A quantitative analysis of an economic (GDP) and financial (S&P500) time series. Quantitative Methods for Economics 2nd intermediate project

Quantitative Report

Time series

Author: Stefano Blando



FACOLTA' DI CONOMIA

Analisi di Serie Storiche per

- GDP EU area 1995-2023 (4Q)
- S&P500 01/01/2010 14/04/2023 (daily)

Analista:

BLANDO Stefano | 0334525

Supervisore:

Professoressa Chiara Perricone



TABLE OF CONTENTS

Introduction	1
Data visualization	5
GDP analysis	
a) Building the first model	9
b) First forecast	10
c) Building the second model: considering a structural break	12
d) Second forecast: improving the performance	13
S&P500 analysis	
a) Rolling Window (Moving Average)	17
b) EWMA	19
c) GARCH	22
d) Second forecast: improving the performance	25

Appendix



INTRODUCTION

Questo report illustra i risultati dell'analisi finanziaria quantitativa eseguita su due serie storiche: la prima riguarda il GDP italiano dal 1995 al 2023, con dati trimestrali¹, mentre la seconda riguarda i rendimenti derivati dall'indice di prezzi S&P500 dal 01/01/2010 al 14/04/2023, con dati giornalieri².

Le serie verranno analizzate considerando le loro caratteristiche intrinseche (stazionarietà, stagionalità, trend, ciclicità, *volatility clustering*, break strutturali), per poi essere utilizzate nella creazione di modelli predittivi che sintetizzano un buon compromesso tra accuratezza e bontà della predizione.

Verrà effettuata una *cross-validation* tra i campioni individuati per allenare i modelli e quelli individuati per testarli, i risultati della quale indicheranno quali modelli selezionare data la loro maggiore adattabilità ai dati osservati.

A tal riguardo, saranno creati sotto-gruppi campionari delle osservazioni delle serie storiche.

Il primo sotto-periodo sarà utilizzato per effettuare stime per i nostri forecast, analizzando in modo dettagliato l'ACF (*Auto-Correlation Function*) e la PACF (*Partial Auto-Correlation Function*) sia delle osservazioni che dei residui, al fine di selezionare adeguatamente l'intervallo dei ritardi di predizione (*Lag length*).

Inoltre, saranno considerati 5 diversi *information criteria*: AIC (*Akaike Information Criterion*), BIC (*Bayesian Information Criterion*), AICC (*Akaike Information Criterion Corrected*), CAIC (Consistent *Akaike Information Criterion*), e HQC (*Hannan-Quinn Information Criterion*).

Il secondo sotto-periodo sarà utilizzato per testare la bontà di previsione, confrontando le stime effettuate su periodi futuri a partire dal primo sotto-gruppo e le osservazioni attuali della serie storica originale attraverso l'analisi di RMSFE (*Root Mean Squared Forecast Error*), MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) e MAE (*Mean Absolute Error*).

Per la serie del GDP sarà infine elaborato un nuovo modello a partire da riflessioni macroeconomiche strutturali sulla serie, che determineranno un diverso campionamento dei sotto-periodi: il forecast elaborato attraverso tale modello sarà confrontato con quello precedente, e saranno forniti dettagli riguardo la differenza di performance osservate.

¹ Fonte: Eurostat, Real Gross Domestic Product (Euro/ECU series) for Euro area (19 countries) [CLVMEURSCAB1GQEA19], retrieved from FRED, Federal Reserve Bank of St. Louis; https://fred.stlouisfed.org/series/CLVMEURSCAB1GQEA19

² Fonte: S&P 500 (^GSPC), indice dei prezzi giornaliero, valuta USD, https://it.finance.yahoo.com/quote/%5EGSPC/history?period1=1262304000&period2=1681430400&interval=1d&filter=history&frequency=1d&includeAdjustedClose=true



Dipartimento di Economia e Finanza

Per la serie del S&P500 saranno considerati e applicati diversi modelli: Rolling Window (Moving Average), EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), GARCH (Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity).

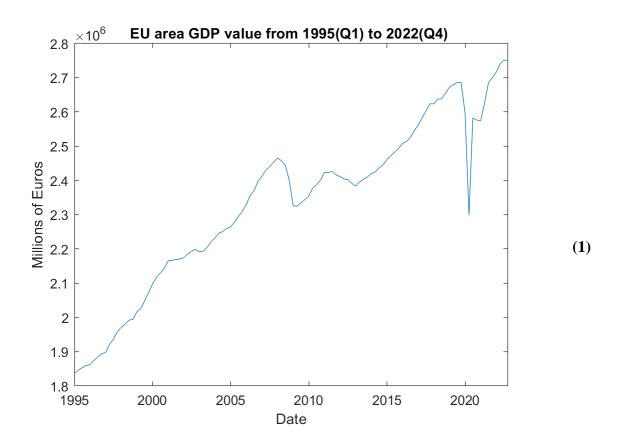
Al fine di analizzare la bontà di adattamento tali modelli saranno rispettivamente paragonati con una proxy della varianza condizionata non osservabile (neppure a posteriori), i rendimenti al quadrato, rappresentati graficamente e spiegati in termini di errori quadratici.

Infine, i tre modelli elaborati saranno implementati per un nuovo forecast *10 steps ahead recursive* utilizzando per la stima un nuovo sotto-periodo individuato attraverso considerazioni macroeconomiche e analisi grafica, e la performance di questi ultimi modelli saranno confrontata con quella dei modelli precedenti.



DATA VISUALIZATION

La figura 1 mostra la serie storica del GDP dell'Unione Europea dal 1995 (Q1) al 2022 (Q4) con dati trimestrali, regolati per stagionalità e annualità.



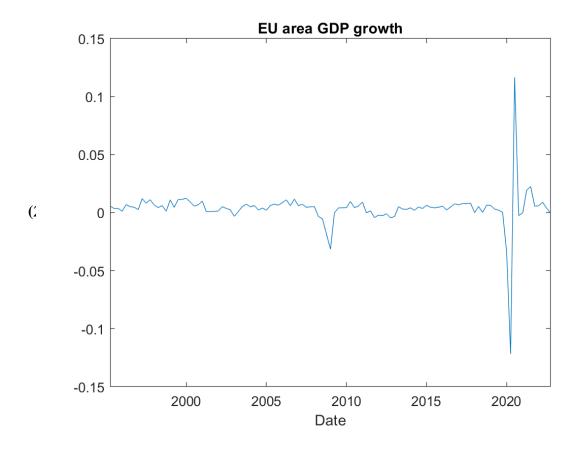
Dalla natura intrinseca del dataset e da una prima esplorazione grafica la serie parrebbe essere non stazionaria.

