Dolžina vektorja: $||a|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$, **Sk. produkt**: $a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$

Povprečje: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$, **Standardni odklon:** $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}$

ANALIZA NEODVISNIH KOMPONENT

Matematična formulacija: $x_j(t) = a_{j1}s_1(t) + a_{j2}s_2(t) + ... + a_{jn}s_n(t) \qquad \forall j$
(x_j - linearna mešanica, x_j - opazovana vrednost, s_j - neodvisna spremenljivka, a_{ji} - utež v mešanici).
Mešalni model v matrični notaciji: $X = AS$, $W = A^{-1}$, $S = WX$ (dimenzije: X...n x N, A...n x n, S...n x N, n - št. opazovanih spremenljivk in neodv. komponent, N - št. vzorcev, A - mešalna matrika, S - neodv. komponente).

Mere za merjenje "ne Gaussov": 1.Kurtozis: $kurt(y) = E\{y^4\} - 3(E\{y^2\})^2 \overset{predp.}{=} E\{y^4\} - 3$,
2.Negentropija - približek: $J(y) = [E\{\mathcal{G}(y)\} - E\{\mathcal{G}(v)\}]^2$ (E - matematično upanje/povprečje, $\mathcal{G}$ - poljubna nekvadratična funkcija, y - naključna spremenljivka, v - Gaussova spremenljivka z ničeljnim povprečjem in varianco = 1).

Primerne funkcije $\mathcal{G}$: 1. $\mathcal{G}(u) = \frac{1}{a}\log\cosh au$, 2. $\mathcal{G}(u) = -e^{-\frac{u^2}{2}}$, kjer a - konstanta iz intervala $[1, 2]$.
Predobdelava: 1.Centriranje: povprečni vektor: $m = E\{X\}$, **2.Beljenje**: dekompozicija kovariančne matrike netransformiranih podatkov na lastne vrednosti: $E\{xx^T\} = EDE^T$ (E - ortogonalna matrika lastnih vektorjev, D-diagonalna matrika pripadajočih lastnih vrednosti). Nato sledi beljenje: $\tilde{X} = D^{-\frac{1}{2}}E^T X$. Razbeljenje: $A = ED^{\frac{1}{2}}\tilde{A}$

Algoritem ICA - 1. postopek za en stolpec inverzne mešalne matrike W	**2. Postopek za celotno inverzno mešalno matriko $\tilde{W}$**
1. Naključno določi stolpec $\boldsymbol{w}$ (dimenzije n x 1) **2.** Izračunaj $\mathbf{w^+} = E\{X\mathcal{G}'(X^T\mathbf{w})\} - E\{\mathcal{G}''(X^T\mathbf{w})\}\mathbf{w}$ **3.** $\mathbf{w} = \mathbf{w^+}/\lvert\lvert\mathbf{w^+}\rvert\rvert$ **4.** IF $((\mathbf{w^T w} - 1) < \epsilon)$ Konec; ELSE Korak 2 ($\mathcal{G}'$ in $\mathcal{G}''$ sta prvi in drugi odvod funkcije $\mathcal{G}$, ϵ - majhno poz. št.) ($E\{X\mathcal{G}'(X^T\mathbf{w})\}$ izračunamo: **1.** najprej določimo $X\mathcal{G}'(X^T\mathbf{w})$, s čimer dobimo stolpec dimenzije n x 1, **2.** vsak element stolpca zatem delimo s številom vzorcev (tj. z N))	**1.** FOR vsak stolpec matrike $\tilde{W}$ Izvedi postopek za en stolpec (točka 1). **2.** Dekoreliraj vrstice v matriki $\tilde{W}$, npr. kot $\tilde{W} = \tilde{W}/\sqrt{\lvert\lvert\tilde{W}\tilde{W}^T\rvert\rvert}$ REPEAT $\tilde{W} = \frac{3}{2}\tilde{W} - \frac{1}{2}\tilde{W}\tilde{W}^T\tilde{W}$ UNTIL rezultat ne konvergira **3.** Določi originalno mešalno matriko A z razbeljenjem: $A = ED^{\frac{1}{2}}\tilde{W}^{-1}$

Aplikacija metode ICA - Odstranjevanje šuma
1. Na brezšumni množici podatkov določi transformacijo W **2.** Oceni množico parametrov. **3.** Izvedi transformacijo W na šumnih podatkih. **4.** Nad dobljenim rezultatom apliciraj operator krčenja. **5.** Rezultat na koncu transformiraj s W^T v prostor originalnih spremenljivk.

