Toegepaste mechanica 1

Daniël Slenders
Faculteit Ingenieurswetenschappen
Katholieke Universiteit Leuven

Academiejaar 2009 - 2010

Inhoudsopgave

Vectorrekenen

Oefening 1

Vraag

Vectoren $\vec{a} = \vec{e_x} + \vec{e_y} + \vec{e_z}$ en $\vec{b} = 3 * \vec{e_x} + 2 * \vec{e_y} + \vec{e_z}$ zijn gegeven.

1. Bepaal de richtingscosinussen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$
2. Bepaal $3 * \vec{a} - 2 * \vec{b}$
3. Bepaal $\vec{a} \cdot \vec{b}$
4. Bepaal $\vec{a} \times \vec{b}$
5. Welke hoek maken de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ met elkaar?
6. Zoek een eenheidsvector loodrecht op $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
7. Bepaal de loodrechte projectie $\vec{a_b}$ van de vector $\vec{a}$ op de as die de richting en zin heeft van de vector $\vec{b}$.

Oplossing - 1

Om de richtingscosinussen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ te bepalen, hebben we de grootte van deze vectoren nodig.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{3} \\ b &= \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned} \tag{1}$$

De richtingscosinussen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn dan de verhoudingen van de respectievelijke componenten tot de grootte van de vector. Voor $\vec{a}$ wordt dit dus:

$$\begin{aligned} cos(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ cos(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ cos(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned} \tag{2}$$

En voor $\vec{b}$ wordt dat:

$$\begin{aligned} cos(\alpha) &= \frac{3}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{3 * \sqrt{14}}{14} \\ cos(\beta) &= \frac{2}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{7} \\ cos(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{14} \end{aligned} \tag{3}$$

Oplossing - 2

$$\begin{aligned} 3 * \vec{a} - 2 * \vec{b} &= 3 * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -3 * \vec{e_x} - \vec{e_y} + \vec{e_z} \end{aligned} \tag{4}$$

Oplossing - 3

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 * 3 + 1 * 2 + 1 * 1 \\ &= 6 \end{aligned} \tag{5}$$

Oplossing - 4

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= \begin{vmatrix}\vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z}\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}\\ &= (1*1-2*1)*\vec{e_x}+(1*3-1*1)*\vec{e_y}+(1*2-3*1)*\vec{e_z}\\ &= -\vec{e_x}+2*\vec{e_y}-\vec{e_z}\end{aligned} \tag{6}$$

Oplossing - 5

Uit de definitie van het inwendig product ($\vec{a}\cdot\vec{b} = a*b*cos(\alpha)$) kunnen we de hoek α tussen de twee vectoren halen.

$$\begin{aligned}a*b*cos(\alpha) &= 6\\ cos(\alpha) &= \frac{6}{\sqrt{3}*\sqrt{14}}\\ \alpha &= cos^{-1}(\frac{\sqrt{42}}{7})\\ \alpha &= 22^\circ\end{aligned} \tag{7}$$

Oplossing - 6

Een vector loodrecht op 2 andere vectoren is te vinden door het vectorieel product van beide vectoren te nemen. Er is een eenheidsvector gevraagd, dus delen we deze vector door zijn lengte. Dit geeft dus:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{||\vec{a}\times\vec{b}||}\\ &= \frac{-\vec{e_x}+2*\vec{e_y}-\vec{e_z}}{||\vec{a}\times\vec{b}||}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}*(-\vec{e_x}+2*\vec{e_y}-\vec{e_z})\end{aligned} \tag{8}$$

Oplossing - 7

De loodrechte projectie van $\vec{a}$ op $\vec{b}$ is gelijk aan een vector in de richting van $\vec{b}$ met als lengte het inwendig product van $\vec{a}$ met een eenheidsvector in de richting van $\vec{b}$. Dit geeft dus:

$$\begin{aligned}\vec{a_b} &= (\vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{b})*\frac{\vec{b}}{b}\\ &= \frac{6}{14}*(3*\vec{e_x}+2*\vec{e_y}+\vec{e_z})\\ &= \frac{9}{7}*\vec{e_x}+\frac{6}{7}*\vec{e_y}+\frac{3}{7}*\vec{e_z}\end{aligned} \tag{9}$$

Oefening 2

Vraag

Welke hoek maken de vectoren $\vec{a} = \vec{e_x} + 2 * \vec{e_y} + 3 * \vec{e_z}$ en $\vec{b} = -3 * \vec{e_x} - 2 * \vec{e_y} - \vec{e_z}$ met elkaar?

Oplossing

Uit de definitie van het inwendig product ($\vec{a} \cdot \vec{b} = a * b * cos(\alpha)$) kunnen we de hoek α tussen de twee vectoren halen.

$$\begin{aligned} a * b * cos(\alpha) &= veca \cdot \vec{b} \\ \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} * \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} * cos(\alpha) &= 1 * (-3) + 2 * (-2) + 3 * (-1) \\ cos(\alpha) &= \frac{-10}{14} \\ \alpha &= cos^{-1}(\frac{-5}{7}) \\ \alpha &= 136^\circ \end{aligned} \tag{10}$$

Oefening 3

Vraag

De vector $\vec{a}$ heeft een lengte 7 en $a_x = 2, a_y = 3$. Bepaal a_z en de drie hoeken met de coördinaatassen α (met de x-as), β (met de y-as) en γ (met de z-as).

Oplossing

$$\begin{aligned} a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} &= 7 \\ 4 + 9 + {a_z}^2 &= 49 \\ {a_z}^2 &= 36 \\ a_z &= \pm 6 \end{aligned} \tag{11}$$

De hoeken met de coördinaatassen kunnen we bepalen aan de hand van de richtingscosinussen. Voor de hoek met de x-as geeft dit dus:

$$\begin{aligned} cos(\alpha) &= \frac{2}{7} \\ \alpha &= cos^{-1}(\frac{2}{7}) \\ \alpha &= 73^\circ \end{aligned} \tag{12}$$

Voor de hoek met de y-as wordt dat:

$$\begin{aligned}cos(\beta) &= \frac{3}{7}\\ \beta &= cos^{-1}(\frac{3}{7})\\ \beta &= 65^\circ\end{aligned} \tag{13}$$

Voor de hoek met de z-as wordt dat:

$$\begin{aligned}cos(\gamma) &= \frac{\pm 6}{7}\\ \gamma &= cos^{-1}(\frac{\pm 6}{7})\\ \gamma &= 31^\circ\ of\ 149^\circ\end{aligned} \tag{14}$$

Oefening 4

Vraag

De vector $\vec{a}$ heeft een lengte 7 en maakt een hoek van 30° met de x-as. $a_y = 3$. Bepaal a_x, a_z, β (de hoek met de y-as) en γ (de hoek met de z-as). Welke zijn de richtingscosinussen van deze vector?

Oplossing

Uit de hoek met de x-as kunnen we a_x halen:

$$\begin{aligned}cos(\alpha) &= \frac{a_x}{a}\\ cos(30^\circ) &= \frac{a_x}{7}\\ a_x &= 7 * \frac{\sqrt{3}}{2}\\ a_x &= \frac{7 * \sqrt{3}}{2}\end{aligned} \tag{15}$$

Uit de definitie van de lengte van een vector kunnen we a_z halen:

$$\begin{aligned}a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} &= 7\\ \frac{49 * 3}{4} + 9 + {a_z}^2 &= 49\\ {a_z}^2 &= 3.25\\ a_z &= \pm 1.803\end{aligned} \tag{16}$$

β kunnen we uit de richtingscosinus met de y-as halen:

$$\begin{aligned} cos(\beta) &= \frac{3}{7} \\ \beta &= cos^{-1}(\frac{3}{7}) \\ \beta &= 65° \end{aligned} \tag{17}$$

γ kunnen we uit de richtingscosinus met de z-as halen:

$$\begin{aligned} cos(\gamma) &= \frac{\pm 1,803}{7} \\ \gamma &= cos^{-1}(\frac{\pm 1.803}{7}) \\ \gamma &= 75° \ of \ 105° \end{aligned} \tag{18}$$

Bij het berekenen van de hoeken vinden we ook meteen de richtingscosinussen. Deze zijn:

- $cos(\alpha) = cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $cos(\beta) = cos(65°) = \frac{3}{7}$
- $cos(\gamma) = \pm cos(75°) = \frac{\pm 1,803}{7}$

Oefening 5

Vraag

Welke hoek vormt de vector $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ met het xy-vlak? $\vec{b} = 2 * \vec{e_x} - \vec{e_y} + 3 * \vec{e_z}$ en $\vec{c} = 2 * \vec{e_x} + \vec{e_y} + 3 * \vec{e_z}$.

