FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ ústav elektrotechnologie

Elektrotechnické materiály a výrobní procesy I

Neoficiální sbírka příkladů částí dielektrických materiálů a polovodičů

Verze: 0.5 Datum: 6. listopadu 2024

Poznámka: Nejedná sa o oficiálny výukový materiál, iba pomôcku na učenie zostavenú na základe zápiskov z cvičení. Preto neberiem žiadnu zodpovednosť za chyby v tomto dokumente. Oficiálne riešené príklady sú dostupné v skriptách **Elektrotechnické materiály a výrobní procesy 1** z roku **2019**. Príklady sa vzťahujú ku zadaniam z rokov 2023/2024 a 2024/2025, pričom zadania vyzerali byť identické.

Autor: cinanko

Vybrané konstanty

c	$2{,}998 \cdot 10^{8}$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	Rychlost světla
h	$6{,}626 \cdot 10^{-34}$	$\mathrm{J\,s}$	Planckova konstanta
k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$	$\mathrm{J\,K^{-1}}$	Boltzmannova konstanta
m_a	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$	kg	Hmotnost elektronu
m_p	$1{,}672 \cdot 10^{-27}$	kg	Hmotnost protonu
N_A	$6{,}023 \cdot 10^{-23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$	Avogadrova konstanta
n_L	$2{,}688 \cdot 10^{25}$	$\mathrm{m^{-3}}$	Loschmidtovo číslo
q	$-1{,}602 \cdot 10^{-19}$	C	Náboj elektronu
ε_0	$8{,}854 \cdot 10^{-12}$	$\mathrm{F\,m^{-1}}$	Permitivita vakua
μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$\mathrm{H\,m^{-1}}$	Permeabilita vakua
k	$8{,}617 \cdot 10^{-5}$	$\mathrm{eV\,K^{-1}}$	Redukovaná Boltzmannova konstanta

Vybrané vlastnosti polovodičových materiálů

Platné při teplotě $T = 300\,\mathrm{K}$

Značka	Křemík	Germánium	Vlastnost
n_i	$1{,}45 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m^{-3}}$	$2{,}29 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m^{-3}}$	Koncentrace nosičů proudu (elektronů a děr) ve vlastním polovodiči
W_g	$1{,}11\,\mathrm{eV}$	$0{,}67\,\mathrm{eV}$	Šířka zakázaného pásu
μ_n	$0{,}135\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$	$0{,}39\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$	Pohyblivost elektronů
μ_p	$0{,}048\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$	$0{,}19\,\mathrm{m^2\,V^{-1}\,s^{-1}}$	Pohyblivost děr
N_c	$2{,}8 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$	$1{,}04 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$	Efektivní hustota stavů ve vodivostním pásu
N_v	$1{,}04 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$	$6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{m^{-3}}$	Efektivní hustota stavů ve valenčním pásu

1 Oblast dielektrických materiálů a izolantů

1)

Elektronová polarizovatelnost α_e atomu argonu je $1{,}43 \cdot 10^{-40}\,\mathrm{F\,m^2}$. Určete relativní permitivitu argonu při normálních fyzikálních podmínkách.

$\alpha_E = 1{,}43 \cdot 10^{-40}\ \mathrm{F\,m^2}$
$\varepsilon_V =?$

Claussius - Mossotiho rovnice (C-M):

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n \cdot \alpha}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

Argon = inertní plyn $\Rightarrow \varepsilon_r \approx 1$

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{1 + 2} = \frac{n \cdot \alpha}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\cancel{3}} = \frac{n \cdot \alpha}{\cancel{3} \cdot \varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_r = \frac{n \cdot \alpha}{\varepsilon_0} + 1$$

$n = n_L$ = Loshnidtovo číslo = počet atomů v 1 m^3 **plynu** (pro pevné látky jde o hodnotu o 2 až 3 řády větší)

$$\varepsilon_r = \frac{n_L \cdot \alpha}{\varepsilon_0} + 1 = \frac{2{,}688 \cdot 10^{25} \cdot 1{,}43 \cdot 10^{-40}}{8{,}854 \cdot 10^{-12}} + 1 = 1{,}000434\ [-]$$

Vysvětlivky:

α	=	polarizovatelnost
ε_0	=	permitivita vakua (konstanta)
n	=	počet atomů v 1 m^3 látky

2)

Relativní permitivita ε_{rs} složeného ze dvou vzájemně nereagujících látek o permitivitách ε_{r1} a ε_{r2} se často určuje Lichteneckerovým mocninovým vztahem

$$
{\varepsilon_{rs}}^k = V_1 {\varepsilon_{r1}}^k + V_2 {\varepsilon_{r2}}^k \tag{1}
$$

v němž V_1 a V_2 jsou poměrné objemové podíly obou látek a k je empirická konstanta. Hodnota konstanty k se mění v rozsahu $< -1; +1 >$ podle tvaru a rozložení částic obou látek; při chaotickém uspořádání částic $k \to 0$. Ukažte, že v tomto případě přechází mocninový vztah ve vztah logaritmický:

$$
\log \varepsilon_{rs} = V_1 \log \varepsilon_{r1} + V_2 \log \varepsilon_{r2} \tag{2}
$$

$$
\varepsilon_{rs}^k = V_1 \cdot \varepsilon_{r1}^k + V_2 \cdot \varepsilon_{r2}^k
$$

$$
\alpha^x = 1 + \underbrace{\frac{x \cdot \ln a}{1!}}_{\text{když } x \to 0 \text{ malý příspěvek}} + \overbrace{\frac{x^2 \cdot \ln a^2}{2!}}^{\text{řádově ještě měnší}} + \dots
$$

Pokud $x \to 0$:

$$
a^x \doteq 1 + \frac{x \cdot \ln a}{1}
$$

Na základě toho:

$$
1 + \frac{k \cdot \ln \varepsilon_{rs}}{1} = V_1 \cdot \left(1 + \frac{k \cdot \ln \epsilon_{r1}}{1}\right) + V_2 \cdot \left(1 + \frac{k \cdot \ln \varepsilon_{r2}}{1}\right)
$$

V_1 a V_2 jsou objemové podíly, dohromady tedy dají 1

$$
\cancel{1} + k \cdot \ln \varepsilon_{rs} = \cancel{V_1} + V_1 \cdot k \cdot \ln \varepsilon_{r1} + \cancel{V_2} + V_2 \cdot k \cdot \ln \varepsilon_{r2}
$$

k je v každém členu, možno vykrátit

$$
\cancel{k} \cdot \ln \varepsilon_{rs} = V_1 \cdot \cancel{k} \cdot \ln \varepsilon_{r1} + V_2 \cdot \cancel{k} \cdot \varepsilon_{r2}
$$

$$\ln \varepsilon_{rs} = V_1 \cdot \ln \varepsilon_{r1} + V_2 \cdot \ln \varepsilon_{r2}$$

A jelikož $\ln x = 2{,}3 \cdot \log x$:

$$\cancel{2{,}3} \cdot \log \varepsilon_{rs} = V_1 \cdot \cancel{2{,}3} \cdot \log \varepsilon_{r1} + V_2 \cdot \cancel{2{,}3} \cdot \log \varepsilon_{r2}$$

$$\log \varepsilon_{rs} = V_1 \cdot \log \varepsilon_{r1} + V_2 \cdot \log \varepsilon_{r2}$$

Vysvětlivky:

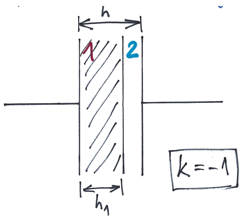
k = empirická konstanta

3)

Mezi elektrodami deskového kondenzátoru o rozměrech 7x12 cm a vzdálenosti elektrod 5 mm je vložena destička z polystyrenu o tloušťce 3 mm. Zbytek prostoru mezi elekrodami je vyplněn vzduchem za normálních atmosférických podmínek. Vypočtěte kapacitu tohoto kondenzátoru, je-li relativní permitivita polystyrenu při teplotě 20 °C rovna 2,3. Jak se změní kapacita kondenzátoru, je-li celý prostor mezi elektrodami vyplněn pěnovým polystyrenem, v němž je objemový podíl polystyrenu a vzduchu stejný jako v prvém případě?

