

Note per il corso di *Geometria e algebra lineare* 2024-25 LT in Informatica

1 Vettori geometrici

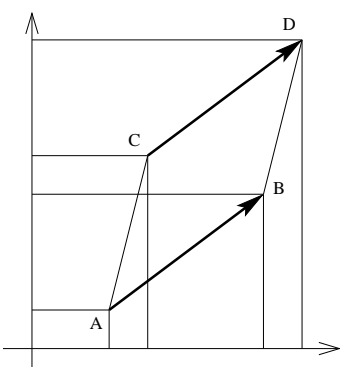
1.1

I prodotti cartesiani $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, costituiti dalle coppie e terne ordinate di numeri reali, vengono utilizzati in geometria analitica per rappresentare i punti del piano e dello spazio, mediante l'introduzione di un sistema di coordinate cartesiane. In \mathbb{R}^2 e in \mathbb{R}^3 si possono introdurre due operazioni, la *somma* e la *moltiplicazione per scalare* (cioè per un numero reale k), definite componente per componente:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \quad k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2).$$

Similmente per le terne $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.

Definizione 1. Per ogni coppia $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ di punti del piano, il *vettore geometrico* \overrightarrow{AB} è l'elemento di \mathbb{R}^2 avente le componenti $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. Analogamente per una coppia di punti dello spazio: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \in \mathbb{R}^3$.



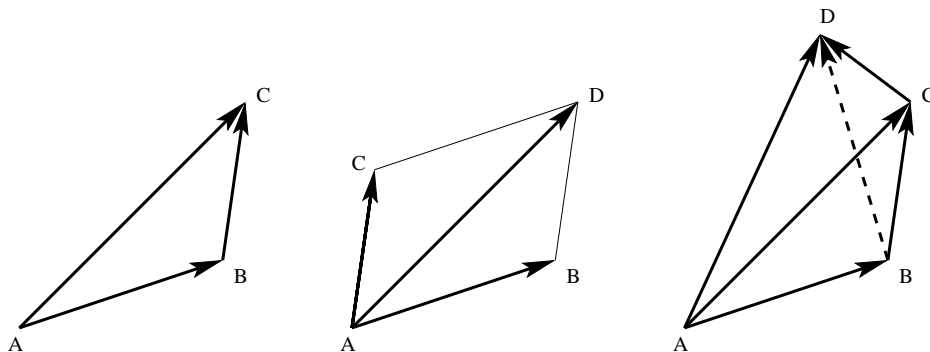
Due vettori geometrici \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} coincidono se e solo se $A = C$ e $B = D$ oppure $A \neq C$, $B \neq D$ e i segmenti AB e CD hanno la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza.

Nell'insieme dei vettori geometrici è possibile definire due operazioni. La *somma* di due vettori geometrici \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} del piano è il vettore geometrico

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (x_B - x_A + x_D - x_C, y_B - y_A + y_D - y_C)$$

Similmente per i vettori dello spazio. Per ogni scelta dei punti A, B, C , vale sempre $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Nel caso in cui i due vettori geometrici vengano rappresentati da segmenti con uguale punto iniziale A (*vettori applicati in A*), l'operazione di somma corrisponde alla "regola del parallelogramma": $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, con $ABDC$ parallelogramma.



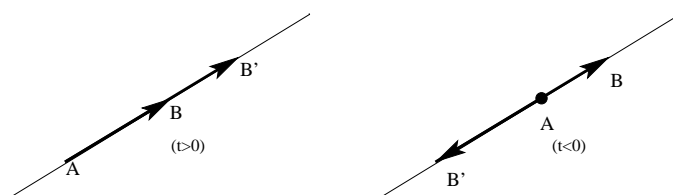
La somma di vettori geometrici ha alcune proprietà fondamentali:

- è *associativa*: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$ per ogni A, B, C, D .