Oplossing

De hoek van een vector met het xy-vlak is gelijk aan het complement van de hoek van deze vector met de z-as. Deze hoek kunnen we bepalen aan de hand van de richtingscosinus van γ. Hiervoor moeten we allereerst $\vec{a}$ bepalen. Dit geeft dus:

$$\begin{aligned} &\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \\ &\vec{a} = (2+3) * \vec{e_x} + (-1+1)\vec{e_y} + (3+1) * \vec{e_z} \\ &\vec{a} = 5 * \vec{e_x} + 4 * \vec{e_z} \end{aligned} \tag{19}$$

Hieruit kunnen we nu γ berekenen:

$$
\begin{aligned}
cos(\gamma) &= \frac{4}{\sqrt{5^2+4^2}} \\
\gamma &= cos^{-1}(\frac{4}{\sqrt{41}}) \\
\gamma &= 51^\circ
\end{aligned}
\tag{20}
$$

De hoek met het xy-vlak is het complement van γ. Dit is dus:

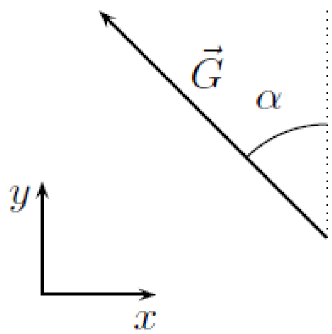
$$
\begin{aligned}
\theta &= 90^\circ - \gamma \\
\theta &= 39^\circ
\end{aligned}
\tag{21}
$$

De vector $\vec{a}$ maakt dus een hoek van 39° met het xy-vlak.

Oefening 6

Vraag

Ontbind de vector $\vec{G}$ uit nevenstaande figuur in zijn componenten volgens $\vec{e_x}$ en $\vec{e_y}$. Schrijf het resultaat als functie van G en de hoek α.



Oplossing

Als we $\vec{G}$ laten aangrijpen in de oorsprong van het assenstelsel, kunnen we de componenten aflezen zoals op een goniometrische cirkel. Dit wordt dus:

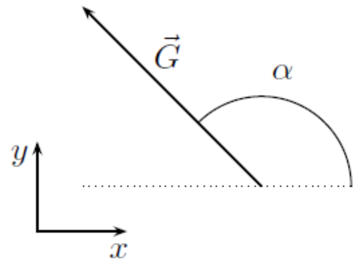
- $\vec{G_x} = -G * sin(\alpha)$
- $\vec{G_y} = G * cos(\alpha)$

$\vec{G}$ is dus gelijk aan $-G * sin(\alpha) * \vec{e_x} + G * cos(\alpha) * \vec{e_y}$.

Oefening 7

Vraag

Ontbind de vector $\vec{G}$ uit nevenstaande figuur in zijn componenten volgens $\vec{e_x}$ en $\vec{e_y}$. Schrijf het resultaat als functie van G en de hoek α.



Oplossing

Als we $\vec{G}$ laten aangrijpen in de oorsprong van het assenstelsel, kunnen we de componenten aflezen zoals op een goniometrische cirkel. Dit wordt dus:

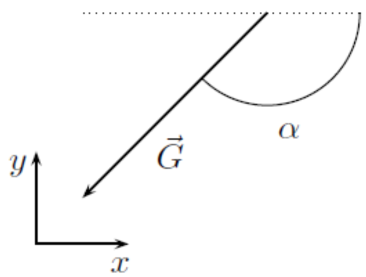
- $\vec{G_x} = G * cos(\alpha)$
- $\vec{G_y} = G * sin(\alpha)$

$\vec{G}$ is dus gelijk aan $G * cos(\alpha) * \vec{e_x} + G * sin(\alpha) * \vec{e_y}$.

Oefening 8

Vraag

Ontbind de vector $\vec{G}$ uit nevenstaande figuur in zijn componenten volgens $\vec{e_x}$ en $\vec{e_y}$. Schrijf het resultaat als functie van G en de hoek α.



Oplossing

Als we $\vec{G}$ laten aangrijpen in de oorsprong van het assenstelsel, kunnen we de componenten aflezen zoals op een goniometrische cirkel. Dit wordt dus:

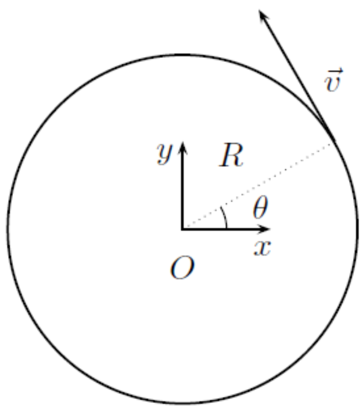
- $\vec{G_x} = G * cos(\alpha)$
- $\vec{G_y} = -G * sin(\alpha)$

$\vec{G}$ is dus gelijk aan $G * cos(\alpha) * \vec{e_x} - G * sin(\alpha) * \vec{e_y}$.

Oefening 9

Vraag

De vector $\vec{v}$ raakt aan de cirkel met middelpunt O en straal R. Ontbind deze vector in zijn componenten volgens $\vec{e_x}$ en $\vec{e_y}$. Schrijf het resultaat als functie van v en de hoek θ.



Oplossing

Als we $\vec{v}$ laten aangrijpen in de oorsprong van het assenstelsel, kunnen we de componenten aflezen zoals op een goniometrische cirkel. Aangezien de vector raakt aan de cirkel, moeten we er wel rekening mee houden dat de hoek gelijk is aan $\theta + 90°$. Dit wordt dus:

- $\vec{v_x} = v * cos(\theta + 90°) = -v * sin(\theta)$
- $\vec{v_y} = v * sin(\theta + 90°) = v * cos(\theta)$

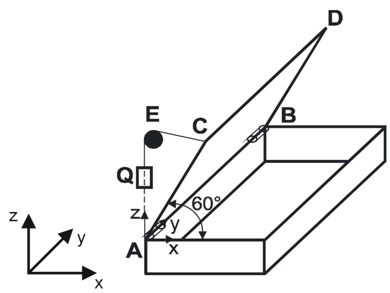
$\vec{v}$ is dus gelijk aan $-v * sin(\theta) * \vec{e_x} + v * cos(\theta) * \vec{e_y}$.

Statica van enkelvoudige lichamen

Oefening 8

Vraag

Een rechthoekig deksel $ABCD$ met massa $40\ kg$ wordt door het tegengewicht Q omhooggehouden onder een hoek van $60°$ met het horizontaal vlak. Bepaal de massa Q en de reactiekrachten in de scharnieren A en B. E ligt verticaal boven A en $|AC| = |AE|$. De scharnieren zijn driedimensionale scharnieren die een rotatie rond elke as toelaten.



