

Elektrotechnické materiály a výrobní procesy I

Neoficiální sbírka příkladů částí dielektrických materiálů a polovodičů

Verze: 0.6 Datum: 6. listopadu 2024

Poznámka: Nejedná sa o oficiálny výukový materiál, iba pomôcku na učenie zostavenú na základe zápiskov z cvičení. Preto neberiem žiadnu zodpovednosť za chyby v tomto dokumente. Oficiálne riešené príklady sú dostupné v skriptách

Elektrotechnické materiály a výrobní procesy 1 z roku 2019.

Príklady sa vzťahujú ku zadaniam z rokov 2023/2024 a 2024/2025, pričom zadania vyzerali byť identické. Všetky práva patria pôvodným autorom výukových materiálov.

Autor: cinanko, Štur

Vybrané konstanty

c	$2,998 \cdot 10^8$	m s^{-1}	Rychlost světla
h	$6,626 \cdot 10^{-34}$	J s	Planckova konstanta
k	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J K^{-1}	Boltzmannova konstanta
m_a	$9,109 \cdot 10^{-31}$	kg	Hmotnost elektronu
m_p	$1,672 \cdot 10^{-27}$	kg	Hmotnost protonu
N_A	$6,023 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}	Avogadrova konstanta
n_L	$2,688 \cdot 10^{25}$	m^{-3}	Loschmidtovo číslo
q	$-1,602 \cdot 10^{-19}$	C	Náboj elektronu
ε_0	$8,854 \cdot 10^{-12}$	F m^{-1}	Permitivita vakua
μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H m^{-1}	Permeabilita vakua
k	$8,617 \cdot 10^{-5}$	eV K^{-1}	Redukovaná Boltzmannova konstanta

Vybrané vlastnosti polovodičových materiálů

Platné při teplotě $T = 300 \text{ K}$

Značka	Křemík	Germánium	Vlastnost
n_i	$1,45 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$	$2,29 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$	Koncentrace nosičů proudu (elektronů a děr) ve vlastním polovodiči
W_g	$1,11 \text{ eV}$	$0,67 \text{ eV}$	Šířka zakázaného pásu
μ_n	$0,135 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	$0,39 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	Pohyblivost elektronů
μ_p	$0,048 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	$0,19 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	Pohyblivost děr
N_c	$2,8 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$	$1,04 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$	Efektivní hustota stavů ve vodivostním pásu
N_v	$1,04 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$	$6,0 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$	Efektivní hustota stavů ve valenčním pásu

1 Oblast dielektrických materiálů a izolantů

1)

Elektronová polarizovatelnost α_e atomu argonu je $1,43 \cdot 10^{-40} \text{ F m}^2$. Určete relativní permitivitu argonu při normálních fyzikálních podmínkách.

$$\alpha_E = 1,43 \cdot 10^{-40} \text{ F m}^2$$

$$\varepsilon_V = ?$$

Claussius - Mossotiho rovnice (C-M):

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n \cdot \alpha}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

Argon = inertní plyn $\Rightarrow \varepsilon_r \approx 1$

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{1 + 2} = \frac{n \cdot \alpha}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{3} = \frac{n \cdot \alpha}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_r = \frac{n \cdot \alpha}{\varepsilon_0} + 1$$

$n = n_L$ = Loshnidtovo číslo = počet atomů v 1 m^3 **plynu** (pro pevné látky jde o hodnotu o 2 až 3 řády větší)

$$\varepsilon_r = \frac{n_L \cdot \alpha}{\varepsilon_0} + 1 = \frac{2,688 \cdot 10^{25} \cdot 1,43 \cdot 10^{-40}}{8,854 \cdot 10^{-12}} + 1 = 1,000434 [-]$$

Vysvětlivky:

α = polarizovatelnost

ε_0 = permitivita vakua (konstanta)

n = počet atomů v 1 m^3 látky

2)

