Note per il corso di *Geometria e algebra lineare* 2024-25
LT in Informatica e LT in Ing. Inf., delle Comun. ed Elettr.

2 Numeri, n-uple e matrici

2.1 Operazioni

Ricordiamo alcune notazioni:
$\mathbb{N} = \{0, 1, , \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali,
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ è l'insieme dei numeri interi relativi,
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ denota l'insieme delle frazioni, i numeri razionali.

Ogni equazione lineare $ax = b$, con a e b numeri interi, è risolubile in $\mathbb{Q}$ (ma non in $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$). Passando alle equazioni quadratiche sorgono problemi: ad esempio, l'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ha soluzioni razionali. L'introduzione dei numeri reali (razionali e irrazionali come $\sqrt{2}$) consente di risolvere anche equazioni come $x^2 = 2$ (ma non tutte le equazioni quadratiche... perché?). Infine, i numeri complessi, il cui insieme si denota con $\mathbb{C}$, consentono di risolvere tutte le equazioni polinomiali.

Introduciamo una terminologia utile per parlare di operazioni sui numeri:

Definizione 1. Un *gruppo* è un insieme G nel quale è definita un'operazione $*$ che soddisfa le seguenti proprietà:
i) è associativa: $(a * b) * c = a * (b * c)\ \forall a, b, c \in G$;
ii) esiste un *elemento neutro* $e \in G$ tale che $a * e = e * a = a\ \forall a \in G$;
iii) ogni elemento $a \in G$ ha un elemento *simmetrico* $a' \in G$ tale che $a * a' = a' * a = e$.

Un gruppo $(G, *)$ è detto *commutativo* se $a * b = b * a\ \forall a, b \in G$.

Esempi. i) $(\mathbb{N}, +)$ non è un gruppo, poiché solo l'elemento neutro 0 ha un simmetrico;
ii) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ sono gruppi commutativi, con elemento simmetrico di a l'opposto $-a$;
iii) $(\mathbb{N}, \times)$ e $(\mathbb{Z}, \times)$ non sono gruppi, poiché solo l'elemento neutro 1 (e anche -1 in $\mathbb{Z}$) ha un simmetrico (l'inverso) rispetto al prodotto;
iv) Siano $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$(\mathbb{Q}^*, \times)$ e $(\mathbb{R}^*, \times)$ sono gruppi commutativi. L'esclusione dello 0 è necessaria: non esiste alcun numero a tale che $a \times 0 = 1$.
v) Similmente, se $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, allora $(\mathbb{C}^*, \times)$ è un gruppo commutativo.
vi) $(V^2, +)$ e $(V^3, +)$ sono gruppi commutativi.

Dunque i numeri razionali, i numeri reali e i numeri complessi hanno una struttura più ricca rispetto agli altri insiemi di numeri: per questo sono detti *campi* e gli elementi di un campo sono detti *scalari*.

Riassumendo, un *campo* è un'insieme $\mathbb{K}$ con due operazioni $+$ e $\times$ tali che:
i) $(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo commutativo, con elemento neutro 0;
ii) Posto $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $(\mathbb{K}^*, \times)$ è un gruppo commutativo;
iii) vale la *proprietà distributiva*: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}$.

2.2 Spazi di n-uple e matrici

I prodotti cartesiani $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, costituiti dalle coppie e terne ordinate di numeri reali, vengono utilizzati in geometria analitica per rappresentare i punti del piano e dello spazio, mediante l'introduzione di un sistema di coordinate cartesiane.

Ora generalizziamo il concetto, introducendo gli spazi di n-uple.

Definizione 2. L'insieme

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n\}$$

è detto *spazio delle* n*-uple* di numeri reali, dette anche *vettori numerici a* n *componenti*.

Introduciamo in $\mathbb{R}^n$ un'operazione, che rende lo spazio delle n-uple un gruppo commutativo. Date due n-uple $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$, la loro *somma* è la n-upla

$$a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

L'elemento neutro è la n-upla nulla $O = (0, \dots, 0)$ e il simmetrico di a è l'*opposto* $-a = (-a_1, \dots, -a_n)$.

