CARUȚAȘU ADRIANA ȘTEFANIA
GRUPA 343

I CALCULABILITATE

1. a) P

$x_i := x_i - 1$

WHILE $x_i \neq 0$ DO P END

b) IF $x_i = 0$ DO END

ELSE

DO P UNTIL $x_i = 0$ END

END

2. $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(m, m) = m$

$f(m, 0) = m$

$$f(m,n) = \begin{cases} f(sub(m,n), n), & m > n \\ f(sub(n,m), m), & m < n \end{cases}$$

Primele 2 funcții sunt proiecții. Din acest motiv se poate deduce faptul că ele sunt primitiv recursive.

A 3-a funcție rezultă din compunerea cu funcția sub, care știm că este primitiv recursivă.

Astfel se poate afirma că funcția f este primitiv recursivă.

3. $L(G) = H_0 = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ cM$_w$, aplicată pe banda goală, oprește în timp finit$\}$

Se poate observa faptul că aceasta este o variantă a Problemei Opririi.

Avem astfel funcția caracteristică asociată care este calculabilă astfel:

$$\chi_{L(G)}(w) = \begin{cases} 1, & w \in L(G) \\ 0, & w \notin L(G) \end{cases}$$

Astfel se poate trage concluzia că $L(G)$ este decidabilă deci există o gramatică G care produce limbajul $L(G)$.

4.

II

4. $G_1 = (V_1, E_1)$

$V_1 = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q\}$

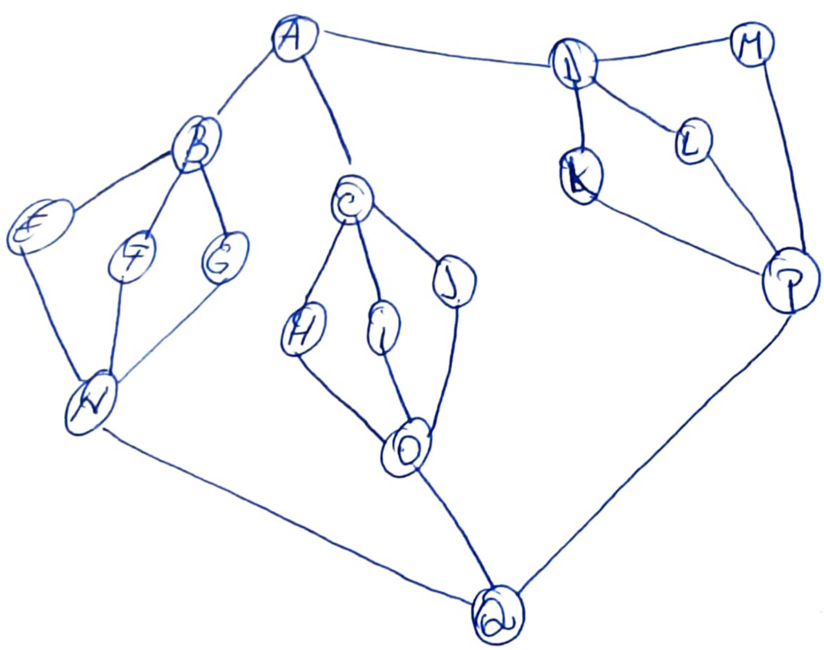
$E_1 = \{AB, AC, AD, BE, BF, BG, CH, CI, CJ, DK, DL, DM, EN, FN, GN, HO, IO, JO, KP, LP, MP, NQ, OQ, PQ\}$

$G_2 = (V_2, E_2)$

$V_2 = V_1$

$E_2 = E_1 \cup \{AQ\}$

a)



a) Cum graful G_1 este conex, putem încerca să colorăm graful în 2 culori.

Fie $c_1 : V_1 \to \{1, 2\}$ definită după cum urmează:

$c_1(A) = 1$	$c_1(F) = 1$	$c_1(K) = 1$	$c_1(P) = 2$
$c_1(B) = 2$	$c_1(G) = 1$	$c_1(L) = 1$	$c_1(Q) = 1$.
$c_1(C) = 2$	$c_1(H) = 1$	$c_1(M) = 1$	
$c_1(D) = 2$	$c_1(I) = 1$	$c_1(N) = 2$	
$c_1(E) = 1$	$c_1(J) = 1$	$c_1(O) = 2$	

unde 1 și 2 reprezintă 2 culori distincte.

Am pornit de la vârful A și l-am colorat cu culoarea 1. Pe toți vecinii lui i-am colorat cu culoarea 2 și am continuat algoritmul similar pentru restul vârfurilor.

Se poate observa că oricare ar fi $v_1, v_2 \in V_1$, dacă $v_1 v_2 \in E_1$ atunci $c_1(v_1) \neq c_1(v_2)$.

Astfel avem $n_1 = 2$.

b) Se poate observa că graful G_2 are în plus față de graful G_1 muchia AQ.

În graful G_1, vârfurile A și Q au aceeași culoare, ceea ce nu este posibil în G_2.

Astfel, considerăm funcția $c_2 : V_2 \to \{1, 2, 3\}$ care are aceleași valori ca ~~cele~~ funcția c_1 pe mulțimea $E_2 \setminus \{Q\}$ și $c_2(Q) = 3$.

$\forall v_1, v_2 \in V_2$, dacă $v_1 v_2 \in E_2$, atunci $c_2(v_1) \neq c_2(v_2)$

$\Rightarrow n_2 = 3$

6. $\psi = \underbrace{\forall x}_{Q_1 x_1} \underbrace{\forall y}_{Q_2 x_2} \underbrace{\exists z}_{Q_3 x_3} \underbrace{\forall v}_{Q_4 x_4} (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg z \vee x) \wedge (\neg z \vee y) \wedge (\neg z \vee v)$

~~Notăm~~

$Q_1 = \forall \Rightarrow \psi \Leftrightarrow \psi_{x_1=0} \wedge \psi_{x_1=1}$

$\Leftrightarrow (1 \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg z \vee 0) \wedge (\neg z \vee v) \wedge (0 \vee \neg y \vee z) \wedge$
$(\neg z \vee 1) \wedge (\neg z \vee y)$

$\Leftrightarrow (\neg z) \wedge (\neg z \vee y) \wedge (\neg z \vee v) \wedge (\neg y \vee z)$

$Q_2 = \forall \Rightarrow \psi \Leftrightarrow \psi_{x_1=0} \wedge \psi_{x_1=1} \Leftrightarrow \psi_{y_0=0} \wedge \psi_{y_1=1}$

~~$\Leftrightarrow (\neg z) \wedge (\neg z \vee 0) \wedge (\neg z \vee v) \wedge (1 \wedge z)$~~

$\Leftrightarrow (\neg z) \wedge (\neg z \vee 0) \wedge (\neg z \vee v) \wedge (1 \vee z) \wedge (\neg z) \wedge (\neg z \vee 1) \wedge$
$(\neg z \vee v) \wedge (0 \vee z)$

$\Leftrightarrow (\neg z) \wedge (\neg z \vee v) \wedge (z) = 0 \Rightarrow$ propoziția nu este în TQBF