FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ ústav elektrotechnologie

Elektrotechnické materiály a výrobní procesy I

Neoficiální sbírka příkladů částí dielektrických materiálů a polovodičů

Verze: 0.6 Datum: 12. novembra 2024

Poznámka: Nejedná sa o oficiálny výukový materiál, iba pomôcku na učenie zostavenú na základe zápiskov z cvičení. Preto neberiem žiadnu zodpovednosť za chyby v tomto dokumente. Oficiálne riešené príklady sú dostupné v skriptách **Elektrotechnické materiály a výrobní procesy 1** z roku **2019**. Príklady sa vzťahujú ku zadaniam z rokov 2023/2024 a 2024/2025, pričom zadania vyzerali byť identické.

Autor: cinanko

Vybrané konstanty

c	$2{,}998 \cdot 10^{8}$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	Rychlost světla
h	$6{,}626 \cdot 10^{-34}$	$\mathrm{J\,s}$	Planckova konstanta
k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$	$\mathrm{J\,K^{-1}}$	Boltzmannova konstanta
m_a	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$	kg	Hmotnost elektronu
m_p	$1{,}672 \cdot 10^{-27}$	kg	Hmotnost protonu
N_A	$6{,}023 \cdot 10^{-23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$	Avogadrova konstanta
n_L	$2{,}688 \cdot 10^{25}$	$\mathrm{m^{-3}}$	Loschmidtovo číslo
q	$-1{,}602 \cdot 10^{-19}$	C	Náboj elektronu
ε_0	$8{,}854 \cdot 10^{-12}$	$\mathrm{F\,m^{-1}}$	Permitivita vakua
μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$\mathrm{H\,m^{-1}}$	Permeabilita vakua
k	$8{,}617 \cdot 10^{-5}$	$\mathrm{eV\,K^{-1}}$	Redukovaná Boltzmannova konstanta

Vybrané vlastnosti polovodičových materiálů

Platné při teplotě $T = 300\,\mathrm{K}$

Značka	Křemík	Germánium	Vlastnost
n_i	$1{,}45 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m^{-3}}$	$2{,}29 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m^{-3}}$	Koncentrace nosičů proudu (elektronů a děr) ve vlastním polovodiči
W_g	$1{,}11\,\mathrm{eV}$	$0{,}67\,\mathrm{eV}$	Šířka zakázaného pásu
μ_n	$0{,}135\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$	$0{,}39\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$	Pohyblivost elektronů
μ_p	$0{,}048\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$	$0{,}19\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$	Pohyblivost děr
N_c	$2{,}8 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$	$1{,}04 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$	Efektivní hustota stavů ve vodivostním pásu
N_v	$1{,}04 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$	$6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{m^{-3}}$	Efektivní hustota stavů ve valenčním pásu

1 Oblast dielektrických materiálů a izolantů

1)

Elektronová polarizovatelnost α_e atomu argonu je $1{,}43 \cdot 10^{-40}$ F m^2. Určete relativní permitivitu argonu při normálních fyzikálních podmínkách.

$\alpha_E = 1{,}43 \cdot 10^{-40}$ F m^2 (Farad · meter^2)

$\varepsilon_r = ?$

Claussius – Mossotiho rovnica (C – M)

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n \cdot \alpha}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

Musí zostať!

$1 \to \varepsilon_r$

argón = inertný plyn $\Rightarrow \varepsilon_r \to 1$ (plyny)

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{1+2} = \frac{n \cdot \alpha}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\cancel{3}} = \frac{n \cdot \alpha}{\cancel{3} \cdot \varepsilon_0}$$

α = polarizovateľnosť

ε_0 = permitivita vákua

n = počet atómov v 1 m^3 látky

$$\varepsilon_r = \frac{n \cdot \alpha}{\varepsilon_0} + 1$$

n_L = Loschmidtovo číslo = počet atómov v 1 m^3 plynu

(pevné látky – zhruba o 2–3 rády viac)

$$\varepsilon_r = \frac{n_L \cdot \alpha}{\varepsilon_0} + 1 = \frac{2{,}688 \cdot 10^{25} \cdot 1{,}43 \cdot 10^{-40}}{8{,}854 \cdot 10^{-12}} + 1 = \underline{\underline{1{,}000434\ [-]}}$$

$\Rightarrow$ plyn je malý príspevok (dať viac desatinných miest!)

