CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA. CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 4– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2024/25

Esercizio 4.1 (Esercizio 7.1)**.** *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

- Consideriamo la matrice A_1. Visto che A_1 è ridotta a gradini è immediato calcolarne il rango utilizzando i pivot:
  - Se $t+1$ e $t-3$ sono non nulli, ovvero se $t \neq -1, 3$, allora A_1 ha tre pivot e $\text{rg}(A_1) = 3$.
  - Se $t = -1$ la matrice diventa:
  $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-4II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  Quindi se $t = -1$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1) = 2$.
  - Se $t = 3$ la matrice diventa:
  $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
  Quindi se $t = 3$ la matrice A_1 ha due pivot e $\text{rg}(A_1) = 2$.

  Analogamente potevamo calcolare il rango di A_1 ragionando sui determinanti.
  $$\det(A_1) = (t+1)(t-3)$$
  Quindi:
  - Se $t \neq -1, 3$, la matrice ha determinante non nullo, quindi A_1 ha rango 3.
  - Se $t = -1$, la matrice ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A_1) \leq 2$. Inoltre in A_1 troviamo la sottomatrice
  $$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
  con determinante non nullo. Quindi $\text{rg}(A_1) = 2$
  - Se $t = 3$, la matrice ha determinante nullo, quindi $\text{rg}(A_1) \leq 2$. Inoltre in A_1 troviamo la sottomatrice
  $$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$
  con determinante non nullo. Quindi anche in questo caso $\text{rg}(A_1) = 2$.
- Anche se la matrice A_2 non è completamente ridotta a gradini possiamo comunque calcolarne il rango ragionando sui pivot.
  - Se $t \neq -1$ la matrice A_2 ha tre pivot e quindi $\text{rg}(A_2) = 3$. Notiamo che anche nei casi particolari $t = 3$ e $t = 0$ otteniamo una matrice con tre pivot, infatti:
    * Se $t = 3$:
    $$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ IV \\ III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
    Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.
    * Se $t = 0$:
    $$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi A_2 ha effettivamente tre pivot.

– Se $t = -1$ otteniamo la matrice

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III + 4II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $t = -1$ la matrice A_2 ha due pivot e $\text{rg}(A_2) = 2$.

Calcoliamo ora il rango di A_2 ragionando sui determinanti. Consideriamo la sottomatrice quadrata 3×3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix}$$

il cui determinante vale

$$\det(B) = (t+1)(t-3)$$

Quindi:

– Se $t \neq -1, 3$, la matrice B ha determinante non nullo, quindi A_2 ha rango 3.

– Se $t = -1$, la matrice B ha determinante nullo e

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza per $t = -1$ ogni sottomatrice 3×3 di A_2 ha determinante nullo, mentre

$$\det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 4 \neq 0$$

Di conseguenza $\text{rg}(A_2) = 2$

– Se $t = 3$, la matrice B ha determinante nullo e

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

In A_2 troviamo quindi la sottomatrice 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

con determinante non nullo. Quindi $\text{rg}(A_2) = 3$.

- Riduciamo a gradini della matrice A_3:

$$\begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III - tI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 0 & 1 & -4 & 1-t \\ 0 & 0 & -2t & -t^2 \end{bmatrix}$$

Se ragioniamo sui pivot otteniamo:

– Se $t \neq 0$ la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A_3) = 3$.

– Se $t = 0$ la matrice A_3 diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi ha 2 pivot e $\text{rg}(A_3) = 2$.

Ragionando invece sui determinanti notiamo che A_3 contiene la sottomatrice 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ t & 0 & t \end{bmatrix}$$

il cui determinante è $-2t$.

Di conseguenza
– Se $t \neq 0$ la matrice A_3 ha rango 3.
– Se $t = 0$ otteniamo la matrice

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha una riga nulla, quindi tutte le sottomatrici 3×3 di A_3 hanno determinante nullo e $\text{rg}(A_3) \leq 2$. Inoltre in A_3 troviamo la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

con determinante non nullo. Quindi in questo caso $\text{rg}(A_3) = 2$.

