IV Vertex cover

a) Considerăm o formulă de forma $\bigwedge_{x_k \in X \setminus \{x_i, x_j\},\ 1 \le i, j, k \le n} (x_i \vee x_j \vee x_k)$, adică $x_i, x_j \in X$ sunt 2 variabile fixate și x_k ia restul valorilor din X în afară de x_i și x_j. Astfel, formula este formată din n-2 predicate. La pasul 3 al algoritmului se alege un predicat aleator. În final vor fi alese toate predicatele. La pasul 4 se alege aleator ~~un~~ o variabilă x din predicat. La fiecare alegere aleatoare se poate ca algoritmul Greedy să aleagă mereu variabila x_k, astfel efectuând n-1 operații de ștergere până se vor șterge toate toate predicatele. Dacă la prima iterație ar fi ales x_i sau x_j atunci s-ar fi eliminat toate predicatele.

Astfel, considerăm $OPT = 1$ și $ALG = n-2 \Rightarrow OPT \le ALG \le (n-2) OPT$.

Conform celor prezentate anterior, algoritmul Greedy-3CNF este (n-2)-aproximativ, în funcție de numărul de variabile din mulțimea X.

b) 1: $C' = \{C_1, \dots, C_m\}$ mulțimea de predicate
$X = \{x_1, \dots, x_m\}$ mulțimea de variabile

2: cât timp $C' \neq \emptyset$ execută
3: alegem aleator or $C_j \in C$
4: fie x_i, x_j, x_k variabilele din C_j
5: $x_i \leftarrow true$, $x_j \leftarrow true$, $x_k \leftarrow true$
6: eliminăm din C' toate predicatele ce conțin x_i, x_j sau x_k

7: returnăm X

Justificare:

La fiecare pas, în C' vom avea doar predicatele care încă nu au fost evaluate cu true. În final, C' este vidă $\Rightarrow$ nu vor fi predicate să nu fi fost evaluate cu true.

Considerăm C^* mulțimea de predicate selectate la pasul 3. Când adăugăm un predicat în C^*, toate celelalte ~~predicate din C~~ ~~vor~~ predicate din C' care conțin ~~acelea~~ măcar una dintre variabilele predicatului curent vor fi șterse și nu vor mai fi niciodată adăugate în C^*. Astfel putem afirma că mulțimea C^* este o mulțime de predicate disjuncte (nu au variabile comune).

Considerăm ALG soluția furnizată de algoritmul Greedy și OPT soluția optimă.

Astfel, cum fiecare predicat din C^* conține exact 3 variabile $\Rightarrow |ALG| = 3|C^*| \leq 3|OPT| \Rightarrow$ algoritmul Greedy este 3-aproximativ.

c) Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cu proprietatea că dacă $x_i = 1$ atunci x_i este considerat true. Dacă $x_i = 0$ atunci x_i este considerat false. Se dorește minimizarea $\sum_{i=1}^{n} x_i$

Constrângerile:

1. Pentru orice predicat de forma $(x_i \vee x_j \vee x_k)$ trebuie ca $x_i + x_j + x_k \geq 1$
2. $\forall i = \overline{1,n}$ avem $0 \leq \cancel{x}_i \leq 1$

d) Soluție problemă programare liniară

Rezolv problema în varianta cu numere reale și dacă $x_i \geq \frac{1}{3}$ atunci rotunjesc x_i la 1 și implicit x_i va fi considerat true, altfel x_i va avea valoarea 0 și va fi considerat false.

Prin prima constrângere de la subpunctul anterior ne asigurăm că pentru orice predicat C măcar una dintre variabilele sale este 1 (adică true). Astfel o conjuncție care are măcar un termen true va fi evaluată la true. Astfel, pentru un $(x_i \vee x_j \vee x_k)$ predicat, avem x_i sau x_j sau $x_k \geq \frac{1}{3}$, deci măcar uneia dintre aceste variabile i se va atribui valoarea de true.

Considerăm OPT soluția optimă a problemei și ALG soluția descrisă anterior.

$$ALG = \sum_{1 \leq i \leq n} \begin{cases} 1, & x_i \geq \frac{1}{3} \\ 0, & x_i < \frac{1}{3} \end{cases} = \sum_{1 \leq i \leq n} 3x_i \leq 3 \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \leq 3\,OPT$$

$\Rightarrow$ soluția prezentată anterior este un algoritm 3-aproximativ.