Loschmidtovo číslo vieme použiť iba pri štandardných podmienkach (ak nemáme zadanú napr. zmenu tlaku atď.)

2)

Relativní permitivita ε_{rs} složeného ze dvou vzájemně nereagujících látek o permitivitách ε_{r1} a ε_{r2} se často určuje Lichteneckerovým mocninovým vztahem

$$\varepsilon_{rs}{}^k = v_1 \varepsilon_{r1}{}^k + v_2 \varepsilon_{r2}{}^k \tag{1.1}$$

v němž v_1 a v_2 jsou poměrné objemové podíly obou látek a k je empirická konstanta. Hodnota konstanty k se mění v rozsahu $< -1; +1 >$ podle tvaru a rozložení částic obou látek; při chaotickém uspořádání částic $k \to 0$. Ukažte, že v tomto případě přechází mocninový vztah ve vztah logaritmický:

$$\log \varepsilon_{rs} = v_1 \log \varepsilon_{r1} + v_2 \log \varepsilon_{r2} \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{rs}{}^k = V_1 \varepsilon_{r1}{}^k + V_2 \varepsilon_{r2}{}^k$$

k = empirická konštanta (zo skúsenosti)

$$a^x = 1 + \frac{x \cdot \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln a^2}{2!} + \dots$$

rozvoj vzťahu (mocninná rada)

nejaký príspevok

rádovo ešte menší príspevok

ak $x \to 0 \Rightarrow$ malý príspevok

$$a^x \doteq 1 + \frac{x \ln a}{1} \quad \text{(iba keď } x \to 0\text{)}$$

$$x = k \qquad 1 + \frac{k \cdot \ln \varepsilon_{rs}}{1} = V_1 \cdot \left(1 + \frac{k \cdot \ln \varepsilon_{r1}}{1}\right) + V_2 \left(1 + \frac{k \cdot \ln \varepsilon_{r2}}{1}\right)$$

$$\cancel{1} + k \cdot \ln \varepsilon_{rs} = \cancel{V_1} + V_1 \cdot k \cdot \ln \varepsilon_{r1} + \cancel{V_2} + V_2 \cdot k \cdot \ln \varepsilon_{r2}$$

V_1 a V_2 $\to$ pomerné objemové podiely; $V_1 + V_2 = 1$ VŽDY

(môžeme odstrániť samostatne stojace V_1, V_2 a 1)

$$\cancel{k} \cdot \ln \varepsilon_{rs} = V_1 \cancel{k} \cdot \ln \varepsilon_{r1} + V_2 \cancel{k} \cdot \ln \varepsilon_{r2}$$

k môžeme odstrániť, pretože bolo v každom členovi

$$\ln \varepsilon_{rs} = V_1 \cdot \ln \varepsilon_{r1} + V_2 \cdot \ln \varepsilon_{r2}$$

$$\ln x = 2{,}3 \cdot \log x$$

$$\log \varepsilon_{rs} = V_1 \cdot \log \varepsilon_{r1} + V_2 \cdot \log \varepsilon_{r2}$$

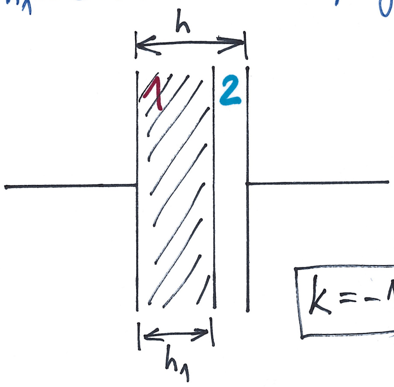
3)

Mezi elektrodami deskového kondenzátoru o rozměrech 7x12 cm a vzdálenosti elektrod 5 mm je vložena destička z polystyrenu o tloušťce 3 mm. Zbytek prostoru mezi elekrodami je vyplněn vzduchem za normálních atmosférických podmínek. Vypočtěte kapacitu tohoto kondenzátoru, je-li relativní permitivita polystyrenu při teplotě 20 °C rovna 2,3. Jak se změní kapacita kondenzátoru, je-li celý prostor mezi elektrodami vyplněn pěnovým polystyrenem, v němž je objemový podíl polystyrenu a vzduchu stejný jako v prvém případě?

