CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 6– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2024/25

Esercizio 6.1 (7.42). *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 0, 0, 1),\ v_2 = (2, 0, 0, 0),\ v_3 = (2, 0, k, 0) \quad (k \text{ parametro reale}).$$

a) *Trovare una base di V al variare del parametro k.*
b) *Posto $k = 0$, completare la base trovata al punto precedente ad una base di $\mathbb{R}^4$.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $w = (-3, 0, -1, 1)$ appartiene a V.*

Soluzione:

a) Per rispondere anche alla domanda c) riduciamo a gradini la matrice $A|b$ in cui A ha per colonne i vettori $v_1,\ v_2,\ v_3$ e b è la colonna corrispondente al vettore w.

$$\begin{bmatrix} k & 2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} IV \\ I \\ \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ k & 2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - kI \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & | & -3-k \\ 0 & 0 & k & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Consideriamo solo la matrice A:
- Se $k \neq 0$, allora $\operatorname{rg}(A) = 3$, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$.
- Se $k = 0$, $\operatorname{rg}(A) = 2$ e una base di V è data da $\mathcal{B}(V) = \{v_1, v_2\}$.

c) Dalla matrice ridotta notiamo che
- Se $k \neq 0$, allora $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \in V$.
- Se $k = 0$, $\operatorname{rg}(A) = 2 < \operatorname{rg}(A|b) = 3$, quindi $w \notin V$

b) Per $k = 0$ abbiamo preso come base di V l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$. Si tratta quindi di aggiungere a questi due vettori altri due vettori in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^4$. A tale scopo possiamo ridurre a gradini la matrice ottenuta affiancando a v_1 e v_2 i vettori della base canonica, in modo da individuare tra questi i vettori da aggiungere. Notiamo però che per $k = 0$, $v_1 = (0, 0, 0, 1)$ e $v_2 = (2, 0, 0, 0)$, quindi evidentemente i vettori della base canonica da aggiungere per ottenere una base di $\mathbb{R}^4$ sono $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1, 0)$. Infine la base cercata può essere

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^4) = \{v_1, v_2, e_2, e_3\}$$

□

Esercizio 6.2 (7.45). *Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 1),\ v_2 = (1, 1, -1),\ v_3 = (1, 1, 3),\ w_1 = (2, 3, -1),\ w_2 = (1, 2, 2),\ w_3 = (1, 1, -3)$.*

a) *Si calcoli la dimensione dei sottospazi $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle,\ W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$.*
b) *Si trovi una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.*

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini le matrici A e B associate ai vettori v_i e w_i rispettivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - 2I \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III + 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - 5II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim(V) = \operatorname{rg}(A) = 3$$
$$\dim(W) = \operatorname{rg}(B) = 2$$

b) Dai risultati del punto precedente osserviamo che V e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$ e che in particolare V ha dimensione 3, quindi $V = \mathbb{R}^3$. Di conseguenza:

$$V \cap W = \mathbb{R}^3 \cap W = W$$

Dai calcoli eseguiti nel punto precedente, tenendo conto che nello scrivere B abbiamo scambiato la naturale posizione di w_1 e w_3, otteniamo che:

$$\mathcal{B}(V \cap W) = \mathcal{B}(W) = \{w_3,\ w_2\}.$$

□

Esercizio 6.3 (7.75)**.** *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi formano una base dello spazio $\mathbb{R}_2[x]$.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti, trovare uno o più polinomi che completano l'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ ad una base di $\mathbb{R}_2[x]$.*

Soluzione:

Ricordiamo che

$$\mathbb{R}_2[x] = \left\{a_0x^2 + a_1x + a_2 : \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

A ogni polinomio possiamo quindi associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$. In particolare ai polinomi $p_1,\ p_2,\ p_3$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (1, 1, 0)$$
$$p_2 = (k, 0, -1)$$
$$p_3 = (1, 2, k)$$

Di conseguenza i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbb{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbb{R}^3$.In particolare $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3.

Per rispondere a entrambe le domande dell'esercizio riduciamo a gradini la matrice associata ai tre vettori a cui affianchiamo la matrice identica 3×3.

