Informatik.Softwaresysteme

Ausarbeitung spezielle Algorithmen

Schulze Methode

Algorithmus zum Finden eines eindeutigen Siegers

Abgabetermin: Bocholt, den 30.10.2018

Wintersemester: 2018/2019

Student:

Steffen Holtkamp

Matrikelnummer: 201620684

Westfälische Hochschule - Bocholt

Prof. Dr. Martin Guddat

Münsterstraße 265

46397 Bocholt

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Listings

1 Einleitung

1.1 Markus Schulze

Die Schulze Methode wurde nach ihrem Erfinder Markus Schulze benannt und wird in Fachkreisen auch als „Schwartz Sequential dropping“ oder auch „path winner“ Methode bezeichnet. Markus Schulze ist ein Mathematiker und hat diese Methode an der TU Berlin entwickelt.

Die Schulze Methode ist ein Verfahren, um eine Wahl auszuwerten und im besten Fall einen eindeutigen Sieger zu Finden.

Er hat diese Methode erstmals 1997 in einer offenen E-Mail zur Diskussion gestellt[1] und veröffentlicht immer wieder aktualisierte Versionen seiner Theorie. In dieser Ausarbeitung bezieht sich der Autor dabei auf seine aktualisierten Ausarbeitungen aus den Jahren 2017[2] und 2018[3].

1.2 Problemstellung

Zu Beginn soll dieses Beispiel zeigen, wie schwer es sein kann einen gerechten Sieger zu finden. Ein Kurs von 30 Personen soll aus drei Kandidaten einen Kurssprecher wählen. Jede Person bringt die drei Kandidaten in eine Rangfolge, von Erstwunsch, Zweitwunsch und Drittwunsch, dies ist eine Wahlmethode, die mit der Schulze Methode bearbeitet werden kann.

Dort hat sich folgende Stimmsituation ergeben, 10 Wähler haben sich für die Reihenfolge a, b, c entschieden, 10 Wähler haben die Reihenfolge b, a, c und 10 Wähler die Reihenfolge c, a, b angegeben.

Bei Betrachtung dieses Beispiels fällt auf, dass kein Kandidat im direkten Duell seine beiden Gegner schlagen kann. Kein Kandidat ist von allen Wählern direkt bevorzugt worden. Naiv kann man sagen, dass man Kandidat a nimmt, da dieser Kandidat 10-mal Erstwunsch und 20 mal Zweitwunsch ist, dass wäre besser als die Ergebnisse der anderen Kandidaten. Ist das eine gerechte Entscheidung? Bei einer überschaubaren Menge von 30 Personen könnte darüber abgestimmt werden, ob das gerecht ist. Bei einer Wahl von mehreren Hundert oder Tausend Wählern wird dies schon schwieriger. Dort wird es wichtig eine Methode zu wählen, die als „gerechte“ gilt. Kriterien, um zu definieren was gerecht ist, wird vom Forschungsgebiet der Sozialwahltheorie definiert.

1.3 Sozialwahltheorie

Die Einführungssituation hat schon gezeigt, dass es sehr schwer ist eine Wahl gerecht auszuwerten. In einer großen Demokratie wird es noch komplexer und eine Herausforderung aus den Präferenzen der Einzelnen Wähler einen Kompromiss zu finden, der für alle maximal zufriedenstellend ist.

[1]Vgl. Schulze [1997].
[2]Vgl. Schulze [2017]
[3]Vgl. Schulze [2018]

Ein Ansatz einen gerechten Sieger zu finden, soll mit der Schulze Methode gegeben werden. Die Schulze Methode fällt in das Gebiet der Sozialwahltheorie. Dieses interdisziplinäre Forschungsgebiet beschäftigt sich mit der Untersuchung von Gruppenentscheidungen. In dieser Forschung werden individuelle Präferenzen und Entscheidungen der teilnehmenden Personen aggregiert, um daraus eine „gerechte“ kollektive Entscheidung abzuleiten. Damit man eine „gerechte“ Methode finden kann, beschäftigen sich viele Teilbereiche der Forschung, wie z.B. die Mathematik, Volkswirtschaft, Psychologie, Philosophie, Politikwissenschaft und Rechtswissenschaft mit diesem Thema und stellen dabei verschiedenste Ansätze und Vorgehensweisen vor. Alle beteiligten Forschungsgebiete stellen dabei Definitionen auf, was eine „gerechte“ Methode erfüllen soll[4].

Die Schulze Methode ist eine Abwandlung der Condorcet Wahlmethode, dass bedeutet das immer zwei Kandidaten verglichen werden und ein Sieger aus diesem Vergleich hervorgeht. Es haben sich über die Jahre viele Qualitätskriterien entwickelt, an denen man messen kann, ob eine Methode im Sinne der Sozialwahltheorie gerechte ist. In der Abschließenden Bewertung werden einige dieser Kriterien betrachtet.

2 Definition

2.1 Voraussetzungen

Es gibt einige Voraussetzungen, die eine Wahl erfüllen muss, damit die Schulze Methode auf diese Wahl angewendet werden kann.

1. Es muss mindestens zwei Kandidaten geben, die sich zu Wahl stellen, da sonst keine Rangfolge erstellt werden kann. Bei zwei Kandidaten ist die Lösung jedoch trivial, da dort der Gewinner der Kandidat ist, der am häufigsten, von den Wählern dem Gegner vorgezogen wurde.

   Mathematische Definition: Sei A eine endliche nicht leere Menge an Kandidaten. Wobei die Anzahl der Kandidaten C ist und gilt:

$$C \in \mathbb{N} \; und \; 1 < C < \infty$$

2. Jeder Wähler ordnet den Kandidaten eine Zahl zu und aus dieser Zahl wird eine Rangfolge erstellt. Je kleiner die Zahl ist desto höher ist die Platzierung. Hierbei ist die Größe der Zahl oder der Abstand uninteressant, da nur die Rangfolge betrachtet wird.

   Des Weiteren gilt:

   2.1. Es können mehrere Kandidaten die gleiche Platzierung haben, dass bedeutet, dass kein Unterscheidung der Kandidaten auf dieser Platzierung vorgenommen werden kann.

[4] Vgl. Scheubrein [2013] Seite 91 ff.

2.2. Wenn ein Wähler keine Bewertung für einen Kandidaten abgibt, werden alle Kandidaten, die eine Bewertung haben, diesem Kandidaten vorgezogen. Werden mehrere Kandidaten nicht bewertet, werden sie wir im vorherigen Punkt gleichbehandelt.

2.2 Begriffsdefinition und Erläuterungen

Bevor die theoretische Definition aufgestellt werden kann, müssen einige Begriffe, Formeln und Notationen besprochen werden, um die Definition einfacher zu verstehen.

Da dies nur Erläuterungen zu einzelnen Punkten der Definition sind, ist es elementar dies zusammen mit dem Abschnitt 2.3 zu lesen. In den Erläuterungen wird oft von stärksten Wegen gesprochen. Diese ist ein Kernstück der Schulze Methode und damit Teil der Definition und ist auch innerhalb der Definition im Schritt 2.3.2 erklärt .

2.2.1 Verbindung

Eine Verbindung in diesem Kontext bedeutet, dass zwei Kandidaten gegeneinander antreten und diese Duell ist eine Verbindung mit der folgenden Notation

$$(N[a, b], N[b, a])$$

Beispiel: Kandidat a wird von fünf Wählern dem Kandidaten b vorgezogen, und Kandidat b wird von zwei Wählern Kandidat a vorgezogen, würde wie folgt notiert werden.

$$(5, 2)$$

In den Beispielen werden diese Duelle in einem Graphen dargestellt. Eine vollständige Schreibweise, wie in Abbildung 1 skizziert, wird in Beispiel 3 benötigt.

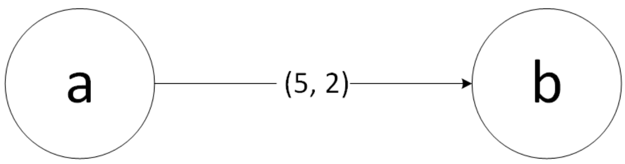

Abbildung 1: Verbindung in Graphen

In Fällen, in denen es nicht möglich ist Kandidaten gleich zu bewerten, wird auch die Kurzschreibweise wie in Abbildung 2 genutzt. Diese Darstellung wird auch in Beispiel 1 und in Beispiel 2 genutzt, da dort nicht wichtig ist, wie viele Gegenstimmen ein siegreicher Kandidat bekommen hat, da nur die Stimmen für den Kandidaten untersucht werden.

