СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

7 юни 2025 г.

Тема №1.

Отговорите на задачите от 1. до 10. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Сумата от целите числа, които са решения на неравенството $10^{\frac{2-x}{x+1}} < 0,1^{\frac{2x-7}{x+1}}$, е:

А) 10 ***Б)*** 14 ***В)*** 9 ***Г)*** 8

Задача 2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, за който $\sphericalangle ACB = 30^\circ$. Височините му AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) имат дължини съответно $5\sqrt{3}$ и 8. Дължината на радиуса на описаната около триъгълник ABC окръжност е:

А) $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$ ***Б)*** $\sqrt{19}$ ***В)*** $\dfrac{3\sqrt{19}}{2}$ ***Г)*** $2\sqrt{19}$

Задача 3. Произведението на корените на уравнението $\sqrt{6x^2 - x + 10} - \sqrt{6x^2 - x + 1} = 1$ е:

А) $-\dfrac{5}{3}$ ***Б)*** $-\dfrac{5}{2}$ ***В)*** -5 ***Г)*** $-\dfrac{3}{2}$

Задача 4. Даден е правоъгълник $ABCD$. Точката M е от страната DC и BM пресича AC в точката L. Ако лицето на триъгълник BLC е равно на 15 и лицето на триъгълник MLC е равно на 9, то лицето на четириъгълника $ALMD$ е равно на:

А) $\dfrac{70}{3}$ ***Б)*** $\dfrac{87}{3}$ ***В)*** $\dfrac{93}{3}$ ***Г)*** $\dfrac{63}{3}$

Задача 5. Сборът на втория и четвъртия член на растяща аритметична прогресия е 10, а произведението на първия и петия ѝ член е 21. Сумата на първите 16 члена на прогресията е:

А) 164 ***Б)*** 168 ***В)*** 172 ***Г)*** 160

Задача 6. Дадена е полуокръжност с диаметър AB, център точката O и радиус $R = \sqrt{2}$. Построен е радиус OC на полуокръжността, който е перпендикулярен на AB. В сектора, определен от радиусите OA и OC и дъгата $\overset{\frown}{AC}$ е вписана окръжност k. Радиусът на окръжността k е:

А) $\sqrt{2} - 1$ ***Б)*** $2 - \sqrt{2}$ ***В)*** 1 ***Г)*** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Задача 7. Избрани са четири котета (без връщане) от котило, което съдържа точно две рижави котета. Вероятността и двете рижави котета да са взети е два пъти по-голяма от вероятността нито едно от тях да е избрано. Броят на всички котета в котилото е:

А) 10 ***Б)*** 9 ***В)*** 8 ***Г)*** 7

Задача 8. Правилна шестоъгълна призма е описана около сфера с радиус $r = 3\sqrt{3}$. Радиусът на описаната около призмата сфера е:

А) $3\sqrt{7}$ ***Б)*** $3\sqrt{6}$ ***В)*** $4\sqrt{3}$ ***Г)*** $5\sqrt{3}$

Задача 9. Сумата на най-голямото и най-малкото цели числа, които са решения на неравенството $\log_{2025} \dfrac{|9x - 15| - 6}{|10 - 6x| + 2} \leq 0$, е:

А) 4 ***Б)*** 5 ***В)*** 7 ***Г)*** 3

Задача 10. В ромб $ABCD$ с остър ъгъл при върха A са построени височините DM и DN, $M \in AB$, $N \in BC$. Ако $DM = 4\sqrt{5}$ и $MN = 8$, то е лицето на ромба $ABCD$ е равно на:

А) $64\sqrt{5}$ ***Б)*** $80\sqrt{5}$ ***В)*** 100 ***Г)*** 80

Отговорите на задачи 11. и 12. запишете в листа за отговори!

Задача 11. Да се определи за кои стойности на параметъра a уравнението

$$\sin(x^2 - \sqrt{5}) = \sqrt{2}a^2 - \sqrt{18} - \cos(\sqrt{5} - x^2)$$

има решение.

Задача 12. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ с основи $AB = 5\sqrt{3}$ и $CD = 3\sqrt{5}$. Отсечката MN ($M \in AD$, $N \in BC$), успоредна на основите, разделя трапеца на две части с равни лица. Намерете дължината на отсечката MN.

Пълните решения на задачи 13., 14., 15. и 16. запишете в свитъка за решения!

Задача 13. Нека е дадена функцията $f(x) = x^3+px^2+(p+1)x+5$, където p е реален параметър и $x \in (-\infty; \infty)$.

а) Да се определи за кои стойности на p функцията $f(x)$ има два локални екстремума.

б) Нека функцията $f(x)$ има два локални екстремума, които се достигат за стойности на аргумента x_1 и x_2. Ако $x_1^2+x_2^2 = \dfrac{22}{9}$, да се определи ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в пресечната ѝ точка с графиката на функцията

$$g(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 7.$$

Задача 14. Дадени са окръжност k_1 с център O_1 и радиус $R = 4$ и окръжност k_2 с център O_2 и радиус $r = 1$, които се допират външно в точката T. Правата t е тяхна обща външна допирателна като k_1 и k_2 се допират до t съответно в точките A и B. Да се намери лицето на триъгълник ABT.

Задача 15. Да се реши системата $\left| \begin{array}{ll} x^{x+y} & = y^{x-y} \\ x^2y & = 1 \end{array} \right.$ $, x > 0.$

Задача 16. Основата на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е успоредник $ABCD$ с диагонал $AC = 8$. Височината на пирамидата има дължина $\dfrac{12}{5}$. Всички нейни околни стени сключват с равнината на основата ъгли, равни на $45°$. Да се намери пълната повърхнина на пирамидата.

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на белователа си;*
- *означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително;*
- *решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително, трябва да започва на нова страница;*
- *не смесвайте белова и чернова;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!