- esiste un *elemento neutro*: il *vettore nullo* $\vec{O} = \vec{AA}$ (qualunque sia il punto A) ha la proprietà: $\vec{AB} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{AB} = \vec{AB}$ per ogni A, B .
- per ogni A, B , esiste il *vettore opposto* di \vec{AB} , il vettore $-\vec{AB} = \vec{BA}$, tale che $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{O}$
- è *commutativa*: $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{CD} + \vec{AB}$ per ogni A, B, C, D .

Come vedremo, questo significa che l'insieme V^2 dei vettori geometrici del piano è un *gruppo commutativo* rispetto alla somma di vettori. Vale lo stesso risultato per l'insieme V^3 dei vettori geometrici dello spazio.

Il *prodotto del numero reale t per il vettore geometrico \vec{AB}* del piano è il vettore geometrico $t\vec{AB}$ avente le componenti $(tx_B - tx_A, ty_B - ty_A)$. Analogamente per i vettori geometrici dello spazio.



Il prodotto $t\vec{AB}$ ha la seguente interpretazione geometrica: $t\vec{AB}$ è il vettore $\vec{AB'}$ con punto finale B' sulla semiretta AB se $t > 0$, sulla semiretta opposta uscente da A se $t < 0$, e tale che il segmento AB' abbia lunghezza $|t|$ volte la lunghezza di AB . Ad esempio, $(-1)\vec{AB} = -\vec{AB}$. Se $t = 0$ oppure $\vec{AB} = \vec{O}$, poniamo $t\vec{AB} = \vec{O}$. In particolare, $t\vec{AB} = \vec{AB'}$ se e solo se i punti A, B, B' sono allineati.

I vettori geometrici consentono di rappresentare in forma parametrica le rette nel piano e le rette e i piani nello spazio.

1.2 Rette

Dati due punti distinti P_1, P_2 di una retta r nel piano, ogni altro punto P della retta r verifica la condizione $\vec{P_1P} = t\vec{P_1P_2}$, con $t \in \mathbb{R}$. Posto $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, le coordinate (x, y) di P soddisfano quindi le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

Eliminando t dalle equazioni parametriche, si ottiene un'*equazione cartesiana* della retta, della forma

$$ax + by = c.$$

Similmente, le coordinate (x, y, z) di un punto P sulla retta nello spazio passante per $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, soddisfano le equazioni:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

L'eliminazione del parametro t in questo caso porta a *due* equazioni lineari in x, y, z , della forma $ax + by + cz = d$: la retta è intersezione di due piani non paralleli (*non* univocamente determinati).

Esempio. La retta per $P_1 = (1, 3, 1)$ e $P_2 = (2, 0, 0)$ ha *vettore direzione* $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -3, -1)$ ed equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Eliminando $t = x - 1$, si ottiene $y = 3 - 3(x - 1)$, $z = 1 - (x - 1)$. La retta è intersezione dei piani di equazione

$$3x + y = 6 \quad \text{e} \quad x + z = 2.$$

1.3 Piani

Sia π il piano passante per tre punti non allineati P_1, P_2, P_3 nello spazio. Un punto P appartiene a π se e solo se esistono numeri reali s, t tali che $\overrightarrow{P_1P} = s \overrightarrow{P_1P_2} + t \overrightarrow{P_1P_3}$ (in tal caso, si dice che il vettore $\overrightarrow{P_1P}$ è *combinazione lineare* dei vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$). Infatti, P sta sul piano se e solo se è quarto vertice di un parallelogramma con vertice in P_1 e lati paralleli ai segmenti P_1P_2 e P_1P_3 .

Dunque le coordinate (x, y, z) di P soddisfano le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_1 + s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1) \end{cases}$$

dove $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$.

Esempio. Determiniamo le equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $P_1 = (1, 3, 1)$, $P_2 = (2, 0, 0)$ e $P_3 = (0, 1, 1)$.

