

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/338514288>

# Projektarbeit Fallschirmsprung Mathemaik Vertiefung 1 (MECH-B-3-MAV-MAT-ILV) Numerische Berechnung eines Fallschirmsprunges Bachelor Mechatronik 3. Semester

Technical Report · January 2020

CITATIONS

0

READS

614

3 authors, including:



Alexander Fankhauser

MCI Management Center Innsbruck

1 PUBLICATION 0 CITATIONS

SEE PROFILE



Rene Santeler

MCI Management Center Innsbruck

1 PUBLICATION 0 CITATIONS

SEE PROFILE



# Projektarbeit Fallschirmsprung

**Mathemaik Vertiefung 1 (MECH-B-3-MAV-MAT-ILV)**

**Numerische Berechnung eines Fallschirmsprunges**

**Bachelor Mechatronik**

**3. Semester**

**Lehrveranstaltungsleiter: Harald Grossauer**

**Jahrgang: BA-MECH-18-BB**

**Verfasser: Alexander Fankhauser, Rene Santeler, Stefan Reinmüller**

**10.01.2020**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung &amp; Aufgabenstellung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Modellierung</b>	<b>2</b>
2.1	Eckdaten . . . . .	2
2.2	Annahmen . . . . .	2
2.3	Herleitung der Differentialgleichung . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Numerik</b>	<b>5</b>
3.1	ode45-Funktion in matlab . . . . .	5
3.2	Implementierung . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Ergebnisse &amp; Visualisierung</b>	<b>7</b>
4.1	Benutzeroberfläche und grafische Auswertung . . . . .	7
4.2	Vergleich mit Red Bull Stratos . . . . .	10
4.2.1	Bekannte Punkte . . . . .	11
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>III</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>IV</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>V</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>VI</b>

# 1 Einleitung & Aufgabenstellung

Das Projekt Red Bull Stratos war ein Fallschirmsprung aus der Stratosphäre aus knapp 40.000 m Höhe, der am 14. Oktober 2012 (am 65. Jahrestag des ersten Überschallflugs) vom österreichischen Base-Jumper und Extremsportler Felix Baumgartner ausgeführt wurde und mehrere aeronautische Weltrekorde brach.

Erzielt wurden dabei die Rekorde: [1]

- Höchste bemannte Ballonfahrt
- höchster Absprung eines Fallschirmsprungs
- größte Geschwindigkeit im freien Fall ohne Stabilisierungsschirm
- größte Geschwindigkeit im freien Fall überhaupt
- längster Freifall (Höhe)
- längster Freifall (Dauer)

Ziel dieser Projektarbeit ist die mathematische Simulation dieses Sprunges inklusive deren Auswertung und des Vergleichs mit den Eckdaten von Red Bulls Stratos.

## 2 Mathematische Modellierung

Um die Simulation eines realen Systems durchführen zu können muss dieses erst durch die physikalischen Gesetze mathematisch modelliert werden. Das Ergebnis der Modellfindung ist eine Differentialgleichung. Die Herangehensweise beginnt mit der Verwendung der Newtonschen Bewegungsgleichung. Anschließend müssen alle äußeren Einflüsse parametrisiert werden und entsprechend in der Differentialgleichung Einfluss finden.

### 2.1 Eckdaten

Gewählt wurden folgende Eckdaten für die Berechnung:

- Masse des Springers (inklusive Ausrüstung)  $m = 130 \text{ kg}$  [2]
- Absprunghöhe  $h_0 = 39000 \text{ m}$  über dem Meeresspiegel [2]
- Höhe beim Öffnen des Fallschirms  $h_{\text{Schirm}} = 2567 \text{ m}$  über dem Meeresspiegel [2]
- Projizierte Wirkfläche des Luftwiderstands ohne Fallschirm  $A_1 = 0,9 \text{ m}^2$
- Projizierte Wirkfläche des Luftwiderstands mit Fallschirm  $A_2 = 35 \text{ m}^2$
- Strömungswiderstandskoeffizient ohne Fallschirm  $c_{w1} = 0,85$
- Strömungswiderstandskoeffizient mit Fallschirm (Es handelt sich um einen Gleitschirm)  $c_{w2} = 0,98$  [3]
- Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Die Werte welche nicht mit Referenzen versehen sind, wurden aufgrund von Abschätzungen und Anpassung an die realen Werte des Red Bull Stratos Projektes festgelegt.