Nel seguito useremo anche una seconda operazione, la *moltiplicazione per scalare*: dati $k \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^n$, poniamo

$$ka = (ka_1, \dots, ka_n).$$

Osserviamo che valgono: $0a = O$ e $1a = a\ \forall a \in \mathbb{R}^n$. Inoltre $(-1)a = -a$.

2.3

Introduciamo ora le matrici, uno degli oggetti fondamentali usati nel corso. L'aritmetica delle matrici consente di trattare più semplicemente i sistemi lineari, di rappresentare le trasformazioni geometriche del piano e dello spazio, e fornisce uno strumento adatto per formulare e risolvere vari problemi applicativi.

Definizione 3. Siano m, n due interi positivi. Una *matrice* reale di *tipo* (m, n) (o $m \times n$) è una tabella rettangolare di mn numeri reali costituita da m righe e n colonne.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Useremo la notazione $A = [a_{ij}]$ per denotare la matrice A, di *elementi* a_{ij}, dove il primo indice indica la riga e il secondo la colonna. Il simbolo $M_{m,n}(\mathbb{R})$ indica l'insieme delle matrici reali $m \times n$.

Una matrice di tipo $(1, n)$ può essere identificata con la n-upla

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \in \mathbb{R}^n$$

e viene chiamata *vettore riga*, mentre una matrice di tipo $(m, 1)$ viene chiamata *vettore colonna* e può essere identificata con la m-upla

$$(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \in \mathbb{R}^m.$$

Se $m = n$ la matrice è detta *quadrata*. Useremo il simbolo $M_n(\mathbb{R})$ per l'insieme delle matrici reali quadrate $n \times n$. Infine, una matrice 1×1 sarà sempre identificata con lo scalare a_{11}.

2.4 Operazioni sulle matrici

Sulle matrici si introducono alcune operazioni: la somma, la moltiplicazione per scalare, il prodotto di matrici righe per colonne. Usando le n-uple come modello, definiamo le prime due operazioni mediante la somma e il prodotto di numeri reali componente per componente.

Definizione 4. Il *prodotto di uno scalare* $k \in \mathbb{R}$ *per una matrice* $A = [a_{ij}]$ è la matrice $kA = [ka_{ij}]$.

L'*opposta* di una matrice $A = [a_{ij}]$ è la matrice $-A = (-1)A = [-a_{ij}]$.

La *somma* di due matrici, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, dello stesso tipo, è la matrice $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

La *differenza* $A - B$ è la matrice $A + (-B) = [a_{ij} - b_{ij}]$.

Definizione 5. Si dicono *conformabili* due matrici A, B, tali che il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B. Siano $A = [a_{ij}]$ di tipo (m, n), $B = [b_{jk}]$ di tipo (n, ℓ). Il *prodotto* $C = AB$ è la matrice $[c_{ik}]$, di tipo (m, ℓ), in cui

$$c_{ik} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}.$$

In particolare, il prodotto di un vettore riga, di componenti $a_1, \ldots, a_n$ per un vettore colonna, di componenti $b_1, \ldots, b_n$, è lo scalare $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. Quindi l'elemento c_{ik} del prodotto AB è il prodotto del vettore riga di indice i per il vettore colonna di indice k (per questo si chiama anche prodotto "righe per colonne").

Ad esempio, il prodotto delle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

è la matrice

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Una prima motivazione della particolare definizione del prodotto di matrici è data dalla possibilità di scrivere i sistemi di equazioni lineari in forma matriciale. Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 & = 24 \end{cases}$$

può essere scritto in forma di prodotto matriciale come

$$Ax = b$$

dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ è la *matrice dei coefficienti* del sistema, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ è il vettore colonna delle *incognite* e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 24 \end{bmatrix}$ è la colonna dei *termini noti*.

