Appunti di Lezione

Stefano Videsott

15 settembre 2025

Indice

1 Notazione

In matematica è necessario utilizzare un linguaggio non ambiguo; per questo motivo si fa uso della **logica proposizionale**.

1.1 Definizioni

Definizione Una **proposizione** è una frase che può essere solo *vera* oppure *falsa*.
Esempi:

- Oggi è soleggiato. (V)
- 2000 studenti oggi sono in aula. (F)

Definizione Un **predicato** è un'espressione logica con n parametri liberi; al variare di essi può assumere valore *vero* o *falso*.
Esempi:

- $P(x) : x^2 \geq 25$
- $Q(d, m)$: Il docente d spiega la materia m
- $R(a, b, c) : a < b + c$

1.2 Quantificatori

$$\forall \text{ “per ogni”}, \qquad \exists \text{ “esiste almeno un elemento”}, \qquad \exists! \text{ “esiste un unico”}$$

Esempi:

- $P(x) : x \geq 25, \quad \exists x \in \mathbb{N}\ P(x) \quad$ (vero)
- $P(x) : x \geq 25, \quad \forall x \in \mathbb{N}\ P(x) \quad$ (falso)
- $P(s, m)$: “allo studente s piace la materia m” $\exists s\ \forall m\ \ P(s, m)$ Traduzione: esiste almeno uno studente a cui piacciono tutte le materie.
- $P(s, m)$: “allo studente s piace la materia m” $\forall m\ \exists s\ P(s, m)$ Traduzione: per ogni materia esiste almeno uno studente a cui piace quella materia.

1.3 Operazioni su proposizioni

1.3.1 Negazione

La negazione di una proposizione si indica con $\neg$ e inverte la veridicità della stessa, scambiando i quantificatori.

$$\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\ \neg P(x), \qquad \neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\ \neg P(x)$$

Esempi:

- $N(p)$: “la pecora p è nera”, $\exists p\ N(p)$. Negazione: $\forall p\ \neg N(p)$ (tutte le pecore non sono nere).
- Ogni anno a, esiste almeno uno studente s che non passa nessun esame:
  $\forall a\ \exists s\ \forall e\ \mathit{Bocciato}(a, s, e)$. Negazione: $\exists a\ \forall s\ \exists e\ \neg \mathit{Bocciato}(a, s, e)$.

1.3.2 Connettivi logici

Congiunzione ($A \wedge B$) $A \wedge B$ è vera solo se sia A sia B sono vere.

Disgiunzione ($A \vee B$) $A \vee B$ è vera se almeno una tra A e B è vera (anche entrambe).

Disgiunzione esclusiva ($A \oplus B$) $A \oplus B$ ("aut") è vera se esattamente una tra A e B è vera, ma non entrambe.

Leggi di De Morgan

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B), \qquad \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$$

1.4 Tabelle di verità

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$
V	V	V	V	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

1.5 Implicazione logica

Definizione L'**implicazione** $A \Rightarrow B$ si legge "se A allora B". È definita come:

$$A \Rightarrow B \quad \equiv \quad \neg A \vee B$$

Ed è falsa solo nel caso in cui A sia vera e B sia falsa.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esempi

- Se piove (A), allora porto l'ombrello (B). L'implicazione è falsa solo se piove e non porto l'ombrello.
- Se $\forall x \in \mathbb{Z} x \geq 3 \Rightarrow x^2 \geq 9$ (V)
- Se n è divisibile per 4, allora n è pari. Vero per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
- Se un numero è pari, allora è divisibile per 4. Falso: ad esempio $n = 6$.

1.6 Doppia implicazione (equivalenza logica)

Definizione La **doppia implicazione** $A \Leftrightarrow B$ si legge "A se e solo se B". È definita come:

$$A \Leftrightarrow B \quad \equiv \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

Tabella di verità

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esempi

- Un numero n è pari $\Leftrightarrow$ n è divisibile per 2. (vero)
- Una figura è quadrato $\Leftrightarrow$ ha quattro lati uguali e quattro angoli retti. (vero per definizione)