CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 1– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2024/25

Esercizio 1.1 (2.1)**.** *Determinare l'equazione parametrica e cartesiana della retta del piano*

(a) *Passante per i punti* $A(1,2)$ *e* $B(-1,3)$.
(b) *Passante per il punto* $C(2,3)$ *e parallela al vettore* $\overrightarrow{OP} = (-1,2)$.
(c) *Di equazione cartesiana* $y = 2x+5$. *Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.*

Soluzione:

(a) Poichè $\overrightarrow{AB} = (-2,1)$ otteniamo

$$r: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Per ottenere l'equazione Cartesiana basta ricavare t:

$$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-2(y-2) \\ t = y-2 \end{cases} \Rightarrow x+2y-5=0$$

(b) Possiamo scrivere direttamente l'equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3+2t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Ricaviamo ora l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} t = 2-x \\ y = 3+2(2-x) \end{cases} \Rightarrow 2x+y-7=0$$

(c) La cosa più semplice è porre una variabile uguale al parametro t, ottenendo

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 5+2t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Per determinare un punto P appartenente a r è sufficiente trovare un punto (x,y) che soddisfi l'equazione di r (parametrica o cartesiana). Assegnando per esempio il valore 0 al parametro t nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow P(0,5).$$

□

Esercizio 1.2 (2.2)**.** *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta dello spazio*

(a) *Passante per i punti* $A(1,0,2)$ *e* $B(3,-1,0)$.
(b) *Passante per il punto* $P(1,3,1)$ *e parallela al vettore* $\overrightarrow{OQ} = (2,0,0)$.
(c) *Di equazioni Cartesiane*

$$\begin{cases} y = 3x+1 \\ y-x+z=0 \end{cases}$$

Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Soluzione:

(a) Poichè $\overrightarrow{AB} = (2,-1,-2)$ otteniamo

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 2-2t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Ricaviamo ora l'equazione cartesiana:

$$\begin{cases} x = 1 + 2(-y) \\ t = -y \\ z = 2 - 2(-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che l'equazione cartesiana di una retta nello spazio è data mediante l'intersezione di due piani.

(b) Possiamo scrivere direttamente l'equazione parametrica:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Notiamo che l'equazione si può equivalentemente scrivere

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

E' immediato ricavare l'equazione cartesiana:

$$\begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

(c) La cosa più semplice è porre la variabile x uguale al parametro t, ottenendo

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -(1 + 3t) + t \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Per determinare un punto P appartenente a r è sufficiente trovare un punto (x, y, z) che soddisfi l'equazione di r (parametrica o cartesiana). Assegnando per esempio il valore 0 al parametro t nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow P(0, 1, -1).$$

□

Esercizio 1.3 (2.3)**.**

a) *Determinare l'equazione parametrica e cartesiana del piano π passante per i punti $A(1,3,1)$, $B(2,0,0)$ e $C(0,1,1)$. Il punto $P(0,2,0)$ appartiene a tale piano?*

b) *Determinare una equazione della retta passante per A ortogonale a π.*

Soluzione:

a) Possiamo determinare prima l'equazione parametrica. Poichè

$$\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 0)$$

otteniamo

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 3 - 3t - 2s \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}$$

Per ottenere l'equazione cartesiana da quella parametrica basta ricavare s e t e procedere per sostituzione:

$$\begin{cases} x = 1 + (1 - z) - s \\ y = 3 - 3(1 - z) - 2s \\ t = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -x - z + 2 \\ y = 3z - 2(-x - z + 2) \\ t = 1 - z \end{cases} \Rightarrow 2x - y + 5z - 4 = 0$$

In alternativa si può ricavare direttamente l'equazione cartesiana, considerando la generica equazione $ax + by + cz + d = 0$ e imponendo il passaggio per i tre punti A, B e C in modo da ricavare i valori di a, b, c e d. Notiamo che così come l'equazione cartesiana è determinata a meno di multipli, anche i valori di a, b, c e d non saranno univocamente determinati.

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \Rightarrow \begin{array}{rc} A: & a + 3b + c + d = 0 \\ B: & 2a + d = 0 \\ C: & b + c + d = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-d}{2} + 3b + (-d - b) + d = 0 \\ a = \frac{-d}{2} \\ c = -d - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{d}{4} \\ a = -\frac{d}{2} \\ c = -\frac{5}{4}d \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di d. Ponendo $d = -4$ otteniamo

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 5 \\ d = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y + 5z - 4 = 0$$

Un ulteriore modo è calcolare il prodotto vettoriale $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, 1, -5)$ che è ortogonale al piano cercato, ottenendo l'equazione $-2x + y - 5z + d = 0$ ed imponendo il passaggio per B (o A o C) si ottiene $d = 4$ e cambiando i segni si ottiene la stessa equazione precedentemente trovata.