$S = 7 \times 12$ cm → rozmery elektród kondenzátora

$h = 5$ mm → vzdialenosť elektród kondenzátora

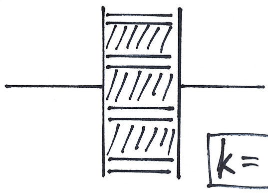
$h_1 = 3$ mm → hrúbka polystyrénovej doštičky



$\varepsilon_{r1} = 2{,}3$ (polystyrén)

$\varepsilon_{r2} = 1$ (vzduch)

$\boxed{k = -1}$



$\boxed{k = 1}$

$k = 0$ → homogénna zmes polystyrénu

$k = 1$ → paralelne zapojené kondenzátory

$k = -1$ → sériovo zapojené kondenzátory (náš prípad)

→ dielektriká radené paralelne s elektródami

$$\varepsilon_{rs}^{-1} = V_1 \cdot \varepsilon_{r1}^{-1} + V_2 \cdot \varepsilon_{r2}^{-1}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{rs}} = V_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_{r1}} + V_2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_{r2}}$$

Objemové pomery – vyplýva z nákresu a zo zadania

$$\frac{1}{\varepsilon_{rs}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2{,}3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{rs}} = 0{,}661 \Rightarrow \varepsilon_{rs} = \frac{1}{0{,}661} = 1{,}513 \ [-]$$

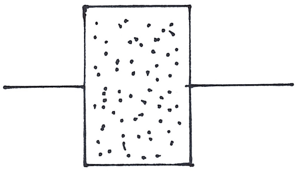
$C = ?\ F$

$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{rs} \cdot \frac{S}{h}$ → plocha – vypočítať z rozmerov; → vzdialenosť elektród (5 mm)

$C = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}513 \cdot \frac{0{,}07 \cdot 0{,}12}{5 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{22{,}51\ pF}}$

Prevedené na základné jednotky [m] $(22{,}51 \cdot 10^{-12}\ F)$

Zmena kapacity, keď bude polystyrén rozptýlený v celom objeme (objemové pomery zostanú zachované)



$\boxed{k \to 0 \text{ (logaritmické vzťahy)}}$

$\log(\varepsilon_{rs}) = v_1 \cdot \log(\varepsilon_{r1}) + v_2 \cdot \log(\varepsilon_{r2})$

$\log(\varepsilon_{rs}) = \frac{3}{5} \cdot \log(2{,}3) + \frac{2}{5} \cdot \log(1)$

$\log(\varepsilon_{rs}) = 0{,}217$

Na zbavenie sa logaritmu umocním 10 výsledkom

$\varepsilon_{rs} = 10^{0{,}217} = 1{,}648\ [-]$

$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{rs} \cdot \frac{S}{h} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}648 \cdot \frac{0{,}07 \cdot 0{,}12}{5 \cdot 10^{-3}} = \underline{\underline{24{,}51\ pF}}$

$(24{,}51 \cdot 10^{-12}\ F)$

Kapacita sa zmenila približne o $\underline{\underline{2\ pF\ (\approx 10\,\%)}}$.

4)

Rezistivitu elektroizolačních kapalin ρ_v lze v závislosti na teplotě vyjádřit vztahem

$$\rho = A \cdot \exp^{\frac{B}{T}} \tag{1.3}$$

v němž $A[\Omega\,\mathrm{m}]$ a $B[\mathrm{K}]$ jsou materiálové konstanty; teplota T je udána v K. Kabelový impregnant složený z minerálního oleje s přídavkem 25 % (hmotnostních) rafinované kalafuny má při teplotě 20 °C rezistivitu $2{\cdot}10^{10}\,\Omega\,\mathrm{m}$. Stanovte rezistivitu tohoto impregnantu při teplotách 50 °C a 80 °C, je li součinitel B roven $7 \cdot 10^3\,\mathrm{K}$.

