

# Entrega 1.2

Stefano Molina Martínez

Marzo 2016

## 1 ¿Qué es un producto tensorial?

Un producto tensorial es un método que funciona a través de juntar dos o más espacios vectoriales que forman un nuevo espacio vectorial que se define como el espacio de producto tensorial. El nuevo espacio resulta ser lineal en cada uno de los espacios que lo componen.

Una forma de pensar el producto tensorial de los vectores  $v_1 \in V_1$  y  $v_2 \in V_2$  es como funciones de una variable. El producto tensorial  $v_1 \otimes v_2$  es una función en el plano cuyo valor en  $(x_1, x_2)$  es igual al producto  $v_1(x_1)v_2(x_2)$ .

*Definición:* Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales. para  $v_1, v_2 \in V$  y  $w_1, w_2 \in W$ , se dice que el símbolo  $\otimes$  es el producto bilineal, que satisface para  $\alpha_1, \alpha_2$  escalares:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \otimes w &= \alpha_1 v_1 \otimes w + \alpha_2 v_2 \otimes w \\ v \otimes (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) &= \alpha_1 v \otimes w_1 + \alpha_2 v \otimes w_2\end{aligned}$$

A partir de lo anterior,  $V \otimes W$  es el espacio tensorial de las combinaciones lineales  $\sum \alpha_i v_i \otimes w_i$  para  $v_i \in V$  y  $w_i \in W$ .

*Nota:* si  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  es una base en  $V$  y  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$  una base en  $W$ , entonces su producto tensorial,  $\{e_{ij} = e_i \otimes e'_j\}$  es una base de  $V \otimes W$ , llamada *producto base*.

### 1.1 Componentes de un tensor

Sean  $V_1$  y  $V_2$  espacios vectoriales con bases  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  y  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$  respectivamente. Entonces  $W = V_1 \otimes V_2$  es un espacio vectorial con dimensión  $mn$  con vectores base

$$\{e_{ij} = e_i \otimes e'_j; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$$

Cada punto  $w \in W$  tiene una representación única como una combinación lineal de los vectores base:

$$w = w^{ij} e_i \otimes e'_j = w^{ij} e_{ij}$$

Los  $w^{ij}$  son componentes del tensor  $w$ , cabe señalar que no es un tensor.

## 1.2 Transformación tensorial

Sean  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base en  $V_1$  y  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$  una base en  $V_2$  y sean  $w_{ij}$  los componentes del tensor en  $W = V_1 \otimes V_2$  con respecto al producto base  $\{e_{ij} = e_i \otimes e'_j\}$ .

Ahora, consideremos el efecto de una nueva base  $\{\bar{e}_i \in V_1\}$  y  $\{\bar{e}' \in V_2\}$ , se escriben:

$$\bar{e}_r = K_r^i e_i \quad \bar{e}'_r = K_r^{i'} e'_{i'}$$

A partir de los términos de las bases originales. El producto base en  $W$  se transforma de  $\{e_{ij}\}$  en  $\{\bar{e}_{ij}\}$  como sigue

$$\bar{e}_{rs} = K_r^i K_s^{j'} e_i \otimes e'_{j'} = K_r^i K_s^{j'} e_{ij}$$

Ahora, en la notación  $\bar{w}^{ij}$ , el componente de  $w$  con respecto a la nueva base, tenemos:

$$w = \bar{w}^{rs} \bar{e}_{rs} = \bar{w}^{rs} K_r^i K_s^{j'} e_{ij} = w^{ij} e_{ij}$$

## 1.3 Producto tensorial

Los componentes de  $w$  con respecto a la nueva base son:

$$\bar{w}^{rs} = L_i^r L_{j'}^s w^{ij}$$

donde  $L$  es la matriz inversa de  $K$  y  $L'$  la matriz inversa de  $K'$ . Esta es la regla de transformación tensorial para los componentes de un vector contravariante en  $V_1 \otimes V_2$ . En la mayoría de las aplicaciones, sólo se ocupa un espacio  $V$ , en el cual se desarrollan sus productos tensoriales  $V^{\otimes k}$ . Además  $V_1 = V_2$ ,  $m = n$ ,  $K = K'$  y  $L = L'$ .

