

Informatik.Softwaresysteme
Ausarbeitung spezielle Algorithmen

Schulze Methode

Algorithmus zum Finden eines eindeutigen Siegers

Abgabetermin: Bocholt, den 30.10.2018
Wintersemester: 2018/2019

Student:
Steffen Holtkamp
Matrikelnummer: 201620684



WESTFÄLISCHE HOCHSCHULE - BOCHOLT
Prof. Dr. Martin Guddat
Münsterstraße 265
46397 Bocholt



15	Inhaltsverzeichnis	
16	Abbildungsverzeichnis	III
17	Tabellenverzeichnis	IV
18	Listings	V
19	1 Einleitung	1
20	1.1 Markus Schulze	1
21	1.2 Problemstellung	1
22	1.3 Sozialwahltheorie	2
23	2 Definition	3
24	2.1 Voraussetzungen	3
25	2.2 Begriffsdefinition und Erläuterungen	3
26	2.2.1 Verbindung	4
27	2.2.2 Weg	5
28	2.2.3 Die Menge N	5
29	2.2.4 \succ_v	5
30	2.2.5 D^Z	6
31	2.2.6 Relation	6
32	2.3 Mathematische Grundlagen	7
33	3 Beispiel 1	8
34	3.1 Ausgangssituation	8
35	3.2 Lösungsschritte	9
36	3.3 Ergebnis	12
37	4 Beispiel 2	13
38	4.1 Ausgangssituation	13
39	4.2 Lösungsschritte	13
40	4.3 Ergebnis	15
41	5 Beispiel 3	15
42	5.1 Ausgangssituation	15
43	5.2 Lösungsschritte	16
44	5.2.1 margin	18
45	5.2.2 ratio	18
46	5.2.3 winning votes	19
47	5.2.4 losing votes	20
48	5.3 Ergebnis	21



49	6	Bewertung der Methode	22
50	6.1	Kriterien der Sozialwahltheorie	22
51	6.1.1	Monotonie Kriterium	22
52	6.1.2	Condorcet Kriterium	22
53	6.1.3	Lösbarkeitskriterium	22
54	6.1.4	Pareto Kriterium	23
55	6.2	Vergleich mit anderen Methoden	23
56	6.3	Eindeutigkeit	25
57	7	Bewertung des Algorithmus	26
58	7.1	Überführung	26
59	7.1.1	Initialisierung	26
60	7.1.2	Stärkste Wege	26
61	7.1.3	Ergebnis	26
62	7.2	Implementierung	27
63	7.3	Laufzeit	29
64	8	Fazit	30
65	8.1	Eingangsbeispiel	30
66	8.2	Einsatz	30
67		Literaturverzeichnis	31

**Abbildungsverzeichnis**

69	1	Verbindung in Graphen	4
70	2	Verbindung in Graphen, Kurzschreibweise	4
71	3	Weg von a über b nach c	5
72	4	Graph über die Menge N (Beispiel 1)	10
73	5	Graph über die Menge N (Beispiel 2)	14
74	6	Graph über die Menge N (Beispiel 3)	17

75 **Tabellenverzeichnis**

76	1	Die Menge N (Beispiel 1)	9
77	2	Die Menge P (Beispiel 1)	11
78	3	Die Menge N (Beispiel 2)	14
79	4	Die Menge P (Beispiel 2)	14
80	5	Duell a gegen b , graue Felder sind nicht bewertet, da unentschieden (Beispiel 3)	16
81	6	Die Menge N (Beispiel 3)	16
82	7	Die Menge P nach margin Regel(Beispiel 3)	18
83	8	Die Menge P nach ratio Regel(Beispiel 3)	19
84	9	Die Menge P nach winning votes Regel(Beispiel 3)	19
85	10	Die Menge P nach losing votes Regel(Beispiel 3)	20
86	11	Vergleich der Schulze Methode mit der Simpson-Kramer Methode.	24



⁸⁷ **Listings**

⁸⁸	1	Grundlegender Funktionsaufbau der Schulze Methode in Java	27
---------------	---	---	----



1 Einleitung

1.1 Markus Schulze

Die Schulze Methode wurde nach ihrem Erfinder Markus Schulze benannt und wird in Fachkreisen auch als „Schwartz Sequential Dropping“ oder auch „path winner“ Methode bezeichnet. Markus Schulze ist ein Mathematiker und hat diese Methode an der TU Berlin entwickelt.

Die Schulze Methode ist ein Verfahren, um eine Wahl auszuwerten und im besten Fall einen eindeutigen Sieger zu Finden.

Er hat diese Methode erstmals 1997 in einer offenen E-Mail zur Diskussion gestellt¹ und veröffentlicht immer wieder aktualisierte Versionen seiner Theorie. In dieser Ausarbeitung bezieht sich der Autor dabei auf seine aktualisierten Ausarbeitungen aus den Jahren 2017² und 2018³.

1.2 Problemstellung

Zu Beginn soll ein Beispiel zeigen, wie schwer es sein kann einen gerechten Sieger zu finden. Ein Kurs von 30 Personen soll aus drei Kandidaten einen Kurssprecher wählen. Jede Person bringt die drei Kandidaten in eine Rangfolge (Erst-, Zweit- und Drittwunsch). Diese Art der Wahl kann mit der Schulze Methode ausgewertet werden.

Dort hat sich folgende Stimmssituation ergeben, 10 Wähler haben die Reihenfolge a, b, c , 10 Wähler die Reihenfolge b, a, c und 10 Wähler die Reihenfolge c, a, b gewählt.

Bei Betrachtung dieses Beispiels fällt auf, dass kein Kandidat im direkten Duell seine beiden Gegner schlagen kann. Kein Kandidat ist von allen Wählern direkt bevorzugt worden. Naiv kann man sagen, dass man Kandidat a nimmt, da dieser Kandidat 10-mal Erstwunsch und 20 mal Zweitwunsch ist, dass wäre besser als die Ergebnisse der anderen Kandidaten.

Ist das eine gerechte Entscheidung? Bei einer überschaubaren Menge von 30 Personen könnte darüber abgestimmt werden, ob das gerecht ist. Bei einer Wahl von mehreren Hundert oder Tausend Wählern wird dies schon schwieriger. Dort wird es wichtig eine Methode zu wählen, die als „gerecht“ gilt. Kriterien, um zu definieren was gerecht ist, wird vom Forschungsgebiet der Sozialwahltheorie untersucht.

¹Vgl. SCHULZE [1997].

²Vgl. SCHULZE [2017]

³Vgl. SCHULZE [2018]



115 1.3 Sozialwahltheorie

116 Die Einführungssituation hat schon gezeigt, dass es sehr schwer ist eine Wahl gerecht auszuwerten. In
117 einer Demokratie wird es eine komplexe Herausforderung aus den Präferenzen der einzelnen Wähler
118 einen Kompromiss zu finden, der für alle maximal zufriedenstellend ist.

119 Ein Ansatz einen gerechten Sieger zu finden, soll mit der Schulze Methode gegeben werden. Die Schulze
120 Methode fällt in das Gebiet der Sozialwahltheorie. Dieses interdisziplinäre Forschungsgebiet beschäf-
121 tigt sich mit der Untersuchung von Gruppenentscheidungen. In dieser Forschung werden individuelle
122 Präferenzen und Entscheidungen der teilnehmenden Personen aggregiert, um daraus eine „gerechte“
123 kollektive Entscheidung abzuleiten. Damit man eine „gerechte“ Methode finden kann, beschäftigen sich
124 viele Teilbereiche der Forschung, wie z.B. die Mathematik, Volkswirtschaft, Psychologie, Philosophie,
125 Politikwissenschaft und Rechtswissenschaft mit diesem Thema und stellen dabei verschiedenste An-
126 sätze und Vorgehensweisen vor. Alle beteiligten Forschungsgebiete stellen dabei Kriterien auf, welche
127 eine „gerechte“ Methode erfüllen soll⁴.

128 Die Schulze Methode ist eine Abwandlung der Condorcet Wahlmethode, dass bedeutet das immer zwei
129 Kandidaten verglichen werden und ein Sieger aus diesem Vergleich hervorgeht. Es haben sich über die
130 Jahre viele Qualitätskriterien entwickelt, an denen man messen kann, ob eine Methode im Sinne der
131 Sozialwahltheorie als gerecht betrachtet werden kann. In der abschließenden Bewertung werden einige
132 dieser Kriterien betrachtet.

⁴Vgl. [SCHEUBREIN \[2013\]](#) Seite 91 ff.



2 Definition

2.1 Voraussetzungen

Es gibt einige Voraussetzungen, die eine Wahl erfüllen muss, damit die Schulze Methode auf diese Wahl angewendet werden kann.

1. Es muss mindestens zwei Kandidaten geben, die zur Wahl stehen, da sonst keine Rangfolge erstellt werden kann. Bei zwei Kandidaten ist die Lösung jedoch trivial, da dort der Gewinner der Kandidat ist, der am häufigsten, von den Wählern dem Gegner vorgezogen wurde.