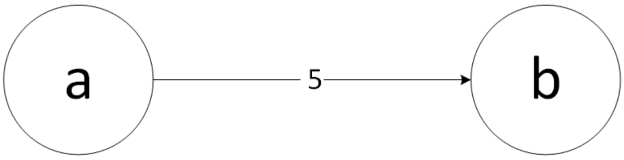

Abbildung 2: Verbindung in Graphen, Kurzschreibweise

2.2.2 Weg

Ein Weg besteht aus einer oder mehreren direkten Verbindungen zweier Kandidaten und führt von Start Kandidaten zum Ziel Kandidaten. Dies wird wie folgt notiert.

$$c(1), ..., c(2)$$

Eine Verbindung von Kandidat a zu Kandidat b besteht dann, wenn Kandidat a Kandidat b direkt schlagen kann, dies ist dann auch ein Weg von a nach b. Ein Weg von Kandidat a zu Kandidat b kann aber auch existieren, wenn a keine direkte Verbindung zu b hat, aber Kandidat a über andere Verbindungen zu b gelangen kann, diese Folge von Verbindungen ist dann der Weg von a nach b.

Beispiel: Kandidat a schlägt Kandidat b und Kandidat b schlägt Kandidat c, dann schlägt Kandidat a auch Kandidat c, da Kandidat a, Kandidat b schlagen kann, auch wenn Kandidat a nicht direkt Kandidat c schlagen kann. Ein solcher Weg ist in Rot in Abbildung 3 aufgezeichnet.

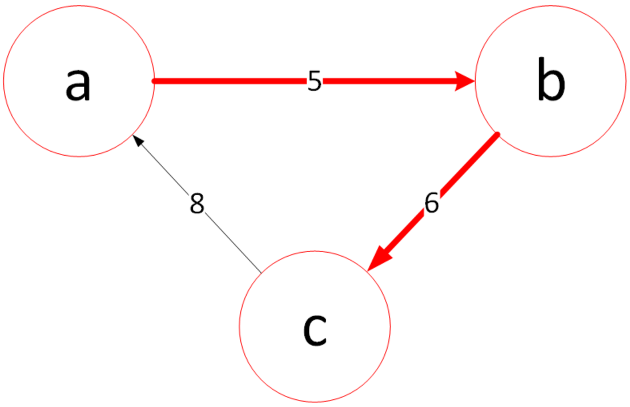

Abbildung 3: Weg von a über b nach c

2.2.3 Die Menge N

Die Menge N kann man sich als Tabelle Vorstellen in der die Ergebnisse der Duelle der Kandidaten enthalten sind nach der ersten Auszählung. Die Menge N ist die Grundlage der Schulze Methode, auf diese Menge baut sich der Algorithmus auf. Ein Beispiel für diese Menge findet sich im Beispiel 1 in Tabelle 1.

2.2.4 $\succ_v$

Das Zeichen $\succ_v$ stellt einen Vergleich zweier Kandidaten dar. $a \succ_v b$ bedeutet, dass von den Wählern (v) der Kandidat a strikt dem Kandidat b vorgezogen wird. Wenn also beide Kandidaten verglichen werden, a der Sieger ist.

2.2.5 ${}_{\mathsf{D}}z$

Der Wert ${}_D z$ eines Weges ist der Wert, der die schwächste Verbindung repräsentiert. Das bedeutet, dass ein Weg untersucht wird und dort die schwächste direkt Verbindung zweier Kandidaten gesucht wird und dieser Wert wird als ${}_D z$ bezeichnet. Dieser Wert ist auch der ausschlaggebende Wert, der in P_D eingetragen wird. Wie eine schwache Verbindung definiert ist, ist abhängig von der gewählten Art der Schulze Methode. Dies wird ausführlich im dritten Beispiel erläutert. Zum einfachen Verständnis kann anfangs ein einfacher Größenvergleich angenommen werden.

2.2.6 Relation

„Seien A und B Mengen. Eine Teilmenge R enthalten in $A \times B$ heißt (zweistellige) Relation zwischen A und B. Gilt $A = B$, so heißt R Relation auf A.“ Prof. Dr. Hans Werner Lang [2018]

Die Schulze Methode nutzt die Relation $\mathcal{O}$, um dort die Ergebnisse der Duelle alle Kandidaten zu speichern, die sich aus der Menge P_D ergeben. P_D wird hier oft auch mit P abgekürzt. Die Relation $\mathcal{O}$ enthält dann nur die siegreichen Duelle. Ein siegreiches Duell ab bedeutet, dass Kandidat a gegen Kandidat b gewonnen hat und ist in $\mathcal{O}$ enthalten.

2.3 Theoretische Grundlagen

Die grundsätzliche Idee der Schulze Methode ist es, ein condorcetes Verfahren, wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben, durchzuführen. Dieses Verfahren wird jedoch über eine neue Berechnungsstufe verfeinert, um in einer Situation einen Sieger zu ermitteln, in der die einfache Condorcet-Methode keine Lösung liefert.

In diesem Abschnitt werden die Theoretischen Grundlagen erläutert und in den Abschnitten 3, 4 und 5 an Beispielen erläutert.

(2.3.1) Ein Weg von Kandidat $x \in A$ zu Kandidat $y \in A$ ist eine folgen von Kandidaten $c(1), ..., c(n) \in A$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $x \equiv c(1)$
2. $y \equiv c(n)$
3. $2 \leq n \leq \infty$
4. Für alle $i = 1, ..., (n-1) : c(i) \not\equiv c(i+1)$

(2.3.2) Die Stärke eines Weges $c(1), ..., c(n)$ ist $min_{\mathrm{D}}\{(N[c(i), c(i+1)], N[c(i+1), c(i)])|i = 1, ..., n-1\}$.

In anderen Worten: Die Stärke eines Weges ist die Stärke der schwächsten Verbindung.

(2.3.3) Wenn ein Weg $c(1), .., c(n)$ die Stärke $z \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ hat, dann ist die kritische Verbindung dieses Weges, die Verbindung von $(N[c(i), c(i+1)], N[c(i+1), c(i)]) \approx_{\mathrm{D}} z$.

$$\begin{aligned} P_D[a,b] := max_{\mathrm{D}}\{min_{\mathrm{D}}\{(N[c(i), c(i+1)], N[c(i+1), c(i)])|i = 1, ..., n-1\} \\ |c(1), ..., c(n) \text{ ein Weg von Kandidat a zu Kandidat b}\} \end{aligned}$$

In anderen Worten: $P_D[a,b] \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist die Stärke des stärksten Weges von Kandidat $a \in A$ zu Kandidat $b \in A$.

Diese Menge P_D enthält die stärksten Wege zwischen den Kandidaten. Sprich die Wege, in denen die schwächste Verbindung $({}_D z)$ des Weges, stärker ist als alle anderen schwächsten Verbindungen von Wegen, die vom gleichen Kandidaten ausgehen und zum gleichen Kandidaten führen.

(2.3.4) Die zweistellige Relation $\mathcal{O}$ auf A ist wie folgt definiert:

$$ab \in \mathcal{O} :\Leftrightarrow P_D[a,b] >_D P_D[b,a]$$

(2.3.5) Daraus folgt, dass die Menge der Sieger sich wie folgt ergibt:

$$\mathcal{S} := \{a \in A | \forall b \in A \ \{a\} : ba \notin \mathcal{O}\}$$

3 Beispiel 1

3.1 Ausgangssituation

Im ersten Beispiel wird eine Wahl untersucht, in der jeder Teilnehmer alle Kandidaten bewertet hat und damit eine eindeutige Reihenfolge der Kandidaten generiert werden kann. Kein Kandidat wurde gleichbehandelt oder nicht bewertet.

Bildhaft wird die Schulze Methode in folgender Ausgangssituation eingesetzt: Ein Kurs von 28 Studierenden wählt einen Kurssprecher. Zur Wahl stellt sich Anton (Kandidat a), Berta (Kandidatin b), Conny (Kandidatin c) und Dennis (Kandidat d).