## 1.4 Multiplicación tensorial y contracción

Operativamente, un tensor es un arreglo de número o funcionales que obedece una regla de transformación multi-lineal particular bajo un cambio de base en el espacio trabajado. Suponer que se trabaja en un solo espacio  $V$  y que los vectores de cambio de base están dados por

$$\bar{e}_i = a_i^r e_r \quad o \quad e_r = b_r^i \bar{e}_i$$

donde  $b_r^i$  es la matriz inversa de  $a_i^r$ . Estas matrices pertenecen a un grupo relevante al problema, usualmente al grupo lineal general, pero en circunstancias apropiadas al grupo ortogonal o al simétrico. Un arreglo  $w = w^{ijk}$  cuyos valores en el nuevo sistema de coordenadas está dado por

$$\bar{w}^{ijk} = b_r^i b_s^j b_t^k w^{rst}$$

que se dice que es un vector contravariante de orden tres. Técnicamente  $w^{ijk}$  son los componentes de un punto o vector en  $V^{\otimes 3}$ . De igual manera, un arreglo  $\gamma_{ij}$  que se transforma por la regla

$$\gamma_{ij} = a_i^r a_j^s \gamma_{rs}$$

se dice que es covariante de orden dos. El producto directo de dos tensores es un tensor, por ejemplo,

$$\Psi_{rs}^{ijk} = w^{ijk} \gamma_{rs}$$

es un tensor de orden covariante dos y orden contravariante tres. Sigue la regla de transformación para un vector mixto.

La multiplicación directa resulta en un tensor de orden aumentado. En general, los índices pueden tener diferentes rangos y pueden referirse a espacios no relacionados. Sin embargo, cuando un superíndice y un subíndice se refieren a componentes en un espacio y su dual, necesariamente tienen el mismo rango. En esos casos, es válido sumar sobre los índices, a este proceso se le conoce como contracción, resultando en un tensor de orden menor. En el ejemplo anterior,

$$\Phi^i = \Psi_{rs}^{irs} = w^{irs} \gamma_{rs}$$

es un vector contravariante, o el vector componente de un punto en  $V$ .

El cálculo tensorial es la simple aplicación de estas reglas de multiplicación y contracción. Uno de los casos más importantes de contracción tensorial ocurre cuando resulta en un tensor de orden cero, conocido también como escalar o invariante. Esas cifras son importantes porque su valor es el mismo en todo sistema de coordenadas del grupo.

## 1.5 Transformación Lineal de espacios vectoriales

El espacio de transformaciones lineales de  $U$  de dimensión  $n$  a  $V$  de dimensión  $m$  es el conjunto de funciones  $g$  en  $U$  con rango en  $V$  que satisfacen:

$$g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2)$$

Consecuentemente, el conjunto de esas transformaciones constituye un espacio vectorial de dimensión  $mn$ . Los componentes de  $g$  con respecto a los vectores base de  $U$  y  $V$  forman una matrix  $\{g_r^i\}$  de  $m \times n$ : los componentes de  $y = g(x)$  son dados por

$$y^i = g_r^i x^r$$

Así,  $g_r^i$  son los componentes del tensor mixto  $g$  en el espacio  $U \otimes V^*$ .

## 2 Teoría elemental de *acumulantes*

*Nota:* Un *acumulante* es un conjunto de cantidades que sirven como alternativa para calcular los momentos de alguna distribución, éstos son de gran ayuda debido a su simplicidad.

Si la variable aleatoria  $X$  tiene una función de densidad  $f_X(x)$  definida en  $-\infty < x < \infty$ , entonces la esperanza de la función  $g(x)$  es

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

En el caso discreto, la integral se susituye por una suma en los valores admisibles de la función.

### 2.1 Definiciones

Sea  $X$  v.a. cuyos componentes son  $X^1, \dots, X^p$ .

Considerar la serie infinita

$$M_X(\xi) = 1 + \xi_i \kappa^i + \xi_i \xi_j \kappa^{ij} / 2! + \xi_i \xi_j \xi_k \kappa^{ijk} / 3! + \dots$$

La cual se asume que converge para toda  $|\xi|$  suficientemente pequeña, esta suma también se puede escribir de la siguiente forma

$$M_X(\xi) = E\{\exp(\xi_i X^i)\}$$

y los momentos son las derivadas parciales de  $M_X(\xi)$  evaluadas en  $\xi = 0$ .

