Aluno: Steffano Xavier Pereira

1. (1^aVA) Considere que **p** e **q** são proposições. Exemplo:
   P: "O céu é azul"
   Q: "o natal está próximo".

   Crie suas próprias proposições **p** e **q** (obrigatoriamente diferente das do exemplo) e escreva por extenso (sentença em português) as seguintes combinações de proposição, assim como seu valor verdade.
   a) $(\neg q \vee p) \rightarrow \neg p$
   b) $q \wedge p \wedge \neg p$

Logo, considere p e q:

P: "A Rural é linda"

Q: "O *Campus* é verde"

a) $(\neg q \vee p) \rightarrow \neg p$

I) Se o *Campus* não é verde ou A Rural é linda, então A Rural não é linda;

II) Para $(\neg q \vee p) \rightarrow \neg p$, temos as seguintes possibilidades, conforme a Tabela Verdade a seguir:

p	q	¬q	(¬q V p)	¬p	(¬q V p) → ¬p
F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
V	V	F	V	F	F

Logo, sempre que a proposição p for falsa, teremos valor verdade

b) $q \wedge p \wedge \neg p$

I) O Campus é verde, a Rural é linda e a Rural não é linda

II) Para $q \wedge p \wedge \neg p$, temos as seguintes possibilidades

p	q	¬p	q ∧ p ∧ ¬p
F	F	V	F
F	V	V	F
V	F	F	F
V	V	F	F

Logo, se trata de uma contradição, tanto pelo item I, visto que na frase a Rural se contradiz em dizer se é linda ou não, tanto pelo item II, ao qual a lógica prova que não é possível a conjunção da proposição p por sua negativa.

2. (1ªVA) Escreva as sentenças seguintes usando notação de quantificador (isto é, use os símbolos ∃ e/ou ∀). Apresente a negação em cada sentença. Obs: Não se preocupe com a veracidade das sentenças.

   a. Todos os inteiros são divisíveis por 1.
   b. Há um inteiro que quando dividido por 3 sempre é igual a 9.
   c. Todo inteiro é par.
   d. Existe um inteiro cujo cubo é 81.
   e. Para todo inteiro existe outro inteiro, que quando são multiplicados o resultado é sempre igual a zero.

2º) Considere o item I como a sentença com notação de quantificador e o item II como a sua negação, teremos:

a)

I) $\forall n \in \mathbb{Z}.$ n é divisível por 1

II) $\exists n \in \mathbb{Z}$. n não é divisível por 1

b)

I) $\exists n \in \mathbb{Z} .\ n/3 = 9$

II) $\forall n \in \mathbb{Z}.\ n/3 \neq 9$

c)

I) $\forall n \in \mathbb{Z}.\ n = 2k \mid k \in \mathbb{Z}$

II) $(\exists n \in \mathbb{Z}.\ n \neq 2k \mid k \in \mathbb{Z}) \vee (\exists n \in \mathbb{Z}.\ n = 2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z})$

d)

I) $\exists n \in \mathbb{Z}.\ n^3 = 81$

II) $\forall n \in \mathbb{Z}.\ n^3 \neq 81$

e) $P(n,k) = n*k = 0$

I) $\forall n \in \mathbb{Z}.\ \exists k \in \mathbb{Z}.\ n*k = 0$

II) $\exists n \in \mathbb{Z}.\ \forall k \in \mathbb{Z}.\ n*k \neq 0$

3. (1ªVA) Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Prove que a+b é par se, e somente se, a e b são ambos pares ou ambos ímpares.

Reescrevendo a sentença teremos o seguinte:

a + b é par ↔ (a e b são pares) V (a e b são ímpares)

Como se trata de uma equivalência, para provarmos, será necessário separar em duas implicações, aqui representadas por Ida e Volta; vejamos:

Ida: a + b é par → (a e b são pares) V (a e b são ímpares)

Volta: (a e b são pares) V (a e b são ímpares) → a + b é par

I) Primeiro, iremos provar a ida:

Ida: a + b é par → (a e b são pares) V (a e b são ímpares)

Pelo método da contrapositiva teremos o seguinte:

Se (a **ou** b são **ímpares**) **e** (a **ou** b são **pares**), então a + b é **ímpar**

Observe que: (a **ou** b são **ímpares**) **e** (a **ou** b são **pares**) é equivalente a um **ou exclusivo (XOR)**, pois, (Se a for ímpar, então b será par) ou (Se b for ímpar, então a será par). Dessa forma podemos provar que:

Se a é ímpar, logo $a = 2k' + 1 \mid k' \in \mathbb{Z}$

Se b é par, logo $b = 2k'' \mid k'' \in \mathbb{Z}$

$a + b = 2k' + 1 + 2k''$

$a + b = 2(k' + k'') + 1$

Da mesma forma que:

Se a é par, logo $a = 2k' \mid k' \in \mathbb{Z}$

Se b é ímpar, logo $b = 2k'' + 1 \mid k'' \in \mathbb{Z}$

$a + b = 2k' + 2k'' + 1$

$a + b = 2(k' + k'') + 1$

Então a + b é ímpar, visto que $a + b = 2l + 1 \mid l \in \mathbb{Z}$; como $k' + k''$ resulta em um número inteiro, logo $l = k' + k''$, dessa forma a + b é impar pelo método da contrapositiva.