$\rho = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$

$A[\Omega\,m]$, $B[T]$ – materiálové konštanty

$B = 7 \cdot 10^3\,K$

$20\,°C = 293{,}15\,K$ $(20 + 273{,}15 = 293{,}15)$

$\rho_{20} = 2 \cdot 10^{10}\,\Omega\,m$

$\rho_{50,80\,°C} = ?\,\Omega\,m$ → „Vyjadríme si A"

$$A = \frac{\rho_{20}}{e^{\frac{B}{T}}} = \frac{2 \cdot 10^{10}}{e^{7 \cdot 10^3 / 293{,}15}} = 0{,}8525\,\Omega\,m$$

$$A = \frac{\rho_{20}}{e^{\frac{B}{T}}} = \frac{2 \cdot 10^{10}}{e^{\frac{7 \cdot 10^3}{293{,}15}}} = 0{,}8525\,\Omega\,m$$

$50\,°C = 50 + 273{,}15 = 323{,}15\,K$

$$\rho_{50} = A \cdot e^{\frac{B}{T}} = 0{,}8525 \cdot e^{\frac{7 \cdot 10^3}{323{,}15}} = \underline{\underline{2{,}179 \cdot 10^9\,\Omega\,m}}$$

$80\,°C = 80 + 273{,}15 = 353{,}15\,K$

$$\rho_{80} = A \cdot e^{\frac{B}{T}} = 0{,}8525 \cdot e^{\frac{7 \cdot 10^3}{353{,}15}} = \underline{\underline{0{,}346 \cdot 10^9\,\Omega\,m}}$$

Z výpočtov vyplýva, že s rastúcou teplotou klesá rezistivita elektroizolačných materiálov

5)

Měřením dynamické viskozity transformátorového oleje BTS2 na Hönplerově viskozimetru byly při několika teplotách zjištěny údaje uvedené v tabulce. Stanovte rezistivitu tohoto oleje při teplotách 50 °C a 85 °C, je li hodnota rezistivity při teplotě 20 °C rovna $3 \cdot 10^{11}\,\Omega\,\mathrm{m}$. Při výpočtu předpokládejte, že při změně teploty se nemění koncentrace volných iontů v oleji.

Tabulka:

$\vartheta[°\mathrm{C}]$	20	40	60	80	100
$\eta[\mathrm{N\,s\,m^{-2}}]$	$4{,}35 \cdot 10^{-2}$	$1{,}21 \cdot 10^{-2}$	$3{,}95 \cdot 10^{-3}$	$1{,}46 \cdot 10^{-3}$	$6{,}01 \cdot 10^{-4}$

$$\rho_{20} = 3 \cdot 10^{11}\ \Omega\,\mathrm{m}$$

$$\rho_{50,85\,°\mathrm{C}} = ?\ \Omega\,\mathrm{m}$$

$$\rho = A \cdot e^{\frac{B}{T}} \longrightarrow$$ neznáme A, B; potrebujeme 2 rezistivity pri dvoch rôznych teplotách

$$\eta \cdot \gamma = k$$

$$\frac{\eta}{\rho} = k \Rightarrow \rho = \frac{\eta}{k} \qquad k = \text{konštanta}$$

$$T_1 \qquad \frac{\eta_1}{k} = A \cdot e^{\frac{B}{T_1}} \qquad / \ln$$

$$T_2 \qquad \frac{\eta_2}{k} = A \cdot e^{\frac{B}{T_2}} \qquad / \ln(-1)$$

$$\ln\left(\frac{\eta_1}{k}\right) = \ln A + \frac{B}{T_1}$$

$$\ln\left(\frac{\eta_2}{k}\right) = -\ln A - \frac{B}{T_2}$$

$$\ln\left(\frac{\frac{\eta_1}{\cancel{k}}}{\frac{\eta_2}{\cancel{k}}}\right) = \frac{B}{T_1} - \frac{B}{T_2}$$

