Забележка 4.1. Мерките μ^+ и μ^- , свързани с коя да е мярка μ, ще наричаме съответно положителна и отрицателна част на μ. Разлагането $\mu = \mu^+ - \mu^-$ на една мярка μ на положителна и отрицателна част (както и представянето на случайните величини във вида $\xi = \xi^+ - \xi^-$) е изключително полезно свойство, позволяващо редица твърдения за μ да се доказват чрез съответните твърдения за положителните мерки μ^+ и μ^-. Разбира се, и множеството (на Жордан-Хан) $\mathbf{D}$, свързано с мярката μ както в теорема 1, е съществена характеристика на μ, заедно с μ^+ и μ^- многократно ще се използува по-нататък.

Следствие 4.1. *Мярката μ в $(\Omega, \mathbf{P})$ е ограничена тогава и само тогава, когато $\mu(\Omega) < \infty$.*

Доказателство. Според теорема 1 за всяко $A \in \mathfrak{F}$ имаме

$$-\infty \leq -\mu^-(\Omega) \leq -\mu^-(A) \leq \mu(A) \leq \mu^+(A) \leq \mu^+(\Omega) \leq +\infty,$$

където $\mu^+ = \mu(\Omega) + \mu^-(\Omega)$. Следователно, определението за ограниченост $sup_{A\in\mathfrak{F}}|\mu(A)| < \infty$ е еквивалентно на $\mu^+(\Omega) < \infty$ и еквивалентно на $\mu(\Omega) < \infty$.

□

Определение 4.1. Ограничената мярка μ се нарича абсолютно непрекъсната ($\mu \ll \mathbf{P}$) относно вероятността $\mathbf{P}$ в $(\Omega, \mathbf{P})$, а ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че при $\mathbf{P}(A) \leq \delta$ имаме $|\mu(A)| \leq \varepsilon$, $A \in \mathfrak{F}$.

Определение 4.2. Положителната и ограничена мярка μ се нарича сингулярна ($\mu \perp \mathbf{P}$) относно вероятността $\mathbf{P}$ в $(\Omega, \mathbf{P})$, ако съществува множество $\S \in \mathfrak{F}$ такова, че $\mu(\overline{S}) = \mathbf{P}(S) = 0$.

Следващата теорема показва, че всяка мярка в едно вероятностно пространство може да се разложи на абсолютно непрекъсната и сингулярна компонента.

Теорема 4.1 (Лебег). *Нека $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ е вероятностно пространство и μ е ограничена (и положирелна) мярка в $(\Omega, \mathbf{P})$. Тогава*

1) *Съществува интегруема (и положителна) случайна величина ξ и $\mathbf{P}$-нулево ($\mathbf{P}(N) = 0$) подмножество N в $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, такива че*

$$\mu(A) = \int_A \xi d\mathbf{P} + \mu(A \cap B), A \in \mathfrak{F} \qquad (4.12)$$

2) *Разлагането* (4.12) *на мярката* μ *като сума на неопределен интеграл по вероятността* $\mathbf{P}$ *и мярка, сингулярна относно* $\mathbf{P}$, *е единствено.*

3) *Ако* μ *е положителна мярка, то* ξ *е най-голямата (с точност до* $\mathbf{P}$*-еквивалентсност) случайна величина, за която е изпълнено* $\mathbf{I}_\xi(A) = \int_A \xi d\mathbf{P} \leq \mu(A)$, $A \in \mathfrak{F}$.

Доказателство. Ключов момент в доказателството е 3), съпоставящо на всяка ограничена и положителна мярка енда неотрицателна случайна величина (клас от $\mathbf{P}$-еквивалентни с.в.). Ще предполагаме, че μ **е положителна ограничена мярка**. С помощта на теорема 1 читателят сам ще се убеди, че изискването за положителност не е съществено.

А. Дефинираме класа

$$\mathscr{L} = \{(\text{класове } \mathbf{P}\text{-еквивалентни) с.в. } \eta \geq 0 : \mathbf{I}_\eta(A) \leq \mu(A), A \in \mathfrak{F}\}.$$

Класът $\mathscr{L}$ има свойствата:

(а) $0 \in \mathscr{L}$

(б) Ако $\eta_1, \eta_2 \in \mathscr{L}$, то $sup(\eta_1, \eta_2) \in \mathscr{L}$.

(в) Ако $\{\eta_n, n \geq 0\} \subseteq \mathscr{L}$ е $\mathbf{P}$-п.с. растяща редица от случайни величини, то $\eta = \uparrow lim \eta_n \in \mathscr{L}$.

Наистина, (Аа) е очевидно, понеже μ е положителна мярка. Понататък, ако $B = \{\omega : \eta_1 \geq \eta_2\}$, то

$$\int_A sup(\eta_1, \eta_2) d\mathbf{P} = int_{A \cap B} \eta_1 d\mathbf{P} + int_{A \cap \overline{B}} \eta_2 d\mathbf{P}$$
$$\leq \mu(A \cap B) + \mu(A \cap \overline{B}) = \mu(A), A \in \mathfrak{F},$$

което доказва (Аб). Най-после, свойство (Ав) следва от непрекъснатостта на лебеговия интеграл относно монотонна сходимост (вж. гл. 3).