Mathematische Definition: Sei A eine endliche nicht leere Menge an Kandidaten. Wobei die Anzahl der Kandidaten C ist und gilt:

$$C \in \mathbb{N} \text{ und } 1 < C < \infty$$

2. Jeder Wähler ordnet den Kandidaten eine Zahl zu. Aus dieser Zahl wird eine Rangfolge erstellt. Je kleiner die Zahl ist, desto höher ist die Platzierung. Hierbei ist die Größe der Zahl oder der Abstand uninteressant, da nur die Rangfolge betrachtet wird.

Des Weiteren gilt:

- 2.1. Es können mehrere Kandidaten die gleiche Platzierung haben. Hierbei kann keine Unterscheidung der Kandidaten auf dieser Platzierung vorgenommen werden.
- 2.2. Wenn ein Wähler keine Bewertung für einen Kandidaten abgibt, werden alle Kandidaten, die eine Bewertung haben, diesem Kandidaten vorgezogen. Werden mehrere Kandidaten nicht bewertet, werden sie wie im vorherigen Punkt beschrieben behandelt.

2.2 Begriffsdefinition und Erläuterungen

Bevor die theoretische Definition aufgestellt werden kann, müssen einige Begriffe, Formeln und Notationen besprochen werden, um die Definition einfacher zu verstehen.

Da im folgenden nur einzelne Punkte der Definition erläutert werden, ist es elementar dies zusammen mit dem Abschnitt 2.3 zu lesen. In den Erläuterungen wird oft von „stärksten Wegen“ gesprochen. Diese ist ein Kernstück der Schulze Methode und damit Teil der Definition. Sie werden in Abschnitt 2.3.2 definiert.



2.2.1 Verbindung

Eine Verbindung in diesem Kontext bedeutet, dass zwei Kandidaten gegeneinander antreten. Ein Duell ist eine Verbindung mit der folgenden Notation

$$(N[a, b], N[b, a])$$

Beispiel: Wenn Kandidat a von fünf Wählern Kandidaten b und umgekehrt Kandidat b von zwei Wählern Kandidat a vorgezogen wird, würde die Notation wie folgt aussehen:

$$(5, 2)$$

In den Beispielen werden diese Duelle in einem Graphen dargestellt. Eine vollständige Schreibweise, wie in Abbildung 1 skizziert, wird in Beispiel 3 benötigt.

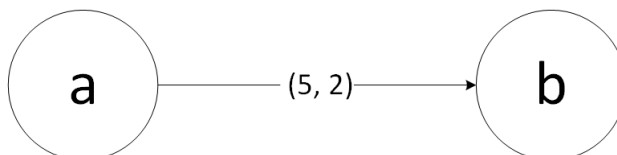


Abbildung 1: Verbindung in Graphen

In Fällen, in denen es nicht möglich ist Kandidaten gleich zu bewerten, wird auch die Kurzschreibweise wie in Abbildung 2 genutzt. Diese Darstellung wird auch in Beispiel 1 und 2 genutzt, da dort nicht wichtig ist, wie viele Gegenstimmen ein siegreicher Kandidat bekommen hat, da nur die Stimmen für den Kandidaten untersucht werden.

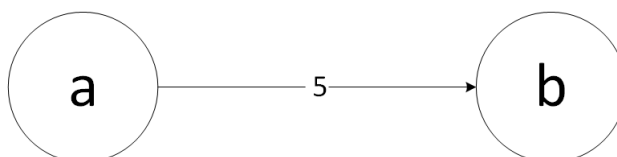


Abbildung 2: Verbindung in Graphen, Kurzschreibweise



2 Definition

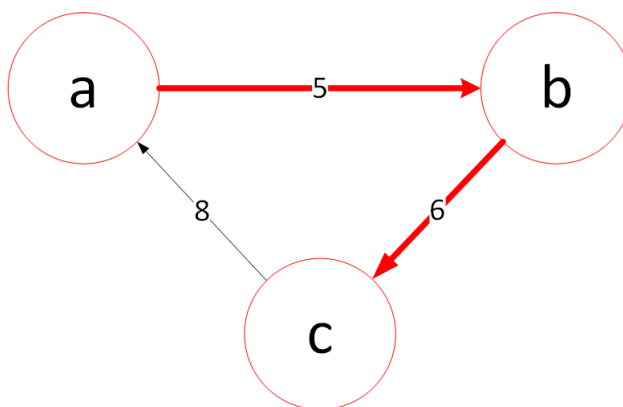
2.2.2 Weg

Ein Weg besteht aus einer oder mehreren direkten Verbindungen zweier Kandidaten und führt von Start Kandidaten zum Ziel Kandidaten. Dies wird wie folgt notiert.

$$c(1), \dots, c(2)$$

Eine Verbindung von Kandidat a zu Kandidat b besteht dann, wenn Kandidat a Kandidat b direkt schlagen kann, dies ist dann auch ein Weg von a nach b . Ein Weg von Kandidat a zu Kandidat b kann aber auch existieren, wenn a keine direkte Verbindung zu b hat, aber Kandidat a über andere Verbindungen zu b gelangen kann, diese Folge von Verbindungen ist dann der Weg von a nach b .

Beispiel: Kandidat a schlägt Kandidat b und Kandidat b schlägt Kandidat c , dann schlägt Kandidat a auch Kandidat c , da Kandidat a , Kandidat b schlagen kann, auch wenn Kandidat a nicht direkt Kandidat c schlagen kann. Ein solcher Weg ist in Rot in Abbildung 3 aufgezeichnet.

Abbildung 3: Weg von a über b nach c 2.2.3 Die Menge N

Die Menge N kann man sich als Tabelle vorstellen, in der die Ergebnisse der Duelle aller Kandidaten nach der ersten Auszählung enthalten sind. Die Menge N ist die Grundlage der Schulze Methode. Auf diese Menge baut sich der Algorithmus auf. Ein Beispiel für diese Menge findet sich im Beispiel 1 in Tabelle 1.

2.2.4 \succ_v

Das Zeichen \succ_v stellt einen Vergleich zweier Kandidaten dar. $a \succ_v b$ bedeutet, dass von den Wählern (v) der Kandidat a strikt dem Kandidat b vorgezogen wird. Wenn also beide Kandidaten verglichen werden, ist a der Sieger.

188 **2.2.5 Dz**

189 Der Wert Dz eines Weges ist der Wert, der die schwächste Verbindung repräsentiert. Das bedeutet,
190 dass ein Weg untersucht wird und dort die schwächste direkte Verbindung zweier Kandidaten gesucht
191 wird, welcher die schwächste direkte Verbindung zweier Kandidaten darstellt. Dieser Wert wird als
192 Dz bezeichnet. Dieser Wert ist auch der ausschlaggebende Wert, der in P_D eingetragen wird. Wie
193 eine schwache Verbindung definiert ist, ist abhängig von der gewählten Art der Schulze Methode. Dies
194 wird ausführlich im dritten Beispiel erläutert. Zum einfacheren Verständnis kann anfangs ein einfacher
195 Größenvergleich angenommen werden.

196 **2.2.6 Relation**

197 „Seien A und B Mengen. Eine Teilmenge R enthalten in $A \times B$ heißt (zweistellige) Relation zwischen
198 A und B . Gilt $A = B$, so heißt R Relation auf A .“ [PROF. DR. HANS WERNER LANG \[2018\]](#)

199 Die Schulze Methode nutzt die Relation \mathcal{O} , um dort die Ergebnisse der Duelle alle Kandidaten zu
200 speichern, die sich aus der Menge P_D ergeben. P_D wird hier oft auch mit P abgekürzt. Die Relation
201 \mathcal{O} enthält dann nur die siegreichen Duelle. Ein siegreiches Duell ab bedeutet, dass Kandidat a gegen
202 Kandidat b gewonnen hat und ist in \mathcal{O} enthalten.



2.3 Mathematische Grundlagen

Die grundsätzliche Idee der Schulze Methode ist es, ein condorcetes Verfahren, wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben, durchzuführen. Dieses Verfahren wird jedoch über eine neue Berechnungsstufe verfeinert, um in einer Situation einen Sieger zu ermitteln, in der die einfache Condorcet-Methode keine Lösung liefert. In diesem Abschnitt werden die mathematischen Grundlagen erläutert und in den Abschnitten 3, 4 und 5 an Beispielen erläutert.

(2.3.1) Ein Weg von Kandidat $x \in A$ zu Kandidat $y \in A$ ist eine Folgen von Kandidaten $c(1), \dots, c(n) \in A$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $x \equiv c(1)$
2. $y \equiv c(n)$
3. $2 \leq n \leq \infty$
4. Für alle $i = 1, \dots, (n - 1) : c(i) \neq c(i + 1)$

(2.3.2) Die Stärke eines Weges $c(1), \dots, c(n)$ ist $\min_D \{ (N[c(i), c(i+1)], N[c(i+1), c(i)]) | i = 1, \dots, n-1 \}$.