A conferma dell'ipotesi iniziale è stata effettuata un'analisi della varianza mobile, un'analisi della ACF (*Auto-Correlation Function*) e della PACF (*Partial Auto-Correlation Function*), e infine un ADF ("*Augmented Dickey-Fuller*") test, che confermano l'ipotesi iniziale: la serie storica considerata è non stazionaria.

Sono state prese in considerazione diverse trasformazioni strutturali per rendere la serie stazionaria e statisticamente operabile: nello specifico, sono state tentate una trasformazione logaritmica, una trasformazione per differenze prime, una de-trendizzazione lineare e una quadratica, un HP (*Hoddrick-Prescott*) filter.



Si è deciso di utilizzare trasformazione logaritmica e per differenze prime al fine di considerare la serie storica stazionaria del tasso di crescita del GDP, osservabile nella figura 2.

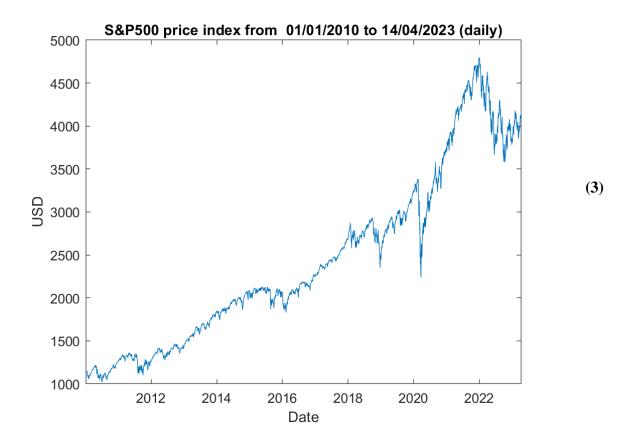


La serie non presenta cluster di volatilità significativi, ma è importante notare il probabile break strutturale che avviene tra l'ultimo quarter del 2019 e il 2020, in concomitanza con l'emergenza mondiale di pandemia da Covid-19.

Tale considerazione verrà utilizzata per la successiva elaborazione del modello predittivo.



La figura 3 mostra la serie storica dell'indice dei prezzi S&P500 dal 01/01/2010 al 14/04/2023, con dati giornalieri, dopo averla regolata per la stagionalità. Dalla figura 3 si può notare che la serie storica sembra essere caratterizzata da una volatilità elevata e un trend positivo, soprattutto dal 2013 in poi, con dei flessi significativi in relazione a fenomeni di crisi economica e sociale globali.



Da una prima esplorazione grafica e dall'analisi della ACF (*Auto-Correlation Function*) e della PACF (*Partial Auto-Correlation Function*) la serie parrebbe essere non stazionaria, ipotesi confermata attraverso un ADF ("*Augmented Dickey-Fuller*") test.

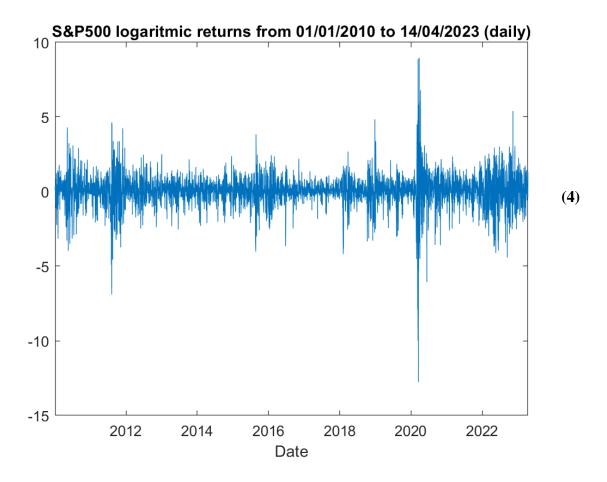
L'obiettivo dell'analisi è quello di modellizzare e prevedere la varianza dei rendimenti, e a tal fine è stato necessario manipolare il dataset originario attraverso trasformazioni utili: una logaritmica, per evidenziare il tasso di crescita, e una per differenze prime, per rendere la serie stazionaria.



Il risultato è la serie storica nella figura 4.

Nonostante la manipolazione effettuata, dall'analisi grafica della serie è possibile notare la presenza di ripetuti cluster di volatilità più elevata (2010, 2012, 2020, 2022), con un potenziale break strutturale in relazione alla crisi mondiale per la pandemia da Covid-19.

Tali considerazioni saranno rilevanti per le successive analisi della serie.



Al fine di elaborare e allenare un modello predittivo per l'andamento dei rendimenti S&P500 si è deciso di dividere la serie storica in due sotto-periodi:

- Il primo sotto-periodo va dal 04/01/2010 al 29/03/2023 ($t=1,\ldots,T-10$), per definire e stimare il modello di interesse;
- il secondo sotto-periodo va dal 30/03/2023 al 13/04/2023 (T-9, ..., T), utilizzato per testare *pseudo out-of-sample* la bontà del forecast.



GDP ANALYSIS

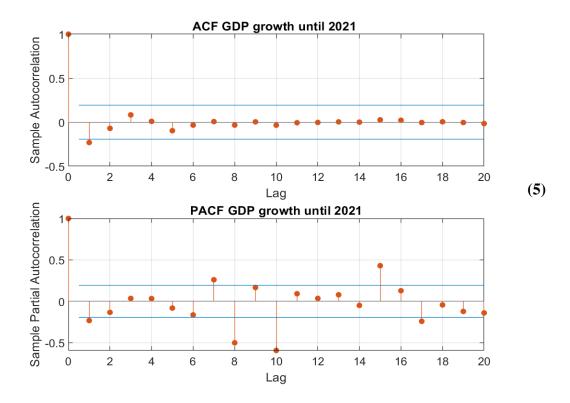
Building the first model

Al fine di elaborare e allenare un modello predittivo per il GDP dell'area Euro si è deciso di dividere la serie storica in due sotto-periodi:

- Il primo sotto-periodo va dal 1995Q1 al 2021Q4 (t = 1, ..., T 4), per definire e stimare il modello di interesse;
- il secondo sotto-periodo va dal 2022Q1 al 2022Q4 (T-3, ..., T), utilizzato per testare *pseudo out-of-sample* la bontà del forecast.

