Informatik.Softwaresysteme

Ausarbeitung spezielle Algorithmen

Schulze Methode

Algorithmus zum finden eines Eindeutigen Siegers

Abgabetermin: Bocholt, den 30.10.2018

Student:
Steffen Holtkamp
Thebenkamp 18
46342 Velen
Matrikelnummer: 201620684

Westfälische Hochschule - Bocholt
Prof. Dr. Martin Guddat
Münsterstraße 265
46397 Bocholt

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Listings

1 Einleitung

1.1 Markus Schulze

Die Schulze Methode wurde nach seinem Erfinder Markus Schulze benannt und wird in Fachkreisen auch als „Schwartz Sequential dropping“ oder auch „path winner“ Methode bezeichnet.

Die Schulze Methode ist ein verfahren, um aus einer Liste von Kandidaten einen eindeutigen Sieger zu ermitteln.

Er hat diese Methode zuerst 1997 erstmal in einer offenen Mail zur Diskussion gestellt und veröffentliche immer wieder aktualisierte Versionen seiner Theorie. In dieser Ausarbeitung bezieht sich der Autor dabei auf seine aktualisierte Ausarbeitung aus dem Jahr 2017.Schulze [2017, vgl.].

1.2 Problemstellung

Das Problem einen eindeutigen Sieger zu finden, das mit der vorgestellten Theorie gelöst werden soll, fällt in das Gebiet der Sozialwahltheorie. Dieses interdisziplinäre Forschungsgebiet beschäftigt sich mit der Untersuchung von Gruppenentscheidungen. In dieser Forschung werden individuelle Präferenzen und Entscheidungen der der teilnehmenden Personen aggregiert, um daraus eine „gerechte“ kollektive Entscheidung abzuleiten. Damit man eine „gerechte“ Methode finden kann, beschäftigen sich viele Teilbereiche der Forschung, wie z.B. die Mathematik, Volkswirtschaft, Psychologie, Philosophie, Politikwissenschaft und Rechtswissenschaft mit diesem Thema und stellen dabei verschiedenste Ansätze und Vorgehensweisen vor. Alle beteiligten Forschungsgebiete stellen dabei Definitionen auf, was eine „gerechte“ Methode erfüllen muss. [Scheubrein, 2013, vgl.]

Daher haben sich über die Jahre Qualitätskriterien entwickelt, an denen man Messen kann, ob eine Methode im Sinne der Sozialwahltheorie „gerechte“ ist.

Im Folgenden werden einige Kriterien definiert, die in der Sozialwahltheorie von Bedeutung sind. In Abschnitt 7 werden diese Kriterien erneut untersucht und festgestellt in wieweit die Schulze Methode diesen Kriterien gerecht wird. Viele dieser Kriterien gelten für Methoden, die einen Sieger oder mehrere Sieger ermitteln.

1.2.1 Monotonie Kriterium

Der Gewinner einer Wahl kann nicht durch ein besseres Ranking verlieren und ein Verlierer durch ein schlechteres gewinnen. [Woodall, 1996]

1.2.2 Condorcet Kriterium

Nach der Wahl wird ein zweikampf zweier Kandidaten Simuliert und dabei untersucht, wie oft der Kandidat A dem Kandidat B vorgezogen wurde. Condorcet-Sieger ist der Kandidat der alle anderen Kandidaten Schlägt. Einen solchen Sieger muss es nicht geben. Ein Wahlverfahren erfüllt das Condorect-Kriterium, wenn der gewählte Sieger auch der Condorcet-Sieger ist, sofern es einen Condorcet-Sieger gibt. [Johnson, 2005]

1.2.3 Lösbarkeits Kriterium

Eine Wahlmethode erfüllt dieses Kriterium, wenn es einen Eindeutigen Sieger gibt, hierbei gibt es zwei Ansätze dies zu prüfen [Schulze, 2017]

1. Wenn die Menge der Stimmen Richtung unendlich tendiert, geht der die Wahrscheinlichkeit keinen eindeutigen Sieger zu haben gegen Null
2. Wenn es mehr als einen Sieger gibt, reicht einen einzelnen Stimme, um einen eindeutigen Sieger zu erhalten.

1.2.4 Pareto Kriterium

Dieses Kriterium gibt an, dass

1. wenn jeder Wähler Alternative A, Alternative B vorzieht, muss Alternative A immer Alternative B bevorzugt werden
2. wenn kein Wähler Alternative A, Alternative B vorzieht, muss Alternative A nicht besser sein als B. [Schulze, 2017]

Dies ist nur ein Ausschnitt von Kriterien, die für eine gute Wahlmethode gelten müssen. Eine größere Übersicht kann in Markus Schulzes "The Schulze Method of Voting" [Schulze, 2018] Kapitel 11 gefunden werden. Dort wird in Kapitel 4 auch bewiesen, dass die Schulze Methode die Kriterien erfüllt. Ein Beispiel für die Richtigkeit des Condorcet Kriteriums kann im ersten Beispiel (Abschnitt: 4) gefunden werden.

2 Definition

2.1 Voraussetzungen

Es gibt einige Voraussetzungen, die eine Wahl erfüllen muss, damit man die Schulze Methode auf diese Wahl anwenden kann.

1. Es muss mindestens zwei Kandidaten geben, die sich zu Wahl stellen, da sonst keine Rangfolge erstellt werden kann. Bei zwei Kandidaten ist die Lösung jedoch trivial, da dort der Gewinner der Kandidat ist, der am häufigsten, von den Wählern dem Gegner vorgezogen wurde.

   Mathematische Definition: Sei A eine endliche nicht leere Menge an Kandidaten. Wobei die Anzahl der Kandidaten C ist und gilt:

   $$C \in \ \mathbb{N} \ und \ 1 < C < \ \infty$$

2. Jeder Wähler ordnet die Kandidaten eine Zahl zu und aus dieser Zahl wird eine Rangfolge erstellt. Je kleiner die Zahl ist desto höher ist die Platzierung. Hierbei ist die Größe der Zahl oder der Abstand uninteressant, da nur die Rangfolge betrachtet wird.

   Des weiteren gilt:

   2.1. Es können mehrere Kandidaten den gleichen Rang haben, dass bedeutet, dass kein Kandidat dem anderen Kandidaten auf der selben Platzierung vorgezogen wird.