In anderen Worten: Die Stärke eines Weges ist die Stärke der schwächsten Verbindung.

(2.3.3) Wenn ein Weg $c(1), \dots, c(n)$ die Stärke $z \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ hat, dann ist die kritische Verbindung dieses Weges, die Verbindung von $(N[c(i), c(i+1)], N[c(i+1), c(i)]) \approx_D z$.

$$P_D[a, b] := \max_D \{ \min_D \{ (N[c(i), c(i+1)], N[c(i+1), c(i)]) | i = 1, \dots, n-1 \} \mid c(1), \dots, c(n) \text{ ein Weg von Kandidat } a \text{ zu Kandidat } b \}$$

In anderen Worten: $P_D[a, b] \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist die Stärke des stärksten Weges von Kandidat $a \in A$ zu Kandidat $b \in A$.

Diese Menge P_D enthält die stärksten Wege zwischen den Kandidaten. Sprich die Wege, in denen die schwächste Verbindung ($_D z$) des Weges, stärker ist als alle anderen schwächsten Verbindungen von Wegen, die vom gleichen Kandidaten ausgehen und zum gleichen Kandidaten führen.

(2.3.4) Die zweistellige Relation \mathcal{O} auf A ist wie folgt definiert:

$$ab \in \mathcal{O} :\Leftrightarrow P_D[a, b] >_D P_D[b, a]$$

(2.3.5) Daraus folgt, dass die Menge der Sieger sich wie folgt ergibt:

$$\mathcal{S} := \{a \in A \mid \forall b \in A \{a\} : ba \notin \mathcal{O}\}$$



3 Beispiel 1

3.1 Ausgangssituation

Im ersten Beispiel wird eine Wahl untersucht, in der jeder Teilnehmer alle Kandidaten bewertet hat und damit eine eindeutige Reihenfolge der Kandidaten generiert werden kann. Kein Kandidat wurde gleichbehandelt oder nicht bewertet.

Bildhaft wird die Schulze Methode in folgender Situation eingesetzt: Ein Kurs von 28 Studierenden wählt einen Kurssprecher. Zur Wahl stellt sich Anton (Kandidat a), Berta (Kandidatin b), Conny (Kandidatin c) und Dennis (Kandidat d).

Jeder der 28 Studierenden muss die Kandidaten nach Erst-, Zweit-, Dritt- und Viertwunsch ordnen. Nach der Auszählung hat sich Folgende Situation eingespielt.

6 mal $a \succ_v b \succ_v d \succ_v c$

4 mal $c \succ_v a \succ_v b \succ_v d$

10 mal $b \succ_v d \succ_v a \succ_v c$

3 mal $b \succ_v a \succ_v d \succ_v c$

5 mal $d \succ_v c \succ_v b \succ_v a$

In der ersten Zeile wurden also beispielsweise sechs Mal Wahlzettel abgegeben, auf welchen Anton als Erst-, Berta als Zweit-, Dennis als Dritt- und Conny als Viertwunsch angegeben wurde.

Die Auszählung der Wahl wird nun in die Schulze Methode überführt und bewertet.



3.2 Lösungsschritte

Um die Schulze Methode anzuwenden, muss zuerst die Menge N bestimmt werden. Diese Menge wird gebildet, indem jeder Kandidat gegen jeden Kandidaten antritt.

Exemplarisch wird das Duell a gegen b durchgeführt und die Kandidaten c und d ignoriert. Es können diese Kandidaten im Duell ignoriert werden, da es irrelevant ist, wo das Duell stattfindet, ob die beiden Kandidaten Dritt- und Viertwunsch sind oder ein Kandidat Erstwunsch und der andere Zweitwunsch ist. Die Betrachtung der genauen Platzierungen ergibt sich durch die Betrachtung aller Kandidaten mit diesem Verfahren.

6 mal $a \succ_v b$

4 mal $a \succ_v b$

10 mal $b \succ_v a$

3 mal $b \succ_v a$

5 mal $b \succ_v a$

Wird nun dieses Duell betrachtet, erhalten Kandidat a 10 Stimmen und Kandidat b 18 Stimmen, womit Kandidat b gewinnt.

Wenn dies für alle Duelle gemacht wurde, ergibt sich folgendes Ergebnis.

a **vs.** b 10 Stimmen gegen 18 Stimmen, b gewinnt

a **vs.** c 19 Stimmen gegen 9 Stimmen, a gewinnt

a **vs.** d 13 Stimmen gegen 15 Stimmen, d gewinnt

b **vs.** c 19 Stimmen gegen 9 Stimmen, b gewinnt

b **vs.** d 23 Stimmen gegen 5 Stimmen, b gewinnt

c **vs.** d 4 Stimmen gegen 24 Stimmen, d gewinnt

Mit diesen Werten kann man nun die Menge N , wie sie in Tabelle 1 zu sehen ist, aufstellen.

	$N[*,a]$	$N[*,b]$	$N[*,c]$	$N[*,d]$
$N[a, *]$	—	10	19	13
$N[b, *]$	18	—	19	23
$N[c, *]$	9	9	—	4
$N[d, *]$	15	5	24	—

Tabelle 1: Die Menge N (Beispiel 1)



3 Beispiel 1

267 Im nächsten Schritt müssen die Wege zwischen den Kandidaten gesucht werden, wie es in der Definition
 268 in Abschnitt 2.3 unter (2.3.1) beschreiben wird. Zyklische Verbindungen sind nicht erlaubt.

269 In Abbildung 4 ist die Menge N als gerichteter Graph aufgezeichnet.

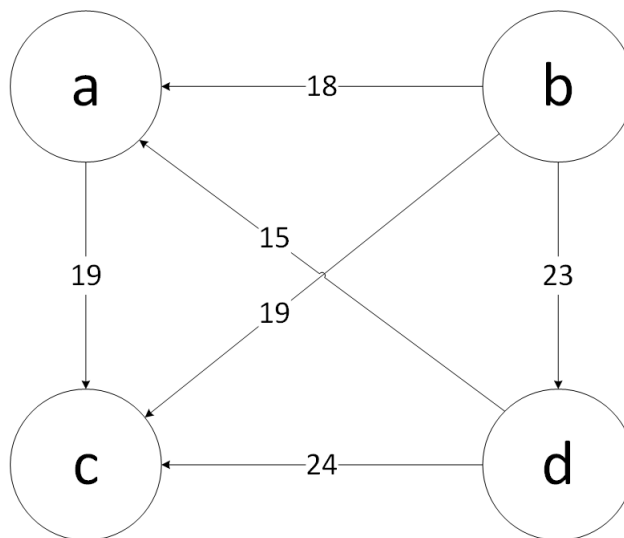


Abbildung 4: Graph über die Menge N (Beispiel 1)

270 In dem Graphen wurden gerichtete Kanten vom Sieger in die Richtung des Verlierers gezogen und das
 271 Kantengewicht des Siegers der Duelle aufgetragen. Nun muss auf dem Graphen die Verfahren, die in
 272 Abschnitt 2.3 (2.3.2) und (2.3.3) beschrieben wurde, angewendet werden, um die Menge P zu bilden.
 273 Die Menge P beinhaltet dann die Stärksten Wege im Graphen.

274 Dazu werden nun alle Wege zwischen den Kandidaten gebildet und der stärkste Weg (bei dem die
 275 schwächste Verbindung am größten ist) ausgewählt.

276 $a \rightarrow b$: Es gibt keinen Weg, der von a nach b führt.

277 $b \rightarrow a$: Es gibt zwei Wege, die von b nach a führen.

278 **Weg 1:** $b, 23, d, 15, a$, der die Stärke $\min_D\{23, 15\} \approx_D 15$ hat.

279 **Weg 2:** $b, 18, a$, der die Stärke 18 hat.

280 Damit ergibt sich die Stärke des stärksten Weges mit Hilfe von $\max_D\{15, 18\} \approx_D 18$

281 $a \rightarrow c$ Es gibt einen Weg, der von a nach c führt.

282 **Weg 1:** $a, 19, c$, der die Stärke 19 hat.

283 Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 19.

284 $c \rightarrow a$ Es gibt keinen Weg, der von c nach a führt.

285 $a \rightarrow d$ Es gibt keinen Weg, der von a nach d führt.



3 Beispiel 1

286 $d \rightarrow a$ Es gibt einen Weg, der von d nach a führt.

287 **Weg 1:** $d, 15, a$, der die Stärke 15 hat.

288 Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 15.

289 $b \rightarrow c$: Es gibt drei Wege, die von b nach c führen.

290 **Weg 1:** $b, 18, a, 19, c$, der die Stärke $\min_D\{18, 19\} \approx_D 18$ hat.

291 **Weg 2:** $b, 19, c$, der die Stärke 19 hat.

292 **Weg 3:** $b, 23, d, 24, c$, der die Stärke $\min_D\{23, 24\} \approx_D 23$ hat.

293 Damit ergibt sich die Stärke des stärksten Weges mit Hilfe von $\max_D\{18, 19, 23\} \approx_D 23$

294 $c \rightarrow b$ Es gibt keinen Weg, der von c nach b führt.