Infine $P(0, 2, 0)$ appartiene al piano se le sue coordinate soddisfano l'equazione (Cartesiana o parametrica). Sostituendo nell'equazione Cartesiana otteniamo

$$-2 - 4 = 0 \quad \text{no}$$

Poichè le coordinate non soddisfano l'equazione P non appartiene al piano.

Analogamente potevamo sostituire nell'equazione parametrica ottenendo:

$$\begin{cases} 0 = 1 + t - s \\ 2 = 3 - 3t - 2s \\ 0 = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 - s \\ 2 = 3 - 3 - 2s \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ s = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Poichè la prima e seconda equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e P non appartiene al piano.

b) Sappiamo che dato un generico piano $ax + by + cz = k$ il vettore (a, b, c) è ortogonale al piano. Quindi dall'equazione cartesiana del piano ricaviamo che la retta cercata ha direzione $(2, -1, 5)$. Sappiamo inoltre che tale retta passa per $A = (1, 3, 1)$, quindi

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

□

Esercizio 1.4 (2.4)**.** *Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $A(1, -1, 2)$ e $B(-2, 0, 1)$, e sia s la retta contenente $C(1, 3, -3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OD}(2, -2, 3)$.*

a) *Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).*
b) *Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.*

Soluzione:

La retta r passante per B e parallela al vettore $\overrightarrow{BA} = (-3, 1, -1)$ ha equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \forall t \in R$$

Analogamente

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 3 - 2h \\ z = -3 + 3h \end{cases} \qquad \forall h \in R$$

a) Osserviamo subito che r e s non sono parallele in quanto i vettori direzione $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{OD}$ non hanno le componenti proporzionali uno rispetto all'altro.

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione $r \cap s$ risolvendo il sistema di 3 equazioni nelle due incognite t, h:

$$\begin{cases} -2-3t = 1+2h \\ t = 3-2h \\ 1-t = -3+3h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(3-2h)-2h = 3 \\ t = 3-2h \\ -(3-2h)-3h = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -9+6h-2h = 3 \\ t = 3-2h \\ -3+2h-3h = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 3 \\ t = 3-2h \\ h = 1 \end{cases}$$

Poichè la prima e terza equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.

Infine le rette sono sghembe.

In alternativa potevamo per esempio ricavare l'equazione cartesiana di una delle due rette

$$r: \begin{cases} x = -2-3t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y = -2 \\ y+z = 1 \end{cases}$$

e quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = 1+2h \\ y = 3-2h \\ z = -3+3h \\ x+3y = -2 \\ y+z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2h \\ y = 3-2h \\ z = -3+3h \\ 1+2h+9-6h = -2 \\ 3-2h-3+3h = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2h \\ y = 3-2h \\ z = -3+3h \\ -4h = -12 \\ h = 1 \end{cases}$$

Poichè le ultime due equazioni si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.

Infine le rette sono sghembe.

□

Esercizio 1.5 (2.7)**.**

a) *Determinare equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A = (2,3,1)$ e $B = (0,0,1)$ e della retta s passante per i punti $C = (0,0,0)$ e $D = (4,6,0)$.*

b) *Stabilire se r e s sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente r e s.*

Soluzione:

a) Il vettori direzione $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno componenti:

$$\overrightarrow{AB} = (-2,-3,0) \qquad \overrightarrow{CD} = (4,6,0)$$

Quindi:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = -3t \\ z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4t \\ y = 6t \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Poichè i due vettori direzione sono paralleli lo sono anche le due rette r e s e in particolare le rette sono complanari.

Per determinare il piano che li contiene abbiamo bisogno però di un vettore direzione differente, appartenente al piano. Possiamo per esempio determinare il vettore direzione $\overrightarrow{AC}$ (in quanto A e C appartengono al piano cercato):

$$\overrightarrow{AC} = (2,3,1)$$

Infine il piano π che contiene r e s ha equazione parametrica:

$$\pi : \begin{cases} x = -2t + 2s \\ y = -3t + 3s \\ z = s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Per ricavare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri s e t:

$$\begin{cases} x = -2t + 2z \\ y = -3t + 3z \\ z = s \end{cases} \quad \Rightarrow 3x - 2y = 0$$

