II Load Balance

2. ALG1 = 2-aproximativ ; ALG2 = 4-aproximativ

a) Fie OPT soluția optimă

ALG1 = 2-aproximativ $\Rightarrow$ $OPT \leq ALG1 \leq 2OPT \quad / \cdot 2$

$$2OPT \leq 2ALG1 \leq 4OPT$$

Alegem I un input cu proprietatea că $ALG2(I) = 4OPT$. (*)

$ALG2(I) = 4OPT$

$2ALG1(I) \leq 4OPT$

$\Rightarrow ALG2(I) \geq 2ALG1(I) \Rightarrow$ Există un I cu proprietatea cerută

(*) ALG2 = 4-aproximativ $\Rightarrow$ $OPT \leq ALG2 \leq 4OPT$

b) $OPT \leq ALG2(i) \leq 4OPT \quad | \cdot 2$

$2OPT \leq 2ALG2(i) \leq 8OPT$

Cum ALG1 este 2-aproximativ $\Rightarrow ALG1(I) \leq 2OPT \ \forall \ I$ input.

$2ALG2(I) \geq 2OPT$

$2OPT \geq ALG1(I)$

$\Rightarrow \nexists \ I$ input a.î. $ALG1(I) > 2 \cdot ALG2(I)$

3. Fie o mulțime de n activități sortate descrescător după timpul de procesare $\Rightarrow t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq t_{n-1} \geq t_n$.

Din Lema 1 din Curs 2 avem că $OPT \geq \max\left(\frac{1}{m}\sum_{1\le j\le n} t_j, \max\{t_j \mid 1\le j\le n\}\right)$

(În cazul de față avem $\max\{t_j \mid 1 \le j \le n\} = t_1$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow OPT \geq \max\left(\frac{1}{m}\cdot\sum_{1\le j\le n} t_j,\ t_1\right)$

Din Lema 3 din Curs 2 avem că dacă $n > m$ atunci $OPT \geq t_m + t_{m+1}$, unde m este numărul de mașini

Fie k indicele mașinii cu load maxim în urma algoritmului $\Rightarrow$ avem $ALG = load(k)$.

Considerăm q ultima activitate a mașinii cu indicele k.

Considerăm $load(k)$ = load-ul mașinii ~~k~~ după ce au fost distribuite primele $q-1$ activități. $\Rightarrow ALG = load(k) + t_q$

$$load(k) = \frac{1}{m}\sum_{1\le i\le m} load(i) = \frac{1}{m}\sum_{1\le i\le q} t_j = \frac{1}{m}\left(\sum_{1\le j\le n} t_j - t_q\right) \le$$

$$\le \frac{1}{m}\sum_{1\le j\le n} t_j - \frac{1}{m}t_q \le OPT - \frac{1}{m}t_q$$

Cazul I: $q \le m \Rightarrow$ Activitatea q va fi asignată unei mașini goale $\Rightarrow ALG = t_q \le t_1 \le OPT \Rightarrow ALG = OPT$

Cazul II: $q > m \Rightarrow ALG = load(k) + t_q \le OPT - \frac{1}{m}t_q + t_q = OPT + \left(1 - \frac{1}{m}\right)t_q$

Avem $t_q \le \frac{1}{2}(t_m + t_{m+1}) \Rightarrow ALG \le OPT + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\cdot\frac{1}{2}(t_m + t_{m+1}) \le$

$$\le OPT + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right)OPT \le \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2m}\right)OPT \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Algoritmul este $\frac{3}{2} - \frac{1}{2m}$ - aproximativ