Prelucrarea Semnalelor
Laboratorul 4.
Convoluția

Convoluția reprezintă o operație asociativă și comutativă de compunere a două semnale

$$f * g = g * f \tag{1}$$

Operația este des utilizată în prelucrarea semnalelor și în statistică, unde este interpretată ca o medie ponderată a valorilor din trecut.

Convoluție și produsul (la nivel de element) a două semnale sunt operații inverse în domeniul timp și frecvență: convoluția în timp este echivalentă produsului în domeniul frecvență, produsul a două semnale în domeniul timp este echivalent convoluției celor două semnale în domeniu frecvență.

1 Convoluția în frecvență. Ferestre

Atunci când achiziționăm un semnal periodic pe o durată anume, cel mai adesea durata de timp nu reprezintă un multiplu întreg al perioadei semnalului. Din acest motiv, varianta finită pe care o avem la dispoziție diferă de semnalul original (și de timp continuu). O importanță deosebită o au tranzițiile abrupte ce pot apărea datorită acestei diferențe. În special capetele intervalului măsurat reprezintă astfel de discontinuități.

Atunci când se aplică transformata Fourier pentru a afla și vizualiza spectrul semnalului, discontinuitățile vor apărea sub forma unor componente de frecvență ce în semnalul original nu sunt prezente și vor produce fenomenul de *leakage*. În practică, unde semnalele sunt funcții complexe, fenomenul apare des, pentru că adesea nu avem de-a face cu un semnal ce conține un număr întreg de perioade. Însă fenomenul se poate atenua utilizând diferite tipuri de ferestre pentru a selecta un interval de timp dintr-un semnal, ce atenuează discontinuitățile de la capete.

Un semnal trecut printr-o fereastră se poate exprima

$$x_w[n] = x[n] \times w[n] \tag{2}$$

unde cu $w[n]$ am notat fereastra.

Tabela 1: Ferestre uzuale

Tip Fereastra	**Formula**
Dreptunghiulară	$w(n) = 1$
Hanning	$w(n) = 0.5[1 - \cos(\frac{2\pi n}{N})]$
Hamming	$w(n) = 0.54 - 0.46\cos(\frac{2\pi n}{N})$
Blackman	$w(n) = 0.42 - 0.5\cos(\frac{2\pi n}{N}) + 0.08\cos(\frac{4\pi n}{N})$
Flat top	$w(n) = 0.22 - 0.42\cos(\frac{2\pi n}{N}) + 0.28\cos(\frac{4\pi n}{N}) - 0.08\cos(\frac{6\pi n}{N})$ $+ 0.007\cos(\frac{8\pi n}{N})$

Acestui produs în domeniul timp îi corespunde operația de convoluție în domeniul frecvență.

Ceea ce înseamnă că frecvențele înalte datorate trecerii bruște din 0 vor fi atenuate de fereastrei îi corespund puteri mici ale acestor frecvențe. Așadar, pentru a evita fenomenul de *leakage*, fereastra nu trebuie să aibă discontinuități pronunțate. Cu alte cuvinte, cu cât fronturile sunt mai netede, cu atât lobii secundari sunt mai atenuați.

Reducerea fenomenului de *leakage* presupune ca lățimea lobului principal să fie cât mai mică, la fel și vârful lobilor secundari. Rata cu care lobii secundari descresc este un alt criteriu în alegerea festrei.

1.1 Exemple de ferestre

În general, diferite tipuri de semnale se pretează la diferite tipuri de ferestre. Spre exemplu, dacă nu se cunoaște nimic despre componentele semnalului, o fereastră potrivită este cea de tip Hanning. Aceasta e utilă de asemenea dacă semnalul este format din două sinusoide. Dacă însă e sinusoidele sunt foarte apropiate, este mai potrivită o fereastră uniformă sau o fereastră Hamming.

2 Convoluția în timp. Filtre

Notăm cu $x(t)$ și h(t) două semnale în timp. Operația de convoluție între cele două este

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{3}$$

Iar în cazul discret

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) \tag{4}$$

Convoluția presupune o inversare a axei timpului, urmată de o deplasare (*shift*) a coeficienților și o sumă de produse.