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & 1 & | & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - k^2 & | & -1 & 1 & -k \end{bmatrix}$$

a) Consideriamo solo la prima parte della matrice: se $k \neq \pm 1$ la matrice associata ai vettori $p_1,\ p_2,\ p_3$ ha rango 3, quindi i tre vettor isono linearmente indipendenti. Analogamente i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbb{R}_2[x]$.
b) Se $k = \pm 1$ la matrice dei coefficienti ha rango 2 e dalla matrice ridotta ricaviamo che p_2 e p_3 sono linearmente indipendenti. Inoltre considerando tutta la matrice possiamo notare che la prima, la seconda e la quarta colonna (per esempio) sono linearmente indipendenti. Ricordiamo che la quarta colonna corrisponde al vettore $(1, 0, 0)$ ovvero al polinomio $q = x^2$. Quindi:
   – Se $k = 1$ una possibile base di $\mathbb{R}_2[x]$ è:
   $$\mathcal{B} = \left\{p_1 = x^2 + x, \quad p_2 = x^2 - 1, \quad q = x^2\right\}$$
   – Se $k = -1$ una possibile base di $\mathbb{R}_2[x]$ è:
   $$\mathcal{B} = \left\{p_1 = x^2 + x, \quad p_2 = -x^2 - 1, \quad q = x^2\right\}$$

□

Esercizio 6.4 (7.75)**.** *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi sono linearmente dipendenti.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti esprimere un polinomio come combinazione lineare degli altri.*

Soluzione:

Ricordiamo che

$$\mathbb{R}_2[x] = \left\{a_0x^2 + a_1x + a_2 : \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

A ogni polinomio possiamo quindi associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{x^2, \quad x, \quad 1\}$. Di conseguenza p_1, p_2 e p_3 sono linearmente indipendenti sse lo sono i tre vettori

$$p_1 = (1, 1, 0), \ p_2 = (k, 0, -1), \ p_3 = (1, 2, k)$$

a) Riduciamo a gradini la matrice associata ai tre vettori

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -k & 1 \\ 0 & -1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ III \\ II - kIII \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo distinguere tre casi

– Se $k^2 - 1 \neq 0$, ovvero $k \neq \pm 1$ la matrice ha rango 3, quindi $p_1, \ p_2$ e p_3 sono linearmente indipendenti.
– Se $k = 1$ o $k = -1$ la matrice ha rango 2, quindi $p_1, \ p_2$ e p_3 sono linearmente dipendenti.

b) Risolviamo l'equazione $xp_1 + yp_2 + zp_3 = 0$. Abbiamo già ridotto a gradini la matrice associata a tale sistema (senza la colonna nulla dei termini noti). Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$-2t \cdot p_1 + t \cdot p_2 + t \cdot p_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

e, per esempio $p_3 = 2p_1 - p_2$.

– Se $k = -1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$-2t \cdot p_1 - t \cdot p_2 + t \cdot p_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

e, per esempio $p_3 = 2p_1 + p_2$.

□

Esercizio 6.5 (7.78)**.** *Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi reali di grado non superiore a due, si considerino gli elementi*

$$p_1 = x - 1, \quad p_2 = x + 1, \quad p_3 = x^2 - x.$$

a) *Si mostri che l'insieme $\mathcal{B} = \{p_1, \ p_2, \ p_3\}$ è una base di V.*
b) *Si trovino le coordinate del polinomio costante 1 nella base $\mathcal{B}$.*

Soluzione:

Ricordiamo che a ogni polinomio $a_0x^2 + a_1x + a_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ possiamo associare le sue componenti (a_0, a_1, a_2) rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{x^2, \quad x, \quad 1\}$. Di conseguenza ai polinomi p_1, p_2 e p_3 associamo i tre vettori

$$p_1 = (0, 1, -1), \quad p_2 = (0, 1, 1), \quad p_3 = (1, -1, 0)$$

Quindi i polinomi p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbb{R}_2[x]$ sse i tre vettori p_1, p_2 e p_3 formano una base di $\mathbb{R}^3$. In particolare $\mathbb{R}_2[x]$ ha dimensione 3, ed è sufficiente verificare che i tre vettori siano linearmente indipendenti.