Los *acumulantes* son definidos a través de su función generadora,

$$K_X(\xi) = \log M_X(\xi)$$

la cual tiene una expansión

$$K_X(\xi) = \xi_i \kappa^i + \xi_i \xi_j \kappa^{i,j} / 2! + \xi_i \xi_j \xi_k \kappa^{i,j,k} / 3! + \dots$$

Esta expansión define implícitamente a todos los *acumulantes*, denotados como  $\kappa_i, \kappa^{i,j}, \kappa^{i,j,k} \dots$  en términos de sus momentos correspondientes. La forma en la que se van a diferenciar los *acumulantes* de los momentos en por sus superíndices, en los primeros éstos aparecen separados con comas, mientras que en los últimos no, también hay que resaltar que en el caso de el primer momento y el primer *acumulante*, ambos son iguales.

## 2.2 Acumulantes y momentos

Los *acumulantes* y los momentos están fuertemente relacionados, la demostración de relación termina en la fórmula recursiva que se describa de la siguiente manera

$$\kappa_n = \mu_n' - \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-1}{m-1} \kappa_m \mu_{n-m}'$$

## 2.3 Transformaciones lineales y afines

Si  $Y$  es una función lineal de  $X$ , se puede escribir

$$Y^r = a_i^r X^i$$

donde  $a_i^r$  es un arreglo de constantes. Se puede observar que los momentos de  $Y$  son

$$a_i^r, \quad a_i^r a_j^s \kappa^{ij}, \quad a_i^r a_j^s a_k^t \kappa^{ijk}, \dots$$

Mientras que los *acumulantes* son

$$a_i^r, \quad a_i^r a_j^s \kappa^{i,j}, \quad a_i^r a_j^s a_k^t \kappa^{i,j,k}, \dots$$

También se observar que bajo transformaciones lineales, tanto los momentos como los *acumulantes* se transforman como tensores contravariantes. Hay que señalar que la matriz  $a_i^r$  no necesita ser de rango completo.

Las transformaciones afines conllevan un cambio de origen de acuerdo a la ecuación

$$Y^r = a^r + a_i^r X^i$$

Los *acumulantes* de  $Y$ , que se probarán más adelante, son

$$a^r + a_i^r \kappa^i, \quad a_i^r a_j^s \kappa^{i,j}, \quad a_i^r a_j^s a_k^t \kappa^{i,j,k} \dots$$

El cambio de origen afecta únicamente al primer *acumulante*, también llamado vector media. Por esta razón, los *acumulantes* son llamados a veces semi-invariantes. Por otro lado, los momentos de  $Y$  son

$$\begin{aligned} & a^r + a_i^r \kappa^i, \\ & a^r a^s + a^r a_i^s \kappa^i [2] + a_i^r a_j^s \kappa^{ij}, \\ & a^r a^s a^t + a^r a^s a_i^t \kappa^i [3] + a^r a_i^s a_j^t \kappa^{ij} [3] + a_i^r a_j^s a_k^t \kappa^{ijk} \end{aligned}$$

y así sucesivamente, donde  $a^r a_i^s \kappa^i [2] = a^r a_i^s \kappa^i + a^s a_i^r \kappa^i$ . Así, a diferencia de los *acumulantes*, los momentos no se transforman de una forma sencilla bajo transformaciones afines de coordenadas.

## 2.4 Interpretación de *Acumulantes*

Se va a tratar con *acumulantes* univariados y posteriormente se llevará la intuición de los multivariados.

El primer *acumulante* de  $X$ ,  $\kappa_1$  es la media de la distribución, mientras que el segundo,  $\kappa_2$  es la varianza.