Jeder der 28 Studierenden muss die Kandidaten nach Erst-, Zweit-, Dritt- und Viertwunsch ordnen. Nach der Auszählung hat sich Folgende Situation eingespielt.

$$\textbf{6 mal} \quad a \succ_v b \succ_v d \succ_v c$$

$$\textbf{4 mal} \quad c \succ_v a \succ_v b \succ_v d$$

$$\textbf{10 mal} \quad b \succ_v d \succ_v a \succ_v c$$

$$\textbf{3 mal} \quad b \succ_v a \succ_v d \succ_v c$$

$$\textbf{5 mal} \quad d \succ_v c \succ_v b \succ_v a$$

Dies bedeutet beispielhaft für die erste Zeile, dass sechs Mal Wahlzettel abgegeben wurden, die Anton als Erstwunsch, Berta als Zweitwunsch, Dennis als Drittwunsch und Conny als Viertwunsch angegeben haben.

Diese Auszählung der Wahl wird nun in die Schulze Methode überführt und bewertet.

3.2 Lösungsschritte

Um die Schulze Methode anzuwenden, muss zuerst die Menge N bestimmt werde. Diese Menge bildet sich, indem jeder Kandidat gegen jeden Kandidaten antritt.

Exemplarisch wird das Duell a gegen b durchgeführt und die Kandidaten c und d ignoriert. Es können diese Kandidaten im Duell ignoriert werden, da es irrelevant ist, wo das Duell stattfindet, ob die beiden Kandidaten Dritt- und Viertwunsch sind oder ein Kandidat Erstwunsch und der andere Zweitwunsch ist. Die Betrachtung der genauen Platzierungen ergibt sich durch die Betrachtung aller Kandidaten mit diesem Verfahren.

$$\textbf{6 mal } a \succ_v b$$

$$\textbf{4 mal } a \succ_v b$$

$$\textbf{10 mal } b \succ_v a$$

$$\textbf{3 mal } b \succ_v a$$

$$\textbf{5 mal } b \succ_v a$$

Wird nun dieses Duell betrachte, erhalten Kandidat a 10 Stimmen und Kandidat b 18 Stimmen und Kandidat b gewinnt damit.

Wenn dies für alle Duelle gemacht wurde, ergibt sich folgendes Ergebnis.

$$a \textbf{ vs. } b \text{ 10 Stimmen gegen 18 Stimmen, } b \text{ gewinnt}$$

$$a \textbf{ vs. } c \text{ 19 Stimmen gegen 9 Stimmen, } a \text{ gewinnt}$$

$$a \textbf{ vs. } d \text{ 13 Stimmen gegen 15 Stimmen, } d \text{ gewinnt}$$

$$b \textbf{ vs. } c \text{ 19 Stimmen gegen 9 Stimmen, } b \text{ gewinnt}$$

$$b \textbf{ vs. } d \text{ 23 Stimmen gegen 5 Stimmen, } b \text{ gewinnt}$$

$$c \textbf{ vs. } d \text{ 4 Stimmen gegen 24 Stimmen, } d \text{ gewinnt}$$

Mit diesen Werten kann man nun die Menge N, wie sie in Tabelle 1 zu sehen ist, aufstellen.

	N[*,a]	N[*,b]	N[*,c]	N[*,d]
N[a, *]	—	10	19	13
N[b, *]	18	—	19	23
N[c, *]	9	9	—	4
N[d, *]	15	5	24	—

Tabelle 1: Die Menge N (Beispiel 1)

Im nächsten Schritt müssen die Wege zwischen den Kandidaten gesucht werden, wie es in der Definition in Abschnitt 2.3 unter (2.3.1) beschrieben wird. Zyklische Verbindungen sind nicht erlaubt.

In Abbildung 4 ist die Menge N als gerichteter Graph aufgezeichnet.

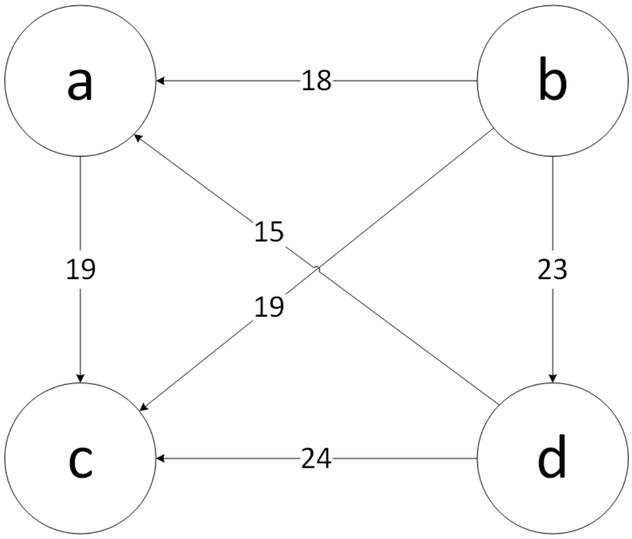

Abbildung 4: Graph über die Menge N (Beispiel 1)

In dem Graphen wurden gerichtete Kanten vom Sieger in die Richtung des Verlierers gezogen und das Kantengewicht des Siegers der Duelle aufgetragen. Dies sind die unter Abschnitt **??** beschriebenen Verbindungen. Nun muss aus der Definition in Abschnitt 2.3 (2.3.2) und (2.3.3) angewendet werden, um die Menge P zu bilden, die die Stärksten Wege beinhaltet.

Dazu werden nun alle Wege zwischen den Kandidaten gebildet und der stärkste Weg, das ist jener, bei dem die schwächste Verbindung am größten ist, ausgewählt für die Menge P.

$a \rightarrow b$**:** Es gibt keinen Weg, der von a nach b führt.

$b \rightarrow a$**:** Es gibt zwei Wege, die von b nach a führen.

Weg 1: b, 23, d, 15, a, der die Stärke $min_D\{23, 15\} \approx_D 15$ hat.

Weg 2: b, 18, a, der die Stärke 18 hat.

Damit ist ergibt sich die Stärke des stärksten Weges mit Hilfe von $max_D\{15, 18\} \approx_D 18$

$a \rightarrow c$ Es gibt einen Weg, der von a nach c führt.

Weg 1: a, 19, c, der die Stärke 19 hat.

Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 19.

$c \rightarrow a$ Es gibt keinen Weg, der von c nach a führt.

$a \rightarrow d$ Es gibt keinen Weg, der von a nach d führt.

$d \to a$ Es gibt einen Weg, der von d nach a führt.

Weg 1: d, 15, a, der die Stärke 15 hat.

Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 15.

$b \to c$**:** Es gibt drei Wege, die von b nach c führen.

Weg 1: b, 18, a, 19, c, der die Stärke $min_D\{18, 19\} \approx_D 18$ hat.

Weg 2: b, 19, c, der die Stärke 19 hat.

Weg 3: b, 23, d, 24, c, der die Stärke $min_D\{23, 24\} \approx_D 23$ hat.

Damit ist ergibt sich die Stärke des stärksten Weges mit Hilfe von $max_D\{18, 19, 23\} \approx_D 23$

$c \to b$ Es gibt keinen Weg, der von c nach b führt.

$b \to d$ Es gibt einen Weg, der von b nach d führt.

Weg 1: b, 23, d, der die Stärke 23 hat.

Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 23.

$d \to b$ Es gibt keinen Weg, der von d nach b führt.

$c \to d$ Es gibt keinen Weg, der von c nach d führt.

$d \to c$ Es gibt einen Weg, der von d nach c führt.

Weg 1: d, 24, c, der die Stärke 24 hat.

Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 24.

So wurden alle Wege bestimmt und die kritischen Verbindungen gefunden, sodass sich in Tabelle 2 die Menge P bildet.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
P[a, *]	—	—	19	—
P[b, *]	18	—	23	23
P[c, *]	—	—	—	—
P[d, *]	15	—	24	—

Tabelle 2: Die Menge P (Beispiel 1)

Die Simulation der Duelle wird für die Kandidaten erneut gemacht, dieses Mal jedoch über die Menge P. Wenn es keinen Weg zwischen den Kandidaten gibt, also in der Tabelle ein '—' steht, so wird diese Verbindung als eine Verbindung mit der Stärke 0 betrachtet.