FOURIERJEVA TRANSFORMACIJA ($\mathcal{F}$)

Oznake: Čas. predstavitev - neodv. spremenljivka t(čas) $\rightarrow x = x(t)$, frekv. predstavitev - neodv. spremenljivka w (krožna frekvenca; $w = 2\pi f$, A - amplituda, f - frekvenca, φ - faza) $\rightarrow \mathbb{X} = \mathbb{X}(w)$. ($N$-dolžina, $\mathcal{I} = \mathcal{I}(x, y)$-zvezna slika)
1D zvezna FT: $\mathbb{X}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-iwt}dt$, **inverz:** $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{X}(w)e^{iwt}dw$ ($i = \sqrt{-1}$, $e^{-iwt} = cos(wt) - isin(wt)$)
1D diskretna FT:$\mathbb{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$, $k = 0, 1, ..., N-1$, **inverz:**$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathbb{X}(k)e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$, $n = 0, 1, ..., N-1$
2D zvezna FT: $\mathcal{F}[\mathcal{I}(x, y)] = \mathbb{I}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{I}(x, y)e^{-i2\pi(xu+yv)}dxdy.$
inverz: $\mathcal{F}^{-1}[\mathbb{I}(u, v)] = \mathcal{I}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{I}(u, v)e^{i2\pi(xu+yv)}dudv$ (u,v-prostorski frekvenci, $e^{i2\pi(xu+yv)}$-periodični vzorec)
2D diskretna FT: $\mathbb{I}(k_1, k_2) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} I(m, n)e^{-i2\pi(\frac{mk_1}{M}+\frac{nk_2}{N})}$, $k_1 = 0, 1, ..., M-1$, $k_2 = 0, 1, ..., N-1$.
inverz: $I(m, n) = \sum_{k_1=0}^{M-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}\mathbb{I}(k_1, k_2)e^{i2\pi(\frac{mk_1}{M}+\frac{nk_2}{N})}$, $m = 0, 1, ..., M-1$, $n = 0, 1, ..., N-1$.
Možna implementacija 2D FT: Enačbo zapišemo kot: $\mathbb{I}(k_1, k_2) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} I(m, n)e^{-\frac{i2\pi nk_2}{N}})e^{-\frac{i2\pi mk_1}{M}}$, $k_1 = 0, 1, ..., M-1$, $k_2 = 0, 1, ..., N-1$.
Interpretacija 2D DFT: $\mathbb{I}(k_1, k_2) = Re(k_1, k_2) + iIm(k_1, k_2)$, kjer $Re(k_1, k_2)$ - realni del in $Im(k_1, k_2)$ - imag. del.
Frekv./amplitudni spekter: $|\mathbb{I}(k_1, k_2)| = \sqrt{Re^2(k_1, k_2) + Im^2(k_1, k_2)}$, **Fazni spekter:** $\varphi(k_1, k_2) = arctg(\frac{Im(k_1,k_2)}{Re(k_1,k_2)})$,
Močnostni spekter/spektralna gostota: $P(k_1, k_2) = |\mathbb{I}(k_1, k_2)|^2 = Re^2(k_1, k_2) + Im^2(k_1, k_2)$.
Fourierjeva transformiranka v polarni obliki: $\mathbb{I}(k_1, k_2) = |\mathbb{I}(k_1, k_2)|e^{i\varphi(k_1,k_2)}$.
Lastnosti 2D DFT: 1.Linearnost: $\mathcal{F}[aI_1(m, n) + bI_2(m, n)] = a\mathbb{I}_1(k_1, k_2) + b\mathbb{I}_2(k_1, k_2)$,
2.Premik v slikovni ravnini: $\mathcal{F}[I(m-a, n-b)] = \mathbb{I}(k_1, k_2)e^{-i2\pi(\frac{ak_1}{M}+\frac{bk_2}{N})}$,
3.Premik v frekvenčni domeni: $\mathbb{I}(k_1-a, k_2-b) = \mathcal{F}[I(m, n)e^{i2\pi(\frac{am}{M}+\frac{bn}{N})}]$, **4.Skaliranje:** $\mathcal{F}[I(am, bn)] = \frac{1}{|ab|}\mathbb{I}(\frac{k_1}{a}, \frac{k_2}{b})$
5.Rotacija: $\mathcal{F}[I(m\, cos\theta + n\, cos\theta, -m\, sin\theta + n\, cos\theta)] = \mathbb{I}(k_1\, cos\theta + k_2 sin\theta, -k_1\, sin\theta + k_2\, cos\theta)$
6.Periodičnost: Predpostavimo $I(-m, n) = I(M-m, n)$ oz. $I(m, -n) = I(m, N-n)$, v splošnem: $I(aM+m, bN+n) = I(m, n)$. Potem velja, da je tudi Fourierjeva transformiranka periodična: $\mathbb{I}(aM + k_1, bN + k_2) = \mathbb{I}(k_1, k_2)$.
7.Konvolucija: v diskretnem prostoru: $G(m, n) = H(m, n) * I(m, n) = I(m, n) * H(m, n) = \sum_{a=0}^{M-1}\sum_{b=0}^{N-1} I(a, b)H(m-a, n-b)$. Konvolucija v frekvenčnem diskretnem prostoru: $\mathbb{G}(k_1, k_2) = \mathbb{I}(k_1, k_2)\mathbb{H}(k_1, k_2)$