El tercer *acumulante* de  $X$  es una medida de asimetría en el mismo sentido que  $\mu_3 = E(X - \mu_1)^3$  es cero si  $X$  está distribuida simétricamente. Por su parte,  $\kappa_3 = 0$  no implica, por sí solo, simetría en la distribución: para garantizar simetría se necesita que todos los *acumulantes* nones desaparezcan y que la distribución esté determinada por sus momentos. A partir del tercero y todos los *acumulantes* estandarizados de orden mayor dados por  $\rho_r = \kappa_r / \kappa_2^{r/2}$  pueden ser interpretados como medidas resumidas de alejamiento de normalidad en el sentido de que si  $X$  es normal, todos los *acumulantes* de orden tres o más son cero.

La interpretación más sencilla de *acumulantes* bivariados es en término de independencia. Si  $X^1$  y  $X^2$  son independientes, entonces todos los *acumulantes* mixtos que incluyen solo  $X^1$  y  $X^2$  son cero. Por lo tanto,  $\kappa^{1,2} = \kappa^{1,1,2} = \kappa^{1,2,2} = \dots = 0$  o siendo más concisos usando notación de potencia,  $\kappa_{rs} = 0 \forall r, s \geq 1$ . Dado que los momentos determinan la distribución conjunta, lo contrario también es verdadero, eso quiere decir que si  $\kappa_{rs} = 0 \forall r, s \geq 1$ , entonces  $X^1$  y  $X^2$  son independientes. La sugerencia es que si  $\kappa_{rs} = 0$  para  $r, s = 1, \dots, t$  entonces  $X^1$  y  $X^2$  son aproximadamente independientes en algún sentido.

## 2.5 *Acumulantes* condicionales

Suponer que son dados los *acumulantes* condicionales conjuntos de las variables aleatorias condicionales  $X^1, \dots, X^P$  para algún evento  $A$ . La forma de combinar los *acumulantes* condicionales para obtener los *acumulantes* conjuntos no-condicionales es

$$E(X^1 X^2 \dots) = E_A E(X^1 X^2 \dots | A)$$

En otras palabras, los momentos no-condicionales son un promedio de los momentos condicionales. Pero, no es difícil mostrar que la covarianza de  $X^i$  y  $X^j$  satisface

$$\kappa^{i,j} = E_A \{ \text{cov}(X^i, X^j | A) \} + \text{cov}_A \{ E(X^i | A), E(X^j | A) \}.$$

Para ver cómo esto se generaliza a *acumulantes* de cualquier orden, se denotan los *acumulantes* condicionales  $\lambda^i, \lambda^{i,j}, \lambda^{i,j,k}$  y se usa la identidad que conecta con la función generadora de momentos

$$M_X(\xi) = E_A M_{X|A}(\xi)$$

La expansión de esta identidad y la comparación de sus coeficientes da

$$\kappa^i = E_A \{ \lambda^i \}$$

$$\kappa^{i,j} + \kappa^i \kappa^j = E_A\{\lambda^{ij} + \lambda^i \lambda^j\}$$

$$\kappa^{i,j,k} + \kappa^i \kappa^{j,k}[3] + \kappa^i \kappa^j \kappa^k = E_A\{\lambda^{i,j,k} + \lambda^i \lambda^{j,k}[3] + \lambda^i \lambda^j \lambda^k\}$$

La primera expresión de esta sección para la covarianza no-condicional se sigue de la segunda expresión de arriba. Usando este resultado en la tercera expresión, se tiene

$$\kappa^{i,j,k} = E(\lambda^{i,j,k}) + \kappa_2(\lambda^i, \lambda^{j,k})[3] + \kappa_3(\lambda^i, \lambda^j, \lambda^k).$$

### 3 *Acumulantes* generalizados

#### 3.1 La identidad fundamental para *acumulantes* generalizados

Tal como los momentos pueden ser expresados como combinaciones de *acumulantes* ordinarios, como se vio en la sección 2.4, los *acumulantes* generalizados pueden ser expresados de una manera similar. Primero, se muestran las expresiones para de la sección anterior.

