CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 7– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2024/25

Esercizio 7.1. *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U = \{(0,1,1,0)a + (0,0,0,1)b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0,\ z = 2x\}$$

a) *Determinare una base e la dimensione di* U *e di* V*.*
b) *Determinare una base e la dimensione di* $U \cap V$*.*
c) *Determinare una base e la dimensione di* $U + V$*.*

Esercizio 7.2. *[6.2]* Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Esercizio 7.3. *[6.1]* Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 7.4. *[6.3]* Calcolare il rango della seguente matrice A, utilizzando il calcolo del determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k+2 & 0 \\ k^2-1 & 0 & 4-k \\ 1 & 2k-3 & 0 \end{bmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Esercizio 7.5. *[6.12]* Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

a) Calcolare il rango di A al variare del parametro k.
b) Si determini il valore di k tale per cui la matrice A abbia determinante uguale a uno. Per tale valore di k, si calcoli la matrice inversa di A.

Esercizio 7.6. *[7.19]* Si consideri lo spazio vettoriale $N(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $Ax = 0$ con

$$A = \begin{bmatrix} 8k+1 & k+4 & 0 & k+8 \\ 2k & 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & k+4 & 0 \\ k & 0 & k+2 & k+3 \end{bmatrix} \quad k \text{ parametro reale.}$$

a) Si stabilisca per quali valori di k lo spazio $N(A)$ è nullo: $N(A) = \{(0,0,0,0)\}$.
b) Per i valori di k esclusi al punto precedente si determini una base di $N(A)$.

Esercizio 7.7. *[7.24]* Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.

$$v_1 \equiv (1,2,-2), \qquad v_2 \equiv (1,1,-3), \qquad v_3 \equiv (3,7,k-6)$$

Esercizio 7.8. *[7.30]* Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori:

$$v_1 \equiv (0, k-1, k^2-1, 3k-2), \qquad v_2 \equiv (1,3,0,3), \qquad v_3 \equiv (-1,-2,1,-1).$$

Determinare la dimensione e una base di V al variare del parametro reale k.

Esercizio 7.9. *[7.31]* Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:

$$v_1 = (-1,1,-1,1), \qquad v_2 = (1,k,3,4), \qquad v_3 = (1,-1,k,1), \qquad v_4 = (0,0,1,k)$$

Si calcoli la dimensione di W al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7.10. *[7.36]* Sia $V = \langle\, v_1,\ v_2,\ v_3 \,\rangle$ con

$$v_1 = (k+3,\ k+3,\ 0), \qquad v_2 = (0,\ 3,\ k+2), \qquad v_3 = (0,\ 3k,\ k)$$

a) Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ lo spazio V coincide con $\mathbb{R}^3$.
b) Si determini la dimensione una base di V al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7.11. *[7.41]* Si consideri l'insieme

$$S = \{\ (k+1, k+1, 0, 2k),\ (0, 2k, 0, 0),\ (1, 3k, 0, 1),\ (1, 5k, 1, k)\ \}.$$

a) Si stabilisca per quali valori di k l'insieme S è una base di $\mathbb{R}^4$.
b) Posto $k = -1$ si trovino le coordinate del vettore $v = (1,1,0,1)$ rispetto alla base trovata.

Esercizio 7.12. *[7.44]* Sia

$$\mathcal{B} = \{\ (-2,0,0),\ (1,k,-1),\ (1,-1,k)\ \}$$

a) Trovare i valori del parametro k per cui $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
b) Per il valore $k = 3$, determinare le coordinate dei vettori $v = (-3,2,1)$ e $w = (0,1,2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 7.13. *[7.53]* Si consideri il sottoinsieme S di $\mathbb{R}^4$ costituito dai vettori v della forma

$$v = (a_1 - a_2 + 2a_3 + a_4,\ a_1,\ 2a_1 - a_2,\ a_1 + 3a_2)$$

dove a_1, a_2, a_3 e a_4 sono parametri reali.

a) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?
b) In caso di risposta affermativa ad a), trovare una base di S.