

Aluno: Steffano Xavier Pereira

1VA: 10,0

2,5

1. (1ªVA) Considere que **p** e **q** são proposições. Exemplo:

P: "O céu é azul"

Q: "o natal está próximo".

Crie suas próprias proposições **p** e **q** (obrigatoriamente diferente das do exemplo) e escreva por extenso (sentença em português) as seguintes combinações de proposição, assim como seu valor verdade.

a)  $(\neg q \vee p) \rightarrow \neg p$

b)  $q \wedge p \wedge \neg p$

3VA: 4,5

Logo, considere p e q:

P: "A Rural é linda"

Q: "O Campus é verde"

a)  $(\neg q \vee p) \rightarrow \neg p$

I) Se o Campus não é verde ou A Rural é linda, então A Rural não é linda;

II) Para  $(\neg q \vee p) \rightarrow \neg p$ , temos as seguintes possibilidades, conforme a Tabela Verdade a seguir:

p	q	$\neg q$	$(\neg q \vee p)$	$\neg p$	$(\neg q \vee p) \rightarrow \neg p$
F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F

Logo, sempre que a proposição p for falsa, teremos valor verdade

b)  $q \wedge p \wedge \neg p$

I) O Campus é verde, a Rural é linda e a Rural não é linda

II) Para  $q \wedge p \wedge \neg p$ , temos as seguintes possibilidades

p	q	$\neg p$	$q \wedge p \wedge \neg p$
F	F	V	F
F	V	V	F
V	F	F	F
V	V	F	F

Logo, se trata de uma contradição, tanto pelo item I, visto que na frase a Rural se contradiz em dizer se é linda ou não, tanto pelo item II, ao qual a lógica prova que não é possível a conjunção da proposição p por sua negativa.

2. (1ªVA) Escreva as sentenças seguintes usando notação de quantificador (isto é, use os símbolos  $\exists$  e/ou  $\forall$ ). Apresente a negação em cada sentença. Obs: Não se preocupe com a veracidade das sentenças.

- a. Todos os inteiros são divisíveis por 1.
- b. Há um inteiro que quando dividido por 3 sempre é igual a 9.
- c. Todo inteiro é par.
- d. Existe um inteiro cujo cubo é 81.
- e. Para todo inteiro existe outro inteiro, que quando são multiplicados o resultado é sempre igual a zero.

2.5

2º) Considere o item I como a sentença com notação de quantificador e o item II como a sua negação, teremos:

a)

I)  $\forall n \in \mathbb{Z}. n$  é divisível por 1

II)  $\exists n \in \mathbb{Z}. n$  não é divisível por 1

✓

b)

I)  $\exists n \in \mathbb{Z}. n/3 = 9$

II)  $\forall n \in \mathbb{Z}. n/3 \neq 9$

✓

c)

I)  $\forall n \in \mathbb{Z}. n = 2k \mid k \in \mathbb{Z}$

II)  $(\exists n \in \mathbb{Z}. n \neq 2k \mid k \in \mathbb{Z}) \vee (\exists n \in \mathbb{Z}. n = 2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z})$

✓

d)

I)  $\exists n \in \mathbb{Z}. n^3 = 81$

II)  $\forall n \in \mathbb{Z}. n^3 \neq 81$

✓

e)  $P(n,k) = n \cdot k = 0$

I)  $\forall n \in \mathbb{Z}. \exists k \in \mathbb{Z}. n \cdot k = 0$

II)  $\exists n \in \mathbb{Z}. \forall k \in \mathbb{Z}. n \cdot k \neq 0$

✓

2,5

3. (1ªVA) Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ . Prove que  $a+b$  é par se, e somente se,  $a$  e  $b$  são ambos pares ou ambos ímpares.

Reescrevendo a sentença teremos o seguinte:

$$a + b \text{ é par} \leftrightarrow (a \text{ e } b \text{ são pares}) \vee (a \text{ e } b \text{ são ímpares})$$

Como se trata de uma equivalência, para provarmos, será necessário separar em duas implicações, aqui representadas por Ida e Volta; vejamos:

$$\text{Ida: } a + b \text{ é par} \rightarrow (a \text{ e } b \text{ são pares}) \vee (a \text{ e } b \text{ são ímpares})$$

$$\text{Volta: } (a \text{ e } b \text{ são pares}) \vee (a \text{ e } b \text{ são ímpares}) \rightarrow a + b \text{ é par}$$

I) Primeiro, iremos provar a ida:

$$\text{Ida: } a + b \text{ é par} \rightarrow (a \text{ e } b \text{ são pares}) \vee (a \text{ e } b \text{ são ímpares})$$

Pelo método da contrapositiva teremos o seguinte:

Se (**a ou b são ímpares**) e (**a ou b são pares**), então  $a + b$  é **ímpar**

Observe que: (**a ou b são ímpares**) e (**a ou b são pares**) é equivalente a um **ou exclusivo (XOR)**, pois, (Se a for ímpar, então b será par) ou (Se b for ímpar, então a será par). Dessa forma podemos provar que:

$$\text{Se } a \text{ é ímpar, logo } a = 2k' + 1 \mid k' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } b \text{ é par, logo } b = 2k'' \mid k'' \in \mathbb{Z}$$

$$a + b = 2k' + 1 + 2k''$$

$$a + b = 2(k' + k'') + 1$$



Da mesma forma que:

$$\text{Se } a \text{ é par, logo } a = 2k' \mid k' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Se } b \text{ é ímpar, logo } b = 2k'' + 1 \mid k'' \in \mathbb{Z}$$

$$a + b = 2k' + 2k'' + 1$$

$$a + b = 2(k' + k'') + 1$$

Então  $a + b$  é ímpar, visto que  $a + b = 2l + 1 \mid l \in \mathbb{Z}$ ; como  $k' + k''$  resulta em um número inteiro, logo  $l = k' + k''$ , dessa forma  $a + b$  é ímpar pelo método da contrapositiva.