2.5 Proprietà delle operazioni

Le seguenti proprietà delle operazioni fra matrici sono di facile verifica (dimostrarne almeno una per esercizio):

- La somma di matrici è commutativa e associativa: $A+B=B+A$ e $(A+B)+C=A+(B+C)$.
- Detta *matrice nulla* (o *matrice zero*) una matrice, denotata con O, di tipo (m,n), con elementi tutti nulli, si ha $A+(-A)=A-A=O$. Dunque $(M_{m,n}(\mathbb{R}),+)$ è un gruppo commutativo.
- Il prodotto di uno scalare per la somma di matrici gode delle proprietà distributive:

$$k(A+B)=kA+kB \quad \forall k\in\mathbb{R}$$

$$(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A \quad \forall k_1,k_2\in\mathbb{R}$$

  e della proprietà associativa

$$(k_1k_2)A=k_1(k_2A) \quad \forall k_1,k_2\in\mathbb{R}$$

- Il prodotto di matrici è associativo e distributivo rispetto alla somma:

$$(AB)C=A(BC) \Longrightarrow \text{ scriveremo } ABC$$

$$A(B+C)=AB+AC, \quad (A+B)C=AC+BC$$

$$k(AB)=(kA)B=A(kB)\ \forall k\in\mathbb{R}.$$

  (naturalmente, le matrici devono essere conformabili).

- Il prodotto di matrici *non* è commutativo, come mostra l'esempio seguente

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix} \quad \text{ma} \quad \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

- La *matrice identica* di ordine n è la matrice quadrata

$$I_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

  così definita: $I_n=[\delta_{ij}]$, con $\delta_{ij}=0$ per $i\neq j$, $\delta_{ij}=1$ per $i=j$. Se A è una matrice conformabile con I_n, a destra o a sinistra, si ha $AI_n=A$ (oppure $I_nA=A$).

Definizione 6. Una matrice A, quadrata di ordine n, si dice *invertibile* se esiste una matrice A^{-1}, tale che $A^{-1}A=AA^{-1}=I_n$. La matrice A^{-1} si chiama *inversa* di A. Si dimostra facilmente che l'inversa di una matrice, se esiste, è unica.

Esempi. 1. La matrice $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$ è invertibile, con inversa la matrice $B=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$. Infatti $AB=BA=I_2$.

2. La matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ non è invertibile. Infatti se esistesse una matrice $C' = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ tale che $CC' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = I_2$, si avrebbe $x = 1, y = 0$ e anche $x = 0, y = 1$, che è assurdo.

L'esempio (2) mostra che il prodotto di matrici ha proprietà ben diverse dal prodotto di numeri: ad esempio, il prodotto delle due matrici non nulle $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ è la matrice nulla.

Osservazione. Il prodotto di matrici invertibili è invertibile: se A e B sono invertibili, si ha

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AA^{-1} = I_n \quad \text{e} \quad (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}B = I_n$$

e quindi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Dunque l'insieme delle matrici invertibili con l'operazione di prodotto è un gruppo (non commutativo se $n > 1$).

Definizione 7. Sia $k \geq 0$ un intero. La *potenza* k-esima di una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice identica I_n se $k = 0$ e la matrice

$$A^k = A \cdot A \cdots A \quad (k \text{ volte})$$

se $k > 0$.

Vale la proprietà: $A^i A^j = A^{i+j} = A^j A^i$.

Definizione 8. La matrice *trasposta* della matrice $A = [a_{ij}]$, di tipo (m, n), è la matrice $A^T = [a_{ji}]$, di tipo (n, m), che si ottiene prendendo come righe le colonne di A.
La matrice è detta *simmetrica* se è quadrata ($m = n$) e $A^T = A$.

Vale la proprietà seguente: $(AB)^T = B^T A^T$.

2.6 Un'applicazione del calcolo matriciale alla teoria dei grafi

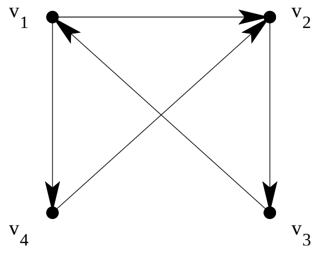
Un *grafo* G è un insieme V, i cui elementi sono detti *vertici*, assieme a una lista E di coppie *non ordinate* di vertici, detti *lati*.