### 2.2 Annahmen

Folgende Annahmen wurden für die Modellierung getroffen:

- Zum Beschreiben der Bewegung wurde die Newton'sche Bewegungsgleichung verwendet.
- Die Reibung während des Fluges wird über die Newton-Reibung beschrieben.

- Die Änderung der Erdbeschleunigung mit der Höhe wird vernachlässigt, da diese erst ab einer Höhe von 150 km Einfluss hat.
- Der Energieverlust durch die Rotation wird nicht berücksichtigt.
- Die Veränderung des Luftdrucks wird mittels dem Schichtenmodell (linearer Temperaturverlauf innerhalb einer Schicht) beschrieben.
- Beim Öffnen des Fallschirms ändern sich die Werte der Parameter Strömungswiderstandskoeffizient  $c_w$  und projizierte Wirkfläche des Luftwiderstands  $A$  quadratisch über die Zeit (Dieser Zusammenhang wird aufgrund einiger Videoanalysen von realen Fallschirmsprüngen aufgestellt).

## 2.3 Herleitung der Differentialgleichung

Zur Herleitung der Differentialgleichung wurde die Newton'sche Bewegungsgleichung verwendet. Diese besagt vereinfacht, dass die Masse mal der Beschleunigung eines Körpers die Summe der externen Kräfte ergibt.

*Newton'sche Bewegungsgleichung:*

$$F = m \cdot g \quad (2.1)$$

Die Summe der äußeren Kräfte ergibt sich aus der Berücksichtigung der Gewichtskraft sowie der Reibkraft:

$$F = F_G - F_R \quad (2.2)$$

Die Reibkraft lässt sich aus der Newtonreibung bestimmen:

$$F_R = \frac{1}{2} \cdot \rho(h) \cdot c_w \cdot A \cdot v_h^2 \quad (2.3)$$

Zur Berechnung der Reibkraft wird jedoch die höhenabhängige Luftdichte benötigt. Ein Weg diese zu Beschreiben führt zur Verwendung des Schichtenmodells mit linearem Temperaturverlauf: [4]

$$\rho(h) = \rho_{ref} \cdot \left( 1 + \frac{\alpha_i \cdot (h - h_{ref})}{T_{ref}} \right)^{-B-1} \quad (2.4)$$

Die Referenzwerte sind höhenschichtabhängig und wurden mittels einer Matrix implementiert. Diese Gleichungen können dann zu einer Gleichung zusammengefasst werden, umgeformt nach der Beschleunigung sieht diese wie folgt aus:

$$\ddot{h} = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \rho(h) \cdot c_w \cdot A \cdot \dot{h}^2 - g \quad (2.5)$$

Diese Differentialgleichung kann nicht explizit gelöst werden. Die Lösung der Differentialgleichung erfolgt daher numerisch. Um in matlab die Lösung berechnen zu können wird diese

Differentialgleichung 2. Ordnung in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung überführt (ersetzen von  $h$  durch  $u_1$ , sowie  $\dot{h}$  durch  $u_2$ ). Dies ergibt folgendes:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \rho(u_1) \cdot c_w \cdot A \cdot u_2^2 - g \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

## 3 Numerik

Da die Differentialgleichung nicht explizit lösbar ist muss man sich hier dem numerischen Lösen von Differentialgleichung bedienen. Dazu wurden einige sogenannte *Runge-Kutta-Verfahren* entwickelt.

Die nach Carl Runge und Martin Wilhelm Kutta benannten s-stufigen Runge-Kutta-Verfahren sind Einschrittverfahren zur näherungsweisen Lösung von Anfangswertproblemen in der numerischen Mathematik.

Die Numerik wird in der Regel computerunterstützt eingesetzt. Verwendet wurde hierbei das Mathematikprogramm *matlab*. Konkret wurde die Funktion **ode45** verwendet, welche auf Basis der Runge-Kutta-Verfahren implementiert ist.