   2.2. Wenn ein Wähler keine Bewertung für einen Kandidaten abgibt, werden alle Kandidaten, die eine Bewertung haben, diesem Kandidaten vorgezogen. Werden mehrere Kandidaten nicht bewertet, werden sie wir im vorherigen Punkt bewertet.

2.2 Begriffsdefinition und Erläuterungen

Bevor die Theoretische Definition aufgestellt werden kann müssen einige Begriffe, Formeln und Notationen besprochen werden, um die Definition einfacher zu verstehen.

2.2.1 Verbindung

Eine Verbindung in diesem Kontext bedeutet, dass zwei Kandidaten gegeneinander antreten und diese Duell ist eine Verbindung mit folgender Notation

$$(N[a,b], N[b,a])$$

Beispiel: Kandidat a wird von fünf Wählern dem Kandidaten b bevorzugt, und Kandidat b wird von zwei Wählern Kandidat a vorgezogen, würde wie folgt Notiert werden.

$$(5,2)$$

2.2.2 Weg

Ein Weg beschreibt Verbindungen zweier Kandidaten. Diese Kandidaten können direkt Verbunden werden oder auch über andere Kandidaten laufen. Dies wird wie folgt notiert.

$$c(1), ..., c(2)$$

Beispiel: Kandidat a schlägt Kandidat b und Kandidat b schlägt Kandidat c, dann schlägt Kandidat a auch Kandidat c, da Kandidat a, Kandidat b schlagen kann.

2.2.3 Relation

„Seien A und B Mengen. Eine Teilmenge R enthalten in $A \times B$ heißt (zweistellige) Relation zwischen A und B. Gilt $A = B$, so heißt R Relation auf A.“[Prof. Dr. Hans Werner Lang, 2018]

2.2.4 Die Menge N

Die Menge N kann man sich als Tabelle Vorstellen in der die Ergebnisse der Duelle der Kandidaten enthalten sind. Ein Beispiel hierfür findet man im Beispiel 1. Hier Verweis einfügen.

2.2.5 $_{D}z$

Der Wert $_{D}z$ eines Weges ist der Wert, der die schwächste Verbindung repräsentiert.

2.2.6 P_D

Diese Menge enthält die stärksten Wege zwischen den Kandidaten. Sprich die Wege, in denen die schwächste Verbindung des Weges, stärker ist als alle anderen schwächsten Verbindungen von Wegen die vom gleichen Kandidaten ausgehen und zum gleichen Kandidaten führen.

Beispiel: $P_D[a, b]$ enthält den stärksten Weg zwischen Kandidat a und Kandidat B

2.3 Theoretische Grundlagen

Die grundsätzliche Idee der Schulze Methode ist es, dass Condorectes Verfahren, also ein Duell von Kandidat A gegen Kandidat B, einzusetzen. Hierbei wird das Verfahren jedoch erweitert, indem die Werte für die Duelle erst mit der Schulze Methode ermittelt werden.

In diesem Abschnitt werden die Theoretischen Grundlagen erläutert und in den Abschnitten 4 und **??** ein Beispielen erläutert.

(2.3.1) Ein Weg von Kandidat $x \in A$ zu Kandidat $y \in A$ ist eine folgen von Kandidaten $c(1), ..., c(n) \in A$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $x \equiv c(1)$
2. $y \equiv c(n)$
3. $2 \leq n \leq \infty$
4. For all $i = 1, ..., (n-1) : c(i) \not\equiv c(i+1)$

(2.3.2) Die Stärke eines Weges $c(1), ..., c(n)$ ist $min_{\mathrm{D}}\{(N[c(i), c(i+1)], N[c(i+1), c(i)])|i = 1, ..., n-1\}$.

In anderen Worten: Die Stärke eines Weges ist die Stärke der schwächsten Verbindung.

(2.3.3) Wenn ein Weg $c(1), .., c(n)$ die Stärke $z \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ hat, dann ist die kritische Verbindung dieses Weges, die Verbindung von $(N[c(i), c(i+1)], N[c(i+1), c(i)]) \approx_{\mathrm{D}} z$.

$$\begin{aligned} P_D[a, b] := max_{\mathrm{D}}\{min_{\mathrm{D}}\{(N[c(i), c(i+1)], N[c(i+1), c(i)])|i = 1, ..., n-1\} \\ |c(1), ..., c(n) \text{ ein Weg von Kandidat a zu Kandidat b}\} \end{aligned}$$

In andere Worten: $P_D[a, b] \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist die Stärke des stärksten Weges von Kandidat $a \in A$ zu Kandidat $b \in A$.

(2.3.4) Die zweistellige Relation $\mathcal{O}$ auf A ist wie folgt definiert:

$$ab \in \mathcal{O} :\Leftrightarrow P_D[a, b] >_D P_D[b, a]$$

(2.3.5) Daraus folgt, dass die Menge der Sieger sich wie folgt ergibt:

$$\mathcal{S} := \{a \in A | \forall b \in A \ \{a\} : ba \notin \mathcal{O}\}$$

3 Implementierung

Der Autor hat eine mögliche Implementierung der Schulze Methode in Java entwickelt. Die untenstehende Implementierung arbeitet nach der "winning votes" Methode, die in Beispiel 3 in Abschnitt 6.2.3 beschrieben wird. Wie in Beispiel 3 (Abschnitt: 6) zu erkennen ist, gibt es auch für die anderen Möglichkeiten einen Sieger zu bestimmen.