$S = 7 \times 12$ cm = rozměry elektrod kondenzátoru
$h = 5$ mm = vzdálenost elektrod kondenzátoru
$h_1 = 3$ mm = tloušťka polystyrenové destičky
$\varepsilon_{r1} = 2{,}3$ (polystyren)
$\varepsilon_{r2} = 1$ (vzduch)

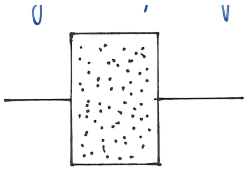
Sériově zapojené kondenzátory (k = -1):



$$\varepsilon_{rs}^{-1} = V_1 \cdot \varepsilon_{r1}^{-1} + V_2 \cdot \varepsilon_{r2}^{-1}$$
$$\frac{1}{\varepsilon_{rs}} = V_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_{r1}} + V_2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_{r2}}$$
$$\frac{1}{\varepsilon_{rs}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{\varepsilon_{rs}} = 0{,}661$$
$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{\varepsilon_{rs}}$$
$$\varepsilon_{rs} = 1{,}513\ [-]$$

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{rs} \cdot \frac{S}{h} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}513 \cdot \frac{0{,}07 \cdot 0{,}12}{5 \cdot 10^{-3}} = 22{,}51 \text{ pF}$$

k = 0 (homogenní směs):



k->0 (logaritmické vztahy)

$$\begin{aligned}
\log(\varepsilon_{rs}) &= V_1 \cdot \log(\varepsilon_{r1}) + V_2 \cdot \log(\varepsilon_{r2}) \\
\log(\varepsilon_{rs}) &= \frac{3}{5} \cdot \log(2{,}3) + \frac{2}{5} \cdot \log(1) \\
log(\varepsilon_{rs}) &= 0{,}217 \\
\varepsilon_{rs} &= 10^{0{,}217} = 1{,}648\ [-]
\end{aligned}$$

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{rs} \cdot \frac{S}{h} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}648 \cdot \frac{0{,}07 \cdot 0{,}12}{5 \cdot 10^{-3}} = 24{,}51\ \mathrm{pF}$$

Kapacita se změnila cca o 2 pF ($\approx$ 10 %).

Vysvětlivky:

V_1 a V_2 jsou objemové poměry, jejich hodnota vyplývá ze zadání a nákresů.

4)

Rezistivitu elektroizolačních kapalin ρ_v lze v závislosti na teplotě vyjádřit vztahem

$$\rho = A \cdot \exp^{\frac{B}{T}} \tag{3}$$

v němž $A[\Omega\,\mathrm{m}]$ a $B[\mathrm{K}]$ jsou materiálové konstanty; teplota T je udána v K. Kabelový impregnant složený z minerálního oleje s přídavkem 25 % (hmotnostních) rafinované kalafuny má při teplotě 20 °C rezistivitu $2{\cdot}10^{10}\,\Omega\,\mathrm{m}$. Stanovte rezistivitu tohoto impregnantu při teplotách 50 °C a 80 °C, je li součinitel B roven $7 \cdot 10^3$ K.

$\rho = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$

$A[\Omega\,m]$, $B[T]$ – materiálové konštanty

$B = 7 \cdot 10^3\ K$

$20°C = 293,15\ K \quad (20 + 273,15 = 293,15)$

$\rho_{20} = 2 \cdot 10^{10}\ \Omega\,m$

$\rho_{50,80°C} = ?\ \Omega\,m \longrightarrow$ „Vyjadríme si A"

$$A = \frac{\rho_{20}}{e^{\frac{B}{T}}} = \frac{2 \cdot 10^{10}}{e^{7\cdot10^3/293,15}} = 0,8525\ \Omega\,m$$

$$A = \frac{\rho_{20}}{e^{\frac{B}{T}}} = \frac{2 \cdot 10^{10}}{e^{\frac{7\cdot10^3}{293,15}}} = 0,8525\ \Omega\,m$$

$50°C = 50 + 273,15 = 323,15\ K$

$$\rho_{50} = A \cdot e^{\frac{B}{T}} = 0,8525 \cdot e^{\frac{7\cdot10^3}{323,15}} = \underline{\underline{2,179 \cdot 10^9\ \Omega\,m}}$$