295 $b \rightarrow d$ Es gibt einen Weg, der von b nach d führt.

296 **Weg 1:** $b, 23, d$, der die Stärke 23 hat.

297 Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 23.

298 $d \rightarrow b$ Es gibt keinen Weg, der von d nach b führt.

299 $c \rightarrow d$ Es gibt keinen Weg, der von c nach d führt.

300 $d \rightarrow c$ Es gibt einen Weg, der von d nach c führt.

301 **Weg 1:** $d, 24, c$, der die Stärke 24 hat.

302 Damit ist die Stärke des stärksten Weges auch 24.

303 So wurden alle Wege bestimmt und die kritischen Verbindungen gefunden, sodass sich in Tabelle 2
304 die Menge P bildet.

	$P[*,a]$	$P[*,b]$	$P[*,c]$	$P[*,d]$
$P[a, *]$	—	—	19	—
$P[b, *]$	18	—	23	23
$P[c, *]$	—	—	—	—
$P[d, *]$	15	—	24	—

Tabelle 2: Die Menge P (Beispiel 1)

305 Die Simulation der Duelle wird für die Kandidaten erneut gemacht, dieses Mal jedoch über die Menge
306 P . Wenn es keinen Weg zwischen den Kandidaten gibt, also in der Tabelle ein '—' steht, so wird diese
307 Verbindung als eine Verbindung mit der Stärke 0 betrachtet.

308 Dieses Ergebnis wird in der Relation \mathcal{O} , wie in der Definition (2.3.4) in Abschnitt 2.3 beschreiben.

3 Beispiel 1

309 a gewinnt gegen b : nein, daher kein Teil von \mathcal{O}
 310 a gewinnt gegen c : ja, daher Teil von \mathcal{O}
 311 a gewinnt gegen d : nein, daher kein Teil von \mathcal{O}
 312 b gewinnt gegen a : ja, daher Teil von \mathcal{O}
 313 b gewinnt gegen c : ja, daher Teil von \mathcal{O}
 314 b gewinnt gegen d : ja, daher Teil von \mathcal{O}
 315 c gewinnt gegen a : nein, daher nicht Teil von \mathcal{O}
 316 c gewinnt gegen b : nein, daher nicht Teil von \mathcal{O}
 317 c gewinnt gegen d : nein, daher nicht Teil von \mathcal{O}
 318 d gewinnt gegen a : ja, daher Teil von \mathcal{O}
 319 d gewinnt gegen b : nein, daher nicht Teil von \mathcal{O}
 320 d gewinnt gegen c : ja, daher Teil von \mathcal{O}
 321 Daher ergibt sich $\mathcal{O} = \{ac, ba, bc, bd, da, dc\}$

322 **3.3 Ergebnis**

323 Um den Sieger aus der Relation \mathcal{O} zu finden, muss wie in der Definition in Abschnitt 2.3 Punkt (2.3.5)
 324 beschreiben, sichergestellt werden, dass ein Sieger nur ein Kandidat sein kann, der im direkten Duell
 325 nie durch einen anderen Gegner geschlagen wird.

326 Um das zu prüfen, wird die Relation \mathcal{O} durchgegangen und geprüft, ob es einen Kandidaten gibt, der
 327 immer nur auf der linken Seite eine Tupel z.B: "bd" steht und damit immer der Gewinner ist und nie
 328 geschlagen wurde, dann würde er auf der rechten Seite des Tupels stehen.

329 Für dieses Beispiel ergibt sich, dass es nur einen Sieger in der Menge $\mathcal{S} = \{b\}$ gibt, den Kandidaten b .
 330 Damit wurde mit der Schulze Methode festgestellt, dass Kandidatin Berta die Wahl gewonnen hat.

331 Zu Beginn des Beispiels konnte man sehen, dass Kandidatin Berta beim Duell mit den anderen Kandi-
 332 daten gegen alle anderen Kandidaten gewonnen hat. Und es stellt sich daher die Frage, wieso nicht an
 333 dieser Stelle schon die Siegerin festgelegt wurde? Dieses Beispiel hat gezeigt, dass die Schulze Methode
 334 das Condorcet Kriterium 6.1.2 erfüllt, welches besagt, dass ein Kandidat, der gegen alle Gegner ge-
 335 wonnen hat auch der Sieger der Wahlmethode, hier der Schulze Methode, sein muss. Das Beispiel 2 in
 336 Abschnitt 4 zeigt, dass auch wenn kein Condorcet-Sieger existiert, ein Sieger mit der Schulze Methode
 337 ermittelt werden kann.



4 Beispiel 2

4.1 Ausgangssituation

Als Ausgangsmethode kann, wie in Beispiel 1 (Abschnitt: 3.1) wieder die Wahl eines Kurssprechers angenommen werden.

In dieser Wahl haben 21 Personen die Kandidaten a bis d in eine Reihenfolge sortiert, dabei hat sich diese Verteilung eingestellt:

8 mal $a \succ_v c \succ_v d \succ_v b$

2 mal $b \succ_v a \succ_v d \succ_v c$

4 mal $c \succ_v d \succ_v b \succ_v a$

4 mal $d \succ_v b \succ_v a \succ_v c$

3 mal $d \succ_v c \succ_v b \succ_v a$

4.2 Lösungsschritte

Zuerst werden wieder die Duelle zwischen den Kandidaten simuliert.

a **vs.** b 8 Stimmen gegen 13 Stimmen, b gewinnt

a **vs.** c 14 Stimmen gegen 7 Stimmen, a gewinnt

a **vs.** d 10 Stimmen gegen 11 Stimmen, d gewinnt

b **vs.** c 6 Stimmen gegen 15 Stimmen, c gewinnt

b **vs.** d 2 Stimmen gegen 19 Stimmen, d gewinnt

c **vs.** d 12 Stimmen gegen 9 Stimmen, c gewinnt

In diesem Fall gibt es kein Condorcet-Sieger, also hat es kein Kandidaten geschafft alle Gegner im Zweikampf zu schlagen. Diese Situation wird auch als Condorcet-Paradoxon bezeichnet.⁵

⁵Vgl. RER. POL. ENRICO SCHÖBEL [2018]

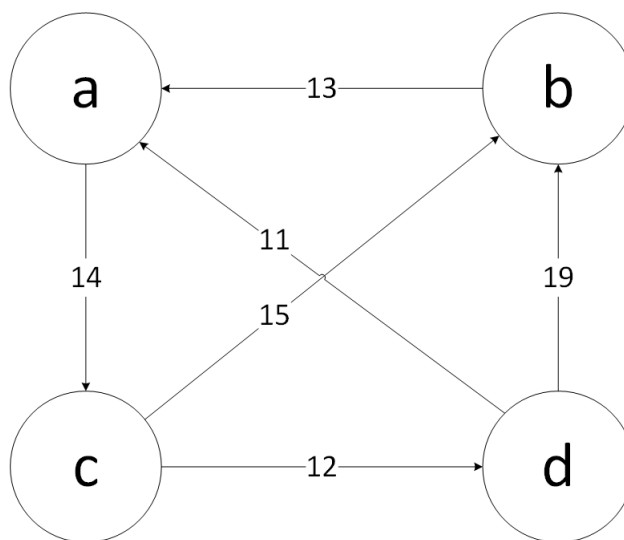
4 Beispiel 2

359 Die Schulze Methode kann dieses Problem jedoch lösen indem, wie in Tabelle 3 dargestellt, die Menge
 360 N gebildet wird.

	$N[*,a]$	$N[*,b]$	$N[*,c]$	$N[*,d]$
$N[a, *]$	—	8	14	10
$N[b, *]$	13	—	6	2
$N[c, *]$	7	15	—	12
$N[d, *]$	11	19	9	—

Tabelle 3: Die Menge N (Beispiel 2)

361 Aus der Menge N wird der Graph gebildet, siehe Abbildung 5.

Abbildung 5: Graph über die Menge N (Beispiel 2)

362 Nun werden wieder die stärksten Pfade gesucht und in die Menge P eingefügt, die in Tabelle 4 zu
 363 sehen ist.

	$P[*,a]$	$P[*,b]$	$P[*,c]$	$P[*,d]$
$PN[a, *]$	—	14	14	12
$PN[b, *]$	13	—	13	12
$P[c, *]$	13	15	—	12
$P[d, *]$	13	19	13	—

Tabelle 4: Die Menge P (Beispiel 2)

364 Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neue Zweikampfsituation erstellt und man erhält
 365 die Relation $\mathcal{O} = \{ab, ac, cb, da, db, dc\}$

**4.3 Ergebnis**

Analog zu Beispiel 1 (Abschnitt 3) wird die Relation \mathcal{O} untersucht, um die Menge der Sieger zu finden. In diesem Fall ist $\mathcal{S} = \{d\}$ und der Sieger ist Kandidat d . Dies zeigt, dass die Schulze Methode einen Sieger finden kann, in Situationen, die durch andere Wahlverfahren nicht gelöst werden können.

