

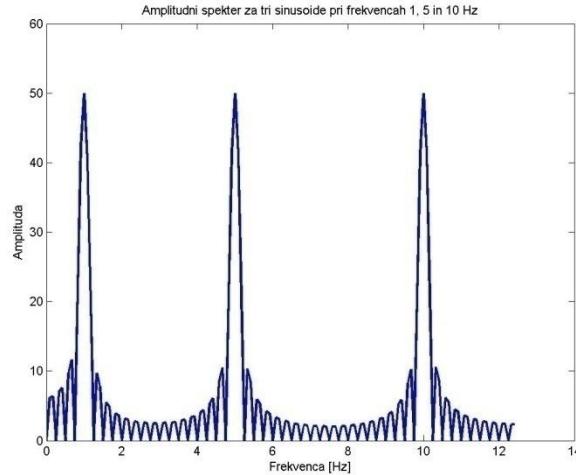
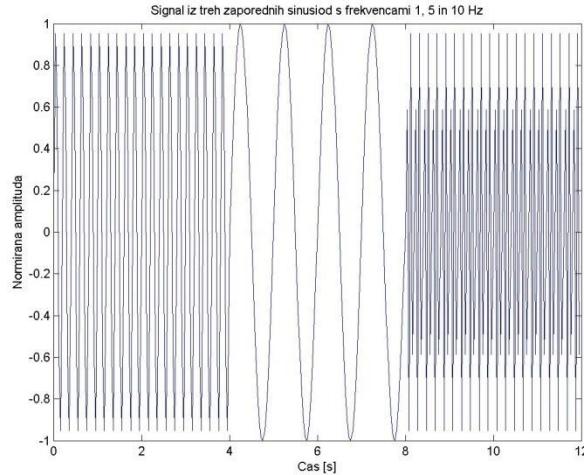
# **Frekvenčna analiza nestacionarnih signalov**

# UPORABNOST FOURIEROVE FREKVENČNE TRANSFORMACIJE

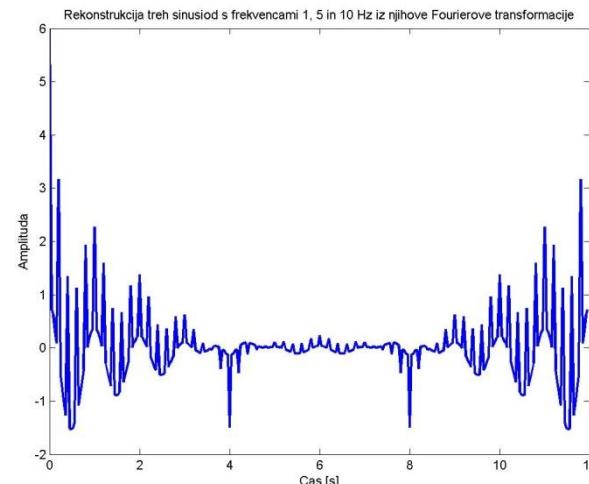
- Osnovno področje uporabe – prikaz stacionarne frekvenčne vsebine signalov ali slik:
  - **UPOŠTEVATI:** FFT vedno pokaže frekvence sinusoid, ki se v povprečju najbolje prilegajo obdelanemu signalu ali sliki
  - **PAZITI:** FFT poleg tega razliva frekvence, ki ne sovpadajo z diskretno razdelitvijo frekvenčnega prostora
- Kaj pokaže Fourierova analiza signala, ki ima v zaporednih časovnih intervalih različne frekvenčne vsebine?
  - Ostanimo pri monokomponentnih signalih, tako da bo v vsakem trenutku prisotna samo ena frekvenca nihanja.
$$\sin(10\pi n/25), \quad n=0, \dots, 99$$
  - Primer:  $x(n) = \begin{cases} \sin(2\pi n/25), & n=100, \dots, 199 \\ \sin(20\pi n/25), & n=200, \dots, 299 \end{cases}$
  - Vzorčevalna frekvenca je v tem primeru 25 Hz, frekvence sinusoid v treh zaporednih intervalih pa 5 Hz, 1 Hz in 10 Hz.

# Rezultat Fourierove analize za signal s tremi različnimi sinusiodami v zaporednih časovnih intervalih

- Izvorna oblika signala in njegova



- Inverzna transformacija **amplitudnega dela** dobljene frekvenčne transformirane – razlika proti izvornemu signalu je očitna in se pojavlja zaradi nestacionarnosti signala, katerega frekvenčna vsebina se spreminja s časom:



# FREKVENČNA ANALIZA NESTACIONARNIH SIGNALOV IN POJEM TRENUTNE FREKVENCE

- Pri nestacionarnih signalih se frekvenčna vsebina spreminja s časom.
- Če hočemo frekvenčno analizirati takšne signale, moramo za različne časovne trenutke dobiti različne frekvenčne slike.
- Pri stacionarnih signalih smo imeli opravka s frekvencami, tj. sinusoidami, ki so se raztezale skozi ves čas opazovanja nespremenjene, pri nestacionarnih signalih pa lahko posamezna frekvenčna vsebina traja le kratek čas.
- Govorimo o **trenutni frekvenci** (*instantaneous frequency*).
- Trenutna frekvenca  $\omega_t$  je definirana kot odvod signalove faze po času:

$$\omega_t = \frac{d\Phi}{dt}$$

če velja, da lahko signal  $x(t)$  zapišemo kot  $x(t) = A(t)e^{-j\Phi(t)}$ .

- Tak zapis signala imenujemo analitični signal, ki ga dobimo s pomočjo Hilbertove transformacije.

# FREKVENČNA ANALIZA NESTACIONARNIH SIGNALOV (2)

- Trenutno frekvenčno vsebino nestacionarnih signalov lahko računamo iz teoretičnih izhodišč s pomočjo Hilbertove transformacije in odvoda faze.
- V praksi pa so se bolj uveljavile druge metode, ki tudi računajo trenutno frekvenčno vsebino signalov:
  - kratkočasovna Fourierova transformacija (*short-time Fourier transform*, STFT)
  - Wigner-Villeova transformacija in njene izvedenke (*Wigner-Ville transform*, WV)
  - valčna transformacija (*wavelet transform* – WT)
  - izkustvena dekompozicija (*empirical mode decomposition*, EMD) itd.

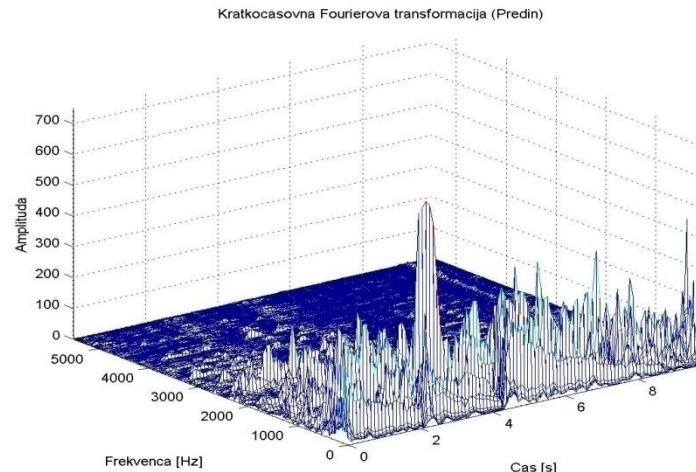
# Kratkočasovna Fourierova transformacija

# KRATKOČASOVNA FOURIEROVA TRANSFORMACIJA

- Ugotavljanje frekvenčne vsebine, spremenjajoče se skozi čas:
  - če signali niso stacionarni – se torej po frekvenčni vsebini spremenjajo skozi čas, FFT pokaže stacionarno frekvenčno sliko
  - pri nestacionarnih signalih je ta za posamezne trenutke napačna
  - IZBOLJŠAVA: signal razrežemo na krajše odseke in vsakega posebej obdelamo s FFT
  - na ta način pridemo do kratkočasovne Fourierove transformacije (*short-time Fourier transform, STFT*)
  - razrez signala na krajše odseke opravimo s t. i. okni (*windowing*); če vzorcev pri izrezu ne spremojmo po vrednosti, govorimo o pravokotnem oknu (*rectangular window*)
  - rezultat STFT je dvodimensionalen: predstavitev naniza frekvenčne transformiranke skozi čas
  - Zato govorimo o časovno-frekvenčni predstavitvi (*time-frequency representation*)
- Primer za glasbeni posnetek (naslednja prosojnica).

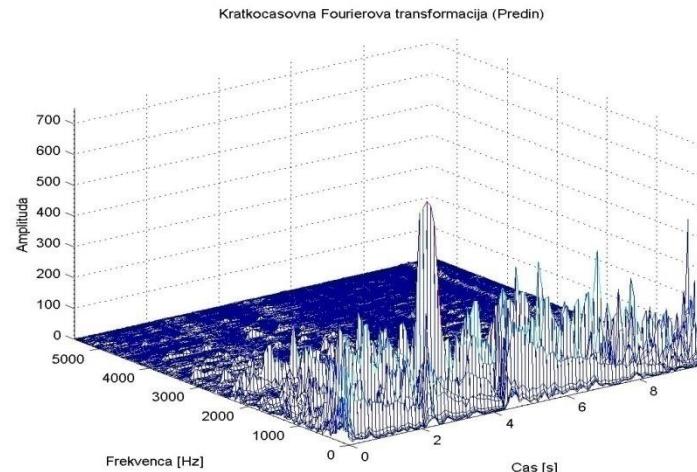
# Kratkočasovna Fourierova transformacija (STFT)

- Celotni signal razrežemo na odseke (z okni):
  - MOŽNOSTI: okna se lahko stikajo ali pa se celo delno prekrivajo
  - IZRAČUN: za vsako okno izračunamo FFT in rezultat vpišemo vzdolž  $y$ -osi ob trenutku, ki pomeni lego okna v času (recimo središče okna)
  - PAZITI: širina okna in vzorčevalna frekvenca odrejata frekvenčno ločljivost in ta je za celotno predstavitev STFT enaka – različno ločljivost uvaja šele pristop z valčno transformacijo (*wavelet transform*), dobro znano s področja kompresije slik
- Primer:
  - vzemimo glasbeni signal, ki je vzorčen s  $f_{vz} = 44100$  Hz (zapis na zgoščenki)
  - okna se naj ne prekrivajo in naj bodo dolga 0,1 s, torej  $N_i = 4410$  vzorcev
  - FREKVENČNA LOČLJIVOST:  $f_{vz}/N_i = 10$  Hz



# Kratkočasovna Fourierova transformacija (STFT)

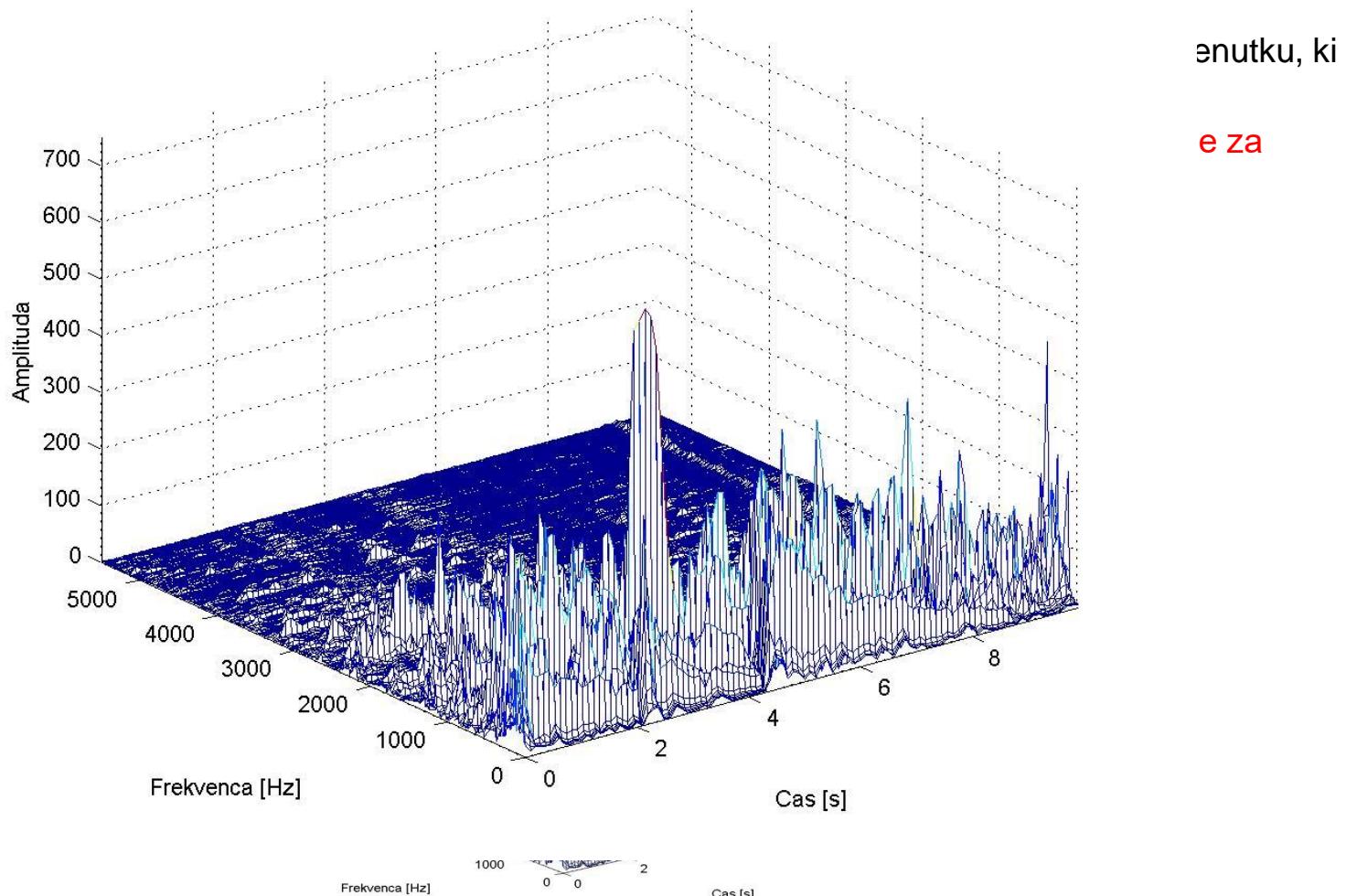
- Celotni signal razrežemo na odseke (z okni):
  - MOŽNOSTI: okna se lahko stikajo ali pa se celo delno prekrivajo
  - IZRAČUN: za vsako okno izračunamo FFT in rezultat vpišemo vzdolž  $y$ -osi ob trenutku, ki pomeni lego okna v času (recimo središče okna)
  - PAZITI: širina okna in vzorčevalna frekvenca odrejata frekvenčno ločljivost in ta je za celotno predstavitev STFT enaka – različno ločljivost uvaja šele pristop z valčno transformacijo (*wavelet transform*), dobro znano s področja kompresije slik
- Primer:
  - vzemimo glasbeni signal, ki je vzorčen s  $f_{vz} = 44100$  Hz (zapis na zgoščenki)
  - okna se naj ne prekrivajo in naj bodo dolga 0,1 s, torej  $N_i = 4410$  vzorcev
  - FREKVENČNA LOČLJIVOST:  $f_{vz}/N_i = 10$  Hz



# Kratkočasovna Fourierova transformacija (STFT)

- C

Kratkocasovna Fourierova transformacija (Predin)



# RAČUNANJE STFT

- Zvezna kratkočasovna Fourierova transformacija je definirana kot:

$$\text{STFT}[x(t)] = X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t} dt$$

pri čemer pomeni  $w(t)$  **okensko funkcijo**.

- Podobno lahko zapišemo diskretno STFT, če je dolžina okna  $N$ :

$$\text{STFT}[x(n)] = X(m, k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w(n-m)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n)}$$

- S kvadriranjem vrednosti amplitudnih spektrov v STFT pridemo do t. i. **spektrograma**:

$$\text{spektrogram}[x(t)] = |X(\tau, \omega)|^2 \quad \text{zvezni}$$

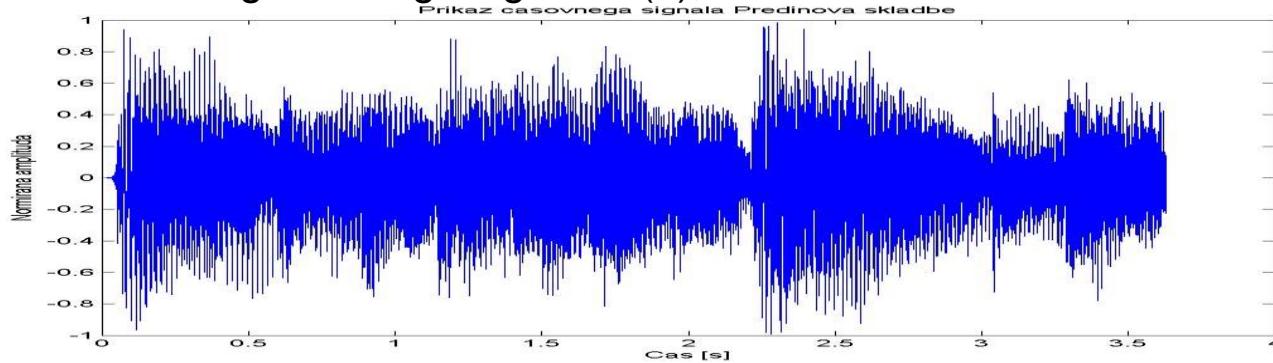
$$\text{spektrogram}[x(n)] = |X(m, k)|^2 \quad \text{diskretni}$$

- Integriranje zveznih frekvenčnih transformirank skozi čas vodi do zvezne Fourierove transformiranke:

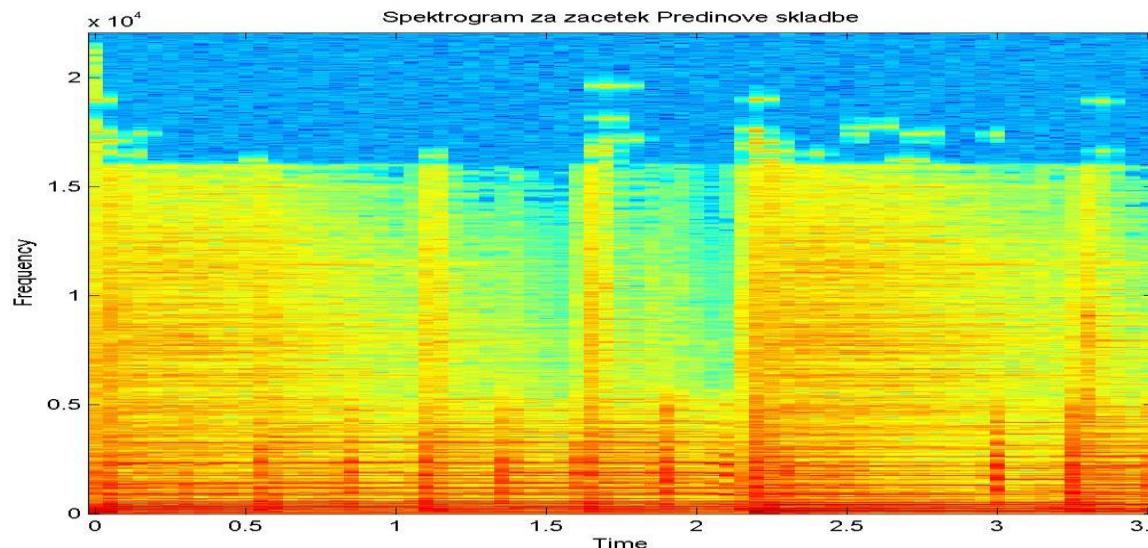
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau, \omega) d\tau$$

# Primer spektrograma za glasbeni signal

- Vzemimo odsek glasbenega signala  $x(n)$ ,  $n=0, \dots, 159999$ :

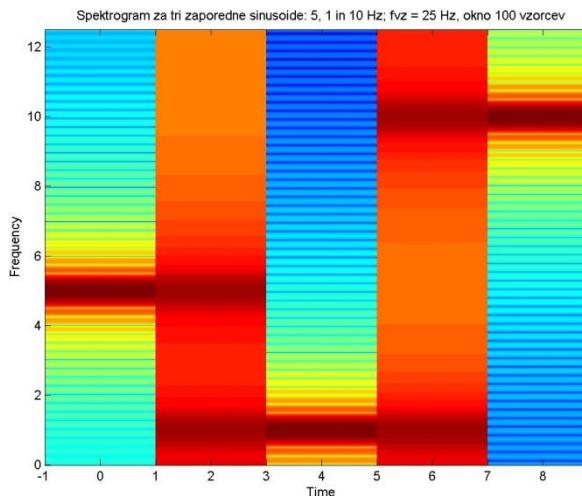
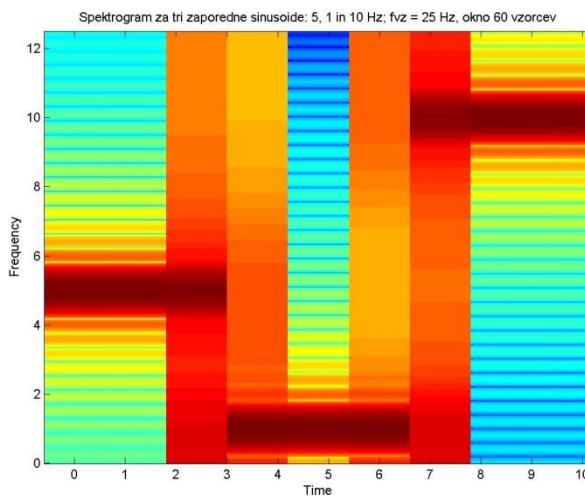
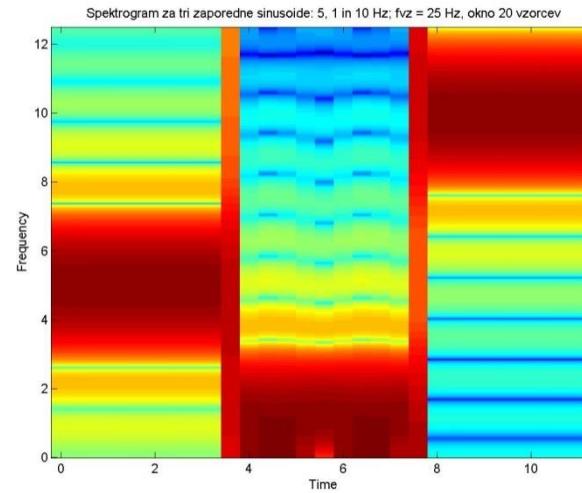
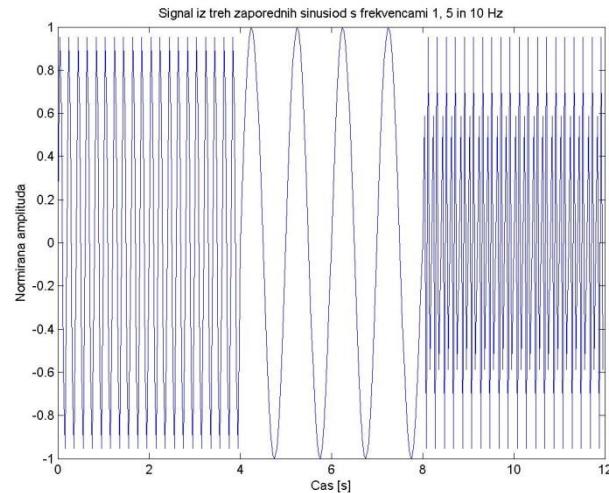


- Za ta signal izračunamo spektrogram pri  $f_{vz} = 44100$  Hz,  $N_w = 4410$ , polovično prekrivanje oken  $\rightarrow$  frekvenčna ločljivost: 10 Hz
- Funkcija v MATLAB-u: [SPECGRAM\(x,dolz\\_FFT,f\\_vz,dolz\\_w,prekrivanje\)](#)



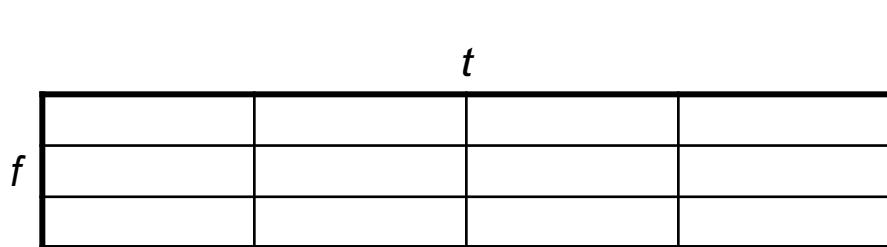
# Primer spektrograma za tri zaporedne sinusoide

- Vzemimo signal  $x(n)$ :  $\sin(10\pi n/25)$ ,  $n=0, \dots, 99$ ;  $\sin(2\pi n/25)$ ,  $n=100, \dots, 199$ ;  $\sin(20\pi n/25)$ ,  $n=200, \dots, 299$
- Tvorimo spektrograme s Hannovimi okni dolžin 20, 60 in 100 vzorcev ter polovičnim prekrivanjem:

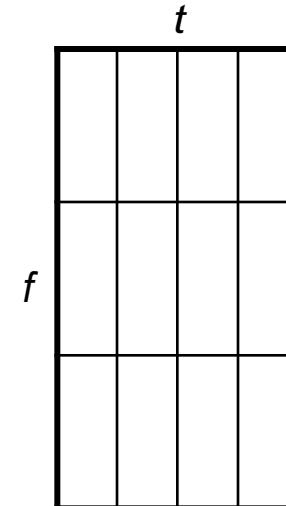


# PRINCIP NEDOLOČENOSTI PRI STFT

- S spremenjanjem dolžine okna spremojemo frekvenčno ločljivost  $f_{vz}/N_w$ .
- Oblika okna vpliva na t. i. **princip nedoločenosti** in na rezultate v okolici večjih nestacionarnosti (preskokov frekvenčne vsebine).
- Nedoločenost pravi, da pri STFT ne moremo hkrati povečevati časovne in frekvenčne ločljivosti. Časovno ločljivost določa dolžina okna  $N_w$ . Ločljivost je tem večja, čim krajše je okno (manjši  $N_w$ ). Pri enaki vzorčevalni frekvenci pa pomeni krajše okno slabšo frekvenčno ločljivost.



