



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

12 април 2025 г.

ТЕМА №3.

Отговорите на задачите от 1. до 10. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Страните на триъгълник ABC имат дължини $AC = 7$, $BC = 5$ и $AB = 8$. Построена е вътрешна ъглополовяща CL при върха C , $L \in AB$. Окръжностите, вписани в триъгълник BLC и триъгълник ALC се допират до отсечката CL съответно в точките S и Q . Дължината на отсечката QS е:

- А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) $\frac{2}{3}$

Задача 2. Броят на наредените двойки $(x; y)$ от реални числа, които са решения на системата
$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ 9^x - 10 \cdot 3^{y+1} + 81 = 0 \end{cases}$$
 е:

- А) 4 Б) 2 В) 1 Г) 0

Задача 3. Даден е ромб $ABCD$ с лице 24 и сбор на диагоналите 14. Синусът на ъгъла между две съседни страни на ромба е:

- А) $\frac{3}{5}$ Б) $\frac{4}{5}$ В) $\frac{7}{25}$ Г) $\frac{24}{25}$

Задача 4. Всички решения на уравнението $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = -1$ са:

- А) $\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ Б) $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ В) $\frac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ Г) $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Задача 5. В успоредника $ABCD$ точките M и N са средите съответно на AB и AD . Отсечките AC и DM се пресичат в точката Q , а отсечките NC и DM - в точката P . Отношението на отсечките $DP : PQ : QM$ е:

- А) 3 : 1 : 2 Б) 7 : 3 : 5 В) 6 : 4 : 5 Г) 6 : 5 : 4

Задача 6. Сумата от корените на уравнението $\lg(3x - 2) + \lg x = \lg(5x - 4)$ е:

- А) $\frac{7}{3}$ Б) $\frac{5}{3}$ В) $\frac{1}{3}$ Г) $-\frac{4}{3}$

Задача 7. Спрямо правоъгълна координатна система $K = Oxy$ в равнината са дадени точките $A(-7; -4)$, $B(-1; -2)$ и $C(-8; 4)$. Координатите на ортоцентъра H на триъгълник ABC са:

- А) $\left(-\frac{28}{5}; -\frac{13}{5}\right)$ Б) $\left(-\frac{29}{5}; -\frac{13}{5}\right)$ В) $\left(-\frac{29}{5}; -\frac{14}{5}\right)$ Г) $\left(-\frac{28}{5}; -\frac{14}{5}\right)$

Задача 8. В кошница има 24 цветя, от които точно 8 са рози. За букет се избират три от цветята. Вероятността в избрания букет да има поне една роза е:

- А) $\frac{183}{253}$ Б) $\frac{70}{253}$ В) $\frac{120}{253}$ Г) 1

Задача 9. Всички околни стени на правилна пирамида с височина $h = \sqrt{15}$ сключват с равнината на основата ъгли, равни на 60° . Ако основата на пирамидата има обиколка $4\sqrt{15}$, то обемът ѝ е:

- А) 20 Б) $20\sqrt{5}$ В) $10\sqrt{3}$ Г) $10\sqrt{5}$

Задача 10. В този ред числата x, y, z образуват растяща геометрична прогресия, $x, y + 4, z$ образуват аритметична прогресия, а $x, y + 4, z + 32$ - геометрична прогресия. Сумата $x + y + z$ е:

- А) $\frac{51}{2}$ Б) $\frac{55}{2}$ В) 26 Г) 28

Отговорите на задачи 11. и 12. запишете в листа за отговори!

Задача 11. Равнобедрен триъгълник с основа 6 е вписан в окръжност с радиус $R = 2\sqrt{3}$. Да се намери радиуса на вписаната в триъгълника окръжност.

Задача 12. Да се реши уравнението $|2x - 5| + |4x + 2| = 6$.

Пълните решения на задачи 13., 14., 15. и 16. запишете в свитъка за решения!

Задача 13. Дадена е квадратната функция $f(x) = x^2 - (6k + 2)x + 10k^2 - k + 11$, където k е реален параметър.

- а) Да се определи за кои стойности на k уравнението $f(x) = 0$ няма реални корени;
- б) Да се определи за кои стойности на k сумата от квадратите на реалните корени на уравнението $f(x) = 0$ достига най-малката и най-голямата си стойности.

Задача 14. В триъгълник ABC отсечката AL , $L \in BC$, е вътрешна ъглополовяща, а точката M е средата на страната AB . Дадено е, че $AB = 14$, $AC = 11$ и $LM = LB$. Да се намери дължината на страната BC .

Задача 15. Да се реши уравнението $\frac{\sqrt[3]{x - \sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt[3]{x - \sqrt{2}}}{x^2} = \frac{x^2}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{x + \sqrt{2}}}$.

Задача 16. Двустенният ъгъл между две съседни околни стени на правилна четириъгълна пирамида е равен на 120° . Да се намери косинуса на ъгъла, който околен ръб на пирамидата сключва с равнината на основата ѝ.

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- номерирайте всички страници на беловата си;
- означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително;
- решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително, трябва да започва на нова страница;
- не смесвайте белова и чернова;
- черновата не се проверява и не се оценява.

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!