOBI

dostopen v sklopu **EEGLAB**

http://sccn.ucsd.edu/eeglab/

Študijski material:

- Aapo Hyvärinen and Erkki Oja: Independent Component Analysis: A Tutorial
  http://www.cis.hut.fi/aapo/papers/IJCNN99_tutorialweb/
  (zelo nazorno učno gradivo pionirjev analize ICA)

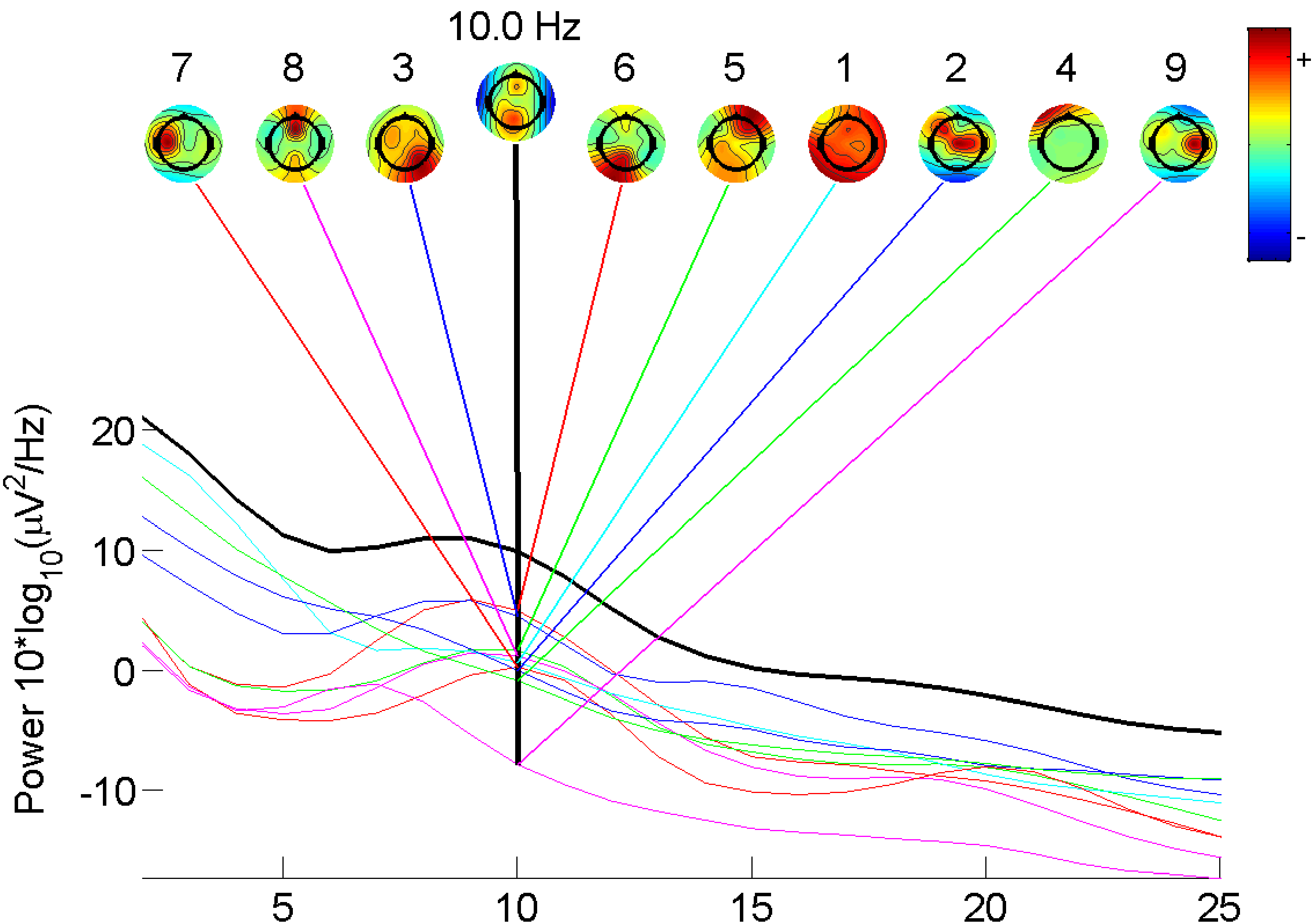
- fastICA: http://www.cis.hut.fi/projects/ica/fastica/
  (prostodostopeno orodje fastICA)

- J. F. Cardoso: ICA
  http://www.tsi.enst.fr/~cardoso/guidesepsou.html
  (spletna stran J. F. Cardosa, pionirja analize ICA)

PRIMERI IZ LITERATURE:

ICA APPLICATIONS: BIOMEDICAL SIGNALS

Možganski centri in njihovi prispevki k EEG



Vir: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Independent_component_analysis_in_EEGLAB.png

Brainmusic: fmri into musical sound

LISTENING TO THE DYNAMIC BRAIN

http://www.youtube.com/watch?v=FX19mNKoXeo&feature=related

Acoustic Blind Source Separation

http://www.youtube.com/watch?v=Qr74sM7oqQc&feature=related

Acoustic Blind Source Separation

http://www.youtube.com/watch?v=b2TTxe25Om0

Visual Blind Source Separation

http://cnx.org/content/m15640/latest/

Two-dimensional deconvolution

http://www.cs.technion.ac.il/~mbron/research_bss.html