### 3.1 ode45-Funktion in matlab

Für die numerische Integration von Anfangswertproblemen stellt Matlab die Funktion *ode45* zur Verfügung (steht für 'ordinary differential equations'). Die Parametrierung der geeigneten Funktion hängt vom zu lösenden Problem und den Anforderungen an die Lösung ab.

Die numerische Integration von Anfangswertproblemen berechnet schrittweise die Lösung für jeweils einen neuen Punkt auf der Basis von bereits ermittelten Lösungen für vorhergehende Punkte. Jedes Zwischenergebnis ist mit einem Fehler behaftet, der sich im Folgeschritt fortpflanzt.

Faktisch wird jeder Integrationsschritt doppelt gerechnet, einmal mit einer Formel 4. Ordnung, zum anderen mit einer Formel 5. Ordnung (dem so genannten Dormand-Prince-Formelpaar). Der Vergleich der beiden Ergebnisse am Ende eines Integrationsschrittes wird genutzt, um bei zu großer Differenz eine zu grobe Schrittweite zu vermuten, die dann verkleinert wird.

### 3.2 Implementierung

**Einfache Variante** Die erste Variante beinhaltet den Öffnungsvorgang des Fallschirmes nicht. Hier ist darauf zu achten, dass die Berechnung in zwei Teile aufgeteilt werden muss, weil eine instantane Änderung der Berechnungsparameter (wie es bei dem Öffnen des Schirmes der Fall ist) zu Überschwingern an den Sprungstellen führt. Diese Überschwinger würden



in der numerischen Lösung augenscheinlich eine kurze Beschleunigung beim Start des Öffnungsvorganges des Fallschirmes ergeben. Da dies physikalisch unmöglich ist, muss die Berechnung aufgeteilt werden, wobei der zweiten Berechnung die Endwerte der ersten Berechnung sowie die abgeänderten Werte  $c_w$  und  $A$  als Grundlage dienen.

**Erweiterte Variante** Um die Simulation noch realistischer zu gestalten wird der Öffnungsvorgang auch miteinbezogen. Die Berechnung setzt sich nun aus drei Teilen zusammen:

- Berechnung des Falles mit geschlossenem Schirm.
- Berechnung des Öffnungsvorganges des Schirmes ( $c_w$  und  $A$  nehmen in Bezug auf die Zeit quadratisch zu)
- Berechnung des Landeanfluges mit geöffnetem Schirm.

## 4 Ergebnisse & Visualisierung

### 4.1 Benutzeroberfläche und grafische Auswertung

Zur bequemen Steuerung und Auswertung der Simulation steht eine mit dem „matlab App Designer“ erstellte Benutzeroberfläche zur Verfügung (siehe Abb 4.1). Auf dieser können die Initialparameter der Simulation bequem verändert werden. Durch das Drücken des „Start Simulation“ Buttons wird die Berechnung ausgeführt. Im rechten Teil werden Plots der Höhe, Geschwindigkeit und Beschleunigung über der Zeit angezeigt. In diesen Plots kann nach belieben auf interessante Stellen gezoomt werden. Zusätzlich werden interessante Werte wie die maximal erreichte Geschwindigkeit, die Landegeschwindigkeit, die Flugdauer und die approximierten höchsten g-Kräfte während des Öffnens des Fallschirms angezeigt.