In alternativa si può ricavare direttamente l'equazione cartesiana, considerando la generica equazione $ax + by + cz = d$ e imponendo il passaggio per tre dei quattro punti, per esempio B, C e D in modo da ricavare i valori di a, b, c e d. Notiamo che così come l'equazione cartesiana è determinata a meno di multipli, anche i valori di a, b, c e d non saranno univocamente determinati.

$$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \begin{array}{ll} B: & c = d \\ C: & 0 = d \\ D: & 4a + 6b = d \end{array} \quad \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ a = -\frac{3}{2}b \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di b. Ponendo $b = 2$ otteniamo

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -3x + 2y = 0$$

$\square$

Esercizio 1.6 (2.9)**.** *Si considerino le rette di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) *Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $P(1, 1, 1)$ e incidente r e s.*
b) *Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $C(1, 2, -3)$ e perpendicolare a r.*
c) *Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare alle due rette r e s.*

Soluzione:

a) Cominciamo con il determinare se le rette r e s sono incidenti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Quindi le rette sono incidenti nel punto $O(0, 0, 0)$. E' allora sufficiente determinare l'equazione della retta passante per $P(1, 1, 1)$ e $O(0, 0, 0)$. In questo modo tale retta interseca r e s. La direzione è data dal vettore $\overrightarrow{OP}(1, 1, 1)$, quindi la retta cercata ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

b) Il piano passante per $C(1, 2, -3)$ e perpendicolare a r ha equazione del tipo

$$ax + by + cz = k$$

dove a, b, c corrispondono alle componenti del vettore direzione di r (perpendicolare al piano), mentre il valore di k si determina imponendo il passaggio per C.

Determiniamo quindi l'equazione parametrica di r:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi r è parallela al vettore $(-2, 1, 1)$, e il piano cercato è del tipo

$$-2x + y + z = k$$

Imponendo poi il passaggio per $C(1, 2, -3)$ otteniamo:

$$-2 \cdot 1 + 2 + (-3) = k \qquad \Rightarrow \qquad k = -3$$

Infine il piano cercato ha equazione:

$$-2x + y + z = -3$$

c) Scriviamo l'equazione di r e s in forma parametrica:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Il piano passante per $P(1, 1, 1)$ e perpendicolare a r ha equazione

$$-2x + y + z = 0$$

Analogamente il piano passante per $P(1, 1, 1)$ e perpendicolare a s ha equazione

$$-y + z = 0$$

La retta cercata è data dall'intersezione dei due piani appena determinati:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Notiamo che la retta coincide, casualmente, con quella determinata al punto precedente.

Un metodo alternativo consisteva nel calcolare il piano π contenente r e s. Tale piano ha direzione parallela ai due vettori direzione di r e s e contiene il punto $O(0, 0, 0)$ di intersezione di r e s:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t - s \\ z = t + s \end{cases} \quad \Rightarrow \; x + y + z = 0$$

La retta cercata è quindi la retta passante per P e perpendicolare a tale piano:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Notiamo che si tratta, ovviamente, della stessa retta determinata con l'altro metodo, scritta in maniera differente.

$\square$

Esercizio 1.7 (2.10)**.** *Sia r la retta nello spazio passante per i punti $A = (0, 0, 1)$ e $B = (-2, -1, 0)$. Sia s la retta passante per i punti $C = (1, 1, 1)$ e $D = (-1, 0, 0)$.*

a) *Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano π che le contiene.*
b) *Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano π del punto* a).

Soluzione:

a) Due rette sono complanari se sono parallele o incidenti.

Il vettori direzione $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno componenti:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -1, -1) \qquad \overrightarrow{CD} = (-2, -1, -1)$$

Poichè i due vettori sono paralleli lo sono anche le due rette r e s e quindi in particolare sono complanari. Per determinare il piano che li contiene abbiamo bisogno però di un vettore direzione differente, appartenente al piano. Possiamo per esempio determinare il vettore direzione $\overrightarrow{AC}$ (in quanto A e C appartengono al piano cercato):

$$\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$$

Infine il piano π che contiene r e s ha equazione parametrica:

$$\pi : \begin{cases} x = -2t + s \\ y = -t + s \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Per ricavare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri s e t:

$$\begin{cases} t = 1 - z \\ x = -2 + 2z + s \\ y = -1 + z + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - z \\ s = x + 2 - 2z \\ y = -1 + z + x + 2 - 2z \end{cases} \qquad \Rightarrow x - y - z + 1 = 0$$

b) Un vettore perpendicolare al piano π ha componenti proporzionali ai cofficienti della x, y e z dell'equazione cartesiana di π, ovvero $(1, -1, -1)$ (o un suo multiplo). Di conseguenza l'equazione della retta cercata è