Per calibrare questa prima modellizzazione sono state prese in considerazione analisi grafiche e parametriche della ACF (*Auto-Correlation Function*) e della PACF (*Partial Auto-Correlation Function*), sia per la serie che per i residui:

- L'ACF mostra una memoria non particolarmente persistente, la serie regredisce intorno alla media dopo un solo lag informativo;
- La PACF mostra una correlazione parziale significativa solo al primo lag, per poi scendere sotto l'intervallo di confidenza, e avere tre picchi significativi in corrispondenza dei lag 8, 10 e 16.





Le tipologie modellistiche di interesse sono quelle AR (*Auto-Regressive*), MA (*Moving Average*), e ARMA (*Auto-Regressive Moving Average*):

• "L'osservazione di oggi dipende dal suo passato"
Gli AR sono modelli utilizzati per analizzare le serie storiche che mostrano dipendenza tra le osservazioni consecutive. In un modello AR, la variabile dipendente (y) al tempo t è rappresentata come una funzione lineare dei suoi valori passati e di un termine di errore aleatorio (ε_t). Il grado di dipendenza dai valori passati viene espresso tramite il parametro p, che rappresenta il numero di ritardi considerati nel modello. Quindi, un modello AR(p) è espresso come:

$$y_t = \varphi_1 \cdot y_{t-1} + \varphi_2 \cdot y_{t-2} + \dots + \varphi_P \cdot y_{t-p} + \varepsilon_t$$

dove $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

• "L'osservazione di oggi è la somma delle passate innovazioni"
I modelli MA, invece, sono usati per analizzare le serie storiche che mostrano dipendenza tra le osservazioni consecutive, ma in questo caso, la dipendenza è rappresentata dai residui del modello AR. In un modello MA, la variabile dipendente (y) al tempo t è rappresentata come una funzione lineare dei suoi residui passati e di un termine di errore aleatorio (ε_t). Il grado di dipendenza dai residui passati viene espresso tramite il parametro q, che rappresenta il numero di ritardi considerati nel modello. Quindi, un modello MA(q) è espresso come:

$$y_t = \vartheta_0 \cdot \varepsilon_t + \vartheta_{1 \cdot \varepsilon_t - 1} + \vartheta_2 \cdot \varepsilon_{t-2} + \ldots + \vartheta_q \cdot \varepsilon_{t-q}$$

dove $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \ \forall s \in Z \in \vartheta_0$ viene normalizzato a 1.

• "L'osservazione di oggi dipende sia dal suo passato sia dalla somma delle passate innovazioni".

I modelli ARMA sono una combinazione dei modelli AR e MA, dove la variabile dipendente (y) al tempo t è rappresentata come una funzione lineare dei suoi valori passati, dei suoi residui passati e di un termine di errore aleatorio (ε_t). Il grado di dipendenza dai valori e dai residui passati viene espresso tramite i parametri p e q. Quindi, un modello ARMA(p,q) è espresso come:

$$y_t = \varphi_1 \cdot y_{t-1} + \ldots + \varphi_P \cdot y_{t-p} + \varepsilon_t + \vartheta_{1 \cdot \varepsilon_{t-1}} + \ldots + \vartheta_q \cdot \varepsilon_{t-q}$$

A seguito dell'analisi della autocorrelazione sono stati elaborate e testate tutte le possibili combinazioni dei modelli AR, MA e ARMA con 4 lag informativi, ognuna analizzata a seconda di 5 criteri informativi: AIC (*Akaike Information Criterion*), BIC (*Bayesian Information Criterion*), AICC (*Akaike Information Criterion Corrected*), CAIC (Consistent *Akaike Information Criterion*), e HQC (*Hannan-Quinn Information Criterion*).

Il risultato dell'analisi incrociata evidenzia come migliori i modelli MA(1) e AR(1), a cui si tenta di accostare in via potenziale un modello ARMA(1).



First forecasting

Tali modelli sono stati utilizzati per effettuare previsioni sull'andamento del tasso di crescita del GDP dell'area Euro per il 2022 e il primo quarter del 2023, in un'ottica di test *pseudo out-of-sample*.

Al fine di testare la bontà di adattamento dei forecast sono stati analizzati RMSFE (*Root Mean Squared Forecast Error*), MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) e MAE (*Mean Absolute Error*), con risultati mostrati dalla tabella 1:

	RMSFE	MAPE	MAE
Mod AR(1)	0.0036	-165.1	0.0031
Mod MA(1)	0.0041	-156	0.0035
Mod ARMA(1,1)	0.0045	-149.95	0.0039

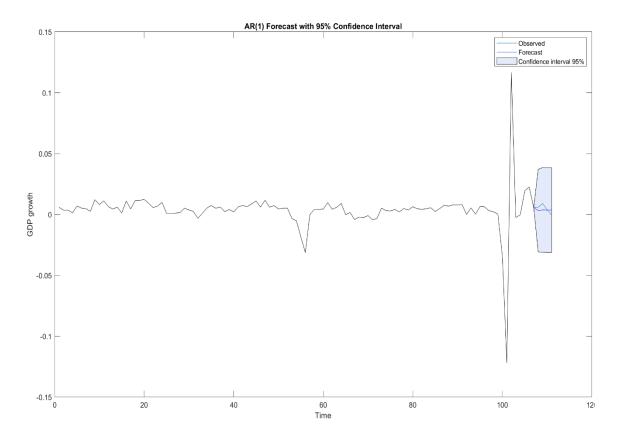
Tabella 1

Dai confronti tra gli errori medi e tenendo anche in considerazione la precedente analisi sugli *information criteria* e ACF e PACF viene scelto il modello AR(1) come modello predittivo più efficiente.

I risultati del forecast effettuato con il modello AR(1) sono stati confrontati con i dati osservati nel secondo sotto-periodo, il campione test, con osservazioni del GDP per il 2022 e il primo quarter del 2023.



Come si può notare nella figura 7, il modello non fornisce una previsione completamente adeguata dei dati osservati nel secondo sotto-periodo.

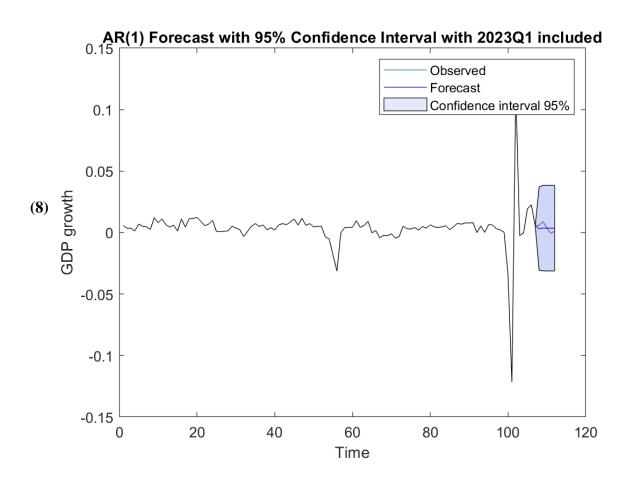


La progressione della serie assume una forma abbastanza piatta, data dal basso numero di lag informativi scelto: la memoria della serie risente della grande variabilità osservata tra 2019 e 2020, che modifica notevolmente l'andamento della serie.