Oplossing

De krachten die op het deksel inwerken zijn de volgende:

- de reactiekracht $\vec{R_A}$ in A met een component in de x-, de y- en de z-richting
- de reactiekracht $\vec{R_B}$ in B met een component in de x-, de y- en de z-richting
- het gewicht $\vec{G}$ in het midden van het deksel met een component in de z-richting
- de spankracht $\vec{S}$ in C in de richting van het touw met als grootte het gewicht van Q

Dit geeft de volgende krachtenvergelijking:

$$\vec{R_A} + \vec{R_B} + \vec{G} + \vec{S} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -400 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -S * cos(\alpha) \\ 0 \\ S * sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

De hoek α is de hoek die EC maakt met de horizontale. De grootte hiervan is gelijk aan:

$$\begin{aligned}\alpha &= AC - 60^\circ \\ \alpha &= 75^\circ - 60^\circ \\ \alpha &= 15^\circ\end{aligned} \tag{23}$$

De momentenvergelijking ten opzichte van A wordt:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= (\vec{r_C} - \vec{r_A}) \times \vec{S} + (\vec{r_D} - \vec{r_A}) \times \vec{G} + (\vec{r_B} - \vec{r_A}) \times \vec{R_B} \\ \vec{0} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ |AC| * cos(60) & 0 & |AC| * sin(60) \\ -S * cos(15) & 0 & S * sin(15) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{|AC|*cos(60)}{2} & 0 & \frac{|AC|*sin(60)}{2} \\ 0 & 0 & -400 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & |AB| & 0 \\ R_{Bx} & R_{By} & R_{Bz} \end{vmatrix} \\ \vec{0} &= -|AC| * S * sin(75) * \vec{e_y} - 200 * |AB| * \vec{e_x} + 200 * |AC| * cos(60) * \vec{e_y} \\ &+ |AB| * R_{Bz} * \vec{e_x} - |AB| * R_{Bx} * \vec{e_z}\end{aligned} \tag{24}$$

Uit de x-component halen we:

$$\begin{aligned}-200 * |AB| + |AB| * R_{Bz} &= 0 \\ R_{Bz} &= 200\end{aligned} \tag{25}$$

Uit de z-component halen we:

$$R_{Bx} = 0 \tag{26}$$

Uit de y-component halen we:

$$\begin{aligned}-|AC| * S * sin(75) + 200 * |AC| * cos(60) &= 0 \\ S &= 103.5\end{aligned} \tag{27}$$

Aangezien S gelijk is aan de grootte van het gewicht van Q, weegt Q $10.35\ kg$.

De reactiekrachten in de scharnieren worden dan:

$$\begin{aligned}R_{Ax} &= S * cos(15) - R_{Bx} \\ &= 100 \\ R_{Ay} &= -R_{By} \\ R_{Az} &= 400 - S * sin(15) - R_{Bz} \\ &= 173 \\ R_{Bx} &= 0 \\ R_{By} &= -R_{Ay} \\ R_{Bz} &= 200\end{aligned} \tag{28}$$

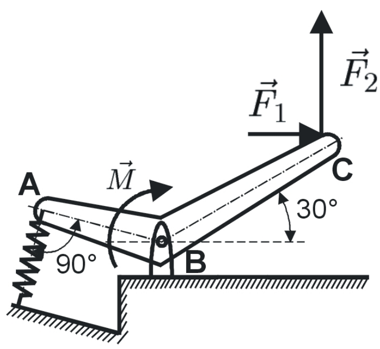
$\vec{R_A}$ is dus gelijk aan $(100, R_{Ay}, 173)$ en $\vec{R_B}$ is gelijk aan $(0, R_{By}, 200)$.

Statica van samengeselde lichamen

Oefening 9

Vraag

De hefboom ABC wordt belast zoals aangegeven op de figuur. Het uiteinde A werd door middel van een veer aan de vloer verbonden. Hoe groot moet de veerkracht zijn om de hefboom in de getekende stand in evenwicht te houden? Het gewicht van de hefboom is te verwaarlozen. $AB = 0.2\ m$, $BC = 0.5\ m$, $M = 500\ Nm$, $F_1 = 500\ N$, $F_2 = 4000\ N$



Oplossing

De krachten die op de hefboom inwerken zijn de volgende:

- de veerkracht $\vec{F_v}$ in A in de richting van de veer
- de reactiekracht in $\vec{R_B}$ B
- de gegeven krachten $\vec{F_1}$ en $\vec{F_2}$ in C

Als we de momentenvergelijking ten opzichte van B opstellen, geeft dat:

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= (\vec{r_A} - \vec{r_B}) \times \vec{F_v} + (\vec{r_C} - \vec{r_B}) \times (\vec{F_1} + \vec{F_2}) + \vec{M} \\
\vec{0} &= |AB| * F_v * \vec{e_z} + \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ |BC| * cos(30) & |BC| * sin(30) & 0 \\ 500 & 4000 & 0 \end{vmatrix} - 500 * \vec{e_z} \\
0 &= 0.2 * F_v + 2000 * cos(30) - 250 * sin(30) - 500 \\
F_v &= -5535
\end{aligned} \tag{29}$$

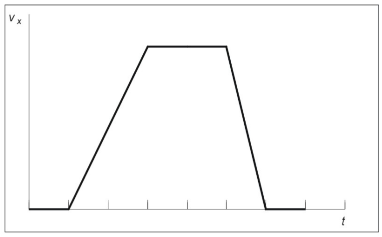
De veerkracht moet dus $5535\ N$ groot zijn.

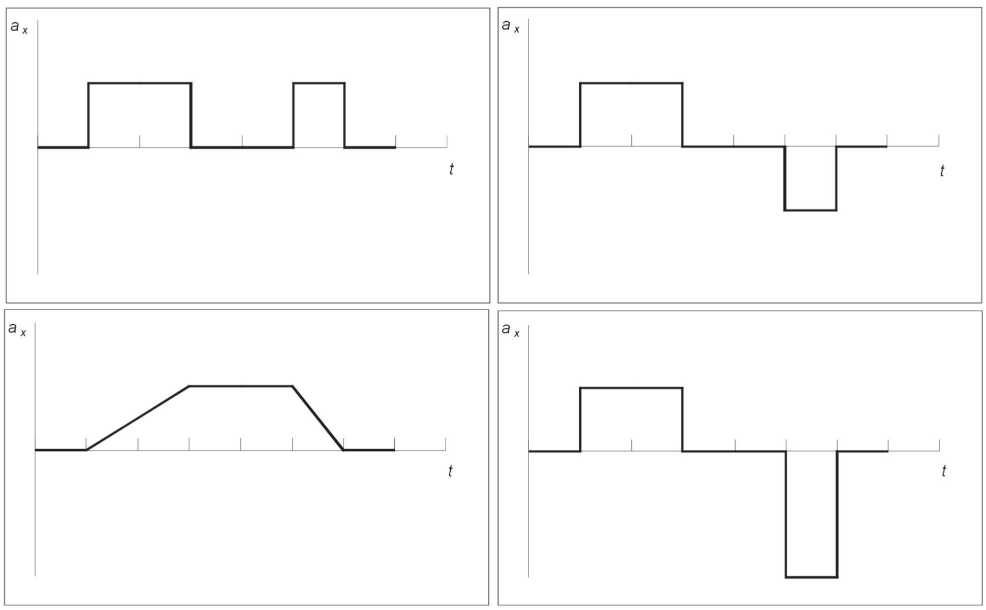
Kinematica van een punt

Oefening 1

Vraag

Het $v_x(t)$-diagram van een beweging ziet er uit zoals aangegeven op de figuur hiernaast. Welk van de vier onderstaande $a_x(t)$-grafieken stemt hiermee overeen.





Oplossing

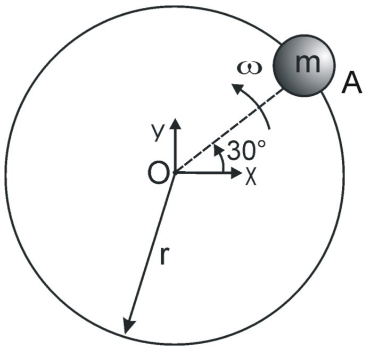
Aangezien de snelheid eerst constant is (versnelling is 0), dan redelijk snel stijgt over een lang tijdsinterval (versnelling is positief), dan weer constant is (versnelling is 0), en dan snel daalt over een kort tijdsinterval (versnelling is negatief), is dit de laatse grafiek.

Oefening 6

Vraag

Een satelliet beweegt in een cirkelbaan rond de aarde. De hoeksnelheid ω van de satelliet is constant en gelijk aan $0.0012\ rad/s$. De afstand r van de satelliet tot het middelpunt O van de aarde is $6480\ km$.