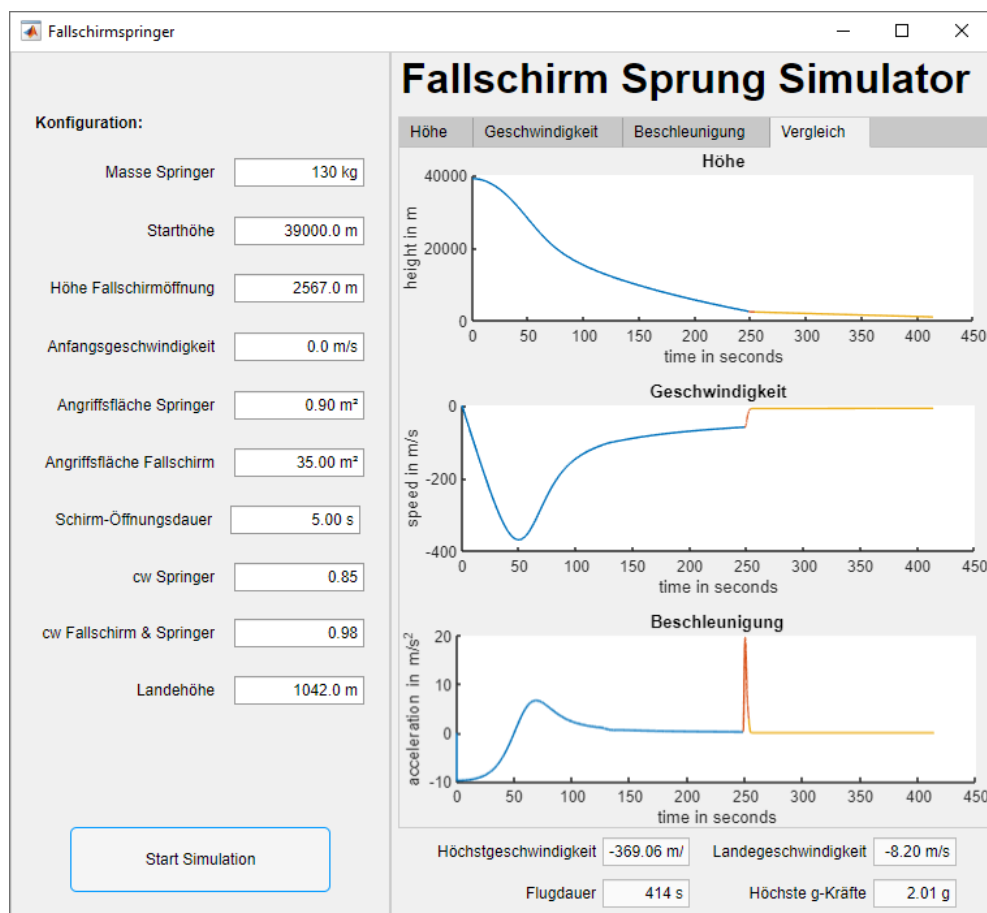


Abbildung 4.1: Auf der Benutzeroberfläche können die Initialparameter bequem verändert und die Ergebnisse visualisiert werden.

In Abbildung 4.2 ist der Verlauf der Geschwindigkeit entlang der Flugdauer erkennbar. Da die Simulation in hohen Atmosphärenschichten, mit sehr geringer Luftdichte startet, steigt die Geschwindigkeit anfangs annähernd linear. Sie übersteigt dabei kurz die Schallgrenze bevor nach ca 50 Sekunden dichtere Schichten erreicht werden. In diesen wird der Fallschirmspringer unterschiedlich stark gebremst. Nach etwa 250 Sekunden wird der Fallschirm aktiviert. Dieser entfaltet sich über einen Zeit von 5 Sekunden auf seine volle Größe und bremst den Fallschirmspringer weiter. Nachdem dieser voll geöffnet ist, sinkt die Geschwindigkeit nurmehr sehr schwach bis die Landehöhe erreicht ist.