Dieses Ergebnis wird in der Relation $\mathcal{O}$, wie in der Definition (2.3.4) in Abschnitt 2.3 beschreiben.

a **gewinnt gegen** b : nein, daher kein Teil von $\mathcal{O}$

a **gewinnt gegen** c : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

a **gewinnt gegen** d : nein, daher kein Teil von $\mathcal{O}$

b **gewinnt gegen** a : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

b **gewinnt gegen** c : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

b **gewinnt gegen** d : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

c **gewinnt gegen** a : nein, daher nicht Teil von $\mathcal{O}$

c **gewinnt gegen** b : nein, daher nicht Teil von $\mathcal{O}$

c **gewinnt gegen** d : nein, daher nicht Teil von $\mathcal{O}$

d **gewinnt gegen** a : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

d **gewinnt gegen** b : nein, daher nicht Teil von $\mathcal{O}$

d **gewinnt gegen** c : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

Daher ergibt sich $\mathcal{O} = \{ac, ba, bc, bd, da, dc\}$

3.3 Ergebnis

Um den Sieger aus der Relation $\mathcal{O}$ zu finden muss, wie in der Definition in Abschnitt 2.3 Punkt (2.3.5) beschreiben, sichergestellt werden, dass ein Sieger nur ein Kandidat sein kann, der im direkten Duell nie durch einen anderen Gegner geschlagen wird.

Um das zu prüfen, wird die Relation $\mathcal{O}$ durchgegangen und geprüft, ob es einen Kandidaten gibt, der immer nur auf der linken Seite eine Tupel z.B: "bd" steht und damit immer der Gewinner ist und nie geschlagen wurde, dann würde er auf der rechten Seite des Tupels stehen.

Für dieses Beispiel ergibt sich, dass es nur einen Sieger in der Menge $\mathcal{S} = \{b\}$ gibt, den Kandidaten b. Damit wurde mit der Schulze Methode festgestellt, dass Kandidatin Berta die Wahl gewonnen hat.

Zu Beginn des Beispiels konnte man sehen, dass Kandidatin Berta beim Duell mit den anderen Kandidaten gegen alle anderen Kandidaten gewonnen hat. Und es stellt sich daher die Frage, wieso nicht an dieser Stelle schon die Siegerin festgelegt wurde? Dieses Beispiel hat gezeigt, dass die Schulze Methode das Condorcet Kriterium 6.1.2 erfüllt, das besagt, dass ein Kandidat, der gegen alle Gegner gewonnen hat auch der Sieger der Wahlmethode, hier der Schulze Methode sein muss. Das Beispiel 2 in Abschnitt 4 zeigt, dass auch wenn kein Condorcet-Sieger existiert, ein Sieger mit der Schulze Methode ermittelt werden kann.

4 Beispiel 2

4.1 Ausgangssituation

Als Ausgangsmethode kann, wie in Beispiel 1 (Abschnitt: 3.1) wieder eine Wahl eines Kurssprechers angenommen werden.

In dieser Wahl haben 21 Personen die Kandidaten a bis d in eine Reihenfolge sortiert, dabei hat sich diese Verteilung eingestellt:

8 mal $a \succ_v c \succ_v d \succ_v b$

2 mal $b \succ_v a \succ_v d \succ_v c$

4 mal $c \succ_v d \succ_v b \succ_v a$

4 mal $d \succ_v b \succ_v a \succ_v c$

3 mal $d \succ_v c \succ_v b \succ_v a$

4.2 Lösungsschritte

Zuerst werden die Kandidaten wieder gegeneinander aufgestellt.

a **vs.** b 8 Stimmen gegen 13 Stimmen, b gewinnt

a **vs.** c 14 Stimmen gegen 7 Stimmen, a gewinnt

a **vs.** d 10 Stimmen gegen 11 Stimmen, d gewinnt

b **vs.** c 6 Stimmen gegen 15 Stimmen, c gewinnt

b **vs.** d 2 Stimmen gegen 19 Stimmen, d gewinnt

c **vs.** d 12 Stimmen gegen 9 Stimmen, c gewinnt

In diesem Fall gibt es kein Condorcet-Sieger, also hat es kein Kandidaten geschafft alle Gegner im Zweikampf zu schlage, diese Situation ist das sogenannte Condorcet-Paradoxon.[5]

[5] Vgl. rer. pol. Enrico Schöbel [2018]

Die Schulze Methode kann dieses Problem jedoch lösen indem, wie in Tabelle 3 dargestellt, die Menge N gebildet wird.

	N[*,a]	N[*,b]	N[*,c]	N[*,d]
N[a, *]	—	8	14	10
N[b, *]	13	—	6	2
N[c, *]	7	15	—	12
N[d, *]	11	19	9	—

Tabelle 3: Die Menge N (Beispiel 2)

Aus der Menge N wird der Graph gebildet, siehe Abbildung 5.

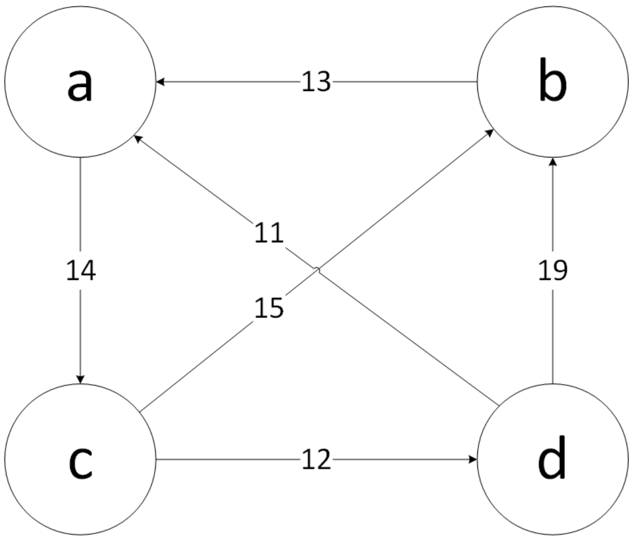

Abbildung 5: Graph über die Menge N(Beispiel 2)

Nun werden wieder die stärksten Pfade gesucht und in die Menge P eingefügt, die in Tabelle 4 zu sehen ist.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
PN[a, *]	—	14	14	12
PN[b, *]	13	—	13	12
P[c, *]	13	15	—	12
P[d, *]	13	19	13	—

Tabelle 4: Die Menge P (Beispiel 2)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neu Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O} = \{ab, ac, cb, da, db, dc\}$

4.3 Ergebnis

Analog zu Beispiel 1 (Abschnitt 3) wird die Relation $\mathcal{O}$ untersucht, um die Menge der Sieger zu finden. In diesem Fall ist $\mathcal{S} = \{d\}$ und der Sieger ist Kandidat d. Dies zeigt, dass die Schulze Methode einen Sieger finden kann, in Situationen, die durch andere Wahlverfahren nicht gelöst werden können.

Eine Ausführliche Besprechung, wie in Beispiel 1 kann in der originalen Ausarbeitung von Martin Schulze[6] nachgelesen werden.

5 Beispiel 3

5.1 Ausgangssituation

In Abschnitt 2.1 wurde beschrieben, dass die Schulze Methode auch Ergebnisse liefert, wenn Kandidaten gleich oder nicht bewertet wurden. Nicht bewertete Kandidaten werden dabei behandelt, als wären sie alle vom Wähler auf dem letzten Platz gewählt worden, sodass jeder Kandidat, der vom Wähler bewertet wurde, den nicht bewerteten Kandidaten vorgezogen wird. Dieses Beispiel bezieht sich auf das sechste Beispiel von „A New Monotonic, Clone-Independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-Consistent Single-Winner Election Method “[7].

$$\textbf{6 mal } a \succ_v b \succ_v c \succ_v d$$

$$\textbf{8 mal } a \approx_v b \succ_v c \approx_v d$$

$$\textbf{8 mal } a \approx_v c \succ_v b \approx_v d$$

$$\textbf{18 mal } a \approx_v c \succ_v d \succ_v b$$

$$\textbf{8 mal } a \approx_v c \approx_v d \succ_v d$$

$$\textbf{40 mal } b \succ_v a \approx_v c \approx_v d$$

$$\textbf{4 mal } c \succ_v b \succ_v d \succ_v a$$

$$\textbf{9 mal } c \succ_v d \succ_v a \succ_v b$$

$$\textbf{8 mal } c \approx_v d \succ_v a \approx_v b$$

$$\textbf{14 mal } d \succ_v a \succ_v b \succ_v c$$

$$\textbf{11 mal } d \succ_v b \succ_v c \succ_v a$$

$$\textbf{4 mal } d \succ_v c \succ_v a \succ_v b$$

[6] Vgl. SCHULZE [2017] Kapitel 3.1
[7] Vgl. SCHULZE [2017] Kapitel 3.6

Zur Erläuterung wird die Wahl $a \approx_v b \succ_v c \approx_v d$ betrachtet. Hier hat der Wähler gesagt, er möchte lieber Kandidat a oder b haben, welcher ist ihm dabei gleich, aber lieber einen von den beiden Kandidaten, als die Kandidaten c oder d. Dort macht der Wähler aber auch kein Unterschied ob c oder d, beide findet er gleich gut/schlecht.

