CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 6– GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2024/25

Esercizio 6.1 (7.42). *Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori*

$$v_1 = (k, 0, 0, 1), \ v_2 = (2, 0, 0, 0), \ v_3 = (2, 0, k, 0) \quad (k \text{ parametro reale}).$$

a) *Trovare una base di V al variare del parametro k.*
b) *Posto $k = 0$, completare la base trovata al punto precedente ad una base di $\mathbb{R}^4$.*
c) *Stabilire per quali valori di k il vettore $w = (-3, 0, -1, 1)$ appartiene a V.*

Esercizio 6.2 (7.45). *Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 3)$, $w_1 = (2, 3, -1)$, $w_2 = (1, 2, 2)$, $w_3 = (1, 1, -3)$.*

a) *Si calcoli la dimensione dei sottospazi $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$.*
b) *Si trovi una base del sottospazio intersezione $V \cap W$.*

Esercizio 6.3 (7.75). *Si considerino i polinomi a coefficienti reali*

$$p_1 = x^2 + x, \qquad p_2 = kx^2 - 1, \qquad p_3 = x^2 + 2x + k.$$

a) *Stabilire per quali valori di k i tre polinomi formano una base dello spazio $\mathbb{R}_2[x]$.*
b) *Per i valori di k per cui i polinomi sono dipendenti, trovare uno o più polinomi che completano l'insieme $\{p_1, p_2, p_3\}$ ad una base di $\mathbb{R}_2[x]$.*

Esercizio 6.4 (7.78). *Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[x]$ dei polinomi reali di grado non superiore a due, si considerino gli elementi*

$$p_1 = x - 1, \quad p_2 = x + 1, \quad p_3 = x^2 - x.$$

a) *Si mostri che l'insieme $\mathcal{B} = \{p_1, \ p_2, \ p_3\}$ è una base di V.*
b) *Si trovino le coordinate del polinomio costante 1 nella base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 6.5 (7.79). *Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x, di grado minore o uguale a 3.*

a) *Si mostri che $U = \{f(x) \in V \mid f(1) = f(2) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V e se ne trovi una base.*
b) *Si completi la base trovata al punto precedente ad una base di V.*

Esercizio 6.6 (7.83). *Sia W il sottoinsieme dello spazio di polinomi $\mathbb{R}_3[x]$ definito da*

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p'''(x) = 0, \ p(1) = 0\}$$

(p''' è la derivata terza di p)

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_2[x]$.*
b) *Trovare una base e la dimensione di W.*
c) *Determinare le coordinate del polinomio $p(x) = 2x^2 - x - 1 \in W$ rispetto alla base trovata al punto* b).

Esercizio 6.7 (7.99). *Sia W il seguente sottoinsieme dello spazio delle matrici 3×3:*

$$W = \left\{ A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \mid A = A^T, \ tr(A) = 0 \right\}$$

a) *Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbb{R})$.*
b) *Trovare una base di W.*
c) *Calcolare le coordinate di $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in W$ rispetto alla base trovata al punto* b).