Minnesanteckningar

Logik för dataloger DD1351

1, Introduktion

Vad är logik?

Vetenskapen som studerar hur man bör resonera och dra slutsatser utifrån givna påståenden

---

Deduktion

I all deduktion gäller:
Om premisserna är sanna så är slutsatsen sann.

Logiska system vi kommer att studera

• Satslogik
– studerar påståenden och relationer mellan dessa

• Predikatlogik
– utökar språket med kvantifierare som tillåter oss att resonera kring relationer mellan objekt

• Prolog
– ett programmeringsspråk för att hantera logik

• Temporallogik
– tillåter resonemang om situationer och system kan
utvecklas över tid

• Hoare-logik
– resonemang om program och deras korrekthet

---

2. Satslogik och Naturlig deduktion

Konnektiv	Namn
$\wedge$	Konjunktion
$\vee$	Disjunktion
$\neg$	Negation
$\longrightarrow$	Implikation

The basic rules of natural deduction:

	introduction	*elimination*
$\wedge$	$\dfrac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\ {\wedge}\mathrm{i}$	$\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ {\wedge}\mathrm{e}_1$ $\quad \dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ {\wedge}\mathrm{e}_2$
$\vee$	$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\ {\vee}\mathrm{i}_1$ $\quad \dfrac{\psi}{\phi \vee \psi}\ {\vee}\mathrm{i}_2$	$\dfrac{\phi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ {\vee}\mathrm{e}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\phi \rightarrow \psi}\ {\rightarrow}\mathrm{i}$	$\dfrac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}\ {\rightarrow}\mathrm{e}$
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ {\neg}\mathrm{i}$	$\dfrac{\phi \quad \neg\phi}{\bot}\ {\neg}\mathrm{e}$
$\bot$	(no introduction rule for $\bot$)	$\dfrac{\bot}{\phi}\ {\bot}\mathrm{e}$
$\neg\neg$		$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\ {\neg\neg}\mathrm{e}$

Some useful derived rules:

$$\dfrac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\ \mathrm{MT} \qquad \dfrac{\phi}{\neg\neg\phi}\ {\neg\neg}\mathrm{i}$$

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\phi}\ \mathrm{PBC} \qquad \dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\ \mathrm{LEM}$$

Bevisbarhet

Om vi kan bevisa ψ utifrån premisserna ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_n så skriver vi detta som:

$$\boldsymbol{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi}$$

Uttrycket ovan kallas en **sekvent**.

---

3. Predikatlogik

Satslogiken är dålig på att uttrycka egenskaper och relationer hos objekt.

Predikatlogik utökar det satslogiska språket med:

– variabler
– konstanter
– funktionssymboler
– relationssymboler
– kvantifierare

I första ordningens predikatlogik används två kvantifikatorer:

- Allkvantifikatorn: $\forall x\ P(x)$ - *för alla x är P(x) sant*
- Existenskvantifikatorn: $\exists x\ P(x)$ - *för minst ett x är P(x) sant*, d.v.s. *för något x är P(x) sant*

Negeringen av dessa ger ytterligare två kvantifikatoruttryck

- $\neg\forall x\ P(x)$ - *för inte alla x är P(x) sant*
- $\neg\exists x\ P(x)$ - *för inget x är P(x) sant*

Substitution

För en variabel x, en term t och en formel ϕ, betecknar $\phi\ [t\ /\ x]$ formeln som är resultatet av substitutionen av alla fria förekomster av x i ϕ med t

Exempel:

$\exists y\ (P(x,y) \wedge \exists x\ Q(x,y))$

$[x+1/x]$

$\exists y\ (P(x+1,y) \wedge \exists x\ Q(x,y))$

Variabelinfångande

• Problem: $\phi(x) \equiv \exists y\ (x < y)$

–vad är då $\phi(y)$? $\exists y(x<y)[y/x]$?

men $\exists y\ (y < y)$ har *inte* samma mening!

– **Variabelinfångande**

– när vi gör en substitution måste vi **undvika variabelinfångande!**

• Substitutionen $\phi[t\,/\,x]$ **undviker infångande** om ***t* är fri för *x*** *i* ϕ

Termen t är fri för variabeln x i formeln ϕ om ingen fri förekomst av x i ϕ är inom räckvidden för någon kvantifierare $\forall$y eller $\exists$y för någon variabel y i t.

4 – 7. Prolog

8. Satslogikens semantik

Naturlig deduktion – system av regler för att generera nya påståenden (slutsatser) utifrån givna påståenden (premisser) med symbolisk manipulation.

Man kan nu fråga sig:
• är alla regler korrekta (och vad betyder ”korrekta”)?
• har vi tillräckligt många regler?

Satslogikens semantik

Fråga: När är formeln $p \land \neg q \rightarrow r$ sann?

Svar: Det beror på variablernas **sanningsvärden**. Vilka påståenden variablerna representerar är inte relevant.

Formeln ovan är till exempel falsk om p är sann medan q och r är falska.

