CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 2– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2024/25

Esercizio 2.1. *Per ognuna delle seguenti coppie di matrici A, B e scalari λ, $\mu \in \mathbb{R}$, calcolare $A+B$, $B-A$, $\lambda A+\mu B$, AB, BA, A^2:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \lambda = \frac{1}{2},\ \mu = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda = 2,\ \mu = -1$$

SOLUZIONE:
Cominciamo dalla prima coppia di matrici:

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad B-A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda A+\mu B = \frac{1}{2}\cdot A + 0\cdot B = \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Analogamente per la seconda coppia di matrici:

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B-A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda A+\mu B = 2A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & -7 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 11 & -4 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 21 & -4 & -10 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 2.2. *Date le seguenti matrici:*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix};$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad A_6 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix};$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i \cdot A_j$ per $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

SOLUZIONE:
Ricordiamo che una matrice è detta $n \times m$ se ha n righe e m colonne. Inoltre è possibile moltiplicare due matrici A e B solamente se

- A è del tipo $n \times m$
- B è del tipo $m \times k$

(cioè se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B). Il risultato è una matrice C del tipo $n \times k$.

Scriviamo solo i prodotti che è possibile effettuare:

$$A_1 \cdot A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 32 \\ 26 & -4 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 0 & -14 \\ -5 & 11 & 20 & -22 \end{bmatrix} \qquad A_2 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} -8 & -20 \\ 11 & -10 \end{bmatrix} \qquad A_2 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 8 \\ 4 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A_3 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 25 \\ 8 & -4 & -1 \\ 20 & -23 & 30 \\ -4 & -7 & 23 \end{bmatrix} \qquad A_3 \cdot A_6 = \begin{bmatrix} -15 & 5 & -5 \\ -13 & 9 & 7 \\ -52 & 29 & 11 \\ -7 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A_4 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} 20 & -21 & 25 \\ 40 & -28 & 15 \\ 0 & 4 & -10 \end{bmatrix} \qquad A_4 \cdot A_6 = \begin{bmatrix} -49 & 28 & 12 \\ -77 & 49 & 31 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_5 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 18 & -8 & -10 & 12 \\ 32 & -12 & -20 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_5 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} -12 & 30 \\ -24 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_5 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 14 \\ -8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_6 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -15 & 13 \\ 35 & -21 & -40 & 28 \end{bmatrix} \qquad A_6 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} -8 & -5 \\ -35 & 10 \end{bmatrix} \qquad A_6 \cdot A_5 = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ -4 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 2.3. *Data la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).

Soluzione:

Sia B la matrice cercata. Per potere effettuare i prodotti AB e BA, la matrice B deve essere 2×2. Sia quindi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2 e calcoliamo il prodotto AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ -3x+2z & -3y+2w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+w=0 \\ -3x+2z=0 \\ -3y+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ -3(1-z)+2z=0 \\ -3(-w)+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{1}{5} \\ z=\frac{3}{5} \\ w=\frac{1}{5} \end{cases}$$

Di conseguenza perché B verifichi la condizione $AB = I$ deve essere

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice B soddisfa anche la condizione $BA = I$, di conseguenza B è la matrice inversa di A cercata.

Metodi più efficaci per calcolare l'inversa di una matrice verranno introdotti successsivamente.

□

Esercizio 2.4. *Date le seguenti matrici A, calcolare, se esiste, l'inversa di A (cioè determinare se esiste la matrice B tale che $AB = BA = I$).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Per potere effettuare i prodotti AB e BA, la matrice B deve essere 2×2. Sia quindi

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ 3x+3z & 3y+3w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+w=0 \\ 3x+3z=0 \\ 3y+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3(1-z)+3z=0 \\ 3(-w)+3w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=-w \\ 3=0 \\ 0=1 \end{cases}$$

La terza e la quarta equazione sono impossibili, di conseguenza tutto il sistema non ammette soluzione. Questo indica che la matrice A non ammette inversa.

Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

e sia

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-z & y-w \\ -3x+2z & -3y+2w \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = I$ segue

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y-w=0 \\ -3x+2z=0 \\ -3y+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=w \\ -3(1+z)+2z=0 \\ -3w+2w=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=w \\ z=-3 \\ w=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=-3 \\ w=-1 \end{cases}$$

Di conseguenza deve essere

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che tale matrice B soddisfa anche la condizione $BA = I$, di conseguenza B è la matrice inversa di A cercata. Una tale matrice B inversa di A viene normalmente indicata con A^{-1}.

□

Esercizio 2.5. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

calcolare AB, BA, BC e CB.

Soluzione:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad CB = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $AB \neq BA$, mentre $BC = CB$. Infatti il prodotto tra matrici non è in generale commutativo; nel secondo caso si presenta questa situazione particolare in quanto $C = 3I$.

□

Esercizio 2.6. *Si consideri il seguente insieme (matrici triangolari superiori di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$)*

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Si verifichi che I è chiuso rispetto al prodotto e alla somma di matrici, ovvero che presi due elementi di I anche il loro prodotto e la loro somma sono elementi di I.