1. Bepaal de snelheid en de versnelling van de satelliet in cartesische coördinaten op het ogenblik dat de satelliet zich in A bevindt (bij $\theta = 30°$).
2. De satelliet wordt vervolgens in een nieuwe baan gebracht. De satelliet bevindt zich nog steeds in A, maar krijgt bijkomend een tangentiële component van de versnelling $a_t + 100\ m/s^2$. Bepaal de componenten van de versnelling van de satelliet volgens x en y op dat moment.



Oplossing - 1

De grootte v van de snelheid is gelijk aan de straal maal de hoeksnelheid ($v = r * \omega$). Dit geeft dus:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \begin{pmatrix} -v * sin(\theta) \\ v * cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{v} &= \begin{pmatrix} -0.0012 * 6480 * 1000 * sin(30) \\ 0.0012 * 6480 * 1000 * cos(30) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{v} &= \begin{pmatrix} -3888 \\ 6734 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{30}$$

De versnelling is de afgeleide van de snelheid. Dat geeft dus:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\vec{v} \\
\vec{a} &= \begin{pmatrix} -v * cos(\theta) * \omega \\ -v * sin(\theta) * \omega \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{a} &= \begin{pmatrix} -0.0012 * 6480 * 1000 * cos(30) * 0.0012 \\ -0.0012 * 6480 * 1000 * sin(30) * 0.0012 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{a} &= \begin{pmatrix} -8.08 \\ -4.67 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{31}$$

Oplossing - 2

De bijkomende tangentiële versnelling heeft een grote van $100\ m/s^2$. Vectorieel wordt dit:

$$\begin{aligned}
\vec{a_t} &= \begin{pmatrix} -100 * sin(30) \\ 100 * cos(30) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{a_t} &= \begin{pmatrix} -50 \\ 86.6 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{32}$$

Als we dit optellen bij de versnelling verkregen in deel 1 van de oplossing, wordt dat:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a_n} + \vec{a_t} \\
\vec{a} &= \begin{pmatrix} -8.08 - 50 \\ -4.67 + 86.6 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{a} &= \begin{pmatrix} -58.08 \\ 81.94 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{33}$$

Oefening 9

Vraag

In een 3 meter hoge kamer wordt vanuit een punt P ($1\ m$ boven de vloer) een bal gegooid met een beginsnelheid $7 * \sqrt{2}\ m/s$ onder een hoek van $45°$ met de horizontale. De bal botst tegen het plafond in een punt Q. Zoek de afstand PQ.

Oplossing

De enige kracht die op de bal inwerkt is zijn gewicht. De versnelling van de bal is dus gelijk aan:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

Dit integreren geeft de snelheid van de bal:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \int \vec{a}\ dt \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} v_{0x} \\ -10 * t + v_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v} &= \begin{pmatrix} 7 \\ -10 * t + 7 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{35}$$

Dit integreren geeft de positie van de bal:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \int \vec{v}\ dt \\ \vec{r} &= \begin{pmatrix} 7 * t + r_{0x} \\ -5 * t^2 + 7 * t + r_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{r} &= \begin{pmatrix} 7 * t \\ -5 * t^2 + 7 * t + 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

Het punt Q met als coördinaten $(x, 3)$ is een punt van de baan. Dit geeft dus:

$$Q \in r(t) \Leftrightarrow \begin{cases} 7 * t = x \\ -5 * t^2 + 7 * t + 1 = 3 \end{cases} \tag{37}$$

Dit uitwerken geeft:

$$\begin{aligned} -5 * t^2 + 7 * t + 1 &= 3 \\ -5 * (\frac{x}{7})^2 + 7 * \frac{x}{7} + 1 &= 3 \\ \frac{5}{49} * x^2 - x + 2 &= 0 \\ x &= 2.8 \end{aligned} \tag{38}$$

De afstand tussen P en Q is dan gelijk aan:

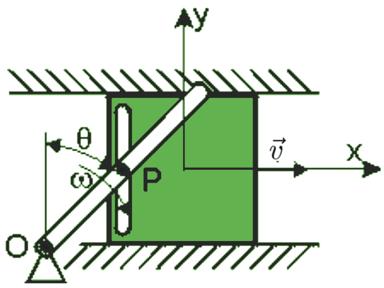
$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{(2.8 - 0)^2 + (3 - 1)^2} \\ |PQ| &= 3.44 \end{aligned} \tag{39}$$

Kinematica van een lichaam

Oefening 1

Vraag

Op een roterende stang is een pin P bevestigd die glijdt in de verticale gleuf in het blok. Bepaal absolute snelheid, relatieve snelheid en sleepsnelheid van P indien het bewegende assenstelsel xy bevestigd is aan het blok. $\theta = 45°, \omega = 3\ rad/s, |OP| = 0.5\ m$.



Oplossing

De sleepsnelheid is gelijk aan de snelheid van het bewegende assenstelsel ten opzichte van het wereldassenstelsel. Deze snelheid is dus gelijk aan de snelheid van het blok:

$$\vec{v_S} = \begin{pmatrix} v_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

De relatieve snelheid is de snelheid van P ten opzichte van het bewegende assenstelsel. Dit is dus de snelheid waarmee P omhoog of omlaag gaat in de gleuf:

$$\vec{v_R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

De absolute snelheid is de snelheid van P ten opzichte van O. Aangezien P aan de stang vasthangt, is dit dus een cirkelbeweging:

$$\vec{v_A} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & -\omega \\ |OP| * cos(\theta) & |OP| * sin(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$
$$\vec{v_A} = \begin{pmatrix} \omega * |OP| * sin(45°) \\ -\omega * |OP| * cos(45°) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Aangezien de absolute snelheid gelijk is aan de som van de sleepsnelheid en de relatieve snelheid wordt dat:

$$\vec{v_A} = \vec{v_S} + \vec{v_R}$$
$$\begin{pmatrix} \omega * |OP| * sin(45°) \\ -\omega * |OP| * cos(45°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -v_R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

Of als we dat uitwerken:

$$\begin{aligned} v_S &= 3 * 0.5 * \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 1.06 \\ v_R &= 3 * 0.5 * \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 1.06 \end{aligned} \tag{44}$$

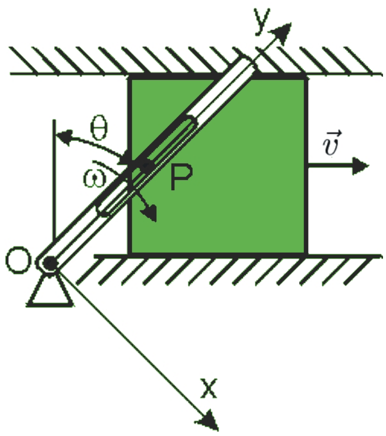
Dit wordt dus:

- $\vec{v_A} = 1.06 * \vec{e_x} - 1.06 * \vec{e_y}$
- $\vec{v_S} = 1.06 * \vec{e_x}$
- $\vec{v_R} = -1.06 * \vec{e_y}$

Oefening 2

Vraag

Op het blok is een pin P bevestigd die glijdt in de gleuf in de roterende stang. Bepaal absolute snelheid, relatieve snelheid en sleepsnelheid van P indien het bewegende assenstelsel xy bevestigd is aan de stang. $\theta = 45°, \omega = 3\ rad/s, |OP| = 0.5\ m$.