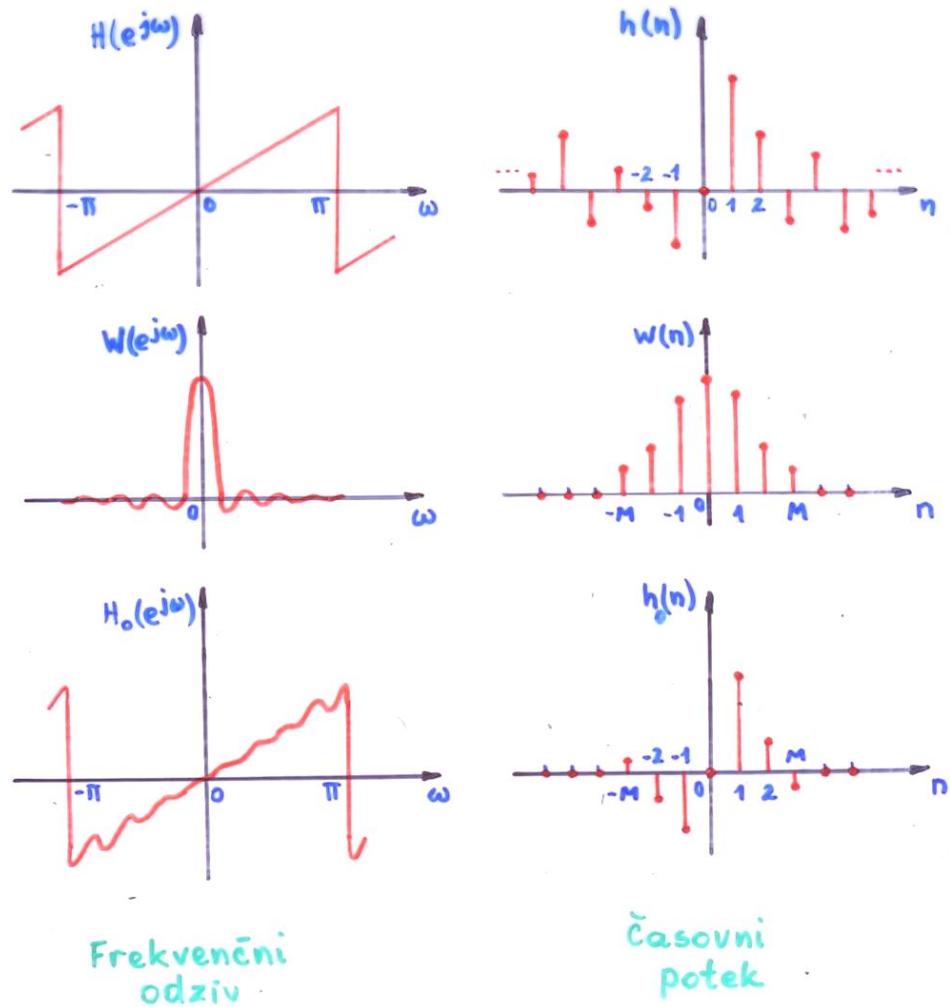
Manjša časovna in večja frekvenčna ločljivost



Večja časovna in manjša frekvenčna ločljivost

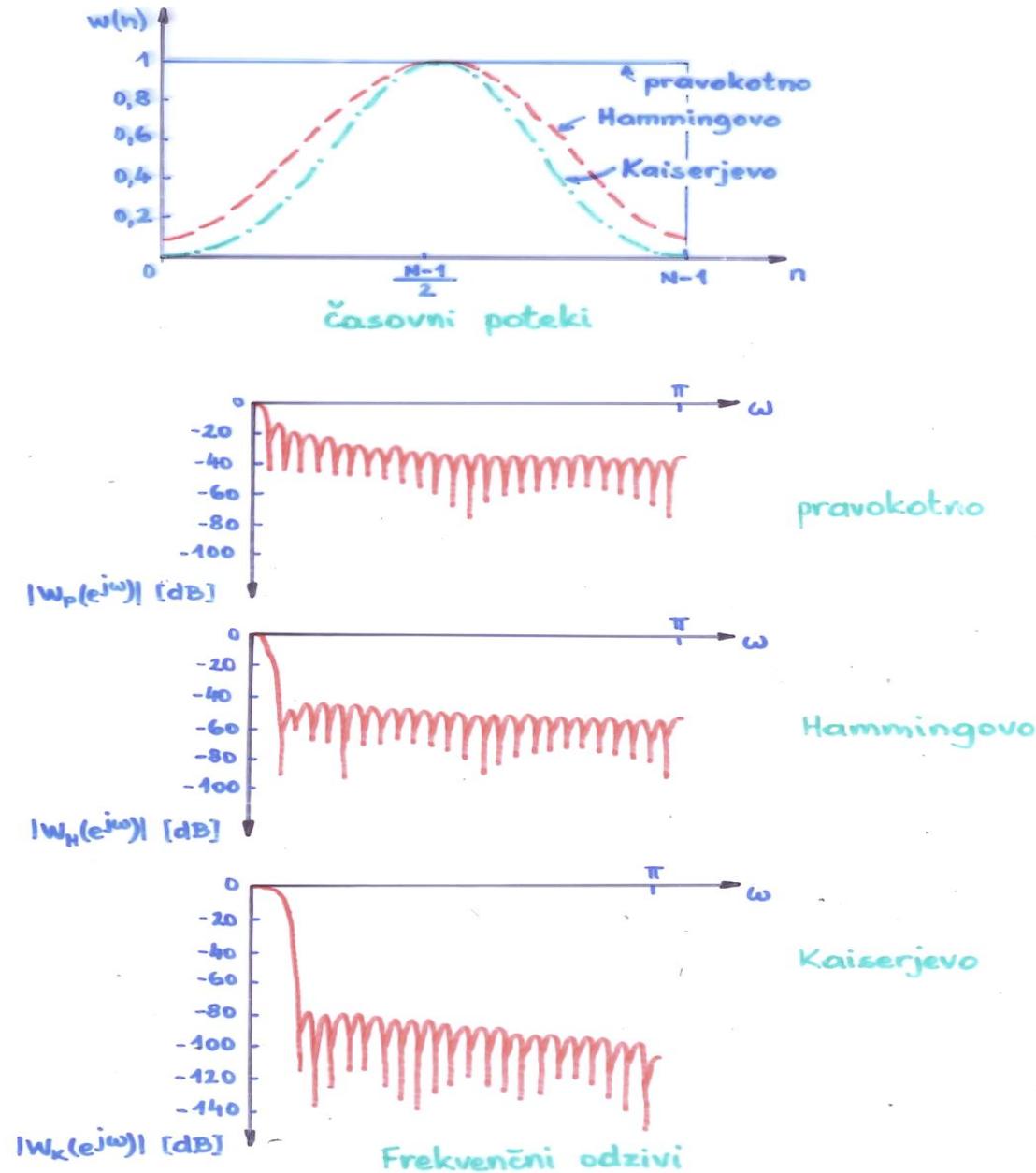
# VPLIV OKENSKIH FUNKCIJ

- Obstajajo različne okenske funkcije  $w(n)$ , s katerimi množimo signale. Njihov namen je izrezati del signala.
- Pravokotno okno (*rectangular window*) odreže signalne vzorce zunaj svojega definicijskega območja. Ob tem lahko na začetku in koncu okna nastanejo nenadni skoki signala, ki povzročijo t. i. Gibbsov pojav (frekvenčno popačitev signala).



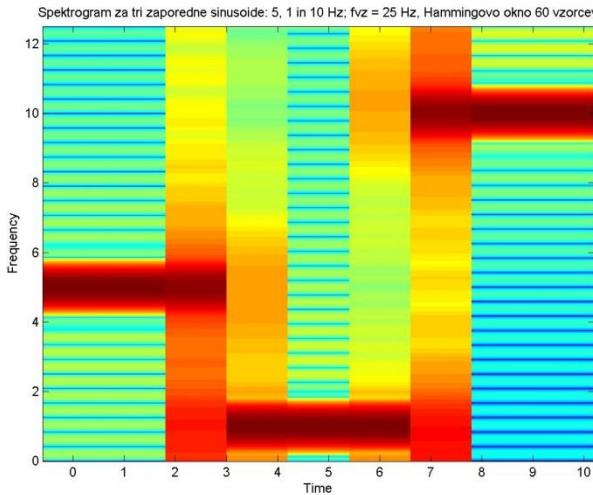
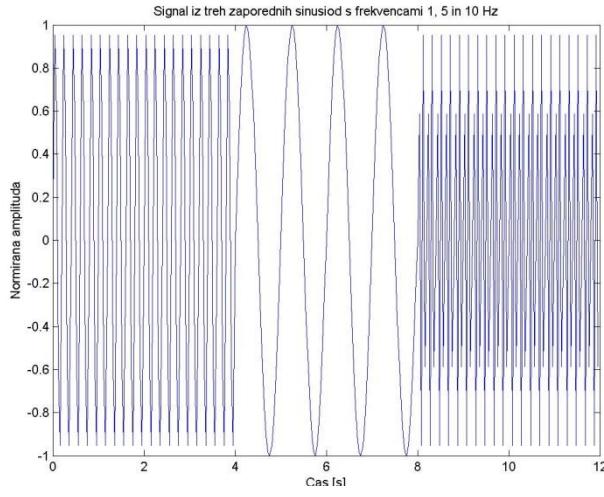
# VPLIV OKENSKIH FUNKCIJ (2)

- Okenska funkcija  $w(n)$  množi signal v časovnem prostoru oziroma s svojo frekvenčno podobo konvolvira njegov frekvenčni odziv.
- Idealno okno bi zato moralo imeti frekvenčni odziv v obliki Diracovega impulza, kar bi bilo mogoče le, če bi bilo okno neskončno dolgo.
- Realno izvedljiva okna so tem boljša, čim ožji je nizko prepustni pas njihovega frekvenčnega odziva in čim manj so prisotne ostale frekvence (čim večje je dušenje višjih frekvenc).
- Ti dve zahtevi sta, žal, kontradiktorni. Najboljši kompromis da najustreznejše okno.

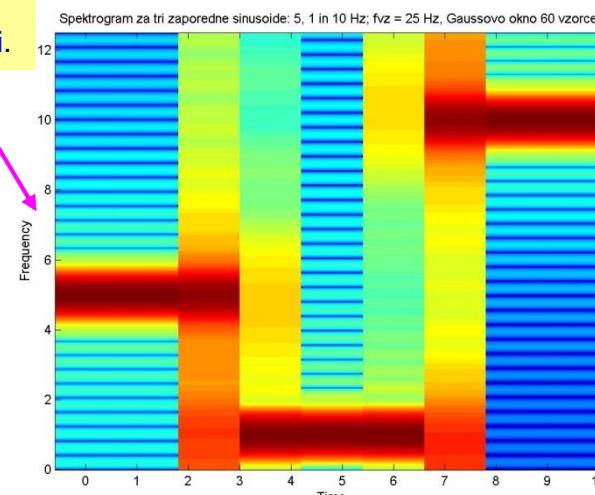
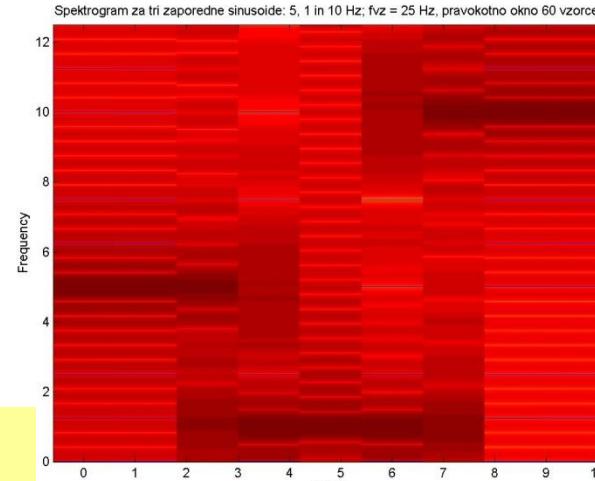


# Primer spektrograma za tri zaporedne sinusoide pri različnih okenskih funkcijah

- Vzemimo signal  $x(n)$ :  $\sin(10\pi n/25)$ ,  $n=0, \dots, 99$ ;  $\sin(2\pi n/25)$ ,  $n=100, \dots, 199$ ;  $\sin(20\pi n/25)$ ,  $n=200, \dots, 299$
- Spektrogrami s pravokotnim, Hammingovim in Gaussovim oknom, 60 vzorcev, polovično prekrivanje:



Gaussovo  
okno vodi k t.  
i. Gaborjevi  
transformaciji.



# INVERZ KRATKOČASOVNE FOURIEROVE TRANSFORMACIJE

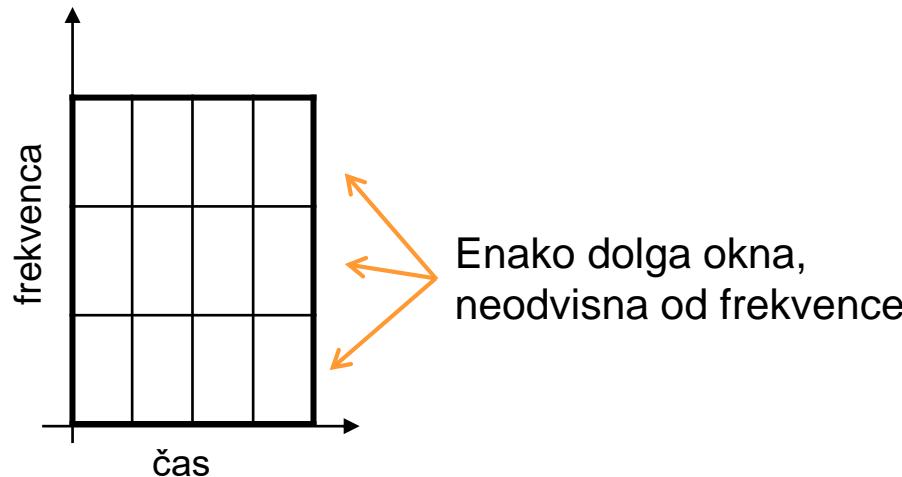
- Če je pri STFT uporabljeno pravokotno okno, dobimo z inverzno DFT za posamezne stolpce (delne frekvenčne transformiranke) iz STFT-predstavitev odseke originalnega signala. Upoštevati moramo le neprekrijoče se dele signala, če je bila STFT izračunana s prekrivanjem.
- Kadar uporabimo za računanje STFT nepravokotna okna (Hannovo, Hammingovo, Gaussovo, Kaiserjevo itd.), dobimo z inverzno DFT iz posameznih stolpcov zmnožke odsekov originalnega signala in uporabljenega okna. Vpliv okna nato odpravimo tako, da dobljeni rezultat delimo z vrednostmi vzorcev v oknu. Spet moramo paziti, da "zlepimo" le neprekrijoče se dele signala, kadar smo pri transformirjanju uporabili tehniko s prekrivanjem oken.
- Inverz STFT torej temelji na inverzni DFT in inverzni okenski funkciji.
- **PAZITE:** spektrogram pomeni kvadriran amplitudni spekter v STFT, zato njegov inverz ne vodi k originalnemu signalu, temveč k njegovi avtokorelaciji!

# **Časovno-merilna predstavitev**

## **Valčna transformacija**

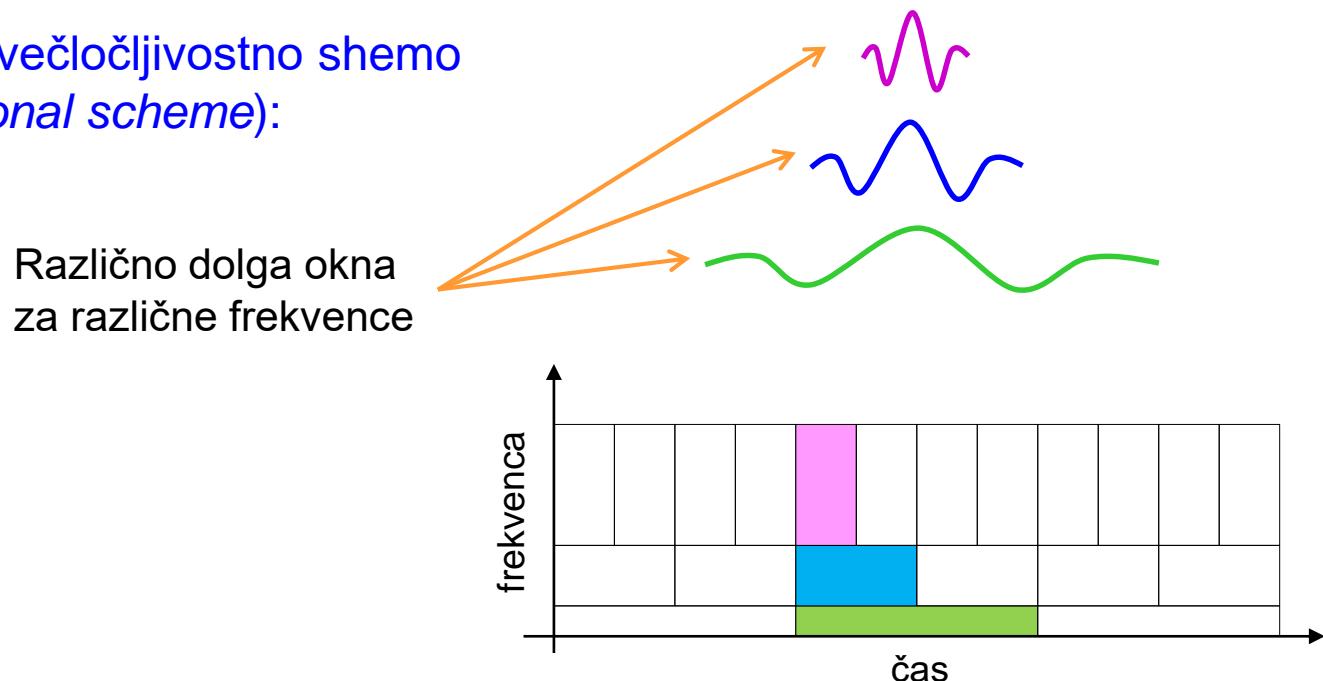
# VEČLOČLJIVOSTNI PRISTOP

- Časovno-frekvenčne predstavitve temeljijo na kompromisni izbiri časovne in frekvenčne ločljivosti (princip nedoločenosti).
- Tako pri STFT kot pri Wigner-Villeu oz. Cohenovem razredu transformacij določamo obe ločljivosti z dolžino izbranih oken:
  - daljša okna pomenijo večjo frekvenčno, a manjšo časovno ločljivost.
- Pri posameznem izračunu je okno stalne dolžine, zato kaže ločljivost naslednjo podobo:



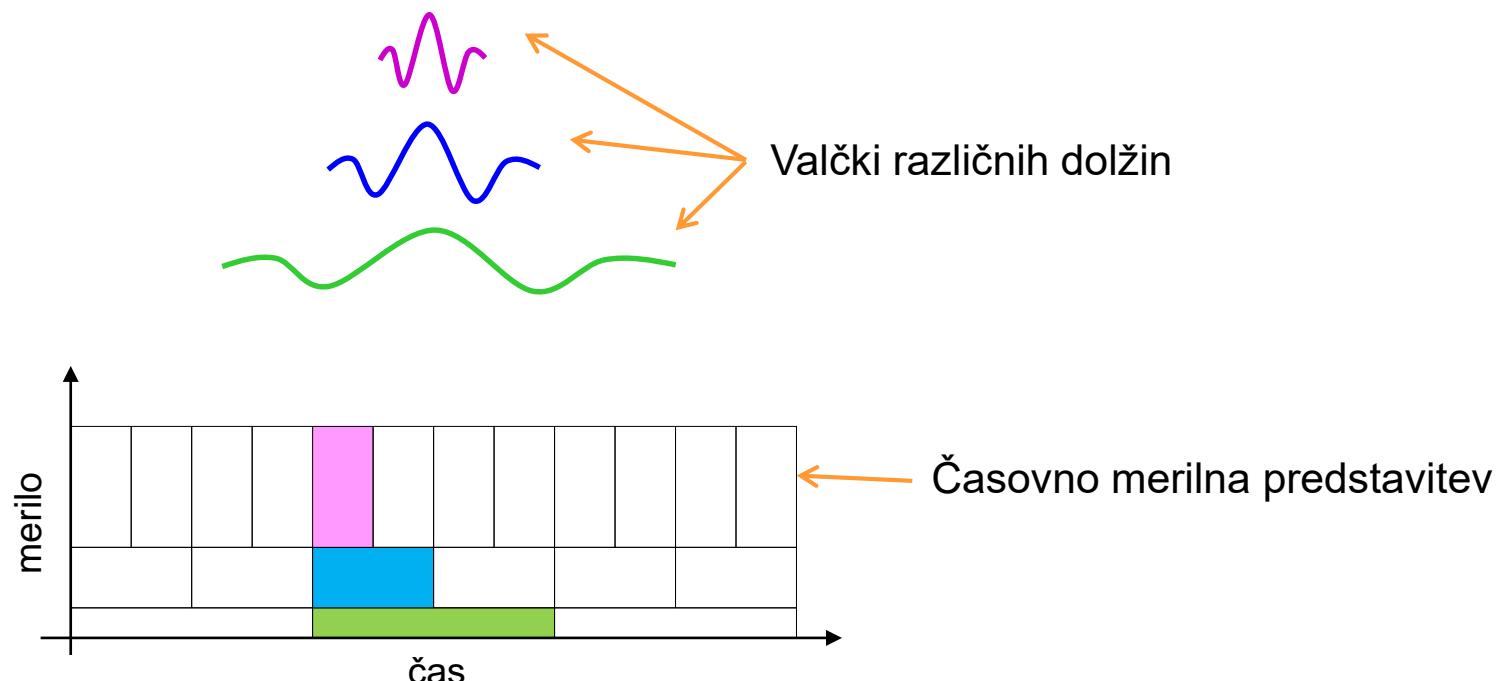
## VEČLOČLJIVOSTNI PRISTOP (2)

- Če bi naredili več zaporednih časovno-frekvenčnih predstavitev z različno dolgimi okni, bi te imele frekvenčne ločljivosti sorazmerne dolžini okna: daljše okno – večja frekvenčna ločljivost.
- Tak pristop bi dal za vsako frekvenco več ločljivosti. Ali je to potrebno?
- Dejansko si želimo višje frekvence natančneje locirati v času, ker se hitreje spreminjajo, nižje frekvence pa obratno, da zagotovimo ločljivost z enako natančnostjo za vse frekvence.
- Tako dobimo večločljivostno shemo (*multiresolutional scheme*):



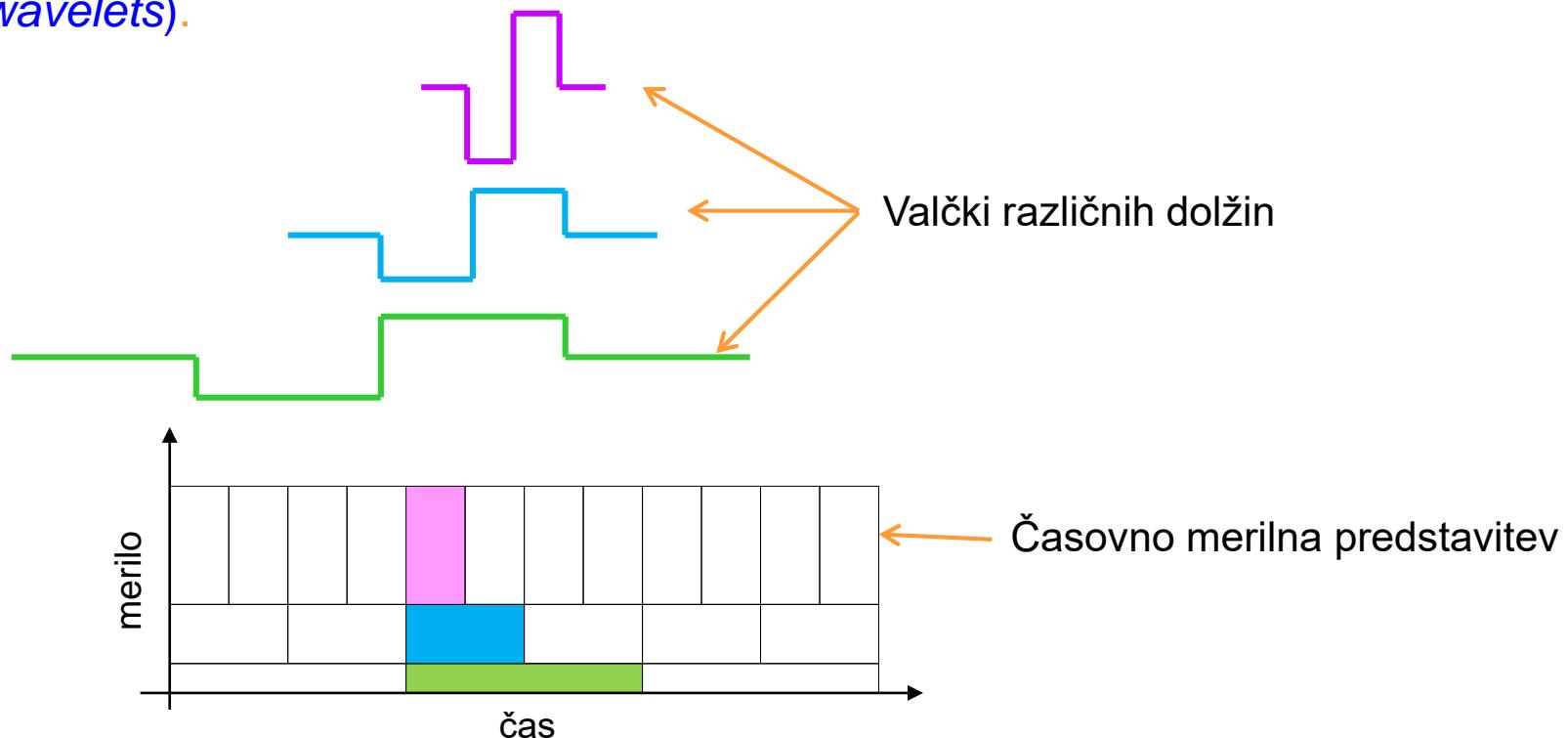
# ČASOVNO-MERILNA PREDSTAVITEV IN VALČKI

- Uvedba večločljivostne sheme vodi k drugačni predstavitvi, ki je dobila ime časovno-merilna predstavitev (*time-scale representation*).
- Različne frekvenčne ločljivosti povezujemo z merilom (*scale*).
- Signala sedaj ne množimo z okni kakor pri časovno-frekvenčni predstavitvi, temveč ga konvolviramo s signalnimi oblikami, ki jim pravimo valčki (*wavelets*).