Modeller

En **modell** till en formel är en tolkning av symbolerna i formeln så att formeln blir sann eller falsk

– I satslogik är modell = valuering

Logisk konsekvens

Formeln ψ är en **logisk konsekvens** av $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ om ψ är sann i alla modeller i vilka $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ är sanna.

Detta skrivs

$$\left|\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \models \psi\right|$$

Sundhet

Ponera att vi kan bevisa ψ utifrån premisserna $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$
Är det då också så att ψ är en logisk konsekvens av , $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$?

Dvs är det sant att $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$ **medför** $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$?

Denna (önskvärda) egenskap kallas **sundhet**.

... och svaret är **ja**, naturlig deduktion är sund för satslogik.

Sundhet, följder

En följd av satslogikens sundhet är:
Om ψ **inte** är en logisk konsekvens av $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$

så **finns det heller inget bevis** för ψ utifrån premisserna $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$.

Dvs vi kan använda metoden med sanningstabeller för att en viss sekvent **inte** är bevisbar.

Fullständighet

Antag att ψ är en logisk konsekvens av $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$.
Är det då också så att vi kan bevisa ψ utifrån premisserna

$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$.? Dvs är det sant att

$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \models \psi$ **medför att** $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$? Denna (önskvärda) egenskap kallas **fullständighet**.

... och svaret är **ja**, naturlig deduktion är fullständig för satslogik.

Validitet och satisfierbarhet

En formel är **valid** om den är sann i alla modeller.

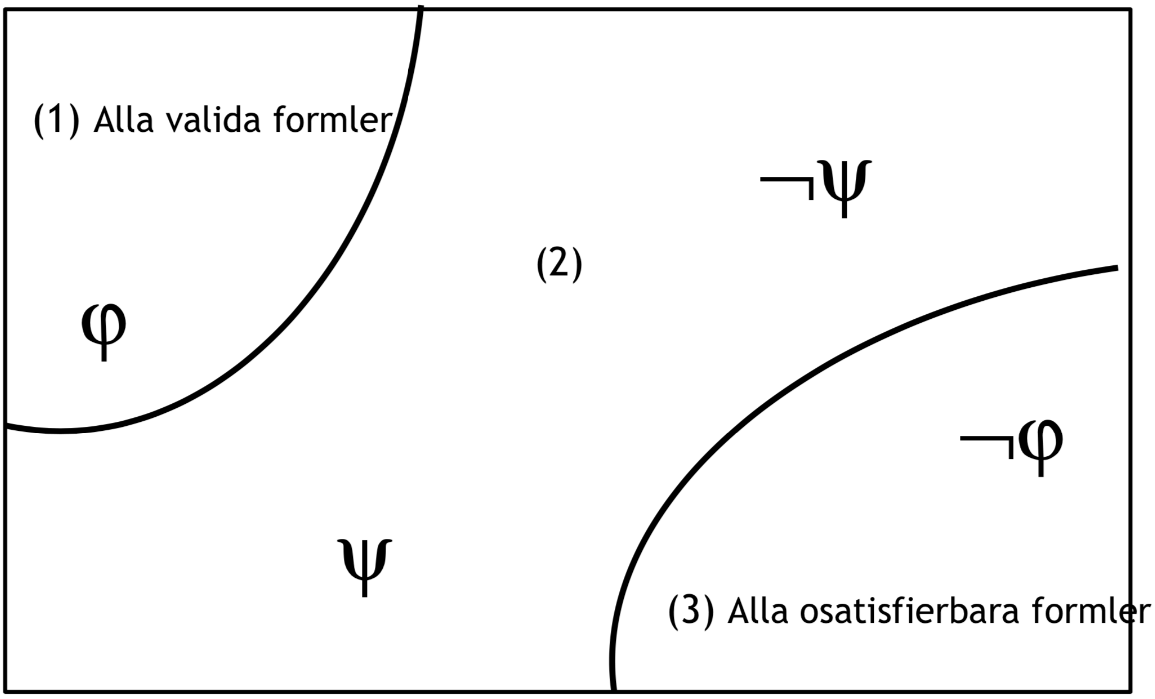
- Enklaste exemplet: $p \vee \neg p$

En formel är **satisfierbar** om den är sann i någon modell.

- Enklaste exemplet: p

En formel är **osatisfierbar** om den är falsk i alla modeller.

- Enklaste exemplet: $p \wedge \neg p$



(1) + (2) + (3) = Alla satslogiska formler som finns
(1) + (2) = Alla satisfierbara formler
Om φ är valid så är ¬φ osatisfierbar
Om ψ är varken valid eller osatisfierbar, så gäller samma sak även för ¬ψ

9. Naturlig deduktion för predikatlogik

Vi utökar naturlig deduktion till att även gälla för predikatlogik.