Б. Ще покажем, че класът $\mathscr{L}$ има максимален лемент, т. е. , че съществува случайна величина $\xi \in \mathscr{L}$ със свойството

$$\xi \geq \eta \mathbf{P} - \text{п.с. }, \eta \in \mathscr{L}. \tag{4.13}$$

Б. а) На всяко **изброимо** семейство $\{\eta_j, j \in J\} \subseteq \mathscr{L}$ да съпоставим случайна величина $\eta_j = sup_{j \in J} \eta_j \in \mathscr{L}$ (вж. свойство (Ав) по-горе). Нека $M = sup_{J-\text{изброимо}} \mathbf{E} \eta_J \leq \mu(\Omega) < \infty$. **Точната горна граница M се достига за някой елемент** $\eta_{J_0} \in \mathscr{L}$. Действително, за всяко $n > 1$

съществува изброимо семейство $\{\eta_j, j \in J_n\}$, такова че $\mathbf{E}\eta_{J_n} \geq M - \frac{1}{n}$. Тогава семейството $\{\eta_j, j \in J_0\}, J_0 = \cup_{n\geq 1} J_n$ е също изброимо и за него имаме $\mathbf{E}\eta_{J_0} \geq \mathbf{E}\eta_{J_n} \geq M - \frac{1}{n}, n \geq 1$. Следователно, $\mathbf{E}\eta_{J_0} = M$.

Б. б) За случайната величина $\xi = \eta_{J_0}$ ще докажем свойството (4.13). $\blacksquare$ Да допуснем, че съществува с.в. $\eta \in \mathscr{L}$, такава че събитието $A = A(\eta) = \{\omega : \eta > \xi\}$ има вероятност $\mathbf{P}(A) > 0$. Очевидно събитията $A_n = \{\omega : \eta \geq \xi + \frac{1}{n}\}, n \geq 1$, удовлетворяват $A_n \uparrow A$. Следователно, $\mathbf{P}(A_n) \uparrow \mathbf{P}(A) > 0$. Тогава случайната величина $\eta^* = sup(\eta, \xi) \in \mathscr{L}$ има свойството

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\eta^* &= \int_{A_{n_0}} \eta d\mathbf{P} + \int_{A \setminus A_{n_0}} \eta d\mathbf{P} + \int_{\overline{A}} \xi d\mathbf{P} \\ &\geq \int_{A_{n_0}} (\xi + \frac{1}{n_0}) d\mathbf{P} + \int_{A \setminus A_{n_0}} \xi d\mathbf{P} + \int_{\overline{A}} \xi d\mathbf{P} \\ &= \frac{1}{n_0}\mathbf{P}(A_{n_0}) + \mathbf{E}\xi > M, \end{aligned}$$

което противоречи на избора на M. Следователно $\mathbf{P}(A(\eta)) = 0$ за всяко $\eta \in \mathscr{L}$ и това доказва (4.13).

В. Полагаме

$$\mu'(A) = \mu(A) - \mathbf{I}_\xi(A), A \in \mathfrak{F}. \tag{4.14}$$

Мярката μ' е положителна, защото $\xi \in \mathscr{L}$. Ще покажем, че μ' е съсредоточена върху някое $\mathbf{P}$-нулево множество.

В. а) Нека $D_n, n \geq 1$, е множество (на Жордан-Хан), съответстващо на мярката $(\mu' - \frac{1}{n}\mathbf{P})$ в смисъла на теорема 1. По определение

$$\mu'(A \cap D_n) \geq \frac{1}{n}\mathbf{P}(A \cap D_n); \mu'(A \cap \overline{D}_n) \leq \frac{1}{n}\mathbf{P}(A \cap \overline{D}_n)$$

т. е. случайната величина $\xi + \frac{1}{n}I(D_n) \in \mathscr{L}$. Понеже ξ има свойството (4.13), то $\mathbf{P}(D_n) = 0$. Събитието $N = \cup_{n\geq 1} D_n$ е също **P-нулево:** $\mathbf{P}(N) = 0$.

В. б) За всяко $n \geq 1$ имаме неравенствате

$$\mu'(\overline{N}) \leq \mu'(\overline{D}_n) \leq \frac{1}{n}\mathbf{P}(\overline{D}_n) \leq \frac{1}{n}$$

Те означават, че $\mu'(\overline{N}) = 0$, т. е. μ' **е съсредоточена в множеството N**. Слетователно тъй като $(\mathbf{I}(N) = 0)$,

$$\mu'(A) = \mu'(A \cap N) = \mu(A \cap N), A \in \mathfrak{F},$$

което заедно с (4.14) доказва (4.12).

Г. Остава да докажем,единствеността на лебеговото представяне (4.12). Нека

$$\mu(A) = \mathbf{I}_\eta(A) + \nu(A), A \in \mathfrak{F},$$

където ν е мярка в $(\Omega, \mathfrak{F})$, сингулярна относно $\mathbf{P}$, а η е интегруема с.в. От това веднага следва, че $\mathbf{I}_\eta \leq \mu(A), A \in \mathfrak{F}$, т. е. $\eta \in \mathscr{L}$, откъдето според (4.13) $\eta \leq \xi$ $\mathbf{P}$-п.с.

Определението 4.2 ни казва, че съществува множество $S \in \mathfrak{F}$.

$\square$