Oplossing

De sleepsnelheid gaat volgens een cirkelbeweging van P rond O. Dit is:

$$\begin{aligned} \vec{v_S} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & -\omega \\ |OP|*cos(\theta) & |OP|*sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ \vec{v_S} &= \begin{pmatrix} \omega*|OP|*sin(45^\circ) \\ -\omega*|OP|*cos(45^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{45}$$

De relatieve beweging van P is naar rechtsboven volgens de gleuf. De relatieve snelheid wordt dan:

$$\vec{v_R} = \begin{pmatrix} v_R*cos(45^\circ) \\ v_R*sin(45^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

De absolute snelheid is de som van de vorige twee en staat horizontaal geöriënteerd. Dit wordt dus

$$\begin{aligned} \vec{v_A} &= \vec{v_S} + \vec{v_R} \\ \begin{pmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega*|OP|*sin(45^\circ) \\ -\omega*|OP|*cos(45^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_R*cos(45^\circ) \\ v_R*sin(45^\circ) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{47}$$

Dit uitwerken geeft:

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{\omega*|OP|*cos(45)}{sin(45)} \\ &= 1.5 \\ v_A &= \omega*|OP|*cos(45^\circ) + v_R*cos(45^\circ) \\ &= 2.12 \end{aligned} \tag{48}$$

De relatieve snelheid is dus gelijk aan:

$$\vec{v_R} = \begin{pmatrix} v_R * cos(45°) \\ v_R * sin(45°) \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{v_R} = \begin{pmatrix} 1.06 \\ 1.06 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

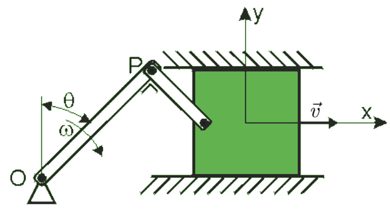
Dit wordt dus:

- $\vec{v_A} = 2.12 * \vec{e_x}$
- $\vec{v_S} = 1.06 * \vec{e_x} - 1.06 * \vec{e_y}$
- $\vec{v_R} = 1.06 * \vec{e_x} + 1.06 * \vec{e_y}$

Oefening 3

Vraag

De stang OP roteert met hoeksnelheid ω en drijft zo het blok aan. Bepaal absolute snelheid, relatieve snelheid en sleepsnelheid van P indien het bewegende assenstelsel xy bevestigd is aan het blok. $\theta = 45°, \omega = 3\ rad/s, |OP| = 0.5\ m$.



Oplossing

De sleepsnelheid van P is gelijk aan de snelheid van het bewegende blok:

$$\vec{v_S} = \begin{pmatrix} v_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

De relatieve snelheid van P gaat volgens een cirkelbeweging van P rond het punt waarmee de stang aan het blok hangt. Dit wordt dus:

$$\vec{v_R} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ -x * cos(\theta) & x * sin(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$
$$\vec{v_R} = \begin{pmatrix} -\omega * x * sin(45°) \\ -\omega * x * cos(45°) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

met x de lengte van de stang die P met het blok verbindt.

De absolute snelheid van P gaat volgens een cirkelbeweging van P rond O. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} \vec{v_A} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & -\omega \\ |OP| * cos(\theta) & |OP| * sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ \vec{v_A} &= \begin{pmatrix} \omega * |OP| * sin(45°) \\ -\omega * |OP| * cos(45°) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{52}$$

Deze absolute snelheid is gelijk aan de som van de vorige twee:

$$\begin{gathered} \vec{v_A} = \vec{v_S} + \vec{v_R} \\ \begin{pmatrix} \omega * |OP| * sin(45°) \\ -\omega * |OP| * cos(45°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega * x * sin(45°) \\ -\omega * x * cos(45°) \\ 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{53}$$

Als we dit uitwerken geeft dat:

$$\begin{aligned} v_{Rx} = v_{Ry} &= -\omega * |OP| * sin(45°) \\ &= -1.06 \\ v_S &= v_{Ax} - v_{Rx} \\ &= 1.06 + 1.06 \\ &= 2.12 \end{aligned} \tag{54}$$

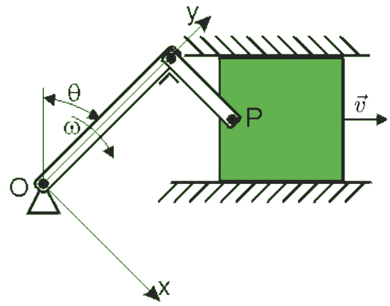
Dit wordt dus:

- $\vec{v_A} = 1.06 * \vec{e_x} - 1.06 * \vec{e_y}$
- $\vec{v_S} = 2.12 * \vec{e_x}$
- $\vec{v_R} = -1.06 * \vec{e_x} - 1.06 * \vec{e_y}$

Oefening 4

Vraag

Een stang roteert met hoeksnelheid ω en drijft zo het blok aan. Op het blok is een pin P bevestigd. Bepaal absolute snelheid, relatieve snelheid en sleepsnelheid van P indien het bewegende assenstelsel xy bevestigd is aan de stang. $\theta = 45°$, $\omega = 3\ rad/s$, de lengte van de aandrijvende stang $= 0.483\ m$, de lengte van de korte stang $= 0.129\ m$.



Oplossing

De sleepsnelheid van P is een cirkelbeweging van P rond O. Om deze beweging vectorieel uit te drukken, moeten we eerst de afstand van P tot O en de hoek met de horizontale berekenen. Dit wordt (volgens de stelling van Pythagoras):

$$\begin{aligned} |OP| &= \sqrt{0.483^2 + 0.129^2} \\ |OP| &= 0.5 \end{aligned} \tag{55}$$

Om de hoek met de horizontale te berekenen, moet eerst de hoek $\widehat{POA} = \alpha$ (met A het punt in de scharnier tussen de lange en korte staaf) berekend worden. Dit geeft (volgens de sinusregel):

$$\begin{aligned} \frac{sin(\alpha)}{|AP|} &= \frac{sin(OAP)}{|OP|} \\ sin(\alpha) &= \frac{sin(90) * 0.129}{0.5} \\ \alpha &= sin^{-1}(0.258) \\ \alpha &= 15° \end{aligned} \tag{56}$$

De hoek met de horizontale wordt dan $45 - 15 = 30°$.

Aangezien de lange stang naar onder draait, wordt de sleepsnelheid gelijk aan:

$$\begin{aligned} \vec{v_S} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & -\omega \\ |OP| * cos(\alpha) & |OP| * sin(\alpha) & 0 \end{vmatrix} \\ \vec{v_S} &= \begin{pmatrix} |OP| * \omega * sin(45 - \alpha) \\ -|OP| * \omega * cos(45 - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v_S} &= \begin{pmatrix} 0.5 * 3 * 0.5 \\ -0.5 * 3 * 0.87 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v_S} &= \begin{pmatrix} 0.75 \\ -1.29 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{57}$$

De relatieve snelheid is een cirkelbeweging van P rond A. Aangezien AP loodrecht staat op OA, staat de relatieve snelheid evenwijdig met OA gericht. Aangezien P aan het blok vasthangt, is de absolute snelheid van P evenwijdig aan de horizontale gericht.

Aangezien we de grootte en richting van $\vec{v_S}$, de richting van $\vec{v_R}$ en de richting van $\vec{v_A}$ kennen, en we weten dat de absolute snelheid de som is van de relatieve en sleepsnelheid, kunnen we een snelheidsdriehoek opstellen. Hieruit kunnen we (via de sinusregel), de grootte van de relatieve en absolute snelheid halen. De snelheidsdriehoek ziet er als volgt uit:

- de grootte van de sleepsnelheid is $\sqrt{0.75^2 + 1.29^2} = 1.5$
- de hoek tussen de absolute snelheid en sleepsnelheid is $90 + \alpha = 120°$
- de hoek tussen de absolute en relatieve snelheid is $45°$
- de hoek tussen de relatieve snelheid en sleepsnelheid is $180 - 120 - 45 = 15°$

De grootte van de relatieve snelheid wordt dan:

$$\begin{gathered} \frac{v_R}{sin(120)} = \frac{v_S}{sin(45)} \\ v_R = 1.84 \end{gathered} \tag{58}$$

Vectorieel wordt dit dan:

$$\begin{aligned} \vec{v_R} &= \begin{pmatrix} v_R * cos(45) \\ v_R * sin(45) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v_R} &= \begin{pmatrix} 1.29 \\ 1.29 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{59}$$

De absolute snelheid wordt dan:

$$\begin{aligned} \vec{v_A} &= \vec{v_S} + \vec{v_R} \\ \vec{v_A} &= \begin{pmatrix} 0.75 \\ -1.29 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.29 \\ 1.29 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v_A} &= \begin{pmatrix} 2.04 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{60}$$

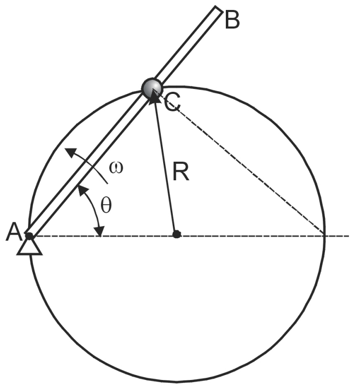
Alles samen wordt dat dan:

- $\vec{v_A} = 2.04\vec{e_x}$
- $\vec{v_S} = 0.75\vec{e_x} - 1.29\vec{e_y}$
- $\vec{v_R} = 1.29\vec{e_x} + 1.29\vec{e_Y}$

Oefening 5

Vraag

De staaf AB roteert in een verticaal vlak rond zijn uiteinde A met hoeksnelheid $\omega = 3\ rad/s$ in de getekende stand. De puntmassa C glijdt tegelijkertijd over de staaf en over de cirkelvormige geleiding met straal $R = 20\ cm$. Bepaal de absolute snelheid van C op het ogenblik dat θ gelijk is aan $60°$.