# ČASOVNO-MERILNA PREDSTAVITEV IN VALČKI

- Uvedba večločljivostne sheme vodi k drugačni predstavitvi, ki je dobila ime časovno-merilna predstavitev (*time-scale representation*).
- Različne frekvenčne ločljivosti povezujemo z merilom (*scale*).
- Signala sedaj ne množimo z okni kakor pri časovno-frekvenčni predstavitvi, temveč ga konvolviramo s signalnimi oblikami, ki jim pravimo valčki (*wavelets*).



# VALČNA TRANSFORMACIJA

- Časovno-merilno predstavitev dobimo po izračunu, ki se imenuje **valčna transformacija (wavelet transform)**:

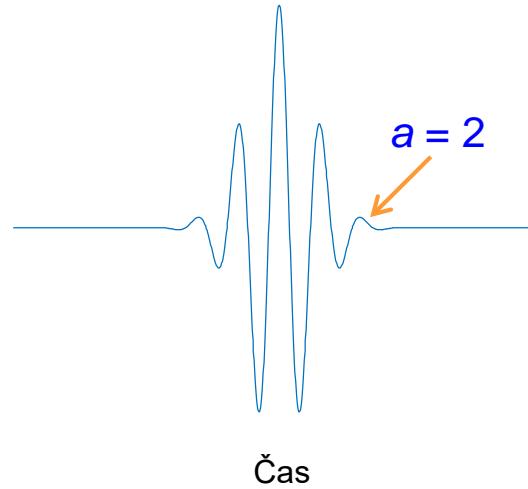
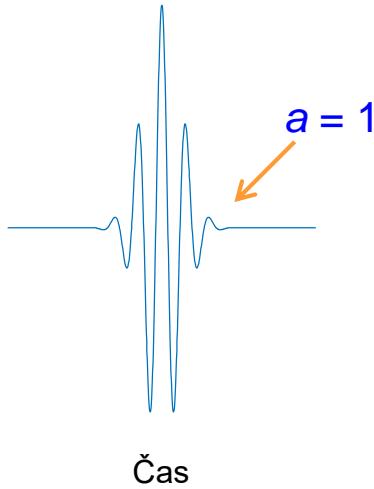
$$X_{VT}(t, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \Psi^*(\frac{\tau-t}{a}) d\tau$$

pri čemer pomenijo:

- $t$  – časovni premik
- $a$  – merilo
- $\Psi((\tau-t)/a)$  – materinski oz. osnovni valček (*mother, basic wavelet*)
- Parametra  $t$  in  $a$  določata časovni položaj valčka glede na obdelovani signal in merilo, tj. razteg valčka.
- Parametra  $t$  in  $a$  se lahko zvezno spremojata, zato govorimo o **zvezni valčni transformaciji (continuous wavelet transform – CWT)**.
- Ko meritni parameter  $a$  povečujemo, valček raztegujemo (*dilation*).
- Pri vsaki kombinaciji premika in merila izračunamo s konvolucijo iz signala vrednost  $X_{VT}(t, a)$ . Te transformacijske vrednosti se imenujejo **valčni koeficienti (wavelet coefficients)**.

# LASTNOSTI VALČKOV

- Primer valčkov pri merilih  $a = 1$  in  $a = 2$ :

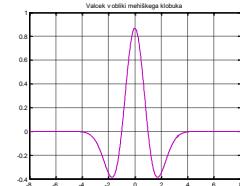
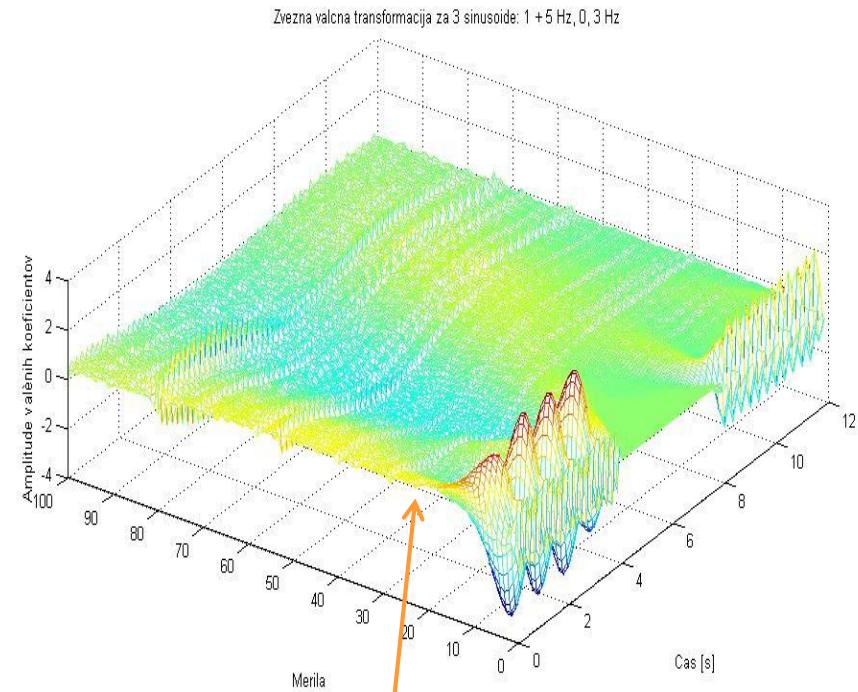
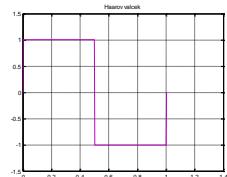
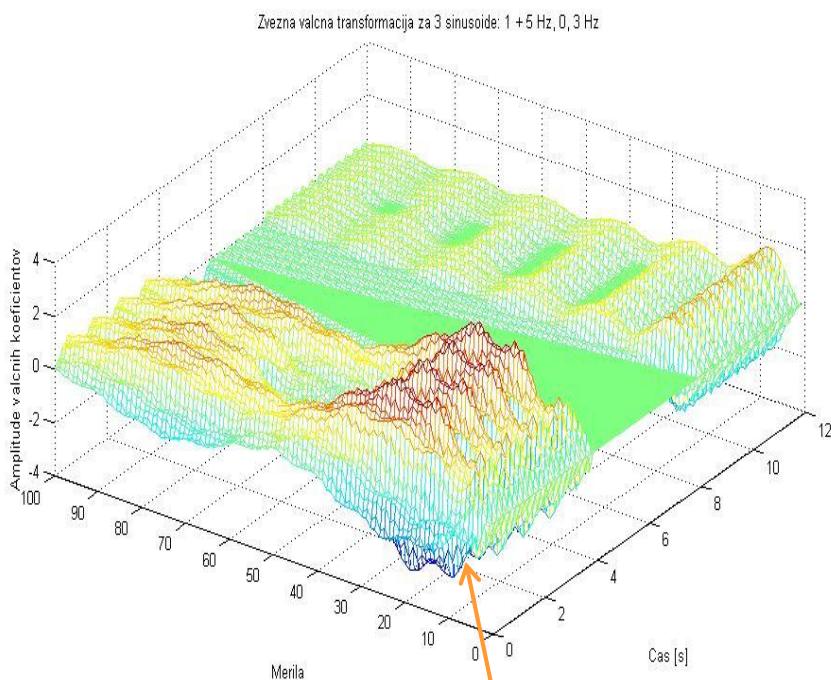


- Zvezni valčki so definirani z naslednjimi lastnostmi:
  - imajo končno definicijsko območje (končno dolžino)
  - njihova povprečna vrednost je enaka 0
  - njihova energija je normirana in enaka pri vseh merilih
  - zgoščeni so tako v času kot frekvencah – regularnost

# Primer valčne transformacije za večkomponentni signal

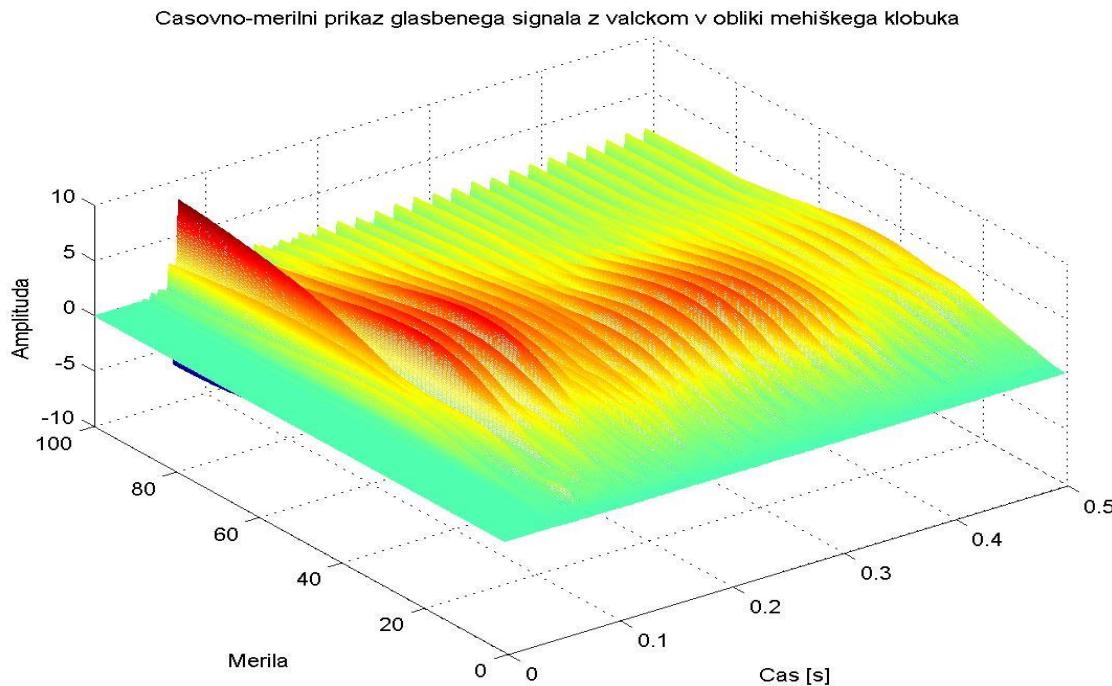
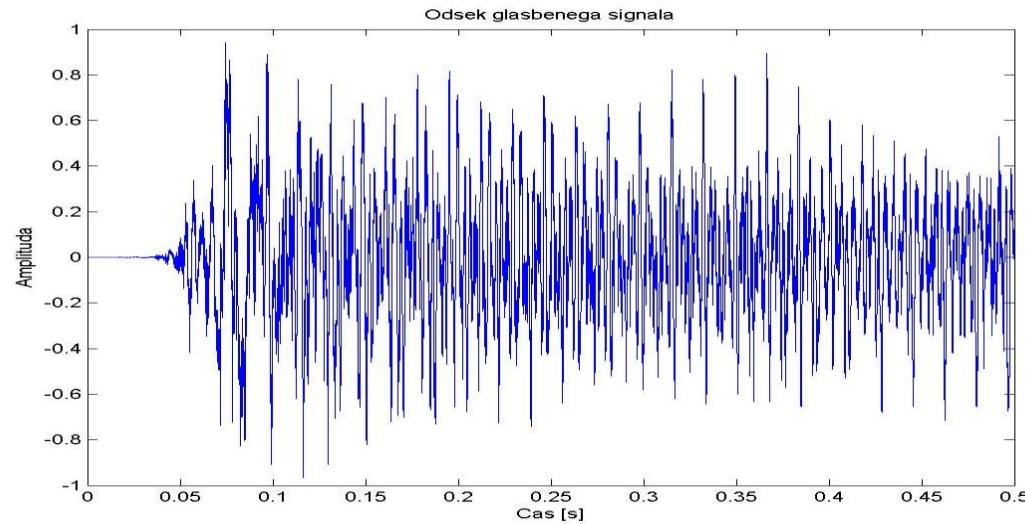
- Opazovani signal:

$$x(n) = \sin(10\pi n/25) + \sin(2\pi n/25), n=0, \dots, 99; 0, n=100, \dots, 199; \sin(6\pi n/25), n=200, \dots, 299$$



Valček v obliki mehiškega klobuka

# Primer valčne transformacije za glasbeni signal

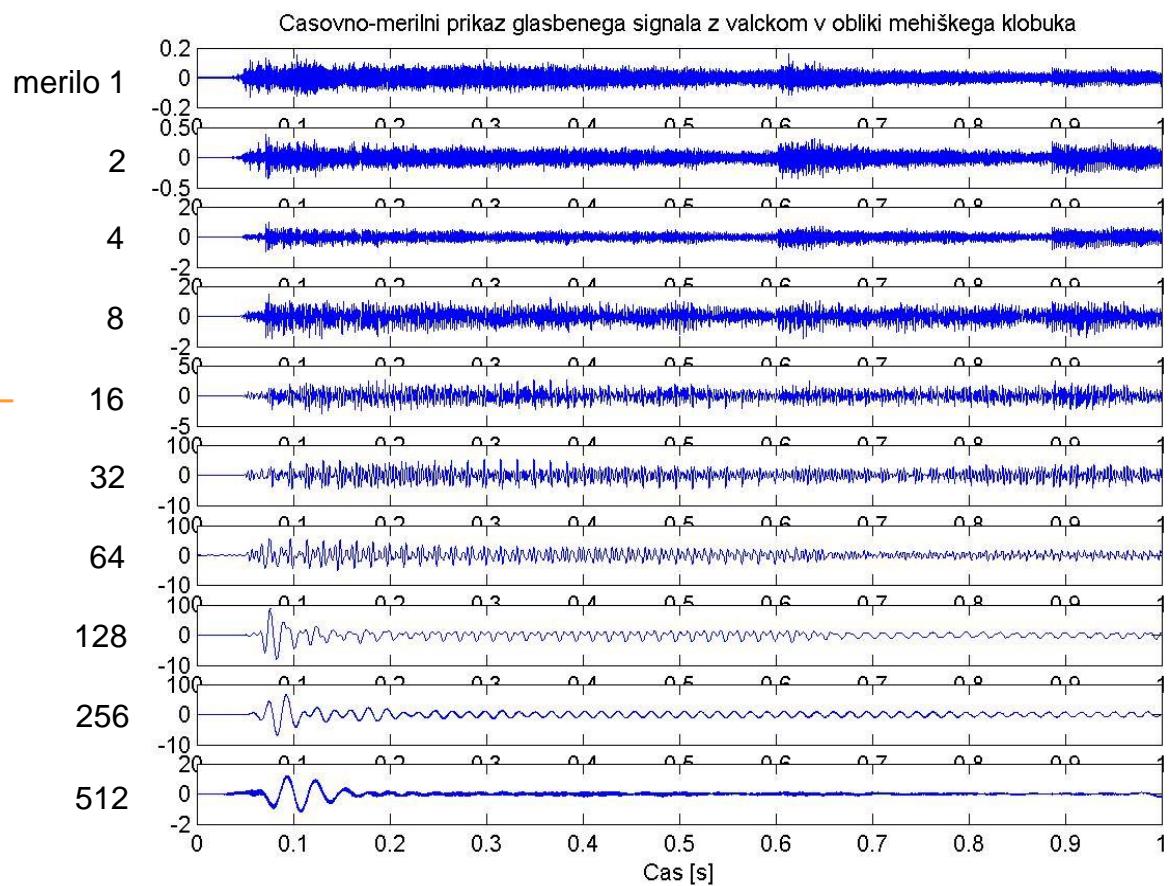


# Primer valčne transformacije za glasbeni signal – diadična merila

- Pri uporabi valčne transformacije je običajno, da meril ne jemljemo po vrsti linearo.
- Če hočemo zaobjeti večji frekvenčni razpon, je primernejša diadična razporeditev meril  $2^k$ :

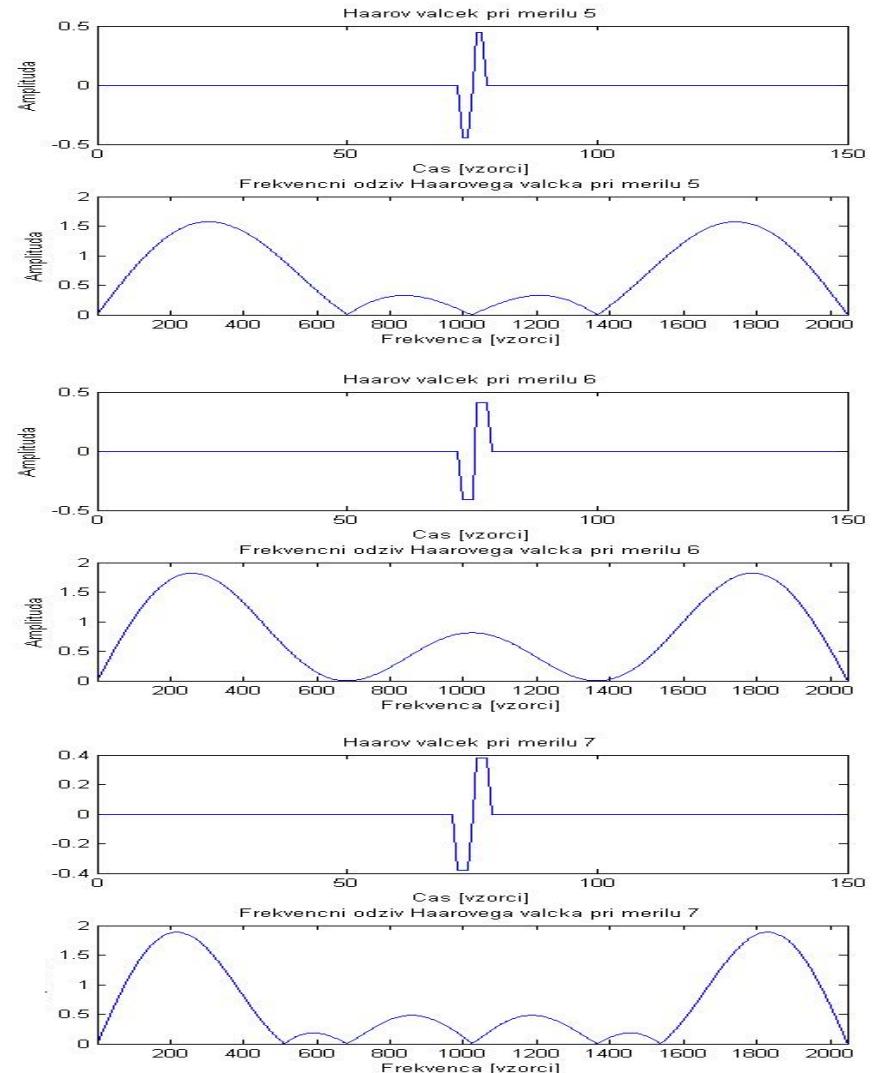
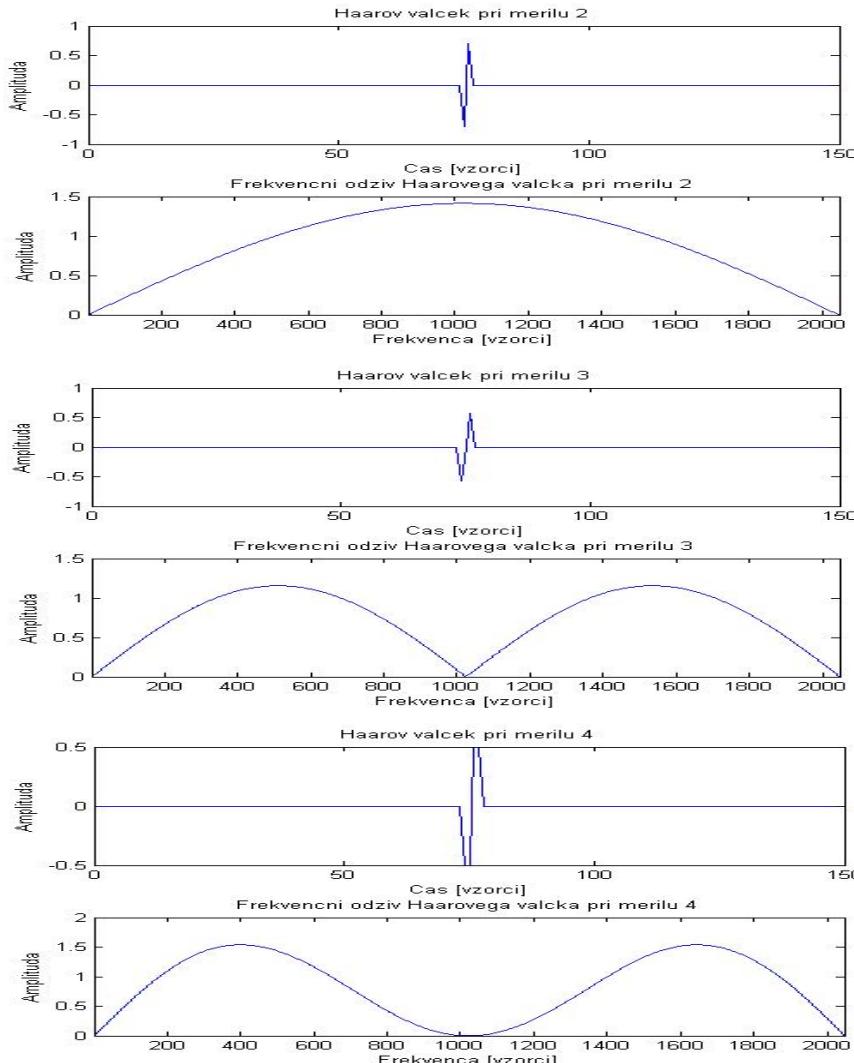
$$\frac{1}{\sqrt{2^k}} \Psi\left(\frac{\tau-t}{2^k}\right)$$

Valčna transformacija  
glasbenega signala  
s prejšnje prosojnice –  
diadična merila