Bevisregler:

• alla regler från satslogiken, plus

• introduktions- och elimineringsregler för

– likhet
– all-kvantifiering $\forall x$
– existens-kvantifiering $\exists x$

Regler:

$\boldsymbol{\forall x}$ introduktion

$\boldsymbol{\forall x}$ eliminering

$\boldsymbol{\exists x}$ introduktion

$\boldsymbol{\exists x}$ eliminering

	introduction	*elimination*
$=$	$\dfrac{}{t = t}\;{=}i$	$\dfrac{t_1 = t_2 \qquad \Phi[t_1/x]}{\Phi[t_2/x]}\;{=}e$
$\forall$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c} x_0\colon \\ \vdots \\ \Phi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x\,\Phi}\;\forall x\,i$	$\dfrac{\forall x\,\Phi}{\Phi[t/x]}\;\forall x\,e$
$\exists$	$\dfrac{\Phi[t/x]}{\exists x\,\Phi}\;\exists x\,i$	$\dfrac{\exists x\,\Phi \qquad \boxed{\begin{array}{c} x_0\colon\ \Phi[x_0/x] \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi}\;\exists x\,e$

10. Predikatlogikens semantik

Vi har utökat **naturlig deduktion** till att även gälla predikatlogik (fö 9).

Vi vill nu definiera en semantik (modellteori) till predikatlogiken.

Modeller

En formel kan vara **sann i en modell och falsk i en annan**.

En **modell** till en predikatlogisk formel Φ specificerar:

- en mängd A (universum, alla objekt vi talar om)
- ett element i A för varje konstant i Φ
- en funktion $f : A^n \rightarrow A$ för varje funktionssymbol (med n argument) i Φ
- en n-ställig relation över A för varje predikatsymbol (med n argument) i Φ

Precis som för satslogik kan man visa:

Naturlig deduktion är ett **sunt** och **fullständigt** bevissystem för predikatlogik

Sundhet, följder

Predikatlogikens sundhet har några intressanta följder: Om ψ **inte** är en logisk konsekvens av $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ så **finns det heller inget bevis** för ψ utifrån premisserna $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$.

Dvs om vi kan hitta ett enda sätt att tolka symbolerna i formlerna så att $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ blir sanna, men ψ falsk, så kan vi **inte bevisa** $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \psi$.

Validitet och satisfierbarhet

En formel är **valid** om den är sann i alla modeller.

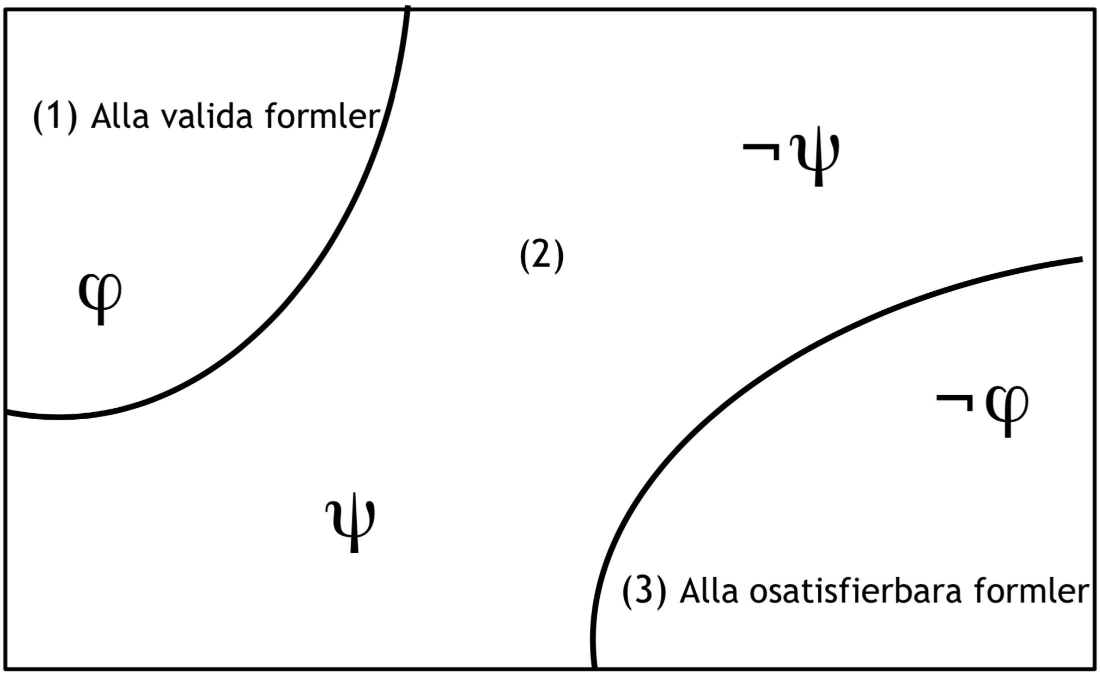
- Exempel: $\forall x \, (P(x) \lor \neg P(x))$

En formel är **satisfierbar** om den är sann i någon modell.

- Exempel: $\forall x \, (P(x))$

En formel är **osatisfierbar** om den är falsk i alla modeller.

- Exempel: $\forall x \, (P(x) \land \neg P(x))$



(1) + (2) + (3) = Alla predikatlogiska formler som finns
(1) + (2) = Alla satisfierbara formler
Om φ är valid så är $\neg\varphi$ osatisfierbar
Om ψ är varken valid eller osatisfierbar, så gäller samma sak även för $\neg\psi$
