

Esercizio 4.1 (Esercizio 7.1). *Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & t+1 & -1 \\ 0 & 0 & t-3 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & t \\ 2 & 1 & 2 & t+1 \\ t & 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.2 (Esercizio 7.3). *Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $Ax = b$ è compatibile (cioè ammette soluzione). In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t+1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4.3 (Esercizio 7.4). *Si considerino le matrici (dove k è un parametro reale)*

$$A = \begin{bmatrix} 6k & 4 & -2 & 2 \\ 4k+1 & 4 & -1 & 1 \\ -2k-1 & -2 & 1 & -1 \\ 2k+3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Si stabilisca il rango di A al variare di k .*
- Si stabilisca per quali valori di k il sistema lineare $Ax = b$ è risolubile e in tali casi se ne determinino le soluzioni.*

Esercizio 4.4. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1-k & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & -1-k & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix}$$

- Trovare, se esistono, i valori del parametro reale k per i quali $\text{null}(A) = \text{null}(B) = 0$.
- Sia $C = AB$. Stabilire se il sistema lineare $Cx = 0$ ha soluzione unica quando $k = 0$.

Esercizio 4.5. Si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & k+2 & k-1 \\ 1 & 0 & k+2 & 2k-1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$$

con k parametro reale.

- Si risolva il sistema $Ax = b$ al variare del parametro k .
- Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v = \left(-\frac{7}{3}, -2, \frac{1}{3}, 1\right)$ appartiene all'insieme $\text{Sol}(Ax = b)$.

Esercizio 4.6. [v. 7.62] Sia A la matrice reale seguente:

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

- Determinare il rango di A al variare del parametro reale k .
- Calcolare $\text{null}(A)$ e le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, nel caso $k = 1$.

Esercizio 4.7. [6.4] Calcolare l'inversa delle matrici (invertibili)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

utilizzando il metodo della riduzione a gradini.

Esercizio 4.8. [6.7] Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

- Si determini per quali valori di k la matrice A è invertibile. Si calcoli la matrice inversa di A per $k = -1$.
- Calcolare il rango di A al variare del parametro k .

Esercizio 4.9. [6.9] Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3k & 8+2k & k-1 \\ 0 & 8k+8 & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

- Calcolare il rango di A al variare del parametro k .
- Esistono valori di k per i quali la matrice è invertibile?

Esercizio 4.10. [v. 6.6] Dato $k \in \mathbb{R}$, si considerino le seguenti matrici reali

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Stabilire per quali valori di k la matrice A_k è invertibile.
- Trovare la matrice inversa di A_1 , per $k = 1$.
- Risolvere l'equazione matriciale $A_1 X + B = 0$, con X matrice reale 3×3 .

Esercizio 4.11. [6.11] Sia A la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix} \quad (k \text{ reale}).$$

- Stabilire per quali valori di k la matrice A è invertibile.
- Per i valori di k trovati al punto precedente determinare l'inversa di A .