## = Modelo de factores latentes =

$m$ — # dimensiones en $y$ (i.e. $y \in \mathbb{R}^m$)

$$y_t \sim N_n(y_t \mid 0, \Omega)$$

donde $0 \leftarrow$ vector nulo dimensión $(m \times 1)$

$\Omega \leftarrow$ matriz de varianza $(m \times m)$ (no singular)

datos $= \{y_1, \ldots, y_T\}$

→ Para $k \leq m$, el modelo de factores estándar es.

$$y_t \mid f_t \sim N_n(y_t \mid \beta f_t, \Sigma)$$

donde $f_t \overset{iid}{\sim} N_k(f_t \mid 0, I_k)$ ← identidad

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_m^2)$$

Supongamos que $\beta$ es matriz de $(m \times k)$ de "factor loadings".

Resultado;

$$\mathrm{var}(y_t) = \mathrm{var}(y_t \mid \Omega) = \mathrm{var}(y_t \mid \beta, \Sigma)$$
$$= \Omega$$
$$= \beta\beta' + \Sigma.$$

Especificación alternativa:

$$\underbrace{y}_{(T\times m)} = \underbrace{F}_{(T\times k)} \underbrace{\beta'}_{(k\times m)} + \underbrace{\varepsilon}_{(T\times m)} \quad \text{ó} \quad y \mid F \sim \underbrace{N_{T\times m}}_{\text{Matrix-Normal}}(y \mid F\beta',$$

Two cases

• Matrix-normal

$$\underbrace{\varepsilon}_{(T\times m)} \sim N_{T\times m}\left(\varepsilon \mid \underbrace{0}_{(T\times m)}, \underbrace{I_T}_{(T\times T)}, \underbrace{\Sigma}_{(m\times m)}\right)$$

si

$$p(y \mid F, \beta, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-T/2} \operatorname{etr}\left\{-\tfrac{1}{2}\Sigma^{-1}\varepsilon\varepsilon'\right\}$$

y

$$p(y \mid \beta, \Sigma) \propto |\Omega|^{-T/2} \operatorname{etr}\left\{-\tfrac{1}{2}\Omega^{-1}y'y\right\}$$

donde

$$\operatorname{etr}(A) = \exp\{\underbrace{tr(A)}_{\text{traza}}\}$$

Dawid (1981) "Some matrix-variate distribution theory: notational considerations and a Bayesian application" Biometrika 68: 265-274.

---

Identifiability.

•) Modelo único en los $\beta$'s (factor loadings).

Si $P$ es $(k\times k)$ ortogonal $\Rightarrow$

a) $\beta^* = \beta P'$

b) $f_t^* = P f_t$

Alternativa: $\beta$ ~ matriz triangular inferior en bloques. diagonal positiva

¿ # de parámetros?

$$mk - \frac{k(k-1)}{2} = \# \text{ parámetros libres.}$$

= Prior specification :=

Model parameters: $\underline{\beta}$ (loading factors)

$\Sigma$ (diagonal elements)

$$\pi(\beta) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k} \pi(\beta_{ij})$$

$$= \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k} \pi(\beta_{ij} \mid 0, c_0)\, \mathbb{I}(i \neq j)$$

$$+ \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k} \pi(\beta_{ii} \mid 0, c_0)\, \mathbb{I}(i=j)\, \mathbb{I}(\beta_{ii} > 0)$$

$$\underbrace{= \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{m} N(\beta_{ij} \mid 0, c_0)\, \mathbb{I}(i \neq j) + \prod_{i=1}^{k} N(\beta_{ii} \mid 0, c_0)\, \mathbb{I}(\beta_{ii} > 0)}_{\text{Restricción triangular inferior.}}$$

$c_0$ ← bastante grande (hiperparámetro)

$$\pi(\Sigma) = \prod_{j=1}^{m} \pi(\sigma_j^2) =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} \text{Ga-Inv}\left(\sigma_j^2 \mid \nu/2, \nu s^2/2\right)$$

$\nu$, $s^2$ ← hiperparámetros.

= MCMC - Posterior analysis =

k - fijo y conocido (hiper parámetro)

Parámetros: $\beta$ ~ matrix $(m \times k)$

$\Sigma$ ~ diagonal $(m \times m)$

latentes: $F$ ~ matrix $(T \times m)$

Algoritmo:

P.0.) Fijar $\beta^{(0)}$, $\Sigma^{(0)}$ y $F^{(0)}$ valores iniciales

P.k) para ~~k = 1, 2, ..., K~~ ~~m~~ paso k

$n = 1, 2, \dots, N$ ($N$ = # de simulaciones)

-) $\beta^{(k)} \mid \Sigma^{(k-1)}, F^{(k-1)} \sim$

$$\sim \underbrace{\pi(\beta \mid \Sigma^{(k-1)}, F^{(k-1)})}$$

posterior condicional completa para los elementos en $\beta$ distintos de cero

para $i = 1, \dots, k$

$$\beta_i \sim N(m_i, c_i)\, \mathbb{I}(\beta_{ii} > 0)$$

donde $m_i = c_i\left(c_0^{-1}\mu_0 \mathbb{1}_i + \sigma_i^{-2} F_i' y_i\right)$

$$c_i^{-1} = c_0^{-1} I_i + \sigma_i^{-2} F_i' F_i$$

para $i = (k+1), \dots, m$

$$\beta_i \sim N(m_i, c_i)$$

donde $m_i = c_i\left(c_0^{-1}\mu_0 \mathbb{1}_k + \sigma_i^{-2} F' y_i\right)$

$$c_i^{-1} = c_0^{-1} I_k + \sigma_i^{-2} F' F.$$

donde

$F_i \leftarrow$ matriz $(T \times i)$ conteniendo los primeros $i$-columnas de $F$.

$y_i \leftarrow (T\times 1)$ contiene ~~los primer~~ la $i$-esima columna de $y$.

- $F \mid \beta, \Sigma \sim$

$$\sim \pi(F \mid \beta, \Sigma) =$$

$$= \prod_{t=1}^{T} \underbrace{\pi(f_t \mid \beta, \Sigma)}$$

$$= N(f_t \mid n_t, s_t)$$

donde $n_t = (I_k + \beta' \Sigma^{-1} \beta)^{-1} \beta' \Sigma^{-1} y_t$

$$s_t = (I_k + \beta' \Sigma^{-1} \beta)^{-1}$$

para $t = 1, \ldots, T$

- $\Sigma \mid F, \beta \sim \pi(\Sigma \mid F, \beta)$

$$= \prod_{i=1}^{m} \underbrace{\pi(\sigma_i^2 \mid F, \beta)}$$

$$\text{Gamma-inv}\left(\sigma_i^2 \mid \frac{v+T}{2}, \frac{vs^2 + d_i}{2}\right)$$

donde $d_i = (y_i - F\beta_i')'(y_i - F\beta_i')$.