Eine Vollständige Implementierung kann man auf Gitub finden.[1] Dort sind auch Beispielaufrufe hinterlegt.

```java
package com.SteffenHo;

public class Schulze {

    private int count;
    private int[][] N;
    private double[][] P;
    private Boolean[] winners;

    public Schulze(int[][] pN, int pCount) {
        count = pCount;
        N = pN;

        SchulzeHelper.printN(N, count);

        init();
        findStrongesPath();
        calculatingWinners();
    }

    /**
     * Initialize the Array which contains the duel of all alternatives.
     */
    public void init() {
        P = SchulzeHelper.init2DDoubleArray(count);
        for (int i = 0; i < count; i++) {
            for (int j = 0; j < count; j++) {
                if (i != j) {
                    if (N[i][j] > N[j][i]) { // alternative i wins against j
                        P[i][j] = N[i][j]; // winning votes
                    }

                } else {
                    P[i][j] = 0; // alternative i loses
                }
            }
        }
    }
```

[1] https://github.com/SteffenHo/SchulzeImplementation

```
        SchulzeHelper.printP(P,count);
}

    /**
     * Finding the strongest path by winning votes method
     */
    private void findStrongesPath() {
        for (int i = 0; i < count; i++) {
            for (int j = 0; j < count; j++) {
                if (i != j) {
                    for (int k = 0; k < count; k++) {
                        if (i != k && j != k) {
                            if (P[j][k] < Math.min(P[j][i], P[i][k])) { // calculate the critical link in the
                                strongest path
                                P[j][k] = Math.min(P[j][i], P[i][k]);
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }
        SchulzeHelper.printP(P, count);
    }

    /**
     * Make all duel for all alternative and check if there is a winner
     */
    private void calculatingWinners() {
        winners = SchulzeHelper.initWinnerArray(count);
        for (int i = 0; i < count; i++) {
            winners[i] = true;
            for (int j = 0; j < count; j++) {
                if (i != j) {
                    if (P[j][i] > P[i][j]) {
                        winners[i] = false; // ji is not in the relation O and the winner muss be in relation O
                    }
                }
            }
        }
        SchulzeHelper.printWinner(winners, count);
    }

}
```

4 Beispiel 1

4.1 Ausgangssituation

Im ersten Beispiel wird zuerst eine Wahl untersucht, in der jeder Teilnehmer alle Kandidaten bewertet hat und damit eine eindeutige Reihenfolge der Kandidaten generiert werden kann. Kein Kandidat wurde gleich behandelt oder nicht bewertet.

Daher ergibt sich Folgende Ausgangssituation: Ein Kurs von 28 Studierenden wählt einen Kurssprecher. Zur Wahl stellt sich Anton (Kandidat A), Berta (Kandidatin B), Conny (Kandidatin C) und Dennis (Kandidat D).

Jeder der 28 Studierenden muss die Kandidaten nach Erst-, Zweit-, Dritt- und Viertwunsch ordnen. Nach der Auszählung hat sich Folgende Situation eingespielt.

$$\textbf{6 mal } a \succ_v b \succ_v d \succ_v c$$

$$\textbf{4 mal } c \succ_v a \succ_v b \succ_v d$$

$$\textbf{10 mal } b \succ_v d \succ_v a \succ_v c$$

$$\textbf{3 mal } b \succ_v a \succ_v d \succ_v c$$

$$\textbf{5 mal } d \succ_v c \succ_v b \succ_v a$$

Dies bedeutet Beispielhaft für die erste Zeile, dass sechs mal Wahlzettel abgegeben wurden die Anton als Erstwunsch, Berta als Zweitwunsch, Dennis als Drittwunsch und Conny als Viertwunsch angegeben haben.

Dieses Ergebnis der Wahl wird nun in die Schulze Methode überführt und bewertet.

4.2 Lösungsschritte

Um mit die Schulze Methode anzuwenden, müssen wir zuerst die Menge N bestimmen. Diese Menge erhält man, Indem man Jeden Kandidaten gegen jeden Kandidaten antreten lässt.

Zuerst muss man alle möglichen Duelle aufstellen und untersuchen, welcher Kandidat wie viele Stimmen erhält.

Exemplarisch wird das Duell a gegen b durchgeführt und die Kandidaten c und d ignoriert. Es können diese Kandidaten im Duell ignoriert werden, da es irrelevant ist, wo das Duell stattfindet, ob die beiden Kandidaten Dritt- und Viertwunsch sind oder ein Kandidat Erstwunsch und der andere Zweitwunsch ist. Diese Betrachtung wird in das Verfahren mit aufgenommen, indem alle Kandidaten gegeneinander antreten.

$$\textbf{6 mal } a \succ_v b$$

4 mal $a \succ_v b$

10 mal $b \succ_v a$

3 mal $b \succ_v a$

5 mal $b \succ_v a$

Wird nun dieses Duell betrachte, erhalten Kandidat a 10 Stimmen und Kandidat b 18 Stimmen und Kandidat b gewinnt damit.

Wenn man dies für alle Duelle macht erhält man diese Auflistung.

a **vs.** b 10 Stimmen gegen 18 Stimmen, b gewinnt

a **vs.** c 19 Stimmen gegen 9 Stimmen, a gewinnt

a **vs.** d 13 Stimmen gegen 15 Stimmen, d gewinnt

b **vs.** c 19 Stimmen gegen 9 Stimmen, b gewinnt

b **vs.** d 23 Stimmen gegen 5 Stimmen, b gewinnt

c **vs.** d 4 Stimmen gegen 24 Stimmen, d gewinnt

Mit diesen Werten kann man nun die Menge N, wie in Tabelle 1 zu sehen, aufstellen.

	N[*,a]	N[*,b]	N[*,c]	N[*,d]
N[a, *]	—	10	19	13
N[b, *]	18	—	19	23
N[c, *]	9	9	—	4
N[d, *]	15	5	24	—

Tabelle 1: Die Menge N (Beispiel 1)

Im nächsten Schritt müssen die Wege zwischen den Kandidaten gesucht werden, wie es in der Definition 2.3 beschreiben wird. Zyklische Verbindungen sind nicht erlaubt.

In Abbildung 1 ist die Menge N als gerichteter Graph aufgezeichnet.

In den Graph wurden gerichtete Kanten vom Sieger in die Richtung des Verlierers gezogen und das Kantengewicht des Siegers der Duelle aufgetragen. Nun muss 2.3 (2.3.2) und 2.3 (2.3.3) angewendet werden, um die Menge P zu bilden, die die Stärksten Wege beinhaltet.

Dazu werden nun alle Wege zwischen den Kandidaten gebildet und der stärkste Weg, das ist jener, bei dem die schwächste Verbindung am größten ist, ausgewählt für die Menge P.

$a \rightarrow b$**:** Es gibt keinen Weg, der von a nach b führt.