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

□

Esercizio 1.8 (2.13)**.** *Si considerino i piani dello spazio*

$$\pi \ : \ x - y + z = 0 \qquad e \qquad \pi' \ : \ 8x + y - z = 0.$$

a) *Stabilire la posizione reciproca dei due piani.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare ai piani π e π'.*

Soluzione:

a) Due piani o sono paralleli o la loro intersezione è una retta. In questo caso il piano π è perpendicolare al vettore $(1, -1, 1)$, mentre π' è perpendicolare al vettore $(8, 1, -1)$, quindi i piani non sono paralleli tra loro. Determiniamo la loro intersezione mettendo a sistema le loro equazioni:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 8x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi i piani si intersecano nella retta

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

b) La direzione perpendicolare al piano π è data dal vettore $(1, -1, 1)$, mentre la direzione perpendicolare a π' è $(8, 1, -1)$. Di conseguenza il piano perpendicolare a π e π' passante per il punto $P(1, 1, 1)$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 1 + t + 8s \\ y = 1 - t + s \\ z = 1 + t - s \end{cases}$$

Ricavando i parametri s e t e sostituendo si ottiene una equazione cartesiana:

$$y + z = 2$$

In alternativa si può osservare che un piano perpendicolare a π e π' è anche perpendicolare alla retta loro intersezione. Di conseguenza il piano cercato è perpendicolare al vettore $(0, 1, 1)$ (direzione della retta intersezione), ovvero ha equazione del tipo $y+z = k$. Imponendo il passaggio per P si ottiene direttamente l'equazione cartesiana:

$$y + z = 2$$

□

Esercizio 1.9 (2.18)**.** *Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni*

$$\begin{aligned}\pi_1 &: z - 3 = 0\\ \pi_2 &: x + y + 2 = 0\\ \pi_3 &: 3x + 3y - z + 9 = 0\end{aligned}$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

a) *Si stabilisca se il piano π_3 contiene r.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana del piano π_4 passante per l'origine e contenente r.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1.*

Soluzione:
Calcoliamo un'equazione parametrica di $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} z - 3 = 0\\ x + y + 2 = 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad r : \begin{cases} x = -t - 2\\ y = t\\ z = 3\end{cases}$$

a) Un modo per verificare se π_3 contiene r è di controllare se π_3 contiene due qualsiasi punti di r. Dall'equazione parametrica di r, assegnando per esempio i valori $t = 0$ e $t = 1$ otteniamo i punti $A(-2, 0, 3)$ e $B(-3, 1, 3)$ di r. Quindi π_3 contiene A e B se:

$$\begin{aligned}3 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 - 3 + 9 = 0\\ 3 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 - 3 + 9 = 0\end{aligned}$$

Siccome le due condizioni sono verificate A e B, e di conseguenza r, sono contenuti in π_3.

b) Un piano π_4 contenente r contiene i suoi due punti A e B. Si tratta quindi di trovare l'equazione del piano per A, B e l'origine. Poiché chiede l'equazione cartesiana la cosa più semplice è probabilmente considerare la generica equazione cartesiana e imporre il passaggio pre i tre punti:

$$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2a + 3c = d\\ -3a + b + 3c = d\\ d = 0\end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}c\\ b = \frac{3}{2}c\\ d = 0\end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di c. Ponendo $c = 2$ otteniamo

$$\begin{cases} a = 3\\ b = 3\\ c = 2\\ d = 0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z = 0$$

In alternativa potevamo ricavare l'equazione parametrica e da questa ricavare l'equazione cartesiana. Poichè $\overrightarrow{OA} = (-2, 0, 3)$ e $\overrightarrow{OB} = (-3, 1, 3)$, otteniamo le equazioni di π_4:

$$\pi_4 : \begin{cases} x = -2t - 3s\\ y = s\\ z = 3t + 3s\end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z = 0$$

c) Determiniamo la retta s per l'origine ortogonale a π_1, cioè di direzione $(0,0,1)$:

$$s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1 è quindi l'intersezione di s con π_1:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto $P(0,0,3)$.

□

Esercizio 1.10 (12.9)**.** *Si determini la distanza del punto* $P(3,1,2)$ *dalla retta* r *di equazione parametrica*

$$r: \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

Soluzione:

La retta r è parallela al vettore $u = (1,2,-3)$.