$$\ln\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) = B \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

$$B = \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}$$

R_1, R_2 a T_1, T_2
→ dosadené z tabuľky
(pre 20 °C a 40 °C)

$$B = \frac{\ln\left(\frac{4{,}35 \cdot 10^{-2}}{1{,}21 \cdot 10^{-2}}\right)}{\left(\frac{1}{293{,}15} - \frac{1}{313{,}15}\right)} = \underline{5873{,}15\ K}$$

$\rho_{20} = 3 \cdot 10^{11}\ \Omega\, m \qquad \rho = A \cdot e^{\frac{B}{T}} \Rightarrow \rho_{20} = A \cdot e^{\frac{B}{T_{20}}}$

$3 \cdot 10^{11} = A \cdot e^{\frac{5873{,}15}{293{,}15}}$ (prípadne využiť SOLVER)

$$A = \frac{3 \cdot 10^{11}}{e^{\frac{5873{,}15}{293{,}15}}} = \underline{597{,}3\ \Omega\, m}$$

$50°C = 323{,}15\ K \qquad (0°C = 273{,}15\ K)$

$$\rho_{50} = A \cdot e^{\frac{B}{323{,}15}} = 597{,}3 \cdot e^{\frac{5873{,}15}{323{,}15}} = \underline{\underline{46{,}704 \cdot 10^{9}\ \Omega\, m}}$$

$85°C = 358{,}15\ K$

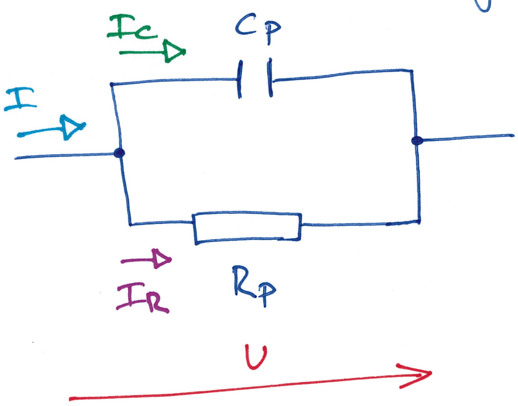
$$\rho_{85} = A \cdot e^{\frac{B}{358{,}15}} = 597{,}3 \cdot e^{\frac{5873{,}15}{358{,}15}} = \underline{\underline{7{,}907 \cdot 10^{9}\ \Omega\, m}}$$

S rastúcou teplotou sa znižuje viskozita a zároveň klesá rezistivita (rastie konduktivita)

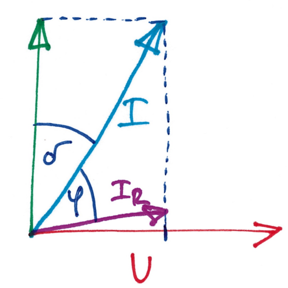
6)

V obvodu střídavého elektrického proudu je zapojen kondenzátor, jehož dielektrikum vykazuje ztráty. Chování tohoto kondenzátoru lze za předpokladu, že pochody v dielektriku jsou lineární vyšetřit sledováním ekvivalentního dvouprvkového náhradního zapojení kondenzátoru s ideálním, bezztrátovým dielektrikem a odporu představujícího ztráty. Uvažujte, že kondenzátor s ideálním dielektrikem o kapacitě C_p a odpor R_p jsou v náhradním zapojení spojeny paralelně a že je na uvedenou soustavu připojeno napětí U.
Nakreslete pro tento případ fázorový diagram napětí a proudů soustavy a určete ztrátový činitel, celkovou impedanci a celkové ztráty energie v soustavě.