5.2 Lösungsschritte

Als erstes muss die Menge N bestimmen werden, in der man die Kandidaten gegeneinander antreten lässt, nur kann es diesmal zu Duellen ohne Sieger kommen, da beide Kandidaten gleich bewertet wurden. Diese Stimmen werden dann nicht berücksichtigt.

Exemplarisch wird in Tabelle 5 das Duell von Kandidat a gegen Kandidat b dargestellt.

Duelle	a	b	Sieger
1	6		a
2	8	8	keiner
3	8		a
4	18		a
5	8		a
6		40	b
7		4	b
8	9		a
9	8	8	keiner
10	14		a
11		11	b
12	4		a
Summe	67	55	

Tabelle 5: Duell a gegen b, graue Felder sind nicht bewertet, da unentschieden (Beispiel 3)

Wenn man dieses Verfahren für alle Kandidaten anwendet erhält man die Menge N, die in Tabelle 6 aufgetragen ist.

	N[*,a]	N[*,b]	N[*,c]	N[*,d]
N[a, *]	—	67	28	40
N[b, *]	55	—	79	58
N[c, *]	36	59	—	45
N[d, *]	50	72	29	—

Tabelle 6: Die Menge N (Beispiel 3)

In Abbildung 6 sieht man den Graphen, der aus der Menge N gebildet wurde, er sieht etwas anders aus als in Beispiel 1 und Beispiel 2, da der Wert für den Weg von Kandidat a nach Kandidat b, sondern auch den umgekehrten Weg von b nach a benötigt wird, sprich es werden die Stimmen für den Kandidaten a und die Gegenstimmen eingezeichnet.

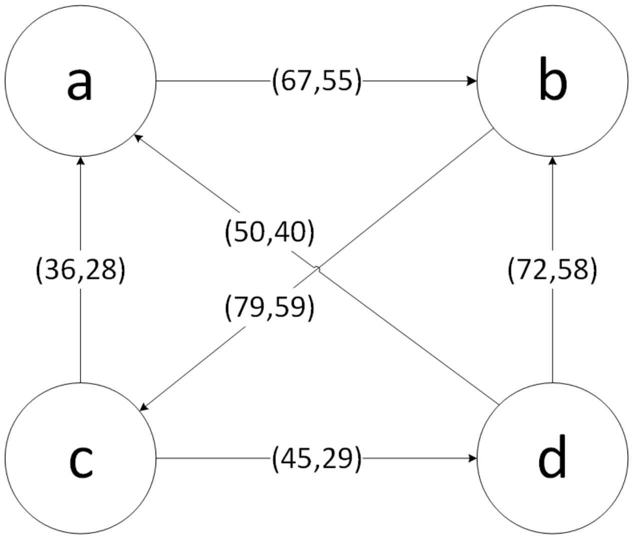

Abbildung 6: Graph über die Menge N(Beispiel 3)

Es gibt verschiedene Möglichkeiten einen Gewinner mit der Schulze Methode zu finden, da es verschiedene Ansätze gibt die Stärke eines Weges zu bestimmen. Die Methoden die in diesem Abschnitt vorgestellt werden sind margin, ratio, winning votes und losing votes. Wenn alle Wähler die Kandidaten in eine strikte Ordnung gebracht haben, wie in den Beispielen 1 und 2, dann geben diese Methoden immer dasselbe Ergebnis, wenn

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$$
$$((x_1 > y_1 \text{ und } x_2 \leq y_2) \text{ oder } (x_1 \geq y_1 \text{ und } x_2 < y_2)) \Rightarrow (x_1, x_2) \succ_D (y_1, y_2)$$

gilt. Dies gilt für die vier Methoden die Vorgestellt werden, da dort die Stimmen für den Kandidaten zusammen mit den Gegenstimmen immer der Anzahl der Wähler, also C ergibt und wenn die eine Verbindung mehr Stimmen für den Kandidaten hat ($x_1 > y_1$) muss daraus folgen, dass die Verbindung y mehr Gegenstimmen (y_2) hat als die Verbindung x. (x_1, x_2), (y_1, y_2) sind dabei Verbindungen zweier Kandidaten in der vollständigen Schreibweise, die als zweiten Wert die Gegenstimmen enthält, Abschnitt 2.2.1. Da alle vier Methoden der Definition entsprechen, ist es auch legitim, dass die Beispiele 1 und 2 mit der winning votes Methode arbeiten und die verkürzte Schreibweise genutzt haben, genauso könnten die anderen drei Methoden eingesetzt werden.

Wenn die Wähler nicht alle Kandidaten in eine strikte Reihenfolge bringen und Kandidaten gleich bewerten, geben diese Methoden je nach Situation gleiche oder unterschiedliche Ergebnisse aus, da die obige Definition nicht mehr passt, da nun Stimmen für den Kandidaten zusammen mit den Stimmen gegen den Kandidaten nicht der Anzahl der Wähler (C) entsprechen muss. Dieses Beispiel ist so aufgebaut, dass jede Methode einen anderen Kandidaten als Sieger ausgibt. Daher ist es wichtig vor der Wahl zu definieren, welche Wahlmethode genutzt wird.

5.2.1 margin

Beim Ansatz *margin* gewinnt der Kandidat, der seinen Sieg mit einem größeren Abstand erreicht. Untersucht wir Beispielhaft das Duell a gegen b. Der Stärkste Weg von a nach b, ist die direkt Verbindung, Kandidat a erhält 67 Stimmen und Kandidat b nur 55 Stimmen und damit gewinnt Kandidat a mit 12 Stimmen Vorsprung. Aber auch Kandidat b kann Kandidat a schlagen, der Stärkste Weg für dieses Duell ist von b über c und d nach a. Die schwächste Verbindung in diesem Weg ist die Verbindung d nach a, da dort mit nur 10 Stimmen Vorsprung der Kandidat d, Kandidat a schlägt. Um den Gewinner festzustellen wird der Abstand für den Sieg von a (12 Stimmen) mit dem Sieg von b (10 Stimmen) verglichen und der Gewinner dieses Duells ist a, mit zwei Stimmen Vorsprung.

Auch hier wurde in Tabelle 7 die Menge P aufgestellt. Die Werte in der Tabelle zeigen nun den Abstand, mit dem der Kandidat den Gegner geschlagen hat.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
P[a, *]	—	12	12	12
P[b, *]	10	—	20	16
P[c, *]	10	14	—	16
P[d, *]	10	14	14	—

Tabelle 7: Die Menge P nach margin Regel(Beispiel 3)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neu Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{margin} = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{margin} \in \{a\}$ und der Sieger unter Berücksichtigung des Abstandes ist Kandidat a.

5.2.2 ratio

Eine weitere Methode, die eingesetzt wird, um einen Sieger zu erhalten ist ein Verhältnis (eng: ratio) zu ermitteln. Hierzu werden die Stimmen für den Sieger durch die Stimmen gegen den Sieger geteilt und damit das Verhältnis ausgerechnet, mit dem der Sieger gewonnen hat.