□

Esercizio 4.2 (Esercizio 7.3)**.** *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Sia $x = [x_1,\ x_2,\ x_3]^T$ e calcoliamo Ax:

$$Ax = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ (2t+1)x_3 \end{bmatrix}$$

L'equazione $Ax = b$ si traduce quindi nel sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases}$$

La matrice associata a tale sistema è quindi formata dalla matrice A come matrice dei coefficienti e dalla matrice b come matrice dei termini noti:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2t+1 & 5 \end{array}\right]$$

Per stabilire l'esistenza e l'unicità delle soluzioni utilizziamo il teorema di **Rouchè-Capelli**:

Un sistema di equazioni $AX = b$ ammette soluzioni (è compatibile) se e solo se il rango della matrice dei coefficienti A è uguale al rango della matrice completa $A|b$:

$$rg(A) = rg(A|b)$$

Inoltre:

- *Ammette un'unica soluzione se $rg(A) = rg(A|b) =$ numero delle incognite.*
- *Ammette infinite soluzioni se $rg(A) = rg(A|b) <$ numero delle incognite.*

Notiamo che il numero delle incognite del sistema corrisponde al numero delle colonne di A.

Riduciamo quindi $A|b$ a gradini per calcolarne il rango:

$$\begin{array}{c} \\ II + I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2t+1 & 5 \end{array}\right]$$

Si tratta quindi di distinguere due casi.

- Se $t \neq -\dfrac{1}{2}$ allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_2 - x_3 = 3 \\ (2t+1)x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2t+14}{5(2t+1)} \\ x_2 = \dfrac{6t+8}{5(2t+1)} \\ x_3 = \dfrac{5}{2t+1} \end{cases}$$

- Se $t = -\dfrac{1}{2}$, allora $\text{rg}(A) = 2 < \text{rg}(A|b) = 3$ e il sistema non ammette soluzioni.

$\square$

Esercizio 4.3 (Esercizio 7.4)**.** *Si considerino le matrici (dove k è un parametro reale)*

$$A = \begin{bmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca il rango di A al variare di k.*
b) *Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $Ax = b$ è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.*

Soluzione:

Per rispondere a entrambe le domande riduciamo a gradini la matrice $A|b$. Scambiamo la prima e quarta colonna di A e ricordando poi tale scambio prima di rispondere alla domanda b).

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6k & | & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 4k+1 & | & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ II - 1/2I \\ III + 1/2I \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2k+3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3k & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & k+1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Anche senza completare la riduzione siamo in grado di risponedere ad entrambe le domande.

a) La matrice A ha rango 3 per ogni valore di k, infatti i due termini $k-1$ e $k+2$ non si possono annullare contemporaneamente.
b) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione se anche $rg(A|b) = 3$, cioè se $k = 1$ quando, ricordando lo scambio di colonne, otteniamo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w + 2y - z + 3x = \\ 2y + 2x = 1 \\ 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = t \\ w = -\frac{4}{3} + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Infine le soluzioni del sistema sono gli elementi dell'insieme

$$\left\{ (x, y, z, w) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{4}{3} \right) + (0, 0, 1, 1)t \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\square$

Esercizio 4.4. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1-k & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Trovare, se esistono, i valori del parametro reale k per i quali* null(A) = null(B) = 0.
b) *Sia $C = AB$. Stabilire se il sistema lineare $Cx = 0$ ha soluzione unica quando $k = 0$.*

Soluzione:

a) Ricordiamo che in una matrice A di dimensioni $m \times n$ si ha null(A) = n − rg(A). Quindi in questo caso null(A) = 3 − rg(A) e null(A) = 0 se e solo se rg(A) = 3; la stessa cosa vale per B. Determiniamo dunque per quali k la matrice A ha rango massimo, riducendola a gradini:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1-k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & -2k & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi null(A) = 0 se e solo se $k \neq 0$.

Riduciamo ora la matrice B

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 3II+I \\ III+2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & k+2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 5III-(k+2)II \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & k+7 \end{bmatrix}$$

Si conclude che null(B) = 0 se e solo se $k \neq -7$.

Quindi null(A) = null(B) = 0 se e solo se $k \neq 0, -7$.

b) Per $k = 0$ la matrice $C = AB$ è

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 \\ 10 & 7 & -2 \\ -10 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

ed essendo le ultime due righe una opposta dell'altra, tale matrice non ha rango massimo, per cui il sistema $Cx = 0$, non ha un'unica soluzione.