Inoltre al polinomio costante 1 associamo il vettore $f = (0, 0, 1)$, e le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ si trovano risolvendo il sistema $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = f$.

Per rispondere ad entrambe le domande riduciamo quindi a gradini la matrice associata ai quattro vettori.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} III \\ \\ I \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow II + I \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

a) La matrice dei coefficienti, associata a p_1, p_2 e p_3, ha rango 3, quindi i tre polinomi sono linearmente indipendenti e formano una base di $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Torniamo al sistema associato ai quattro vettori:

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 1 = -\frac{1}{2} \cdot p_1(x) + \frac{1}{2} \cdot p_2(x)$$

□

Esercizio 6.6 (7.79)**.** *Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x, di grado minore o uguale a 3.*

a) *Si mostri che $U = \{f(x) \in V \mid f(1) = f(2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V e se ne trovi una base.*
b) *Si completi la base trovata al punto precedente ad una base di V.*

SOLUZIONE:

Sia $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ il generico elemento di V. Le due condizioni $f(1) = f(2) = 0$ si esplicitano in

$$a + b + c + d = 0, \qquad 8a + 4b + 2c + d = 0$$

Inoltre a ogni polinomio possiamo associare il vettore formato dalle sue componenti rispetto alla base canonica $\{x^3,\ x^2,\ x,\ 1\}$ di $\mathbb{R}_3[x]$. In particolare al generico polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ associamo il vettore (a, b, c, d) di $\mathbb{R}^4$, e all'insieme U possiamo associare l'insieme

$$U' = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b + c + d = 0, \quad 8a + 4b + 2c + d = 0\right\}$$

a) L'insieme U' è uno spazio vettoriale in quanto si tratta dell'insieme delle soluzione di un sistema omogeneo. Analogamente l'insieme U è uno spazio vettoriale.

Per determinare una base di U', e quindi di U, risolviamo il sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 8I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}s + \dfrac{3}{4}t \\ b = -\dfrac{3}{2}s - \dfrac{7}{4}t \\ c = s \\ d = t \end{cases}$$

Quindi una base di U' è

$$\mathcal{B}(U') = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 0\right),\ \left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}, 0, 1\right) \right\} \text{ ovvero } \mathcal{B}(U') = \{(1, -3, 2, 0)\,,\ (3, -7, 0, 2)\}$$

e la corrisponedente base di U è

$$\mathcal{B}(U) = \left\{x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 3x^3 - 7x^2 + 2\right\}$$

b) Basta notare che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ha rango 4, quindi

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0),\ (0, 1, 0, 0),\ (1, -3, 2, 0)\,,\ (3, -7, 0, 2)\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$, e la corrisponedente base di V, completamento della base di U, è

$$\mathcal{B}(V) = \left\{x^3, \quad x^2, \quad x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 3x^3 - 7x^2 + 2\right\}$$

□

Esercizio 6.7 (7.83)**.** *Sia W il sottoinsieme dello spazio di polinomi $\mathbb{R}_3[x]$ definito da*

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p''' = 0,\ p(1) = 0\}$$

(p''' è la derivata terza di p)

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_2[x]$.*
b) *Trovare una base e la dimensione di W.*

c) *Determinare le coordinate del polinomio* $p(x) = 2x^2 - x - 1 \in W$ *rispetto alla base trovata al punto* b).

SOLUZIONE:

a) Sia $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ il generico elemento di $\mathbb{R}_3[x]$. Per dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_2[x]$ dobbiamo innanzitutto verificare che W è un sottoinsieme di $\mathbb{R}_2[x]$. In effetti la condizione $p''' = 0$ applicata al generico elemento di $\mathbb{R}_3[x]$ diventa $6a = 0$. Quindi se $p(x) \in W$ deve essere del tipo $p(x) = bx^2 + cx + d$ cioè un elemento di $\mathbb{R}_2[x]$. Inoltre W può essere riscritto come

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$$

Per dimostrare ora che si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}_2[x]$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.