Oplossing

Als we het midden van de cirkel O noemen en het bewegende assenstelsel laten bewegen met de staaf AB geldt dat:

- $\vec{v_S}$ is volgens een cirkelbeweging van C rond A
- $\vec{v_R}$ is volgens de staaf AB
- $\vec{v_A}$ is volgens een cirkelbeweging van C rond O

Aangezien de hoeksnelheid ω gelijk is aan $3\ rad/s$, de hoek θ gelijk is aan $60°$ en $|AC| = R$ en de driehoak AOC gelijkzijdig is, geldt dat:

$$\begin{aligned}
\vec{v_S} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ |AC| * cos(\theta) & |AC| * sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\
\vec{v_S} &= \begin{pmatrix} -|AC| * \omega * sin(\theta) \\ |AC| * \omega * cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{v_S} &= \begin{pmatrix} -0.2 * 3 * 0.87 \\ 0.2 * 3 * 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{v_S} &= \begin{pmatrix} -0.52 \\ 0.3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{61}$$

De grootte van de sleepsnelheid is dan gelijk aan:

$$\begin{aligned} v_S &= \sqrt{0.3^2 + 0.52^2} \\ v_S &= 0.6 \end{aligned} \tag{62}$$

De richting en zin van de relatieve snelheid zijn gekend (naar onder volgens AB). Vectorieel wordt dit:

$$\vec{v_R} = \begin{pmatrix} -v_R * cos(60) \\ -v_R * sin(60) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{63}$$

De richting van de absolute snelheid is rakend aan de cirkel in C. Dit wil dus zeggen loodrecht op OC. Aangezien OC een hoek van $180 - 60 = 120°$ maakt met de horizontale, maakt de absolute snelheid een hoek van $30°$ met de horizontale. Vectorieel wordt dit:

$$\vec{v_A} = \begin{pmatrix} -v_A * cos(30) \\ -v_A * sin(30) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Uit deze gegevens kunnen we de snelheidsdriehoek opstellen. Dit wordt:

- de grootte van de sleepsnelheid is 0.6
- de hoek tussen de absolute snelheid en de sleepsnelheid is $30 + 30 = 60°$
- de hoek tussen de absolute en relatieve snelheid is $90 - 60 = 30°$
- de hoek tussen de relatieve snelheid en de sleepsnelheid is $90°$

Met behulp van de sinusregel kunnen we de grootte van de absolute snelheid als volgt berekenen:

$$\begin{aligned} \frac{v_A}{sin(90)} &= \frac{v_S}{sin(30)} \\ v_A &= \frac{0.6}{0.5} \\ v_A &= 1.2 \end{aligned} \tag{65}$$

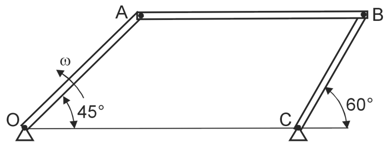
Uit de richting van de absolute snelheid kunnen we de vectoriële componenten halen:

$$\begin{aligned} \vec{v_A} &= \begin{pmatrix} -v_A * cos(30) \\ -v_A * sin(30) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v_A} &= \begin{pmatrix} -1.04 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{66}$$

Oefening 6

Vraag

De staaf OA van een vierstangenmechanisme heeft een hoeksnelheid ω van $6\ rad/s$ (tegenwijzerzin). Bepaal voor de aangegeven stand (AB evenwijdig met OC) de hoeksnelheid van de staaf BC. $|OA| = 35\ cm$ en $|AB| = 60\ cm$.



Oplossing

Laat het bewegende assenstelsel met OA mee bewegen. Dan geldt:

- de sleepsnelheid is volgens een cirkelbeweging van B rond O
- de relatieve snelheid is volgens een cirkelbeweging van B rond A
- de absolute snelheid is volgens een cirkelbeweging van B rond C

Om de sleepsnelheid te berekenen moeten we dus eerst de afstand $|OB|$ en de hoek $\widehat{BOC} = \alpha$ berekenen. Voor de lengte wordt dit (volgens de cosinusregel):

$$\begin{aligned} |OB|^2 &= |OA|^2 + |AB|^2 - 2 * |OA| * |AB| * cos(OAB) \\ |OB| &= \sqrt{0.123 + 0.36 + 0.297} \\ |OB| &= 0.883 \end{aligned} \tag{67}$$

En voor α wordt dit (volgens de sinusregel):

$$\begin{aligned} \frac{sin(45-\alpha)}{|AB|} &= \frac{sin(OAB)}{|OB|} \\ sin(45-\alpha) &= \frac{0.43}{0.883} \\ 45-\alpha &= sin^{-1}(0.48) \\ \alpha &= 16.3° \end{aligned} \tag{68}$$

Aangezien de sleepsnelheid rakend is aan de cirkel van B rond O, kunnen we dit vectorieel uitdrukken als:

$$\begin{aligned} \vec{v_S} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ |OB| * cos(\alpha) & |OB| * sin(\alpha) & 0 \end{vmatrix} \\ \vec{v_S} &= \begin{pmatrix} -|OB| * \omega * sin(\alpha) \\ |OB| * \omega * cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v_S} &= \begin{pmatrix} -1.49 \\ 5.08 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{69}$$

De grootte van de sleepsnelheid wordt dan:

$$\begin{aligned} v_S &= \sqrt{1.49^2 + 5.08^2} \\ v_S &= 5.3 \end{aligned} \tag{70}$$

De richting en zin van de relatieve snelheid zijn gekend. Aangezien dit volgens een cirkelbeweging van B rond A is, staat deze recht naar onder. Vectorieel wordt dit:

$$\vec{v_R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

De richting en zin van de absolute snelheid zijn gekend. Aangezien dit volgens een cirkelbeweging van B rond C is, wordt dit vectorieel:

$$\begin{aligned} \vec{v_A} &= \begin{pmatrix} -v_A * sin(60) \\ v_A * cos(60) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v_A} &= \begin{pmatrix} -0.87 * v_A \\ 0.5 * v_A \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{72}$$

Uit deze gegevens kunnen we de snelheidsdriehoek opstellen. Dit wordt:

- de grootte van de sleepsnelheid is 5.3
- de hoek tussen de absolute snelheid en de sleepsnelheid is $150 - 106.3 = 43.7°$
- de hoek tussen de absolute en de relatieve snelheid is $90 + 30 = 120°$
- de hoek tussen de relatieve snelheid en sleepsnelheid is $16.3°$

Met behulp van de sinusregel kunnen we de grootte van de absolute snelheid als volgt berekenen:

$$\begin{aligned} \frac{v_A}{sin(16.3)} &= \frac{v_S}{sin(120)} \\ v_A &= \frac{5.3 * 0.28}{0.87} \\ v_A &= 1.71 \end{aligned} \tag{73}$$

Om de hoeksnelheid te weten moeten we volgende formule toepassen:

$$v_A = \omega * R \tag{74}$$

met R de straal van de cirkel waarin de hoeksnelheid plaatsvindt. In dit geval wil dat zeggen $|BC|$. Om deze lengte te berekenen, moeten we eerst de afstand h tussen de twee horizontalen weten. Dit wordt:

$$\begin{aligned} h &= |OA| * sin(45) \\ h &= 0.247 \end{aligned} \tag{75}$$

Volgens de sinusregel wordt de lengte $|BC|$ dan:

$$\begin{aligned} \frac{|BC|}{sin(90)} &= \frac{h}{sin(60)} \\ |BC| &= \frac{0.247 * 1}{0.87} \\ |BC| &= 0.28 \end{aligned} \tag{76}$$