Un *grafo orientato* è un insieme V, i cui elementi sono detti *vertici*, assieme a una lista E di coppie *ordinate* di vertici, detti *lati (orientati)*.

I grafi sono strumenti utili in molti modelli matematici.

Un grafo orientato può essere descritto dalla sua *matrice di adiacenza*: se $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ contiene n vertici, la matrice di adiacenza è una matrice $A = [a_{ij}]$, di tipo $n \times n$, con elemento a_{ij} uguale al numero di lati che vanno dal vertice v_i al vertice v_j. Se il grafo non è orientato, si ha sempre $a_{ij} = a_{ji}$, cioè la matrice è *simmetrica*.

Esempio. Se $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $E = \{(1,2), (1,4), (3,1), (2,3), (4,2)\}$ è un grafo orientato,



la matrice di adiacenza è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di adiacenza può essere usata per ottenere importanti proprietà del grafo, ad esempio il numero di *cammini di lunghezza* s nel grafo. Un *cammino* nel grafo è una successione di lati che congiunge un vertice ad un altro. Il numero di lati nel cammino è la sua *lunghezza*.

Teorema. *Sia A la matrice di adiacenza di un grafo G. L'elemento di posto (i,j) della matrice A^s è uguale al numero di cammini di lunghezza s con inizio nel vertice v_i e fine in v_j.*

Consideriamo ad esempio il caso $s = 2$. Esiste almeno un lato da v_i a v_k e da v_k a v_j esattamente quando il prodotto $a_{ik}a_{kj}$ è diverso da 0. Altrimenti, almeno uno dei fattori è 0. Dunque il numero di cammini di lunghezza 2 da v_i a v_j è dato dalla somma $a_{i1}a_{1j} + \cdots + a_{in}a_{nj}$, che è l'elemento (i,j) di A^2.

Esempio. Nell'esempio precedente si ha

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque ci sono, ad esempio, due cammini orientati di lunghezza 5 dal vertice v_1 al vertice v_2 (quali?).

2.7 Combinazioni lineari

Definizione 9. Una *combinazione lineare* delle matrici $A_1, A_2, \ldots, A_k$ è una matrice della forma

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_kA_k$$

dove $c_1, \ldots, c_k$ sono scalari e le matrici sono tutte dello stesso tipo.

In particolare, sono definite le combinazioni lineari di vettori riga con n componenti e dei vettori colonna con n componenti e quindi delle n-uple.

Esempio. Calcolare la combinazione lineare $-2A_1 + 3A_2 - 2A_3$ dei vettori colonna

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si ha $-2A_1 + 3A_2 - 2A_3 = O$.

Un osservazione importante da fare ora è che i sistemi lineari, oltre alla scrittura mediante il prodotto matriciale, nella quale le *righe* della matrice A dei coefficienti hanno un ruolo principale, possono essere rappresentati anche mediante le combinazioni lineari delle *colonne* di A. Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 & = 24 \end{cases}$$

può essere scritto come

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Dunque il sistema è risolubile esattamente quando la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne di A.

2.8 Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

Il *prodotto scalare* consente di introdurre in $\mathbb{R}^n$ concetti *metrici*: in particolare lunghezze, distanze, angoli. Per semplicità introdurremo solo il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^n$ (cf. §1.4 per $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$).

Definizione 10. Il *prodotto scalare euclideo (o canonico)* di $\mathbb{R}^n$ è la funzione che alla coppia $x, y \in \mathbb{R}^n$ associa il numero reale

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = [x_1 \cdots x_n][y_1 \cdots y_n]^T.$$

Ha le seguenti proprietà:
(i) è *simmetrico:* $x \cdot y = y \cdot x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$;
(ii) è *bilineare:* $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$ e $x \cdot (\alpha y + \beta z) = \alpha(x \cdot y) + \beta(x \cdot z)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni coppia di numeri reali α, β;
(iii) è *definito positivo:* $x \cdot x \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definizione 11. La *norma* (o *lunghezza*) *euclidea* in $\mathbb{R}^n$ è la funzione che associa al vettore x il numero reale non negativo

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}.$$

La *distanza* è la funzione che associa ai vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ il numero reale

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Un vettore di norma 1 è detto *versore*. Ogni vettore non nullo v può essere *normalizzato*: $v' = \frac{1}{\|v\|} v$, con v' versore.