Sia π il piano perpendicolare a r passante per P. La prima condizione implica che π sia del tipo

$$x + 2y - 3z = k$$

Imponendo il passaggio per P otteniamo $3 + 2 - 6 = k$, ovvero $k = -1$. Infine

$$\pi: \quad x + 2y - 3z = -1$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di r con π:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + t + 4 + 4t + 3 + 9t = -1 \\ x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 5 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Quindi $A = (5,0,2)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(r,P) = d(A,P) = \parallel AP \parallel = \parallel (2,-1,0) \parallel = \sqrt{5}$$

□

Esercizio 1.11 (12.10)**.** *Si determini la distanza del punto* $P(-1,0,2)$ *dal piano* π *di equazione* $\pi: \ x - 2y + 3z = -9$.

Soluzione:

Si può applicare la formula: $d(\Pi, P) = \dfrac{| \, ax_0 + by_0 + cz_0 + d \, |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{14}$.

L'esercizio può essere svolto, in caso di oblio della formula, come è illustrato di seguito. Il piano π è perpendicolare al vettore $u = (1,-2,3)$.

Sia r la retta perpendicolare a π passante per P:

$$r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di r con π:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -9 \\ x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + t + 4t + 6 + 9t = -9 \\ x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Quindi $A = (-2, 2, -1)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(\pi, P) = d(A, P) = \parallel AP \parallel = \parallel (1, -2, 3) \parallel = \sqrt{14}$$

□

Esercizio 1.12 (2.5)**.**

a) *Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:*

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s + 2 \end{cases}$$

b) *Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.*

Soluzione:

a) Osserviamo subito che r e r' non sono parallele in quanto r è parallela al vettore $(2, 1, 1)$ mentre r' è parallela al vettore $(1, 0, 1)$.

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione $r \cap r'$ risolvendo il sistema di 3 equazioni nelle due incognite t, s:

$$\begin{cases} 2t = s \\ t + 1 = 2 \\ t + 3 = s + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \\ 1 + 3 = 2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di r (o analogamente di r') il valore di t (o di s) determinato, troviamo che r e r' sono incidenti nel punto $P(2, 2, 4)$.

b) L'angolo ϑ formato dalle rette r e r' corrisponde all'angolo formato dai rispettivi vettori direzione $u = (2, 1, 1)$ e $v = (1, 0, 1)$. Possiamo quindi sfruttare la formula

$$\cos(\vartheta) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

dove

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$
$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Quindi

$$\cos(\vartheta) = \frac{2 + 1}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \vartheta = 30°.$$

□

Esercizio 1.13 (APPELLO 5 settembre 2018)**.** *Sia P il punto di coordinate $P = (2, 1, 3)$ e sia r la retta di equazioni cartesiane*

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

a) *Si trovi la distanza di P da r.*

b) *Si trovino le equazioni cartesiane dei piani ortogonali a r la cui distanza da P é uguale a $\sqrt{3}$.*

Soluzione:

a) Si osservi che $P \notin \mathbb{R}$ altrimenti $d(P, r) = 0$. Si puó procedere come nell'esercizio 1.10. Scrivendo la retta r in forma parametrica si ha

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t + 3 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

e quindi un piano ortogonale ad r è della forma $x + y - z + d = 0$. Imponendo il passaggio per P si ottiene $2 + 1 - 3 + d = 0$ da cui $d = 0$.

Il piano passante per P ed ortogonale ad r ha equazione $\pi : x + y - z = 0$. Mettendo a sistema r e π si trova il punto $A = (1, 1, 2)$ e si può concludere che $d(P, r) = d(P, A) = \sqrt{1^2 + 0 + 1^2} = \sqrt{2}$.

b) Si è giá osservato che i piani ortogonali ad r sono della forma

$$x + y - z + d = 0$$

La distanza di P da tali piani data da

$$\frac{|2+1-3+d|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|d|}{\sqrt{3}}.$$

Tale distanza uguale a $\sqrt{3}$ quando $|d| = 3$, cio per $d = \mp 3$.

□

Esercizio 1.14 (2.21)**.** *Nel piano, si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni*

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \qquad r_2 \ : \ x - 2y + 1 = 0, \qquad r_3 \ : \ 2x + y - 2 = 0.$$

a) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta r parallela a r_1 e passante per il punto $A = r_2 \cap r_3$.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta s perpendicolare a r_1 e passante per A.*
c) *Si calcoli l'angolo tra le rette r_1 e r_2 e tra le rette r_2 e r_3.*

Soluzione:

a) Determiniamo $A = r_2 \cap r_3$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

La retta r è quindi la retta per A di direzione parallela al vettore $(-2, 2)$:

$$r : \begin{cases} x = \frac{3}{5} - 2t \\ y = \frac{4}{5} + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow x + y - \frac{7}{5} = 0$$

In alternativa potevamo ricavare l'equazione cartesiana di r_1:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \ x + y - 1 = 0 \Rightarrow \ y = -x + 1$$