Il passo successivo dell'analisi sarà quello di eseguire un forecast con diversi sotto-periodi, ipotizzando la presenza di un break strutturale nel periodo storico della serie: saranno immessi i lag informativi per il *model training* solo quelli fino al quarto quarter del 2018, escludendo così il periodo che presenta una variabilità anomala rispetto al normale andamento della serie, e tale forecast sarà analizzato rispetto ai dati osservati per il 2019.



Prima di passare al secondo modello, in un'ottica completamente *out-of-sample*, a seguito del rilascio del "Preliminary Flash Estimate GDP - EU and euro area" del 28/04/2023, è stato elaborato un nuovo forecast 5 steps ahead per testare l'efficacia del modello elaborato, con risultati appena più soddisfacenti: come si può notare dalla figura 8, grazie al nuovo valore positivo osservato (+0.1% rispetto al quarter precedente, +1.3% rispetto all'anno precedente) l'andamento previsto dal modello si avvicina in modo più significativo all'attuale osservazione dei valori del tasso di crescita del GDP.





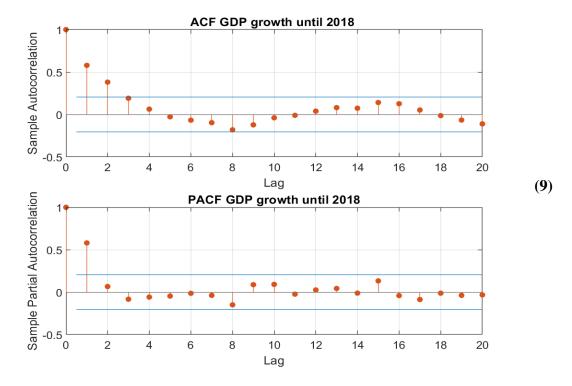
Building a second model: considering a structural break

Al fine di elaborare un modello predittivo più efficiente per il GDP dell'area Euro si è deciso di dividere la serie storica in due diversi sotto-periodi:

- Il primo sotto-periodo va dal 1995Q1 al 2018Q4 (t = 1, ..., T 16);
- il secondo sotto-periodo va dal 2019Q1 al 2019Q4 (T-15, ..., T-12).

Per calibrare questa prima modellizzazione sono state prese in considerazione analisi grafiche e parametriche della ACF (*Auto-Correlation Function*) e della PACF (*Partial Auto-Correlation Function*), sia per la serie che per i residui, mostrate in figura 9:

- L'ACF mostra una memoria non particolarmente persistente, la serie regredisce intorno alla media dopo 4 lag informativi;
- La PACF mostra una correlazione parziale significativa solo ai primi lag, per poi scendere sotto l'intervallo di confidenza.



A seguito dell'analisi della autocorrelazione sono state elaborate e testate tutte le possibili combinazioni dei modelli AR, MA e ARMA con 4 lag informativi, ognuna analizzata a seconda di 5 criteri informativi: AIC (Akaike Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion), AICC (Akaike Information Criterion Corrected), CAIC (Consistent Akaike Information Criterion), e HQC (Hannan-Quinn Information Criterion).

Il risultato dell'analisi incrociata evidenzia come migliori i modelli AR(1), ARMA(4,3) e AR(2).



Second forecasting: improving the performance

Tali modelli sono stati utilizzati per effettuare previsioni sull'andamento del tasso di crescita del GDP dell'area Euro per il 2019 in un'ottica di test *pseudo out-of-sample*.

Al fine di testare la bontà di adattamento dei forecast sono stati analizzati RMSFE (*Root Mean Squared Forecast Error*), MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) e MAE (*Mean Absolute Error*), con risultati mostrati nella tabella 2:

	RMSFE	MAPE	MAE
Mod_2 AR(1)	0.0024	500.69	0.0022
Mod_2 AR(2)	0.0025	504.74	0.0022
Mod_2 ARMA(4,3)	0.0021	399.76	0.0018

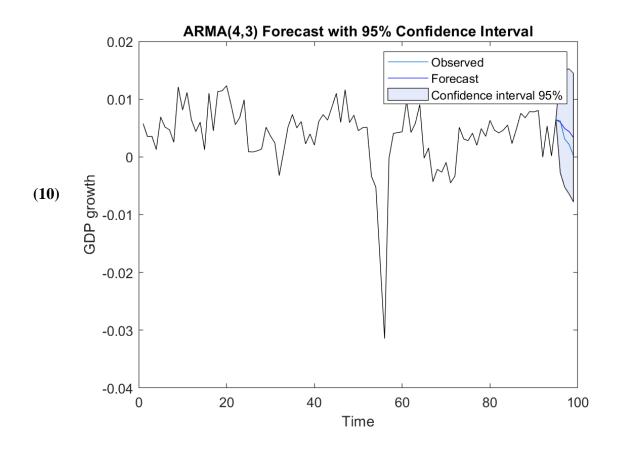
<u>Tabella 2</u>

Dai confronti tra gli errori medi e tenendo anche in considerazione la precedente analisi sugli *information criteria* e ACF e PACF viene scelto il modello ARMA(4,3) come modello predittivo più efficiente.

I risultati del forecast effettuato con il modello ARMA(4,3) sono stati confrontati con i dati osservati nel secondo sotto-periodo, il campione test, con osservazioni del GDP per il 2019.



Come si può notare nella figura 10, il forecast per l'andamento del tasso di crescita del GDP nel 2019 effettuato tramite il modello ARMA(4,3) ha un miglior adattamento ai dati osservati, la rimozione del break strutturale migliora notevolmente la performance del modello, che segue lo stesso andamento delle osservazioni.



S&P 500 ANALYSIS

Rolling Window (Moving Average)

Come anticipato in precedenza dall'analisi grafica della serie storica è facile notare come sia presente una forte variabilità nell'ultimo periodo: tale squilibrio rispetto ai valori medi passati è un potenziale segno di un necessario break strutturale.