L'esercizio poteva essere risolto in maniera differente utilizzando i determinanti.

□

Esercizio 4.5. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

a) *Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k.*

b) *Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme* $\mathrm{Sol}(Ax = b)$.

SOLUZIONE:

a) Riduciamo a gradini la matrice $A|b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & | & 1 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 & | & 2 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 & | & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-I \\ IV-III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & k+1 & k-4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k & | & k-2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III+II \\ IV-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k-2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & | & k-2 \end{bmatrix}$$

Discutiamo ora i valori del parametro.

– Se $k \neq -1, 2$, allora rg(A) = rg($A|b$) = 4, quindi il sistema ammette un'unica soluzione ottenuta risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{3-k}{k+1} - 3 \\ y = -2 \\ z = \dfrac{1-(k-2)}{k+1} = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{k+5}{k+1} \\ y = -2 \\ z = \dfrac{3-k}{k+1} \\ w = 1 \end{cases}$$

– Se $k = 2$, allora $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$, quindi il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - 3t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{1}{3} \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni possono anche essere scritte nella forma $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right) + (-3, -2, 0, 1)t$ con $t \in \mathbb{R}$.

– Se $k = -1$ si ha $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A|b) = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione.

b) Per stabilire se v appartiene all'insieme $\text{Sol}(Ax = b)$ la cosa più semplice è sostituire le sue coordinate $(x, y, z, w) = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} x + z + 3w = 1 \\ y + 2w = 0 \\ (k+1)z + (k-2)w = 1 \\ (k-2)w = k-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} + 3 = 1 \\ -2 + 2 = 0 \\ (k+1) \cdot \dfrac{1}{3} + (k-2) \cdot 1 = 1 \\ (k-2) \cdot 1 = k-2 \end{cases} \Rightarrow \quad k = 2$$

Oppure si poteva sostituire nel sistema iniziale, ottenendo le condizioni:

$$\begin{cases} -\dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{3} + 3 = 1 \\ -\dfrac{7}{3} - 2 + \dfrac{1}{3} + 5 = 1 \\ -\dfrac{7}{3} + 2 + \dfrac{k+2}{3} + k - 1 = 2 \\ -\dfrac{7}{3} + \dfrac{k+2}{3} + 2k - 1 = k \end{cases} \Rightarrow k = 2$$

Quindi $v \in \text{Sol}(Ax = b)$ se $k = 2$.

□

Esercizio 4.6 (v. 7.62)**.** *Sia A la matrice reale seguente:*

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Determinare il rango di A al variare del parametro reale k.*

b) *Calcolare* null(A) *e le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.*

Soluzione:

Riduciamo a gradini la matrice A:

$$\begin{array}{c} II \\ III \\ I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ k & -k & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - kI \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k & -k & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k-k^2 & -1-k \end{bmatrix}$$

a) Per quanto riguarda il rango di A otteniamo:
   – Se $k \neq -1$ la matrice A ha rango 3.
   – Se $k = -1$ la matrice A ha rango 2.

b) Per $k = 1$ null(A) $= 4 - 3 = 1$.

Ponendo $k = 1$ al termine della riduzione e considerando il sistema omogeneo associato otteniamo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ y + z + w = 0 \\ -2z - 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ w = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi il nucleo di A è l'insieme (spazio vettoriale):

$$\mathrm{Sol(A|0)} = \{\ (-1,0,1,-1)\cdot \mathrm{t} \mid \mathrm{t} \in \mathbb{R}\ \}$$

□

Esercizio 4.7 (6.4)**.** *Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

SOLUZIONE:

- Consideriamo la matrice A e procediamo affiancando ad A la matrice identica 2×2 prima di calcolare $rref(A)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -5 & | & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ -1/5II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I-2II \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & | & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo la matrice B e procediamo affiancando a B la matrice identica 3×3 prima di calcolare $rref(B)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{matrix} \\ 1/2II \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 1/2III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} I-3III \\ II+1/2III \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I+II \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Di conseguenza

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & 7 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che se $M \in M_{n\times n}$ è una matrice tale che $rref(M) = I_n$, allora $\mathrm{rg}(M) = n$, quindi:
una matrice $n \times n$ è **invertibile** *se e solo se ha rango n.*