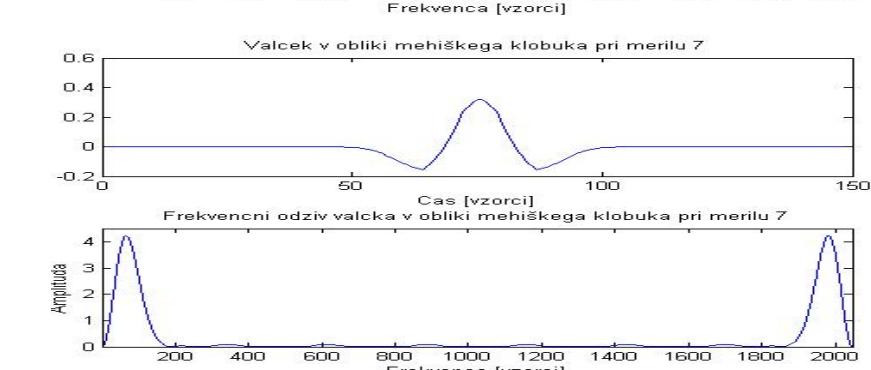
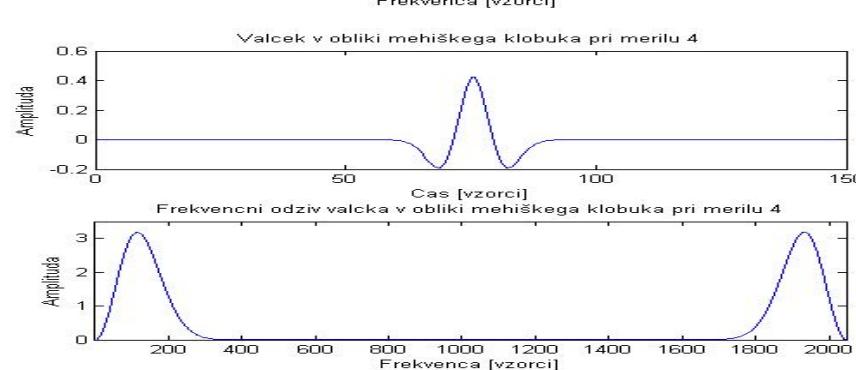
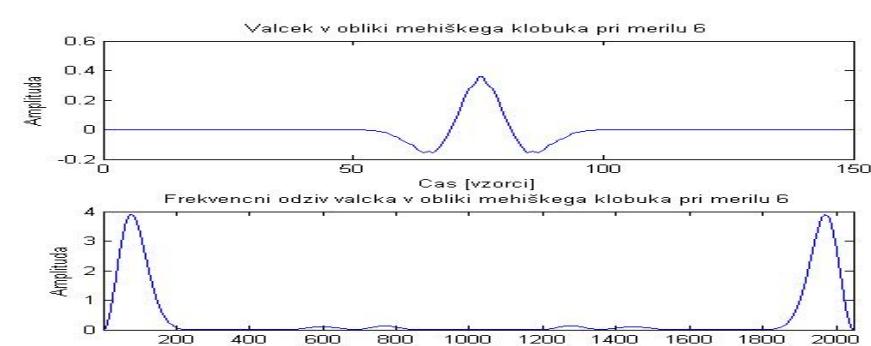
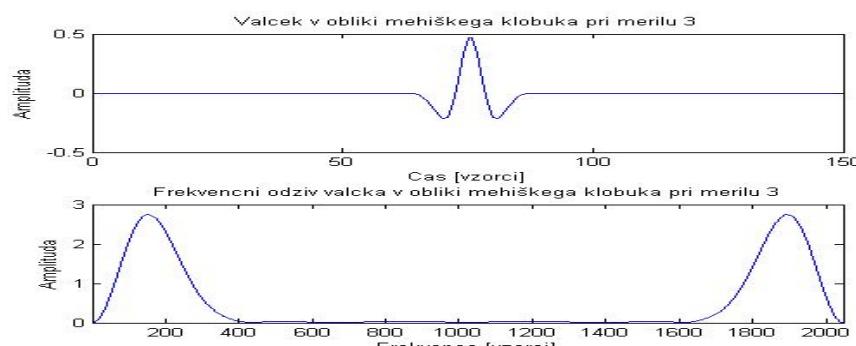
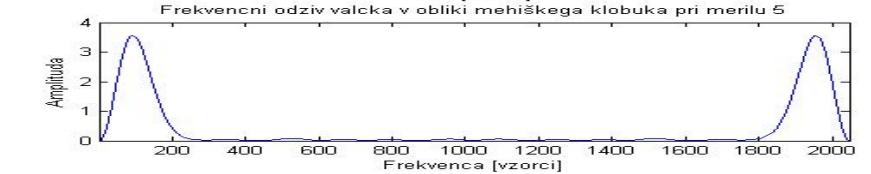
# FREKVENČNI ODZIV VALČKOV

- Primer za Haarov valček pri merilih  $a = 2, 3, 4, 5, 6$  in  $7$ :



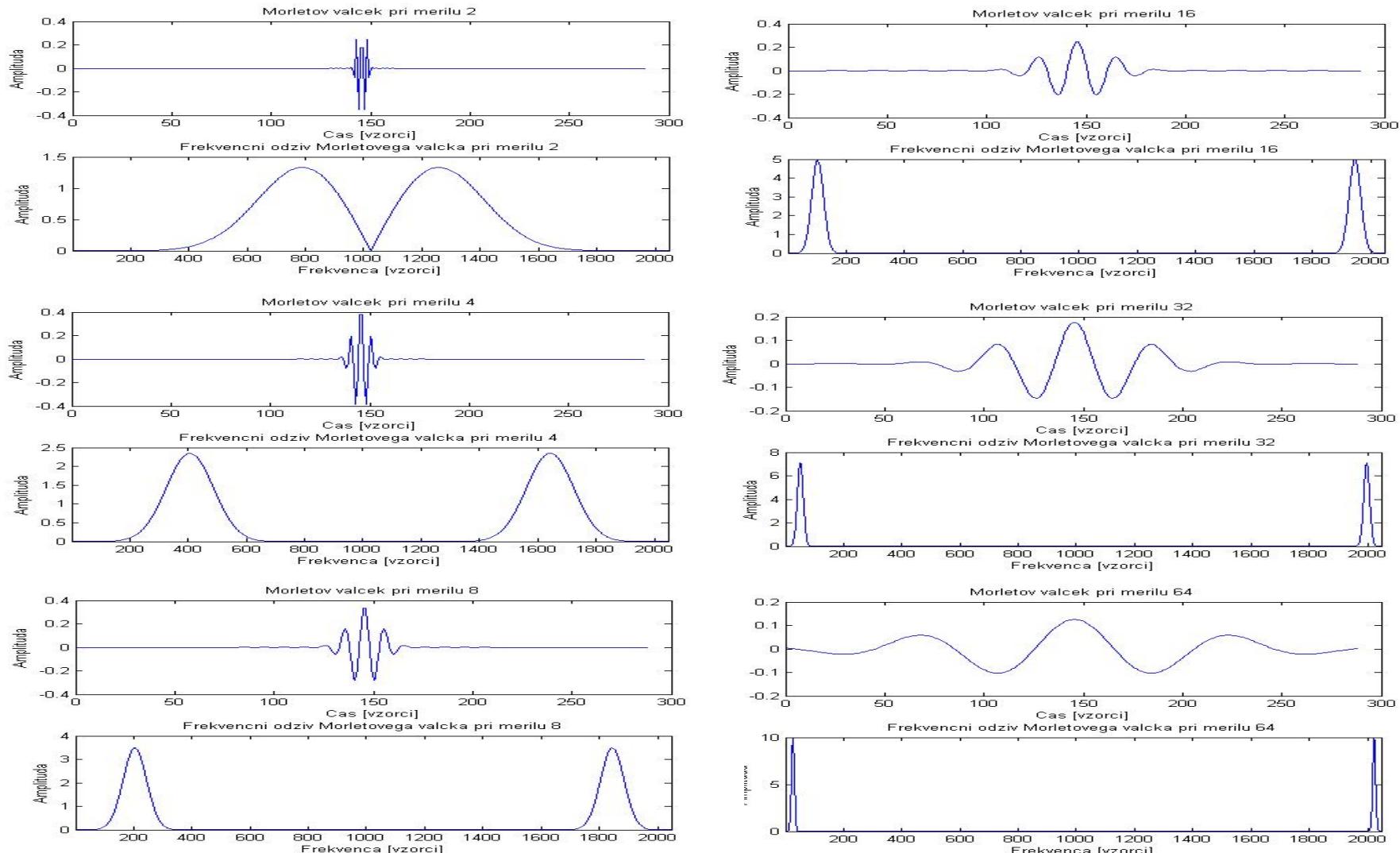
# FREKVENČNI ODZIV VALČKOV (2)

- Primer za valček v obliki mehiškega klobuka pri merilih  $a = 2, 3, 4, 5, 6$  in  $7$ :



# FREKVENČNI ODZIV VALČKOV (3)

- Primer za Morletov valček pri diadičnih merilih  $a = 2, 4, 8, 16, 32$  in  $64$ :



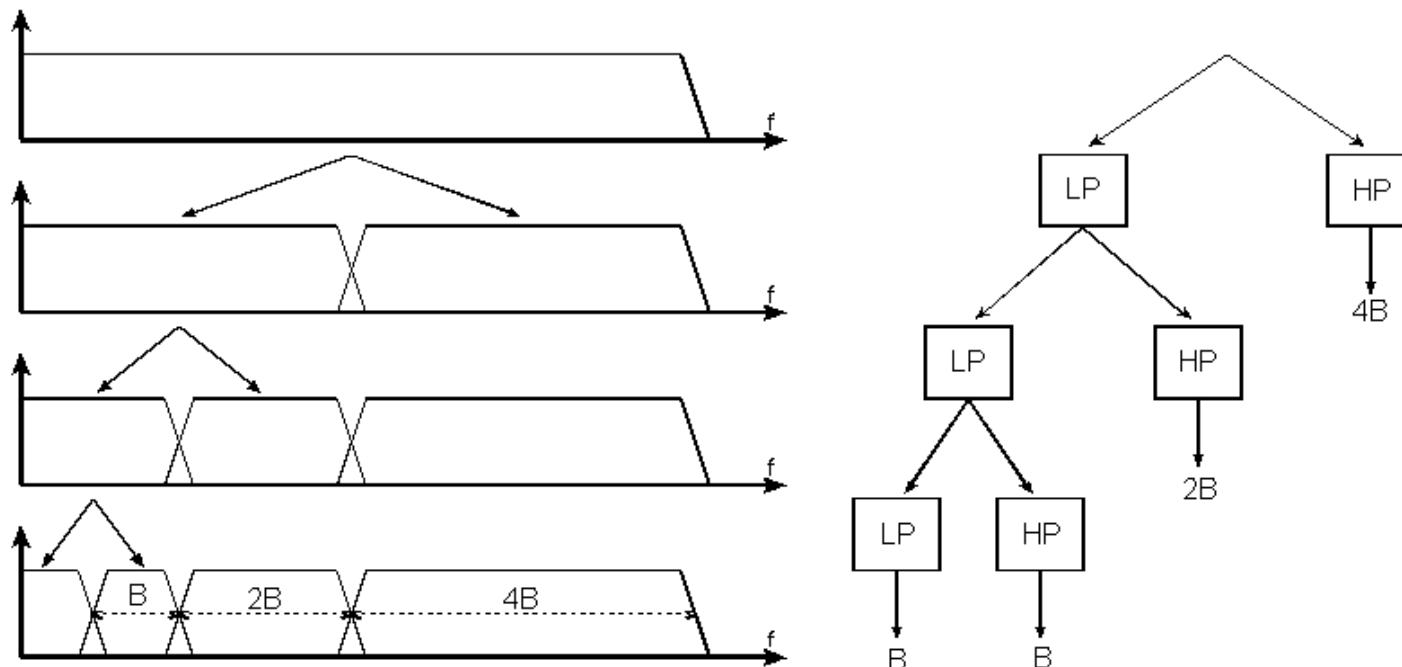
# VALČKI KOT FREKVENČNI FILTRI

- Frekvenčni odzivi valčkov ustrezano pasovno prepustnim sitom (razen Haara pri merilu 2, kjer tvori visoko sito).
- Središčna frekvenca in pasovna širina teh filtrov sta odvisni od tipa valčka in od merila.
- Merila v časovno-merilni predstavitevi so torej povezana s frekvenčnimi pasovi – čim višje merilo, tem nižja frekvenca.
- Nabor valčkov pri različnih merilih ustreza naboru pasovno prepustnih filtrov pri različnih središčnih frekvenkah.
- Valčna transformacija torej preseje iz obdelovanega signala komponente, ki imajo omejeno pasovno širino in so osredotočene okoli valčkove središčne frekvence.
- Pri zvezni valčni transformaciji se frekvenčna vsebina pri bližnjih merilih zelo prekriva, zato je ta transformacija zelo redundantna.
- Če bi uspeli središčne frekvence in pasovne širine valčkov nastaviti tako, da bi se naslednji pasovi frekvenčno dopolnjevali in se ne bi prekrivali, bi dobili ortogonalni nabor valčkov (*orthogonal wavelets*).
- Pri Morletovem valčku in diadičnih merilih (po oktavah) smo prišli do nabora filtrov, ki se komplementarno dopolnjujejo.

# **Diskretna valčna transformacija**

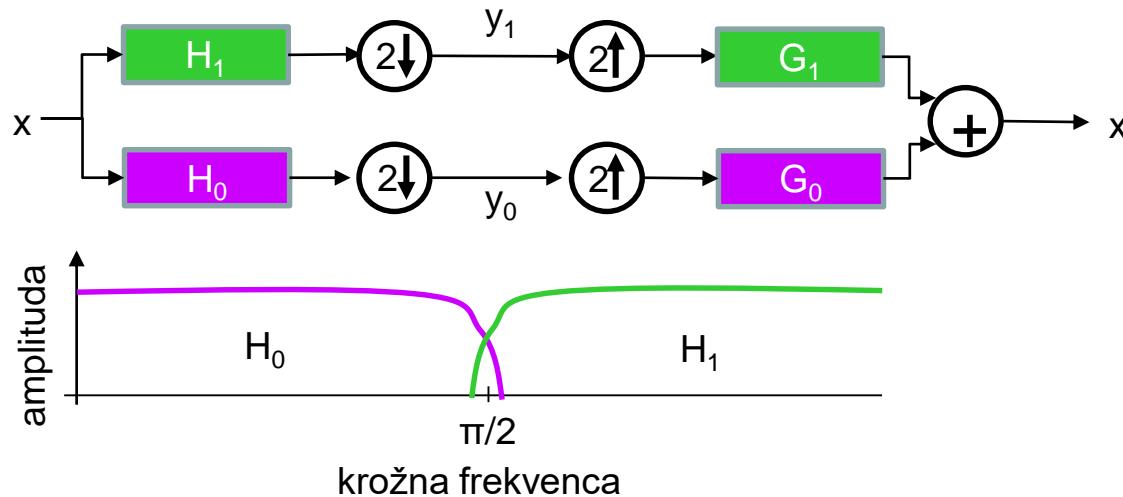
# PASOVNO KODIRANJE

- Signalno frekvenčno vsebino lahko razdelimo na frekvenčne pasove, s katerimi signalno vsebino kodiramo. Govorimo o **pasovnem kodiranju** (*subband coding*), imenovanem tudi **piramidna shema** (*pyramidal coding*).
- Pasovno kodiranje temelji na **bankah filtrov** (*filter banks*).
- Izhajamo iz kombinacije nizkega in visokega sita (LP, HP).
- Postopek teče iterativno, tako da izhod iz nizkega sita razcepimo na nizko- in visokofrekvenčno komponento.



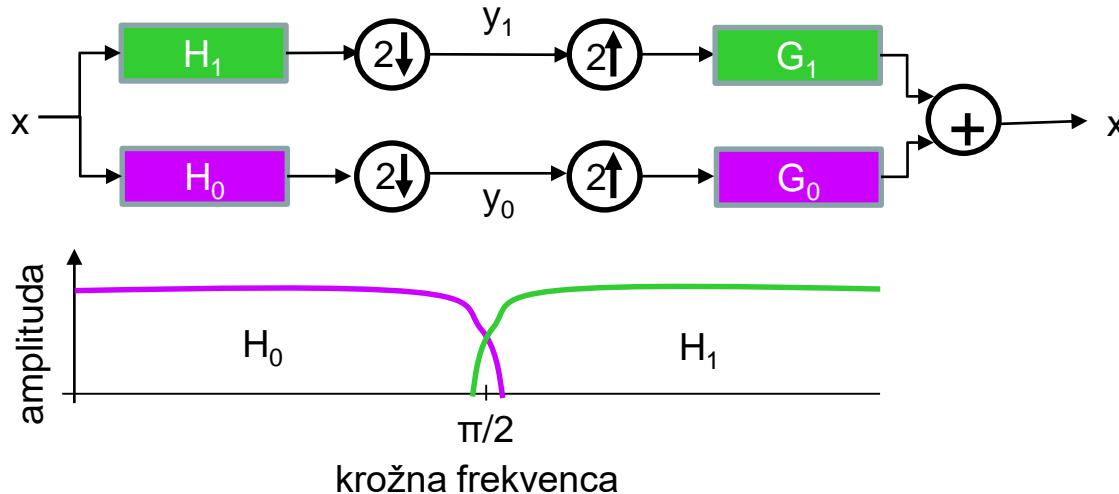
# Banke filtrov in pasovno kodiranje

- Z bankami filtrov lahko signal **analiziramo**.
- Razcepimo ga na frekvenčne podpasove. Iz njih lahko spet sestavimo osnovni signal – **sinteza**.
- Delimo signal diadično. To pomeni, da z nizkim in visokim sitom izdvojimo ravno dve frekvenčno komplementarni polovici signala.
- Če je vzorčevalna frekvenca signala  $f_{vz}$ , je za polovični frekvenčni vsebini dovolj polovična frekvenca vzorčenja  $f_{vz}/2$ .



- Simbol  $2\downarrow$  pomeni podvzorčenje (*down-sampling*),  $2\uparrow$  pa nadvzorčenje (*up-sampling*), tj. spremembo vzorčevalne frekvence.

# Banke filtrov in pasovno kodiranje (2)



- $H_0(\omega)$  je nizko,  $H_1(\omega)$  pa visoko sito. Njuni lomni frekvenci sta  $f_{vz}/4$ .
- Iz signala  $x(n)$  dobimo dve komplementarni komponenti  $y_0(n)$  in  $y_1(n)$ . Ustrezata izhodoma iz nizkega in visokega sita, iz katerih je vzet le vsak drugi vzorec (podvzorčenje).
- S filtromi  $G_0(\omega)$  in  $G_1(\omega)$  iz delnih signalov  $y_0(n)$  in  $y_1(n)$  nato rekonstruiramo prvotni signal  $x(n)$ .
- Za popolno rekonstrukcijo mora veljati:  $G_0(\omega)H_0(\omega)+G_1(\omega)H_1(\omega)=1$ .
- **Zakaj potrebujemo filtra  $G_0(\omega)$  in  $G_1(\omega)$ ? Ali ne bi mogli za rekonstrukcijo kar sešteeti  $y_0(n)$  in  $y_1(n)$ ?**

# Banke filtrov in pasovno kodiranje (3)

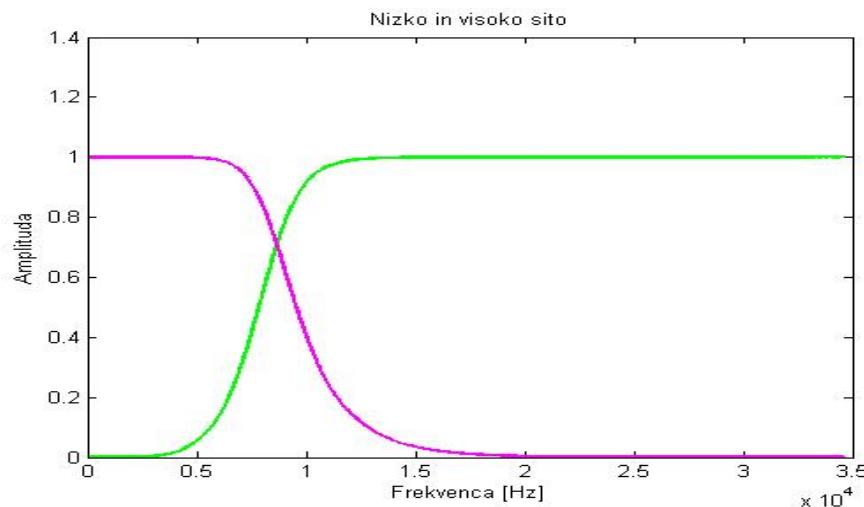
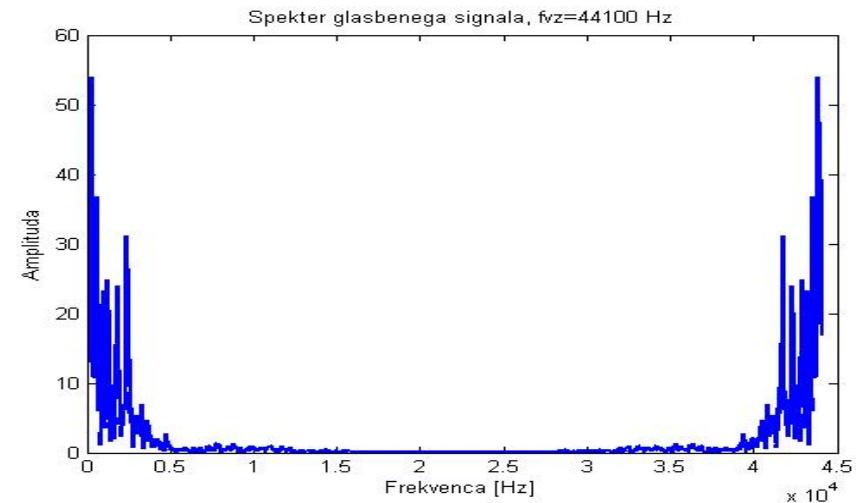
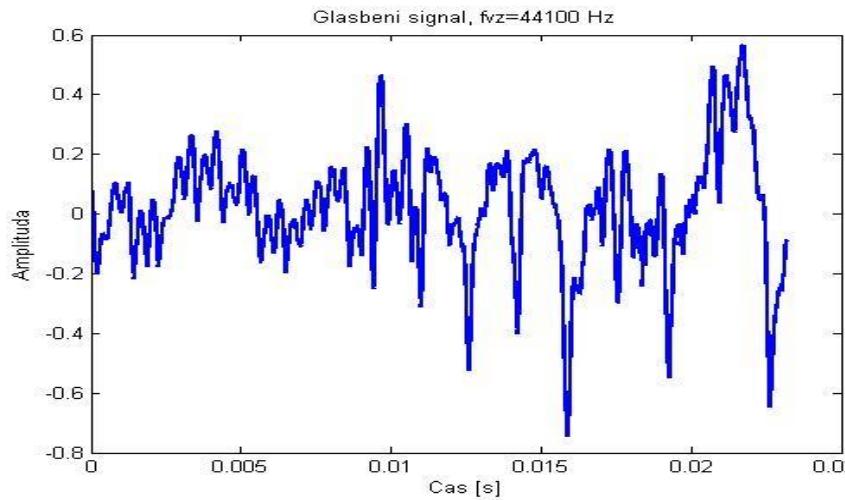
- Operacijo nadzorčenja ( $2\uparrow$ ) realiziramo tako, da med pare vzorcev vrinemo dodatne vzorce z vrednostjo 0.
- Iz  $y(n)$ ,  $n=0, \dots, N-1$ , dobimo zaporedje  $y_2(n)=[y(0), 0, y(1), 0, y(2), \dots, 0, y(N-1), 0]$ .
- Takšno zaporedje ima naslednjo frekvenčno transformiranko:

$$Y_2(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} y_2(n) W_{2N}^{nk} \xrightarrow{n=2r} \sum_{r=0}^{N-1} y_2(2r) W_{2N}^{2rk} = \\ \sum_{r=0}^{N-1} y(r) W_N^{rk}; k = 0, \dots, \boxed{2N-1}$$

- Nadvorčenje podvoji spekter signala  $y(n)$ , tako da se enak pojavi v območju nizkih ( $f < f_{vz}/4$ ) in drugič v območju višjih frekvenc ( $f > f_{vz}/4$ ).
- Zato moramo za nadzorčeno nizkofrekvenčno komponento  $y_0(n)$  uporabiti nizko sito, za nadzorčeno višefrekvenčno komponento  $y_1(n)$  pa visoko sito.
- Če bi imeli idealne filtre, ne bi moglo priti do spektralnega prekrivanja, zato bi za para analiznih in sinteznih filtrov veljalo:  $G_0(\omega) = H_0(\omega)$  in  $G_1(\omega) = H_1(\omega)$ .