Di conseguenza l'equazione cartesiana di r è:

$$y - \frac{4}{5} = -\left(x - \frac{3}{5}\right) \ \Rightarrow \ x + y - \frac{7}{5} = 0$$

b) Utilizzando l'equazione parametrica di s, una direzione perpendicolare a quella di r_1 è data dal vettore $(2, 2)$, quindi:

$$s : \begin{cases} x = \frac{3}{5} + 2t \\ y = \frac{4}{5} + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \ x - y + \frac{1}{5} = 0$$

Utilizzando in alternativa l'equazione cartesiana di r_1, la retta s ha coefficiente angolare opposto del reciproco del coefficiente angolare di r_1, quindi 1:

$$s : \ y - \frac{4}{5} = \left(x - \frac{3}{5}\right) \Rightarrow \ x - y + \frac{1}{5} = 0$$

c) Ricaviamo le equazioni parametriche delle tre rette per avere dei vettori direzione. Sappiamo già che r_1 è parallela a $v_1 = (-2, 2)$, inoltre

$$r_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases} \qquad\qquad r_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

Quindi r_2 è parallela a $v_2(2, 1)$ e r_3 è parallela a $v_3(1, -2)$. Infine

$$\cos(v_1 v_2) = \frac{-4+2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-2}{2\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Notiamo che i vettori v_2 e v_3 sono ortogonali, quindi l'angolo tra r_2 e r_3 è $\frac{\pi}{2}$.

□

Esercizio 1.15 (2.27)**.** *Siano assegnati il punto $A = (1, 2, 1)$ il piano π e la retta s di equazioni*

$$\pi: \ x + z = 4, \qquad s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) *Si determini il punto B, proiezione ortogonale di A su π e la retta r passante per A e per B.*
b) *Indicato con C il punto di intersezione tra s e r e con D il punto di intersezione tra s e π, si determini un'equazione della retta CD.*
c) *Si determini l'angolo tra r e la retta CD.*

Soluzione:

a) Per trovare B determiniamo l'equazione della retta r passante per A e ortogonale a π, cioè di direzione $(1, 0, 1)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Il punto B è dato dall'intersezione tra r e π:

$$B: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ 1 + s + 1 + s = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad B = (2, 2, 2)$$

Notiamo che la retta passante per A e B richiesta è la retta r precedentemente trovata.

b) Calcoliamo le intersezioni:

$$C = r \cap s: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ 1 + s = 1 + t \\ 2 = 2 \\ 1 + s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -1 \\ t = -1 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = (0, 2, 0)$$

$$D = s \cap \pi: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ 1 + t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ x = 4 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D = (4, 2, 0)$$

Il vettore CD è $(4, 0, 0)$, quindi un'equazione della retta CD è:

$$r_{CD}: \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

c) La retta r è parallela al vettore $u = (1, 0, 1)$ e la retta CD è parallela al vettore $v = (4, 0, 0)$. Indicato con ϑ l'angolo tra le due rette si ottiene:

$$\cos(\vartheta) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 45°.$$

□

Esercizio 1.16 (12.16)**.** *Determinare per quali valori di k il triangolo di vertici $A_1(0, 0)$, $A_2(4, 2)$ e $A_3(1, k)$ ha area 5.*

Soluzione:

L'area del triangolo di vertici A_1, A_2 e A_3 è metà dell'area del parallelogramma di lati

$$\overrightarrow{A_3A_1} = (1, k), \qquad \overrightarrow{A_2A_1} = (4, 2)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogramma in $\mathbb{R}^2$ otteniamo quindi

$$Area(\text{triangolo } A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & k\\ 4 & 2\end{bmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(2-4k)\right| = |1-2k|$$

Imponendo la condizione che l'area del triangolo sia 5 otteniamo $1-2k = \pm 5$, quindi $k=-2$ o $k=3$.
Abbiamo quindi ottenuto due possibili soluzioni:

- $k=-2$ ovvero $A_3 = (1,-2)$.
- $k=3$ ovvero $A_3 = (1,3)$.

□

Esercizio 1.17 (v. 12.23)**.** *Siano* $A=(0,-1,0),\ B=(-2,0,-3),\ C=(-1,0,-1)$ *punti dello spazio.*

a) *Calcolare l'area del triangolo di vertici* A,B,C.
b) *Stabilire se il punto* $D=(2,2,2)$ *appartiene al piano contenente* A,B,C.

