

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

FOGLIO DI ESERCIZI 1- GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE 2024/25

Esercizio 1.1. [2.1] Determinare la forma parametrica e cartesiana della retta del piano

- (a) Passante per i punti $A(1, 2)$ e $B(-1, 3)$.
- (b) Passante per il punto $C(2, 3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OP} = (-1, 2)$.
- (c) Di equazione cartesiana $y = 2x + 5$. Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Esercizio 1.2. [2.2] Determinare la forma parametrica e cartesiana della retta dello spazio

- (a) Passante per i punti $A(1, 0, 2)$ e $B(3, -1, 0)$.
- (b) Passante per il punto $P(1, 3, 1)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OQ} = (2, 0, 0)$.
- (c) Di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Esercizio 1.3. [2.3]

- a) Determinare la forma parametrica e cartesiana del piano π passante per i punti $A(1, 3, 1)$, $B(2, 0, 0)$ e $C(0, 1, 1)$. Il punto $P(0, 2, 0)$ appartiene a tale piano?
- b) Determinare una equazione della retta passante per A ortogonale a π .

Esercizio 1.4. [2.4] Sia r la retta di \mathbb{R}^3 passante per i punti $A(1, -1, 2)$ e $B(-2, 0, 1)$, e sia s la retta contenente $C(1, 3, -3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OD}(2, -2, 3)$.

- a) Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).
- b) Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.

Esercizio 1.5. [2.7]

- a) Determinare equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A = (2, 3, 1)$ e $B = (0, 0, 1)$ e della retta s passante per i punti $C = (0, 0, 0)$ e $D = (4, 6, 0)$.
- b) Stabilire se r e s sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente r e s .

Esercizio 1.6. [2.9] Si considerino le rette di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $P(1, 1, 1)$ e incidente r e s .
- b) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $C = (1, 2, -3)$ e perpendicolare a r .
- c) Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare alle due rette r e s .

Esercizio 1.7. [2.10] Sia r la retta nello spazio passante per i punti $A = (0, 0, 1)$ e $B = (-2, -1, 0)$. Sia s la retta passante per i punti $C = (1, 1, 1)$ e $D = (-1, 0, 0)$.

- a) Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano π che le contiene.
- b) Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano π del punto a).

Esercizio 1.8. [2.13] Si considerino i piani dello spazio

$$\pi : x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad \pi' : 8x + y - z = 0.$$

- a) Stabilire la posizione reciproca dei due piani.
- b) Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare ai piani π e π' .

Esercizio 1.9. [2.18] Si considerino i piani π_1, π_2, π_3 di equazioni

$$\begin{aligned}\pi_1 &: z - 3 = 0 \\ \pi_2 &: x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: 3x + 3y - z + 9 = 0\end{aligned}$$

e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

- Si stabilisca se il piano π_3 contiene r .
- Si trovi un'equazione cartesiana del piano π_4 passante per l'origine e contenente r .
- Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1 .

Esercizio 1.10. [12.9] Si determini la distanza del punto $P(3, 1, 2)$ dalla retta r di equazione parametrica

$$r: \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

Esercizio 1.11. [12.10] Si determini la distanza del punto $P(-1, 0, 2)$ dal piano π di equazione $\pi: x - 2y + 3z = -9$.

Esercizio 1.12 (2.5).

- Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad r': \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s + 2 \end{cases}$$

- Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.

Esercizio 1.13 (APPELLO 5 settembre 2018). Sia P il punto di coordinate $P = (2, 1, 3)$ e sia r la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

- Si trovi la distanza di P da r .
- Si trovino le equazioni cartesiane dei piani ortogonali a r la cui distanza da P è $\sqrt{3}$.

Esercizio 1.14 (2.21). Nel piano, si considerino le rette r_1, r_2, r_3 di equazioni

$$r_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \quad r_2: x - 2y + 1 = 0, \quad r_3: 2x + y - 2 = 0.$$

- Si trovi un'equazione cartesiana della retta r parallela a r_1 e passante per il punto $A = r_2 \cap r_3$.
- Si trovi un'equazione cartesiana della retta s perpendicolare a r_1 e passante per A .
- Si calcoli l'angolo tra le rette r_1 e r_2 e tra le rette r_2 e r_3 .

Esercizio 1.15 (2.27). Siano assegnati il punto $A = (1, 2, 1)$ il piano π e la retta s di equazioni

$$\pi: x + z = 4, \quad s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

- Si determini il punto B , proiezione ortogonale di A su π e la retta r passante per A e per B .
- Indicato con C il punto di intersezione tra s e r e con D il punto di intersezione tra s e π , si determini un'equazione della retta CD .
- Si determini l'angolo tra r e la retta CD .

Esercizio 1.16 (12.16). Determinare per quali valori di k il triangolo di vertici $A_1(0, 0)$, $A_2(4, 2)$ e $A_3(1, k)$ ha area 5.

Esercizio 1.17 (v. 12.23). Siano $A = (0, -1, 0)$, $B = (-2, 0, -3)$, $C = (-1, 0, -1)$ punti dello spazio.

- Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C .

b) Stabilire se il punto $D = (2, 2, 2)$ appartiene al piano contenente A, B, C .

Esercizio 1.18 (12.19). Calcolare il volume del parallelepipedo di lati $u(1, 0, 0)$, $v(-3, 1, 1)$ e $w(-2, 2, 5)$.

Esercizio 1.19 (12.20). Siano $P_1 = (1, -1, 0)$, $P_2 = (1, 0, -1)$, $P_3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, e $P_4 = (1, 2, 1)$ quattro punti nello spazio.

- Calcolare l'angolo tra i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$.
- Calcolare il volume del prisma con base il triangolo $P_1P_2P_3$ e lato il segmento P_1P_4 .

Esercizio 1.20 (12.22). Si considerino i piani π_1 , π_2 , π_3 di equazioni:

$$\pi_1 : 2x - y = 1, \quad \pi_2 : x + y + z = 0, \quad \pi_3 : x - 2z = 1.$$

- Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.
- Si trovi il piano π_4 passante per l'origine e perpendicolare alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
- Si determini l'area del triangolo di vertici A, B, C , con $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$.

Esercizio 1.21. Nello spazio si considerino la due rette di equazioni:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2t + 3 \end{cases} \quad s : x + y = 2x - z = 0$$

- Mostrare che le due rette sono parallele.
- Determinare la distanza fra le due rette.

Esercizio 1.22. Nello spazio si considerino la due rette di equazioni:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} \quad s : x + y - 1 = x - y + z = 0$$

- Mostrare che le due rette sono sghembe.
- Determinare un'equazione del piano contenente la retta r e parallelo alla retta s .
- Determinare la distanza tra le due rette.
- Determinare un'equazione del piano parallelo alle due rette ed equidistante da esse.