Beispielhaft wird wieder das Duelle von Kandidat a gegen Kandidat b betrachtet. Im Duell a gegen b ist, wie im Vergleich über den Abstand (Abschnitt 5.2.1), der direkte Weg der stärkste Weg. Der Stärkste Weg von Kandidat b zu Kandidat a ist im Vergleich über das Verhältnis aber ein anderer. Er führt von b über c nach a . Die kritische Verbindung ist in diesem Fall die Verbindung von c nach a, da hier ein Verhältnis von $36/28 \approx 1,286$, das kleinste Verhältnis auf diesem Weg darstellt. Wird der Weg von Kandidat b nach a aus Abschnitt 5.2.1 untersucht, ist dort die Kritische Verbindung d nach a, was ein Verhältnis von $50/40 = 1,25$ darstellt und damit ein schlechteres Verhältnis als der Weg b über c nach a hat.

Die Berechnung der besten Verhältnisse wird wieder für alle Duelle gemacht und Tabelle 8 zeigt die Menge P unter Betrachtung des Verhältnisses.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
P[a, *]	—	1,218	1,218	1,218
P[b, *]	1,286	—	1,339	1,339
P[c, *]	1,286	1,241	—	1,552
P[d, *]	1,25	1,241	1,241	—

Tabelle 8: Die Menge P nach ratio Regel(Beispiel 3)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neu Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{ratio} = \{ba, bc, bd, ca, cd, da\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{ratio} \in \{b\}$ und er Sieger unter Berücksichtigung des Verhältnisses ist Kandidat b.

5.2.3 winning votes

Es kann der Sieger aber auch als die Person gelten, die am meisten Siege hat (eng: winning votes). Dies ist auch das Verfahren, welches in den Beispiel 1 (Abschnitt: 3) und Beispiel 2 (Abschnitt: 4) eingesetzt wurde. Hier wird untersucht, welcher der beiden Kandidaten gewinnt. Exemplarisch tritt wieder Kandidat a gegen Kandidat b an. Kandidat a schlägt Kandidat b mit der direkten Verbindung mit 67 Stimmen, Kandidat b kann Kandidat a über den Weg b über c und d nach a schlagen. Jedoch ist hier die schwächste Verbindung, die Verbindung c nach d mit nur 45 Stimmen. Diese Werte (Kandidat a: 67 Stimmen, Kandidat b: 45 Stimmen) werden verglichen und Kandidat a gewinnt.

Diese Untersuchung wird für alle Duelle gemacht und es ergibt sich die in Tabelle 9 dargestellte Menge P.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
P[a, *]	—	67	76	45
P[b, *]	45	—	79	45
P[c, *]	45	45	—	45
P[d, *]	50	72	72	—

Tabelle 9: Die Menge P nach winning votes Regel(Beispiel 3)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neu Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{win} = \{ab, ac, bc, da, db, dc\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{win} \in \{d\}$ und er Sieger unter Berücksichtigung der *winningvotes* ist Kandidat d.

5.2.4 losing votes

Ein anderer Ansatz, der angewendet werden kann, ist den Kandidaten zum Sieger zu küren, der am wenigsten Gegenstimmen hat (eng. losing votes). Die kritische Verbindung ist dabei die Verbindung, bei der es die meisten Gegenstimmen gibt. Der stärkste Weg ist dann der Weg, bei dem die kritische Verbindung die wenigsten Gegenstimmen hat.

Für dieses Verfahren wird beispielhaft das Duell von Kandidat a und Kandidat c untersucht. Kandidat a kann Kandidat c schlagen über den Weg a über b nach c. Dort ist die kritische Verbindung zwischen Kandidat b und c, da es an dieser Stelle 59 Gegenstimmen gibt. Kandidat c kann Kandidat a über den direkten Weg schlagen und hat dabei nur 28 Gegenstimmen. Die zweite Möglichkeit wäre der Weg von c über d nach a, dort wäre die kritische Verbindung von Kandidat d nach a mit 40 Gegenstimmen. Daher wird die Direktverbindung genutzt mit nur 28 Gegenstimmen. Beide Wege werden nun verglichen und Kandidat c gewinnt gegen Kandidat a, da c nur 28 Gegenstimmen hat und Kandidat a 59 Gegenstimmen.

Alle Duelle werden so untersucht, die Ergebnisse, die die Menge P bilden, sind in Tabelle 10 eingetragen.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
P[a, *]	—	55	59	59
P[b, *]	59	—	59	59
P[c, *]	28	55	—	29
P[d, *]	40	55	59	—

Tabelle 10: Die Menge P nach losing votes Regel(Beispiel 3)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neu Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{los} = \{ab, ca, cb, cd, da, db\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{los} \in \{c\}$ und er Sieger unter Berücksichtigung der *losingvotes* ist Kandidat d.

5.3 Ergebnis

Dieses Beispiel zeigt, dass es schwer sein kann zu bestimmen, wann ein Kandidat einen anderen schlägt. Jede Methode ist logisch, korrekt und nachvollziehbar. Dass die vier vorgestellten Methoden unterschiedliche Ergebnisse liefern, ist aber nur dann der Fall, wenn es den Wählern erlaubt ist Kandidaten auch gleich zu bewerten. Daher muss beachtet werden, dass wenn man Kandidaten gleich bewerten kann, vorher festgelegt werden muss, nach welcher Methode die Stimmen bewertet werden, da es sonst unter Umständen zu verschiedenen Siegern kommen kann. Dieses Beispiel wurde extra so von Herrn Schulze in seiner Ausarbeitung „A New Monotonic, Clone-Independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-Consistent Single-Winner Election Method“[8] konstruiert, dass bei jeder der Methoden unter Abschnitt 5.2 immer ein anderer Sieger als Ergebnis geliefert wird. In der Realität kann es auch vorkommen, dass mehrere der vorgestellten Methoden dieselben Sieger liefern, auch wenn Kandidaten gleich bewertet wurden.

[8] Vgl. Schulze [2017]

6 Bewertung der Methode

6.1 Kriterien der Sozialwahltheorie

Um zu belegen, dass eine Methode gerecht ist, muss eine Methode möglichst viele Kriterien der Sozialwahltheorie erfüllen. Einen kleinen Ausschnitt von Kriterien, die auch in Tabelle 11 aufgeführt sind werden hier erläutert. Eine vollständige Übersicht kann in „The Schulze Method of Voting“[9] gefunden werden. Dort wird in Kapitel 4 auch bewiesen, dass die Schulze Methode die Kriterien erfüllt.

6.1.1 Monotonie Kriterium

Der Gewinner einer Wahl kann nicht durch ein besseres Ranking verlieren und ein Verlierer durch ein schlechteres gewinnen.[10] Dieses Kriterium ist trivial, aber zeigt, dass die zugrundeliegende Wahlmethode nicht der erwarteten Logik einer Wahl widerspricht.

Das bedeutet, dass wenn die schwächste Verbindung des Siegers stärker werde, kann er dadurch nicht verlieren, dasselbe gilt auch für Verlierer, wenn deren schwächste Verbindungen schwächer werden, dann können sie damit nicht gewinnen.

6.1.2 Condorcet Kriterium

Nach der Wahl wird ein Zweikampf zweier Kandidaten simuliert und dabei untersucht, wie oft der Kandidat a dem Kandidat b vorgezogen wurde. Die Bedeutung von „vorgezogen“ wir in Abschnitt 5 für die Schulze Methode erläutert, ist im Allgemeinen aber Abhängig von der gewählten Wahlmethode. Condorcet-Sieger ist der Kandidat, der alle anderen Kandidaten schlägt. Einen solchen Sieger muss es nicht geben. Ein Wahlverfahren erfüllt das Condorcet-Kriterium, wenn der gewählte Sieger auch der Condorcet-Sieger ist, sofern es einen Condorcet-Sieger gibt.[11]

Das Verhalten konnte in Beispiel 1 (Abschnitt 3) beobachtet werden, dort wurde auch der Condorcet-Sieger der Sieger der Schulze Methode.

6.1.3 Lösbarkeitskriterium

Es gibt Situationen, in dem kann eine Wahlmethode keinen eindeutigen Sieger hervorbringen, da die Stimmsituation für zwei oder mehrere Kandidaten gleich sind. Auch die Schulze Methode kann nicht immer direkt einen eindeutigen Sieger bestimmen. Jedoch kann man mathematisch zeigen, dass eine Methode im Allgemeinen eine eindeutige Lösung liefert.[12]

[9]Vgl. Schulze [2018] Kapitel 11
[10]Vgl. Woodall [1996]
[11]Vgl. Johnson [2005]
[12]Vgl. Schulze [2017]

1. Wenn die Anzahl der Stimmen Richtung unendlich tendiert, geht die Wahrscheinlichkeit keinen eindeutigen Sieger zu erhalten gegen Null.
2. Wenn es mehr als einen Sieger gibt, reicht eine einzelne Stimme, um einen eindeutigen Sieger zu erhalten.