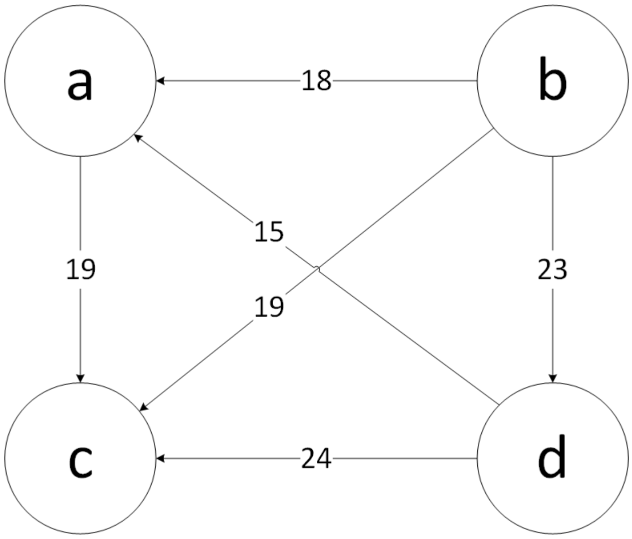

Abbildung 1: Graph über die Menge N (Beispiel 1)

$b \rightarrow a$**:** Es gibt zwei Wege die von b nach a führen.

Weg 1: b, 23, d, 15, a, der die Stärke $min_D\{23, 15\} \approx_D 15$ hat.

Weg 2: b, 18, a, der die Stärke 18 hat.

Damit ist ergibt sich die Stärke des stärksten Weges mit Hilfe von $max_D\{15, 18\} \approx_D 18$

$a \rightarrow c$ Es gibt einen Weg, der von a nach c führt.

Weg 1: a, 19, c, der die Stärke 19 hat.

Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 19.

$c \rightarrow a$ Es gibt keinen Weg, der von c nach a führt.

$a \rightarrow d$ Es gibt keinen Weg, der von a nach d führt.

$d \rightarrow a$ Es gibt einen Weg, der von d nach a führt.

Weg 1: d, 15, a, der die Stärke 15 hat.

Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 15.

$b \rightarrow c$**:** Es gibt drei Wege die von b nach c führen.

Weg 1: b, 18, a, 19, c, der die Stärke $min_D\{18, 19\} \approx_D 18$ hat.

Weg 2: b, 19, c, der die Stärke 19 hat.

Weg 3: b, 23, d, 24, c, der die Stärke $min_D\{23, 24\} \approx_D 23$ hat.

Damit ist ergibt sich die Stärke des stärksten Weges mit Hilfe von $max_D\{18, 19, 23\} \approx_D 23$

$c \rightarrow b$ Es gibt keinen Weg, der von c nach b führt.

$b \rightarrow d$ Es gibt einen Weg, der von b nach d führt.

Weg 1: b, 23, d, der die Stärke 23 hat.

Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 23.

$d \rightarrow b$ Es gibt keinen Weg, der von d nach b führt.

$c \rightarrow d$ Es gibt keinen Weg, der von c nach d führt.

$d \rightarrow c$ Es gibt einen Weg, der von d nach c führt.

Weg 1: d, 24, c, der die Stärke 24 hat.

Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 24.

So wurden alle Wege bestimmt und die kritischen Verbindungen gefunden, sodass sich in Tabelle 2 die menge P bildet.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
P[a, *]	—	—	19	—
P[b, *]	18	—	23	23
P[c, *]	—	—	—	—
P[d, *]	15	—	24	—

Tabelle 2: Die Menge P (Beispiel 1)

Nun lässt lässt man wieder die Kandidaten gegeneinander antreten dieses mal über die Menge P. Wenn es keinen Weg zwischen den Kandidaten gibt, also in der Tabelle ein '—' steht, so wird diese Verbindung als die Stärke 0 betrachtet.

Dieses Ergebnis wird in der Relation $\mathcal{O}$, wie in der Definition (2.3.4) 2.3 beschreiben.

a **gewinnt gegen** b : nein, daher kein Teil von $\mathcal{O}$

a **gewinnt gegen** c : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

a **gewinnt gegen** d : nein, daher kein Teil von $\mathcal{O}$

b **gewinnt gegen** a : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

b **gewinnt gegen** c : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

b **gewinnt gegen** d : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

c **gewinnt gegen** a : nein, daher nicht Teil von $\mathcal{O}$

c **gewinnt gegen** b : nein, daher nicht Teil von $\mathcal{O}$

c **gewinnt gegen** d : nein, daher nicht Teil von $\mathcal{O}$

d **gewinnt gegen** a : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

d **gewinnt gegen** b : nein, daher nicht Teil von $\mathcal{O}$

d **gewinnt gegen** c : ja, daher Teil von $\mathcal{O}$

Daher ergibt sich $\mathcal{O} = \{ac, ba, bc, bd, da, dc\}$

4.3 Ergebnis

Um den Sieger aus der Relation $\mathcal{O}$ zu finden muss wie in der Definition (2.3.5) 2.3 sichergestellt werden, das ein Sieger nie durch einen anderen Gegner geschlagen wird.

Um das zu prüfen, wird die Relation $\mathcal{O}$ durchgegangen und geprüft, ob es einen Kandidaten gibt, der immer nur auf der linken Seite eine Tupel z.B: "bd" steht und damit immer der Gewinner ist und nie geschlagen wurde, dann würde er auf der rechten Seite des Tupels stehen.

Für dieses Beispiel ergibt sich, das es nur einen Sieger in der Menge $\mathcal{S} = \{d\}$ gibt, den Kandidaten b. Damit haben wir nach der Schulze Methode festgestellt, dass Kandidatin Berta die Wahl gewonnen hat.

Zu Beginn des Beispiels konnte man sehen, dass Kandidatin Berta beim Duell mit den anderen Kandidaten gegen alle anderen Kandidaten gewonnen hat. Und die Frage stellen, wieso nicht an dieser Stelle schon die Siegerin festgelegt wurde? In dem Fall hat dieses Beispiel gezeigt, das die Schulze Methode das Condorcet Kriterium 1.2.2 erfüllt, das besagt, dass ein Kandidat, der gegen alle Gegner gewonnen hat auch der Sieger der Schulze Methode sein muss. Das Beispiel 2 5 zeigt, dass auch wenn kein Condorcet-Sieger existiert, ein Sieger mit der Schulze Methode ermittelt werden kann.