$$\begin{aligned}
\kappa^{i,jk} &= \kappa^{ijk} - \kappa^i \kappa^{jk} \\
&= \kappa^{i,j,k} + \kappa^j \kappa^{i,k} + \kappa^k \kappa^{i,j} \\
\kappa^{i,jkl} &= \kappa^{ijkl} - \kappa^i \kappa^{jkl} \\
&= \kappa^{i,j,k,l} + \kappa^j \kappa^{i,k,l} [3] + \kappa^{ij} \kappa^{k,l} [3] + \kappa^{ij} \kappa^k \kappa^l [3] \\
\kappa^{ij,kl} &= \kappa^{ijkl} - \kappa^{ij} \kappa^{kl} \\
&= \kappa^{i,j,k,l} + \kappa^i \kappa^{j,k,l} [2] + \kappa^k \kappa^{i,j,l} [2] + \kappa^{i,k} \kappa^{j,l} [2] + \kappa^i \kappa^k \kappa^{j,l} [4] \\
\kappa^{i,j,k,l} &= \kappa^{ijkl} - \kappa^i \kappa^{jkl} - \kappa^j \kappa^{ikl} + \kappa^{ij} \kappa^{kl} + 2\kappa^i \kappa^j \kappa^{kl} \\
&= \kappa^{i,j,k,l} + \kappa^k \kappa^{i,j,l} [2] + \kappa^{i,k} \kappa^{j,l} [2]
\end{aligned}$$

Esta notación con *brackets* se utiliza para simplificar, siendo su interpretación, por ejemplo para  $\kappa^{i,k} \kappa^{j,l} [2] = \kappa^{i,k} \kappa^{j,l} + \kappa^{i,l} \kappa^{j,k}$  y debe ser interpretada en el contexto de la partición de la izquierda, llamada  $i|j|kl$ . La partición omitida del mismo tipo es  $ij|kl$ , que corresponde al producto *acumulante*  $\kappa^{i,j} \kappa^{k,l}$ .

Por los ejemplos e arriba, es posible discernir, al menos cuantitativamente, con la regla que expresa los *acumulantes* generalizados en términos de *acumulantes* ordinarios. Un *acumulante* arbitrario de orden  $b$  que contiene  $p$  variables aleatorias puede ser escrito como  $\kappa(\Upsilon^*)$  donde  $\Upsilon^* \{v_1^* | \dots | v_b^*\}$  es una partición de  $p$  índices en  $b$  celdas no vacías. Convenientemente, cada partición que aparece a la derecha en las fórmulas citadas arriba tiene coeficiente  $+1$  y su expresión general puede ser escrita como

$$\kappa(\Upsilon^*) = \sum_{\Upsilon \vee \Upsilon^* = 1} \kappa(v_1) \dots \kappa(v_v)$$

donde la suma es sobre todo  $\Upsilon = \{v_1 | \dots | v_v\}$  tal que  $\Upsilon$  y  $\Upsilon^*$  no son subparticiones de ninguna partición que no sea el conjunto completo  $\Upsilon_1 = \{(1, 2, \dots, p)\}$  que contiene un bloque. Las particiones que satisfacen esta condición se llaman complementarias a  $\Upsilon^*$ . La notación y terminología usada viene de la teoría de retículas donde  $\Upsilon \vee \Upsilon^*$ , también el supremo de  $\Upsilon$  y  $\Upsilon^*$  igual a  $\Upsilon \vee \Upsilon^*$ .



Cualquier partición de  $p$  elementos o índices, por ejemplo  $\Upsilon^* = \{v_1^*|v_2^*|\dots|v_b^*\}$ , puede ser representada como una gráfica con  $p$  vértices. Las orillas de la gráfica consisten en los pares ordenados  $(i, j)$  que están en el mismo bloque de  $\Upsilon^*$ . Así la gráfica de  $\Upsilon^*$  es la unión de  $b$  gráficas completas desconexas y se usa la notación  $\Upsilon^*$  intercambiable para la gráfica y la partición. Como  $\Upsilon$  y  $\Upsilon^*$  son dos gráficas que comparten los mismos vértices, se puede definir la *gráfica de suma de orillas*  $\Upsilon \oplus \Upsilon^*$ , cuyas orillas son la unión de las orillas de  $\Upsilon$  y  $\Upsilon^*$ . La condición de que  $\Upsilon \oplus \Upsilon^*$  sean conexas es la misma que la condición de la fórmula citada arriba donde  $\Upsilon \vee \Upsilon^* = 1$ . Por esta razón se usan los términos de *partición conexa* y *partición complementaria* de manera intercambiable. De hecho, este método de teoría de gráficas brinda una manera sencilla de determinar el supremo de dos o más particiones: los bloques de  $\Upsilon \vee \Upsilon^*$  son los componentes conectados de la gráfica de  $\Upsilon \oplus \Upsilon^*$ . Las conexiones en este caso no necesitan ser directas. En otras palabras, los bloques de  $\Upsilon \vee \Upsilon^*$  no corresponden en general a grupos de  $\Upsilon \oplus \Upsilon^*$ .