□

Esercizio 4.8 (6.7)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.*
b) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*

SOLUZIONE:

b) Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} III \\ 1/2II \\ I \end{array}\begin{bmatrix} 1 & k-1 & 2-k \\ 0 & k-1 & 0 \\ k & k-1 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} I-II \\ \\ III-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-k \\ 0 & k-1 & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-kI \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2-k \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-k \end{bmatrix}$$

- Se $k \neq 0, 1$, $\text{rg}(A) = 3$,
- Se $k = 0$, $\text{rg}(A) = 2$,
- Se $k = 1$, $\text{rg}(A) = 1$.

a) A è invertibile, se $k \neq 0$ e $k \neq 1$.
Calcoliamo l'inversa di A quando $k = -1$ con il metodo della riduzione:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} -I \\ -1/4II \\ III+I \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III+4II \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} I-2II \\ \\ 1/2III \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} I-III \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 4.9 (6.9)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) *Calcolare il rango di A al variare del parametro k.*
b) *Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?*

Soluzione:

a) Riduciamo A a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II-3kI \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8+8k & k-1 \\ 0 & 0 & -k+1 \end{bmatrix}$$

Quindi:
- Se $k \neq \pm 1$, la matrice ha 3 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 3$.
- Se $k = 1$ o $k = -1$, la matrice ha 2 pivot, quindi $\text{rg}(A) = 2$.

b) Una matrice quadrata è invertibile se ha rango massimo. In questo caso A è invertibile quando ha rango 3 cioè se $k \neq \pm 1$.

□

Esercizio 4.10 (v. 6.6)**.** *Dato $k \in \mathbb{R}$, si considerino le seguenti matrici reali*

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A_k è invertibile.*
b) *Trovare la matrice inversa di A_1, per $k = 1$.*
c) *Risolvere l'equazione matriciale $A_1X + B = 0$, con X matrice reale 3×3.*

Soluzione:

a) Riduciamo A_k a gradini:

$$\begin{array}{c} \\ II-kI \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-2II \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k \\ 0 & 0 & -3+2k \end{bmatrix}$$

Quindi:
- Se $k \neq \frac{3}{2}$, $\text{rg}(A) = 3$ e A_k è invertibile.
- Se $k = \frac{3}{2}$, $\text{rg}(A) = 2$ e $A_k = A_{\frac{3}{2}}$ non è invertibile.

b) Fissato $k = 1$, calcoliamo l'inversa di A_1 calcolando $rref(A_1)$ dopo avere affiancato a A_1 la matrice identica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - 2II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} I + III \\ II + III \\ -III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad (\text{con } k = 1)$$

c) Per risolvere l'equazione matriciale $A_1X + B = 0$, basta osservare che, essendo A_1 invertibile, possiamo ottenere la relazione:

$$A_1X + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1X = -B \quad \Rightarrow \quad A_1^{-1}A_1X = -A_1^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = -A_1^{-1}B$$

Avendo già calcolato l'inversa A_1^{-1}, si tratta semplicemente di effettuare il prodotto

$$X = -\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 4.11 (6.11)**.** *Sia A la matrice reale*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \qquad (k \text{ reale}).$$

a) *Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.*
b) *Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A.*

Soluzione:

a) Calcoliamo il rango di A riducendola a gradini, ricordando che una matrice è invertibile se ha rango massimo (in questo caso 3):

$$\begin{array}{r} \\ \\ III - 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III + kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & 0 & k(k-4) \end{bmatrix}$$

A ha tre pivot, e quindi rango 3, se $k(k-4) \neq 0$. Quindi A è invertibile se $k \neq 0, 4$.

b) Per determinare l'inversa di A calcoliamo $rref(A)$ dopo avere affiancato a A la matrice identica, tenendo conto delle condizioni $k \neq 0, 4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & k & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III - 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 & | & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} I + III \\ \\ III + kII \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k-4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k(k-4) & | & -2 & k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - \frac{1}{k}III \\ \frac{1}{k(k-4)}III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{bmatrix}$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{k} & 0 & -\frac{1}{k} \\ -\frac{2}{k(k-4)} & \frac{1}{k-4} & \frac{1}{k(k-4)} \end{bmatrix} \qquad \forall k \neq 0, 4$$

□