5 Beispiel 2

5.1 Ausgangssituation

Als Ausgangsmethode kann, wie in Beispiel 1 4.1, wieder eine Wahl eines Kurssprechers angenommen werden.

In dieser Wahl haben 21 Personen die Kandidaten a bis d in eine Reihenfolge sortiert.

$$\textbf{8 mal}\ \ a \succ_v c \succ_v d \succ_v b$$

$$\textbf{2 mal}\ \ b \succ_v a \succ_v d \succ_v c$$

$$\textbf{4 mal}\ \ c \succ_v d \succ_v b \succ_v a$$

4 mal $d \succ_v b \succ_v a \succ_v c$

3 mal $d \succ_v c \succ_v b \succ_v a$

5.2 Lösungsschritte

Zuerst werden die Kandidaten wieder gegeneinander aufgestellt.

a **vs.** b 8 Stimmen gegen 13 Stimmen, b gewinnt

a **vs.** c 14 Stimmen gegen 7 Stimmen, a gewinnt

a **vs.** d 10 Stimmen gegen 11 Stimmen, d gewinnt

b **vs.** c 6 Stimmen gegen 15 Stimmen, c gewinnt

b **vs.** d 2 Stimmen gegen 19 Stimmen, d gewinnt

c **vs.** d 12 Stimmen gegen 9 Stimmen, c gewinnt

In diesem Fall sieht man, dass es keinen Condorcet-Sieger gibt, also keiner es geschafft hat alle Gegner im Zweikampf zu überholen, diese Situation ist das sogenannte Condorcet-Paradoxon. [rer. pol. Enrico Schöbel, 2018]

Die Schulze Methode kann diese Problem jedoch lösen indem, wie in Tabelle **??** dargestellt, die Menge N gebildet wird.

	N[*,a]	N[*,b]	N[*,c]	N[*,d]
N[a, *]	—	8	14	10
N[b, *]	13	—	6	2
N[c, *]	7	15	—	12
N[d, *]	11	19	9	—

Tabelle 3: Die Menge N (Beispiel 2)

Aus der Menge N wird der Graph 2 erstellt.

Nun werden wieder die stärksten Pfade gesucht und in die Menge P eingefügt, die in Tabelle 4 zu sehen ist.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
PN[a, *]	—	14	14	12
PN[b, *]	13	—	13	12
P[c, *]	13	15	—	12
P[d, *]	13	19	13	—

Tabelle 4: Die Menge P (Beispiel 2)

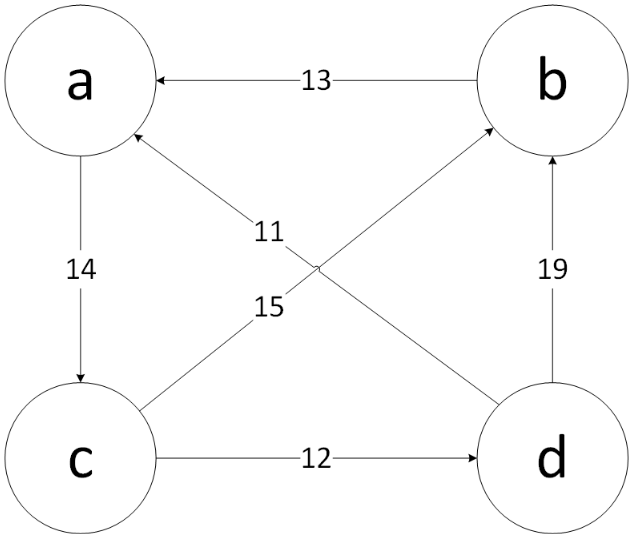

Abbildung 2: Graph über die Menge N(Beispiel 2)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neu Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O} = \{ab, ac, cb, da, db, dc\}$

5.3 Ergebnis

Analog zu Beispiel 1 (Abschnitt 4) wird die Relation $\mathcal{O}$ untersucht um die Menge der Sieger zu finden. In diesem Fall ist $\mathcal{S} = \{d\}$ und der Sieger ist Kandidat d. Hier sieht man, dass die Schulze Methode Probleme anderer Wahlverfahren lösen kann.

Eine Ausführliche Besprechung wie in Beispiel 1 kann in der orginal Ausarbeitung von Martin Schulze nachgelesen werden. [Schulze, 2017]

6 Beispiel 3

6.1 Ausgangssituation

Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, liefert die Schulze Methode auch Ergebnisse, wenn Kandidaten gleich bewertet wurden oder nicht bewertet wurden. Nicht bewertete Kandidaten werden dabei behandelt, als wären sie alle vom Wähler auf dem letzten Platz gewählt worden, sodass jeder Kandidat, der vom Wähler bewertet wurde, den nicht bewerteten Kandidaten vorgezogen wird.

$$\textbf{6 mal} \;\; a \succ_v b \succ_v c \succ_v d$$

$$\textbf{8 mal} \;\; a \approx_v b \succ_v c \approx_v d$$

$$\textbf{8 mal} \;\; a \approx_v c \succ_v b \approx_v d$$

$$\textbf{18 mal}\ a \approx_v c \succ_v d \succ_v b$$

$$\textbf{8 mal}\ a \approx_v c \approx_v d \succ_v d$$

$$\textbf{40 mal}\ b \succ_v a \approx_v c \approx_v d$$

$$\textbf{4 mal}\ c \succ_v b \succ_v d \succ_v a$$

$$\textbf{9 mal}\ c \succ_v d \succ_v a \succ_v b$$

$$\textbf{8 mal}\ c \approx_v d \succ_v a \approx_v b$$

$$\textbf{14 mal}\ d \succ_v a \succ_v b \succ_v c$$

$$\textbf{11 mal}\ d \succ_v b \succ_v c \succ_v a$$

$$\textbf{4 mal}\ d \succ_v c \succ_v a \succ_v b$$

Zur erläuterung betrachten wir einmal die Wahl $a \approx_v b \succ_v c \approx_v d$. Hier hat der Kandidat gesagt er möchte lieber Kandidat a oder b welcher ist ihm dabei egal, aber lieber einen von den Kandidaten als die Kandidaten b oder d. Dort macht der Wähler aber auch kein Unterschied ob b oder d beide findet er gleich gut/schlecht.