II) Para a volta temos:

$$(a \text{ e } b \text{ são pares}) \vee (a \text{ e } b \text{ são ímpares}) \rightarrow a + b \text{ é par}$$

Podemos separar essa sentença em duas outras sentenças, pois se trata de uma disjunção:

$$\text{IIa) } a \text{ e } b \text{ são pares} \rightarrow a + b \text{ é par}$$

Se  $a$  é par, logo  $a = 2k' \mid k' \in \mathbb{Z}$

Se  $b$  é par, logo  $b = 2k'' \mid k'' \in \mathbb{Z}$

$$a + b = 2k' + 2k''$$

$$a + b = 2(k' + k'')$$

Então  $a + b$  é par, visto que  $a + b = 2l \mid l \in \mathbb{Z}$ ; como  $k' + k''$  resulta em um inteiro, logo  $l = k' + k''$ , dessa forma  $a + b$  é par

IIb)  $a$  e  $b$  são ímpares  $\rightarrow a + b$  é par

Se  $a$  é ímpar, logo  $a = 2k' + 1 \mid k' \in \mathbb{Z}$

Se  $b$  é ímpar, logo  $b = 2k'' + 1 \mid k'' \in \mathbb{Z}$

$$a + b = 2k' + 1 + 2k'' + 1$$

$$a + b = 2k' + 2k'' + 2$$

$$a + b = 2(k' + k'' + 1)$$

Então  $a + b$  é par, visto que  $a + b = 2l \mid l \in \mathbb{Z}$ ; como  $k' + k'' + 1$  resulta em um inteiro, logo  $l = k' + k'' + 1$ , dessa forma  $a + b$  é par.

2,5

4. (1ªVA) Prove que se a soma de dois números reais é menor do que 50, então pelo menos um dos números é menor do que 50.

Podemos reescrever a sentença da seguinte forma, para melhor compreender:

Se  $a + b < 50$ , então  $(\exists a < 50) \vee (\exists b < 50) \mid a, b \in \mathbb{R}$

Para provarmos, vamos utilizar o método da contrapositiva:

Se  $(\forall a \geq 50) \wedge (\forall b \geq 50)$ , então  $a + b \geq 50$

Como o menor valor real possível para  $a$  e  $b$  será 50, então:

$$a + b = 50 + 50$$

$$a + b = 100 \geq 50$$

Então  $a + b \geq 50$ , visto que o menor valor possível para a soma de  $a + b$  será 100, logo podemos provar pelo método da contrapositiva.

2,5

5. (3ªVA) Prove que se  $x^2 - x - 2 = 0$ , então  $x \neq 0$

Nesta questão, podemos aplicar o método da contradição, logo:

Se  $x^2 - x - 2 = 0$ , então  $x = 0$

Logo precisamos descobrir as raízes de  $x^2 - x - 2 = 0$ , pelo método da soma e do produto, temos:

$$S = -b/a = -(-1)/1 = +1$$

$$P = c/a = -2/1 = -2$$

Logo,  $x' = 2$  e  $x'' = -1$ , pois  $x' + x'' = 1$  e  $x' * x'' = -2$ ;

Como as raízes são diferentes de 0, podemos comprovar a contradição:

$$\left. \begin{array}{l} x' = 2 \neq 0 \\ x'' = -1 \neq 0 \end{array} \right\} x \neq 0: \text{Contradição!}$$

2.0

6. (3ªVA) Prove que um inteiro é ímpar se e somente se é a soma de dois inteiros consecutivos

A definição de números consecutivos, são os números que vem um após o outro, logo se temos um número(k) o seu sucessor (k + 1) é seu número consecutivo.

Desta forma podemos reescrever a sentença da seguinte forma:

~~Se~~ n é ímpar se, e somente se  $n = k + k + 1 \mid n, k \in \mathbb{Z}$

Logo iremos separar em Ida (item I) e Volta (item II):

I) Se n é ímpar, então  $n = k + k + 1$ , tal que, n e k são números inteiros

Se n é ímpar, logo  $n = 2a + 1 \mid a \in \mathbb{Z}$

$$n = k + k + 1$$

$$2a + 1 = 2k + 1$$

cf

Logo a estrutura de  $2k + 1$  é por si só uma estrutura de número ímpar (correspondente a  $2a + 1 \mid a \in \mathbb{Z}$ ), por definição, visto que  $\forall k \in \mathbb{Z}. n = 2k + 1$ .

II) Se  $k + k + 1$  é n, então n é ímpar, tal que, n e k são números inteiros

Pelo método da contrapositiva, teremos:

Se n é par, então  $k + k + 1$  **não** é n, tal que, n e k são números inteiros

Se n é par, logo  $n = 2a \mid a \in \mathbb{Z}$

$$k + k + 1 \neq n$$

$$2k + 1 \neq 2a$$

cf

Logo a estrutura de  $2k + 1$  é por si só uma estrutura de número ímpar (correspondente a  $2l + 1 \mid l \in \mathbb{Z}$ ) que por definição é diferente da estrutura de um número par, neste caso representado por  $n = 2a \mid a \in \mathbb{Z}$ .