Eine ausführliche Besprechung, wie in Beispiel 1 kann in der originalen Ausarbeitung von Martin Schulze⁶ nachgelesen werden.

5 Beispiel 3**5.1 Ausgangssituation**

In Abschnitt 2.1 wurde beschrieben, dass die Schulze Methode auch Ergebnisse liefert, wenn Kandidaten gleich oder nicht bewertet wurden. Nicht bewertete Kandidaten werden dabei behandelt, als wären sie alle vom Wähler auf dem letzten Platz gewählt worden. Dadurch wird jeder Kandidat, der vom Wähler bewertet wurde, den nicht bewerteten Kandidaten vorgezogen wird. Dieses Beispiel bezieht sich auf das sechste Beispiel von „A New Monotonic, Clone-Independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-Consistent Single-Winner Election Method“⁷.

6 mal $a \succ_v b \succ_v c \succ_v d$

8 mal $a \approx_v b \succ_v c \approx_v d$

8 mal $a \approx_v c \succ_v b \approx_v d$

18 mal $a \approx_v c \succ_v d \succ_v b$

8 mal $a \approx_v c \approx_v d \succ_v b$

40 mal $b \succ_v a \approx_v c \approx_v d$

4 mal $c \succ_v b \succ_v d \succ_v a$

9 mal $c \succ_v d \succ_v a \succ_v b$

8 mal $c \approx_v d \succ_v a \approx_v b$

14 mal $d \succ_v a \succ_v b \succ_v c$

11 mal $d \succ_v b \succ_v c \succ_v a$

4 mal $d \succ_v c \succ_v a \succ_v b$

⁶Vgl. SCHULZE [2017] Kapitel 3.1

⁷Vgl. SCHULZE [2017] Kapitel 3.6



5 Beispiel 3

392 Zur Erläuterung wird die Wahl $a \approx_v b \succ_v c \approx_v d$ betrachtet. Hier hat der Wähler gesagt, er möchte
 393 lieber Kandidat a oder b haben, welcher ist ihm dabei gleich, aber lieber einen von den beiden Kandi-
 394 daten, als die Kandidaten c oder d . Dort macht der Wähler aber auch kein Unterschied ob c oder d ,
 395 beide findet er gleich gut/schlecht.

396 5.2 Lösungsschritte

397 Als erstes muss die Menge N bestimmen werden, in der man die Kandidaten gegeneinander antreten
 398 lässt, nur kann es diesmal zu Duellen ohne Sieger kommen, da beide Kandidaten gleich bewertet
 399 wurden. Diese Stimmen werden dann nicht berücksichtigt.

400 Exemplarisch wird in Tabelle 5 das Duell von Kandidat a gegen Kandidat b dargestellt.

Duelle	a	b	Sieger
1	6		a
2	8	8	keiner
3	8		a
4	18		a
5	8		a
6		40	b
7		4	b
8	9		a
9	8	8	keiner
10	14		a
11		11	b
12	4		a
Summe	67	55	

Tabelle 5: Duell a gegen b , graue Felder sind nicht bewertet, da unentschieden (Beispiel 3)

401 Wenn man dieses Verfahren für alle Kandidaten anwendet erhält man die Menge N , die in Tabelle 6
 402 dargestellt ist.

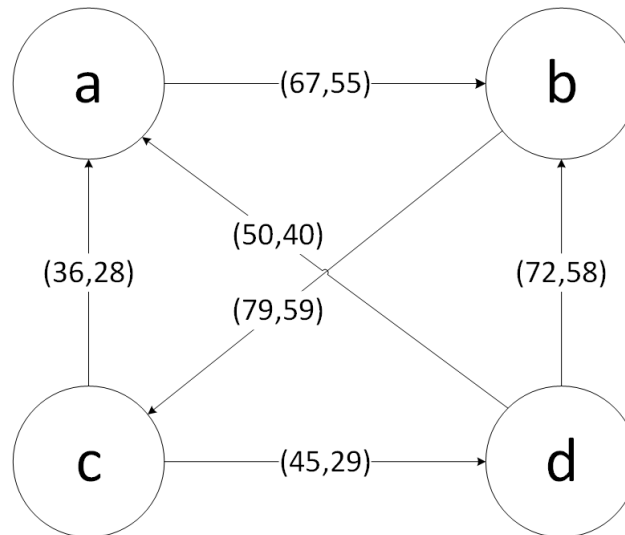
	$N[*,a]$	$N[*,b]$	$N[*,c]$	$N[*,d]$
$N[a, *]$	—	67	28	40
$N[b, *]$	55	—	79	58
$N[c, *]$	36	59	—	45
$N[d, *]$	50	72	29	—

Tabelle 6: Die Menge N (Beispiel 3)



5 Beispiel 3

403 In Abbildung 6 sieht man den Graphen, der aus der Menge N gebildet wurde. Er sieht etwas anders
 404 aus als in Beispiel 1 und Beispiel 2, da der Wert für den Weg von Kandidat a nach Kandidat b ,
 405 sondern auch den umgekehrten Weg von b nach a benötigt wird, sprich es werden die Stimmen für
 406 den Kandidaten a und die Gegenstimmen eingezeichnet.

Abbildung 6: Graph über die Menge N (Beispiel 3)

407 Es gibt verschiedene Möglichkeiten einen Gewinner mit der Schulze Methode zu finden, da es ver-
 408 schiedene Ansätze gibt die Stärke eines Weges zu bestimmen. Die Methoden die in diesem Abschnitt
 409 vorgestellt werden sind margin, ratio, winning votes und losing votes. Wenn alle Wähler die Kandida-
 410 ten in eine strikte Ordnung gebracht haben, wie in den Beispielen 1 und 2, dann geben diese Methoden
 411 immer dasselbe Ergebnis, wenn

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$$

$$((x_1 > y_1 \text{ und } x_2 \leq y_2) \text{ oder } (x_1 \geq y_1 \text{ und } x_2 < y_2)) \Rightarrow (x_1, x_2) \succ_D (y_1, y_2)$$

412 gilt. Dies gilt für die vier Methoden die vorgestellt werden, da dort die Stimmen für den Kandidaten
 413 zusammen mit den Gegenstimmen immer der Anzahl der Wähler, also C ergibt und wenn die eine
 414 Verbindung mehr Stimmen für den Kandidaten hat ($x_1 > y_1$) muss daraus folgen, dass die Verbindung
 415 y mehr Gegenstimmen (y_2) hat als die Verbindung x . $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ sind dabei Verbindungen zweier
 416 Kandidaten in der vollständigen Schreibweise, die als zweiten Wert die Gegenstimmen enthält, Ab-
 417 schnitt 2.2.1. Da alle vier Methoden der Definition entsprechen, ist es auch legitim, dass die Beispiele 1
 418 und 2 mit der winning votes Methode arbeiten und die verkürzte Schreibweise genutzt haben, genauso
 419 könnten die anderen drei Methoden eingesetzt werden.

420 Wenn die Wähler nicht alle Kandidaten in eine strikte Reihenfolge bringen und Kandidaten gleich
 421 bewerten, geben diese Methoden je nach Situation gleiche oder unterschiedliche Ergebnisse aus, da die



5 Beispiel 3

obige Definition nicht mehr passt, da nun Stimmen für den Kandidaten zusammen mit den Stimmen gegen den Kandidaten nicht der Anzahl der Wähler (C) entsprechen muss. Dieses Beispiel ist so aufgebaut, dass jede Methode einen anderen Kandidaten als Sieger ausgibt. Daher ist es wichtig vor der Wahl zu definieren, welche Wahlmethode genutzt wird.

5.2.1 margin

Beim Ansatz *margin* gewinnt der Kandidat, der seinen Sieg mit einem größeren Abstand erreicht. Untersucht wir Beispielhaft das Duell a gegen b . Der Stärkste Weg von a nach b , ist die direkt Verbindung, Kandidat a erhält 67 Stimmen und Kandidat b nur 55 Stimmen und damit gewinnt Kandidat a mit 12 Stimmen Vorsprung. Aber auch Kandidat b kann Kandidat a schlagen, der stärkste Weg für dieses Duell ist von b über c und d nach a . Die schwächste Verbindung in diesem Weg ist die Verbindung d nach a , da dort mit nur 10 Stimmen Vorsprung der Kandidat d , Kandidat a schlägt. Um den Gewinner festzustellen wird der Abstand für den Sieg von a (12 Stimmen) mit dem Sieg von b (10 Stimmen) verglichen und der Gewinner dieses Duells ist a , mit zwei Stimmen Vorsprung.

Auch hier wurde in Tabelle 7 die Menge P aufgestellt. Die Werte in der Tabelle zeigen nun den Abstand, mit dem der Kandidat den Gegner geschlagen hat.

	$P[*,a]$	$P[*,b]$	$P[*,c]$	$P[*,d]$
$P[a, *]$	—	12	12	12
$P[b, *]$	10	—	20	16
$P[c, *]$	10	14	—	16
$P[d, *]$	10	14	14	—

Tabelle 7: Die Menge P nach margin Regel(Beispiel 3)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neue Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{margin} = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{margin} \in \{a\}$ und der Sieger unter Berücksichtigung des Abstandes ist Kandidat a .

