Note per il corso di *Geometria e algebra lineare* 2024-25 LT in Informatica

5 Basi

5.1 Coordinate

Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base (ordinata) di V. Sia $v \in V$. Si ha allora $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. I coefficienti x_i sono le *coordinate* di v rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}$.

Indicheremo con $T_\mathcal{B}(v)$ la n-upla delle coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$ (talvolta si usa anche il simbolo $(x_1, \dots, x_n)_\mathcal{B}$ per indicare il vettore v). Si osservi che al cambiare della base le coordinate dello *stesso* vettore, in generale, cambiano.

Esempio. I vettori $v_1 = (2, -1, 0)$, $v_2 = (-1, 2, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$. Infatti la matrice

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 3. Dunque le sue colonne v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Come vedremo nella prossima sezione, 3 vettori indipendenti di $\mathbb{R}^3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$. Il vettore $v = (5, -4, 2)$ ha coordinate rispetto a $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ gli scalari x_1, x_2, x_3 tali che $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v$. Dunque $x = (x_1, x_2, x_3)$ è la soluzione del sistema lineare non omogeneo

$$Mx = v.$$

L'unica soluzione è $(2, -1, 3)$. Quindi $T_\mathcal{B}(v) = (2, -1, 3)$ e $v = (2, -1, 3)_\mathcal{B} = 2v_1 - v_2 + 3v_3$. Rispetto alla *base canonica* di $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

il vettore v ha coordinate uguali alle sue componenti: $T_\mathcal{E}(v) = (5, -4, 2)$.

5.2 Proprietà delle basi di $\mathbb{R}^n$

Si è visto negli esempi che lo spazio di n-uple $\mathbb{R}^n$ ha molte basi. Tuttavia, con gli enunciati seguenti si dimostra che le basi di $\mathbb{R}^n$ hanno tutte lo stesso numero n di vettori.

Proposizione 1. *In $\mathbb{R}^n$ m vettori, con $m > n$, sono sempre linearmente dipendenti.*

Dimostrazione. Si consideri la matrice M, di tipo (n, m), le cui colonne sono gli m vettori. Essendo $rg(M) \le n$, si ha $null(M) = m - rg(M) > 0$ e quindi il sistema $Mx = 0$ ha soluzioni non nulle: le colonne di M sono dipendenti. □

Proposizione 2. *Qualunque n-upla di vettori indipendenti di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Basta considerare la matrice M, di tipo $(n, n+1)$, che ha come prime n colonne i vettori indipendenti, e come $(n+1)$-esima colonna un qualunque altro vettore $v \in \mathbb{R}^n$, e ridurre M per righe. L'ultima colonna della matrice $rref(M)$ contiene i coefficienti della combinazione lineare degli n vettori che genera il vettore v. □

Proposizione 3. *Un insieme $\{v_1, \dots, v_m\}$ di vettori indipendenti di $\mathbb{R}^n$, con $m < n$, può sempre essere completato a una base di $\mathbb{R}^n$ aggiungendo $n - m$ vettori.*

Dimostrazione. Si consideri la matrice M, di tipo $(n, m+n)$, con colonne gli m vettori $v_1, \ldots, v_m$ e gli n elementi $e_1, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Abbiamo visto che il rango di M coincide col massimo numero di colonne indipendenti di M. Quindi la matrice M ha rango n, poiché contiene n colonne indipendenti e lo spazio delle colonne di M è tutto $\mathbb{R}^n$. La forma ridotta $rref(M)$ ha $e_1, \ldots, e_m$ nelle prime m colonne, poiché le prime m colonne di M sono indipendenti, ed esistono altre $n-m$ colonne di M (corrispondenti ai pivot di $rref(M)$) che sono indipendenti da $v_1, \ldots, v_m$. Aggiungendo all'insieme $\{v_1, \ldots, v_m\}$ questi $n-m$ elementi della base canonica, si ottiene un insieme indipendente e quindi una base per la proposizione precedente. □

Esempio. Per completare l'insieme indipendente

$$\{v_1 = (1,0,2,1), v_2 = (1,1,-2,-1)\}$$

a una base di $\mathbb{R}^4$, basta considerare la riduzione per righe

$$rref \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Le colonne 1,2,3,5 sono indipendenti. Quindi l'insieme

$$\{v_1, v_2, e_1, e_3\}$$

forma una base di $\mathbb{R}^4$. Si osservi che è sufficiente ottenere una qualsiasi matrice a scalini (non necessariamente ridotta) per individuare le colonne indipendenti e quindi gli elementi da aggiungere per ottenere una base.