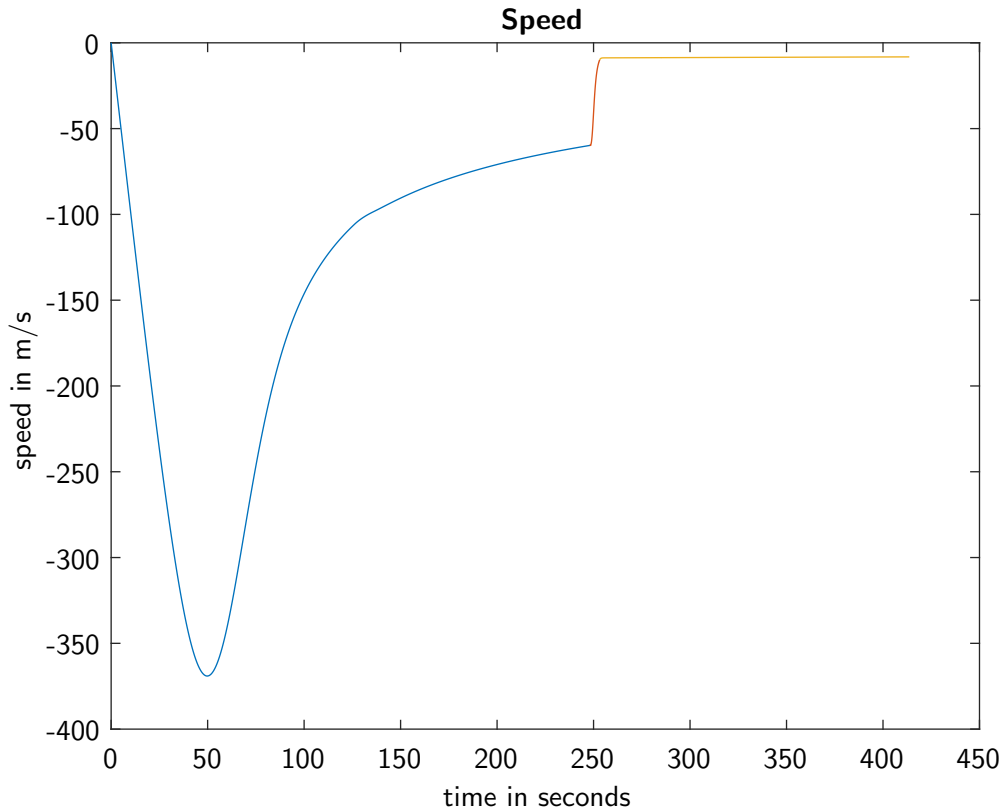


Abbildung 4.2: Grafischer Plot der in der Simulation ermittelten Geschwindigkeit zum jeweiligen Zeitpunkt. In den ersten ca. 50 Sekunden ist der freie Fall durch die dünnen oberen Atmosphärenschichten erkennbar (blau). Danach werden mehrere Schichten mit steigendem Luftwiderstand durchlaufen. Der Fallschirm öffnet sich nach ca. 250 Sekunden langsam und bremst weiter ab (rot). In der dritten Phase bremst der Fallschirm sehr langsam weiter auf die Landegeschwindigkeit ab (orange).

Zusätzlich ist in Abbildung 4.3 der Verlauf der Höhe entlang der Flugdauer dargestellt. Es ist erkennbar wie diese erst langsam, dann immer schneller sinkt bis die dichteren Schichten erreicht werden. Diese bremsen den Springer anfangs recht stark, dann immer schwächer, bis der Fallschirm geöffnet wird. Mit offenem Fallschirm und entsprechend geringer Geschwindigkeit sinkt die Höhe langsam weiter bis die Landehöhe erreicht ist.