5.2.2 ratio

Eine weitere Methode, die eingesetzt wird, um einen Sieger zu erhalten, ist ein Verhältnis (eng: ratio) zu ermitteln. Hierzu werden die Stimmen für den Sieger durch die Stimmen gegen den Sieger geteilt und damit das Verhältnis ausgerechnet, mit dem der Sieger gewonnen hat.

Beispielhaft wird wieder das Duell von Kandidat a gegen Kandidat b betrachtet. Im Duell a gegen b ist, wie im Vergleich über den Abstand (Abschnitt 5.2.1), der direkte Weg der stärkste Weg. Der stärkste Weg von Kandidat b zu Kandidat a ist im Vergleich über das Verhältnis aber ein anderer. Er



5 Beispiel 3

führt von b über c nach a . Die kritische Verbindung ist in diesem Fall die Verbindung von c nach a , da hier ein Verhältnis von $36/28 \approx 1,286$, das kleinste Verhältnis auf diesem Weg darstellt. Wird der Weg von Kandidat b nach a aus Abschnitt 5.2.1 untersucht, ist dort die kritische Verbindung d nach a , was ein Verhältnis von $50/40 = 1,25$ darstellt und damit ein schlechteres Verhältnis als der Weg b über c nach a hat.

Die Berechnung der besten Verhältnisse wird wieder für alle Duelle gemacht und Tabelle 8 zeigt die Menge P unter Betrachtung der Verhältnisse.

	$P[*,a]$	$P[*,b]$	$P[*,c]$	$P[*,d]$
$P[a, *]$	—	1,218	1,218	1,218
$P[b, *]$	1,286	—	1,339	1,339
$P[c, *]$	1,286	1,241	—	1,552
$P[d, *]$	1,25	1,241	1,241	—

Tabelle 8: Die Menge P nach ratio Regel(Beispiel 3)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neue Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{ratio} = \{ba, bc, bd, ca, cd, da\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{ratio} \in \{b\}$ und der Sieger unter Berücksichtigung des Verhältnisses ist Kandidat b .

5.2.3 winning votes

Es kann der Sieger aber auch als die Person gelten, die am meisten Siege hat (eng: winning votes). Dies ist auch das Verfahren, welches in den Beispiel 1 (Abschnitt: 3) und Beispiel 2 (Abschnitt: 4) eingesetzt wurde. Hier wird untersucht, welcher der beiden Kandidaten gewinnt. Exemplarisch tritt wieder Kandidat a gegen Kandidat b an. Kandidat a schlägt Kandidat b mit der direkten Verbindung mit 67 Stimmen, Kandidat b kann Kandidat a über den Weg b über c und d nach a schlagen. Jedoch ist hier die schwächste Verbindung, die Verbindung c nach d mit nur 45 Stimmen. Diese Werte (Kandidat a : 67 Stimmen, Kandidat b : 45 Stimmen) werden verglichen und Kandidat a gewinnt.

Diese Untersuchung wird für alle Duelle gemacht und es ergibt sich die in Tabelle 9 dargestellte Menge P .

	$P[*,a]$	$P[*,b]$	$P[*,c]$	$P[*,d]$
$P[a, *]$	—	67	76	45
$P[b, *]$	45	—	79	45
$P[c, *]$	45	45	—	45
$P[d, *]$	50	72	72	—

Tabelle 9: Die Menge P nach winning votes Regel(Beispiel 3)



5 Beispiel 3

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neue Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{win} = \{ab, ac, bc, da, db, dc\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{win} \in \{d\}$ und der Sieger unter Berücksichtigung der *winningvotes* ist Kandidat d .

5.2.4 losing votes

Ein anderer Ansatz, der angewendet werden kann, ist den Kandidaten zum Sieger zu küren, der am wenigsten Gegenstimmen hat (eng. losing votes). Die kritische Verbindung ist dabei die Verbindung, bei der es die meisten Gegenstimmen gibt. Der stärkste Weg ist dann der Weg, bei dem die kritische Verbindung die wenigsten Gegenstimmen hat.

Für dieses Verfahren wird beispielhaft das Duell von Kandidat a und Kandidat c untersucht. Kandidat a kann Kandidat c schlagen über den Weg a über b nach c . Dort ist die kritische Verbindung zwischen Kandidat b und c , da es an dieser Stelle 59 Gegenstimmen gibt. Kandidat c kann Kandidat a über den direkten Weg schlagen und hat dabei nur 28 Gegenstimmen. Die zweite Möglichkeit wäre der Weg von c über d nach a , dort wäre die kritische Verbindung von Kandidat d nach a mit 40 Gegenstimmen. Daher wird die Direktverbindung genutzt mit nur 28 Gegenstimmen. Beide Wege werden nun verglichen und Kandidat c gewinnt gegen Kandidat a , da c nur 28 Gegenstimmen hat und Kandidat a 59 Gegenstimmen.

Alle Duelle werden so untersucht, die Ergebnisse, die die Menge P bilden, sind in Tabelle 10 eingetragen.

	$P[*,a]$	$P[*,b]$	$P[*,c]$	$P[*,d]$
$P[a, *]$	—	55	59	59
$P[b, *]$	59	—	59	59
$P[c, *]$	28	55	—	29
$P[d, *]$	40	55	59	—

Tabelle 10: Die Menge P nach losing votes Regel(Beispiel 3)

Anschließend wird mit den Werten der Menge P die neue Zweikampfsituation erstellt und man erhält die Relation $\mathcal{O}_{los} = \{ab, ca, cb, cd, da, db\}$

Daraus ergibt sich die Ergebnismenge $\mathcal{S}_{los} \in \{c\}$ und der Sieger unter Berücksichtigung der *losingvotes* ist Kandidat d .



5.3 Ergebnis

Dieses Beispiel zeigt, dass es schwer sein kann zu bestimmen, wann ein Kandidat einen anderen schlägt. Jede Methode ist logisch, korrekt und nachvollziehbar. Dass die vier vorgestellten Methoden unterschiedliche Ergebnisse liefern, ist aber nur dann der Fall, wenn es den Wählern erlaubt ist Kandidaten auch gleich zu bewerten. Daher muss beachtet werden, dass wenn man Kandidaten gleich bewerten kann, vorher festgelegt werden muss, nach welcher Methode die Stimmen bewertet werden, da es sonst unter Umständen zu verschiedenen Siegern kommen kann. Dieses Beispiel wurde extra so von Herrn Schulze in seiner Ausarbeitung „A New Monotonic, Clone-Independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-Consistent Single-Winner Election Method“⁸ konstruiert, dass bei jeder der Methoden unter Abschnitt 5.2 immer ein anderer Sieger als Ergebnis geliefert wird. In der Realität kann es auch vorkommen, dass mehrere der vorgestellten Methoden dieselben Sieger liefern, auch wenn Kandidaten gleich bewertet wurden.

⁸Vgl. SCHULZE [2017]



6 Bewertung der Methode

6.1 Kriterien der Sozialwahltheorie

Um zu belegen, dass eine Methode gerecht ist, muss eine Methode möglichst viele Kriterien der Sozialwahltheorie erfüllen. Einen kleinen Ausschnitt von Kriterien, die auch in Tabelle 11 aufgeführt sind werden hier erläutert. Eine vollständige Übersicht kann in „The Schulze Method of Voting“⁹ gefunden werden. Dort wird in Kapitel 4 auch bewiesen, dass die Schulze Methode die Kriterien erfüllt.

6.1.1 Monotonie Kriterium

Der Gewinner einer Wahl kann nicht durch ein besseres Ranking verlieren und ein Verlierer durch ein schlechteres gewinnen.¹⁰ Dieses Kriterium ist trivial, aber zeigt, dass die zugrundeliegende Wahlmethode nicht der erwarteten Logik einer Wahl widerspricht.

Das bedeutet, dass wenn die schwächste Verbindung des Siegers stärker werde, kann er dadurch nicht verlieren, dasselbe gilt auch für Verlierer, wenn deren schwächste Verbindungen schwächer werden, dann können sie damit nicht gewinnen.

6.1.2 Condorcet Kriterium

Nach der Wahl wird ein Zweikampf zweier Kandidaten simuliert und dabei untersucht, wie oft der Kandidat a dem Kandidat b vorgezogen wurde. Die Bedeutung von „vorgezogen“ wird in Abschnitt 5 für die Schulze Methode erläutert, ist im Allgemeinen aber abhängig von der gewählten Wahlmethode. Condorcet-Sieger ist der Kandidat, der alle anderen Kandidaten schlägt. Einen solchen Sieger muss es nicht geben. Ein Wahlverfahren erfüllt das Condorcet-Kriterium, wenn der gewählte Sieger auch der Condorcet-Sieger ist, sofern es einen Condorcet-Sieger gibt.¹¹

Das Verhalten konnte in Beispiel 1 (Abschnitt 3) beobachtet werden, dort wurde auch der Condorcet-Sieger der Sieger der Schulze Methode.