(1) Per ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x) \cdot (\alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x \cdot x)} = |\alpha| \|x\|.$$

(2) Per la simmetria e per la bilinearità del prodotto scalare

$$\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \quad \text{e}$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \cdot y) + \|y\|^2$$

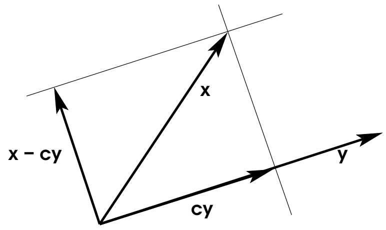
da cui $4(x \cdot y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$.

Definizione 12. I vettori x e y di V sono *ortogonali* se $x \cdot y = 0$, cioè se vale il teorema di Pitagora $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Se y è un vettore non nullo, possiamo scomporre ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ nella somma

$$x = cy + (x - cy)$$

in modo che $x - cy$ sia ortogonale a y, cioè $(x - cy) \cdot y = x \cdot y - c\|y\|^2 = 0$, da cui $c = (x \cdot y)/\|y\|^2$.



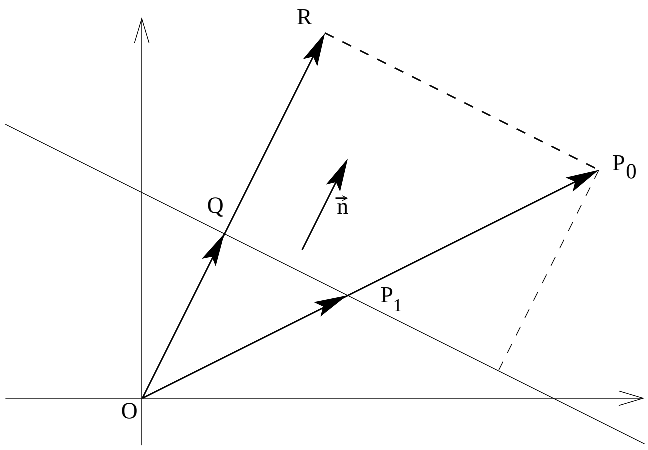
Definizione 13. Il vettore

$$pr_y(x) = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y$$

è la *proiezione ortogonale del vettore x su y*.

Esempio. Il vettore $x = (2, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$ ha proiezione ortogonale $\frac{x \cdot y}{y \cdot y} y = \frac{3}{6} y = \frac{1}{2} y$ sul vettore $y = (1, -1, 2)$. Dunque $x = \frac{1}{2} y + (x - \frac{1}{2} y)$, con $x - \frac{1}{2} y = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$ ortogonale rispetto a y.

Esempio. Applichiamo la proiezione ortogonale per trovare una formula per la distanza di un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ da un piano $\pi : ax + by + cz = d$ con *versore* normale $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c)$.



$$d(P_0, \pi) = \| \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} \| = \|pr_{\vec{n}}(\overrightarrow{P_1 P_0})\| =$$
$$= \left| \frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

Una formula analoga vale per la distanza tra un punto ed una retta nel piano.

Teorema 1. (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) *Per ogni coppia di vettori x e y, si ha*

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|.$$

Vale l'uguaglianza se e solo se x e y sono proporzionali.