La expresión de arriba da *acumulantes* generalizados en términos de *acumulantes* ordinarios. La expresión análoga para *acumulantes* generalizados en términos de momentos ordinarios es

$$\kappa(\Upsilon^*) = \sum_{\Upsilon \geq \Upsilon^*} (-1)^{v-1} (v-1)! \mu(v_1) \dots \mu(v_v)$$

donde  $\mu(v_j)$  es un momento ordinario y  $v$  es el número de bloque de  $\Upsilon$ . La suma se extiende sobre todas las particiones  $\Upsilon$  tales que  $\Upsilon^*$  es una subpartición de  $\Upsilon$ . Esta expresión se sigue del desarrollo efectuado en la sección anterior.

### 3.2 *Acumulantes* de polinomios homogéneos

Considerar dos polinomios homogéneos de grados 2 y 3

$$P_2 = a_{ij} X^i X^j \quad ; \quad P_3 = a_{ijk} X^i X^j X^k$$

En muchos sentidos, es mejor pensar a  $P_2$  y  $P_3$  no como formas cuadráticas y cúbicas, pero como formas lineales en pares de variables y tripletas de variables, respectivamente. A partir de este punto de vista se puede ver que

$$\begin{aligned} E(P_2) &= a_{ij} \kappa^{ij} = a_{ij} (\kappa^{i,j} + \kappa^i \kappa^j) \\ E(P_3) &= a_{ijk} \kappa^{ijk} = a_{ijk} (\kappa^{i,j,k} + \kappa^i \kappa^{j,k} [3] + \kappa^i \kappa^j \kappa^k) \\ var(P_2) &= a_{ij} a_{kl} \kappa^{ij,kl} \end{aligned}$$

$$cov(P_2, P_3) = a_{ij} a_{klm} \kappa^{ij,klm}$$

En algunas aplicaciones específicas, sucede que los arreglos  $a_{ij}$  y  $a_{ijk}$  tienen una estructura que puede ser usada para simplificar las expresiones. A su vez, puede suceder que los *acumulantes* tengan una estructura característica sencilla de independencia, intercambiabilidad o

distribuciones idénticas. En esos casos, los *acumulantes* conjuntos pueden ser simplificados utilizando notación de potencias.

Para ilustrar lo anterior, suponer que  $a_{ij}$  es la matriz de residuales de rango  $r$ , escrita normalmente como  $I - X(X^T X)^{-1} X^T$  en la notación de modelos lineales donde  $X$  es la matriz del modelo con constantes conocidas. Suponer que las variables aleatorias  $Y^i - \kappa^i$  son iid tal que  $\kappa^{ij} = \kappa_2 \delta^{ij}$  y los *acumulantes* de cuarto orden son  $\kappa_2 \delta^{ijkl}$ . Bajo la suposición de que  $E(Y)$  pertenece al espacio columna de  $X$ , se sigue que  $a_{ij} \kappa^j = 0$  y por lo tanto

$$E(P_2) = a_{ij} \kappa^{i,j} = \kappa_2 \sum a_{ii} = r \kappa_2$$

$$\text{var}(P_2) = a_{ij} a_{kl} (\kappa^{i,j,k,l} + 2 \kappa^{i,k} \kappa^{j,l}) = \kappa_4 \sum a_{ii}^2 + 2r \kappa_2^2$$

En este ejemplo,  $P_2$  es el residuo de la suma de cuadrados con  $r$  grados de libertad después de una regresión lineal sobre  $X$ , donde los errores teóricos son iid pero no necesariamente normales.