Ujemanje (iskanje) šablon in (križna) korelacija
1. $\mathbb{I}(k_1, k_2) = \mathcal{F}[I(m, n)]$ in $\mathbb{H}(k_1, k_2) = \mathcal{F}[H(m, n)]$. **2.** $R(m, n) = \mathcal{F}^{-1}[\overline{\mathbb{I}}(k_1, k_2)\mathbb{H}(k_1, k_2)]$. **3.** (Lokalni) maksimum v R določa položaj šablone H v sliki I (oznaka $\overline{\mathbb{I}}$ označuje konjugirano kompleksno število).

2D VALČNA TRANSFORMACIJA

1D Zvezna valčna transformacija: $W_x(a,b) = \langle x, \psi_{a,b}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi_{a,b}(t)dt$, kjer $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-b}{a})$
(a - merilo, b - pomik bazne funkcije vzdolž osi t, $a, b > 0$, $\{\psi_{a,b}(t)\}$ - množica valčnih baznih funkcij).
Inverzna 1D zvezna valčna transformacija: $x(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(a,b)\psi_{a,b}(t)db\frac{da}{a^2}$, kjer $C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\psi(t)|}{|t|}dt$
1D diskretna valčna transformacija: $c_{j,k} = \sum_n x(n)\psi_{j,k}(n), j = 0, 1, ..., log_2(N) - 1$.
Inverzna 1D diskretna valčna transformacija: $x(n) = \sum_j \sum_k c_{j,k}\psi_{j,k}(n), k = 0, 1, ..., 2^j - 1$
Množica ortonormalnih valčkov: $\psi_{j,k}(n) = 2^{j/2}\psi(2^j n - k)$, **osnovni valček:** $\psi(n) = \sum_k h_1(k)\phi(2n-k)$
Enotin odziv diskretnega visokega sita: $h_1(k) = (-1)^k h_0(-k+1)$, **enotin odziv diskretnega nizkega sita** h_0
Skalirna funkcija $\phi(n)$, ki jo določimo z h_0 kot $\phi(n) = \sum_k h_0(k)\phi(2n-k)$
1D FWT: Število nivojev dekompozicije: $\vartheta = log_2(N)$, kjer je zahtevana dolžina signala $N = 2^\vartheta$.
2D zvezna valčna transformacija: $W_x(a, b_x, b_y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{I}(x,y)\psi_{a,b_x,b_y}(x,y)dxdy$, kjer je $\mathcal{I}(x,y)$ zvezna slika oz. funkcija dveh neodv. spremenljivk, b_x in b_y specificirata translacijo v dveh dimenzijah in $\psi_{a,b_x,b_y}(x,y)$ je **2D valček** definiran kot $\psi_{a,b_x,b_y}(x,y) = \frac{1}{|a|}\psi(\frac{x-b_x}{a}, \frac{y-b_y}{a})$
2D diskretna valčna transformacija: 2D skalirna funkcija: $\phi(x,y) = \phi(x)\phi(y)$. Iz valčka $\psi(x)$ tvorimo **tri 2D osnovne valčke:** $\psi^{(1)}(x,y) = \phi(x)\psi(y)$, $\psi^{(2)}(x,y) = \psi(x)\phi(y)$ in $\psi^{(3)}(x,y) = \psi(x)\psi(y)$. Trije valčki tvorijo temelj za 2D DWT - predstavljajo **ortonormalno bazo:** $\{\psi^{(l)}_{j,m,n}\} = \{2^j\psi^{(l)}(x - 2^j m, y - 2^j n)\}$, $j \geq 0, l = 1, 2, 3, \quad m, n \in \mathbb{N}$
Algoritem dekompozicije slike (2D FWT): za prvi nivo ($j = 1$) dobimo: $I_2^{(0)}(m,n) = \langle I_1(x,y), \phi(x-2m, y-2n)\rangle$, $I_2^{(1)}(m,n) = \langle I_1(x,y), \psi^{(1)}(x-2m, y-2n)\rangle$, $I_2^{(2)}(m,n) = \langle I_1(x,y), \psi^{(2)}(x-2m, y-2n)\rangle$,
$I_2^{(3)}(m,n) = \langle I_1(x,y), \psi^{(3)}(x-2m, y-2n)\rangle$.
Za nivoje $j > 1$ dobimo nad sliko $I_{2j}^{(0)}(x,y)$ štiri najmanjše podslike pri merilu 2^{j+1}.
Postopek dekompozicije za sliko, velikosti NxN pikslov, zaključimo v J korakih, kjer $J \leq log_2(N)$.