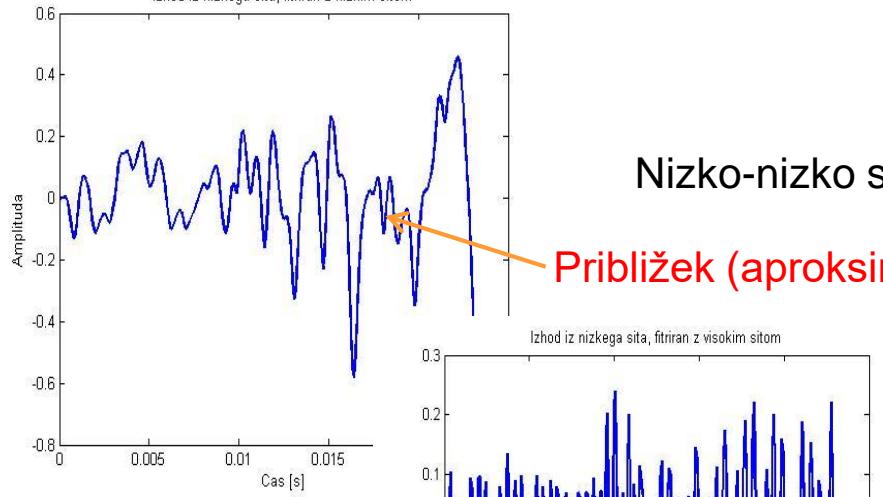
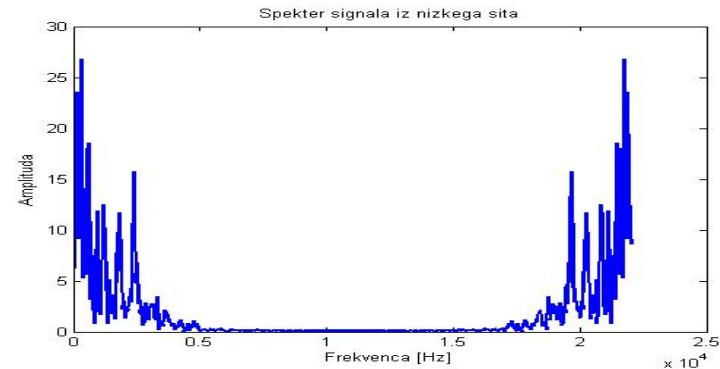
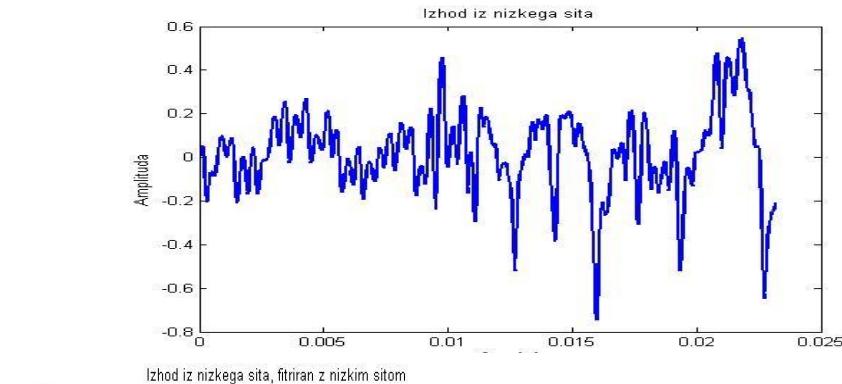
# Primer za pasovno kodiranje glasbenega signala

- Vzemimo del glasbenega signala, vzorčenega pri  $f_{vz} = 44100 \text{ Hz}$ .



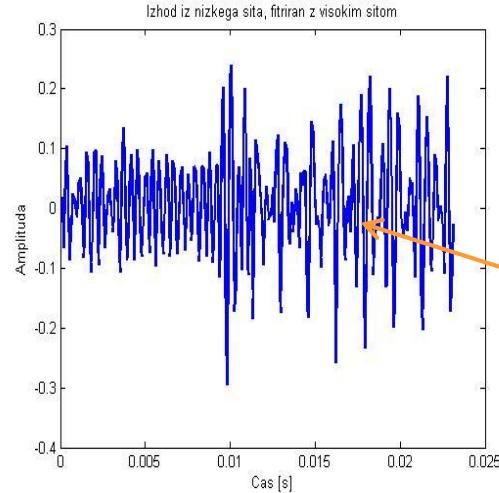
# Primer za pasovno kodiranje glasbenega signala (2)

- Izhod iz nizkega sita po prvem koraku analize (dekompozicije):



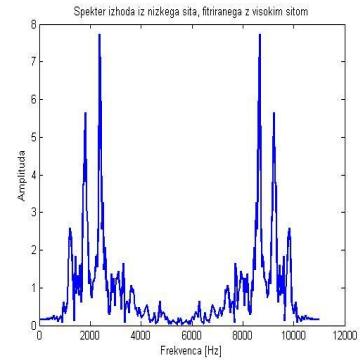
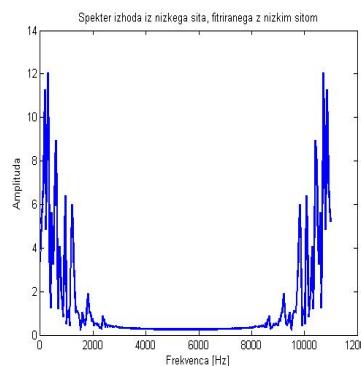
Nizko-nizko sito

Približek (aproksimacija)



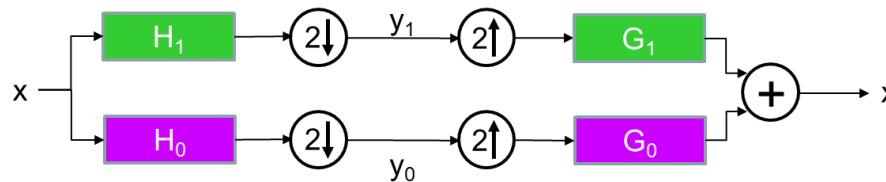
Nizko-visoko sito

Podrobnosti (detajli)



# NAČRTOVANJE FILTROV ZA PASOVNO KODIRANJE

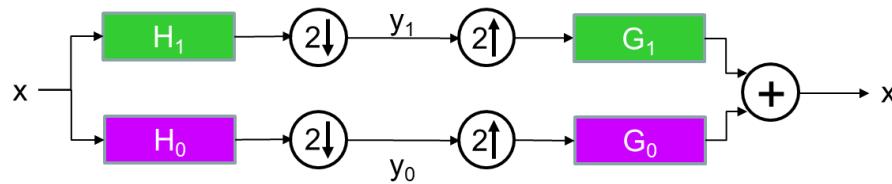
- Pasovno kodiranje izkazuje pomembno uporabno lastnost:
  - dekompozicija signala z nizkim in visokim sitom vodi k signalovim približku (*approximation*) in podrobnostim (*details*);
  - približek in podrobnosti imajo skupaj toliko vzorcev kot originalni signal;
  - približek vsebuje stisnjeno, delno okrnjeno vsebino originalnega signala.
- Ker nimamo idealnih filtrov, moramo pri signalni analizi in sintezi računati na spektralno prekrivanje.



- Nizkofrekvenčna komponenta  $y_0(n)$ , tj. približek, ima zaradi podvzorčenja vzorčevalno frekvenco  $f_{vz}/2$ . Podobno velja za višjefrekvenčno komponento  $y_1(n)$ , tj. podrobnosti.
- Za prve približke in podrobnosti je torej prva spektralna ponovitev osredotočena pri  $f_{vz}/2$ .
- K spektru signalne komponente  $y_0(n)$  prispevata izhodiščni spekter  $Y_0(\omega)$  in prva spektralna ponovitev  $Y_0(\omega - \pi f_{vz})$ .
- Velja še:  $Y_0(\omega) = H_0(\omega) X(\omega)$ .

# NAČRTOVANJE FILTROV ZA PASOVNO KODIRANJE (2)

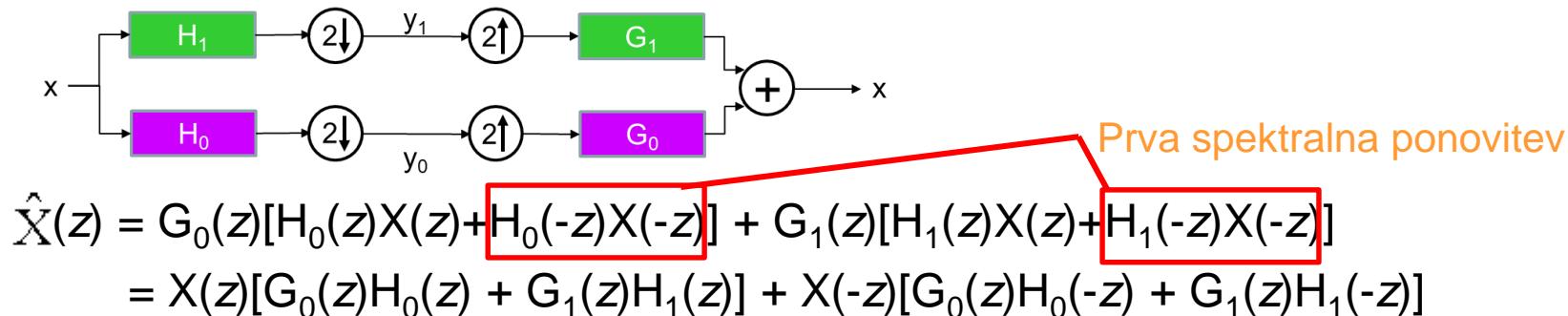
- Preselimo se v  $z$ -prostor! Namesto  $Y_0(\omega)$  lahko pišemo  $Y_0(z)$ , namesto  $Y_0(\omega - \pi f_{vz})$  pa  $Y_0(-z)$ :
  - slednje izhaja iz dejstva, da premik za polovico vzorčevalne frekvence pomeni obhod polovice enotinega kroga v  $z$ -ravnini, kar pa ravno spremeni  $z$  v  $-z$ .
- Iz analizno-sintezne sheme torej izhaja:



$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= G_0(z)[H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)] + G_1(z)[H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)] \\ &= X(z)[G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)] + X(-z)[G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)]\end{aligned}$$

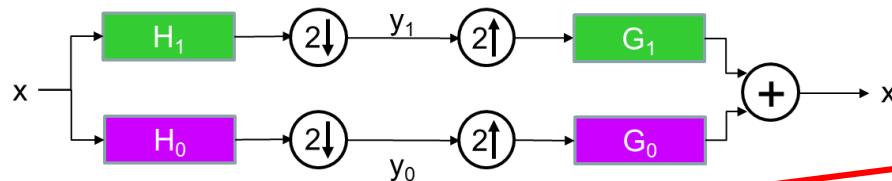
# NAČRTOVANJE FILTROV ZA PASOVNO KODIRANJE (2)

- Preselimo se v  $z$ -prostor! Namesto  $Y_0(\omega)$  lahko pišemo  $Y_0(z)$ , namesto  $Y_0(\omega - \pi f_{vz})$  pa  $Y_0(-z)$ :
  - slednje izhaja iz dejstva, da premik za polovico vzorčevalne frekvence pomeni obhod polovice enotinega kroga v  $z$ -ravnini, kar pa ravno spremeni  $z$  v  $-z$ .
- Iz analizno-sintezne sheme torej izhaja:



# NAČRTOVANJE FILTROV ZA PASOVNO KODIRANJE (2)

- Preselimo se v  $z$ -prostor! Namesto  $Y_0(\omega)$  lahko pišemo  $Y_0(z)$ , namesto  $Y_0(\omega - \pi f_{vz})$  pa  $Y_0(-z)$ :
  - slednje izhaja iz dejstva, da premik za polovico vzorčevalne frekvence pomeni obhod polovice enotinega kroga v  $z$ -ravnini, kar pa ravno spremeni  $z$  v  $-z$ .
- Iz analizno-sintezne sheme torej izhaja:



$$\begin{aligned}\hat{X}(z) &= G_0(z)[H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)] + G_1(z)[H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)] \\ &= X(z)[G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)] + X(-z)[G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)]\end{aligned}$$

Prva spektralna ponovitev

- Filtre želimo izvesti tako, da po zaporedni analizi in sintezi ne bodo povzročili spektralnega prekrivanja. To pomeni, da mora biti vsebina oklepaja pri  $X(-z)$  enaka 0:

$$G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z) = 0 \rightarrow \text{pogoj, ki preprečuje spektralno prekrivanje}$$

- Velja še:  $G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z) = 1 \rightarrow \text{pogoj za popolno rekonstrukcijo}$
- Visoko sito naj ima zrcalno podobo nizkega:  $H_1(z) = H_0(-z)$ , kar da zrcalne filtre z 90-stopinjskim premikom (*quadrature mirror filters*).

# NAČRTOVANJE FILTOV ZA PASOVNO KODIRANJE (3)

- Upoštevajmo pogoja za preprečevanje spektralnega prekrivanja in za popolno rekonstrukcijo, hkrati pa še zrcalne filtre:

$$G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z) = 0 \rightarrow \text{pogoj, ki preprečuje spektralno prekrivanje}$$

$$G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z) = 1 \rightarrow \text{pogoj za popolno rekonstrukcijo}$$

$$H_1(z) = H_0(-z) \rightarrow \text{zrcalni filtri z 90-stopinjskim premikom } (f_{vz}/4)$$

- Rešitev:

$$G_0(z) = H_0(z)$$

$$G_1(z) = -H_0(-z) = -H_1(z)$$

$$H_0^2(z) - H_0^2(-z) = 1$$

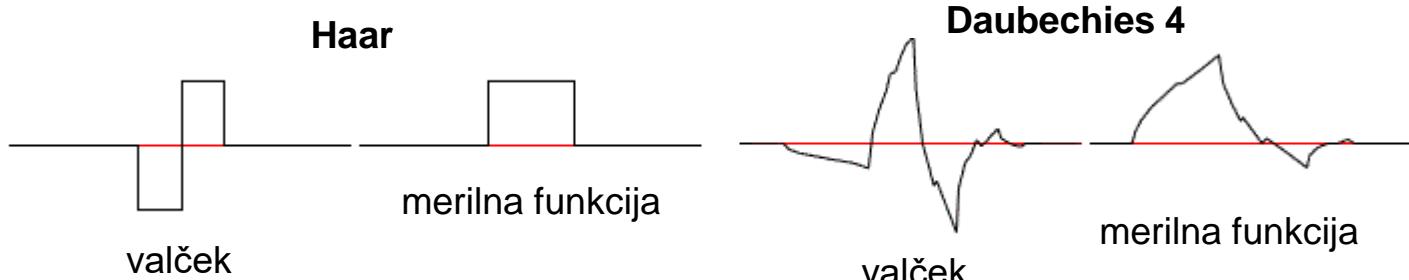
- Načrtovanje filtrov za pasovno kodiranje začnemo s konstrukcijo nizkega sita  $H_0(z)$ , pri čemer želimo, da je izpolnjen pogoj za popolno rekonstrukcijo  $H_0^2(z) - H_0^2(-z) = 1$ .
- Iz  $H_0(z)$  določimo vse ostale filtre, tj.  $H_1(z)$  ter  $G_0(z)$  in  $G_1(z)$ .
- Dosedanja izpeljava temelji na banki z dvema filtrom (LP in HP), v splošnem pa seveda lahko uvedemo banko s poljubnim številom filtrov. Če jih je  $M$ , potem tudi podvzorčimo in nadvzorčimo s faktorjem  $M$ .

# VALČKI IN BANKE FILTROV

- Banke filtrov, uporabljene pri pasovnem kodiranju, spominjajo na nabor filtrskih lastnosti pri valčkih.
- Obstaja pa bistvena razlika: **valčki ne določajo nizkega sita**, ki je osnova za pasovno kodiranje.
- Uporabimo **materinski valček** kot sito za višje frekvence, za nizke frekvence pa uvedimo novo funkcijo, imenovano **merilna funkcija (*scaling function*)**.
- Merilno funkcijo, ki ji pravijo tudi **gladilna funkcija (*smoothing function*)**, tvorimo torej s pomočjo nizkega sita iz banke filtrov.
- Valčki ustrezači višjefrekvenčnim sitom in se tvorijo s pomočjo preostalih sit iz banke filtrov.
- Tipična je banka filtrov z dvema primerkoma, tj. z nizkim in visokim sitom.
- Med merilno funkcijo in valčki obstaja tesna zveza, kakor smo jo pokazali že pri pasovnem kodiranju:  $h_1(L-1-n) = (-1)^n h_0(n)$ , pri čemer je  $h_1$  visoko in  $h_0$  nizko sito,  $L$  pa je število koeficientov v filtrihi.
- Predlaganih je bilo več tipov valčkov, ki temeljijo na bankah filtrov. Znani so Daubechiesjni valčki (filtri), ki imajo 4 ali več koeficientov (avtorica Ingrid Daubechies).

# DISKRETNA VALČNA TRANSFORMACIJA

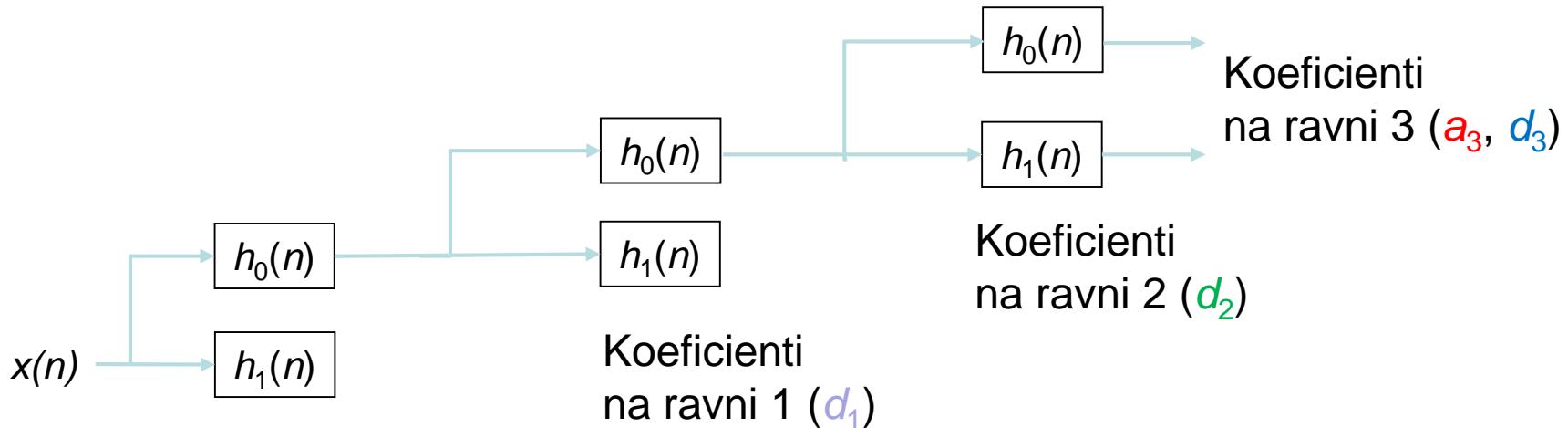
- Uporaba merilne funkcije in valčkov, torej koncepta banke filtrov, vodi k diskretni valčni transformaciji (*discrete wavelet transform – DWT*).
- Primera Haarovih in Daubechiesovih valčkov in merilnih funkcij:



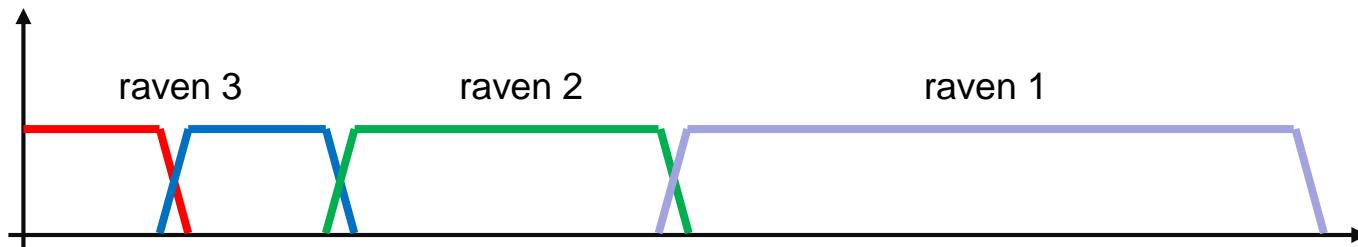
- Diskretna valčna transformacija izhaja iz piramidne sheme, ki nastane z iterativno uporabo nizkega in visokega sita, tj. merilne funkcije in valčka.
- Filtriranje prepolovi frekvenčno vsebino, tako da postane vsak drugi vzorec odveč.
- S podvzorčenjem nato te vzorce izločimo. Časovno ločljivost s tem znižamo, frekvenčno ohranimo. Hkrati dvignemo merilo za faktor 2.
- Po prvem filtriranju pridemo do t. i. **valčnih koeficientov na ravni 1 (DWT level 1 coefficients)** – teh je  $N/2$ , če je signal dolg  $N$  vzorcev.
- Po drugem filtriranju dobimo  $N/4$  valčnih koeficientov na ravni 2, po tretjem  $N/8$  koeficientov na ravni 3 itd.

# DISKRETNÁ VALČNA TRANSFORMACIJA (2)

- Piramidno shemo ponazorimo še grafično:



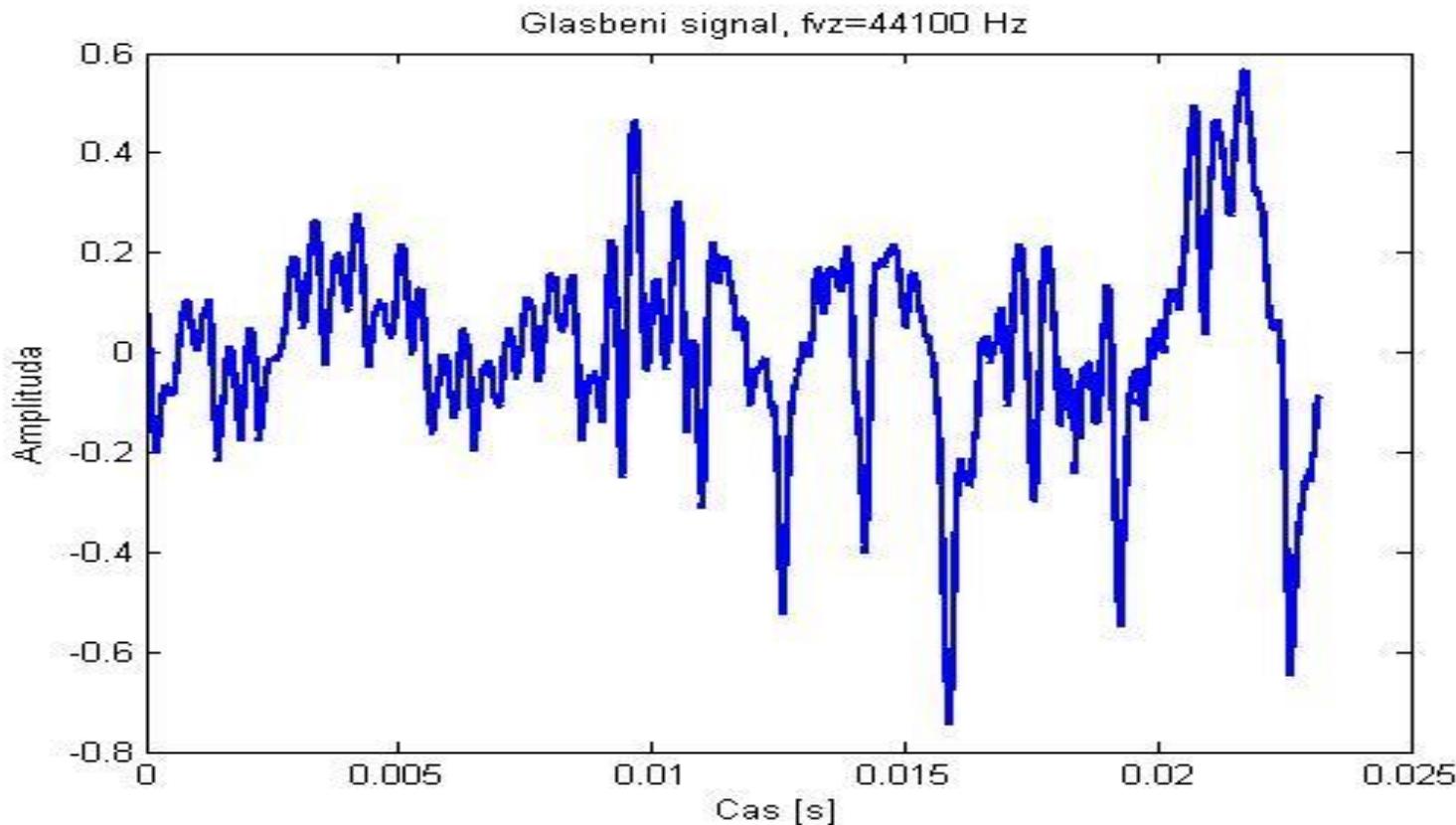
- Frekvenčni obseg posameznih ravni:



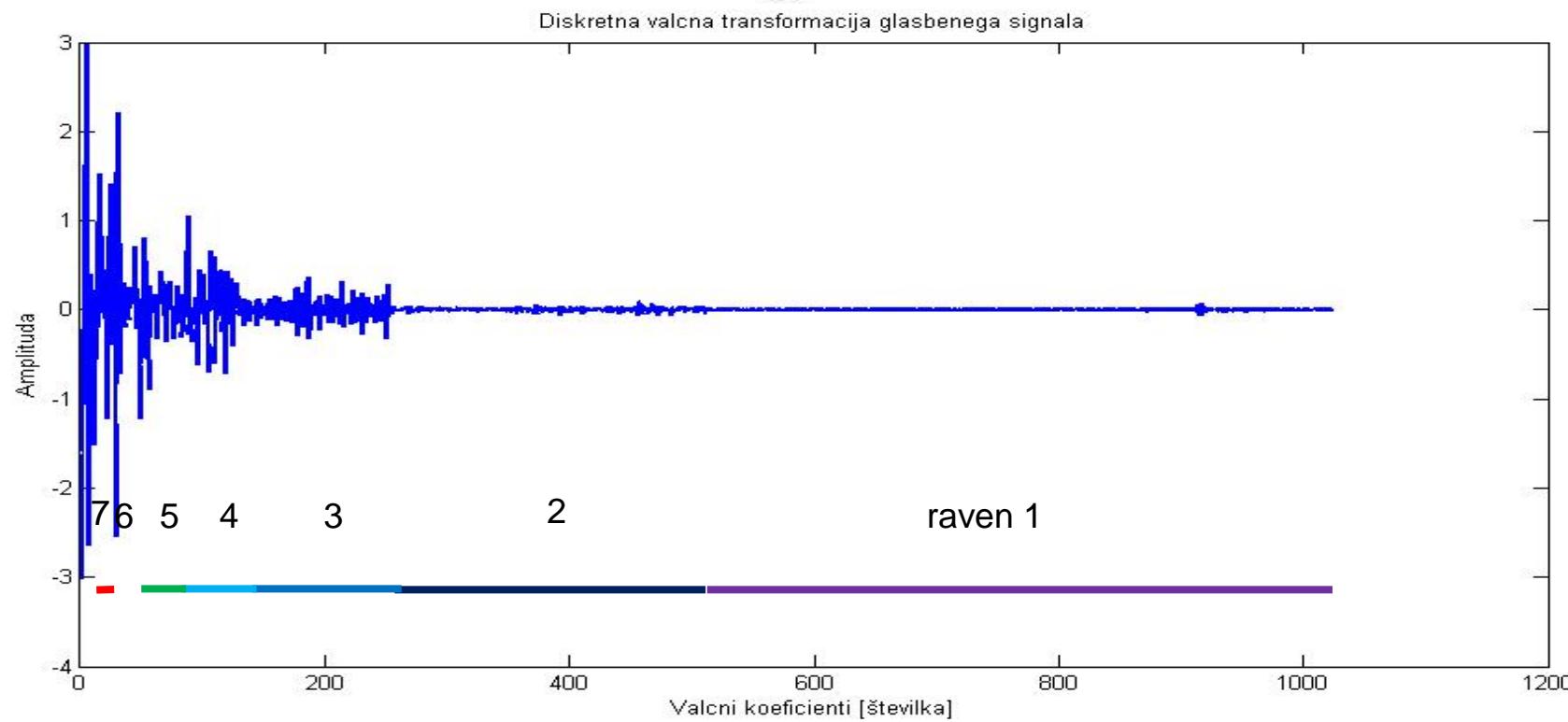
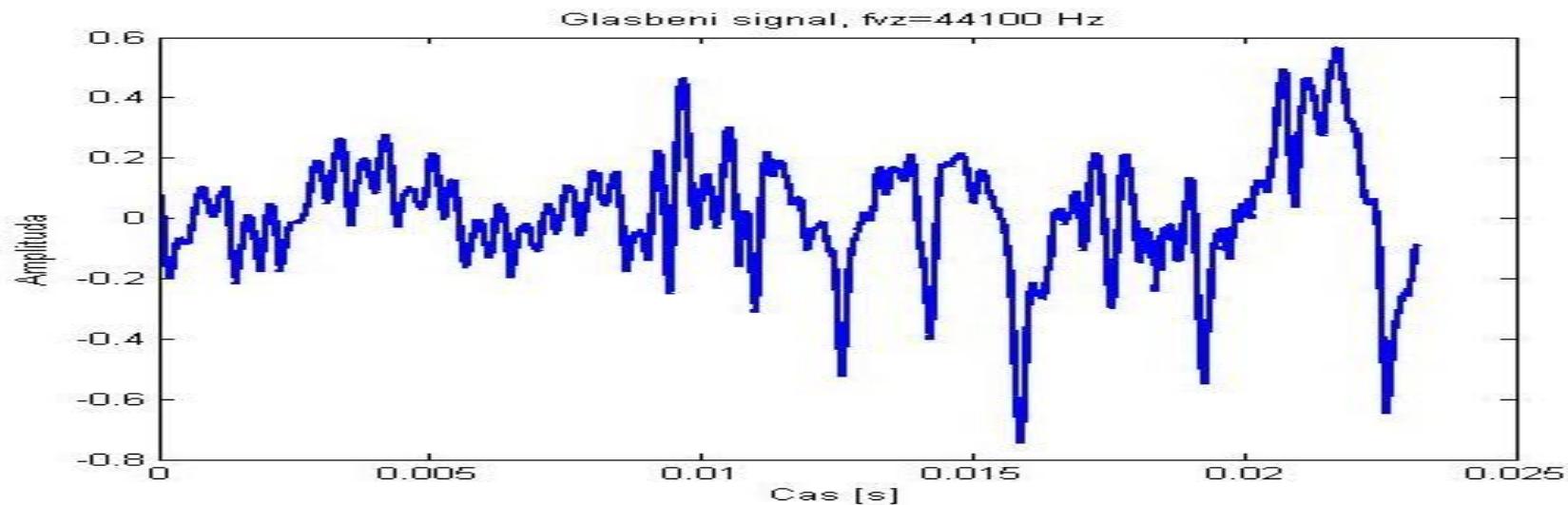
- Koeficienti na ravni 1 pomenijo v zgornjem primeru največje podrobnosti ( $d_1$ ), na ravni 2 naslednje podrobnosti ( $d_2$ ) in na ravni tri najmanjše podrobnosti ( $d_3$ ) in približek ( $a_3$ ).

# Primer diskretne valčne transformacije za glasbeni signal

- Glasbeni signal  $x(n)$  v dolžini  $N=1024$  vzorcev
- Dobimo 10 ravni valčnih koeficientov, začenši z enim koeficientom na ravni 10, dvema na ravni 9, štirimi na ravni 8, ..., 256 na ravni 2 in 512 na ravni 1.
- Izračun za diskretno valčno transformacijo z matlabovo funkcijo DWT:  
[pričlenek, podrobnosti] = DWT(vh\_signal, 'ime-filtra')



# Primer diskretne valčne transformacije za glasbeni signal

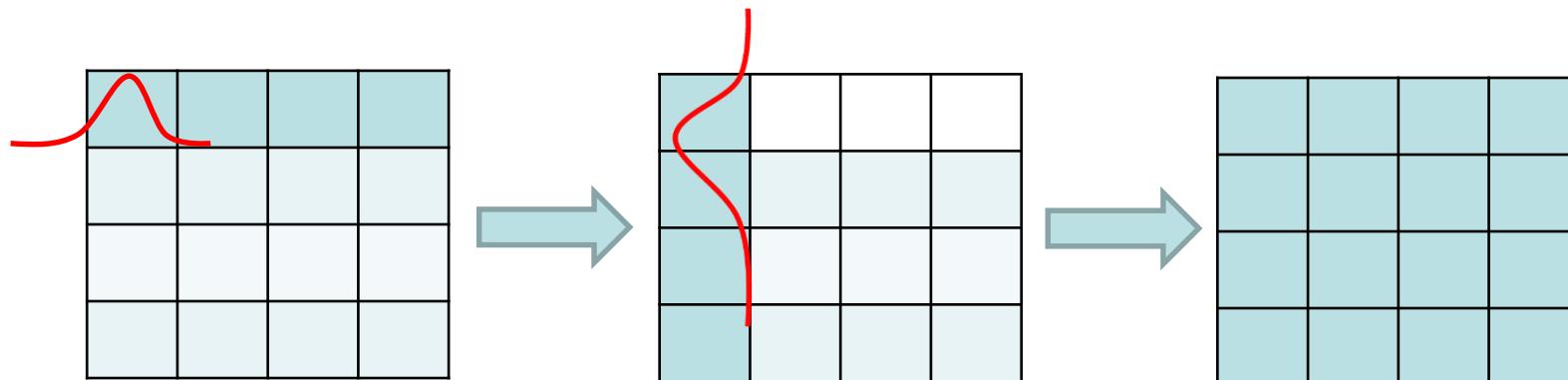


# DISKRETNA 2D VALČNA TRANSFORMACIJA

- Večdimenzionalna valčna transformacija potrebuje večdimenzionalne valčke.
- Diskretna 2D valčna transformacija ima velik pomen za obdelavo slik.
- Izračunamo jo z 2D materinskim valčkom pri različnih prostorskih premikih ( $t_1, t_2$ ) in merilih (raztegih valčka,  $a_1$  in  $a_2$ ):

$$X_{\text{VT}}(t_1, a_1, t_2, a_2) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m, n) \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \Psi\left(\frac{m-t_1}{a_1}, \frac{n-t_2}{a_2}\right)$$

- V praksi poteka izračun običajno z 1D merilno funkcijo in valčkom oz. nizkim in visokim sitom.
- Najprej obdelamo sliko po vrsticah pri merilu  $a_1$ , nato pa dobljeno filtrirano sliko še po stolpcih pri merilu  $a_2$ .



# DISKRETNA 2D VALČNA TRANSFORMACIJA (2)

- Diskretna 2D valčna transformacija temelji na paru nizkega in visokega sita, ki razdelita sliko v prvi iteraciji na 4 podslike:
  - približek, ki vsebuje nizke frekvence iz obeh dimenzijskih slike - po vrsticah in stolpcih (LL),
  - podrobnosti (majhne spremembe slike) v horizontalni smeri z visokofrekvenčnim filtriranjem po vrsticah in nizkofrekvenčnim po stolpcih (HL),
  - podrobnosti v vertikalni smeri z nizkofrekvenčnim filtriranjem po vrsticah in visokofrekvenčnim po stolpcih (LH) ter
  - podrobnosti v diagonalni smeri z visokofrekvenčnim filtriranjem po vrsticah in stolpcih (HH).
- Vsaka nadaljnja iteracija analizira približek iz prejšnje iteracije in ga spet razdeli na 4 podslike.
- Velikost približka slike je po prvi iteraciji  $\frac{1}{4}$  originalne slike, po drugi iteraciji  $\frac{1}{16}$  originalne slike, po tretji iteraciji  $\frac{1}{64}$  originalne slike itd.
- Vsak približek lahko imamo za stisnjeno različico originalne slike.

# Primer diskretne 2D valčne transformacije za slike

- Sliko Lenne analizirajmo z valčki Daubechies-4:
  - označka L pomeni nizko, H pa visoko sito;
  - če je zapisana na prvem mestu, pomeni filtriranje po vrsticah, če na drugem, pomeni filtriranje po stolpcih;
  - indeks 1 označuje prvo iteracijo (raven), indeks 2 drugo.



LL1,LL2

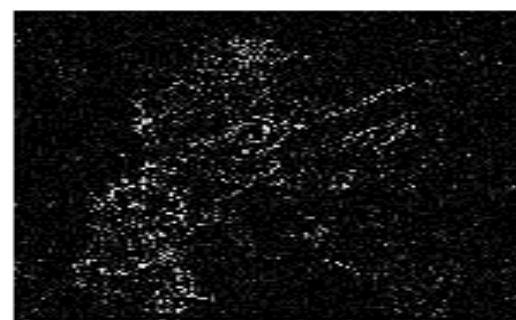


LL1,HL2



LL1,LH2

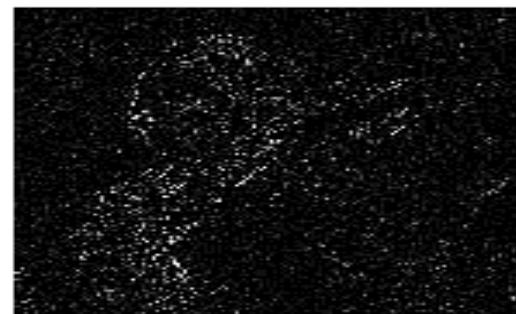
LL1



HL1



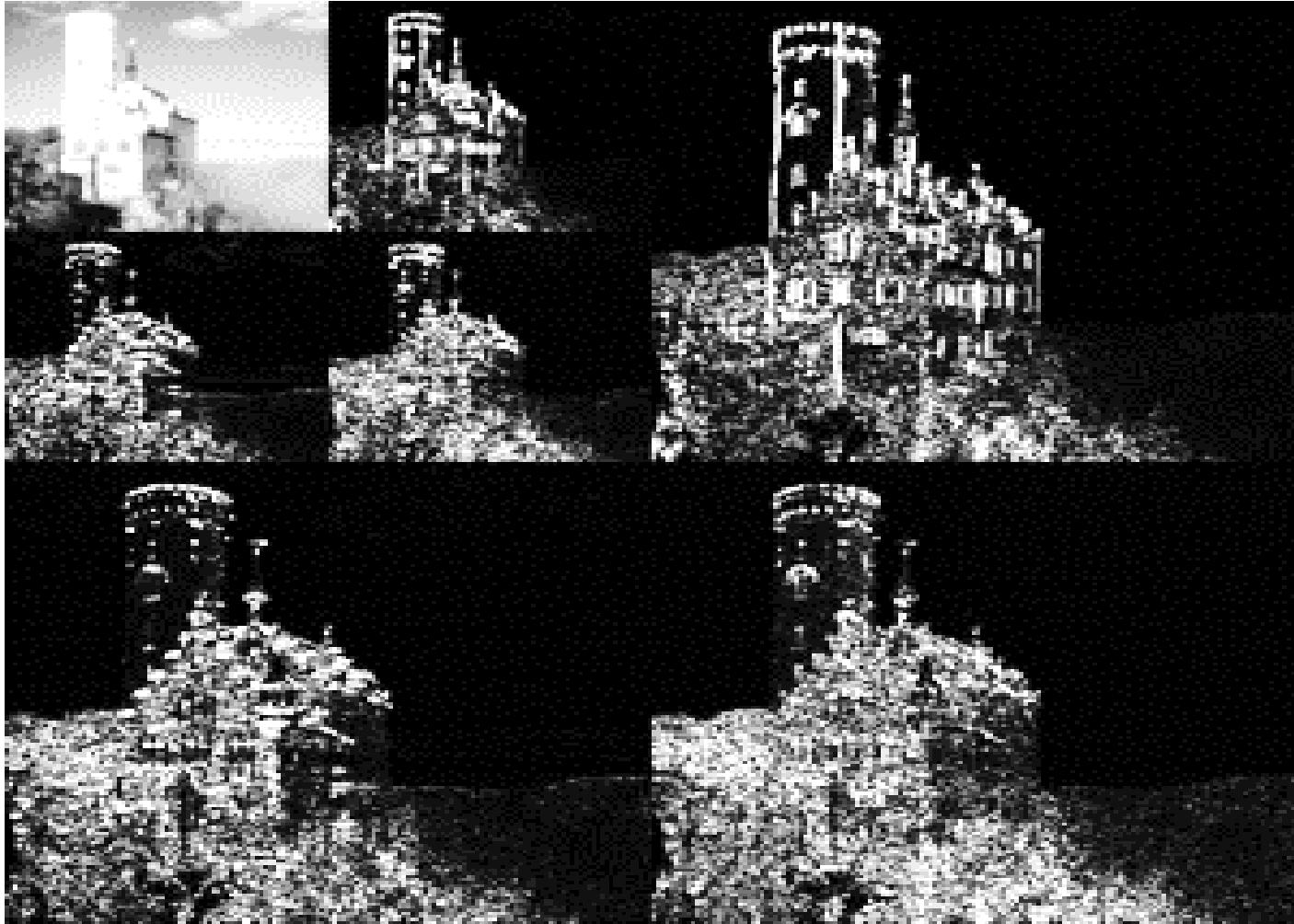
LH1



HH1

## Primer diskretne 2D valčne transformacije za slike (2)

- Še en primer diskretne 2D valčne transformacije, ki je osnova za kompresijo slik po standardu JPEG2000 (vir: Wikipedia):



[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jpeg2000\\_2-level\\_wavelet\\_transform-lichtenstein.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jpeg2000_2-level_wavelet_transform-lichtenstein.png)

# UPORABA VALČNE TRANSFORMACIJE

- Valčna transformacija ima zaradi večločljivostnih lastnosti širok spekter uporabe pri analizi signalov in slik na mnogih področjih (medicina, radarsko zaznavanje, komunikacije itd.).
- Zvezno valčno transformacijsko računamo računalniško z diskretnimi signali, vendar pri poljubnih merilih in premikih.
- Diskretno valčno transformacijsko računamo samo pri neredundatnih merilih in signalnih premikih.
- Omogoča, da izločimo časovno-merilna območja, kjer je skoncentrirana večina signalne ali slikovne energije (recimo, odstranimo šum in motnje).
- Zato je standardizirana za stiskanje slik (JPEG2000).
- Pri tem je uspešnejša od kosinusne (realne Fourierove) transformacije (JPEG, MP3), saj ne deluje paketno in pri stiskanju bolje ohranja ostre prehode (recimo robeve na slikah).
- Formula za dekompresijo slik:

$$x(m, n) = \sum_{t_1} \sum_{a_1} \sum_{t_2} \sum_{a_2} X_{\text{VT}}(t_1, a_1, t_2, a_2) \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \Psi^{-1} \left( \frac{m - t_1}{a_1}, \frac{n - t_2}{a_2} \right)$$

# **Časovno-frekvenčna predstavitev**

# SPEKTROGRAM $\Leftrightarrow$ AVTOKORELACIJA SIGNALA

- Poglejmo, na kakšen način spektrogram  $|\mathbf{X}(m,k)|^2$  vključuje signal  $x(n)$ ; okno  $w(n)$  naj bo dolgo  $N$  vzorcev:

$$|\mathbf{X}(m,k)|^2 = \mathbf{X}(m,k) \cdot \mathbf{X}^*(m,k), \quad \forall m, k$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}(m,k)|^2 &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} x(n_1) w(n_1 - m) e^{-j \frac{2\pi}{N} n_1 k} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x^*(n_2) w^*(n_2 - m) e^{j \frac{2\pi}{N} n_2 k} \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1) x^*(n_2) w(n_1 - m) w^*(n_2 - m) e^{-j \frac{2\pi}{N} (n_1 - n_2) k} \end{aligned}$$

pri čemer oznaka \* pomeni konjugirano vrednost.

- Uvedimo substitucijo:  $l = n_1 - n_2$ ; nova spremenljivka  $l$  se giblje med  $-\infty$  in  $+\infty$ :

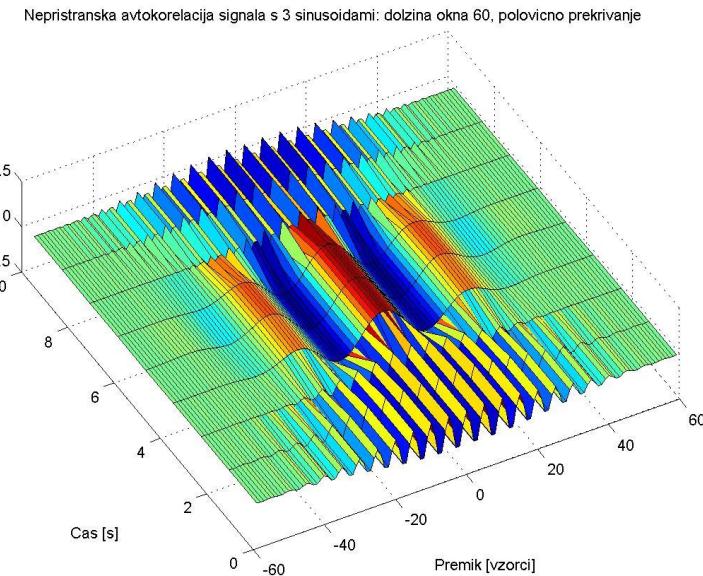
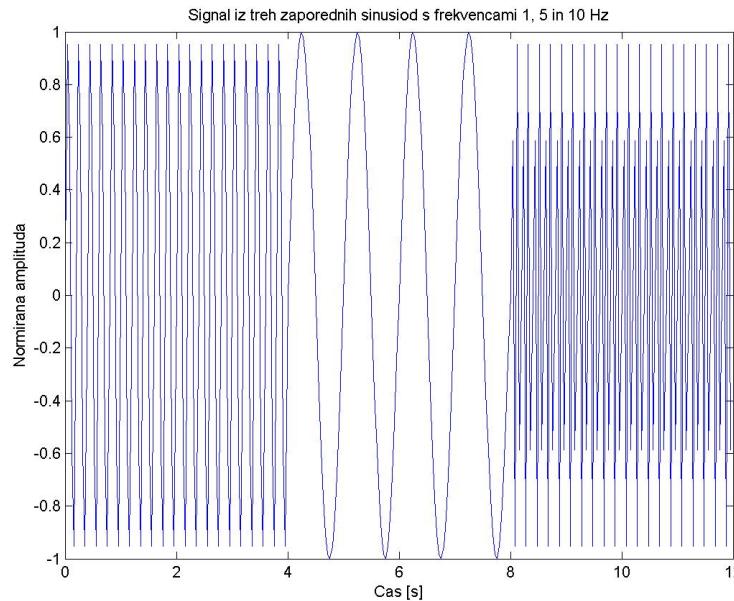
$$|\mathbf{X}(m,k)|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_2 + l) x^*(n_2) \right] w(n_2 + l - m) w^*(n_2 - m) e^{-j \frac{2\pi}{N} lk}$$

- Izraz  $\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_2 + l) x^*(n_2)$  imenujemo **avtokorelacijska funkcija** in ga za realne signale zapišemo kot:

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x(n+l)$$

# Primer avtokorelacijske funkcije

- Vzemimo signal  $x(n)$ :  $\sin(10\pi n/25)$ ,  $n=0,\dots,99$ ;  $\sin(2\pi n/25)$ ,  $n=100,\dots,199$ ;  $\sin(20\pi n/25)$ ,  $n=200,\dots,299$
- S Hammingovim oknom dolžine 60 vzorcev in polovičnim prekrivanjem izrežimo signalne odseke in zanje izračunajmo avtokorelacijsko funkcijo:



- Avtokorelacija poudari podobne oblike v odsekih signala, ko se ti pri računanju prekrijejo. Iz periodičnih signalov izloči obliko periodičnega pojava.
- Korelacijo in avtokorelacijo računamo **pristransko (biased)**, če izračunane vrednosti delimo z dolžino osnovnega signala (okna), in **nepritransko (unbiased)**, če izračunane vrednosti delimo s številom prekrivajočih se signalnih vzorcev, različnih od 0.

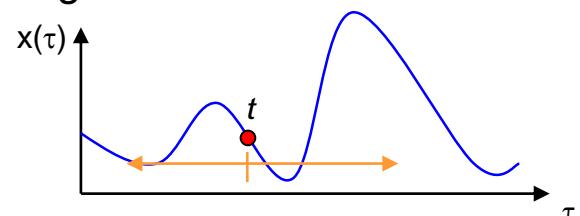
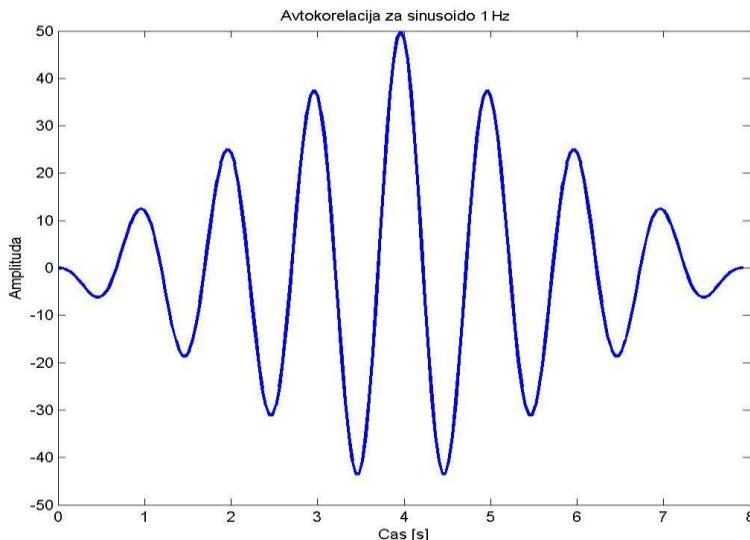
# AVTOKORELACIJA IN TRENUTNA AVTOKORELACIJA

- Avtokorelacija: signal koreliramo (primerjamo) sam s seboj pri različnih premikih.
  - **Trenutna avtokorelacija** (*instantaneous autocorrelation*): za izbrano časovno točko koreliramo odsek signala pred to točko z odsekom signala za to točko.
  - Definicija trenutne avtokorelacije:  $x(\tau)$  

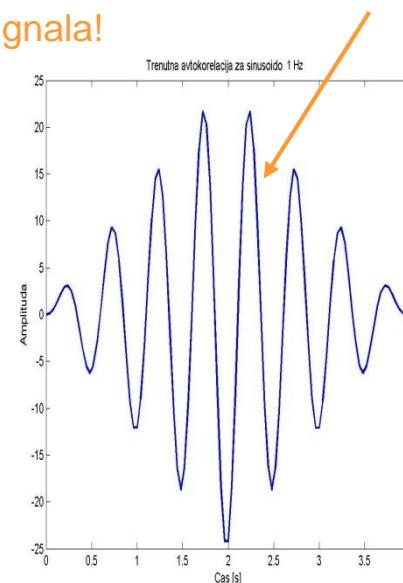
$$r_{xx}(t, \tau) = x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2}) \quad \text{zvezna}$$

$$r_{xx}(n,m) = x(n+m)x^*(n-m) \quad \text{diskretna}$$

- Primer:  $\sin(2\pi n/25)$ ,  $n=0, \dots, 99$  (1 Hz)



Funkcija trenutne diskretne avtokorelacijske niha z dvakratno frekvenco osnovnega signala!