### 3.3 Transformación polinomial

Ahora será más sencillo desarrollar la regla de transformación para *acumulantes* bajo transformaciones no lineales arbitrarias a nuevas variables  $Y$ . Las fórmulas desarrolladas en las secciones anteriores se refieren a las transformaciones polinomiales

$$Y^1 = \prod_{j \in v_1^*} X^j, \quad Y^2 = \prod_{j \in v_2^*} X^j, \dots, \quad \prod_{j \in v_k^*} X^j$$

Para extender el entendimiento de que cualquier función puede ser aproximada con una precisión arbitraria por medias de un polinomio, existe una pequeña pérdida de generalidad considerando las transformaciones polinomiales

$$Y^r = a^r + a_i^r X^i + a_{ij}^r X^i X^j + a_{ijk}^r X^i X^j X^k + \dots$$

que debe ser convergente para toda  $X$ . En la práctica para cálculos asintóticos, la expansión debe ser convergente para toda  $X$  cuya probabilidad sea apreciable.

Para precisar la regla de transformación de *acumulantes* en una forma concisa, es útil abreviar la expresión anterior usando notación matricial:

$$Y^r = (A_0^r + A_1^r + A_2^r + \dots) X$$

donde, por ejemplo,  $A_2^r X$  se entiende como el vector cuyas componentes son cuadráticas en  $X$ . La expresión se puede reducir más introduciendo los operadores  $P^r = A_0^r + A_1^r + \dots$  y escribiendo

$$Y^r = P^r X$$

La función generadora de *acumulantes* de  $Y = Y^1, \dots, Y^q$  puede ser escrita como

$$K_Y(\xi) = \exp(\xi_r P^r) \kappa_X$$

donde  $\exp(\xi_r P^r)$  es un operador que actúa sobre los *acumulantes* de  $X$  como sigue

$$K_Y(\xi) = \{1 + \xi_r P^r + \xi_r \xi_s P^r P^s / 2! + \xi_r \xi_s \xi_t P^r P^s P^t / 3! + \dots\} \kappa_X$$

Definiendo  $1 \kappa_X = 0$  y

$$P^r \kappa_X = a^r + a_i^r \kappa^i + a_{ij}^r \kappa^{ij} + a_{ijk}^r \kappa^{ijk} + \dots$$

Los operadores compuestos  $P^r P^s$  y  $P^r P^s P^t$  actuando sobre  $\kappa_X$  producen *acumulantes* generalizados de orden  $b = 2$  y  $b = 3$  respectivamente. De igual forma, los operadores compuestos de tercer orden producen términos tales que

$$A_1^r A_1^s A_1^t \kappa_X = a_i^r a_j^s a_k^t \kappa^{i,j,k}$$

$$A_1^r A_2^s A_1^t \kappa_X = a_i^r a_{jk}^s a_l^t \kappa^{ijkl,l}$$

Los operadores compuestos que incluyen  $A_0$  producen términos tales que

$$A_0^r A_1^s \kappa_X = a^r a_i^s \kappa^i = 0$$

$$A_1^r A_0^s A_1^t \kappa_X = a_i^r a^s a_{kl}^t \kappa^{i,kl} = 0$$

los cuales son cero porque son *acumulantes* mixtos que incluyen una variable que es una constante.

La prueba de la función generadora de *acumulantes* se sigue de la definición de *acumulantes* generalizados juntos con los resultados del Capítulo 2. Una expresión similar pero menos formal puede ser desarrollada por la función generadora de momentos  $M_X(\xi)$ , que puede ser escrita

$$M_Y(\xi) = \exp(\xi_r P^r) * \kappa_X$$

donde  $1 * \kappa_x = 1$ ,  $P^r * \kappa_X = P^r \kappa_X$  y las comas se omiten en la aplicación de operadores compuestos, resultando

$$A_0^r A_1^s * \kappa_X = a^r a_i^s \kappa^i$$

$$A_1^r A_1^s * \kappa_x = a_i^r a_j^s \kappa^{ij}$$

$$A_1^r A_0^s A_2^t * \kappa_X = a_i^r a^s a_{jk}^t \kappa^{ijk}$$

y así sucesivamente. Otra vez, la prueba se sigue de la definición de momentos.

### 3.4 Clasificacando particiones complementarias