Adesea unul din cele două semnale poate fi văzut ca un filtru și reprezintă un sistem liniar, invariant în timp.

Media alunecătoare este unul din cele mai comune tipuri de filtre. Semnalul din figura reprezintă date din trafic, mai exact numărul de vehicule care circulă printr-o locație la un moment de timp. Acestea au fost filtrate cu filtre medie alunecătoare având diferite dimensiuni ale ferestrei, N_w. Observați cum semnalul este netezit în mod diferit și întârzierile provocate de dimensiunea ferestrei.

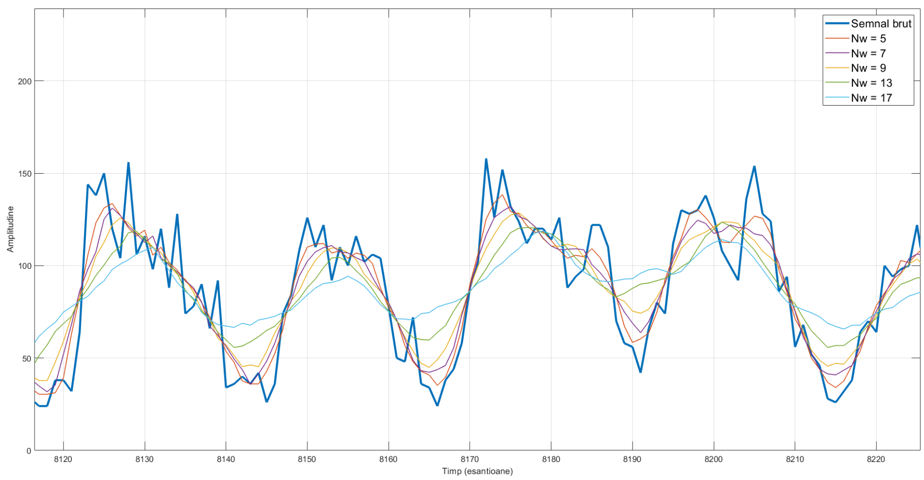

Figura 1: Filtru medie alunecătoare

3 Ghid Python

Reamintim, din Laboratorul 2, că transformata Fourier se poate obține utilizând funcția

```
X = np.fft.fft(x)
```

și că datorită simetriei, adesea este convenabil de afișat doar `X = X[:N/2]`, unde N reprezintă lungimea semnalului.

4 Exerciții

1. Care este numărul necesar de sample-uri, N, pentru a calcula DFT a unui semnal $x(n)$, a cărui frecvență de eșantionare este $f_s = 44.1kHz$, astfel încât distanțarea binurilor DFT să fie de $1Hz$?

2. a) Scrieți câte o funcție prin care să construiți o fereastră dreptunghiulară și o fereastră de tip Hanning. Funcțiile primesc ca parametru dimensiunea ferestrei. Afișați grafic o sinusoidă cu frecvență $f = 100$,

amplitudine unitară și fază nulă trecută prin cele două tipuri de ferestre de dimensiune $N_w = 200$.

b) Afișați grafic spectrele a două sinusoide, prima cu frecvența $f1 = 1000Hz$, a doua cu frecvența $f2 = 1100Hz$, ambele eșantionate cu $f_s = 8000Hz$ și pe care ați aplicat o fereastră dreptunghiulară (utilizând funcția creată mai sus) de 1000 de eșantioane. Comentați diferențele. Pe care din cele două sinusoide ați aplica fereastra în practică?

c) (**Bonus**) Implementați funcții și pentru restul tipurilor de ferestre din Tabelul 1 și afișați-le grafic.

3. Fișierul `trafic.csv` conține date de trafic înregistrate pe o perioadă de 1 săptămână. Frecvența de eșantionare este de 1 oră, iar valorile măsurate reprezintă numărul de vehicule ce trec printr-o anumită locație.

   (a) Selectați din semnalul dat o porțiune corespunzătoare pentru 3 zile, pe care veți lucra în continuare.

   (b) Utilizați funcția `np.convolve(x, np.ones(w), 'valid') / w` pentru a realiza un filtru de tip medie alunecătoare și neteziți semnalul obținut anterior. Setați dimensiuni diferite ale ferestrei, spre exemplu $5, 9, 13, 17$.