Cursul 1: spațiul stărilor = Ω = mulțimea tuturor rezultatelor posibile

↳ evenimente elementare = ω

$\mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subseteq \Omega\}$ = mulțimea tuturor even. posibile

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ = mult. even. posibile asociate exp. aleator $\Rightarrow$ algebră

Cursul 2: abordarea frecvenționistă

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Formula lui Poincaré: $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n)$$

Inegalitatea lui Boole: $\mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}_{\text{șir de evenimente}}\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Modelul clasic (Laplace):
$$\left.\begin{array}{l} \Omega \text{ - discret (nr. finit de even.)} \\ \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \\ \mathbb{P}(\omega_i) = 1/N \text{ echirepartiție} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Cursul 3: Formula sumei: $|A \cup B| = |A| + |B|$, unde A, B mulțimi disjuncte

principiul includerii-excluderii

formula produsului: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Schema de extragere cu revenire / fără revenire n^k / $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

Nr. de părți de cardinal k al unei mulțimi de cardinal n = $C_n^k = \binom{n}{k}$

Nr. de șiruri de lungime n care conțin n_1 elemente de tip 1, n_2 elemente de tip 2, …, n_k elemente de tip k a.î. $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ este $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} = \dbinom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$

Cursul 4: probabilități condiționate: $\mathbb{P}(A \mid B)$ știind că / evenimentul care s-a realizat $= \boxed{\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$

generalizare: $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

Formula probabilității totale: Să presupunem că Ω este divizat în B_1, B_2, B_3 ev. disjuncte.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \mathbb{P}(A \cap B_3)$$
$$= \mathbb{P}(A \mid B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A \mid B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(A \mid B_3) \cdot \mathbb{P}(B_3)$$

Fie A un even cu $0 < \mathbb{P}(A) < 1$: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)$

Formula lui Bayes: $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$. Atunci $\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c) \cdot \mathbb{P}(B^c)}$

Intuitiv, 2 even. A și B sunt **INDEPENDENTE** dacă realizarea uneia dintre ele nu influențează realizarea celeilalt.

$A \perp\!\!\!\perp B$

$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ → generalizare pt. mai multe even. independente (mutual independente)

Evenimentele A și B sunt indep. condiționate de even. C dacă $\mathbb{P}(A\cap B|C) = \mathbb{P}(A|C)\cdot\mathbb{P}(B|C)$

$Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|C) \to Q(A\cap B) = Q(A)\cdot Q(B)$

Variabile aleatoare

→ evenimente de interes

→ v.a.: asociem unui even. elementar $\omega\in\Omega$ o valoare numerică $\mathbb{R}$

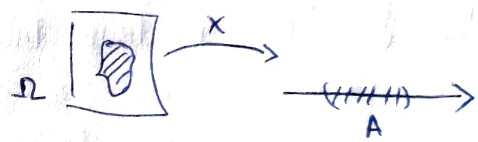
$\Rightarrow$ funcție reală $X: \underset{\text{exper. aleator}}{(\Omega)} \to \mathbb{R}$ care are prop. că $\{\omega \mid X(\omega)\le x\}\in\mathcal{F},\ \forall x\in\mathbb{R}$

Spunem că o v.a. X este **DISCRETĂ** dacă $X(\Omega)$ (mulțimea valorilor pe care le poate lua X) este cel mult numărabilă. Altfel, X este continuă.

În general, pentru o v.a. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ vrem să calculăm probabilități de tipul $\{X\in A\}$

$\mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(\underbrace{\{\omega \mid X(\omega)\in A\}}) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$

$= X^{-1}(A)$ = preimaginea lui A



Exemplul 6: Aruncăm o monedă echilibrată de 2 ori: $\Omega = \{HT, HH, TH, TT\}$

$X:\Omega\to\mathbb{R}$, X = nr. de H în cele 2 aruncări $\Rightarrow X(\Omega) = \{0,1,2\}$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(TT) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(HT\cup TH) = \mathbb{P}(HT) + \mathbb{P}(TH) = \frac{1}{2}$

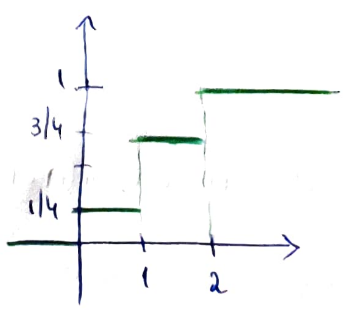
$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(HH) = \frac{1}{4}$

$A = \{0,1\} \Rightarrow \mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Repartiția unei v.a.: = probabilitatea $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X\in A)\ \forall A\in\mathbb{R} = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ → preimaginea

↳ Funcția de repartiție = funcția $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ definită prin $F(x) = \mathbb{P}(X\le x)\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$F(x) = \mathbb{P}(X\le x) = \begin{cases} 0, & x<0 \quad \to \text{even. imposibil} \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1 \quad \to = \mathbb{P}(X=0) \\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2 \quad \to = \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1) \\ 1, & 2\le x \quad \to = \mathbb{P}(\Omega) \end{cases}$$



- F crescătoare
- F continuă la dreapta: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} F(x) = F(x_0)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$

$$P(X>x) = 1 - P(X\le x) = 1 - F(x)$$
$$P(x<X\le y) = P(X\le y) - P(X\le x) = F(y) - F(x)$$
$$P(X=x) = P(X\le x) - P(X<x) = F(x) - \lim_{\substack{y\to x\\ y<x}} F(y)$$