Relativní permitivita ε_{rs} složeného ze dvou vzájemně nereagujících látek o permitivitách ε_{r1} a ε_{r2} se často určuje Lichtenekerovým mocninovým vztahem

$$\varepsilon_{rs}^k = V_1 \varepsilon_{r1}^k + V_2 \varepsilon_{r2}^k \quad (1)$$

v němž V_1 a V_2 jsou poměrné objemové podíly obou látek a k je empirická konstanta. Hodnota konstanty k se mění v rozsahu $< -1; +1 >$ podle tvaru a rozložení částic obou látek; při chaotickém uspořádání částic $k \rightarrow 0$. Ukažte, že v tomto případě přechází mocninový vztah ve vztah logaritmický:

$$\log \varepsilon_{rs} = V_1 \log \varepsilon_{r1} + V_2 \log \varepsilon_{r2} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{rs}^k = V_1 \cdot \varepsilon_{r1}^k + V_2 \cdot \varepsilon_{r2}^k$$

$$\alpha^x = 1 + \underbrace{\frac{x \cdot \ln a}{1!}}_{\text{malý příspěvek, když } x \rightarrow 0} + \overbrace{\frac{x^2 \cdot \ln a^2}{2!}}^{\text{řádově ještě menší}} + \dots$$

Pokud $x \rightarrow 0$:

$$a^x \doteq 1 + \frac{x \cdot \ln a}{1}$$

Na základě toho:

$$1 + \frac{k \cdot \ln \varepsilon_{rs}}{1} = V_1 \cdot \left(1 + \frac{k \cdot \ln \varepsilon_{r1}}{1} \right) + V_2 \cdot \left(1 + \frac{k \cdot \ln \varepsilon_{r2}}{1} \right)$$

V_1 a V_2 jsou objemové podíly, dohromady tedy dají 1

$$\cancel{1} + k \cdot \ln \varepsilon_{rs} = \cancel{V_1} + V_1 \cdot k \cdot \ln \varepsilon_{r1} + \cancel{V_2} + V_2 \cdot k \cdot \ln \varepsilon_{r2}$$

k je v každém členu, možno vykrátit

$$\cancel{k} \cdot \ln \varepsilon_{rs} = V_1 \cdot \cancel{k} \cdot \ln \varepsilon_{r1} + V_2 \cdot \cancel{k} \cdot \ln \varepsilon_{r2}$$

$$\ln \varepsilon_{rs} = V_1 \cdot \ln \varepsilon_{r1} + V_2 \cdot \ln \varepsilon_{r2}$$

A jelikož $\ln x = 2,3 \cdot \log x$:

$$\cancel{2,3} \cdot \log \varepsilon_{rs} = V_1 \cdot \cancel{2,3} \cdot \log \varepsilon_{r1} + V_2 \cdot \cancel{2,3} \cdot \log \varepsilon_{r2}$$

$$\log \varepsilon_{rs} = V_1 \cdot \log \varepsilon_{r1} + V_2 \cdot \log \varepsilon_{r2}$$

Vysvětlivky:

k = empirická konstanta

3)

Mezi elektrodami deskového kondenzátoru o rozměrech 7x12 cm a vzdálenosti elektrod 5 mm je vložena destička z polystyrenu o tloušťce 3 mm. Zbytek prostoru mezi elektrodami je vyplněn vzduchem za normálních atmosférických podmínek. Vypočítejte kapacitu tohoto kondenzátoru, je-li relativní permitivita polystyrenu při teplotě 20 °C rovna 2,3. Jak se změní kapacita kondenzátoru, je-li celý prostor mezi elektrodami vyplněn pěnovým polystyrenem, v němž je objemový podíl polystyrenu a vzduchu stejný jako v prvním případě?