Teorema 1. *Ogni base di $\mathbb{R}^n$ contiene n vettori.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1, rimane solo da stabilire che non può esistere una base formata da m vettori, con $m < n$. Supponiamo che $v_1, \ldots, v_m$ siano m vettori indipendenti, con $m < n$. Per la proposizione precedente esistono vettori $v_{m+1}, \ldots, v_n$ tali che l'insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sia una base di $\mathbb{R}^n$. Ma allora $v_{m+1}, \ldots, v_n \notin \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ e i vettori $v_1, \ldots, v_m$ non possono essere generatori e quindi non sono una base di $\mathbb{R}^n$. □

Lo stesso procedimento seguito sopra per $\mathbb{R}^n$ mostra che in ogni spazio di n-uple $\mathbb{K}^n$ ogni base ha n elementi.

5.3 Dimensione degli spazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, che possiede una base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Attraverso la funzione $T_{\mathcal{B}}$ che fa corrispondere a ogni vettore le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$, tutte le proprietà dimostrate per le basi di $\mathbb{K}^n$ si dimostrano per lo spazio V.

Proposizione 4. *La funzione $T_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ ha le seguenti proprietà:*
(i) è iniettiva e suriettiva (cioè biunivoca);
(ii) è lineare*: $T_{\mathcal{B}}(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T_{\mathcal{B}}(v_1) + a_2 T_{\mathcal{B}}(v_2)$, per ogni $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2 \in V$. In particolare, ponendo $a_1 = a_2 = 0$, si ha $T_{\mathcal{B}}(0) = 0$.*

Dimostrazione. (i) è immediata dalla definizione, essendo $T_{\mathcal{B}}$ invertibile:

$$T_{\mathcal{B}}^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \textstyle\sum_i x_i e_i .$$

(ii) se $v_1 = \sum_i x_i e_i$ e $v_2 = \sum_i y_i e_i$, si ha

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = \sum_i (a_1 x_i + a_2 y_i) e_i.$$

$\square$

Definizione 1. Una funzione lineare biunivoca è detta *isomorfismo* tra i due spazi vettoriali.

L'esistenza dell'isomorfismo $T_{\mathcal{B}}$ tra V e $\mathbb{K}^n$ permette di ottenere per V tutti i risultati noti per $\mathbb{K}^n$. Infatti vale la seguente:

Proposizione 5. *I vettori $v_1, \dots, v_m$ di V sono indipendenti (o generatori, o base di V) se e solo se le immagini $T_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, T_{\mathcal{B}}(v_m)$ sono indipendenti (rispettivamente generatori, base di $\mathbb{K}^n$).*

Ad esempio, se $v_1, \dots, v_m$ sono indipendenti, e $\sum_i a_i T_{\mathcal{B}}(v_i) = 0$, si ha $T_{\mathcal{B}}(\sum_i a_i v_i) = 0 = T_{\mathcal{B}}(0)$. Per l'iniettività deve essere $\sum_i a_i v_i = 0$, e quindi $a_i = 0\ \forall i$ per l'indipendenza dei v_i. Dunque le immagini sono indipendenti. Si procede in modo simile per le altre condizioni.

Esempio. Si considerino i polinomi $p_1(x) = x^2 - 2x$, $p_2(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 2$, $p_3(x) = x^3 + x + 1$ in $\mathbb{R}_3[x]$. Per stabilirne la in/dipendenza lineare basta considerare le quadruple delle coordinate rispetto ad una qualsiasi base di $\mathbb{R}_3[x]$. Scegliendo $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$, si ottengono i tre vettori di $\mathbb{R}^4$

$$T_{\mathcal{B}}(p_1) = (0, 1, -2, 0),\ T_{\mathcal{B}}(p_2) = (2, -1, 4, 2),\ T_{\mathcal{B}}(p_3) = (1, 0, 1, 1)$$

Dalla matrice

$$rref \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene che p_1 e p_2 sono indipendenti, e $p_3 = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2} p_2$.

La Proposizione 5 permette di dimostrare facilmente il fondamentale Teorema della base, e quindi di definire correttamente la dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato.

Teorema 2. *(della base) In uno spazio vettoriale V finitamente generato tutte le basi hanno lo stesso numero (finito) di vettori. Tale numero è la* dimensione *dello spazio V, indicata con $\dim V$.* $\square$

Si osservi che uno spazio vettoriale finitamente generato, diverso dallo *spazio nullo* $\{0\}$, ha sempre una base. Infatti, se $V = \langle S \rangle$, $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ e S è dipendente, è sempre possibile, eliminando un vettore alla volta, scegliere in S vettori indipendenti che generano S, e quindi generano tutto lo spazio V.