Für die Schulz Methode bedeutet zwei Sieger immer, dass zwei Kandidaten nicht geschlagen wurden, beispielsweise die Kandidaten a und b. Wenn eine weitere Stimme hinzukommt, die zwischen den beiden Siegern a und b unterscheidet, z.B. Kandidat a wird dem Kandidaten b vorgezogen, so ändert sich die schwächsten Verbindungen zu Gunsten des Kandidaten a, sodass nun ein eindeutiger Sieger gefunden werden kann, da b nun von a geschlagen wird.

6.1.4 Pareto Kriterium

Dieses Kriterium gibt an, dass

1. wenn jeder Wähler Kandidat a, Kandidat b vorzieht, muss Kandidat a immer Kandidat b bevorzugt werden
2. wenn kein Wähler Kandidat a, Kandidat b vorzieht, muss Kandidat a nicht besser sein als b.[13]

   Dieses Prinzip wird wichtig wenn Kandidaten gleich oder nicht bewertet werden. Dort darf keine Methode einen der beiden Kandidaten auswählen und eine bestimmte Platzierung geben oder in eine Reihenfolge einordnen, diese Kandidaten wenn sie nicht unterschieden werden können immer auf derselben Ebene auftreten.

   Dies wird oftmals gebrochen, wenn die Auswertung eine Reihenfolge ausgeben muss und dann einfach der Kandidat der im Alphabet als erstes kommt zuerst anzeigt, oder der der in der Liste als erstes auftaucht. Das muss aber von der Wahlmethode auf jeden Fall unterbunden werden, so wie die Schulze Methode es auch macht.

6.2 Vergleich mit anderen Methoden

Das Forschungsgebiet der Sozialwahltheorie ist seit dem 19. Jahrhundert ein wichtiges Gebiet, um gerechte Wahlen zu garantieren. Daher gibt es auch eine große Anzahl von anderen Methoden, die einen Sieger hervorbringen. Eine Methode die laut Barry Wright[14] mit hoher Wahrscheinlichkeit das selbe Ergebnis liefert, wie die Schulze Methode ist die Simpson-Kramer Methode.

Diese Methode erklärt die Person zum Sieger, deren größte Niederlage kleiner war als alle Niederlagen der anderen Kandidaten[15].

[13] Vgl. Schulze [2017]
[14] Vgl. Wright [2009]
[15] Vgl. Nurmi [2017]

Wie in Tabelle 11 zu sehen ist, erfüllt diese Methode aufgrund seiner Simplizität nur eine geringe Anzahl von Kriterien im Vergleich zur Schulze Methode. Diese Methode wird auch als Minmax-Methode bezeichnet.

Kriterien	Schulze	Simpson-Kramer
resolvability	Ja	Ja
Pareto	Ja	Ja
reversal symmetry	Ja	Nein
monotonicity	Ja	Ja
independence of clones	Ja	Nein
Smith	Ja	Nein
Smith-IIA	Ja	Nein
Condorcet	Ja	Ja
Condorcet loser	Ja	Nein
majority for solid coalitions	Ja	Nein
majority	Ja	Ja
majority loser	Ja	Nein
participation	Nein	Nein
MinMax set	Ja	Nein
prudence	Ja	Ja
polynomial runtime	Ja	Ja

Tabelle 11: Vergleich der Schulze Methode mit der Simpson-Kramer Methode.

Bei der Tabelle wir deutlich, dass es auch die Schulze Methode nicht schafft alle Kriterien zu erfüllen, jedoch vielen Anforderungen erfüllt, die andere Methoden nicht erfüllen. Und daher deutlich wird, dass die Schulze Methode eine gute condorcet Methode ist, um einen Sieger zu ermitteln.

6.3 Eindeutigkeit

Die Schulze Methode wurde als eine Methode vorgestellt, die einen Sieger ermittelt. Jedoch ist das nicht ganz richtig. Es kann auch vorkommen, dass zwei Sieger gefunden werden. Wenn man eine Situation wie diese

$$\textbf{3 mal}\ a \succ_v b \succ_v c \succ_v d$$
$$\textbf{2 mal}\ c \succ_v b \succ_v d \succ_v a$$
$$\textbf{2 mal}\ d \succ_v a \succ_v b \succ_v c$$
$$\textbf{2 mal}\ d \succ_v b \succ_v c \succ_v a$$

untersucht, erhält man nicht einen Sieger sondern zwei, $\mathcal{S} = \{b, d\}$. Die Schulze Methode bietet keine Möglichkeit einen eindeutigen Sieger in dieser Situation zu ermitteln. In diesen Fällen wird geraten eine Stichwahl zwischen den Kandidaten durchzuführen.

7 Bewertung des Algorithmus

7.1 Überführung

Im Folgenden wird kurz erläutert, wie die Schulze Methode Schritt für Schritt in einen Algorithmus überführt wird.

Als Eingabe wird die Menge N als zweidimensionales Array dem Algorithmus übergeben. Dort sind die Stimmen eingetragen, die jeder Kandidat gegen jeden anderen Kandidaten bekommen hat.

Als Ausgabe erhält man ein Array der Sieger.

7.1.1 Initialisierung

Zuerst muss die Menge P_D initialisiert werden, dies ist ein zweidimensionales Array, dass die schwächste Verbindungen der stärksten Wege aufnimmt. Dort werden initial auch die Werte aus der Menge N übernommen, abhängig vom Ansatz *margin*, *ratio*, *winningvotes* und *loosingvotes*, die in Beispiel 3 erläutert wurden.

7.1.2 Stärkste Wege

Nun müssen die Stärksten Wege gefunden werden. Dazu müssen drei Schleifen ineinander verschachtelt werden. Die jeweils alle Kandidaten durchgehen, also jeweils C mal läuft. Nun werden alle Wege zwischen zwei Kandidaten gesucht, dazu dienen zwei Schleifen und eine dritte Schleife sorgt dafür, dass alle Wege untersucht werden. Wird ein Weg gefunden, der stärker ist, als der Weg der bisher eingetragen ist so wird der bestehende Wert mit dem Wert des stärkeren Wegs überschrieben.

Nachdem die Auswertung durchgelaufen ist, enthält das Arras P_D für jedes Duell jeweils die schwächste Verbindung der stärksten Wege.

7.1.3 Ergebnis

Nun muss der Sieger ermittelt werden. Dazu wird ein neues Array winner erstellt und jeder Kandidat wird dort erstmal als Sieger eingetragen. Es werden nun wieder mit zwei Schleifen alle Kandidaten mit allen verglichen. Wenn ein Kandidat gegen seinen Gegenkandidaten verliert, wird der Kandidat in dem winner Array sofort auf false gesetzt, da er nicht mehr gewinnen kann, da er einmal geschlagen wurde. Nachdem alle Duelle stattgefunden haben enthält das Array winner C Werte, das zurückgegeben wird. *true* bedeutet, dass der Kandidat ein Sieger ist. Der Kandidat wird über den Index des Arrays identifiziert.

7.2 Implementierung

Der Autor hat eine mögliche Implementierung der Schulze Methode in Java entwickelt. Die untenstehende Implementierung arbeitet nach der „winning votes " Methode, die in Beispiel 3 in Abschnitt 5.2.3 beschrieben wird. Wie in Beispiel 3 (Abschnitt: 5) zu erkennen ist, gibt es auch für die anderen Möglichkeiten einen Sieger zu bestimmen.