$80°C = 80 + 273,15 = 353,15\ K$

$$\rho_{80} = A \cdot e^{\frac{B}{T}} = 0,8525 \cdot e^{\frac{7\cdot10^3}{353,15}} = \underline{\underline{0,346 \cdot 10^9\ \Omega\,m}}$$

Z výpočtov vyplýva, že s rastúcou teplotou klesá rezistivita elektroizolačných materiálov

5)

Měřením dynamické viskozity transformátorového oleje BTS2 na Höpplerově viskozimetru byly při několika teplotách zjištěny údaje uvedené v tabulce. Stanovte rezistivitu tohoto oleje při teplotách 50 °C a 85 °C, je li hodnota rezistivity při teplotě 20 °C rovna $3\cdot 10^{11}\,\Omega\,\mathrm{m}$. Při výpočtu předpokládejte, že při změně teploty se nemění koncentrace volných iontů v oleji.

Tabulka:

$\vartheta[^\circ\mathrm{C}]$	20	40	60	80	100
$\eta[\mathrm{N\,s\,m^{-2}}]$	$4{,}35\cdot 10^{-2}$	$1{,}21\cdot 10^{-2}$	$3{,}95\cdot 10^{-3}$	$1{,}46\cdot 10^{-3}$	$6{,}01\cdot 10^{-4}$

$$\rho_{20} = 3\cdot 10^{11}\ \Omega\,\mathrm{m}$$

$$\rho_{50,85\,^\circ C} = ?\ \Omega\,\mathrm{m}$$

$$\rho = A\cdot e^{\frac{B}{T}} \longrightarrow$$ neznáme A, B: potrebujeme 2 rezistivity pri dvoch rôznych teplotách

$$\eta\cdot\gamma = k$$

$$\frac{\eta}{\rho} = k \Rightarrow \rho = \frac{\eta}{k} \qquad k = \text{konštanta}$$

$T_1 \quad \frac{\eta_1}{k} = A\cdot e^{\frac{B}{T_1}} \quad / \ln$

$T_2 \quad \frac{\eta_2}{k} = A\cdot e^{\frac{B}{T_2}} \quad / \ln(-1)$

$$\ln\left(\frac{\eta_1}{k}\right) = \ln A + \frac{B}{T_1}$$

$$\ln\left(\frac{\eta_2}{k}\right) = -\ln A - \frac{B}{T_2}$$

$$\ln\left(\frac{\frac{\eta_1}{\cancel{k}}}{\frac{\eta_2}{\cancel{k}}}\right) = \frac{B}{T_1} - \frac{B}{T_2}$$

$$\ln\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right) = B\cdot\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

$$B = \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}$$

R_1, R_2 a T_1, T_2
→ dosadené z tabuľky
(pre 20 °C a 40 °C)

$$B = \frac{\ln\left(\frac{4{,}35\cdot 10^{-2}}{1{,}21\cdot 10^{-2}}\right)}{\left(\frac{1}{293{,}15} - \frac{1}{313{,}15}\right)} = \underline{5873{,}15\ K}$$

$\rho_{20} = 3\cdot 10^{11}\ \Omega\, m$ $\quad \rho = A\cdot e^{\frac{B}{T}} \Rightarrow \rho_{20} = A\cdot e^{\frac{B}{T_{20}}}$

$$3\cdot 10^{11} = A\cdot e^{\frac{5873{,}15}{293{,}15}}$$ (prípadne využiť SOLVER)

$$A = \frac{3\cdot 10^{11}}{e^{\frac{5873{,}15}{293{,}15}}} = \underline{597{,}3\ \Omega\, m}$$

$(0\,°C = 273{,}15\ K)$

$50\,°C = 323{,}15\ K$

$$\rho_{50} = A\cdot e^{\frac{B}{323{,}15}} = 597{,}3\cdot e^{\frac{5873{,}15}{323{,}15}} = \underline{\underline{46{,}704\cdot 10^{9}\ \Omega\, m}}$$

