

Temă pentru acasă - partea B.

14 puncte [2p: B1] + [2p: B2] + [1.5p: B3] + [3.5p: B4] + [5p: B5]

B1. (2 puncte) Volumul paraboloidului eliptic

$$PE(a, b, c, h) = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z}{c}, z \in [0, h] \right\} \subseteq \\ \subseteq \left[-a\sqrt{\frac{h}{c}}, a\sqrt{\frac{h}{c}} \right] \times \left[-b\sqrt{\frac{h}{c}}, b\sqrt{\frac{h}{c}} \right] \times [0, h]$$

este $\frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot h^2}{2c}$. Estimați acest volum utilizând metoda Monte Carlo pentru $a = 4$, $b = 3$, $c = h = 4$ și comparați rezultatul cu valoarea exactă. Folosiți eșantioane de dimensiune 20000, 50000 și 100000 și calculați erorile relative.

B2. (2 puncte) Fie T trapezul definit astfel $T = \{(x, y) : x \geq 1, y \leq 2, y \leq x - 1, y \leq 7 - x\}$. Determinați o zona rectangulară $[a, b] \times [c, d]$ care include punctele interioare ale acestui trapez și apoi estimați aria lui T folosind metoda Monte Carlo cu un eșantion de dimensiune cel puțin 20000.

B3. (1.5 puncte) Estimați valorile următoarelor integrale și comparați rezultatul cu valorile exacte:

$$(a) \int_1^2 \frac{x \, dx}{(x^2 + 2)^3} = \frac{1}{48}; (b) \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{\pi}{6}; (c) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\int_0^a x e^{-x^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

B4. (3.5 puncte) Patru servere web oferă u același serviciu clienți (web). Timpul necesar procesării unei cereri (request) HTTP este distribuit $\Gamma(4, 3)$ pe primul server, $\Gamma(4, 2)$ pe cel de-al doilea, $\Gamma(5, 2)$ pe cel de-al treilea și $\Gamma(5, 3)$ pe cel de-al patrulea (în milisecunde⁻¹). La această durată se adaugă latența dintre client și servere pe Internet care are o distribuție exponențială cu $\lambda = 4$ (în milisecunde). Se știe că un client este direcționat către primul server cu probabilitatea 0.25, către al doilea cu probabilitate 0.25 și către al treilea server cu probabilitatea 0.30. Estimați timpul mediu necesar servirii unui client (de la lansarea cererii până la primirea răspunsului).

B5. (5 puncte) Cincizeci de studenți au conturi pe un același server de mail. Contul unui student este infectat de un malware. În fiecare zi, acest malware se răspândește și ajunge de la un cont infectat la orice alt cont neinfectat cu probabilitate p . De asemeni, în fiecare zi (începând cu a doua zi), administratorul de sistem curăță la întâmplare 8 conturi infectate (sau toate conturile infectate dacă acestea sunt în umăr mai mic de 8). (Pentru probabilitatea p se consideră următoarele valori posibile: 0.05, 0.1, 0.2.)

- (a) Estimați probabilitatea ca fiecare cont să fie infectat cel puțin o dată.
- (b) Estimați probabilitatea ca după 7 zile să mai existe conturi infectate.
- (c) Cât de mare trebuie să fie numărul de simulări ("runs") - adică dimensiunea eșantionului - astfel ca ultima probabilitate să aibă o eroare de cel mult ± 0.01 cu probabilitatea 0.99? Găsiți o astfel de estimare.

Rezolvările acestor exerciții (funcțiile R și apelurile lor) vor fi redactate într-un singur script R.