Per considerare la variabilità della serie viene elaborato un modello *Rolling Window (Moving Average)*: esso consiste in una tecnica di previsione che prevede l'utilizzo di finestre mobili di osservazioni per addestrare e validare un modello di forecast. In particolare, il modello viene addestrato su un sottoinsieme di osservazioni, detto finestra (*window*), e successivamente viene utilizzato per fare previsioni su una o più osservazioni successive. Questo processo viene ripetuto utilizzando una finestra che si sposta di una o più osservazioni alla volta, permettendo di produrre previsioni per l'intera serie storica.

Tale modello segue la formulazione:

$$\sigma_{t+1}^2 = \frac{1}{\tau} \sum_{i=t-\tau}^T r_i^2$$

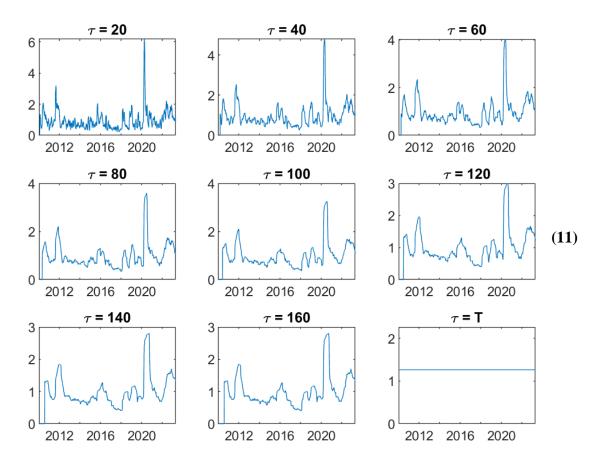
dove σ_{t+1}^2 è la variabilità al tempo t+1, T è l'ampiezza dell'intervallo campionario, τ è l'ampiezza dei sotto-intervalli campionari e r_i^2 sono le osservazioni dei rendimenti al quadrato.

Nello specifico, sono state considerate 8 diverse finestre, ognuna con un parametro di riferimento τ con i seguenti valori:

- $\tau 1 = 20$
- $\tau 2 = 40$
- $\bullet \quad \tau 3 = 60$
- $\tau 4 = 80$
- $\tau 5 = 100$
- $\tau 6 = 120$
- $\tau 7 = 140$
- $\tau 8 = 160$

Ogni *window* è stata utilizzata per costruire un modello predittivo, e la bontà di adattamento dei forecast di questi modelli sono state testate attraverso una *validation* rispetto ai rendimenti al quadrato, una *proxy* della volatilità non osservabile neanche a posteriori.

Dalla figura 11 è possibile notare come, all'aumentare dell'ampiezza delle finestre temporali, la previsione della volatilità sia sempre più "smussata" fino al caso estremo in cui la serie è costante: la variabilità diventa sempre meno rilevante fino a scomparire del tutto.



Dall'analisi dei RMSE (*Root Mean Squared Error*) riportata nella tabella 3 si evince che il modello con una *goodness of fit* migliore è il modello con $\tau = 20$.

tau	20	40	60	80
RMSE	4.6071	4.7884	4.8372	4.8537
tau	100	120	140	160
tau RMSE	100 4.8863	120 4.8978	140 4.9003	160 4.8963

Tabella 3

Il problema principale dell'approccio predittivo del modello *Rolling Window* consiste nell'attribuire lo stesso peso a ogni istante temporale informativo: in una serie storica dei rendimenti questo non è l'approccio ottimale, data la presenza di *volatility clustering* e una struttura leptocurtica della distribuzione, evidenze di una volatilità che tende ad aumentare quando si verificano eventi che determinano un aumento dell'incertezza sui mercati.

Per ovviare a questo problema e cercare di catturare quanta più variabilità possibile sarà elaborato un modello EWMA.



EWMA

Il modello EWMA (*Exponential Weighted Moving Average*) è un modello di previsione utilizzato per stimare il valore futuro di una serie temporale sulla base di una media ponderata esponenziale delle osservazioni passate: in altre parole, l'importanza data alle osservazioni precedenti diminuisce esponenzialmente con il tempo.

Tale modello segue una formulazione di questo tipo:

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda \cdot \sigma_{t+1}^2 + (1 - \lambda) \cdot r_t^2$$

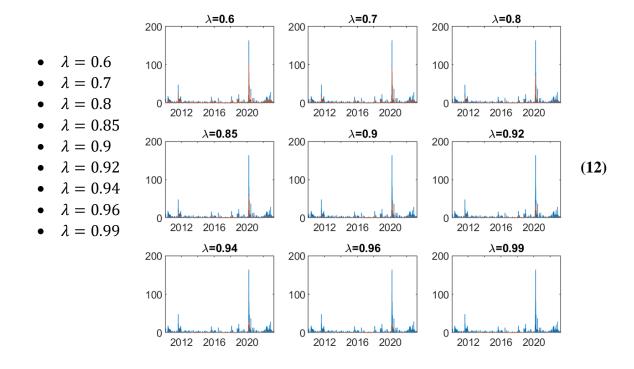
dove σ_{t+1}^2 è la variabilità al tempo t+1, λ è il parametro di smoothing e r_t^2 è la stima effettuata al tempo precedente (t) dei rendimenti al quadrato.

Il parametro λ indica il peso dato all'osservazione più recente rispetto alle osservazioni precedenti. Più λ si avvicina a 1, maggiore sarà il peso dell'osservazione più recente. Al contrario, più λ si avvicina a 0, maggiore sarà il peso delle osservazioni precedenti.

L'approccio statistico consiste nello stimare λ minimizzando una funzione obiettivo.

Per J.P: Morgan, il valore consigliato di λ è circa 0.9.

Utilizzando questo valore come base di partenza, sono stati considerati diversi valori di λ :





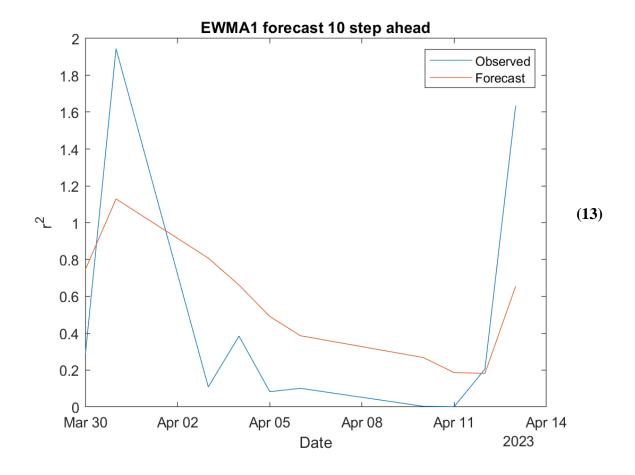
È possibile osservare dalla figura 12 come, all'aumentare del valore di λ , il forecast sia sempre meno aderente alle variazioni di picco della variabilità, evidenza di come dia sempre meno importanza alle osservazioni passate.