# WIGNERJEVA PORAZDELITEV

- Eugen P. Wigner je v 30-ih letih prejšnjega stoletja uvedel transformacijo, s katero je prikazoval gostoto energije v kvantni mehaniki:

$$X_w(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- Wigner je prikazu rekel **porazdelitev** (*distribution*), zato ima še danes takšno (napačno) ime. Imenujemo pa jo lahko tudi **predstavitev** (*representation*).
- Govorimo o **časovno-frekvenčni predstavitev** (*time-frequency representation*).
- Primer izračuna** za kompleksno potenco s frekvenco  $g$ ;  $s(t)=e^{j2\pi gt}=\cos(2\pi gt)+jsin(2\pi gt)$ :

$$\begin{aligned} S_w(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi g(t+\frac{\tau}{2})} e^{-j2\pi g(t-\frac{\tau}{2})} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-g)\tau} d\tau = \delta(f-g) \end{aligned}$$

kar pomeni Diracove impulze pri vseh možnih časih in pri frekvenci  $f=g$ .

- Iz tega primera vidimo, zakaj je Wigner uporabil trenutno avtokorelacijo pri razmiku  $\tau/2$  (in ne  $\tau$ ) za množeni repliki signala. Na ta način se je izognil podvojitvi frekvence, ki smo jo opazili pri uporabi diskretne avtokorelacijske funkcije.

# WIGNER-VILLEOVA PORAZDELITEV

- Jean Ville je leta 1948 objavil razširitev Wignerjeve porazdelitve, tako da jo je diskretiziral in priredil za uporabo v digitalnih računalnikih.
- Pri diskretnem času replik signala ne moremo premikati drugače kot po celoštevilskih indeksih vzorcev. Zato časovno-frekvenčna analiza prikaže dvakrat previsoke frekvence.
- Pojav podvajanja frekvenc je značilen za **kvadratne predstavitve** (*quadratic representation*) z diskretnimi signali .
- Diskretna Wigner-Villeova porazdelitev se izračuna kot:

$$X_{WV} \left( \frac{n}{f_{vz}}, f \right) = \frac{2}{f_{vz}} \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}-1} x(n+m) x^*(n-m) e^{-j4\pi f \frac{m}{f_{vz}}}$$

pri čemer:

- $N$  ustreza številu vzorcev v transformiranem signalu  $x(n)$ ;
- $f_{vz}$  pomeni vzorčevalno frekvenco, ki jo dodamo zato, da ustvarimo povezavo med indeksi vzorcev in časom;
- eksponent pri kompleksni potenci vsebuje dodatno množenje z 2, ker kvadratna predstavitev v osnovi naredi podvojene frekvence, želimo pa, da jih po opravljeni transformaciji vidimo kot enojne;
- množilni faktor 2 za celoten izraz je potreben zato, ker zvezno računanje Wignerjeve porazdelitve jemlje vrednosti dvakrat bolj gosto kot diskretna transformacija.

# WIGNER-VILLEOVA PORAZDELITEV (2)

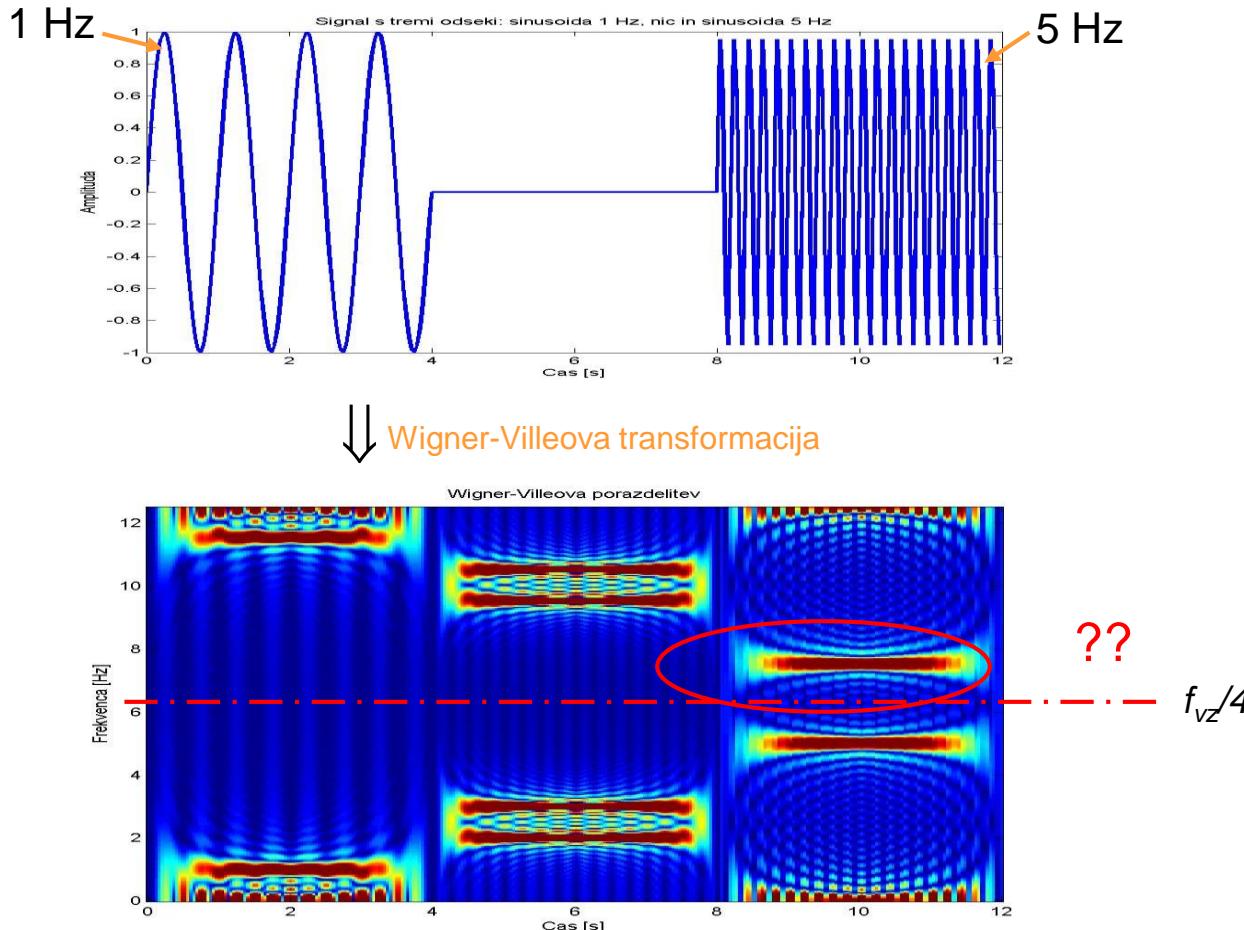
- Diskretno obliko Wigner-Villeove porazdelitve lahko izpeljemo tudi tako, da si pri njenem računanju pomagamo neposredno z diskretno Fourierovo transformacijo.
- Vzamemo signalni odsek  $x(n)$  v dolžini  $N$  in privzamemo, da “interpoliramo” vzorce na polovicah vzorčevalnih intervalov po naslednjem pravilu:  
$$x_1(2n) = x_1(2n+1) = x(n).$$
- Dobimo signal  $x_1(n)$ ,  $n=0, \dots, 2N-1$ .
- Wigner-Villeovo porazdelitev izračunamo kot:

$$X_{WV}(n, k) = \frac{1}{f_{vz}} \sum_{m=-N+1}^{N-1} x_1(2n+m)x_1^*(2n-m)e^{-j\frac{2\pi}{2N}mk}$$

- V času se ustavljamo pri sodih indeksih v signalu  $x_1(n)$  in izračunamo FFT trenutne korelacijske funkcije za celoten signal  $x_1(n)$ ,  $n=0, \dots, 2N-1$ .
- Dobimo časovno-frekvenčno predstavitev z dimenzijami  $N \times 2N$ .
- FFT moramo izračunati  $N$ -krat, zato je računska zahtevnost Wigner-Villeove transformacije proporcionalna  $N^2 \log_2 N$ .
- Časovna ločljivost takšnega izračuna Wigner-Villeove predstavitev je  $1/f_{vz}$ .
- Ustrezna frekvenčna ločljivost je  $f_{vz}/(2N)$ .
- Ena glavnih prednosti Wigner-Villeove predstavitev sta hkrati visoka časovna in frekvenčna ločljivost (STFT tega ni mogel zagotoviti).

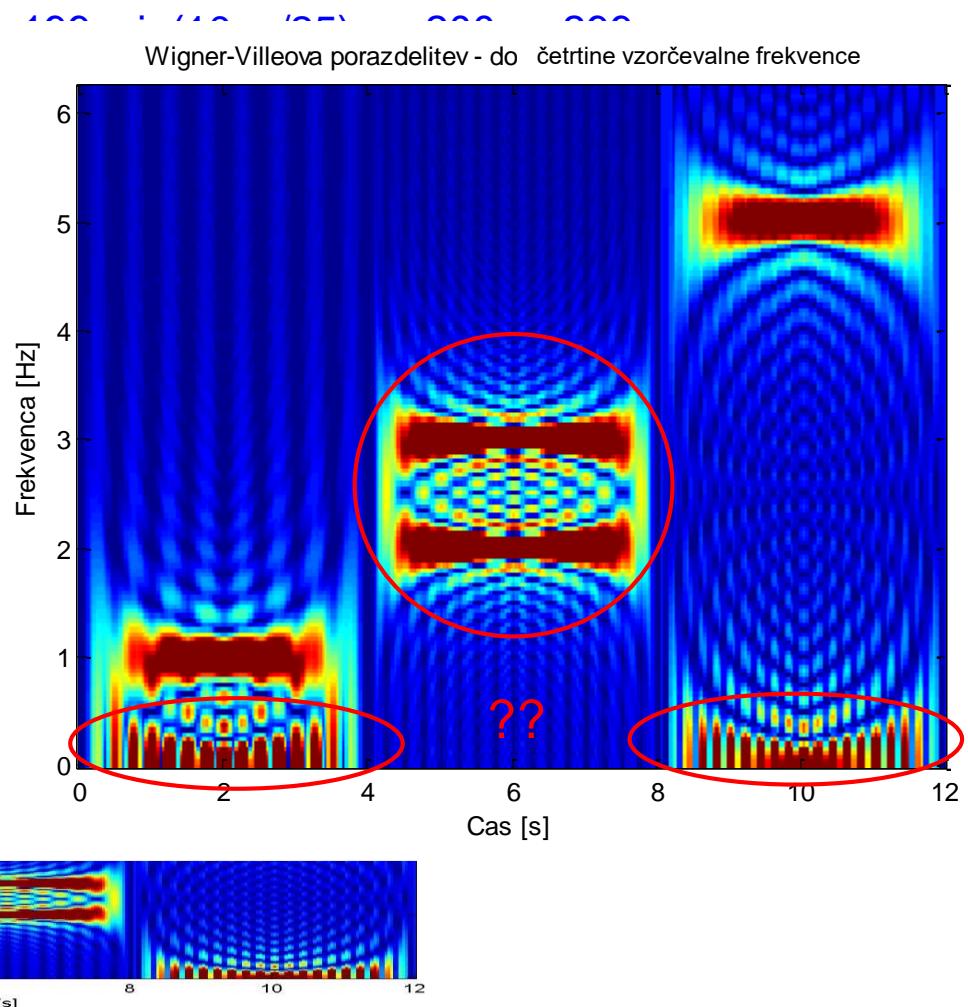
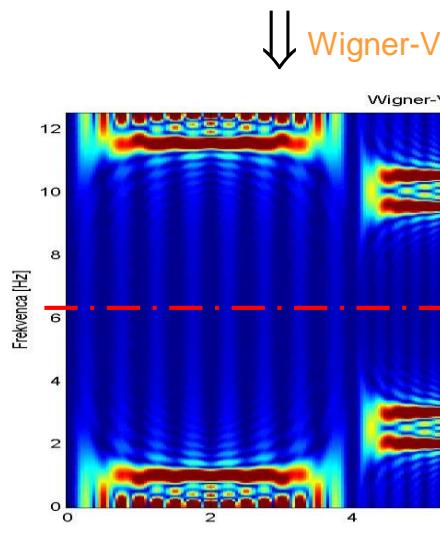
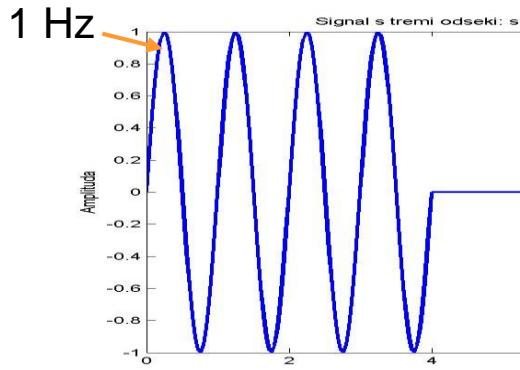
# Primer Wigner-Villeove porazdelitve za kombiniran signal

- Uporabimo signal, sestavljen iz treh zaporednih časovnih odsekov:  
 $\sin(2\pi n/25)$ ,  $n=0, \dots, 99$ ;  $0$ ,  $n=100, \dots, 199$ ;  $\sin(10\pi n/25)$ ,  $n=200, \dots, 299$



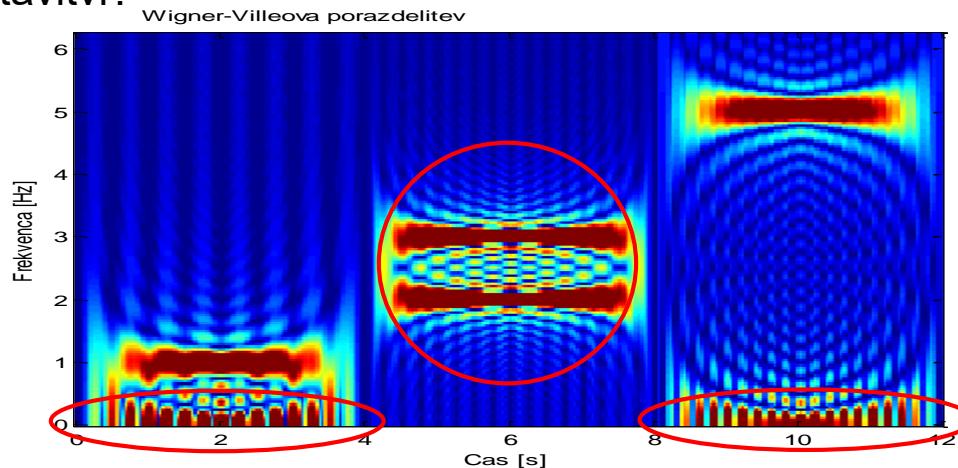
# Primer Wigner-Villeove porazdelitve za kombiniran signal

- Uporabimo signal, sestavljen iz treh zaporednih časovnih odsekov:  
 $\sin(2\pi n/25)$ ,  $n=0, \dots, 99$ ;  $0, n=100$



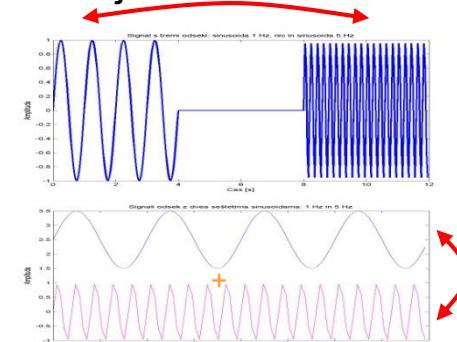
# WIGNER-VILLEOVA PORAZDELITEV IN PREČNI ČLENI

- V primeru s prejšnje prosojnice smo imeli v času ločeni sinusoidi s frekvencama 1 Hz in 5 Hz. Zakaj Wigner-Villeova porazdelitev pokaže še dodatne člene v časovno-frekvenčni predstavitev?



- Tem členom pravimo **prečni členi** (*cross terms*).
- Prečni členi nastanejo v Wigner-Villeovi porazdelitvi pri vsakem večkomponentnem signalu, torej kadar signal vsebuje več sinusnih nihanj:

- v različnih časovnih trenutkih



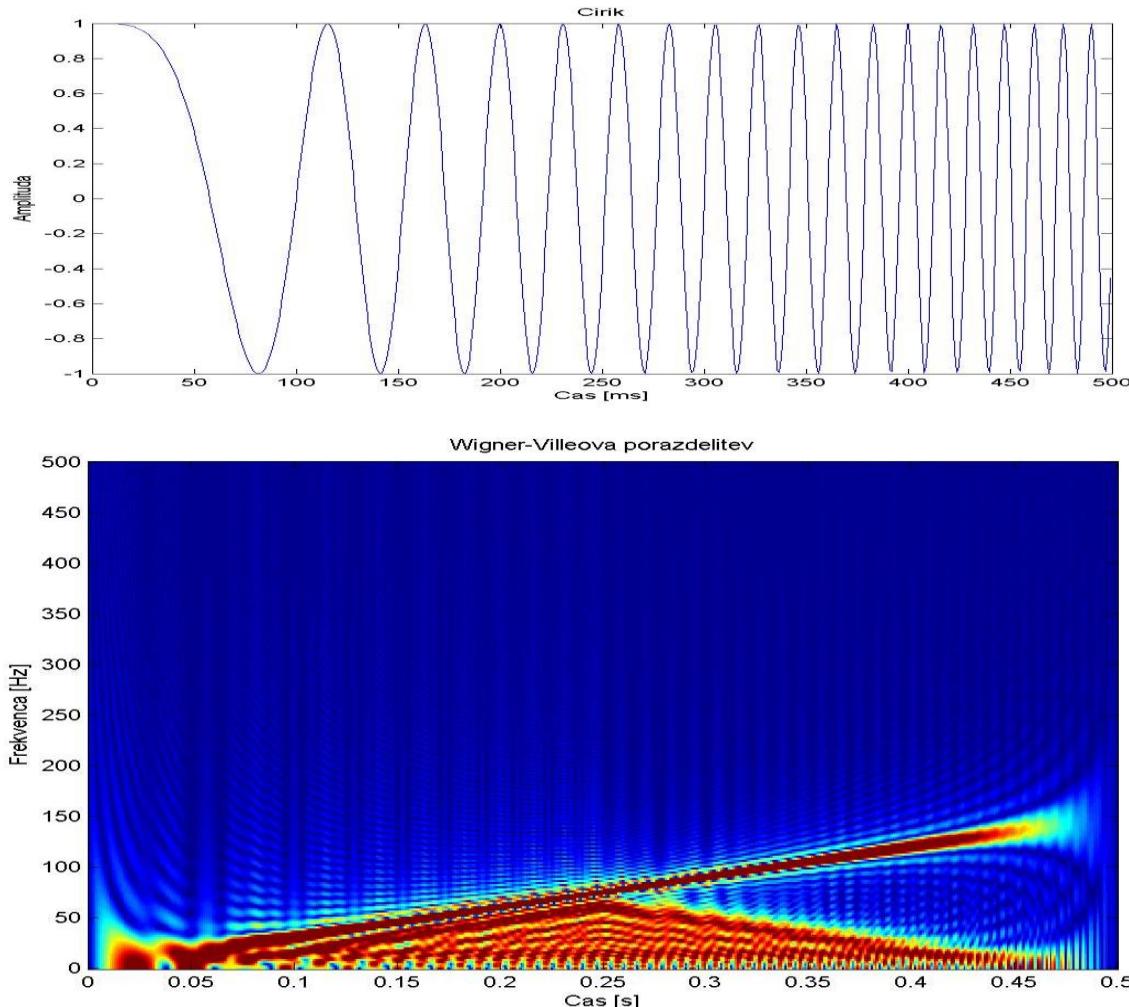
- ali oz. in z različnimi frekvencami.

# VZROK ZA PREČNE ČLENE PRI WIGNER-VILLEU

- Wigner-Ville temelji na kvadratni predstavitev, saj signale obdela tako, da jih "kvadrira" – avtokorelacija.
- Vzemimo signal:  $x(n) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$ .
- Wigner-Ville:  $x(n)x(n) = \sin^2(2\pi f_1 t) + 2 \cdot \sin(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_2 t) + \sin^2(2\pi f_2 t)$
- Trigonometrični izraz  $\sin(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_2 t)$  lahko ekvivalentno zapišemo kot:  
 $\{\cos[2\pi(f_1-f_2)t] - \cos[2\pi(f_1+f_2)t]\}/2$
- Wigner-Ville za  $x(n)x(n)$  zato tvori naslednje frekvence:
  - 0
  - $2f_1$
  - $f_1-f_2$
  - $f_1+f_2$
  - $2f_2$
- Dejansko bi hoteli videti le  $f_1$  in  $f_2$ .
- Zato pri izračunu Wigner-Villa prikažemo polovične frekvence:
  - 0
  - $f_1$
  - $(f_1-f_2)/2$
  - $(f_1+f_2)/2$
  - $f_2$

# Primer Wigner-Villeove predstavitev za čirik

- Linearni čirik (*linear chirp*) je signal z enakomerno naraščajočo ali upadajočo frekvenco:

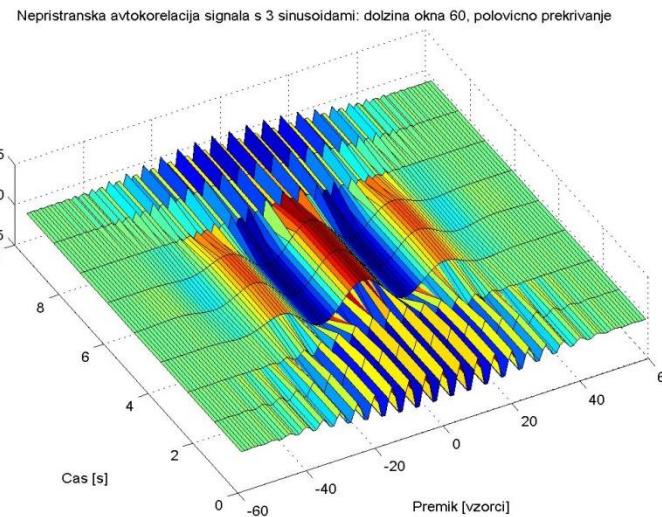


# LASTNOSTI WIGNER-VILLEOVE PORAZDELITVE

- Wigner-Villeova porazdelitev ima nekaj pozitivnih lastnosti:
  - večja ločljivost kot pri STFT
  - končno definicijsko območje – Wigner-Villeova porazdelitev ima vrednost 0 pred začetkom signala in po njegovem koncu (STFT ne)
  - Wigner-Villeova porazdelitev ima vedno realne vrednosti (zaradi simetričnosti trenutne avtokorelacijske funkcije)
- Wigner-Villeova porazdelitev pa ima tudi precej negativnih lastnosti:
  - povzroča prečne člene, kar omejuje njenouporabnost
  - medtem ko je Fourierova transformacija periodična glede na vzorčevalno frekvenco, je Wigner-Villeova periodična glede na polovico vzorčevalne frekvence; pozor: spektralno prekrivanje se zato začne pri  $f_{vz}/4$  (nevarnost spektralnega prekrivanja – **nujno nadvzorčenje ali uporaba analitičnih signalov, ki nimajo vsebine pri negativnih frekvencah – Hilbertova transformacija**)
  - v Wigner-Villeovi porazdelitvi se lahko pojavijo negativna območja, ki nimajo pravega pomena

# ODSTRANJEVANJE PREČNIH ČLENOV

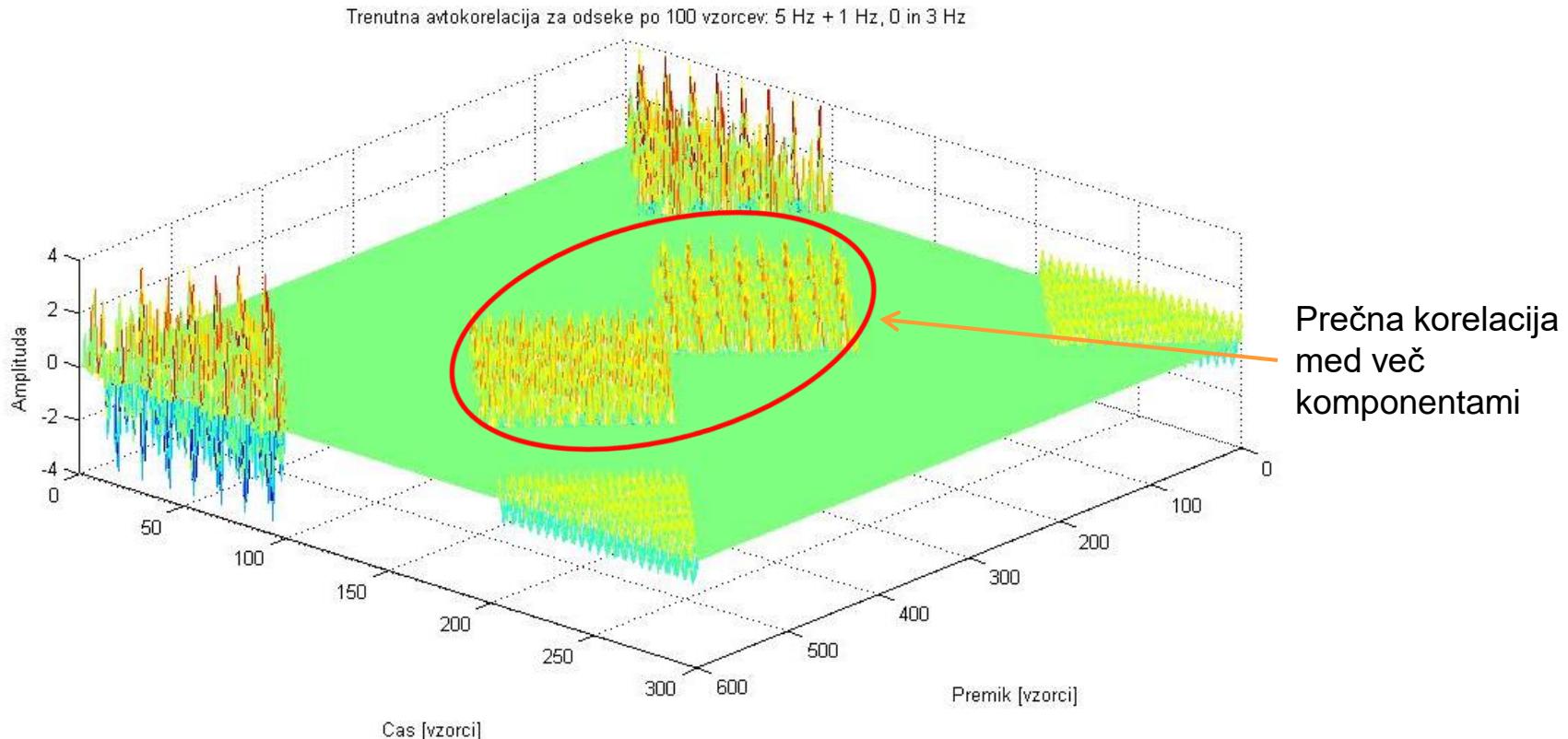
- Zakaj pri spektrogramu nismo dobili prečnih členov?
  - Odgovor: kvadrirali smo absolutne vrednosti vzorcev STFT, torej po izračunu FFT, kar pomeni, da smo FFT računali za avtokorelacijsko funkcijo opazovanega signala:



- V avtokorelacijski funkciji večkomponentnega signala se ne pojavijo medsebojni vplivi med komponentami, ker so vrednosti računane kot **povprečja v oknih**.
- Pri Wigner-Villeu računamo **FFT za trenutno avtokorelacijo** in to je razlog za prečne člene! Ne uporabljamo okenskih funkcij.