$S = 7 \times 12 \text{ cm} =$ rozměry elektrod kondenzátoru

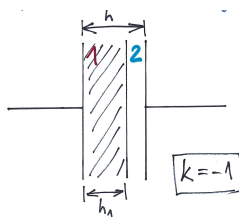
$h = 5 \text{ mm} =$ vzdálenost elektrod kondenzátoru

$h_1 = 3 \text{ mm} =$ tloušťka polystyrenové destičky

$\varepsilon_{r1} = 2,3$ (polystyren)

$\varepsilon_{r2} = 1$ (vzduch)

Sériově zapojené kondenzátory ($k = -1$):



$$\varepsilon_{rs}^{-1} = V_1 \cdot \varepsilon_{r1}^{-1} + V_2 \cdot \varepsilon_{r2}^{-1}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{rs}} = V_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon_{r1}} + V_2 \cdot \frac{1}{\varepsilon_{r2}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_{rs}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\varepsilon_{r1}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1}$$

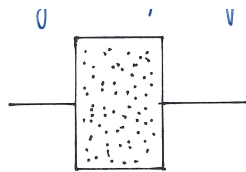
$$\frac{1}{\varepsilon_{rs}} = 0,661$$

$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{\varepsilon_{rs}}$$

$$\varepsilon_{rs} = 1,513 [-]$$

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{rs} \cdot \frac{S}{h} = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1,513 \cdot \frac{0,07 \cdot 0,12}{5 \cdot 10^{-3}} = 22,51 \text{ pF}$$

$k = 0$ (homogenní směs):



$k \rightarrow 0$ (logaritmické vztahy)

$$\log(\varepsilon_{rs}) = V_1 \cdot \log(\varepsilon_{r1}) + V_2 \cdot \log(\varepsilon_{r2})$$

$$\log(\varepsilon_{rs}) = \frac{3}{5} \cdot \log(2,3) + \frac{2}{5} \cdot \log(1)$$

$$\log(\varepsilon_{rs}) = 0,217$$

$$\varepsilon_{rs} = 10^{0,217} = 1,648 [-]$$

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{rs} \cdot \frac{S}{h} = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1,648 \cdot \frac{0,07 \cdot 0,12}{5 \cdot 10^{-3}} = 24,51 \text{ pF}$$

Kapacita se změnila cca o 2 pF ($\approx 10 \%$).

Vysvětlivky:

V_1 a V_2 jsou objemové poměry, jejich hodnota vyplývá ze zadání a nákresů.

4)

Rezistivitu elektroizolačních kapalin ρ_v lze v závislosti na teplotě vyjádřit vztahem

$$\rho = A \cdot \exp \frac{B}{T} \quad (3)$$

v němž $A[\Omega \text{ m}]$ a $B[\text{K}]$ jsou materiálové konstanty; teplota T je udána v K. Kabelový impregnant složený z minerálního oleje s přídavkem 25 % (hmotnostních) rafinované kalafuny má při teplotě 20 °C rezistivitu $2 \cdot 10^{10} \Omega \text{ m}$. Stanovte rezistivitu tohoto impregnantu při teplotách 50 °C a 80 °C, je-li součinitel B roven $7 \cdot 10^3 \text{ K}$.

$$\rho = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

$A [\Omega \text{ m}]$, $B [\text{K}]$ = materiálové konstanty (neměnné s teplotou)

$$T = 7 \cdot 10^3 \text{ K}$$

$$20 \text{ }^\circ\text{C} = 293,15 \text{ K:}$$

$$\rho_{20} = 2 \cdot 10^{10} \Omega \text{ m}$$

$$A = \frac{\rho_{20}}{e^{\frac{B}{T}}} = \frac{2 \cdot 10^{10}}{e^{\frac{7 \cdot 10^3}{293,15}}} = 0,8525 \Omega \text{ m}$$

$$50 \text{ }^\circ\text{C} = 323,15 \text{ K:}$$

$$\rho_{50} = A \cdot e^{\frac{B}{T}} = 0,8525 \cdot e^{\frac{7 \cdot 10^3}{323,15}} = 2,179 \cdot 10^9 \Omega \text{ m}$$

$$80 \text{ }^\circ\text{C} = 353,15 \text{ K:}$$

$$\rho_{80} = A \cdot e^{\frac{B}{T}} = 0,8525 \cdot e^{\frac{7 \cdot 10^3}{353,15}} = 0,346 \cdot 10^9 \Omega \text{ m}$$

Z výpočtu vyplývá, že s rostoucí teplotou klesá rezistivita elektroizolačních materiálů.