6.2 Lösungsschritte

Nun muss man als nächstes wieder die Menge N bestimmen, in den man die Kandidaten gegeneinander antreten lässt nur kann es diesmal zu Duellen ohne Sieger kommen, da beide gleich bewertet wurden. Diese Duelle werden dann nicht Berücksichtigt.

Exemplarisch wird in Tabelle 5 das Duell von Kandidat a gegen Kandidat b dargestellt.

Duelle	a	b	Sieger
1	6		a
2	8	8	keiner
3	8		a
4	18		a
5	8		a
6		40	b
7		4	b
8	9		a
9	8	8	keiner
10	14		a
11		11	b
12	4		a
Summe	67	55	

Tabelle 5: Duell a gegen b, graue Felder sind nicht bewertet, da unentschieden (Beispiel 3)

Wenn man dieses Verfahren für alle Kandidaten anwendet erhält man die Menge N die in Tabelle 6 aufgetragen ist.

	N[*,a]	N[*,b]	N[*,c]	N[*,d]
N[a, *]	—	67	28	40
N[b, *]	55	—	79	58
N[c, *]	36	59	—	45
N[d, *]	50	72	29	—

Tabelle 6: Die Menge N (Beispiel 3)

In Abbildung 3 sieht man den Graphen, der aus der Menge N gebildet wurde, er sieht etwas anders aus als in Beispiel 1 und Beispiel 2, da wir hier nicht nur den Wert brachen von Kandidat a nach Kandidat b, sondern auch den umgekehrten Weg von b nach a. Die Werte müssen so gelesen werden, dass der erste Wert, der größere, den Sieg des Kandidaten gegen den Kandidaten auf dem die Pfeilspitze zeigt, darstellt.

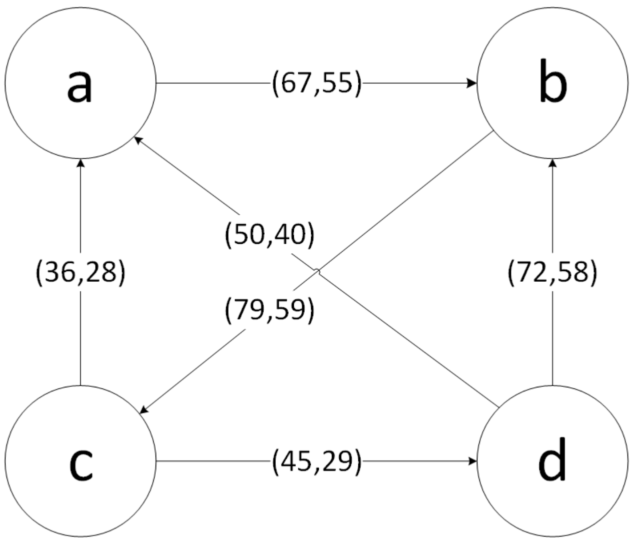

Abbildung 3: Graph über die Menge N(Beispiel 3)

Nun gibt es vier Möglichkeiten einen Gewinner mit der Schulze Methode zu finden. Wenn alle Wähler die Kandidaten in eine strikte Order gebracht haben, dann geben diese Methoden immer das selbe Ergebnis. Dieses Beispiel ist so aufgebaut, dass jede Methode einen anderen Kandidaten als Sieger ausgibt. Daher ist es wichtig vor der Wahl zu definieren, welche Wahlmethode genutzt wird.

6.2.1 margin

Beim Ansatz *margin* gewinnt der Kandidat, der seinen Sieg mit einem größeren Abstand erreicht. Untersucht wir Beispielhaft das Duell a gegen b. Der Stärkste Weg von a nach b, ist die direkt Verbindung, Kandidat a erhält 67 Stimmen und Kandidat b nur 55 Stimmen und damit gewinnt Kandidat a mit 12 Stimmen Vorsprung. Aber auch Kandidat b kann Kandidat a schlagen, der Stärkste Weg für dieses Duell ist von b über c und d nach a. Die schwächste Verbindung in diesem Weg ist die Verbindung d nach a, da dort mit nur 10 Stimmen Vorsprung der Kandidat d, Kandidat a schlägt. Um den Gewinner Festzustellen vergleicht man nun den Abstand für den Sieg von a (12 Stimmen)mit dem Sieg von b (10 Stimmen) und erhält damit den Gewinner dieses Duells a.

Auch hier wurde in Tabelle 7 die Menge P aufgestellt. Die werte in der Tabelle zeigen nun den Abstand, mit dem der Kandidat den Gegner geschlagen hat.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
P[a, *]	—	12	12	12
P[b, *]	10	—	20	16
P[c, *]	10	14	—	16
P[d, *]	10	14	14	—

Tabelle 7: Die Menge P nach margin Regel(Beispiel 3)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neu Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{margin} = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{margin} \in \{a\}$ und er Sieger unter Berücksichtigung des Abstandes ist Kandidat a.

6.2.2 ratio

Eine weitere Methode die eingesetzt wird um einen Sieger zu erhalten ist ein Verhältnis (eng: ratio) zu ermitteln. Hierzu werden die Stimmen für den Sieger durch die Stimmen gegen den Sieger geteilt und damit das Verhältnis ausgerechnet, mit dem der Sieger gewonnen hat.

Beispielhaft wird wieder das Duelle von Kandidat a gegen Kandidat b angeschaut. Im Duell a gegen b ist wie im Vergleich über den Abstand (Abschnitt 6.2.1) der direkte Weg der stärkste Weg. Der Stärkste Weg von Kandidat b zu Kandidat a ist dieses mal aber ein anderer. ER führt von b über c nach a . Die kritische Verbindung ist in diesem Fall die Verbindung von c nach a, da hier ein Verhältnis von $36/26 \approx 1,286$, das kleinste Singverhältnis auf diesem Weg ist. Wenn man den Weg untersucht, der beim Vergleich mit dem Abstand (Abschnitt 6.2.1) genutzt wurde, war dort die Kritische Verbindung d nach a, was ein Verhältnis von $50/40 = 1,25$ darstellt und damit eine schlechteres Verhältnis als der Weg b über c nach a darstellt.