6.1.3 Lösbarkeitskriterium

Es gibt Situationen, in denen eine Wahlmethode keinen eindeutigen Sieger hervorbringen kann, da die Stimmsituation für zwei oder mehrere Kandidaten gleich sind. Auch die Schulze Methode kann nicht immer direkt einen eindeutigen Sieger bestimmen. Jedoch kann man mathematisch zeigen, dass eine Methode im Allgemeinen eine eindeutige Lösung liefert.¹²

⁹Vgl. SCHULZE [2018] Kapitel 11

¹⁰Vgl. WOODALL [1996]

¹¹Vgl. JOHNSON [2005]

¹²Vgl. SCHULZE [2017]



1. Wenn die Anzahl der Stimmen Richtung unendlich tendiert, geht die Wahrscheinlichkeit keinen eindeutigen Sieger zu erhalten gegen Null.

2. Wenn es mehr als einen Sieger gibt, reicht eine einzelne Stimme, um einen eindeutigen Sieger zu erhalten.

Für die Schulz Methode bedeutet zwei Sieger immer, dass zwei Kandidaten nicht geschlagen wurden, beispielsweise die Kandidaten a und b . Wenn eine weitere Stimme hinzukommt, die zwischen den beiden Siegern a und b unterscheidet, z.B. Kandidat a wird dem Kandidaten b vorgezogen, so ändert sich die schwächsten Verbindungen zu Gunsten des Kandidaten a , sodass nun ein eindeutiger Sieger gefunden werden kann, da b nun von a geschlagen wird.

6.1.4 Pareto Kriterium

Dieses Kriterium gibt an, dass

1. wenn jeder Wähler Kandidat a , Kandidat b vorzieht, muss Kandidat a immer Kandidat b bevorzugt werden

2. wenn kein Wähler Kandidat a , Kandidat b vorzieht, muss Kandidat a nicht besser sein als b .¹³

Dieses Prinzip wird wichtig, wenn Kandidaten gleich oder nicht bewertet werden dürfen. Dort darf keine Methode einen der beiden Kandidaten auswählen und ihm eine bestimmte Platzierung geben oder in eine Reihenfolge einordnen. Diese Kandidaten müssen, wenn sie nicht unterschieden werden können, immer auf derselben Ebene eingeordnet werden.

Dies wird oftmals gebrochen, wenn die Auswertung eine Reihenfolge ausgeben muss und dann einfach der Kandidat der im Alphabet als erstes kommt zuerst anzeigt, oder der der in der Liste als erstes auftaucht. Das muss aber von der Wahlmethode auf jeden Fall unterbunden werden, so wie die Schulze Methode es auch macht.

6.2 Vergleich mit anderen Methoden

Das Forschungsgebiet der Sozialwahltheorie ist seit dem 19. Jahrhundert ein wichtiges Gebiet, um gerechte Wahlen zu garantieren. Daher gibt es auch eine große Anzahl von anderen Methoden, die einen Sieger hervorbringen. Eine Methode die laut Barry Wright¹⁴ mit hoher Wahrscheinlichkeit das selbe Ergebnis liefert, wie die Schulze Methode ist die Simpson-Kramer Methode.

Diese Methode erklärt die Person zum Sieger, deren größte Niederlage kleiner war als alle Niederlagen der anderen Kandidaten¹⁵.

¹³Vgl. SCHULZE [2017]

¹⁴Vgl. WRIGHT [2009]

¹⁵Vgl. NURMI [2017]



Wie in Tabelle 11 zu sehen ist, erfüllt diese Methode aufgrund seiner Simplizität nur eine geringe Anzahl von Kriterien im Vergleich zur Schulze Methode. Diese Methode wird auch als Minmax-Methode bezeichnet.

Kriterien	Schulze	Simpson-Kramer
resolvability	Ja	Ja
Pareto	Ja	Ja
reversal symmetry	Ja	Nein
monotonicity	Ja	Ja
independence of clones	Ja	Nein
Smith	Ja	Nein
Smith-IIA	Ja	Nein
Condorcet	Ja	Ja
Condorcet loser	Ja	Nein
majority for solid coalitions	Ja	Nein
majority	Ja	Ja
majority loser	Ja	Nein
participation	Nein	Nein
MinMax set	Ja	Nein
prudence	Ja	Ja
polynomial runtime	Ja	Ja

Tabelle 11: Vergleich der Schulze Methode mit der Simpson-Kramer Methode.

Aus der Tabelle geht hervor, dass es auch die Schulze Methode nicht schafft alle Kriterien zu erfüllen. Jedoch erfüllt die Schulze Methode vielen Anforderungen, die andere Methoden nicht erfüllen. Daher kann man sagen, dass die Schulze Methode eine gute Condorcet Methode ist, um einen Sieger zu ermitteln.



6.3 Eindeutigkeit

Die Schulze Methode wurde als eine Methode vorgestellt, die einen Sieger ermittelt. Jedoch ist das nicht ganz richtig. Es kann auch vorkommen, dass zwei Sieger gefunden werden. Wenn man eine Situation wie diese

$$\mathbf{3 \text{ mal}} \quad a \succ_v b \succ_v c \succ_v d$$

$$\mathbf{2 \text{ mal}} \quad c \succ_v b \succ_v d \succ_v a$$

$$\mathbf{2 \text{ mal}} \quad d \succ_v a \succ_v b \succ_v c$$

$$\mathbf{2 \text{ mal}} \quad d \succ_v b \succ_v c \succ_v a$$

untersucht, erhält man nicht einen Sieger sondern zwei, $\mathcal{S} = \{b, d\}$. Die Schulze Methode bietet keine Möglichkeit einen eindeutigen Sieger in dieser Situation zu ermitteln. In diesen Fällen wird geraten eine Stichwahl zwischen den Kandidaten durchzuführen.



7 Bewertung des Algorithmus

7.1 Überführung

Im Folgenden wird kurz erläutert, wie die Schulze Methode Schritt für Schritt in einen Algorithmus überführt wird.

Als Eingabe wird die Menge N als zweidimensionales Array dem Algorithmus übergeben. Dort sind die Stimmen eingetragen, die jeder Kandidat gegen jeden anderen Kandidaten bekommen hat.

Als Ausgabe erhält man ein Array der Sieger.

7.1.1 Initialisierung

Zuerst muss die Menge P_D initialisiert werden, dies ist ein zweidimensionales Array, dass die schwächste Verbindungen der stärksten Wege aufnimmt. Dort werden initial auch die Werte aus der Menge N übernommen, abhängig vom Ansatz *margin*, *ratio*, *winningvotes* und *loosingvotes*, die in Beispiel 3 erläutert wurden.

7.1.2 Stärkste Wege

Nun müssen die stärksten Wege gesucht werden. Dazu müssen drei Schleifen ineinander verschachtelt werden. Die jeweils alle Kandidaten durchgehen, also jeweils C mal läuft. Nun werden alle Wege zwischen zwei Kandidaten gesucht, dazu dienen zwei Schleifen und eine dritte Schleife sorgt dafür, dass alle Wege untersucht werden. Wird ein Weg gefunden, der stärker ist, als der Weg der bisher eingetragen ist, so wird der bestehende Wert mit dem Wert des stärkeren Wegs überschrieben.

Nachdem die Auswertung durchgelaufen ist, enthält das Array P_D für jedes Duell jeweils die schwächste Verbindung der stärksten Wege.

7.1.3 Ergebnis

Nun muss der Sieger ermittelt werden. Dazu wird ein neues Array *winner* erstellt und jeder Kandidat wird dort erstmal als Sieger eingetragen. Es werden nun wieder mit zwei Schleifen alle Kandidaten mit allen verglichen. Wenn ein Kandidat gegen seinen Gegenkandidaten verliert, wird der Kandidat in dem *winner* Array sofort auf *false* gesetzt, da er nicht mehr gewinnen kann, da er einmal geschlagen wurde.

Nachdem alle Duelle stattgefunden haben enthält das Array *winner* C Werte, das zurückgegeben wird. *true* bedeutet, dass der Kandidat ein Sieger ist. Der Kandidat wird über den Index des Arrays identifiziert.



7.2 Implementierung

Der Autor hat eine mögliche Implementierung der Schulze Methode in Java entwickelt. Die untenstehende Implementierung arbeitet nach der „winning votes“ Methode, die in Beispiel 3 in Abschnitt 5.2.3 beschrieben wird. Wie in Beispiel 3 (Abschnitt: 5) zu erkennen ist, gibt es auch für die anderen Möglichkeiten einen Sieger zu bestimmen.