Lo *spazio nullo*, contenente solo il vettore nullo, non contiene alcun vettore indipendente e quindi non ha basi. Per questo si *conviene* di porre $\dim\{0\} = 0$.

5.4 Somma e intersezione di sottospazi

Dati due sottospazi U, W di uno spazio vettoriale V, l'intersezione $U \cap W$ è ancora un sottospazio (è una facile verifica), mentre l'unione $U \cup W$ in generale non lo è.

Al posto dell'unione di U e W, si può considerare la *somma* dei due sottospazi:

$$U + W = \{v = u + w \in V \mid u \in U, w \in W\}$$

che è un sottospazio di V contenente U e W, generato dall'unione di insiemi di generatori di U e di W. Vale la seguente *formula di Grassmann* per le dimensioni:

$$\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W.$$

Esempio. Siano $V=\mathbb{R}_3[x]$,

$$U=\{p\in\mathbb{R}_3[x]\mid xp''=2p'\},\quad W=\{p\in\mathbb{R}_3[x]\mid p(2)=p(4)=0\}.$$

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in U\Leftrightarrow x(2a_2+6a_3x)=2(a_1+2a_2x+3a_3x^2)$$
$$\Leftrightarrow a_1=a_2=0.$$

Dunque $U=\langle 1,x^3\rangle$ ha dimensione 2.

Anche W ha dimensione 2 (sono due equazioni lineari nelle 4 variabili a_0,a_1,a_2,a_3), con generatori indipendenti $(x-2)(x-4)$ e $x(x-2)(x-4)$.

Un polinomio $p(x)=a_0+a_3x^3\in U$ sta anche in W se $p(2)=a_0+8a_3=0$ e $p(4)=a_0+64a_3=0$. Dunque è $p=0$ e $U\cap W=\{0\}$. Per la formula di Grassmann si ha $\dim(U+W)=4$ e dunque $U+W=\mathbb{R}_3[x]$.

5.5 Applicazione: l'interpolazione polinomiale

L'uso di basi diverse da quella canonica (in $\mathbb{R}^n$ o in $\mathbb{R}_n[x]$) è conveniente nel caso in cui un problema assuma una forma più semplice quando viene espresso usando le coordinate rispetto alla nuova base.

Esempio. Si voglia studiare il seguente problema di *interpolazione polinomiale*: fissati n punti $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ del piano, con ascisse x_i tutte distinte, trovare un polinomio il cui grafico passi per tutti gli n punti.

Il problema ha un'unica soluzione se il polinomio cercato ha grado al più $n-1$. Per risolverlo, conviene utilizzare, al posto della base canonica $\{1,x,x^2,\dots,x^{n-1}\}$, la *base di Lagrange* costituita dai polinomi

$$f_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\quad (i=1,\dots,n)$$

Il *polinomio di Lagrange* $f_i(x)$ ha la proprietà di annullarsi in x_j per ogni $j\neq i$ e valere 1 in x_i. L'insieme $\mathcal{B}=\{f_1,\dots,f_n\}$ è una base di $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Mostriamo che è linearmente indipendente: se

$$a_1f_1(x)+\cdots+a_nf_n(x)=0,$$

valutando in x_k si ottiene $\sum_i a_if_i(x_k)=a_k=0$, per ogni $k=1,\dots,n$.

Essendo $n=\dim\mathbb{R}_{n-1}[x]$, l'insieme $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ (per le Proposizioni 2 e 5).

Data la base di Lagrange, il problema di interpolazione si risolve immediatamente: la combinazione lineare $f(x)=\sum_i y_if_i(x)$ è un polinomio con grafico passante per i punti (x_i,y_i). Si noti che la base di Lagrange dipende solo dalle ascisse x_i, non dalle ordinate y_i.

Ad esempio, se le ascisse dei punti sono $x_1=2,x_2=4,x_3=5$, i polinomi di Lagrange sono

$$f_1(x)=\tfrac{1}{6}(x-4)(x-5),\ \ f_2(x)=-\tfrac{1}{2}(x-2)(x-5),\ \ f_3(x)=\tfrac{1}{3}(x-2)(x-4)$$

e il polinomio con grafico passante per i punti $(2,1),(4,2),(5,0)$ è

$$f(x)=1\cdot f_1(x)+2\cdot f_2(x)+0\cdot f_3(x)=\tfrac{1}{6}(x-4)(x-5)-(x-2)(x-5)$$
$$=-\tfrac{1}{6}(x-5)(5x-8).$$