Essendo $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -3, -1)$ e $\overrightarrow{P_1P_3} = (-1, -2, 0)$, otteniamo

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = 3 - 3s - 2t \\ z = 1 - s \end{cases} \quad (s, t, \in \mathbb{R})$$

Per ottenere l'equazione cartesiana basta eliminare s e t :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 1 + (1 - z) - t \\ y = 3 - 3(1 - z) - 2t \\ s = 1 - z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} t = -x - z + 2 \\ y = 3z - 2(-x - z + 2) \\ s = 1 - z \end{cases} \\ &\Rightarrow 2x - y + 5z - 4 = 0. \end{aligned}$$

1.4 Lunghezza e prodotto scalare

Definizione 2. La *lunghezza* di un vettore geometrico $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ è la lunghezza di un qualunque segmento che rappresenta \vec{v} : se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, la lunghezza di \vec{v} è

$$|\vec{v}| = |AB|.$$

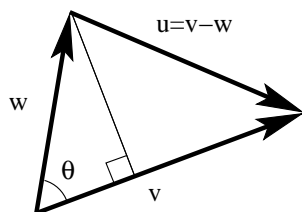
Per il Teorema di Pitagora, se il riferimento cartesiano fissato nel piano o nello spazio è *ortogonale* (assi a due a due perpendicolari), vale la formula

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \text{ nel piano e } |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \text{ nello spazio,}$$

dove $v_1, v_2, (e\ v_3)$ sono le componenti di \vec{v} .

Dati due vettori non nulli $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, diamo una formula per il coseno dell'angolo convesso θ formato dai due vettori (compreso tra 0 e π radianti). Sia $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$. Nel caso dei vettori dello spazio (per il piano la formula è analoga) si ha

$$|\vec{u}|^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3).$$



D'altra parte, è anche

$$|\vec{u}|^2 = (|\vec{w}| \sin \theta)^2 + (|\vec{v}| - |\vec{w}| \cos \theta)^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}| \cos \theta$$

e quindi si ha l'uguaglianza

$$v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 = |\vec{v}||\vec{w}| \cos \theta,$$

da cui la formula

$$\cos \theta = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{|\vec{v}||\vec{w}|}.$$

L'espressione a numeratore è il *prodotto scalare* di \vec{v} e \vec{w} :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3,$$

che si annulla quando i due vettori sono ortogonali ($\theta = \pi/2$). La stessa formula definisce il prodotto scalare se (almeno) uno dei due vettori è il vettore nullo. In tal caso $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, il prodotto scalare è *lineare* rispetto ad entrambi gli argomenti (si dice che è *bilineare*):

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \text{e} \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$k(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (k\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (k\vec{w}) \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

Si può anche esprimere la lunghezza di un vettore \vec{v} mediante il prodotto scalare:

$$|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Osservazione. La formula dell'angolo permette di dare un significato geometrico ai coefficienti a, b dell'equazione cartesiana $ax + by = c$ di una retta r nel piano. Siano P_1 e P_2 punti di r . Si ha

$$ax_1 + by_1 = c \quad \text{e} \quad ax_2 + by_2 = c,$$

da cui, sottraendo, $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$.

Quindi il prodotto scalare tra il vettore $\vec{n} = (a, b)$ e il vettore direzione $\overrightarrow{P_1P_2}$ è nullo. Dunque \vec{n} è un vettore ortogonale (o *normale*) alla retta r .

Analogamente, un piano di equazione cartesiana

$$ax + by + cz = d$$

ha *vettore normale* $\vec{n} = (a, b, c)$ o un qualunque suo multiplo non nullo.

Esercizio. Determinare equazioni della retta passante per l'origine e perpendicolare al piano di equazione cartesiana $2x - 3y + z = 2$.