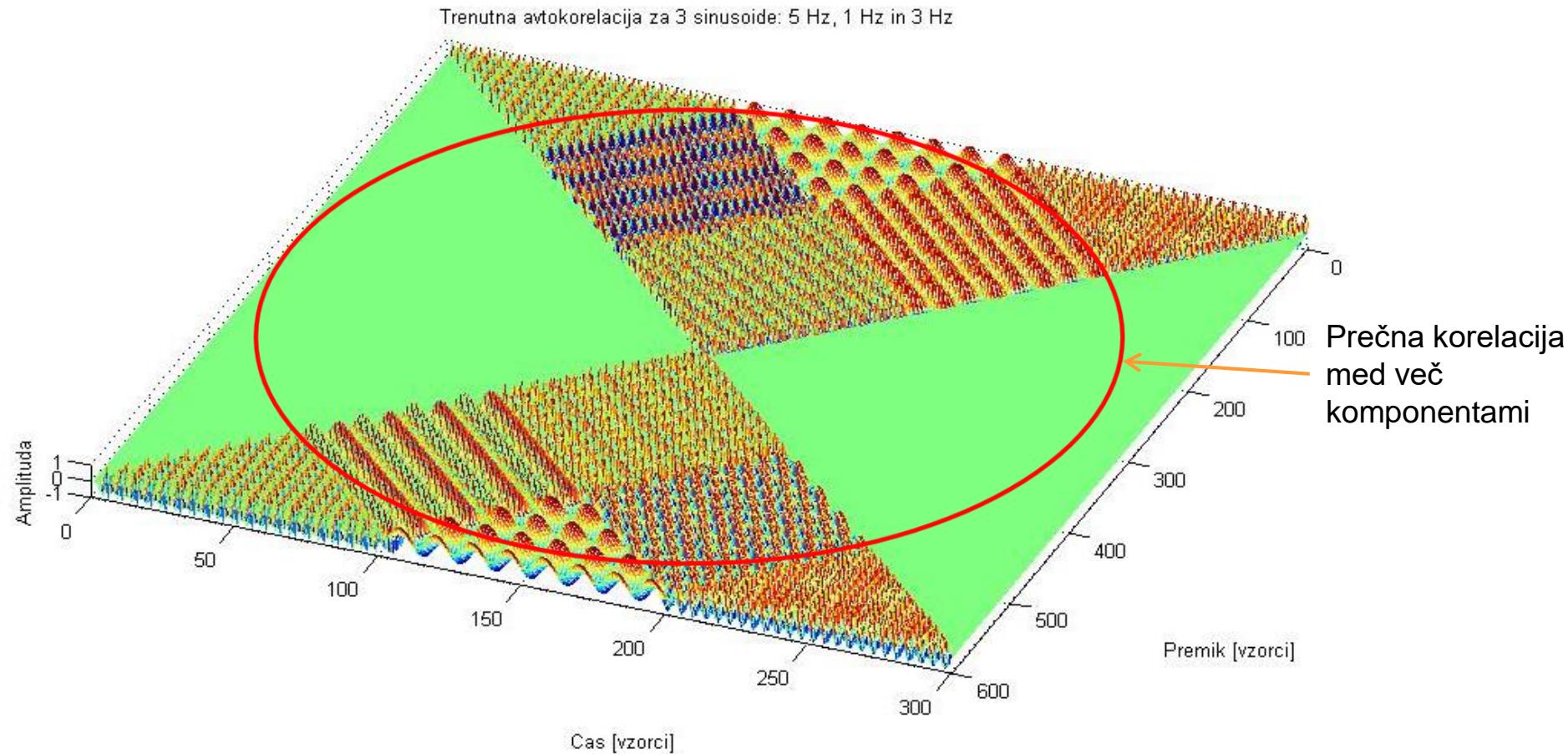
# ODSTRANJEVANJE PREČNIH ČLENOV (2)

- Vzemimo signal, sestavljen iz treh zaporednih časovnih odsekov:  
 $\sin(10\pi n/25)$ ,  $n=0, \dots, 99$ ;  $0$ ,  $n=100, \dots, 199$ ;  $\sin(6\pi n/25)$ ,  $n=200, \dots, 299$ .  
Trenutna avtokorelacija za ta signal:



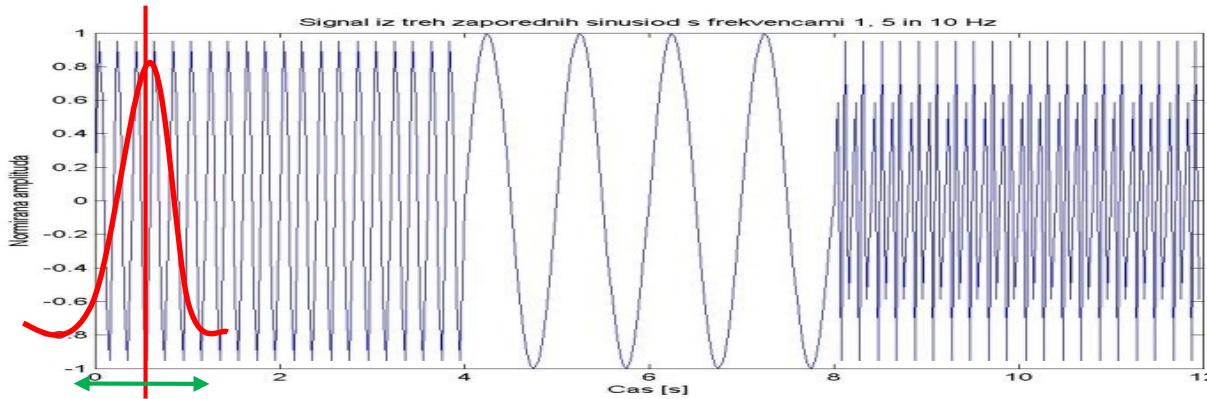
## ODSTRANJEVANJE PREČNIH ČLENOV (2)

- Poglejmo še signal:  $\sin(10\pi n/25)$ ,  $n=0, \dots, 99$ ;  $\sin(2\pi n/25)$ ,  $n=100, \dots, 199$ ;  $\sin(6\pi n/25)$ ,  $n=200, \dots, 299$ . Trenutna avtokorelacija za ta signal:

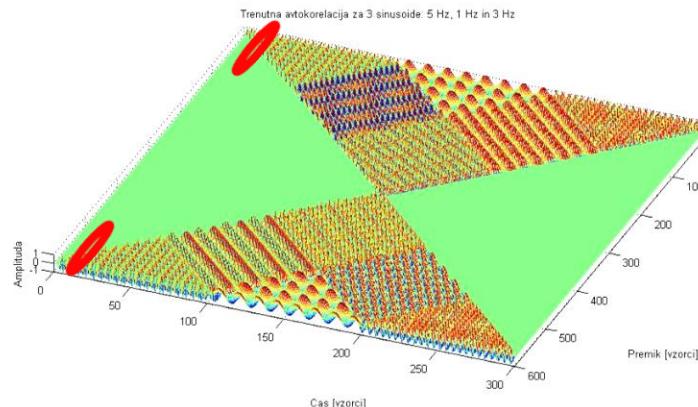


# ODSTRANJEVANJE PREČNIH ČLENOV (3)

- Pri zastiranju prečnih členov si pomagamo z okenskimi funkcijami.
- Medsebojne vplive signalnih komponent omejimo s časovnimi okni (kot pri spektrogramu):



- Frekvenčno ločljivost izboljšamo z okni nad trenutno avtokorelacijsko funkcijo (glajenje frekvenčne slike):



## ODSTRANJEVANJE PREČNIH ČLENOV (4)

- Prečne člene pri Wigner-Villeovi porazdelitvi torej lahko zadušimo z dvema okenskima funkcijama.
- Označimo okensko funkcijo za množenje v časovnem prostoru z  $g(\tau)$ .
- Označimo okensko funkcijo za obdelavo v frekvenčnem prostoru s  $H(\theta)$ .
- Transformirajmo  $H(\theta)$  v časovni prostor s pomočjo zvezne inverzne Fourierove transformacije, in sicer v trenutku  $u-t$ :

$$h(u-t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) e^{j\theta(u-t)} d\theta$$

- Uporabimo sedaj obe okni  $g(\tau)$  in  $h(u-t)$  pri zveznem Wigner-Villeu, tako da ju združimo v skupen zapis :

$$\begin{aligned} X_C(t, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) e^{j\theta(u-t)} d\theta \cdot g(\tau) x(u + \frac{\tau}{2}) x^*(u - \frac{\tau}{2}) du e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\theta, \tau) e^{j\theta(u-t)} x(u + \frac{\tau}{2}) x^*(u - \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\theta du d\tau \end{aligned}$$

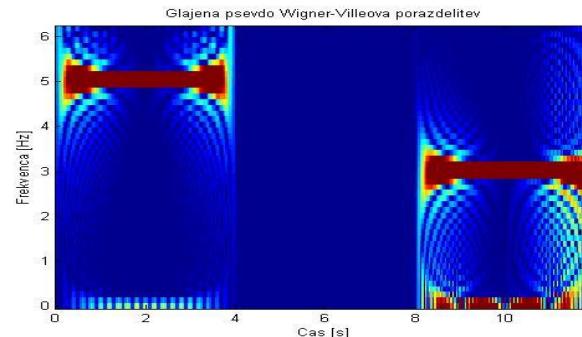
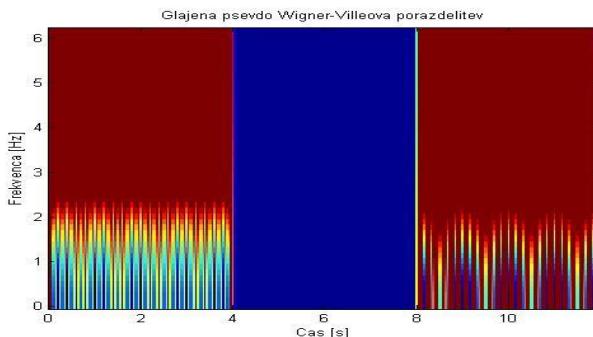
- Obe okni smo zapisali s skupno funkcijo  $\Phi(\theta, \tau) = H(\theta)g(\tau)$ , ki jo imenujemo jedro (kernel).
- Tak zapis se imenuje Cohenov razred in iz njega lahko z različnimi jedri izpeljemo različne časovno-frekvenčne predstavitve.

# GLAJENA PSEVDO WIGNER-VILLEOVA PORAZDELITEV

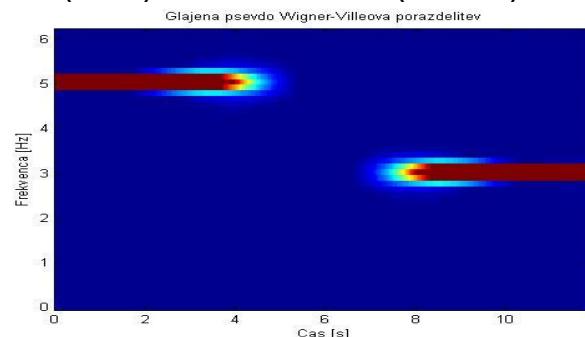
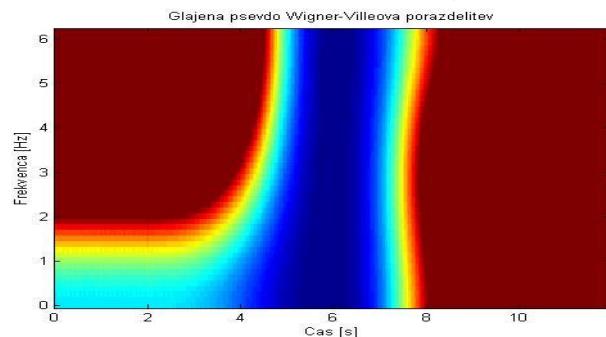
- Uporaba okenske funkcije v časovnem prostoru povzroči, da Vigner-Ville ne izhaja več iz popolne trenutne avtokorelacijske transformacije, ampak le iz omejene (kot izhaja spektrogram iz omejene avtokorelacijske transformacije).
- Okenska funkcija v frekvenčnem prostoru dodatno zgladi frekvenčno predstavitev.
- Zato dobljeni transformaciji pravimo **glajena psevdo Wigner-Villeova predstavitev (*smoothed pseudo Wigner-Ville distribution*)** - GPWV.
- Od vrste in dolžine obeh oken je zelo odvisno, v kolikšni meri uspemo zadušiti prečne člene in hkrati ohraniti dobro frekvenčno ločljivost.
- Vzemimo za primer signal  
 $x(n) = \sin(10\pi n/25), n=0,\dots,99; 0, n=100,\dots,199; \sin(6\pi n/25), n=200,\dots,299$
- Uporabimo funkcijo  
[GPWV,cas,frek]=tfrspwv(vh\_sig,cas,cas\_okno,frek\_okno,f\_vz,0);
- Obe okni naj bosta Hammingovi.
- Spreminjajmo njuni dolžini!

# Primer za glajeno psevdo Wigner-Villeovo predstavitev

- $x(n) = \sin(10\pi n/25)$ ,  $n=0, \dots, 99$ ;  $0, n=100, \dots, 199$ ;  $\sin(6\pi n/25)$ ,  $n=200, \dots, 299$
- Dolžini oken: časovno 5 vzorcev, avtokorelacijsko 5 (levo) in 99 vzorcev (desno)



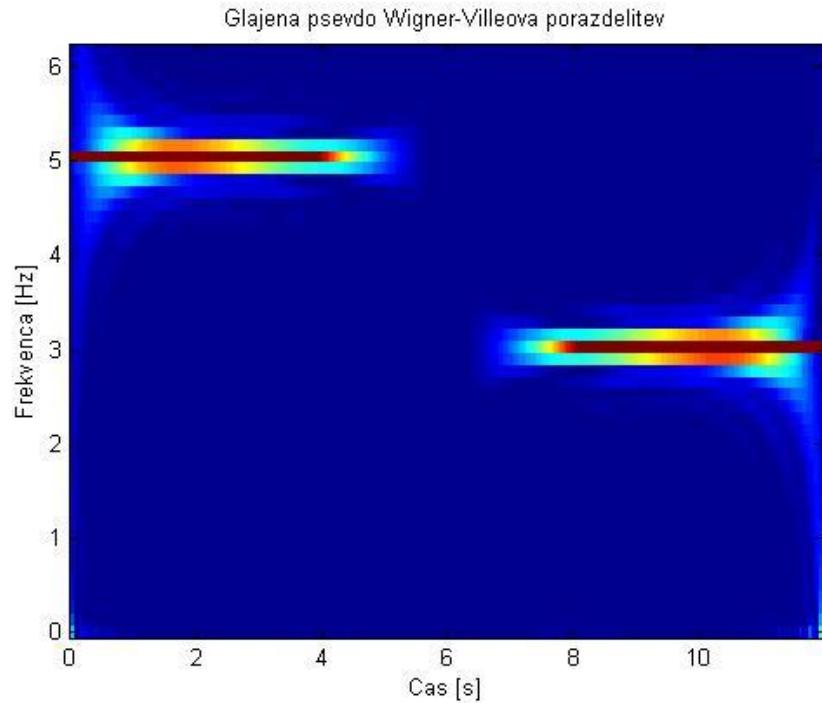
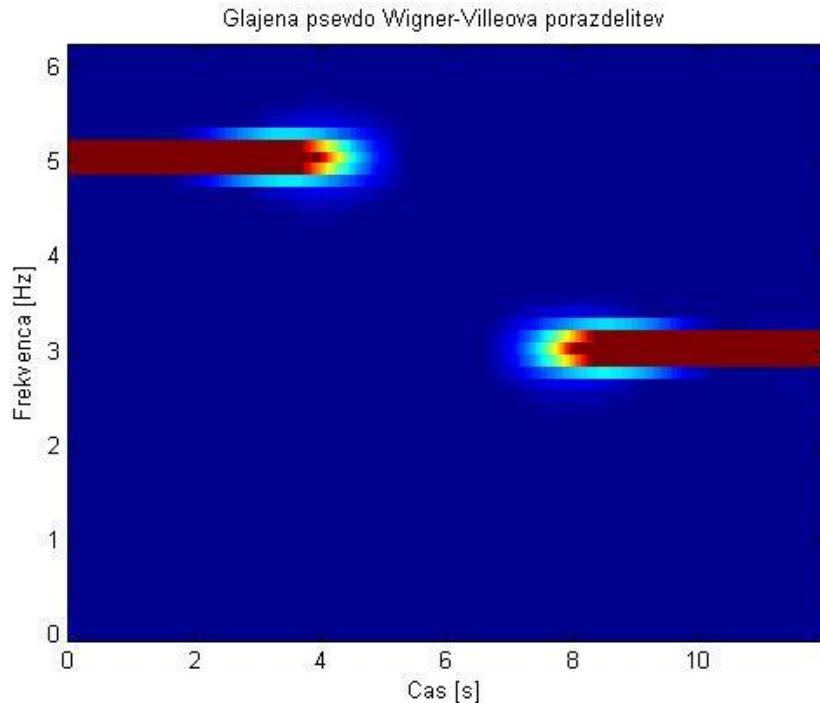
- Dolžini oken: časovno 99 vzorcev, avtokorelacijsko 5 (levo) in 99 vzorcev (desno)



- Kratko časovno okno zagotovi, da ne nastanejo prečni členi zaradi časovno ločenih signalnih komponent (sredinsko območje na slikah). Vendar pa vodi k slabši frekvenčni ločljivosti in ne zaduši dobro prečnih členov, ki nastanejo zaradi sočasnih frekvenčno različnih komponent.
- Daljše okno v času pripomore k boljšemu dušenju prečnih členov zaradi sočasnih frekvenčnih komponent in poveča frekvenčno ločljivost, ki jo daljše okno za avtokorelacijsko funkcijo še dodatno izboljša.

# Primer za glajeno psevdo Wigner-Villeovo predstavitev – primerjava pravokotnega s Hammingovim oknom

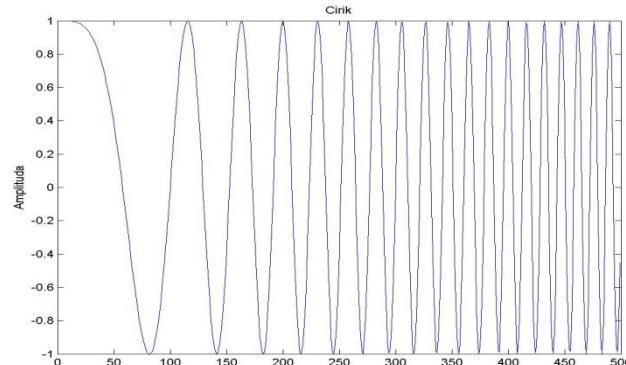
- $x(n) = \sin(10\pi n/25)$ ,  $n=0, \dots, 99$ ;  $0$ ,  $n=100, \dots, 199$ ;  $\sin(6\pi n/25)$ ,  $n=200, \dots, 299$
- Hammingovi (levo) in pravokotni okni (desno): časovno in avtokorelacijsko po 99 vzorcev



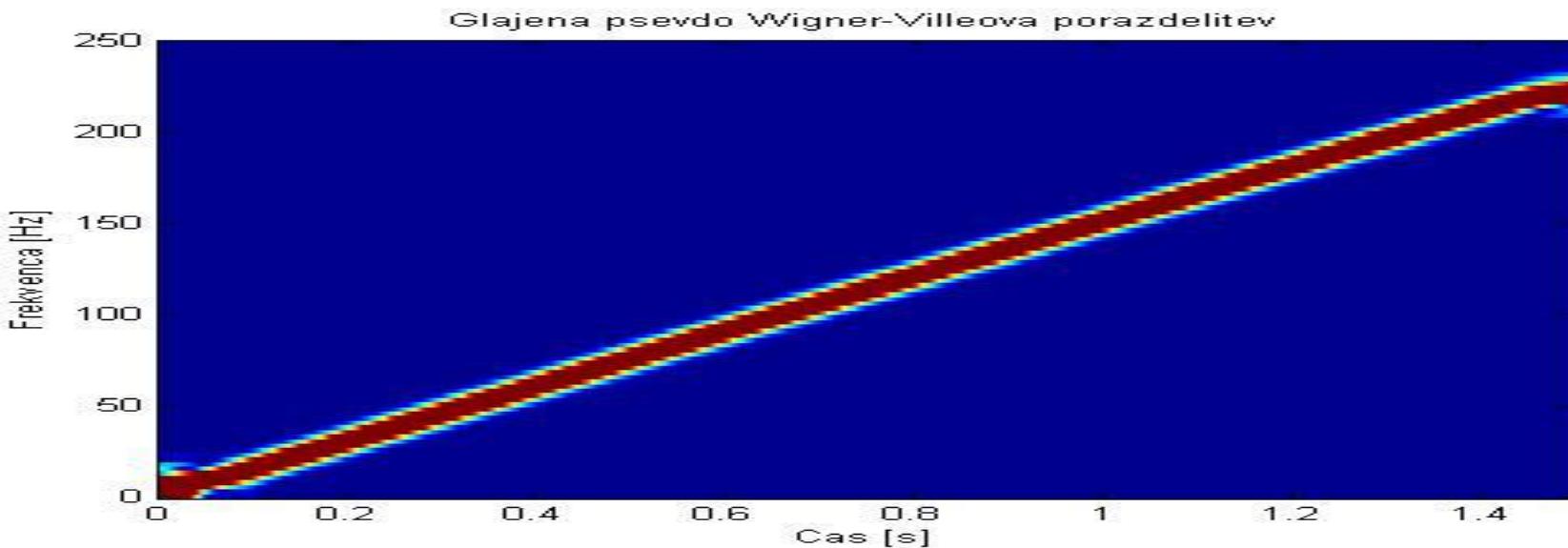
- Pravokotni okni vnašata več odstopanj pri prehodih (začetek signala in menjava območij), kar je bilo pričakovano. Sicer pa dosegata boljšo frekvenčno ločljivost.

# Primer glajene psevdo Wigner-Villeove predstavitev za čirik

- In še glajeni psevdo Wigner-Ville za linearni čirik :



$$x(t) = e^{j2\pi kt^2}$$



# VEČLIČNA FUNKCIJA

- V izračunu časovno-frekvenčnih porazdelitev se skriva t. i. **večlična funkcija (ambiguity function)** - [https://en.wikipedia.org/wiki/Ambiguity\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Ambiguity_function):

$$X_a(\eta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\eta t} dt$$

- Večlična funkcija razmakne transformiranke prečnih členov v frekvenčnem prostoru k višjim frekvencam, medtem ko samostojne člene (*auto-terms*) zadrži pri nižjih frekvencah.
- Z ekvivalentom jedra v 2D frekvenčnem prostoru, tj.  $\Phi(\eta, \tau)$ , moramo zato “izrezati” samo frekvence okoli izhodišča!

# CHOI-WILLIAMSOVA PORAZDELITEV

- Če v Cohenovem razredu uporabimo eksponentno (Gaussovo) jedro, pridemo do t. i. Choi-Williamsove porazdelitve:

$$X_{CW}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi\tau^2}} e^{-\frac{\sigma(u-t)^2}{4\tau^2}} x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega t} du d\tau$$

Choi-Williamsovo jedro (Gaussova 2D funkcija)

- S faktorjem  $\sigma$  nadziramo dušenje prečnih členov ( $\sigma \rightarrow \infty$ : Wigner-Ville).