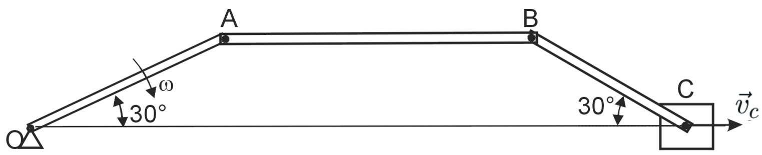
De hoeksnelheid wordt dan:

$$\begin{aligned}
v_A &= \omega * R \\
\omega &= \frac{1.71}{0.28} \\
\omega &= 6\ rad/s
\end{aligned} \tag{77}$$

Oefening 7

Vraag

In het vlakke stangenmechanisme voorgesteld in de figuur draait OA rond het vaste scharnier O. AB is scharnierend verbonden met OA in A en met BC in B. BC draait rond het scharnier C, die verbonden is aan een schuif die glijdt langs OC. Indien OA rond O draait met een hoeksnelheid $\omega = 15\ rad/s$ en de snelheid van C naar rechts gericht is en een grootte $v_C = 4.5\ m/s$ heeft, bereken dan de absolute snelheid van B. $|OA| = |BC| = 30\ cm$, $AB = 40\ cm$.



Oplossing

Dit systeem bestaat uit twee samengestelde bewegingen. Eën waarbij B bekeken wordt ten opzichte van O en A, en ëën waarbij B bekeken wordt ten opzichte van C.

Als we een bewegend assenstelsel in C zetten, dan is de sleepsnelheid van B gelijk aan:

$$\begin{aligned}
\vec{v_{S_1}} &= \vec{v_C} \\
\vec{v_{S_1}} &= \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{78}$$

De relatieven snelheid van B is gelijk aan een cirkelbeweging van B rond C. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned}
\vec{v_{R_1}} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \omega' \\ -|BC| * cos(\theta) & |BC| * sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\
\vec{v_{R_1}} &= \begin{pmatrix} -0.3 * sin(30) * \omega' \\ -0.3 * cos(30) * \omega' \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{79}$$

Deze relatieve snelheid is gelijk aan de samengestelde beweging van B rond O en A. Als we een bewegend assenstelsel met OA laten meebewegen, is de sleepsnelheid gelijk aan:

$$\vec{v_{S_2}} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & -\omega \\ |OA| * cos(\theta) & |OA| * sin(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$
$$\vec{v_{S_2}} = \begin{pmatrix} \omega * 0.3 * sin(30) \\ -\omega * 0.3 * cos(30) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{80}$$
$$\vec{v_{S_2}} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -3.9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De relatieve snelheid van B rond A staat loodrecht op AB. Vectorieel wordt dit dus:

$$\vec{v_{R_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{R_2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{81}$$

De som van deze twee is gelijk aan de eerder bekomen relatieve snelheid. Dit wordt dus:

$$\begin{gathered} \vec{v_{R_1}} = \vec{v_{S_2}} + \vec{v_{R_2}} \\ \begin{pmatrix} -0.3 * sin(30) * \omega' \\ -0.3 * cos(30) * \omega' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -3.9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_{R_2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{82}$$

Als we hier ω' uithalen, wordt dat:

$$\begin{aligned} -0.3 * sin(30) * \omega' &= 2.25 + 0 \\ \omega' &= \frac{2.25}{-0.3 * sin(30)} \\ \omega' &= -15 \end{aligned} \tag{83}$$

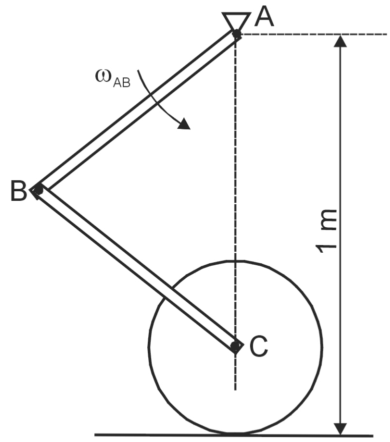
De hoeksnelheid is dus tegengesteld aan ω maar met dezelfde grootte. De absolute snelheid van B wordt dan:

$$\begin{aligned} \vec{v_B} &= \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.3 * sin(30) * \omega' \\ -0.3 * cos(30) * \omega' \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v_B} &= \begin{pmatrix} 2.25 \\ -3.9 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{84}$$

Oefening 8

Vraag

Een mechanisme bestaat uit een arm AB die draait rond A en via de staaf BC een wieltje doet rollen over een horizontaal vlak op $1\ m$ onder A. Bereken de hoeksnelheid van de staaf BC (ten opzichte van AB) en van het wieltje op het ogenblik dat C verticaal onder A passeert. $|AB| = |BC| = 0.5\ m$, $R = 0.2\ m$, $\omega_{AB} = 2\ rad/s$



Oplossing

Als we een bewegend assenstelsel met AB laten meebewegen, is de sleepsnelheid gelijk aan:

$$\begin{aligned} \vec{v_S} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -0.8 & 0 \end{vmatrix} \\ \vec{v_S} &= \begin{pmatrix} 0.8 * \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v_S} &= \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{85}$$

Aangezien de absolute snelheid van C horizontaal is, is dit gelijk aan de sleepsnelheid, en is de relatieve snelheid dus gelijk aan $0\ m/s$.

De hoeksnelheid van de staaf BC is gelijk aan $\frac{\vec{v_{C|B}}}{|BC|}$. Aangezien $\vec{v_{C|B}}$ gelijk is aan de relatieve snelheid van C, is de hoeksnelheid van de staaf BC gelijk aan $0\ rad/s$.

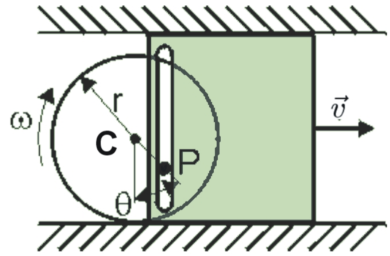
De hoeksnelheid van het wieltje kunnen we uit de absolute snelheid van C en de straal ven het wieltje halen. Dit wordt dus;

$$\begin{aligned} v_C &= R * \omega \\ \omega &= \frac{1.6}{0.2}\ rad/s \\ \omega &= 8\ rad/s \end{aligned} \tag{86}$$

Oefening 9

Vraag

Op het wiel met straal $r = 0.2\ m$ dat zuiver rolt, is een pin P bevestigd op een afstand $0.1\ m$ van het middelpunt C. De pin glijdt in de verticale gleuf die in het blok is aangebracht en brengt zo het blok in beweging. Op een bepaald ogenblik is de snelheid van het middelpunt van het wiel gelijk aan $0.6\ m/s$. De hoek θ is op dat moment $60°$. Hoe groot is dan de snelheid v van het blok? $r = 0.2\ m$, $|CP| = 0.1\ m$, $\theta = 60°$, $v_C = 0.6\ m/s$



Oplossing

De snelheid v van het blok is gelijk aan de horizontale snelheid van de pin P. De snelheid daarvan is gelijk aan:

$$\begin{aligned}
\vec{v_P} &= \vec{v_C} + \vec{v_{P|C}} \\
\vec{v_P} &= \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0.1 * sin(\theta) & -0.1 * cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\
\vec{v_P} &= \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega * 0.1 * cos(60) \\ -\omega * 0.1 * sin(60) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{87}$$

Aangeizen het wiel zuiver rolt kunnen we ω uit de snelheid van C en de straal halen. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned}
v_C &= r * \omega \\
\omega &= \frac{0.6}{0.2}\ rad/s \\
\omega &= 3\ rad/s
\end{aligned} \tag{88}$$

De snelheid van P wordt dan:

$$\begin{aligned}
\vec{v_P} &= \begin{pmatrix} 0.6 - 3 * 0.1 * 0.5 \\ -3 * 0.1 * 0.86 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{v_P} &= \begin{pmatrix} 0.45 \\ -0.26 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{89}$$

De snelheid v van het blok is dus gelijk aan $v_{Px} = 0.45\ m/s$.

