



# СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

## ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

12 април 2025 г.

### ТЕМА №3.

**Отговорите на задачите от 1. до 10. включително отбелявайте в листа за отговори!**

**Задача 1.** Страните на триъгълник  $ABC$  имат дължини  $AC = 7$ ,  $BC = 5$  и  $AB = 8$ . Построена е вътрешна ъглополовяща  $CL$  при върха  $C$ ,  $L \in AB$ . Окръжностите, вписани в триъгълник  $BLC$  и триъгълник  $ALC$  се допират до отсечката  $CL$  съответно в точките  $S$  и  $Q$ . Дължината на отсечката  $QS$  е:

- A)  $\frac{1}{6}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{2}$       D)  $\frac{2}{3}$

**Задача 2.** Броят на наредените двойки  $(x; y)$  от реални числа, които са решения на системата  
$$\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ 9^x - 10 \cdot 3^{y+1} + 81 = 0 \end{cases}$$
 е:

- A) 4      B) 2      C) 1      D) 0

**Задача 3.** Даден е ромб  $ABCD$  с лице 24 и сбор на диагоналите 14. Синусът на ъгъла между две съседни страни на ромба е:

- A)  $\frac{3}{5}$       B)  $\frac{4}{5}$       C)  $\frac{7}{25}$       D)  $\frac{24}{25}$

**Задача 4.** Всички решения на уравнението  $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = -1$  са:

- A)  $\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$       B)  $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$       C)  $\frac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$       D)  $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Задача 5.** В успоредника  $ABCD$  точките  $M$  и  $N$  са средите съответно на  $AB$  и  $AD$ . Отсечките  $AC$  и  $DM$  се пресичат в точката  $Q$ , а отсечките  $NC$  и  $DM$  - в точката  $P$ . Отношението на отсечките  $DP : PQ : QM$  е:

- A) 3 : 1 : 2      B) 7 : 3 : 5      C) 6 : 4 : 5      D) 6 : 5 : 4

**Задача 6.** Сумата от корените на уравнението  $\lg(3x - 2) + \lg x = \lg(5x - 4)$  е:

- A)  $\frac{7}{3}$       B)  $\frac{5}{3}$       C)  $\frac{1}{3}$       D)  $-\frac{4}{3}$

**Задача 7.** Спрямо правоъгълна координатна система  $K = Oxy$  в равнината са дадени точките  $A(-7; -4)$ ,  $B(-1; -2)$  и  $C(-8; 4)$ . Координатите на ортоцентъра  $H$  на триъгълник  $ABC$  са:

- A)  $\left(-\frac{28}{5}; -\frac{13}{5}\right)$       B)  $\left(-\frac{29}{5}; -\frac{13}{5}\right)$       C)  $\left(-\frac{29}{5}; -\frac{14}{5}\right)$       D)  $\left(-\frac{28}{5}; -\frac{14}{5}\right)$

**Задача 8.** В кошница има 24 цветя, от които точно 8 са рози. За букет се избират три от цветята. Вероятността в избрания букет да има поне една роза е:

- A)  $\frac{183}{253}$       B)  $\frac{70}{253}$       C)  $\frac{120}{253}$       D) 1

**Задача 9.** Всички околни стени на правилна пирамида с височина  $h = \sqrt{15}$  сключват с равнината на основата ъгли, равни на  $60^\circ$ . Ако основата на пирамидата има обиколка  $4\sqrt{15}$ , то обемът ѝ е:

- A) 20      B)  $20\sqrt{5}$       C)  $10\sqrt{3}$       D)  $10\sqrt{5}$

**Задача 10.** В този ред числата  $x, y, z$  образуват растяща геометрична прогресия,  $x, y + 4, z$  образуват аритметична прогресия, а  $x, y + 4, z + 32$  - геометрична прогресия. Сумата  $x + y + z$  е:

- A)  $\frac{51}{2}$       B)  $\frac{55}{2}$       C) 26      D) 28

**Отговорите на задачи 11. и 12. запишете в листа за отговори!**

**Задача 11.** Равнобедрен триъгълник с основа 6 е вписан в окръжност с радиус  $R = 2\sqrt{3}$ . Да се намери радиуса на вписаната в триъгълника окръжност.

**Задача 12.** Да се реши уравнението  $|2x - 5| + |4x + 2| = 6$ .

**Пълните решения на задачи 13., 14., 15. и 16. запишете в свитъка за решения!**

**Задача 13.** Дадена е квадратната функция  $f(x) = x^2 - (6k + 2)x + 10k^2 - k + 11$ , където  $k$  е реален параметър.

- Да се определи за кои стойности на  $k$  уравнението  $f(x) = 0$  няма реални корени;
- Да се определи за кои стойности на  $k$  сумата от квадратите на реалните корени на уравнението  $f(x) = 0$  достига най-малката и най-голямата си стойности.

**Задача 14.** В триъгълник  $ABC$  отсечката  $AL$ ,  $L \in BC$ , е вътрешна ъглополовяща, а точката  $M$  е средата на страната  $AB$ . Дадено е, че  $AB = 14$ ,  $AC = 11$  и  $LM = LB$ . Да се намери дълчината на страната  $BC$ .

**Задача 15.** Да се реши уравнението  $\frac{\sqrt[3]{x - \sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt[3]{x + \sqrt{2}}}{x^2} = \frac{x^2}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{x + \sqrt{2}}}$ .

**Задача 16.** Двустенният ъгъл между две съседни околни стени на правилна четириъгълна пирамида е равен на  $120^\circ$ . Да се намери косинуса на ъгъла, който околнен ръб на пирамидата сключва с равнината на основата ѝ.

---

**Време за работа 4 часа.**

Драги кандидат-студенти,

- номерирайте всички страници на беловата си;
- значавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително;
- решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително, трябва да започва на нова страница;
- не смесвайте белова и чернова;
- черновата не се проверява и не се оценява.

**Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!**