KONVOLUCIJSKE NEVRONSKE MREŽE - SPLOŠNO

O nevronu: x_i - i-ti vhod, w_i - utež i-tega vhoda (realno število), b oz. w_0 - prag (bias).
Obtežen vhod s v celično telo: $s = \sum_{i=1}^n w_i x_i + b$ oz. $s = wx + b$ oz. $s = \sum_{i=0}^n w_i x_i$ oz. $s = \hat{w}\hat{x}$
(vektor uteži $w = [w_1, w_2, ..., w_n]$ oz. $\hat{w} = [w_0, w]$, vektor vhodov $x = [x_1, x_2, ..., x_n]$ oz. $\hat{x} = [1, x]$).
Izhod y - monotono naraščajoča funkcija obteženega vhoda s: $y = f(s)$ (f - prenosna/aktivacijska funkcija nevrona).
Aktivacijske funkcije: ReLU (REctified Linear Unit): $f(s) = max(0, s)$
Leaky ReLU: $f(s) = max(as, s)$, kjer $a > 0, a \in \mathbb{R}$ (npr. $a = 0,01$).
Maxout: $f(x) = max(w_0 x + b_0, w_1 x + b_1)$. **Sigmoidna:** $f(s) = 1/(1 + e^{-s})$. **Tanh:** $f(s) = 2sigmoid(2s) - 1$.
Učenje nevronske mreže: neznana funkcijska relacija f: $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \wedge \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$.
Učna množica $\mathcal{U}_M$ - pari (vhod, želen izhod): $\mathcal{U}_M = \{(x_i, t(x_i)) | x_i \in \mathcal{X} \wedge t(x_i) \in \mathcal{Y}\}$. Predpostavimo: $t(x_i) = f(x_i)$.
Izračun izgube (loss): $\forall x_i \in \mathcal{X} \wedge \mathcal{U}_M \quad L_i = L(x_i, y_i, t(x_i), w)$ (L_i - strošek para).
Izračun stroška (cost): $J(w) = E(\sum_i L_i)$ ($\nabla_w J(w)$ - gradient stroškovne funkcije).
Število parametrov prve plasti klasičnih NN pri uporabi slike na vhodni plasti: M x N x $St\_Kanalov$.
Preciznost: $\frac{tp}{tp+fp}$, **Priklic (recall):** $\frac{tp}{tp+fn}$, **Natančnost:** $\frac{tp+tn}{tp+tn+fp+fn}$, **metrika F1:** $F = 2 \cdot \frac{precision \cdot recall}{precision + recall}$

KONVOLUCIJSKE NEVRONSKE MREŽE - PLASTI

Konvolucijska plast: Dimenzije izhoda: M_2 x N_2, kjer $M_2 = (M_1 - F + 2P)/S + 1$ in $N_2 = (N_1 - F + 2P)/S + 1$.
Če uporabimo K filtrov, potem je izhod dimenzije: M_2 x N_2 x K.
Filtri imajo F x F x C_h uteži, skupno potrebujemo za K filtrov: (F x F x C_h) x K uteži in K pragov.
(F - dimenzija filtra, P - število robnih ničel, S - korak gibanja filtra, K - število filtrov, M_1 - x dimenzija vhoda, N_1 - y dimenzija vhoda, C_h - število kanalov).
Združevalna plast: Dimenzije izhoda: M_2 x N_2 (za kanal) oz. M_2 x N_2 x C_h (za sliko), kjer $M_2 = (M_1 - F)/S + 1$ in $N_2 = (N_1 - F)/S + 1$
(F - dimenzija bloka, S - korak gibanja bloka, M_1 - x dimenzija vhoda, N_1 - y dimenzija vhoda, C_h - število kanalov).

KONVOLUCIJSKE NEVRONSKE MREŽE - INŽENIRSKI PRISTOPI

Inicializacija uteži - tipično: vektor uteži po naključni inicializaciji množimo z $1/\sqrt{n}$, pri ReLU aktivaciji pa z $\sqrt{2/n}$ (n - število vhodov v nevron).
Normalizacija množice: Faza učenja: Vsako značilnico normaliziramo kot $y_i = \gamma\frac{x_i - \mu_B}{\sqrt{\sigma_B^2 + e}} + \beta$
(γ in β - učeča parametra, μ_B - povprečje, σ_B - standardni odklon množice B, e - majhno število > 0)