Paralelné náhradné zapojenie



FÁZOROVÝ DIAGRAM



kondenzátor (C) – najprv prúd, potom napätie

tg – protiľahlá ku priľahlej

X_c – kapacitná reaktancia

Z_c – komplexná impedancia

$$tg\,\delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{\frac{\cancel{U}\,1}{R_p}}{\frac{\cancel{U}\,1}{\frac{1}{\omega C_p}}} = \frac{\frac{1}{\omega C_p}}{\frac{R_p}{1}} = \frac{1}{R_p \omega C_p} \Rightarrow R_p = \frac{1}{tg\,\delta\,\omega C_p}$$

pripísaná

$$= \frac{X_c}{R_p} = \frac{1}{\omega R_p C_p}$$

$$P_z = U \cdot I_R = U \cdot \frac{U}{R_p} = \frac{U^2}{R_p} = U^2\,tg\,\delta\,\omega C_p$$

$$R_p = \frac{1}{tg\,\delta\,\omega C_p}$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C_p}\cdot\frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega C_p} \qquad \boxed{j^2 = -1} \; !$$

$$Z_p = \frac{Z_C \cdot R_p}{Z_C + R_p} = \frac{-\frac{jR_p}{\omega C_p}}{-\frac{j}{\omega C_p} + R_p} = \frac{\frac{-jR_p}{\cancel{\omega C_p}}}{\frac{-j+\omega C_p R_p}{\cancel{\omega C_p}}} =$$

rozšírené komplexne združeným číslom

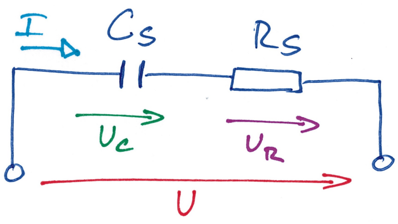
$$= \frac{jR_p}{j-\omega C_p R_p}\cdot\frac{j+\omega C_p R_p}{j+\omega C_p R_p}$$

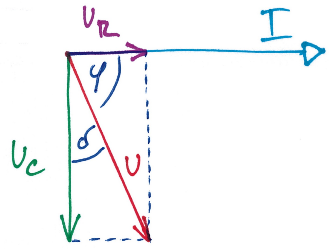
$$Z_p = \frac{-R_p + j\omega C_p R_p^2}{-1-\omega^2 C_p^2 R_p^2} = \frac{R_p - j\omega C_p R_p^2}{\omega^2 C_p^2 R_p^2 + 1}$$

7)

Ve smyslu zadání úlohy č. C-7 uvažujte sériové zapojení odporu R_s a kondenzátoru s ideálním dielektrikem C_s. K soustavě obou prvků nechť je přiloženo napětí U. Nakreslete fázorový diagram napětí a proudů soustavy, určete ztrátový činitel, celkovou impedanci a celkové ztráty energie v soustavě.

Sériové náhradné zapojenie





$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{U_R}{U_C} = \frac{\cancel{I}\cdot R_S}{\cancel{I}\cdot X_C} = \frac{R_S}{\frac{1}{\omega C_S}} = \underline{\underline{R_S\,\omega\,C_S}}$$

$$\underline{\underline{Z_S = R_S - j\,\frac{1}{\omega C_S}}}$$

$$P_z = U_R\cdot I_R = (R_S\cdot I_R)\cdot I_R = R_S\cdot I_R^{\,2} = R_S\cdot\frac{U^2}{|\hat{Z}|^2} =$$

$$= R_S\cdot\frac{U^2}{\left(\cancel{\sqrt{\ }}\,R_S^{\,2}+\left(-\frac{1}{\omega C_S}\right)^2\right)^{\cancel{2}}} = R_S\cdot\frac{U^2}{R_S^{\,2}+\frac{1}{\omega^2 C_S^{\,2}}} =$$

$$= R_S\cdot\frac{U^2}{\frac{\omega^2 R_S^{\,2} C_S^{\,2}+1}{\omega^2 C_S^{\,2}}} = \underline{\underline{\frac{U^2\omega^2 R_S C_S^{\,2}}{\omega^2 \underline{R_S^{\,2}} C_S^{\,2}+1}}}$$

$$R_S = \mathrm{tg}^2\delta$$

8)

Určete ztrátový činitel vzduchu za normálních fyzikálních podmínek a při kmitočtu 50 Hz, má-li rozhodující vliv na velikost ztrát elektrická vodivost vzduchu. Relativní permitivita vzduchu je za normálních fyzikálních podmínek rovna 1,000 584, rezistivita je za stejných podmínek $10^{16}\,\Omega\,\mathrm{m}$.