$85\,°C = 358{,}15\ K$

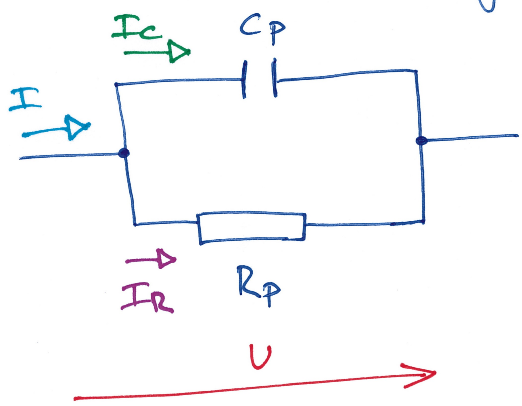
$$\rho_{85} = A\cdot e^{\frac{B}{358{,}15}} = 597{,}3\cdot e^{\frac{5873{,}15}{358{,}15}} = \underline{\underline{7{,}907\cdot 10^{9}\ \Omega\, m}}$$

S rastúcou teplotou sa znižuje viskozita a zároveň klesá rezistivita (rastie konduktivita)

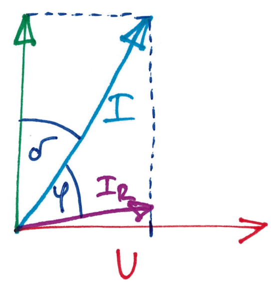
6)

V obvodu střídavého elektrického proudu je zapojen kondenzátor, jehož dielektrikum vykazuje ztráty. Chování tohoto kondenzátoru lze za předpokladu, že pochody v dielektriku jsou lineární vyšetřit sledováním ekvivalentního dvouprvkového náhradního zapojení kondenzátoru s ideálním, bezztrátovým dielektrikem a odporu představujícího ztráty. Uvažujte, že kondenzátor s ideálním dielektrikem o kapacitě C_p a odpor R_p jsou v náhradním zapojení spojeny paralelně a že je na uvedenou soustavu připojeno napětí U.
Nakreslete pro tento případ fázorový diagram napětí a proudů soustavy a určete ztrátový činitel, celkovou impedanci a celkové ztráty energie v soustavě.

Paralelné náhradné zapojenie



FÁZOROVÝ DIAGRAM



kondenzátor (C) – najprv prúd, potom napätie

tg – protiľahlá ku priľahlej

X_c – kapacitná reaktancia

Z_c – komplexná impedancia

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{\frac{\cancel{U}\,1}{R_p}}{\frac{\cancel{U}\,1}{\frac{1}{\omega C_p}}} = \frac{\frac{1}{\omega C_p}}{\frac{R_p}{1}} = \frac{1}{R_p \omega C_p} \Rightarrow R_p = \frac{1}{\operatorname{tg}\delta\,\omega C_p}$$

pripísaná

$$= \frac{X_c}{R_p} = \frac{1}{\omega R_p C_p}$$

$$P_z = U \cdot I_R = U \cdot \frac{U}{R_p} = \frac{U^2}{R_p} = U^2 \operatorname{tg}\delta\,\omega C_p$$

$$R_p = \frac{1}{\operatorname{tg}\delta\,\omega C_p}$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C_p} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega C_p} \qquad \boxed{j^2 = -1} \; !$$

$$Z_p = \frac{Z_C \cdot R_p}{Z_C + R_p} = \frac{-\frac{jR_p}{\omega C_p}}{-\frac{j}{\omega C_p} + R_p} = \frac{\frac{-jR_p}{\cancel{\omega C_p}}}{\frac{-j+\omega C_p R_p}{\cancel{\omega C_p}}} =$$

rozšírené komplexne združeným číslom

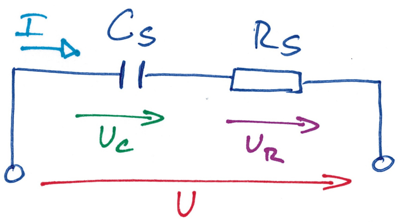
$$= \frac{jR_p}{j - \omega C_p R_p} \cdot \frac{j + \omega C_p R_p}{j + \omega C_p R_p}$$

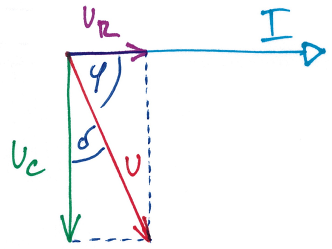
$$Z_p = \frac{-R_p + j\omega C_p R_p^2}{-1 - \omega^2 C_p^2 R_p^2} = \frac{R_p - j\omega C_p R_p^2}{\omega^2 C_p^2 R_p^2 + 1}$$

7)

Ve smyslu zadání úlohy č. C-7 uvažujte sériové zapojení odporu R_s a kondenzátoru s ideálním dielektrikem C_s. K soustavě obou prvků nechť je přiloženo napětí U. Nakreslete fázorový diagram napětí a proudů soustavy, určete ztrátový činitel, celkovou impedanci a celkové ztráty energie v soustavě.