Dal confronto degli errori quadratici (RMSE), riportato nella tabella 4, è possibile notare come il modello più accurato pare essere quello che utilizza $\lambda = 0.7$.

lambda	0.6	0.7	0.8	0.85	0.9
RMSE	4.1649	4.1288	4.1477	4.1951	4.2907
lambda	0.92	0.94	0.96	0.99	
4.3505	4.3505	4.4286	4.5327	4.7757	

Tabella 4

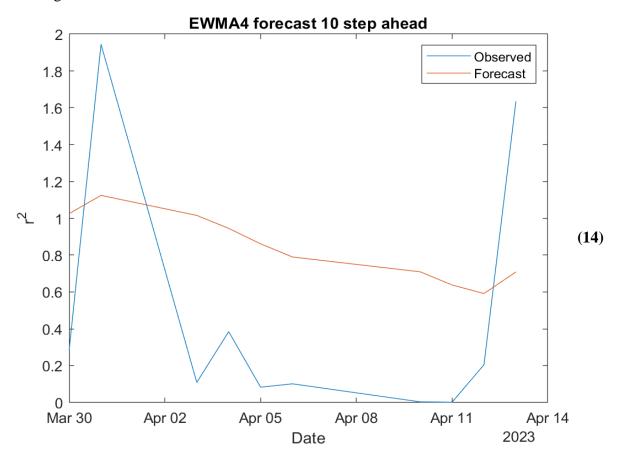
Questo modello è utilizzato per il forecast della varianza condizionata sul secondo sottoperiodo (10 step ahead recursive), osservabile in figura 13.





Uno dei problemi di un approccio tramite EWMA è la sensibilità alla scelta del parametro di smoothing. La scelta di un valore adeguato di λ dipende dal contesto e dal tipo di dati. Se il parametro λ viene scelto in modo errato, potrebbe portare a stime inaccurate.

Al fine di evitare eventuali problemi di *overfitting* viene generato un altro forecast seguendo le indicazioni degli esperti del settore, utilizzando un modello EWMA con $\lambda = 0.9$, osservabile nella figura 14.



Uno dei principali problemi con l'utilizzo dell'EWMA per modellare i rendimenti finanziari è che questi sono spesso caratterizzati da una forte eteroschedasticità condizionata: la varianza dei rendimenti varia nel tempo.

L'EWMA, in quanto modello *Moving Average*, assume omoschedasticità, e ha pertanto difficoltà a catturare le variazioni di volatilità nel tempo, come è possibile notare dalla figura 12. Ciò può portare a previsioni inaccurate, soprattutto in presenza di grandi fluttuazioni di prezzo o eventi imprevisti sul mercato, che è esattamente la situazione che abbiamo ipotizzato durante la fase di *data exploration* di analisi grafica della serie.

Per questo motivo, il passo successivo sarà quello di elaborare un modello GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), che è in grado di modellare la varianza condizionata in modo più accurato.

GARCH

I modelli ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) e GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) sono utilizzati per modellare l'eteroschedasticità condizionata in una serie storica. In una serie eteroschedastica, la varianza dei residui dipende dal valore delle osservazioni precedenti, e non è costante nel tempo. Questo può influenzare la stima dei parametri del modello e la precisione delle previsioni.

 Il modello ARCH introduce un termine di varianza condizionata nell'equazione del modello: esso assume che la varianza dei residui in un determinato periodo dipenda dalla varianza dei residui nei periodi precedenti, che viene modellata come una funzione lineare dei residui al quadrato dei periodi precedenti. Quindi, un modello ARCH(p) è espresso come:

$$r_{t+1} = \sigma_{\tau+1} \cdot z_{t+1}$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha r_t^2$$

dove $\omega > 0$, $\alpha \ge 0$, $\alpha < 1$.

• Il modello GARCH è una generalizzazione del modello ARCH che aggiunge una componente di media mobile. Inoltre, esso introduce una dipendenza della varianza condizionata non solo dai residui passati, ma anche dalle varianze condizionate passate: si assume cioè che la varianza dei residui in un determinato periodo dipenda dalla varianza dei residui e dalle varianze dei residui nei periodi precedenti. Quindi, un modello GARCH(p,q) è espresso come:

$$r_{t+1} = \sigma_{\tau+1} \cdot z_{t+1}$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha r_t^2 + \beta_1 \cdot \sigma_t^2$$

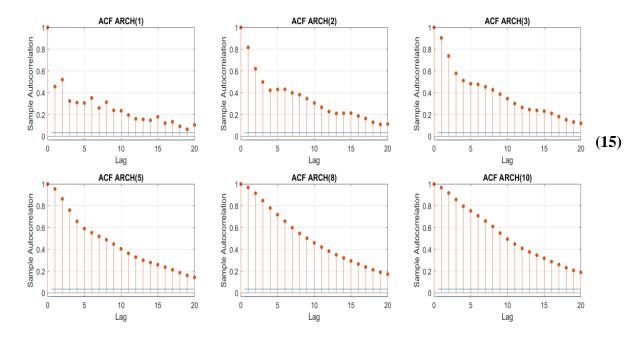
dove $\omega > 0$, $\alpha \ge 0$, $\beta_1 \ge 0$, $\alpha + \beta_1 < 1$.

Per l'analisi dei rendimenti verranno costruiti e confrontati modelli ARCH e GARCH.

Data l'impossibilità di utilizzare la funzione di Maximum Likelihood per la parametrizzazione dei lag informativi a causa della eteroschedasticità condizionata intrinseca nella formulazione dei modelli, sono stati considerati in via esplorativa combinazioni di modelli ARCH con parametri da 0 a 10, e GARCH di ordine 1 e 2.

Dall'analisi congiunta della ACF (*Auto-Correlation Function*) e della volatilità condizionale di ogni modello ARCH, è possibile notare come, all'aumentare dell'ordine del modello, la ACF tende ad avere una memoria più persistente (figura 15): ciò suggerisce una volatilità condizionale persistente nel tempo che un modello con ordine più alto cerca di incorporare nella predizione.