$f = 50\ \mathrm{Hz}$

$\varepsilon_r = 1{,}000\,584$

$\rho = 10^{16}\ \Omega\,\mathrm{m}$ [ohm metr] → rezistivita vzduchu

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{1}{\omega R_p C_p} = \frac{1}{2\pi f\,\rho \cdot \cancel{\frac{l}{S}}\,\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \cancel{\frac{S}{l}}} = \frac{1}{2\pi f \rho\, \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^{16} \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}000\,584} = \underline{\underline{3{,}59 \cdot 10^{-8}\ [-]}}$$

9)

Komplexní permitivita ε^* dielektrika je definována vztahem $\varepsilon^* = \varepsilon^{'} - j\varepsilon^{''}$. V závislosti na kmitočtu lze podle Debyeho vyjádřit komplexní permitivitu rovnicí

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \tag{1.4}$$

v níž ε_s značí relativní (statickou) permitivitu dielektrika určenou při kmitočtu $f \to 0$, ε_∞ relativní (optickou) permitivitu určenou při velmi vysokých kmitočtech; τ je relaxační doba, která je mimo jiné i funkcí teploty. **Vyjděte z obou uvedených vztahů a určete reálnou část ε' a imaginární část ε'' komplexní permitivity**.

Rozdelením rovnice (1.4) na reálnu a imaginárnu zložku dostaneme:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \cdot \frac{1 - j\omega\tau}{1 - j\omega\tau} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} - j\frac{\omega\tau(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Porovnaním s rovnicou $\varepsilon^* = \varepsilon^{'} - j\varepsilon^{''}$ dostávame:

$$\varepsilon^{'} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \tag{Reálna časť}$$

$$\varepsilon^{''} = \frac{\omega\tau(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + \omega^2\tau^2} \tag{Imaginárna časť}$$

Poznámka: Tento príklad **nebol riešený vrámci cvičenia**. Je prevzatý zo skrípt (BPC-EMV skripta 2019, strana 86 č. 10) a takisto ho možno nájsť aj v prednáškach (Prednáška č. 2, strany 14 - 18).

2 Polovodičové materiály

1)

Tři vzorky příměsového polovodiče křemíku N typu jsou dotovány postupně 10^{20}, 10^{22} a 10^{24} atomy fosforu v $1\,\mathrm{m}^3$ polovodiče. Stanovte koncentrace elektronů a děr a konduktivitu těchto polovodičových materiálů při teplotě $20\,^\circ\mathrm{C}$ (stav plné ionizace příměsí). Vypočtěte polohu Fermiho energetické hladiny v jednotlivých vzorcích polovodičů. Polohy Fermiho hladiny v závislosti na měnící se koncentraci donorů graficky znázorněte v pásovém modelu příměsového polovodiče pro $T = 300\,\mathrm{K}$.
Šířka zakázaného pásu u křemíku je $W_g = 1{,}11\,\mathrm{eV}$, efektivní hustota stavů v pásu vodivostním je $N_C = 2{,}8 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$, efektivní hustota stavů v pásu valenčním je $N_V = 1{,}04 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$.
Pohyblivost elektronů v křemíku je $\mu_n = 0{,}135\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{V}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}$ a pohyblivost děr $\mu_n = 0{,}048\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{V}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}$.
Rovnovážná koncentrace elektronů a děr v křemíku je $n_i = 1{,}45 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}^{-3}$.
Příklad řešte pro případ příměsového polovodiče křemíku P typu dotovaného postupně 10^{19}, 10^{21} a 10^{23} atomu bóru v $1\,\mathrm{m}^3$ polovodiče.