Soluzione:

a) L'area del parallelogramma di lati AB e AC è data dalla lunghezza del vettore $AB\times AC$. Poiché $AB=(-2,1,-3)$ e $AC=(-1,1,-1)$, otteniamo

$$AB\times AC = \det\begin{bmatrix} i & j & k\\ -2 & 1 & -3\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix} = 2i+j-k = (2,1,-1) \quad\Rightarrow\quad |AB\times AC| = \sqrt{6}.$$

Infine l'area del triangolo è metà dell'area del parallelogramma:

$$Area(ABC) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) Un modo consiste nel determinare il piano passante per i tre punti $A,\ B,\ C$ il quale ha equazione

$$\pi : \begin{cases} x = -2t-s\\ y = -1+t+s\\ z = -3t-s\end{cases} \qquad\Rightarrow\qquad 2x+y-z=-1$$

Il punto D non soddisfa l'equazione di π: $4+2-2\neq -1$, quindi D non appartiene al piano contenente A,B,C.

□

Esercizio 1.18 (12.19)**.** *Calcolare il volume del parallelepipedo di lati* $u(1,0,0),\ v(-3,1,1)$ *e* $w(-2,2,5)$.

Soluzione:

Il volume del parallelepipedo è dato dal prodotto misto dei vettori che formano i lati del parallelepipedo. Cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale di v e w:

$$v\times w = (3,\ 13,\ -4)$$

Quindi

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = |u\cdot(v\times w)| = |u\cdot v\times w| = |((1,0,0),\ (3,\ 13,\ -4))| = |3| = 3$$

Analogamente

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = \left|\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 5\end{bmatrix}\right| = |1\cdot(5-2)| = 3$$

□

Esercizio 1.19 (12.20)**.** *Siano* $P_1=(1,-1,0), P_2=(1,0,-1), P_3=\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, *e* $P_4=(1,2,1)$ *quattro punti nello spazio.*

a) *Calcolare l'angolo tra i vettori* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *e* $\overrightarrow{P_2P_3}$.
b) *Calcolare il volume del prisma con base il triangolo* $P_1P_2P_3$ *e lato il segmento* P_1P_4.

Soluzione:

a) Sia ϑ l'angolo cercato, usiamo la formula

$$\cos(\vartheta) = \frac{(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3})}{|\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot |\overrightarrow{P_2P_3}|}$$

Poichè

$$\overrightarrow{P_2P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, -1),$$

si ha

$$(\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_2P_3}) = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

Quindi $\cos(\vartheta) = 0$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

b) Il volume del prisma é metà del volume del parallelepipedo di lati $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P_4}$. Poichè

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = (0, 3, 1)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} V &= \left|\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \left(\overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left|\left((0, 1, -1), \left(4 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}}\right)\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{8}{\sqrt{3}}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Analogamente

$$V = \left|\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{8}{\sqrt{3}}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

□

Esercizio 1.20 (12.22)**.** *Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni:*

$$\pi_1 :\ 2x - y = 1, \qquad \pi_2 :\ x + y + z = 0, \qquad \pi_3 :\ x - 2z = 1.$$

a) *Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.*
b) *Si trovi il piano π_4 passante per l'origine e perpendicolare alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*
c) *Si determini l'area del triangolo di vertici A, B, C, con $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$.*

Soluzione:

a) Mettiamo a sistema i tre piani:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ x + 2x - 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \\ z = -\frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = A = \left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right).$$

b) Calcoliamo la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 1 - 3x \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

La retta ha direzione $(1, 2, -3)$, quindi un piano ortogonale a r ha equazione del tipo $x+2y-3z = d$. Imponendo il pasaggio per l'origine otteniamo $d = 0$. Infine il piano cercato è

$$\pi_4 :\ x + 2y - 3z = 0$$

c) Abbiamo già trovato A nel punto a). Analogamente mettendo a sistema gli altri piani otteniamo:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = -\frac{5}{7} \\ z = -\frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = B = \left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = C = \left(\frac{5}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right).$$

Di conseguenza

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right), \qquad \overrightarrow{BC} = \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right). \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{7}, 0, -\frac{2}{7}\right)$$

Infine

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}|\left(-\frac{1}{7}, 0, -\frac{2}{7}\right)| = \frac{1}{14}\sqrt{5}$$

□

Esercizio 1.21. *Nello spazio si considerino la due rette di equazioni:*

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2t + 3 \end{cases} \qquad s: \ x + y = 2x - z = 0$$

a) *Mostrare che le due rette sono parallele.*
b) *Determinare la distanza tra le due rette.*