Eine vollständige Implementierung kann auf GitHub eingesehen werden.¹⁶ Dort sind auch Beispielaufäufe hinterlegt.

```
package com.SteffenHo;

public class Schulze {

    private int count;
    private int [][] N;
    private double [][] P;
    private Boolean[] winners;

    public Schulze(int [][] pN, int pCount) {
        count = pCount;
        N = pN;

        SchulzeHelper.printN(N, count);

        init ();
        findStrongesPath();
        calculatingWinners();
    }

    /**
     * Initialize the Array which contains the duel for all alternatives .
     */
    public void init () {
        P = SchulzeHelper.init2DDoubleArray(count);
        for (int i = 0; i < count; i++) {
            for (int j = 0; j < count; j++) {
                if (i != j) {
                    if (N[i][j] > N[j][i]) { // alternative i wins against j
                        P[i][j] = N[i][j]; // winning votes
                    }
                } else {
                    P[i][j] = 0; // alternative i loses
                }
            }
        }
    }
}
```

¹⁶<https://github.com/SteffenHo/SchulzeImplementation>

```

653     SchulzeHelper.printP(P,count);
654 }
655
656 /**
657  * Finding the strongest path by winning votes method
658  */
659 private void findStrongesPath() {
660     for (int i = 0; i < count; i++) {
661         for (int j = 0; j < count; j++) {
662             if (i != j) {
663                 for (int k = 0; k < count; k++) {
664                     if (i != k && j != k) {
665                         if (P[j][k] < Math.min(P[j][i], P[i][k])) { // calculate the critical link in the
666                             strongest path
667                             P[j][k] = Math.min(P[j][i], P[i][k]);
668                         }
669                     }
670                 }
671             }
672         }
673     }
674     SchulzeHelper.printP(P, count);
675 }
676
677 /**
678  * Make all duel for all alternative and check if there is a winner
679  */
680 private void calculatingWinners() {
681     winners = SchulzeHelper.initWinnerArray(count);
682     for (int i = 0; i < count; i++) {
683         winners[i] = true;
684         for (int j = 0; j < count; j++) {
685             if (i != j) {
686                 if (P[j][i] > P[i][j]) {
687                     winners[i] = false; // ji is not in the relation O and the winner has to be in relation O
688                 }
689             }
690         }
691     }
692     SchulzeHelper.printWinner(winners, count);
693 }
694
695 }

```

Listing 1: Grundlegender Funktionsaufbau der Schulze Methode in Java



7.3 Laufzeit

Die Laufzeitkomplexität der Schulze Methode ist mit $O(C^3)$ nicht besonders gut, wobei C die Anzahl der Kandidaten ist. Diese Komplexität sieht man auch in der Implementierung in Abschnitt 7.2, dort wird mit einer dreifach verschachtelten Schleife über ein Array iteriert. Jedoch ist die Laufzeit zu relativieren, da diese Methode zum Auswerten einer Wahl nur einmal laufen muss, um ein Ergebnis zu liefern.

Auch wird die Zahl der Kandidaten meist nicht ins unendliche steigen, da es in normalen Wahlen eine endlich oft recht begrenzte Anzahl von Kandidaten gibt. Trotzdem muss man die Komplexität beachten, wenn man die Schulze Methode in Systeme einbaut, die nicht eine klassische Abstimmung, wie es sie z.B. in Politik gibt, entsprechen und C beliebig groß werden kann.



8 Fazit

8.1 Eingangsbeispiel

Ganz zu Beginn (Abschnitt 1.2) wurde eine Wahlsituation von 30 Wählern und 3 Kandidaten beschrieben, die auf den ersten Blick kein Sieger geliefert hat. Die Wahl kann mit der Schulze Methode ausgewertet werden und liefert dann Kandidat a als Sieger. Dies ist auch der selbe Sieger der ersten Idee, a zu nehmen weil der Kandidat auch viele Zweitstimmen hatte. Dies hat sich gerecht angefühlt, jedoch ohne mathematischen Beweis. Die Schulze Methode kann mathematisch beweisen, dass sie nach bestimmten Kriterien gerecht ist. Daher bietet sich diese Methode immer an, wenn die Lösung nicht trivial ist oder die Menge der Wahlberechtigten groß ist.

8.2 Einsatz

Erstmals wurde die Schulze Methode 2003 im Debian, eine Linux Distribution, eingesetzt. Dort waren es ca. 1000 Wahlberechtigte, die ihre Wahlen mit dieser Methode auswerten.¹⁷ Sie nutzen die Schulze Methode z.B. um bestimmte Features auszuwählen. Beispielsweise wurde im Jahr 2014 mit der Schulze Methode über das Init-System für Debian abgestimmt.¹⁸

2008, 2009 und 2011 wurde die Schulze Methode von Wikimedia, den Dachverband von Wikipedia, genutzt, um zu entscheiden wer die Führung der Organisation übernehmen soll. Es waren im Jahr 2011 43.000 Wahlberechtigte.¹⁹

Auch in der Politik hat diese Methode ihre Heimat gefunden. 2009 hat die Piratenpartei von Schweden diese Wahlmethode eingeführt, 2010 die Piratenpartei Deutschland, 2011 die Australische Piratenpartei, 2013 die Piratenpartei Island, 2015 die niederländische Piratenpartei.²⁰

Die Schulze Methode hat sich über die Jahre zu der am weitesten verbreiteten Condorcet Methode entwickelt. Über 60 Organisationen mit über 800.000 Wahlberechtigten nutzen diese Methode.²¹ Des weiteren arbeiten auch einige online Tools damit, wie z.B. GoogleVotes, bei denen man nicht genau beziffern kann, wie viele Wahlberechtigte diese Tools generieren.²²

¹⁷Vgl. DEBIAN [2018]

¹⁸Vgl. LEEMHU [2014]

¹⁹Vgl. SCHULZE [2017]

²⁰Vgl. LOHMANN [2013]

²¹Vgl. SCHULZE [2018]

²²Vgl. LOPES [2015]



Literaturverzeichnis

- [Debian 2018] DEBIAN: *Debian-Abstimmungs-Informationen*. <https://www.debian.org/vote/>.
Version: 2018
- [rer. pol. Enrico Schöbel 2018] ENRICO SCHÖBEL, Dr. rer. p.: *Condorcet-Paradoxon*. <https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/condorcet-paradoxon-29229/version-252842>.
Version: Februar 2018
- [Johnson 2005] JOHNSON, Paul e.: *Voting Systems*. http://pj.freefaculty.org/Ukraine/PJ3_VotingSystemsEssay.pdf. Version: Mai 2005
- [Leemhu 2014] LEEMHU, Thorsten: Debian-Gremium versucht schrittweise Init-System-Wahl. In: *heise.de* (2014). <https://www.heise.de/newsticker/meldung/Debian-Gremium-versucht-schrittweise-Init-System-Wahl-2097650.html>
- [Lohmann 2013] LOHMANN, Niels: *Satzungsänderungsantrag SÄA 06 (Präferenzwahl nach Schulze)*. https://wiki.piratenpartei.de/MV:Landesmitgliederversammlung_2013.1/S%C3%84A06.
Version: 2013
- [Lopes 2015] LOPES, Steve Hardt Lia C. R.: *Google Votes: A Liquid Democracy Experiment on a Corporate Social Network*. https://www.tdcommons.org/cgi/viewcontent.cgi?article=1092&context=dpubs_series. Version: Juni 2015
- [Nurmi 2017] NURMI, Dan S. Felsenthal H.: *Monotonicity Failures Afflicting Procedures for Electing a Single Candidate*. Springer International Publishing, 2017. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-51061-3>. – ISBN 978–3–319–51060–6
- [Prof. Dr. Hans Werner Lang 2018] PROF. DR. HANS WERNER LANG, Hochschule F.: *Mathematische Grundlagen Menge, Relation, Abbildung*. <http://www.iti.fh-flensburg.de/lang/algorithmen/grundlagen/menge.htm>. Version: Juni 2018
- [Scheubrein 2013] SCHEUBREIN, R.: *Computerunterstützte Gruppenentscheidungen*. Deutscher Universitätsverlag, 2013 (Informationsmanagement und Computer Aided Team). <https://books.google.de/books?id=hrAdBgAAQBAJ>. – ISBN 9783663083191
- [Schulze 1997] SCHULZE, Markus: *Condorcet sub-cycle rule*. <http://lists.electorama.com/pipermail/election-methods-electorama.com/1997-October/001570.html>. Version: Oktober 1997
- [Schulze 2017] SCHULZE, Markus: *A New Monotonic, Clone-Independent, Reversal Symmetric, and Condorcet-Consistent Single-Winner Election Method*. <http://m-schulze.9mail.de/schulze1.pdf>. Version: März 2017
- [Schulze 2018] SCHULZE, Markus: *The Schulze Method of Voting*. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1804/1804.02973.pdf>. Version: Juni 2018



- 766 [Woodall 1996] WOODALL, D.R.: *Monotonicity and Single-Seat Election Rules*. <http://www.votingmatters.org.uk/ISSUE6/P4.HTM>. Version: Mai 1996
- 767
- 768 [Wright 2009] WRIGHT, Barry: *Objective Measures of Preferential Ballot Voting Systems*. https://rangevoting.org/Wright_Barry.pdf. Version: 2009
- 769