Un vettore direzione della retta richiesta è $\vec{n} = (2, -3, 1)$. Dunque la retta ha equazioni parametriche

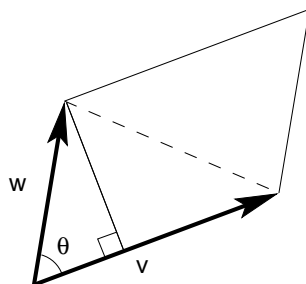
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$$

1.5 Aree, volumi e prodotto vettoriale

Siano $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2)$ due vettori del piano. Il parallelogramma di lati \vec{v} e \vec{w} ha area A il cui quadrato è uguale a

$$\begin{aligned} A^2 &= |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 \sin^2 \theta = |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 \\ &= (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2)^2 = (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 \end{aligned}$$

Dunque $A = |v_1 w_2 - v_2 w_1|$.



Nello spazio vale ancora la formula per l'area del parallelogramma definito dai vettori $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$:

$$\begin{aligned} A^2 &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3)^2 \\ &= (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 + (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2. \end{aligned}$$

Si ha $A = |\vec{v} \times \vec{w}|$, dove

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

è il *prodotto vettoriale* di \vec{v} e \vec{w} .

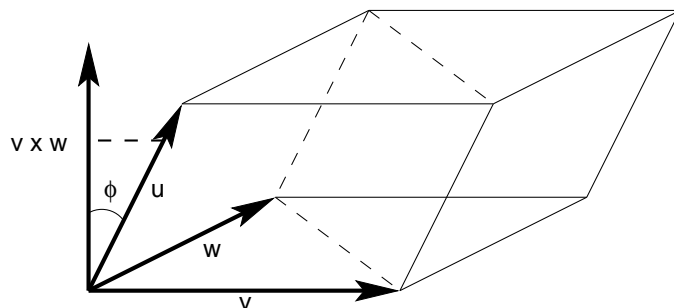
Proprietà del prodotto vettoriale

1. $|\vec{v} \times \vec{w}| = A$ area del parallelogramma di lati \vec{v} e \vec{w} .
2. $\vec{w} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{w}$.
3. $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ se e solo se \vec{v} e \vec{w} sono vettori proporzionali (infatti $A = 0 \Leftrightarrow$ l'angolo tra \vec{v} e \vec{w} è nullo o piatto oppure uno dei due vettori è nullo).
4. $\vec{v} \times \vec{w}$ è ortogonale a \vec{v} e a \vec{w} .
(il prodotto scalare $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ si annulla...)

5. Il verso del prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ è determinato dalla *regola della mano destra* (o della *vite destrorsa*).
6. Il valore assoluto del *prodotto misto* $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ di tre vettori dello spazio è uguale al volume V del parallelepipedo di lati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Infatti

$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{v} \times \vec{w}| (|\vec{u}| |\cos \phi|) = A \cdot h = V$$

dove ϕ è l'angolo tra \vec{u} e $\vec{v} \times \vec{w}$, A è l'area della base definita dai vettori \vec{v} e \vec{w} e $h = |\vec{u}| |\cos \phi|$ è l'altezza corrispondente.



Esercizio. Il tetraedro con lati definiti dai vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ha volume $\frac{1}{6} |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ (infatti è una piramide con base di area $A/2$ (A area del parallelogramma definito da \vec{v} e \vec{w})).

Il tetraedro *regolare* di lato 1 ha volume $\frac{\sqrt{2}}{12}$. Per calcolarlo, possiamo considerare il tetraedro T di vertici $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 0, 1)$, $D = (0, 1, 1)$, i cui lati sono quattro diagonali di facce di un cubo di lato 1. T è un tetraedro regolare di lato $\sqrt{2}$, con volume $1/3$, come si ottiene dalla formula precedente ponendo

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0), \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (1, 0, 1), \quad \vec{w} = \overrightarrow{AD} = (0, 1, 1).$$

Osservando che se il lato varia di un fattore a il volume varia di un fattore a^3 , si ottiene il volume $\frac{1}{3} \frac{1}{(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$ del tetraedro regolare di lato 1.