Entrega 1

Stefano Molina Martínez

Febrero 2016

1 ¿Qué es un producto tensorial?

Un producto tensorial es un método que funciona a través de juntar dos o más espacios vetoriales que forman un nuevo espacio vectorial que se define como el espacio de producto tensorial. El nuevo espacio resulta ser lineal en cada uno de los espacios que lo componen.

Una forma de pensar el producto tensorial de los vectores $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ es como funciones de una variable. El producto tensorial $v_1 \otimes v_2$ es una función en el plano cuyo valor en (x_1, x_2) es igual al producto $v_1(x_1)v_2(x_2)$.

Definición: Sean V y W espacios vectoriales. para $v_1, v_2 \in V$ y $w_1, w_2 \in W$, se dice que el símbolo $\otimes$ es el producto bilineal, que satisface para α_1, α_2 escalares:

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \otimes w = \alpha_1 v_1 \otimes w + \alpha_2 v_2 \otimes w$$
$$v \otimes (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 v \otimes w_1 + \alpha_2 v \otimes w_2$$

A partir de lo anterior, $V \otimes W$ es el espacio tensorial de las combinaciones lineales $\sum \alpha_i v_i \otimes w_i$ para $v_i \in V$ y $w_i \in W$.
Nota: si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ es una base en V y $\{e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_m^{'}\}$ una base en W, entonces su producto tensorial, $\{e_{ij} = e_i \otimes e_j^{'}\}$ es una base de $V \otimes W$, llamada *producto base*.

1.1 Componentes de un tensor

Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales con bases $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ y $\{e_1^{'}, e_2{'}, ..., e_m^{'}\}$ respectivamente. Entonces $W = V_1 \otimes V_2$ es un espacio vectorial con dimensión mn con vectores base

$$\{e_{ij} = e_i \otimes e_j^{'}; i = 1, ...n; j = 1, ..., n\}$$

Cada punto $w \in W$ tiene una representación única como una combinación lineal de los vectores base:

$$w = w^{ij} e_i \otimes e_j^{'} = w^{ij} e_{ij}$$

Los w^{ij} son componentes del tensor w, cabe señalar que <u>no</u> es un tensor.

1.2 Transformación tensorial

Sean $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base en V_1 y $\{e_1^{'}, e_2^{'}, ..., e_m^{'}\}$ una base una base en V_2 y sean w_{ij} los componentes del tensor en $W = V_1 \otimes V_2$ con respecto al producto base $\{e_{ij} = e_i \otimes e_j^{'}$.

Ahora, consideremos el efecto de una nueva base $\{\bar{e_i} \in V_1\}$ y $\{\bar{e^{'}} \in V_2\}$, se escriben:

$$\bar{e_r} = K_r^i e_i \qquad \bar{e_r^{'}} = K_r^{'i} e_i^{'}$$

A partir de los términos de las bases originales. El producto base en W se transforma de $\{e_{ij}\}$ en $\{\bar{e_{ij}}\}$ como sigue

$$\bar{e_{rs}} = K_r^i K_s^{'j} e_i \otimes e_j^{'} = K_r^i K_s^{'j} e_{ij}$$

Ahora, en la notación $\bar{w^{ij}}$, el componente de w con respecto a la nueva base, tenemos:

$$w = \bar{w^{rs}} \bar{e_{rs}} = \bar{w^{rs}} K_r^i K_s^{'j} e_{ij} = w^{ij} e_{ij}$$

1.3 Producto tensorial

Los componentes de w con respecto a la nueva base son:

$$\bar{w}^{rs} = L_i^r L_j^{'s} w^{ij}$$

donde L es la matriz inversa de K y $L^{'}$ la matriz inversa de $K^{'}$. Esta es la regla de transformación tensorial para los componentes de un vector contravariante en $V_1 \otimes V_2$. En la mayoría de las aplicaciones, sólo se ocupa un espacio V, en el cual se desarrollan sus productos tensoriales $V^{\otimes k}$. Además $V_1 = V_2$, $m = n$, $K = K^{'}$ y $L = L^{'}$.

1.4 Multiplicación tensorial y contracción

Operativamente, un tensor es un arreglo de número o funcionales que obedece una regla de transformación multi-lineal particular bajo un cambio de base en el espacio trabajado. Suponer que se trabaja en un solo espacio V y que los vectores de cambio de base están dados por

$$\bar{e}_i = a_i^r e_r \quad o \quad e_r = b_r^i \bar{e}_i$$

donde b_r^i es la matriz inversa de a_i^r. Estas matrices pertenecen a un grupo relevante al problema, usualmente al grupo lineal general, pero en circunstancias apropiadas al grupo ortogonal o al simétrico. Un arreglo $w = w^{ijk}$ cuyos valores en el nuevo sistema de coordenadas está dado por

$$\bar{w}^{ijk} = b_r^i b_s^j b_t^k w^{rst}$$

que se dice que es un vector contravariante de orden tres. Técnicamente w^{ijk} son los componentes de un punto o vector en $V^{\otimes 3}$. De igual manera, un arreglo γ_{ij} que se transforma por la regla

$$\gamma_{ij} = a_i^r a_j^s \gamma_{rs}$$

se dice que es covariante de orden dos. El producto directo de dos tensores es un tensor, por ejemplo,

$$\Psi_{rs}^{ijk} = w^{ijk}\gamma_{rs}$$

es un tensor de orden covariante dos y orden contravariante tres. Sigue la regla de transformación para un vector mixto.
La multiplicación directa resulta en un tensor de orden aumentado. En general, los índices pueden tener diferentes rangos y pueden referirse a espacios no relacionados. Sin embargo, cuando un superíndice y un subíndice se refieren a components en un espacio y su dual, necesariamente tienen el mismo rango. En esos casos, es válido sumar sobre los índices, a este proceso se le conoce como contracción, resultando en un tensor de orden menor. En el ejemplo anterior,

$$\Phi^i = \Psi_{rs}^{irs} = w^{irs}\gamma_{rs}$$

es un vector contravariante, o el vector componente de un punto en V.

El cálculo tensorial es la simple aplicación de estas reglas de multiplicación y contracción. Uno de los casos más importantes de contracción tensorial ocurre cuando resulta en un tensor de orden cero, conocido también como escalar o invariante.Esas cifras son importantes porque su valor es el mismo en todo sistema de coordenadas del grupo.