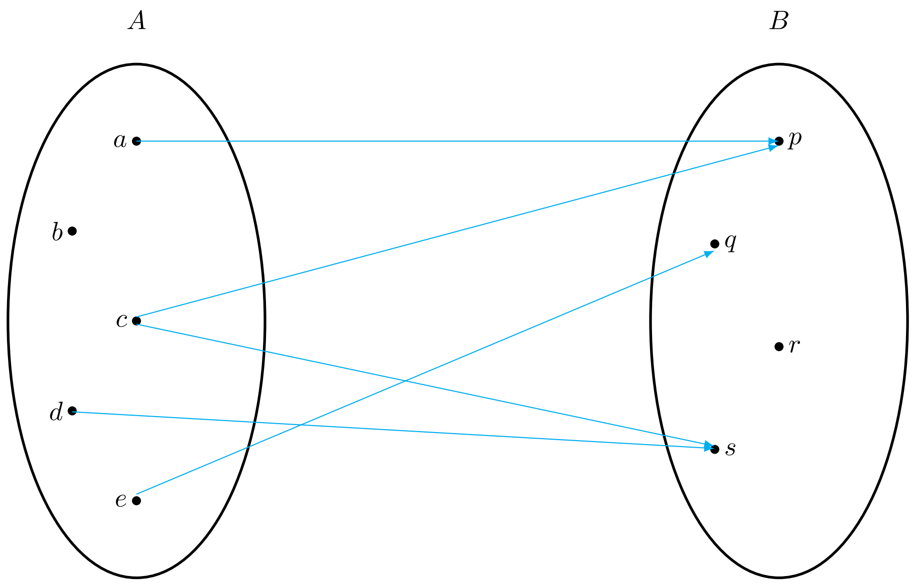
Eserciziario di Psicometria

Stefano Dalla Bona

2025/2026



Istruzioni per l'utilizzo:

Lo scopo di questo eserciziario è fornire agli studenti del corso di Psicometria utili esercizi da risolvere al fine di giungere ad una preparazione adeguata per l'esame.

> Alcuni esercizi sono indicati come necessari per l'autovalutazione del proprio livello di comprensione dei concetti che si riprenderanno in sede d'esame. Un sottoinsieme di questi esercizi rappresenta un livello basilare, ed è indicato dall'icona del Pedone ♟.
> Altri esercizi richiedono maggiore impegno e vengono indicati attraverso l'icona del Cavallo ♞.

> Altri esercizi sono invece destinati a migliorare ulteriormente la comprensione degli argomenti di studio e vanno oltre i criteri valutativi dell'esame. Quando questi esercizi presentano contenuti avanzati, ma dovrebbero essere risolvibili grazie all'apprendimento di concetti affini a quelli trattati nel corso sono indicati con l'icona della Torre ♜. Con l'icona della Donna ♛ si indicano gli esercizi più avanzati dell'eserciziario, che pongono una sfida al risolutore.

1 Prima Parte: Elementi di teoria degli insiemi

1.1 Elementi di logica

Esercizio 1:

Il vocabolario simbolico della logica si avvale di tre categorie di simboli: le variabili proposizionali (come ad esempio p e q, viste a lezione, che possono rappresentare delle proposizioni per le quali esiste un criterio univoco per determinarne il valore di verità), le parentesi "()" e i connettivi logici (ad esempio $\wedge$, $\vee$, $\neg$). Non tutte le possibili successioni di questi segni hanno significato: si pensi ad esempio alla successione $pq \Rightarrow \neg$. Una successione finita di simboli viene detta forma proposizionale ed è quindi dotata di significato quando si osservano tre regole:

- Una variabile proposizionale (ad esempio p) è una forma proposizionale.
- Se p e q sono forme proposizionali, allora anche $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Leftrightarrow q$, $p \Rightarrow q$ e $\neg p$ sono forme proposizionali.
- Una successione di simboli è una forma proposizionale se può essere ottenuta applicando un numero finito di volte le regole precedenti.

Si determinino se le seguenti sono forme proposizionali:

1. $p \wedge q$
2. $p(q \vee q$
3. $q \Rightarrow p$
4. $(p \Rightarrow q)\neg(p \vee q)$
5. $(p \vee q) \wedge \neg(p \Leftrightarrow q)$
6. q
7. $p(\neg q)$
8. $q \wedge \neg q$

Soluzione 1:

1. $p \wedge q$ – Sì
2. $p(q \vee q$ – No
3. $q \Rightarrow p$ – Sì
4. $(p \Rightarrow q)\neg(p \vee q)$ – No
5. $(p \vee q) \wedge \neg(p \Leftrightarrow q)$ – Sì
6. q – Sì
7. $p(\neg q)$ – No
8. $q \wedge \neg q$ – Sì

Esercizio 2:

A lezione si sono definiti gli operatori logici fondamentali di congiunzione ($\wedge$), disgiunzione ($\vee$) e negazione ($\neg$). Sono stati definiti anche altri importanti operatori, come l'implicazione ($\Rightarrow$) e la bi-implicazione ($\Leftrightarrow$). Un altro importante operatore logico è dato dalla disgiunzione esclusiva ($\oplus$).

Date due forme proposizionali p e q, la proposizione $p \oplus q$ è vera nel caso in cui solamente p sia vera oppure quando solamente q sia vera. La tavola di verità risultante sarà:

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Si noti che la disgiunzione esclusiva può essere definita per mezzo della negazione della bi-implicazione, ovvero $\neg(p \Leftrightarrow q)$:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

A sua volta, la bi-implicazione è un operatore che può essere definito attraverso gli elementari operatori di congiunzione ($\wedge$), disgiunzione ($\vee$) e negazione ($\neg$), ovvero $(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	F	F	F
F	F	F	T	T

Si provi a definire, utilizzando solamente gli operatori elementari e le tavole di verità, l'operatore di disgiunzione esclusiva (esistono diverse possibili soluzioni).

Soluzione 2:

$$p \oplus q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$	$(\neg p \wedge q)$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	F

1.2 Elementi di teoria degli insiemi

Esercizio 3:

♜ Si provi che $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

Soluzione 3:

Supponiamo l'esistenza di un insieme X che appartiene a $P(A)$:

$$X \in P(A)$$

Osserviamo che, per definizione, $X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$.

Per ogni X che è sottoinsieme di A, e poiché $A \subseteq B$, per la proprietà transitiva dell'inclusione, si ha:

$$X \subseteq A \wedge A \subseteq B \Rightarrow X \subseteq B$$

Poiché X è un sottoinsieme di B, allora $X \in P(B)$:

$$X \subseteq B \Leftrightarrow X \in P(B)$$

Poiché per qualunque elemento X che appartiene a $P(A)$ è vero che esso appartiene anche a $P(B)$, si conclude che:

$$P(A) \subseteq P(B)$$

Quindi, abbiamo dimostrato che:

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$$