



СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

7 април 2024 г.

ТЕМА №1.

Отговорите на задачите от 1. до 10. включително отбелявайте в листа за отговори!

Задача 1. Ако $\log_3 a = 2$ и $\log_{\frac{1}{3}} b = 3$, то $\log_{ab} 9$ е равно на:

A) 2

B) -2

C) -1

D) 1

Задача 2. Решенията на неравенството $\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1} \geq 0$ са:

A) $x \in (-\infty; 0]$

B) $x \in (2; +\infty)$

C) $x \in [0; 2)$

D) $x \in (-1; 0] \cup (2; +\infty)$

Задача 3. Ако корените на $12t^2 - 7t + 1 = 0$ са t_1 и t_2 , то $\frac{t_1^2 + 3t_1t_2 + t_2^2}{(t_1t_2)^2}$ е равно на:

A) 37

B) 50

C) 61

D) 73

Задача 4. Ако $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, то $\frac{\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha}$ е равно на:

A) $\frac{31}{21}$

B) $\frac{23}{21}$

C) $\frac{21}{23}$

D) $\frac{21}{31}$

Задача 5. Намерете разликата между най-големия и най-малкия корен на уравнението

$$|||x - 4| - 3| - 2| = 1.$$

A) 14

B) 12

C) 10

D) 8

Задача 6. $ABCD$ е успоредник, за който $\angle ABC = 120^\circ$. Щглополовящата на $\angle DAB$ пресича страната CD в точка N , като $DN = 3$ и $CN = 2$. Намерете лицето на успоредника $ABCD$.

A) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

B) $\frac{15}{2}$

C) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

D) 15

Задача 7. Триъгълникът ABC е остроъгълен и $\angle BAC = 45^\circ$. Нека точка H е от AB , такава че $CH \perp AB$. Ако $AH : HB = 2 : 1$, намерете $\cos \angle ACB$.

A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

B) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

C) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Задача 8. $ABCD$ е квадрат със страна 4. Точка F е от страната AD , такава че $AF = 1$. Ако $DB \cap CF = O$, намерете S_{BOF} .

A) $\frac{24}{7}$

B) 3

C) 4

D) $\frac{7}{2}$

Задача 9. В правоъгълна координатна система са дадени правите $l : x - 4y + 3 = 0$, $m : 3x - y - 2 = 0$ и $n : 5x + 2y - 29 = 0$. Намерете лицето на триъгълника, определен от пресечните точки на правите l , m и n .

A) 11

B) 12

C) 13

D) 14

Задача 10. Хвърлят се две стандартни зарчета. Каква е вероятността сумата от точките да се дели на 2, но да не се дели на 3?

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{5}{18}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{13}{36}$

Отговорите на задачи 11. и 12. запишете в листа за отговори!

Задача 11. Решенията на уравнението $x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 = 0$ са:

Задача 12. Върху правата l лежат точките A , B и O . Окръжност k с център O минава през A . Ако $AB = 18$ и допирателната от B към k има дължина 12, намерете радиуса на k .

Пълните решения на задачи 13., 14., 15. и 16. запишете в свитъка за решения!

Задача 13. Решете уравнението $\log_2 x + \log_4 2x + \log_8 4x = 14$.

Задача 14. Правоъгълен триъгълник има лице 60 и радиус на вписаната окръжност 3. Намерете дължините на страните на триъгълника.

Задача 15. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб 1. Нека точка E е от ръба BB_1 , такава че $BE = \frac{1}{3}$. Намерете лицето на сечението на куба с равнината, определена от точките A , E и C_1 .

Задача 16. Нека $a > 0$ и $f(x) = \sqrt{ax^2} + 6ax - \sqrt{a} - 144$. Докажете, че уравнението $f(x) = 0$ има два реални корена. Ако тези корени са x_1 и x_2 , намерете минималната възможна стойност на $|x_1 - x_2|$.

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- номерирайте всички страници на беловата си;
- означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително;
- решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително, трябва да започва на нова страница;
- не смесвайте белова и чернова;
- черновата не се проверява и не се оценява.

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!