Soluzione:
L'equazione parametrica di s è:

$$s: \begin{cases} x = h \\ y = -h \\ z = 2h \end{cases}$$

Il vettore direzione di r ed s è $(1, -1, 2)$, inoltre s passa per l'origine mentre r non ci passa, quindi le due rette sono parallele e non coincidenti. Per determinare la distanza tra le due rette basta, ad esempio, trovare il piano π ortogonale alle due rette e passante per l'origine e poi trovare in punto A d'intersezione di tale piano con r ed infine la distanza tra l'origine ed A. Il piano è $\pi : x - y + 2z = 0$.

$$A = r \cap \pi : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2t + 3 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2t + 3 \\ 1 + t + t + 4t + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{6} \\ y = \frac{7}{6} \\ z = \frac{4}{6} \\ t = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

Quindi $d(r, s) = d(A, O) = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{49}{36} + \frac{16}{36}} = \frac{\sqrt{66}}{6}$

□

Esercizio 1.22. *Nello spazio si considerino la due rette di equazioni:*

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} \qquad s: \ x + y - 1 = x - y + z = 0$$

a) *Mostrare che le due rette sono sghembe.*
b) *Determinare un'equazione del piano contenente la retta r e parallelo alla retta s.*
c) *Determinare la distanza tra le due rette.*
d) *Determinare un'equazione del piano parallelo alle due rette ed equidistante da esse.*

Soluzione:

a) Due rette del piano sono sghembe se non sono parallele e non si intersecano. L'equazione parametrica di s è:

$$s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Quindi r ha direzione $(1, -1, 0)$ mentre s ha direzione $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ e le due rette non sono parallele. Inoltre se calcoliamo $r \cap s$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ x + y - 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ 1 + t + 1 - t - 1 = 0 \\ 1 + t - 1 + t + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ 1 = 0 \\ 3 + 2t = 0 \end{cases}$$

il sistema non ammette soluzione, quindi le due rette non si intersecano.

Di conseguenza r e s sono sghembe.

b) Sia π il piano cercato. Poiché π contiene r, deve essere parallelo a r e passare per un punto di r. Sia $A = (1, 1, 3)$ il punto di r, imponendo inoltre le condizioni di parallelismo alle due rette, otteniamo:

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 1 - t + s \\ z = 3 + 2s \end{cases} \Rightarrow x + y = 2$$

Un altro modo di procedere per rispondere alla domanda è il seguente.

Il fascio di piano contenente r è $\lambda(x + y - 2) + \mu(z - 3) = 0$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$. Svolgendo i calcoli di ha: $\lambda x + \lambda y - 2\lambda + \mu z - 3\lambda = 0$.

Quindi il piano cercato ha vettore normale $\vec{\nu} = (\lambda, \lambda, \mu)$ e deve essere ortogonale al vettore $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, ovvero $\vec{\nu} \cdot \vec{v} = 0$. Quindi $-\lambda + \lambda + 2\mu = 0$ per $\mu = 0$, da cui si ottiene che il piano cercato ha equazione $\pi : x + y - 2 = 0$

c) Utilizzando il punto precedente essendo $d(r, s) = d(P, \pi)$ per ogni $P \in s$ e scelto $P = (1, 0, 3)$ si ha $d(P, \pi) = \dfrac{|\ 1 + 0 - 2\ |}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

In alternativa, si puó costruire il segmento generico $\overrightarrow{PQ}$ tra le due rette, dove $P \in r$ e $Q \in s$, ed imporre che sia ortogonale sia al vettore direzione $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ sia al vettore direzione $(1, -1, 0)$. Si ottiene cosí il seguente sistema:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot (-1, 1, 2) = (-s - t, s + t - 1, 2s - 4) \cdot (-1, 1, 2) = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot (1, -1, 0) = (-s - t, s + t - 1, 2s - 4) \cdot (1, -1, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t + 6s - 9 = 0 \\ -2t - 2s + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ t = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Si conclude quindi che Il segmento che realizza la distanza fra r ed s ha lunghezza

$$\left\| \left(2 + \frac{3}{2}, 2 - \frac{3}{2} - 1, 0\right) \right\| = \left\| \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) Si può procedere in più modi. Forse il più semplice è calcolare il piano π' passante per s e parallelo a r in maniera analoga al punto precedente. Sia $B = (1, 0, -1)$ il punto di s:

$$\pi': \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = -t + s \\ z = -1 + 2s \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$$

Il piano cercato è parallelo a π e π', quindi ha una equazione del tipo $x + y = d$. Inoltre essendo equidistante da r e da s è anche equidistante da π e π', ovvero il valore di d è dato dalla media degli analoghi valori di π e π':

$$d = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Infine il piano cercato è

$$x + y = \frac{3}{2}$$

□