Variabile aleatoare discrete $P(X\in A) = P(X\in \bigcup_{x\in A\cap X(\Omega)}\{x\}) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)} \underbrace{P(X=x)}_{p_X(x)}$

Funcția de masă asociată unei v.a.d. → funcția $p_X(x) = P(X=x)$, $x\in\mathbb{R}$
(la continue nu există)

Modul în care v.a.d. X este repartizată se mai notează: $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ \underset{p_1}{P(X=x_1)} & \underset{p_2}{P(X=x_2)} & \dots \end{pmatrix}$ → valorile pe care le ia; → funcția de masă
≠ funcția de repartiție

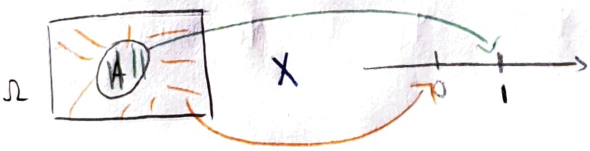
proprietăți: $p_X(x)\ge 0$ și $\sum_{x\in X(\Omega)} p_X(x) = 1$ (masa totală $=1$)

Exemple: a) $X:\Omega\to\mathbb{R}$, $X=c$ (constantă) $\Rightarrow p_X(x) = \begin{cases} 0, & x\ne c \\ 1, & x=c \end{cases}$

$F(x) = P(X\le x) = \begin{cases} 0, & x<c \\ 1, & c\le x \end{cases}$

b) Variabile aleatoare Bernoulli (iau 2 valori)
- pp. că avem un exper. aleator și ne interesăm la (ne)realizarea unui ev. A
- considerăm că șansa de realizare a lui $A = p \Rightarrow P(A)=p$

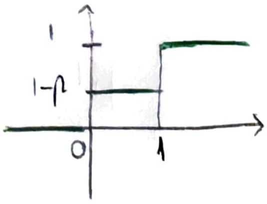
$X:\Omega\to\mathbb{R}$, $X = \begin{cases} 1, & w\in A \\ 0, & w\notin A \end{cases}$



Aruncăm cu o monedă. $A=\{H\}$. Atunci $X:\Omega\to\{0,1\}$, $X(w) = \begin{cases} 1, & w=H \\ 0, & w=T \end{cases}$

Funcția de masă: $p_X(x) = \begin{cases} p, & x=1 \\ 1-p, & x=0 \end{cases}$ → $P(X=1)$ = prob. realizării lui $A = P(A) = p$

Funcția de repartiție: $F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-p, & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x \end{cases}$ → $X\in\{0,1\} \Rightarrow \{X=0\}\cup\{X=1\}$

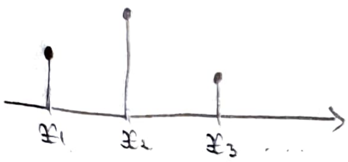


Forma compactă: $p_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x\in\{0,1\}$

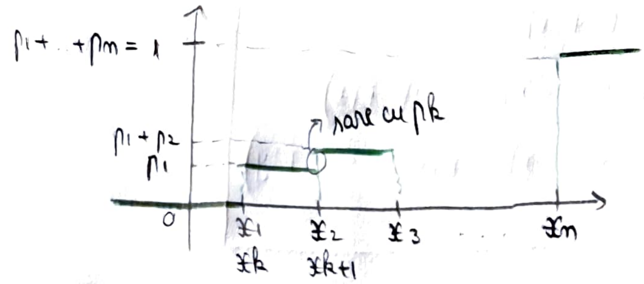
c) Variabile discrete cu suport finit: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $p_X(x_i) = p_i$, $i=\overline{1,n}$

$F(x) = \begin{cases} 0, & x<x_1 \\ p_1, & x_1\le x<x_2 \to \{X\le x\} = \{X=x_1\} \\ p_1+p_2, & x_2\le x<x_3 \to \{X=x_1\}\cup\{X=x_2\} \\ \vdots \\ 1, & x\ge x_n \end{cases}$

→ presupunând că $x_1<x_2<\dots<x_n$
dacă $x_k\le x<x_{k+1}$
$F(x) = p_1+p_2+\dots+p_k$



funcția de masă



d) V.a. binomiale: $X(\Omega)=\{0,1,\dots,n\}$

Pp. că avem n exper. aleatoare independente și în realizarea fiecărui experiment ne interesăm în (ne)realizarea unui even. A ($\mathbb{P}(A)=p$). V.a. X definită prin nr. total de realizări ale even. A în cele n experimente este o v.a. de tip binomial de parametru n,p: $X\sim B(n,p)$

(dacă $n=1 \Rightarrow X$ este v.a. Bernoulli $=B(p)$)

- aruncăm cu o monedă de n ori și pp. că $\mathbb{P}(H)=p \Rightarrow \mathbb{P}(T)=1-p$.
- suntem interesați de v.a. $X=$ nr. de capete $\in\{0,1,2,\dots,n\}$

$$\Omega=\{H,T\}^n$$

Vrem să calculăm $p_X(k)=\mathbb{P}(X=k)$, $k\in\{0,1,\dots,n\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k}$

$n=6$: 1 0 1 0 1 0

k

$$p^3(1-p)^3=p^k(1-p)^{n-k}$$

avem $C_n^k=\binom{n}{k}$ secvențe de lungime n cu k valori de H

- putem să ne gândim la v.a. $X\sim B(n,p)$ ca la o sumă de v.a. de tip Bernoulli $B(p)$

$X=Y_1+Y_2+\dots+Y_n$, unde $Y_i=$ rezultatul celui de-al i-lea experiment