5)

Měřením dynamické viskozity transformátorového oleje BTS2 na Höpplerově viskozimetru byly při několika teplotách zjištěny údaje uvedené v tabulce. Stanovte rezistivitu tohoto oleje při teplotách 50 °C a 85 °C, je li hodnota rezistivity při teplotě 20 °C rovna $3 \cdot 10^{11} \Omega \text{ m}$. Při výpočtu předpokládejte, že při změně teploty se nemění koncentrace volných iontů v oleji.

Tabulka:

$\vartheta [^{\circ}\text{C}]$	20	40	60	80	100
$\eta [\text{N s m}^{-2}]$	$4,35 \cdot 10^{-2}$	$1,21 \cdot 10^{-2}$	$3,95 \cdot 10^{-3}$	$1,46 \cdot 10^{-3}$	$6,01 \cdot 10^{-4}$

$$\rho_{20} = 3 \cdot 10^{11} \Omega \text{ m}$$

$$\rho_{50,85} = ?$$

$$\rho = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

$$\eta \cdot \gamma = k$$

Neznáme A, B, můžeme vytvořit soustavu se 2 teplotami z tabulky.

$$\frac{\eta}{\rho} = k \Rightarrow \rho = \frac{\eta}{k}$$

$$\frac{\eta_1}{k} = A \cdot e^{\frac{B}{T_1}}$$

$$\frac{\eta_2}{k} = A \cdot e^{\frac{B}{T_2}}$$

$$\ln \left(\frac{\eta_1}{k} \right) = \ln A + \frac{B}{T_1}$$

$$\ln \left(\frac{\eta_2}{k} \right) = - \ln A - \frac{B}{T_2}$$

$$\ln \left(\frac{\frac{\eta_1}{k}}{\frac{\eta_2}{k}} \right) = \frac{B}{T_1} - \frac{B}{T_2}$$

$$\ln \left(\frac{e\eta a_1}{\eta_2} \right) = B \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

$$B = \frac{\ln \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)}$$

Dosadíme z tabulky pro 20 °C a 40 °C:

$$B = \frac{\ln \left(\frac{4,35 \cdot 10^{-2}}{1,21 \cdot 10^{-2}} \right)}{\left(\frac{1}{293,15} - \frac{1}{313,15} \right)} = 5873,15 \text{ K}$$

Nalezení A:

$$\rho_{20} = A \cdot e^{\frac{B}{T_{20}}}$$

$$3 \cdot 10^{11} = A \cdot e^{\frac{5873,15}{293,15}}$$

$$A = \frac{3 \cdot 10^{11}}{e^{\frac{5873,15}{293,15}}} = 597,3 \text{ } \Omega \text{ m}$$

Nyní můžeme spočítat rezistivity stejným způsobem jako v příkladu 4.

50 °C = 323,15 K:

$$\rho_{50} = A \cdot e^{\frac{B}{323,15}} = 597,3 \cdot e^{\frac{5873,15}{323,15}} = 46,704 \cdot 10^9 \text{ } \Omega \text{ m}$$

85 °C = 358,15 K:

$$\rho_{85} = A \cdot e^{\frac{B}{358,15}} = 597,3 \cdot e^{\frac{5873,15}{358,15}} = 7,907 \cdot 10^9 \text{ } \Omega \text{ m}$$