- W è chiuso rispetto alla somma, infatti presi due elementi di W anche la loro somma sta in W:
$$(p_1 + p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = 0 + 0 = 0$$
- W è chiuso rispetto al prodotto per scalari, infatti preso un elemento di W e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, anche il loro prodotto sta in W:
$$(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$$

b) Traducendo la condizione $p(1) = 0$ sui coefficienti del generico elemento $bx^2 + cx + d$ di $\mathbb{R}_2[x]$ otteniamo $b + c + d = 0$, ovvero $d = -b - c$. Quindi ogni elemento di W è del tipo

$$p(x) = bx^2 + cx - b - c = b(x^2 - 1) + c(x - 1)$$

I due polinomi, linearmente indipendenti, $p_1(x) = x^2 - 1$ e $p_2(x) = x - 1$ costituiscono una base di W, quindi

$$\dim(W) = 2, \qquad \mathcal{B}(W) = \left\{p_1(x) = x^2 - 1,\ p_2(x) = x - 1\right\}$$

c) Per determinare le coordinate di $p(x)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata la cosa più semplice è forse associare ad ogni polinomio le sue componenti rispetto alla base canonica $\left\{x^2, \quad x, \quad 1\right\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$. In particolare ai polinomi $p_1(x),\ p_2(x),\ p(x)$ possiamo associare i vettori:

$$p_1 = (1, 0, -1), \quad p_2 = (0, 1, -1), \quad p = (2, -1, -1)$$

Risolviamo quindi l'equazione $xp_1 + yp_2 = p$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ -x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Infine $p(x) = 2p_1(x) - p_2(x)$, ovvero $p(x)$ ha coordinate $(2, -1)_{\mathcal{B}}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente.

□

Esercizio 6.8 (7.99)**.** *Sia* W *il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici* 3×3*:*

$$W = \left\{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \mid A = A^T,\ tr(A) = 0\right\}$$

a) *Mostrare che* W *è un sottospazio vettoriale di* $M_{3,3}(\mathbb{R})$.
b) *Trovare una base di* W.
c) *Calcolare le coordinate di* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in W$ *rispetto alla base trovata al punto* b).

SOLUZIONE:

Notiamo che la condizione $A^T = A$ implica che le matrici di W siano simmetriche. Inoltre la condizione $tr(A) = 0$ implica che la somma degli elementi della diagonale principale sia 0. Di conseguenza le matrici di W sono del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix} \qquad \text{con } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$$

a) Per mostrare che W, che è un insieme non vuoto, è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbb{R})$ dobbiamo verificare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari.
- SOMMA. Siano
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & w & t \\ z & t & -x-w \end{bmatrix} \qquad \text{con } x,y,z,w,t,a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$$
due qualsiasi matrici di W. Allora
$$A + B = \begin{bmatrix} a+x & b+y & c+z \\ b+y & d+w & e+t \\ c+z & e+t & -a-x-d-w \end{bmatrix} \in W$$
Quindi W è chiuso rispetto alla somma.
- PRODOTTO per SCALARI. Sia
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix}$$
un elemento di W e $\lambda \in \mathbb{R}$ uno scalare. Allora
$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d & \lambda e \\ \lambda c & \lambda e & -\lambda a - \lambda d \end{bmatrix} \in W$$
Quindi W è anche chiuso rispetto al prodotto per scalari.

b) Riscrivendo in maniera più opportuna il generico elemento di W otteniamo:
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix}$$
$$= a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
Di conseguenza le matrici
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
generano tutto W. Essendo anche linearmente indipendenti, una base di W è data da $\mathcal{B}(W) = \{A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5\}$.

c) È immediato verificare che $B = 2A_1 + A_2 + A_3 - 2A_4 + 3A_5$, di conseguenza le coordinate di B rispetto alla base trovata al punto precedente sono $(2, 1, 1, -1, 3)_{\mathcal{B}}$.

$\square$