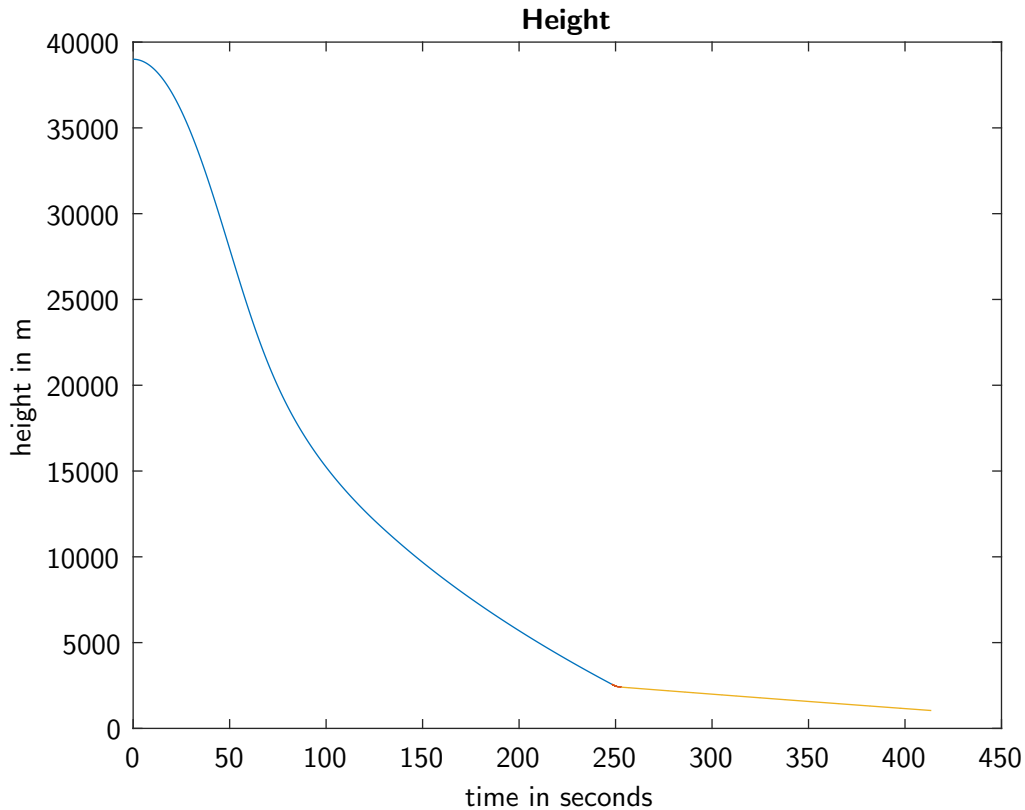


Abbildung 4.3: Grafischer Plot der in der Simulation durchlaufenen Höhe zum jeweiligen Zeitpunkt. In den ersten ca. 250 Sekunden ist der freie Fall durch mehrere Atmosphärenschichten mit steigendem Luftwiderstand erkennbar (blau). Danach öffnet sich langsam der Fallschirm über einen Zeitraum von ca. 5 Sekunden (rot). Die Sinkrate mit offenem Fallschirm verläuft annähernd linear bis die Landehöhe erreicht wird (orange).

Abschließend ist in Abbildung 4.4 dargestellt, wie stark die Beschleunigung an jedem Punkt wirkt. Am Anfang wirkt die gesamte Erdbeschleunigung. Diese sinkt mit steigender Luftdichte, bis zur Maximalgeschwindigkeit (hier ist die Beschleunigung 0). Sie geht nach ca. 50 Sekunden fließend in die Bremsphase über. Der markanteste Punkt ist das öffnen des Fallschirms bei ca. 250 Sekunden. Da dieser Vorgang mit einer quadratischen Erhöhung von Fläche und Widerstandsbeiwert modelliert wurde steigt die Beschleunigung hier auf ca.  $2g$  ( $20m/s^2$ ). Dieser Wert ist stark von der Dauer der Öffnungsphase, der Fläche und des  $c_w$  Wertes des Fallschirms abhängig. Da hierzu keine Referenzwerte gefunden wurden lässt sich dies nur schwer vergleichen.