Sériové náhradné zapojenie





$$\operatorname{tg}\delta = \frac{U_R}{U_C} = \frac{\cancel{I}\cdot R_s}{\cancel{I}\cdot X_C} = \frac{R_s}{\frac{1}{\omega C_s}} = \underline{\underline{R_s \omega C_s}}$$

$$\underline{\underline{Z_s = R_s - j\frac{1}{\omega C_s}}}$$

$$P_z = U_R \cdot I_R = (R_s \cdot I_R)\cdot I_R = R_s \cdot I_R^{\,2} = R_s \cdot \frac{U^2}{|\hat{Z}|^2} =$$

$$= R_s \cdot \frac{U^2}{\left(\cancel{\sqrt{R_s^2 + \left(-\frac{1}{\omega C_s}\right)^2}}\right)^{\cancel{2}}} = R_s \cdot \frac{U^2}{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}} =$$

$$= R_s \cdot \frac{U^2}{\frac{\omega^2 R_s^2 C_s^2 + 1}{\omega^2 C_s^2}} = \underline{\underline{\frac{U^2 \omega^2 R_s C_s^2}{\omega^2 \underline{R_s^2} C_s^2 + 1}}}$$

$R_s = \operatorname{tg}^2\delta$

8)

Určete ztrátový činitel vzduchu za normálních fyzikálních podmínek a při kmitočtu 50 Hz, má-li rozhodující vliv na velikost ztrát elektrická vodivost vzduchu. Relativní permitivita vzduchu je za normálních fyzikálních podmínek rovna 1,000 584, rezistivita je za stejných podmínek $10^{16}\,\Omega\,\mathrm{m}$.

$f = 50\ \mathrm{Hz}$

$\varepsilon_r = 1{,}000\,584$

$\rho = 10^{16}\ \Omega\,\mathrm{m}$ [ohm meter] → rezistivita vzduchu

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{1}{\omega R_p C_p} = \frac{1}{2\pi f\,\rho \cdot \cancel{\frac{l}{S}}\,\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \cancel{\frac{S}{l}}} = \frac{1}{2\pi f \rho\, \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 10^{16} \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}000\,584} = \underline{\underline{3{,}59 \cdot 10^{-8}\ [-]}}$$

9)

Komplexní permitivita ε^* dielektrika je definována vztahem $\varepsilon^* = \varepsilon^{'} - j\varepsilon^{''}$. V závislosti na kmitočtu lze podle Debyeho vyjádřit komplexní permitivitu rovnicí

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \tag{4}$$

v níž ε_s značí relativní (statickou) permitivitu dielektrika určenou při kmitočtu $f \to 0$, ε_∞ relativní (optickou) permitivitu určenou při velmi vysokých kmitočtech; τ je relaxační doba, která je mimo jiné i funkcí teploty. **Vyjděte z obou uvedených vztahů a určete reálnou část ε' a imaginární část ε'' komplexní permitivity**.

Rozdelením rovnice (4) na reálnu a imaginárnu zložku dostaneme:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \cdot \frac{1 - j\omega\tau}{1 - j\omega\tau} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} - j\frac{\omega\tau(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Porovnaním s rovnicou $\varepsilon^* = \varepsilon^{'} - j\varepsilon^{''}$ dostávame:

$$\varepsilon^{'} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \tag{Reálna časť}$$

$$\varepsilon^{''} = \frac{\omega\tau(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + \omega^2\tau^2} \tag{Imaginárna časť}$$

Poznámka: Tento príklad **nebol riešený vrámci cvičenia**. Je prevzatý zo skrípt (BPC-EMV skripta 2019, strana 86 č. 10) a takisto ho možno nájsť aj v prednáškach (Prednáška č. 2, strany 14 - 18).