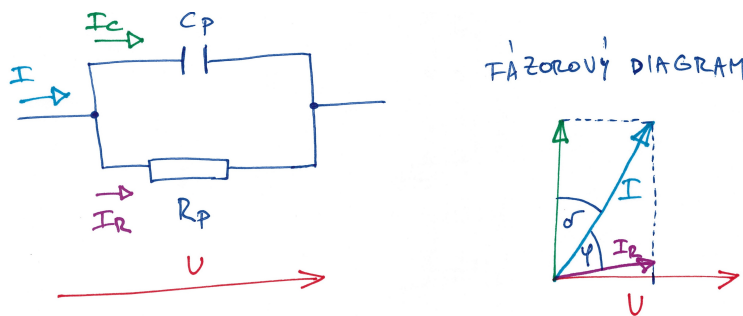
S rostoucí teplotou se tedy snižuje viskozita a zároveň klesá rezistivita.

6)

V obvodu střídavého elektrického proudu je zapojen kondenzátor, jehož dielektrikum vykazuje ztráty. Chování tohoto kondenzátoru lze za předpokladu, že pochody v dielektriku jsou lineární vyšetřit sledováním ekvivalentního dvouprvkového náhradního zapojení kondenzátoru s ideálním, bezztrátovým dielektrikem a odporu představujícího ztráty. Uvažujte, že kondenzátor s ideálním dielektrikem o kapacitě C_p a odpor R_p jsou v náhradním zapojení spojeni paralelně a že je na uvedenou soustavu připojeno napětí U .

Nakreslete pro tento případ fázorový diagram napětí a proudů soustavy a určete ztrátový činitel, celkovou impedanci a celkové ztráty energie v soustavě.

Paralelní náhradní zapojení:



Kondenzátor (C) - nejprve proud, potom napětí

$\tan(\delta)$ - protilehlá ku přilehlé

X_C - kapacitní reaktance

Z_C - komplexní impedance

$$\tan \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{\frac{U}{R_p}}{\frac{U}{X_C}} = \frac{X_C}{R_p} = \frac{1}{R_p \cdot \omega \cdot C_p} \Rightarrow R_p = \frac{1}{\tan \delta \cdot \omega \cdot C_p}$$

$$P_z = U \cdot I_R = U \cdot \frac{U}{R_p} = \frac{U^2}{R_p} = U^2 \cdot \tan \delta \cdot \omega \cdot C_p$$

$$Z_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_p} \cdot \frac{j}{j} = -\frac{j}{\omega \cdot C_p}$$

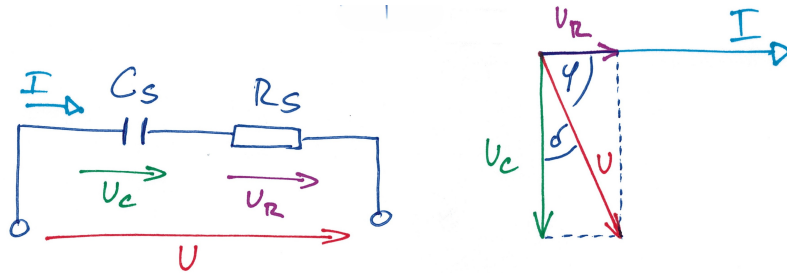
$$Z_p = \frac{Z_C \cdot R_p}{Z_C + R_p} = \frac{-\frac{j \cdot R_p}{\omega \cdot C_p}}{\frac{j}{\omega \cdot C_p} + R_p} = \frac{\frac{-j \cdot R_p}{\omega \cdot C_p}}{\frac{j + \omega \cdot C_p \cdot R_p}{\omega \cdot C_p}} = \frac{j \cdot R_p}{j - \omega \cdot C_p \cdot R_p} \cdot \underbrace{\frac{j + \omega \cdot C_p \cdot R_p}{j + \omega \cdot C_p \cdot R_p}}_{\text{Cmplex sdružené číslo}} =$$

$$= \frac{-R_p + j \cdot \omega \cdot C_p \cdot R_p^2}{-1 - \omega^2 \cdot C_p^2 \cdot R_p^2} = \frac{R_p - j \cdot \omega \cdot C_p \cdot R_p^2}{\omega^2 \cdot C_p^2 \cdot R_p^2 + 1}$$

7)

Ve smyslu zadání úlohy č. C-7 uvažujte sériové zapojení odporu R_s a kondenzátoru s ideálním dielektrikem C_s . K soustavě obou prvků nechť je přiloženo napětí U . Nakreslete fázorový diagram napětí a proudů soustavy, určete ztrátový činitel, celkovou impedanci a celkové ztráty energie v soustavě.