Eine vollständige Implementierung kann auf GitHub eingesehen werden.[16] Dort sind auch Beispielaufrufe hinterlegt.

```java
package com.SteffenHo;

public class Schulze {

    private int count;
    private int [][] N;
    private double [][] P;
    private Boolean[] winners;

    public Schulze(int [][] pN, int pCount) {
        count = pCount;
        N = pN;

        SchulzeHelper.printN(N, count);

        init();
        findStrongesPath();
        calculatingWinners();
    }

    /**
     * Initialize the Array which contains the duel of all alternatives.
     */
    public void init() {
        P = SchulzeHelper.init2DDoubleArray(count);
        for (int i = 0; i < count; i++) {
            for (int j = 0; j < count; j++) {
                if (i != j) {
                    if (N[i][j] > N[j][i]) { // alternative i wins against j
                        P[i][j] = N[i][j]; // winning votes
                    }

                } else {
                    P[i][j] = 0; // alternative i loses
                }
            }
        }
    }
```

[16] https://github.com/SteffenHo/SchulzeImplementation

```java
        SchulzeHelper.printP(P,count);
}

    /**
     * Finding the strongest path by winning votes method
     */
    private void findStrongesPath() {
        for (int i = 0; i < count; i++) {
            for (int j = 0; j < count; j++) {
                if (i != j) {
                    for (int k = 0; k < count; k++) {
                        if (i != k && j != k) {
                            if (P[j][k] < Math.min(P[j][i], P[i][k])) { // calculate the critical link in the
                                strongest path
                                P[j][k] = Math.min(P[j][i], P[i][k]);
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }
        SchulzeHelper.printP(P, count);
    }

    /**
     * Make all duel for all alternative and check if there is a winner
     */
    private void calculatingWinners() {
        winners = SchulzeHelper.initWinnerArray(count);
        for (int i = 0; i < count; i++) {
            winners[i] = true;
            for (int j = 0; j < count; j++) {
                if (i != j) {
                    if (P[j][i] > P[i][j]) {
                        winners[i] = false; // ji is not in the relation O and the winner muss be in relation O
                    }
                }
            }
        }
        SchulzeHelper.printWinner(winners, count);
    }

}
```

Listing 1: Grundlegender Funktionsaufbau der Schulze Methode in Java

7.3 Laufzeit

Die Laufzeitkomplexität der Schulze Methode ist mit $O(C^3)$ nicht besonders gut, wobei C die Anzahl der Kandidaten ist. Diese Komplexität sieht man auch in der Implementierung in Abschnitt 7.2, dort wird über mit einer dreifach verschachtelten Schleife über ein Array iteriert. Jedoch ist die Laufzeit zu relativieren, da diese Methode zum Auswerten einer Wahl nur einmal laufen muss, um ein Ergebnis zu liefern.

Auch wird die Zahl der Kandidaten meist nicht ins unendliche steigen, da es in normalen Wahlen eine endlich oft recht begrenzte Anzahl von Kandidaten gibt. Trotzdem muss man die Komplexität beachten, wenn man die Schulze Methode in Systeme einbaut, die nicht eine klassische Abstimmung, wie es sie z.B. in Politik gibt, entsprechen und C beliebig groß werden kann.

8 Fazit

8.1 Eingangsbeispiel

Ganz zu Beginn (Abschnitt 1.2) wurde eine Wahlsituation von 30 Wählern und 3 Kandidaten beschrieben, die auf den ersten Blick kein Sieger geliefert hat. Die Wahl kann mit der Schulze Methode ausgewertet werden und liefert auch Kandidat a als Sieger. Der Unterschied, die naive Idee, a zu nehmen weil der Kandidat auch viele Zweitstimmen hatte, fühlt sich gerecht an. Die Schulze Methode kann mathematisch beweisen, dass sie nach bestimmten Kriterien gerecht ist.

8.2 Einsatz

Erstmals wurde die Schulze Methode 2003 im Debian, eine Linux Distribution, eingesetzt. Dort waren es ca. 1000 Wahlberechtigte, die ihre Wahlen mit dieser Methode auswerten.[17] Sie nutzen die Schulze Methode z.B. um bestimmte Features auszuwählen. Beispielsweise wurde im Jahr 2014 mit der Schulze Methode über das Init-System für Debian abgestimmt.[18]

2008, 2009 und 2011 wurde die Schulze Methode von Wikimedia, den Dachverband von Wikipedia, genutzt, um zu entscheiden wer die Führung der Organisation übernehmen soll. Es waren im Jahr 2011 43.000 Wahlberechtigte. [19]

Auch in der Politik hat diese Methode ihre Heimat gefunden. 2009 hat die Piratenpartei von Schweden diese Wahlmethode eingeführt, 2010 die Piratenpartei Deutschland, 2011 die Australische Piratenpartei, 2013 die Piratenpartei Island, 2015 die niederländische Piratenpartei.[20]

Die Schulze Methode hat sich über die Jahre zu der am weitesten verbreiteten Condorcet Methode entwickelt. Über 60 Organisationen mit über 800.000 Wahlberechtigten nutzen diese Methode.[21] Des weiteren arbeiten auch einige online Tools damit, wie z.B. GoogleVotes, bei denen man nicht genau beziffern kann, wie viele Wahlberechtigte diese Tools generieren.[22]

[17] Vgl. Debian [2018]
[18] Vgl. Leemhu [2014]
[19] Vgl. Schulze [2017]
[20] Vgl. Lohmann [2013]
[21] Vgl. Schulze [2018]
[22] Vgl. Lopes [2015]

Literaturverzeichnis

[Debian 2018] Debian: *Debian-Abstimmungs-Informationen*. https://www.debian.org/vote/. Version: 2018

[rer. pol. Enrico Schöbel 2018] Enrico Schöbel, Dr. rer. p.: *Condorcet-Paradoxon*. https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/condorcet-paradoxon-29229/version-252842. Version: Februar 2018

[Johnson 2005] Johnson, Paul e.: *Voting Systems*. http://pj.freefaculty.org/Ukraine/PJ3_VotingSystemsEssay.pdf. Version: Mai 2005

[Leemhu 2014] Leemhu, Thorsten: Debian-Gremium versucht schrittweise Init-System-Wahl. In: *heise.de* (2014). https://www.heise.de/newsticker/meldung/Debian-Gremium-versucht-schrittweise-Init-System-Wahl-2097650.html

[Lohmann 2013] Lohmann, Niels: *Satzungsänderungsantrag SÄA 06 (Präferenzwahl nach Schulze)*. https://wiki.piratenpartei.de/MV:Landesmitgliederversammlung_2013.1/S%C3%84A06. Version: 2013

[Lopes 2015] Lopes, Steve Hardt Lia C. R.: *Google Votes: A Liquid Democracy Experiment on a Corporate Social Network*. https://www.tdcommons.org/cgi/viewcontent.cgi?article=1092&context=dpubs_series. Version: Juni 2015

[Nurmi 2017] Nurmi, Dan S. Felsenthal H.: *Monotonicity Failures Afflicting Procedures for Electing a Single Candidate*. Springer International Publishing, 2017. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-51061-3. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-51061-3. – ISBN 978–3–319–51060–6

[Prof. Dr. Hans Werner Lang 2018] Prof. Dr. Hans Werner Lang, Hochschule F.: *Mathematische Grundlagen Menge, Relation, Abbildung*. http://www.iti.fh-flensburg.de/lang/algorithmen/grundlagen/menge.htm. Version: Juni 2018

[Scheubrein 2013] Scheubrein, R.: *Computerunterstüzte Gruppenentscheidungen*. Deutscher Universitätsverlag, 2013 (Informationsmanagement und Computer Aided Team). https://books.google.de/books?id=hrAdBgAAQBAJ. – ISBN 9783663083191

[Schulze 1997] Schulze, Markus: *Condorcet sub-cycle rule*. http://lists.electorama.com/pipermail/election-methods-electorama.com/1997-October/001570.html. Version: Oktober 1997

[Schulze 2017] Schulze, Markus: *A New Monotonic, Clone-Independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-Consistent Single-Winner Election Method*. http://m-schulze.9mail.de/schulze1.pdf. Version: März 2017

[Schulze 2018] Schulze, Markus: *The Schulze Method of Voting*. https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1804/1804.02973.pdf. Version: Juni 2018

[Woodall 1996] Woodall, D.R.: *Monotonicity and Single-Seat Election Rules*. http://www.votingmatters.org.uk/ISSUE6/P4.HTM. Version: Mai 1996

[Wright 2009] Wright, Barry: *Objective Measures of Preferential Ballot Voting Systems*. https://rangevoting.org/Wright_Barry.pdf. Version: 2009