Dipartimento di Economia e Finanza



Sono stati effettuati forecast della varianza condizionata della serie sul secondo sotto-periodo (10 steps ahead recursive), successivamente paragonati con una proxy della varianza condizionata non osservabile (neppure a posteriori): i rendimenti al quadrato.

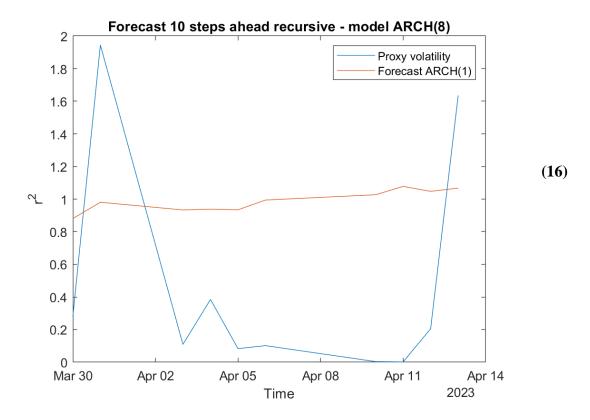
Infine, un'analisi degli errori quadratici (RMSFE), osservabile nella tabella 5, ha permesso di stabilire quale modello ARCH si adatti meglio ai dati osservati.

ARCH	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
RMSFE	1.0487	1.0136	0.9309	0.9309	0.8786
ARCH	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
RMSFE	0.8531	0.8411	0.8385	0.8442	0.8550

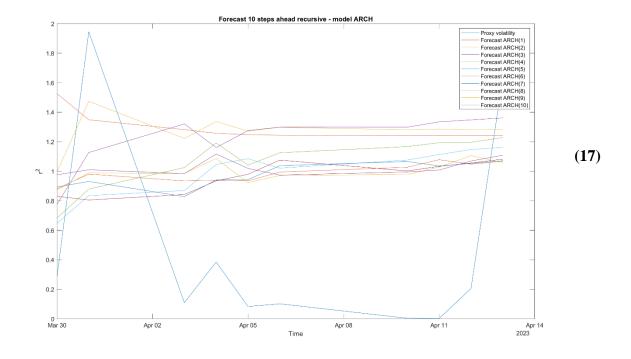
Tabella 5

Il forecast effettuato con il modello ARCH(8) è mostrato in figura 16.





Dal confronto dei forecast dei diversi modelli ARCH mostrato in figura 17 si nota come, all'aumentare del numero d'ordine del modello ARCH, il forecast sia sempre più responsivo alla variabilità della serie.





Alla luce di queste considerazioni si è deciso di implementare modelli GARCH, che hanno una maggiore capacità di catturare le dinamiche più complesse della varianza condizionata dei ritorni, grazie alla valutazione delle autocorrelazioni di ordine superiore, alla maggiore flessibilità nella modellazione dell'eteroschedasticità condizionata che può consentire una migliore adattabilità ai dati e una maggiore precisione nella stima.

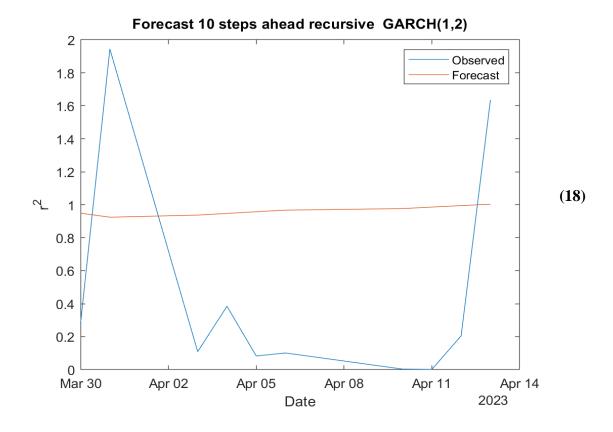
Sono stati elaborati modelli GARCH di 4 ordini diversi:

- GARHC (1,1)
- GARCH (2,2)
- GARCH (1,2)
- GARCH (2,1)

GARCH	(1,1)	(2,2)	(1,2)	(2,1)
RMSFE	0.8403	0.8470	0.8331	0.8403

Tabella 6

A seguito dell'analisi della varianza catturata dai rispettivi forecast e dal confronto degli errori quadratici (RMSFE) osservabile nella tabella 6, il forecast generato tramite modello il modello GARCH (1,2), mostrato in figura 18, risulta essere quello più attendibile.

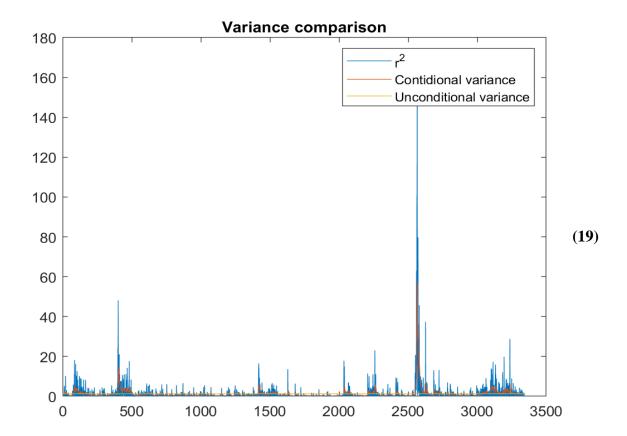




È possibile osservare in figura 19 (si rimanda all'Appendice per un dettaglio maggiore) la differenza tra variabilità condizionata e incondizionata dei modelli GARCH:

- la prima rappresenta la stima della varianza futura dei ritorni condizionata alle informazioni disponibili fino al tempo t-1 (il passato dei ritorni stessi), tiene conto dell'autocorrelazione e dell'eteroschedasticità nei dati e viene aggiornata di volta in volta quando nuove informazioni diventano disponibili;
- la seconda rappresenta la stima della varianza futura dei ritorni senza considerare le informazioni passate o presenti, e corrisponde alla varianza costante ipotizzata per i ritorni se non ci fosse eteroschedasticità o autocorrelazione nei dati.

L'impatto del tempo sulle due varianze è diverso: la varianza incondizionata rimane costante, poiché non tiene conto dell'evoluzione dei dati nel periodo di riferimento; d'altra parte, la varianza condizionata varia nel tempo a seconda dei ritorni osservati e dei parametri del modello GARCH, e può quindi aumentare o diminuire nel tempo a seconda delle fluttuazioni e delle caratteristiche dei dati.