Soluzione:
Siano

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$$

due generici elementi di I. Dobbiamo verificare che $A + B$ e AB sono ancora elementi di I:

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & c+z \end{bmatrix} \in I$$

$$AB = \begin{bmatrix} ax & ay+bz \\ 0 & cz \end{bmatrix} \in I$$

Notiamo che l'unica condizione per l'appartenenza a I è che l'elemento di posizione $2,1$ si annulli.

□

Esercizio 2.7. *Mostrare attraverso un esempio che esistono matrici A, B non nulle tali che $AB = 0$.*

Soluzione:
Possiamo prendere per esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti A e B sono non nulle e $AB = 0$.

□

Esercizio 2.8. *Sia*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e B una matrice tale che $AB = BA$. Si dimostri che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbb{R}$.

Soluzione:
Sia

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

la generica matrice 2×2. Si ha

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{11}+b_{12} \\ b_{21} & b_{21}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Dalla condizione $AB = BA$ segue

$$\begin{cases} b_{11} + b_{21} = b_{11} \\ b_{12} + b_{22} = b_{11} + b_{12} \\ b_{21} = b_{21} \\ b_{22} = b_{21} + b_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{21} = 0 \\ b_{22} = b_{11} \\ 0 = 0 \\ b_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{11} = t \\ b_{12} = s \\ b_{21} = 0 \\ b_{22} = t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Di conseguenza B deve essere del tipo

$$B = \begin{bmatrix} t & s \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$B = \lambda I_2 + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $\lambda,\ x \in \mathbb{R}$.

□

Esercizio 2.9. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare la matrice B tale che $A + B = C$.

Soluzione:
E' sufficiente osservare che se

$$A + B = C \ \Rightarrow\ -A + A + B = -A + C \ \Rightarrow\ B = C - A$$

Quindi

$$B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2+2 & 0-3 \\ -1-0 & 5-5 & 2+6 \\ 2-2 & 1+1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 2.10. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di $A,\ B,\ C$.

Soluzione:
Si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By + Cz = D$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By + Cz = \begin{bmatrix} x & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & y \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & z \\ 2z & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y-z & 2x+y+z \\ -x+y+2z & 3x+y+3z \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y-z & 2x+y+z \\ -x+y+2z & 3x+y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ -x+y+2z=-1 \\ 3x+y+3z=2 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare non omogeneo di quattro equazioni i tre incognite. Procedendo per sostituzione otteniamo

$$\begin{cases} x=-2y+z \\ -3y+3z=1 \\ 3y+z=-1 \\ -6y+6z=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x=-2y+z \\ -3y+3z=1 \\ z=-3y-1 \\ -3y+3z=-1 \end{cases}$$

Anche senza procedere ulteriormente vediamo che la seconda e quarta equazione sono in contraddizione, quindi il sistema non ammette soluzione e D non è combinazione lineare di A, B e C.

□

Esercizio 2.11. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di $A,\ B$. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Soluzione:
Analogamente all'esercizio precedente si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By = C$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By = \begin{bmatrix} x & kx \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & 3y \\ y & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ kx+3y=6 \\ y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ kx+3=6 \\ y=1 \\ x+2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ kx=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ k=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Quindi

- Se $k = 3$ il sistema ammette la sola soluzione $x = y = 1$ e $A + B = C$.
- Se $k \neq 3$ il sistema non ammette soluzione e C non è combinazione di A e B.

$\square$

Esercizio 2.12. *Si risolva il sistema $Ax = b$ dove*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Quindi $Ax = b$ implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 3x_2 \\ 4 - 6x_2 + 4x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La matrice A è detta **matrice dei coefficienti** e la matrice b **matrice o colonna dei termini noti** del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases}$$

Si dice anche più semplicemente che A e b (oppure $A|b$) sono le **matrici associate al sistema**.

Notiamo che si può passare da A al sistema o viceversa semplicemente *aggiungendo* o *togliendo* le incognite.

$\square$

Esercizio 2.13. *Si risolva il sistema $Ax = b$ nei seguenti casi*

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) $$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

a) Calcoliamo il prodotto

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_2 + 6x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

Quindi la condizione $Ax = b$ implica

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 + 6x_3 = -3 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_2 = -6 \cdot 2 - 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \cdot (-5) - 2 \cdot 2 + 2 = 13 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

b) Scriviamo direttamente il sistema associato a A e b *aggiungendo* le incognite:

$$\begin{cases} 4x_1 + 33x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 6x_3 = 4 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

Notiamo subito che l'ultima equazione è impossibile, quindi il sistema non ammette soluzione.

c) Scriviamo direttamente il sistema associato a A e b *aggiungendo* le incognite:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che il sistema ha tre incognite, ma solamente due equazioni (significative). Abbiamo quindi una variabile libera. Partiamo dall'ultima equazione (significativa) aggiungendo un parametro. Poniamo per esempio $x_3 = t$ (Potevamo equivalentemente porre $x_2 = t$):

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3(-t + 4) + t - 3 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t + 9 \\ x_2 = -t + 4 \\ x_3 = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Notiamo che in questo caso il sistema ammette infinite soluzione: ogni valore assegnato a t permette di trovare una delle infinite soluzioni.

□