Dimostrazione. Se $y = 0$ la tesi è immediata. Altrimenti, sia $x = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y + x'$ la scomposizione di x in vettori ortogonali. Per il teorema di Pitagora

$$\|x\|^2 = \frac{|x \cdot y|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 + \|x'\|^2 \geq \frac{|x \cdot y|^2}{\|y\|^2},$$

dove vale l'uguaglianza se e solo se $x' = 0$, cioè se x e y sono proporzionali. □

Corollario. *Per ogni coppia di vettori* x, y*, vale la* disuguaglianza triangolare

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza precedente

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

□

Definizione 14. L'*angolo convesso* tra due vettori non nulli x e y di $\mathbb{R}^n$ è il numero reale θ, compreso tra 0 e π, tale che

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}.$$

Per Cauchy-Schwarz, il quoziente a destra è compreso tra -1 e 1.

Esercizi: distanza tra rette nello spazio

La *distanza* $d(r, r')$ *tra due rette* r *e* r' è la lunghezza di un vettore geometrico $\overrightarrow{PQ}$, con P su r e Q su r', ortogonale alle due rette. È la minima distanza tra coppie di punti, uno preso su r e uno su r'.

Nel caso di rette *parallele*, è sufficiente trovare un piano ortogonale alle rette e i due punti di intersezione del piano con le rette. Questi definiscono un vettore $\overrightarrow{PQ}$ la cui lunghezza è la distanza $d(r, r')$.

Nel caso di rette *sghembe*, cioè non parallele né incidenti, si può procedere in tre modi, illustrati dall'esempio seguente. Siano

$$r \ : \ \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r' \ : \ \begin{cases} x - z = 1 \\ y + 3z = -1 \end{cases}$$

due rette nello spazio.

1) Posta anche r' in forma parametrica

$$r' \ : \ \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -1 - 3s \\ z = s \end{cases}$$

si impone che il vettore $\overrightarrow{PQ} = (s - t - 1, -3s - t - 1, s + t - 1)$, con $P \in r$ e $Q \in r'$, sia ortogonale ai vettori direzione $\vec{v} = (1, 1, -1)$ e $\vec{v}' = (1, -3, 1)$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = (s - t - 1) + (-3s - t - 1) - (s + t - 1) = -3s - 3t - 1 = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}' = (s - t - 1) - 3(-3s - t - 1) + (s + t - 1) = 11s + 3t + 1 = 0 \end{cases}$$

con soluzione $s = 0$, $t = -1/3$. Dunque $d(r, r') = \| \overrightarrow{PQ} \| = \|(-2/3, -2/3, -4/3)\| = \sqrt{4/9 + 4/9 + 16/9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

2) Si può anche procedere così: tra tutti i piani del *fascio* contenente r', di equazione

$$\lambda(x - z - 1) + \mu(y + 3z + 1) = 0 \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ non entrambi nulli})$$

si cerca il piano parallelo a r, avente vettore normale $\vec{n} = (\lambda, \mu, -\lambda + 3\mu)$ ortogonale al vettore direzione $\vec{v}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = \lambda + \mu - (-\lambda + 3\mu) = 0$$

cioè $2\lambda - 2\mu = 0$, da cui $\lambda = \mu$. Posto $\lambda = \mu = 1$, il piano cercato ha equazione

$$\pi \ : \ x + y + 2z = 0.$$

Dunque $d(r, r') = d(P_0, \pi)$ per ogni punto $P_0 \in r$. Scelto $P_0 = (2, 0, 1)$, si ha

$$d(P_0, \pi) = \frac{|2 + 0 + 2|}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

3) L'ultimo metodo usa la proiezione ortogonale: per ogni coppia di punti $A \in r$ e $B \in r'$, dati due vettori direzione $\vec{v}$ e $\vec{v'}$ di r e r' rispettivamente, si ha

$$d(r, r') = \left\| pr_{\vec{v} \times \vec{v'}}(\overrightarrow{AB}) \right\|.$$

Scegliendo $A = (2, 0, 1)$, $B = (1, -1, 0)$ e il vettore $(1, 1, 2)$ parallelo al prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{v'}$, si ottiene

$$d(r, r') = \left\| pr_{(1,1,2)}((-1, -1, -1)) \right\| = \left\| \frac{-4}{6}(1, 1, 2) \right\| = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$