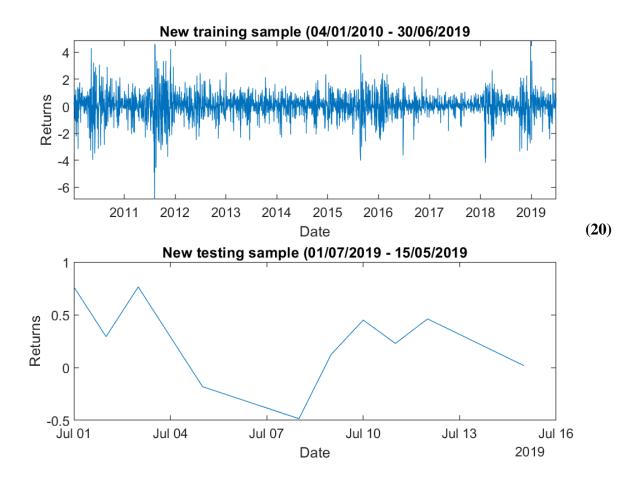




Second forecast: improving the performance

Per concludere l'analisi quantitativa dei rendimenti derivati dall'indice S&P500 e testare l'affidabilità dei modelli costruiti sono stati elaborati due nuovi sotto-gruppi campionari, osservabili in figura 20:

- Il primo sotto-periodo va dal 04/01/2010 al 30/06/2019 ($t=1,\ldots,T-954$), per definire e stimare il modello di interesse;
- il secondo sotto-periodo va dal 01/07/2023 al 15/07/2023 (T-953, ..., T-944), utilizzato per testare *pseudo out-of-sample* la bontà del forecast.



È possibile notare come, una volta eliminato il potenziale break strutturale (2019-2020) la serie non presenta più picchi eccessivamente elevati di volatilità (ad eccezione forse del periodo 2011-2012, che comunque presenta un valore percentuale dimezzato rispetto a quello 2019-2020).

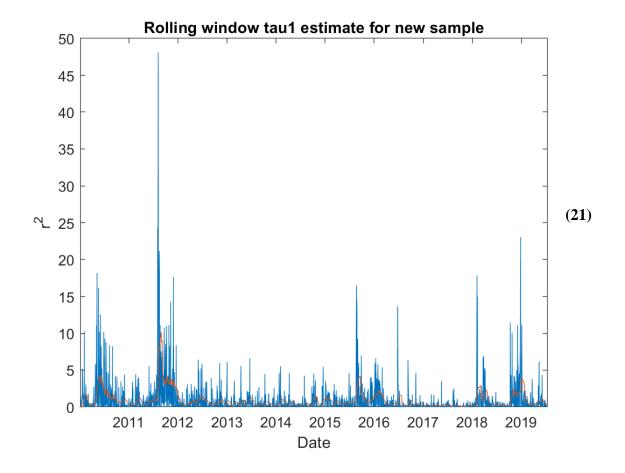


Rielaborando il forecast sui nuovi sotto-gruppi si assiste a un netto miglioramento della performance dei modelli precedentemente elaborati in termini di RMS(F)E, mostrato dalla tabella 7.

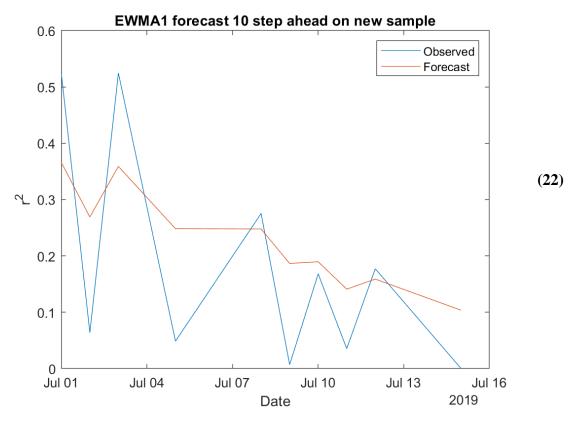
		Rolling Window $(\tau=20)$	EWMA (λ=0.7)	ARCH(8)	GARCH(1,2)
RMS(F)E sample	old	4.6071	4.1288	0.8067	0.8331
RMS(F)E sample	new	2.1856	0.0445	0.2162	0.6773

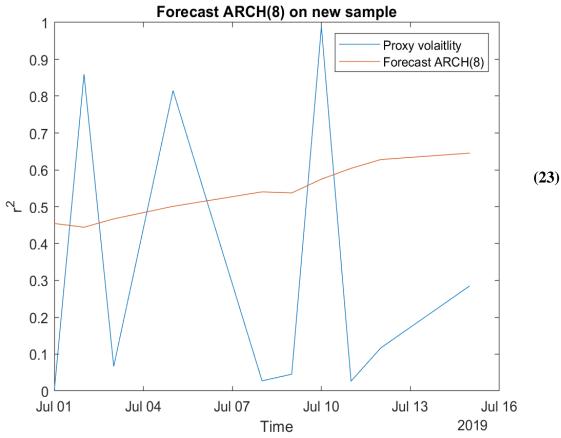
Tabella 7

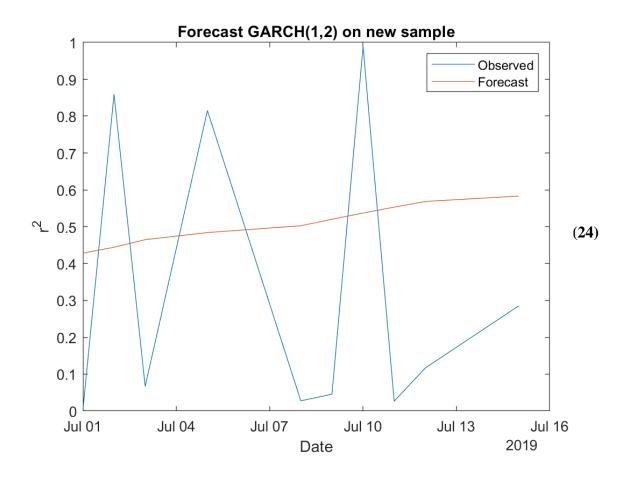
Anche dal punto di vista grafico (figura 21, 22, 23, 24) è possibile notare come i modelli allenati sul nuovo sotto-periodo siano decisamente più accurati di quelli allenati sul primo sotto-periodo nell'effettuare previsioni.











Tale miglioramento della capacità predittiva dei modelli è evidenza di come l'eliminazione del periodo con cluster di volatilità troppo elevata ("break strutturale") sia funzionale alla riduzione del rumore, al fine di ottenere una serie storica più stabile e coerente, oggetto di analisi più coerenti che forniscono stime più accurate delle future dinamiche di mercato.