II) Para a volta temos:

(a e b são pares) V (a e b são ímpares) → a + b é par

Podemos separar essa sentença em duas outras sentenças, pois se trata de uma disjunção:

IIa) a e b são pares → a + b é par

Se a é par, logo $a = 2k' \mid k' \in \mathbb{Z}$

Se b é par, logo $b = 2k'' \mid k'' \in \mathbb{Z}$

$a + b = 2k' + 2k''$

$a + b = 2(k' + k'')$

Então a + b é par, visto que $a + b = 2l \mid l \in \mathbb{Z}$; como $k' + k''$ resulta em um inteiro, logo $l = k' + k''$, dessa forma a + b é par

IIb) a e b são ímpares → a + b é par

Se a é ímpar, logo $a = 2k' + 1 \mid k' \in \mathbb{Z}$

Se b é ímpar, logo $b = 2k'' + 1 \mid k'' \in \mathbb{Z}$

$a + b = 2k' + 1 + 2k'' + 1$

$a + b = 2k' + 2k'' + 2$

$a + b = 2(k' + k'' + 1)$

Então a + b é par, visto que $a + b = 2l \mid l \in \mathbb{Z}$; como $k' + k'' + 1$ resulta em um inteiro, logo $l = k' + k'' + 1$, dessa forma a + b é par.

4. (1ªVA) Prove que se a soma de dois números reais é menor do que 50, então pelo menos um dos números é menor do que 50.

Podemos reescrever a sentença da seguinte forma, para melhor compreender:

Se $a + b < 50$, então $(\exists a < 50) \vee (\exists b < 50) \mid a,b \in \mathbb{R}$

Para provarmos, vamos utilizar o método da contrapositiva:

Se $(\forall a \geq 50)$ **^** $(\forall b \geq 50)$, então $a + b \geq 50$

Como o menor valor real possível para a e b será 50, então:

$$a + b = 50 + 50$$

$$a + b = 100 \geq 50$$

Então $a + b \geq 50$, visto que o menor valor possível para a soma de $a + b$ será 100, logo podemos provar pelo método da contrapositiva.

5. (3ªVA) Prove que se $x^2 - x - 2 = 0$, então $x \neq 0$

Nesta questão, podemos aplicar o método da contradição, logo:

Se $x^2 - x - 2 = 0$, então $x = 0$

Logo precisamos descobrir as raízes de $x^2 - x - 2 = 0$, pelo método da soma e do produto, temos:

$S = -b/a = -(-1)/1 = +1$

$P = c/a = -2/1 = -2$

Logo, $x' = 2$ e $x'' = -1$, pois $x' + x'' = 1$ e $x' * x'' = -2$;

Como as raízes são diferentes de 0, podemos comprovar a contradição:

$$\left.\begin{array}{l} x' = 2 \neq 0 \\ x'' = -1 \neq 0 \end{array}\right\} x \neq 0\text{: Contradição!}$$

6. (3ªVA) Prove que um inteiro é impar se e somente se é a soma de dois inteiros consecutivos

A definição de números consecutivos, são os números que vem um após o outro, logo se temos um número(k) o seu sucessor (k + 1) é seu número consecutivo.

Desta forma podemos reescrever a sentença da seguinte forma:

Se n é ímpar se, e somente se $n = k + k + 1 \mid n, k \in \mathbb{Z}$

Logo iremos separar em Ida (item I) e Volta (item II):

I) Se n é ímpar, então n = k + k + 1, tal que, n e k são números inteiros

Se n é ímpar, logo $n = 2a + 1 \mid a \in \mathbb{Z}$

$n = k + k + 1$

$2a + 1 = 2k + 1$

Logo a estrutura de 2k + 1 é por si só uma estrutura de número ímpar (correspondente a $2a + 1 \mid a \in \mathbb{Z}$), por definição, visto que $\forall k \in \mathbb{Z}.\ n = 2k + 1$.

II) Se k + k + 1 é n, então n é ímpar, tal que, n e k são números inteiros

Pelo método da contrapositiva, teremos:

Se n é par, então k + k + 1 **não** é n, tal que, n e k são números inteiros

Se n é par, logo $n = 2a \mid a \in \mathbb{Z}$

$k + k + 1 \neq n$

$2k + 1 \neq 2a$

Logo a estrutura de 2k + 1 é por si só uma estrutura de número ímpar (correspondente a $2l + 1 \mid l \in \mathbb{Z}$) que por definição é diferente da estrutura de um número par, neste caso representado por $n = 2a \mid a \in \mathbb{Z}$.