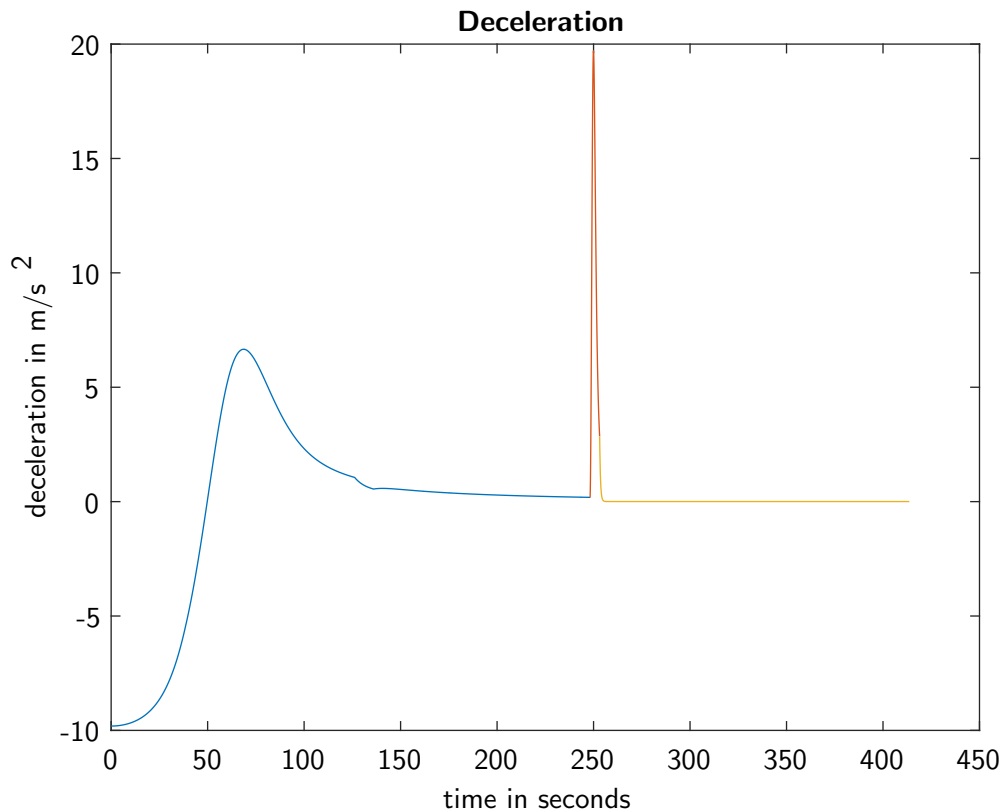


Abbildung 4.4: Grafischer Plot der während der Simulation auftretenden Beschleunigung. In den ersten ca. 50 Sekunden ist die Beschleunigung auf die Maximalgeschwindigkeit erkennbar. Danach bremst der Springer durch die steigende Luftdichte bis be ca. 250 Sekunden der Fallschirm ausgelöst wird (blau). Die darauf folgende Spitze zeigt das langsame öffnen des Fallschirms über einen Zeitraum von ca. 5 Sekunden (rot). Die Abbremsung mit offenem Fallschirm wird immer geringer bis die Landehöhe erreicht wird (orange).

## 4.2 Vergleich mit Red Bull Stratos

Mathematische Modelle und Simulationen sind theoretische Beschreibungen der physikalischen Welt. Wie gut eine Simulation ist, muss mit einem Versuch in der realen Welt geprüft werden. Im Folgenden werden die Daten aus matlab und die Daten von Red Bull Stratos verglichen um zu prüfen, wie gut die Modellierung gelungen ist. Abweichungen können durch folgende Punkte entstehen:

- Angewandtes Luftschichtenmodell spiegelt die realen Verhältnisse nicht genau genug wieder.
- Angenommener Reibungsbeiwert  $c_w$  weicht vom tatsächlichen Wert ab. Dies kann z.B. durch ausstrecken der Arme während des Fluges geschehen. In der Simulation wird daher ein konstanter Mittelwert verwendet.
- Angenommene Angriffsfläche weicht von der Realität ab. Diese hängt davon ab, wie der Fallschirmspringer angeströmt wird (sprich in welcher Lage er sich befindet).

### 4.2.1 Bekannte Punkte

In Tabelle 4.1 sind die zahlenmäßigen Unterschiede an, aus dem Stratos Projekt bekannten, Punkten zu sehen. Im folgenden Abschnitt werden diese Unterschiede genauer betrachtet.

#### Erreichen der Schallgeschwindigkeit

In diesem ersten Abschnitt nach dem Sprung ist die Abweichung der Simulation zur Realität relativ klein, in der Größenordnung von ein paar Zehntel Sekunden und einigen Metern.

#### Erreichen der Maximalgeschwindigkeit

Die Maximalgeschwindigkeit ist in der Simulation um ca.  $30 \text{ km/h}$  geringer und wird mit einer zeitlichen Abweichung von einigen Zehntel Sekunden im Vergleich zum realen Sprung erreicht.

#### Übergang von Über- auf Unterschallgeschwindigkeit

Die Zeitdauer zum Wiedereintritt in den Unterschallbereich dauert in der Simulation um 4 Sekunden länger, als in der Realität. Dies ist auf das verwendete Luftschichtenmodell, sowie den Strömungswiderstandskoeffizienten  $c_w$  des Springers, welcher je nach Lage des Springers variiert, in der Simulation jedoch konstant ist, zurückzuführen.