Diese suche nach besten Verhältnissen wird wieder für alle Duelle gemacht und man erhält die in Tabelle XX dargestellte Menge P.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
P[a, *]	—	1,218	1,218	1,218
P[b, *]	1,286	—	1,339	1,339
P[c, *]	1,286	1,241	—	1,552
P[d, *]	1,25	1,241	1,241	—

Tabelle 8: Die Menge P nach ratio Regel(Beispiel 3)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neu Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{ratio} = \{ba, bc, bd, ca, cd, da\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{ratio} \in \{b\}$ und er Sieger unter Berücksichtigung des Verhältnis ist Kandidat b.

6.2.3 winning votes

Es kann der Sieger aber auch als die Person gelten, die am meisten Siege hat (eng: winning votes). Dies ist auch das verfahren was In den Beispiel 1 (Abschnitt: 4) und Beispiel 2 (Abschnitt: 5) eingesetzt wurde. Hier wird untersucht wer der Beiden Kandidaten gewinnt. Exemplarisch tritt wieder Kandidat a gegen Kandidat b an. Kandidat a schlägt Kandidat b mit der Direkten Verbindung mit 67 Stimmen, Kandidat b kann Kandidat a über den Weg b über c und d nach a schlagen. JEdoch ist hier die schwächste Verbindung, die Verbindung c nach d mit nur 45 Stimmen.Diese Beiden Werte (Kandidat a: 67 Stimmen, Kandidat b: 45 Stimmen) vergleicht man und Kandidat a gewinnt.

Diese Untersuchung macht man nun wieder für alle Duelle und erhält die in Tabelle 9 dargestellte Menge P.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
P[a, *]	—	67	76	45
P[b, *]	45	—	79	45
P[c, *]	45	45	—	45
P[d, *]	50	72	72	—

Tabelle 9: Die Menge P nach winning votes Regel(Beispiel 3)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neu Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{win} = \{ab, ac, bc, da, db, dc\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{win} \in \{d\}$ und er Sieger unter Berücksichtigung des Verhältnis ist Kandidat d.

6.2.4 losing votes

Ein anderer Ansatz der angewendet werden kann, ist den Kandidaten zum Sieger zu küren, der am wenigsten Gegenstimmen hat (eng. losing votes). Die kritische Verbindung ist dabei die Verbindung, bei der es die meisten Gegenstimmen gibt. Der stärkste Weg ist dann der Weg, bei dem die kritische Verbindung die wenigsten Gegenstimmen hat.

Für dieses Verfahren wird beispielhaft das Duell von Kandidat a und Kandidat c untersucht. Kandidat a kann Kandidat c schlagen über den Weg a über b nach c. Dort ist die kritische Verbindung zwischen Kandidat b und c, da es an dieser Stelle 59 Gegenstimmen gibt. Kandidat c kann Kandidat a über den direkten Weg schlagen und hat dabei nur 28 Gegenstimmen. Die zweite Möglichkeit wäre der Weg von c über d nach a, dort wäre die kritische Verbindung von Kandidat d nach a mit 40 Gegenstimmen. Daher wird die Direktverbindung genutzt mit nur 28 Gegenstimmen. Beide Wege werden nun verglichen und Kandidat c gewinnt gegen Kandidat a, da c nur 28 Gegenstimmen hat und Kandidat a 59 Gegenstimmen.

Alle Duelle werde so untersucht, die Ergebnisse, die die Menge P bilden, sind in Tabelle 10 eingetragen.

	P[*,a]	P[*,b]	P[*,c]	P[*,d]
P[a, *]	—	55	59	59
P[b, *]	59	—	59	59
P[c, *]	28	55	—	29
P[d, *]	40	55	59	—

Tabelle 10: Die Menge P nach losing votes Regel(Beispiel 3)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neu Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{los} = \{ab, ca, cb, cd, da, db\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{los} \in \{c\}$ und er Sieger unter Berücksichtigung des Verhältnis ist Kandidat d.

6.3 Ergebnis

Dieses Beispiel zeigt, dass es schwer sein kann zu bestimmen, wann ein Kandidat einen anderen schlägt. Jede Methode ist logisch, korrekt und nachvollziehbar. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn man den Wählern erlaubt Kandidaten auch gleich zu bewerten, wenn dies nicht erlaubt ist, ergeben alle vier Methode nach Schulze das selbe Ergebnis, sprich den selben Sieger. Daher muss beachtet werden, dass wenn man Kandidaten gleich bewerten kann vorher festgelegt ist nach welcher Methode man die Stimmen bewertet, da es sonst unter Umständen zu verschiedenen Siegern kommen kann. Dieses Beispiel wurde extra so von Herrn Schulze in seiner Ausarbeitung ”A New Monotonic, Clone-Independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-Consistent Single-Winner Election Method" [Schulze, 2017] konstruiert, dass bei jeder der Methoden unter Abschnitt 6.2 immer ein anderer Sieger als Ergebnis geliefert wird.

7 Bewertung der Methode

Die Nachfolgende Tabelle 11 zeigt die Schulze Methode im Vergleich zur Simpson-Kramer Methode, die in Abschnitt 9 erläutert wird. Sie zeigt in welchen Kriterien die Schulze Methode und die Simpson-Kramer Methode Kriterien der Sozialwahltheorie erfüllen. Ein Ausschnitt der Bedingungen wurde in Abschnitt 1.2 beschrieben, eine vollständige ausführung aller Kriterien kann man natürlich in der Ausarbeitung von Martin Schulze nachlesen [Schulze, 2018].

Kriterien	Schulze	Simpson-Kramer
resolvability	Ja	Ja
Pareto	Ja	Ja
reversal symmetry	Ja	Nein
monotonicity	Ja	Ja
independence of clones	Ja	Nein
Smith	Ja	Nein
Smith-IIA	Ja	Nein
Condorcet	Ja	Ja
Condorcet loser	Ja	Nein
majority for solid coalitions	Ja	Nein
majority	Ja	Ja
majority loser	Ja	Nein
participation	Nein	Nein
MinMax set	Ja	Nein
prudence	Ja	Ja
polynomial runtime	Ja	Ja

Tabelle 11: Vergleich der Schulze Methode mit der Simpson-Kramer Methode.

Bei der Tabelle wir deutlich, dass es auch die Schulze Methode nicht schafft alle Kriterien zu erfüllen jedoch vielen Anforderungen bestand hält, die andere Methoden nicht erfüllen.