2)

Monokrystal křemíku je dotován atomy fosforu o koncentraci $10^{22}\,\mathrm{m^{-3}}$ a atomy boru o koncentraci $10^{21}\,\mathrm{m^{-3}}$ (kompenzovaný polovodič). Vypočítejte koncentraci elektronů a děr v polovodiči a jeho konduktivitu při $T = 300\,\mathrm{K}$. Uvažujte, že při této teplotě jsou všechny příměsi ionizovány. Rovnovážná koncentrace elektronů a děr v křemíku při této teplotě je $n_i = 1{,}45 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m^{-3}}$. Pohyblivost elektronů v křemíku je $\mu_n = 0{,}135\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$ a pohyblivost děr $\mu_n = 0{,}048\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$. Stanovte polohu Fermiho úrovně v tomto polovodiči při teplotě 300 K. Šířka zakázanéhov pásu u křemíku je 1,11 eV; efektivní hustota stavů v pásu vodivostním je $N_C = 2{,}8 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$, efektivní hustota stavů v pásu valenčním je $N_V = 1{,}04 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$.

3)

Stanovte potenciální rozdíl na PN přechodu křemíkové diody za předpokladu, že oblast přechodu je v tepelné rovnováze; koncentrace donorových příměsí je $3{,}5 \cdot 10^{23}\,\mathrm{m^{-3}}$, koncentrace akceptorových příměsí je $1{,}5 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m^{-3}}$. Při výpočtu uvažujte teplotu $300\,\mathrm{K}$.

4)

Přechod mezi oblastí vodivosti typu P a N v křemíkové diodě má tvar kruhové plošky o poloměru 0,15 mm. Vypočtěte celkový proud procházející přechodem při teplotě 300 K, působí-li na přechodu v přímém směru vnější stejnosměrné napětí 0,1 V. Koncentrace donorových příměsí nechť je $5 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m^{-3}}$, koncentrace akceptorových příměsí $3 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}$. Předpokládejte, že pohyblivost elektronů je $0{,}135\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$, pohyblivost děr je $0{,}048\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$ a doba života je 100 µs pro oba druhy nosičů.
Uvažujte, že vnější napětí působí na PN přechodu v závěrném směru. Jaký bude v tomto případě celkový proud procházející přechodem?

5)

Stanovte šířku PN přechodu v křemíku, je-li koncentrace donorových příměsí $1{,}5 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}$ a koncentrace akceptorových příměsí $3{,}5 \cdot 10^{17}\,\mathrm{m^{-3}}$. Relativní permitivita křemíku je 11,7. Jak se změní šířka uvedeného přechodu, působí-li na něj současně vnější stejnosměrné napětí $0{,}2\,\mathrm{V}$

a) v přímém směru
b) v závěrném směru

Úlohu řešte pro $T = 300\,\mathrm{K}$.
Popsaný přechod nechť má tvar kruhové plošky o poloměru $3\,\mathrm{mm}$. Stanovte kapacitu daného přechodu v nezatíženém stavu i v případě, kdy na přechodu působí v přímém nebo v závěrném směru stejnosměrné napětí o hodnotě $0{,}2\,\mathrm{V}$.

6)

Vyjděte z Einsteinova universálního vztahu vyjadřujícího závislost mezi pohyblivostí nosičů nábojů a difúzním koeficientem a odvoďte rozměr difúzního koeficientu.

7)

Stanovte číselnou hodnotu difúzního koeficientu elektronů a děr v monokrystalu křemíku při teplotě 300 K, je-li při téže teplotě pohyblivost elektronů μ_n rovna 0,135 $m^2\,V^{-1}\,s^{-1}$ a pohyblivost děr μ_p rovna 0,048 $m^2\,V^{-1}\,s^{-1}$.

8)

Z prvního Fickova zákona lze pro hustotu proudu J_{dif} podmíněného difusí nosičů nábojů psát rovnici

$$J_{dif} = \pm q \; D \; grad \, n \tag{2.1}$$

v níž n označuje koncentraci nosičů o náboji q a D je difúzní koeficient.
Jaký je rozměr veličiny D?