#### Zwischenpunkt

Bei diesem Zwischenpunkt werden die benötigte Zeit und die Geschwindigkeit bei einer gewissen Höhe (7619,3 m über dem Meeresspiegel) verglichen. Mit einer 6 Sekunden kürzeren Zeit und einer Geschwindigkeit, welche um Einen  $\text{km/h}$  größer ist, als in der Realität, liegt der Relative Fehler von Simulation zur Realität im einstelligen Prozent Bereich.

#### Öffnen des Fallschirms

Die Grundlage für diesen Vergleich bringt die Höhe, bei der der Fallschirm geöffnet wird (2567 m über dem Meeresspiegel). Die zeitliche Differenz von der Simulation zur Realität, sowie die Geschwindigkeitsabweichung ist vom vorhergehenden Vergleichspunkt weiter angestiegen. Dies ist auf das verwendete Luftschichtenmodell, sowie das Verhalten des Springers in der Luft zurückzuführen. Die Abweichungen bei der Geschwindigkeit liegt bei ca. 12 % und die Zeit ist um 5 % kürzer.

Tabelle 4.1: Vergleich mit Red Bull Stratos. [5]

Erreichen der Schallgeschwindigkeit		
	Realität	Simulation
Zeit [s]	34	34
Höhe [m]	33.446	33.437
Geschwindigkeit [km/h]	1.115	1.115
Erreichen der Maximalgeschwindigkeit		
	Realität	Simulation
Zeit [s]	50	50
Höhe [m]	27.833	28.029
Geschwindigkeit [km/h]	1.357,6	1.328,6
Übergang von Über- auf Unterschallgeschwindigkeit		
	Realität	Simulation
Zeit [s]	64	68
Höhe [m]	22.960	21.718
Geschwindigkeit [km/h]	1.043	1.043
Zwischenpunkt (Höhenreferenz)		
	Realität	Simulation
Zeit [s]	180	174
Höhe [m]	7.619,3	7.619,3
Geschwindigkeit [km/h]	285	286
Öffnen des Fallschirms		
	Realität	Simulation
Zeit [s]	260	248
Höhe [m]	2.567	2.567
Geschwindigkeit [km/h]	191,5	215.3

# Symbolverzeichnis

Symbole	Erklärung	Einheit
$F$	Kraft	N
$m$	Masse	kg
$g$	Erdbeschleunigung	$\text{m/s}^2$
$F_G$	Gewichtskraft	N
$F_R$	Reibkraft	N
$\rho(h)$	Höhenabhängige Dichte	$\text{kg/m}^3$
$c_w$	Strömungswiderstandskoeffizient	1
$A$	Projizierte Wirkfläche	$\text{m}^2$



# Abbildungsverzeichnis

4.1	Benutzeroberfläche der Simulation . . . . .	7
4.2	Plot der Geschwindigkeit über der Zeit . . . . .	8
4.3	Plot der Höhe über der Zeit . . . . .	9
4.4	Plot der Beschleunigung über der Zeit . . . . .	10

# Tabellenverzeichnis

4.1 Vergleich mit Red Bull Stratos . . . . .	12
--	----

# Literaturverzeichnis

- [1] Wikipedia, "Red bull stratos," [https://de.wikipedia.org/wiki/Red\\_Bull\\_Stratos](https://de.wikipedia.org/wiki/Red_Bull_Stratos), 2020.
- [2] N. N. Kurier, "lemlinger / red bulletin - stratos," [https://www.schoolgames.eu/components/com\\_jobprofiles/files/media/9.pdf](https://www.schoolgames.eu/components/com_jobprofiles/files/media/9.pdf), 2020.
- [3] H. Kleisny, "Die wissenschaftlichen daten zum stratosphärensprung," <https://flugundzeit.blog/tag/felix-baumgartner/>, 2020.
- [4] W. Bislin, "Barometrische höhenformel," <http://walter.bislins.ch/aviatik/index.asp?page=Barometrische+H%C3%96henformel>, 2020.
- [5] R. Bull, "Red bull stratos factsheet," [https://issuu.com/redbullstratos/docs/red\\_bull\\_stratos\\_factsheet\\_final\\_statistics\\_050213](https://issuu.com/redbullstratos/docs/red_bull_stratos_factsheet_final_statistics_050213), 2020.