Sériové náhradní schéma:



$$\tan \delta = \frac{U_R}{U_C} = \frac{I \cdot R_s}{I \cdot X_C} = \frac{R_s}{\frac{1}{\omega \cdot C_s}} = R_s \cdot \omega \cdot C_s$$

$$Z_s = R_s - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_s}$$

$$P_z = U_R \cdot I_R = (R_s \cdot I_R) \cdot I_R = R_s \cdot I_R^2 = R_s \cdot \frac{U^2}{|Z|^2} = R_s \cdot \frac{U^2}{\sqrt{R_s^2 + \left(-\frac{1}{\omega \cdot C_s}\right)^2}^2} =$$

$$= R_s \cdot \frac{U^2}{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 \cdot C_s^2}} = R_s \cdot \frac{U^2}{\frac{\omega^2 \cdot R_s^2 \cdot C_s^2 + 1}{\omega^2 \cdot C_s^2}} = \frac{U^2 \cdot \omega^2 \cdot R_s \cdot C_s^2}{\omega^2 \cdot \underbrace{R_s^2}_{\tan^2 \delta} \cdot C_s^2 + 1}$$

8)

Určete ztrátový činitel vzduchu za normálních fyzikálních podmínek a při kmitočtu 50 Hz, má-li rozhodující vliv na velikost ztrát elektrická vodivost vzduchu. Relativní permitivita vzduchu je za normálních fyzikálních podmínek rovna 1,000 584, rezistivita je za stejných podmínek $10^{16} \Omega \text{ m}$.

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$\varepsilon_r = 1,000584$$

$$\rho = 10^{16} \Omega \text{ m (rezistivita vzduchu)}$$

$$\begin{aligned} \tan \delta &= \frac{1}{\omega \cdot R_p \cdot C_p} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \rho \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \rho \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 10^{16} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 1,000584} = 3,59 \cdot 10^{-8} [-] \end{aligned}$$

9)

Komplexní permitivita ε^* dielektrika je definována vztahem $\varepsilon^* = \varepsilon' - j\varepsilon''$. V závislosti na kmitočtu lze podle Debyeho vyjádřit komplexní permitivitu rovnicí

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \quad (4)$$

v níž ε_s značí relativní (statickou) permitivitu dielektrika určenou při kmitočtu $f \rightarrow 0$, ε_∞ relativní (optickou) permitivitu určenou při velmi vysokých kmitočtech; τ je relaxační doba, která je mimo jiné i funkcí teploty. **Vyjděte z obou uvedených vztahů a určete reálnou část ε' a imaginární část ε'' komplexní permitivity.**

Rozdělením rovnice (4) na reálnou a imaginární složku dostaneme:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \cdot \frac{1 - j\omega\tau}{1 - j\omega\tau} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} - j \frac{\omega\tau(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Porovnáním s rovnicou $\varepsilon^* = \varepsilon' - j\varepsilon''$ dostáváme:

$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (\text{Reálna časť})$$

$$\varepsilon'' = \frac{\omega\tau(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (\text{Imaginárna časť})$$

Poznámka: Tento príklad **nebol riešený vrámci cvičenia**. Je prevzatý zo skrípt (BPC-EMV skrípta 2019, strana 86 č. 10) a takisto ho možno nájsť aj v prednáškach (Prednáška č. 2, strany 14 - 18).