Projet Coq

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Master M1 2019-2020

Logique propositionnelle

Travail à faire

Toutes les tâches suivantes sont à effectuer en Coq :

1. Définir la syntaxe (abstraite) des formules :
   - Donner quelques exemples de formules.
2. Définir la sémantique des formules (logique classique) ;
   - Définir la notion de satisfiabilité, validité, insatisfiabilité, etc.
   - Donner quelques exemples de calcul de la sémantique de formules.
3. Définir les règles de preuve du système LK_0 ;
   - Donner quelques exemples de preuves.
4. Démontrer que le système LK_0 est correct ;
5. Démontrer que le système LK_0 est complet.

Pour (1), (2) et (3), voir les pages suivantes.
Pour (4) et (5), voir la littérature pour les preuves.

Modalités du projet

Consignes

- Le travail est à effectuer en binôme ou en monôme (pas de trinôme) ;
- Le travail est à rendre sous le Moodle de HMIN229 ;
- Le rendu sera constitué d'un seul fichier Coq ;
- Le fichier rendu devra être convenablement commenté ;
- La date limite pour le rendu du projet est le **3 mai 2020**.

Logique propositionnelle

Définition préliminaire

- $\mathcal{V} \equiv$ ensemble de variables de propositions A, B, etc.

Formules

- Plus petit ensemble $\mathcal{F}$ t.q. :
  - Si $A \in \mathcal{V}$ alors $A \in \mathcal{F}$;
  - $\bot, \top \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $\neg\Phi \in \mathcal{F}$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors $\Phi \wedge \Phi', \Phi \vee \Phi', \Phi \Rightarrow \Phi', \Phi \Leftrightarrow \Phi' \in \mathcal{F}$.

Logique propositionnelle

Associativité des connecteurs

- $\wedge$, $\vee$, et $\Leftrightarrow$ associent à gauche :
  - $A \wedge B \wedge C \equiv (A \wedge B) \wedge C$.
- $\Rightarrow$ associe à droite :
  - $A \Rightarrow B \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.

Précédence des connecteurs

- On a la précédence suivante : $\neg \succ \wedge \succ \vee \succ \Rightarrow \succ \Leftrightarrow$;
- Exemples :
  - $A \wedge B \Rightarrow C \equiv (A \wedge B) \Rightarrow C$;
  - $A \wedge \neg B \vee C \Rightarrow D \equiv ((A \wedge \neg B) \vee C) \Rightarrow D$;
  - $A \Rightarrow B \Leftrightarrow C \wedge D \equiv (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (C \wedge D)$.

Sémantique

Logique propositionnelle classique

- Chaque formule est censée être soit vraie, soit fausse ;
- Ensemble des valeurs de vérité : $\mathcal{B} = \{T, F\}$ (booléens), où $T \neq F$;
- Tables de vérité :

A	B	$\neg_{\mathcal{B}} A$	$A \wedge_{\mathcal{B}} B$	$A \vee_{\mathcal{B}} B$	$A \Rightarrow_{\mathcal{B}} B$	$A \Leftrightarrow_{\mathcal{B}} B$
F	F	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T

- $\wedge_{\mathcal{B}}$, $\vee_{\mathcal{B}}$, $\Rightarrow_{\mathcal{B}}$, et $\Leftrightarrow_{\mathcal{B}}$: fonctions de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}$;
- $\neg_{\mathcal{B}}$: fonction de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}$.

Sémantique

Définition

- Affectation (ou interprétation) ρ : application de l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables de propositions vers $\mathcal{B}$;
- La sémantique $[\![\Phi]\!]_\rho$ d'une formule Φ dans l'affectation ρ est définie par récurrence structurelle sur Φ par :
  - Si $A \in \mathcal{V}$ alors $[\![A]\!]_\rho = \rho(A)$;
  - $[\![\top]\!]_\rho = T$, $[\![\bot]\!]_\rho = F$;
  - Si $\Phi \in \mathcal{F}$ alors $[\![\neg\Phi]\!]_\rho = \neg_{\mathcal{B}}[\![\Phi]\!]_\rho$;
  - Si $\Phi, \Phi' \in \mathcal{F}$ alors :
    - $[\![\Phi \wedge \Phi']\!]_\rho = [\![\Phi]\!]_\rho \wedge_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]_\rho$;
    - $[\![\Phi \vee \Phi']\!]_\rho = [\![\Phi]\!]_\rho \vee_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]_\rho$;
    - $[\![\Phi \Rightarrow \Phi']\!]_\rho = [\![\Phi]\!]_\rho \Rightarrow_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]_\rho$;
    - $[\![\Phi \Leftrightarrow \Phi']\!]_\rho = [\![\Phi]\!]_\rho \Leftrightarrow_{\mathcal{B}} [\![\Phi']\!]_\rho$.

