Implementierung digitaler Filter

Thierry Prud'homme

Hochschule Luzern
Technik & Architektur

Outline

Outline

Outline

Lernziele

- Die Studierenden kennen die Übertragungsfunktionen der wichtigsten analogen Filter (inklusiv PID).
- Die Studierenden können einen analogen Filter mit den üblichen Verfahren diskretisieren.
- Die Studierenden können eine Differenzengleichung aus einer z-Übertragungsfunktion herleiten.
- Die Studierenden können eine Differenzengleichung in eine SPS progammieren.

PT1 Filter

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Parameter

- K ist die DC Verstärkung
- τ ist die Zeitkonstant

Butterworth Filter

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{1}{\frac{(s-s_1)}{\omega_c}\frac{(s-s_2)}{\omega_c}\ldots\frac{(s-s_n)}{\omega_c}} \\
s_k &= \omega_c e^{j\frac{(2k+n-1)\pi}{2n}}
\end{aligned}
$$

Amplitudengang

- n ist die Ordnung des Filters

PID Regler

$$H(s) \quad = \quad K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1}\right)$$

Bermerkungen

- Dieser PID Regler hat keinen Anti-Reset Windup !
- Der Regelfehler wird abgeleitet !

Bermerkungen

- Der D Anteil ist mit einem Tiefpass gefiltert.

Euler oder Rückwärts-Rechteckregel Transformation

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} && \text{Transformation } z \rightarrow s \\ &= \tfrac{1}{e^{-sT}} && \text{Eigenschaft der Funktion exp, } e^{a} = \tfrac{1}{e^{-}a} \\ &\approx \tfrac{1}{1-sT} && \text{Taylorreihe erster Ordnung für } e^{-sT} \end{aligned}$$

daraus ergibt sich:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

Bemerkung - Äquivalenz

- Ableitung $\dot{x}(t)$ approximiert mit $\frac{x(t=kT)-x((k-1)T)}{T}$

Bilinear transformation

$$\begin{array}{rcll} z & = & e^{sT} & \text{Transformation } z \rightarrow s \\ & = & \frac{e^{s\frac{T}{2}}}{e^{-s\frac{T}{2}}} & \text{Eigenschaft der Funktion exp, } e^{a} = \frac{e^{\frac{a}{2}}}{e^{-\frac{a}{2}}} \\ & \approx & \frac{1+s\frac{T}{2}}{1-s\frac{T}{2}} & \text{Taylorreihe erster Ordnung für } e^{s\frac{T}{2}} \text{ und } e^{-s\frac{T}{2}} \end{array}$$

daraus ergibt sich:

$$s = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Bemerkung - Äquivalenz

- Integral $\int_0^t x(\tau)d\tau$ approximiert mit Trapezregel

1. Bekannte Filter
2. Diskretisierung
   - Rückwärts-Rechteckregel
   - Bilinear transformation
3. z-Übetragungsfunktion $\rightarrow$ Differenzengleichung

Differenzengleichung für die Implementierung

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{1+A(z)} \\ (1+A(z))Y(z) &= B(z)U(z) \end{aligned}$$

und dann:

$$\begin{aligned} Y(z) &\rightarrow y(k) \\ zY(z) &\rightarrow y(k+1) \\ z^{-1}Y(z) &\rightarrow y(k-1) \\ z^{j}Y(z) &\rightarrow y(k+j) \\ z^{-j}Y(z) &\rightarrow y(k-j) \end{aligned}$$

Differenzengleichung für die Implementierung

und noch:

$$\begin{aligned}
U(z) &\rightarrow u(k) \\
zU(z) &\rightarrow u(k+1) \\
z^{-1}U(z) &\rightarrow u(k-1) \\
z^{j}U(z) &\rightarrow u(k+j) \\
z^{-j}U(z) &\rightarrow u(k-j)
\end{aligned}$$