7.1 Eindeutigkeit

Die Schulze Methode wurde als eine Methode vorgestellt die einen Sieger ermittelt. Jedoch ist das nicht ganz richtig. Es kann auch vorkommen, dass zwei Sieger gefunden werden. Wenn man eine Situation wie diese

$$\textbf{3 mal } a \succ_v b \succ_v c \succ_v d$$

$$\textbf{2 mal } c \succ_v b \succ_v d \succ_v a$$

$$\textbf{2 mal } d \succ_v a \succ_v b \succ_v c$$

$$\textbf{2 mal } d \succ_v b \succ_v c \succ_v a$$

untersucht, erhält man nicht einen Sieger sondern zwei, $\mathcal{S} = \{b, d\}$. Die Schulze Methode bietet keine Möglichkeit einen eindeutigen Sieger in dieser Situation zu ermitteln. In diesen Fällen wird geraten eine Stichwahl zwischen den Kandidaten zu machen.

8 Bewertung Algorithmus

Die Laufzeitkomplexität der Schulze Methode ist mit $O(C^3)$ nicht besonders gut, wobei C die Anzahl der Kandidaten ist. Diese Komplexität sieht man auch in der Implementierung in Abschnitt 3, da wird über ein Array mit einer dreifach verschachtelten Schleife iteriert. Jedoch ist die Laufzeit zu relativieren, da diese Methode zum auswerten einer Wahl nur ein Mahle laufen muss, um ein Ergebnis zu liefern.

Auch wird die Zahl der Kandidaten meist nicht ins unendliche laufen, da es meist eine endlich oft recht begrenzte Anzahl von Kandidaten gibt. Trotzdem muss man die Komplexität beachten, wenn man sie in Systeme einbaut, die nicht eine klassische Abstimmung von Kandidaten wie es z.B. bei Partei darstellt.

9 Vergleich mit anderen Methoden

Das Forschungsgebiet der Sozialwahltheorie ist seit dem 19. Jahrhundert ein wichtiges Gebiet, um gerechte Wahlen zu garantieren. Daher gibt es auch eine große Anzahl von anderen Methoden, die einen Sieger hervorbringen. Eine Methode die laut Barry Wright [Wright, 2009] mit hoher Wahrscheinlichkeit das selbe Ergebnis liefert, wie die Schulze Methode ist die Simpson-Kramer Methode.

Diese Methode erklärt die Person zum Sieger, deren größte Niederlage kleiner war als alle Niederlagen der anderen Kandidaten [Nurmi, 2017].

Wie in Tabelle 11 zu sehen ist, erfüllt diese Methode aufgrund seiner Simplizität nur einen kleinen Teil der Kriterien. Diese Methode kennt man auch unter dem Namen Minmax-Methode.

10 Fazit

10.1 Einsatz

Erstmals wurde die Schulze Methode 2003 im Debian, eine Linux Distribution, eingesetzt. Dort waren es ca. 1000 Wahlberechtigte, die nun ihre Wahlen mit dieser Methode auswerten. [Debian, 2018]

2008, 2009 und 2011 wurde die Schulze Methode von Wikimedia, den Dachverband von Wikipedia, genutzt, um zu entscheiden wer die Führung der Organisation übernehmen soll. Es waren in 2011 43.000 Wahlberechtigte. [Schulze, 2017]

Auch in der Politik hat diese Methode ihre Heimat gefunden. 2009 hat die Piratenpartei von Schweden diese Wahlmethode eingefürht, 2010 die Piratenpartei Deutschland, 2011 die Australische Piratenpartei, 2013 die Piratenpartei Island, 2015 die niederländische Piratenpartei. [Lohmann, 2013]

Die Schulze Methode hat sich über die Jahre zu der am weitesten verbreiteten Condorcet Methode entwickelt. Über 60 Organisationen mit über 800.000 Wahlberechtigten nutzen diese Methode, genauso wie viele online Tools, wie GoogleVotes. [Schulze, 2018]

Literaturverzeichnis

[Debian 2018] Debian: *Debian-Abstimmungs-Informationen*. https://www.debian.org/vote/. Version: 2018

[rer. pol. Enrico Schöbel 2018] Enrico Schöbel, Dr. rer. p.: *Condorcet-Paradoxon*. https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/condorcet-paradoxon-29229/version-252842. Version: Februar 2018

[Johnson 2005] Johnson, Paul e.: *Voting Systems*. http://pj.freefaculty.org/Ukraine/PJ3_VotingSystemsEssay.pdf. Version: Mai 2005

[Lohmann 2013] Lohmann, Niels: *Satzungsänderungsantrag SÄA 06 (Präferenzwahl nach Schulze)*. https://wiki.piratenpartei.de/MV:Landesmitgliederversammlung_2013.1/S%C3%84A06. Version: 2013

[Nurmi 2017] Nurmi, Dan S. Felsenthal H.: *Monotonicity Failures Afflicting Procedures for Electing a Single Candidate*. Springer International Publishing, 2017. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-51061-3. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-51061-3. – ISBN 978–3–319–51060–6

[Prof. Dr. Hans Werner Lang 2018] Prof. Dr. Hans Werner Lang, Hochschule F.: *Mathematische Grundlagen Menge, Relation, Abbildung*. http://www.iti.fh-flensburg.de/lang/algorithmen/grundlagen/menge.htm. Version: Juni 2018

[Scheubrein 2013] Scheubrein, R.: *Computerunterstüzte Gruppenentscheidungen*. Deutscher Universitätsverlag, 2013 (Informationsmanagement und Computer Aided Team). https://books.google.de/books?id=hrAdBgAAQBAJ. – ISBN 9783663083191

[Schulze 2017] Schulze, Markus: *A New Monotonic, Clone-Independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-Consistent Single-Winner Election Method*. http://m-schulze.9mail.de/schulze1.pdf. Version: März 2017

[Schulze 2018] Schulze, Markus: *The Schulze Method of Voting*. https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1804/1804.02973.pdf. Version: Juni 2018

[Woodall 1996] Woodall, D.R.: *Monotonicity and Single-Seat Election Rules*. http://www.votingmatters.org.uk/ISSUE6/P4.HTM. Version: Mai 1996

[Wright 2009] Wright, Barry: *Objective Measures of Preferential Ballot Voting Systems*. https://rangevoting.org/Wright_Barry.pdf. Version: 2009