Sémantique

Vocabulaire

- Soit Φ une formule et ρ une affectation ;
- ρ est un modèle de Φ ou ρ satisfait Φ, noté $\rho \models \Phi$, ssi $[\![\Phi]\!]_\rho = T$;
- Un ensemble G de formules entraîne Φ, noté $G \models \Phi$, ssi toutes les affectations satisfaisant toutes les formules de G en même temps (les modèles de G) sont aussi des modèles de Φ, c'est-à-dire quand $\rho \models \Phi'$ pour tout $\Phi' \in G$ implique $\rho \models \Phi$;
- Φ est valide ssi Φ est vraie dans toute affectation ($[\![\Phi]\!]_\rho = T$ pour tout ρ, noté $\models \Phi$), et est invalide sinon ;
- Une formule valide est aussi appelée une tautologie ;
- Φ est satisfiable ssi elle est vraie dans au moins une affectation ($[\![\Phi]\!]_\rho = T$ pour un certain ρ, c'est-à-dire elle a un modèle), et est insatisfiable sinon.

Sémantique

Vocabulaire

- Toutes les formules valides sont satisfiables, et toutes les formules insatisfiables sont invalides ;
- Ceci divise l'espace des formules en trois catégories :
  - Les valides (toujours vraies) ;
  - Les insatisfiables (toujours fausses) ;
  - Les formules contingentes (parfois vraies, parfois fausses).
- La validité et l'insatisfiabilité se correspondent via négation : Φ est valide ssi $\neg\Phi$ est insatisfiable, Φ est insatisfiable ssi $\neg\Phi$ est valide.

Sémantique

Exemples

- $A \wedge B \Rightarrow A$ est valide, c'est-à-dire $\models A \wedge B \Rightarrow A$;
- On a : $A \wedge B \models A$;
- $A \wedge B \Rightarrow C$ est contingent ;
- $A \wedge \neg A$ est insatisfiable.

Preuves

Séquents

- Un séquent de Gentzen est un couple Γ, Δ d'ensembles finis de formules, noté $\Gamma \vdash \Delta$.

Système de preuve

- Calcul des séquents de Gentzen ;
- Version propositionnelle : LK_0.

Calcul des séquents propositionnel (LK_0)

Règles

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}\,\text{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\,\text{cut}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,\text{cont}_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A}{\Gamma \vdash \Delta, A}\,\text{cont}_{\text{right}}$$

Calcul des séquents propositionnel (LK_0)

Règles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \Rightarrow_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B} \Rightarrow_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta} \Leftrightarrow_{\text{left1}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \Leftrightarrow B \vdash \Delta} \Leftrightarrow_{\text{left2}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B \qquad \Gamma, B \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow_{\text{right}}$$

Calcul des séquents propositionnel (LK_0)

Règles

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}\ \wedge_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}\ \vee_{\text{right}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg_{\text{left}} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}\ \neg_{\text{right}}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot_{\text{left}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Delta, \top}\ \top_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Une preuve simple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\,\text{ax}}{A \wedge B \vdash A}\,\wedge_{\text{left}}}{\vdash A \wedge B \Rightarrow A}\,\Rightarrow_{\text{right}}$$

Exemple de preuve

Une autre preuve

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{A, B \vdash B}\,\text{ax}}{A, B \vdash A \wedge B}\,\wedge_{\text{right}}}{A \vdash B \Rightarrow A \wedge B}\,\Rightarrow_{\text{right}}}{\vdash A \Rightarrow B \Rightarrow A \wedge B}\,\Rightarrow_{\text{right}}$$

Propriétés

Prouvabilité

- $\Gamma \vdash \Delta$ est prouvable dans LK_0, noté $\Gamma \vdash_{LK_0} \Delta$, ssi il existe une dérivation dans LK_0 se terminant sur $\Gamma \vdash \Delta$.

Correction

- Notation : $\Gamma \models \Delta \equiv \Gamma \models \bigvee_{\Phi \in \Delta} \Phi$;
- Si $\Gamma \vdash_{LK_0} \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$.

Complétude

- Si $\Gamma \models \Delta$ alors $\Gamma \vdash_{LK_0} \Delta$.

Élimination des coupures

- Il existe un algorithme qui prend une preuve dans LK_0 et la transforme en une preuve sans coupure du même séquent.