Postulaten van Newton

Oefening 1

Vraag

Iemand duwt horizontaal tegen een kast. De massa van de kast is $36\ kg$. De wrijvingscoëfficiënt is $\mu_s = 0.2$. De persoon duwt met een kracht van $40\ N$. De kast komt niet in beweging. Hoe groot is de wrijvingskracht op dat ogenblik?

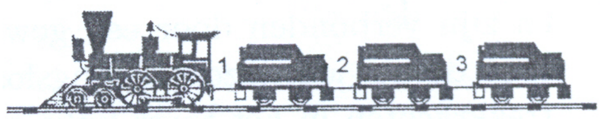
Oplossing

Aangezien de kast niet in beweging komt, wil dat zeggen dat de wrijvingskracht even groot en tegengesteld is aan de kracht die de persoon uitoefent. Dit is dus $40\ N$.

Oefening 2

Vraag

Een locomotief trekt drie wagons met massa's $m_1 = 600\ kg$, $m_2 = 900\ kg$ en $m_3 = 1000\ kg$ voort op een horizontale weg met een versnelling met grootte $a = 2\ m/s^2$. Luchtweerstand en wrijving mogen verwaarloosd worden. De massa van de kabels 1, 2 en 3 zijn te verwaarlozen. Wat zijn de trekkrachten $\vec{S_1}$, $\vec{S_2}$, $\vec{S_3}$ in de kabels 1, 2 en 3?



Oplossing

De trekkrachten kunnen we uit het tweede postulaat van Newton ($\vec{F} = m * \vec{a}$) halen. Voor de trekkracht in kabel 1 wordt dat:

$$\begin{aligned} \vec{S_1} &= (m_1 + m_2 + m_3) * a \\ \vec{S_1} &= 2500 * 2\ N \\ \vec{S_1} &= 5000\ N \end{aligned} \tag{90}$$

Voor de trekkracht in kabel 2 wordt dat:

$$\begin{aligned} \vec{S_2} &= (m_2 + m_3) * a \\ \vec{S_2} &= 1900 * 2\ N \\ \vec{S_2} &= 3800\ N \end{aligned} \tag{91}$$

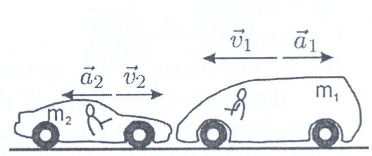
Voor de trekkracht in kabel 3 wordt dat:

$$\begin{aligned} \vec{S_3} &= m_3 * a \\ \vec{S_3} &= 1000 * 2\ N \\ \vec{S_3} &= 2000\ N \end{aligned} \tag{92}$$

Oefening 3

Vraag

Een monovolume met massa $m_1 = 1600\ kg$ en een personenwagen met massa $m_2 = 800\ kg$ botsen frontaal en zonder te remmen met elkaar. De monovolume rijdt $108\ km/u$ en de personenwagen rijdt $72\ km/u$. De twee chauffeurs zijn allebei even zwaar ($m = 70\ kg$) en zitten stevig vast met hun veiligheidsgordel. De wagens bestaan uit hetzelfde materiaal. Men meet de versnelling van de monovolume op het ogenblik van de botsing en die is $a_1 = 10 * g$. Welke van de twee chauffeurs is het best beschermd?



Oplossing

Aangezien de auto's frontaal tegen elkaar botsen, oefent auto 1 een kracht F_{21} uit op auto 2 en oefent auto 2 een kracht F_{12} uit op auto 1. Volgens het derde postulaat zijn deze twee krachten gelijk en tegengesteld. De versnelling van de monovolume is $a_1 = 10 * g$. De grootte van de kracht wordt dus (volgens het tweede postulaat van Newton):

$$\begin{aligned} F &= m_1 * a_1 \\ F &= 1600 * 10 * g \\ F &= 16000 * g \end{aligned} \tag{93}$$

De versnelling van de personenwagen wordt dan:

$$
\begin{aligned}
F &= m_2 * a_2 \\
a_2 &= \frac{16000 * g}{800} \\
a_2 &= 20 * g
\end{aligned}
\tag{94}
$$

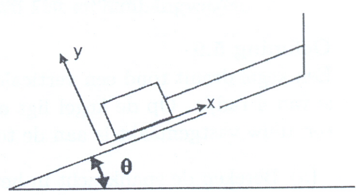
Deze versnelling is dubbel zo groot als die van de monovolume. De chauffeur in de monovolume is dus het best beschermd.

Oefening 4

Vraag

Een blok met massa m rust op een wrijvingsloos oppervlak. Het oppervlak vormt een hoek θ met de horizontale. Het blok is met een touw vastgemaakt aan de wand.

1. Welke krachten werken op het blok? Stel $m = 10\ kg$ en $\theta = 30°$. Welke grootte hebben de krachten op het blok?
2. Veronderstel dat we het touw doorknippen. Wat is dan de versnelling van het blok?



Oplossing - 1

Op het blok werken de volgende krachten:

- de zwaartekracht $\vec{G}$, recht naar onder
- de normaalkracht $\vec{N}$, loodrecht op het oppervlak
- de spankracht $\vec{S}$ in het touw, evenwijdig met het oppervlak

Als we de x-as evenwijdig met het oppervlak stellen (en de y-as daar loodrecht op), kunnen we de krachten vectorieel voorstellen als:

$$\begin{aligned} \vec{G} &= \begin{pmatrix} 10 * g * cos(-120) \\ 10 * g * sin(-120) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -50 \\ -86.7 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{N} &= \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{S} &= \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{95}$$

Aangezien de som van alle krachten 0 moet zijn. krijgen we de volgende vectoriële vergelijking:

$$\begin{gathered} \vec{G} + \vec{N} + \vec{S} = \vec{0} \\ \begin{pmatrix} -50 \\ -86.6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{96}$$

Hieruit kunnen we rechtstreeks de grootte van de normaalkracht en de spankracht aflezen:

- $N = 86.6\ N$
- $S = 50\ N$

Oplossing - 2

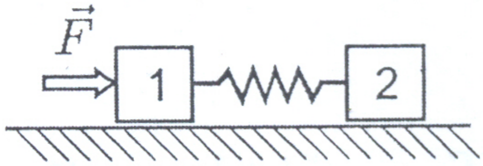
Als we het touw doorknippen krijgt het blok een versnelling volgens de negatieve x-as. De kracht die hiermee gepaard gaat is even groot als de spankracht in het touw voor het doorknippen. De grootte van de versnelling wordt dan (volgens het tweede postulaat van Newton):

$$\begin{aligned} F &= m * a \\ a &= \frac{50}{10}\ m/s^2 \\ a &= 5\ m/s^2 \end{aligned} \tag{97}$$

Oefening 5

Vraag

Een ideale veer (veerconstante k, onbelaste lengte l_0) verbindt twee massa's m_1 en m_2 die zonder wrijving over een horizontaal vlak bewegen. Op massa m_1 laat men de horizontale kracht $\vec{F}$ aangrijpen die van 0 aangroeit tot $100\ N$ en dan constant blijft, zodat de massa's versnellen zonder te trillen. Wat is de lengte van de veer bij de constante kracht van $100\ N$? $m_1 = 9\ kg$, $m_2 = 1\ kg$, $l_0 = 1\ m$, $k = 20\ N/m$



Oplossing

Uit de kracht die op het geheel werkt, kunnen we de versnelling van het geheel halen. Dit wordt:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m * \vec{a} \\ \vec{a} &= \frac{100}{9+2}\ m/s^2 \vec{e_x} \\ \vec{a} &= 10\ m/s^2 \vec{e_x} \end{aligned} \tag{98}$$

Als we de opstelling in zijn onderdelen vrijmaken geeft dat op massa 2:

- het gewicht $\vec{G}$
- de normaalkracht $\vec{N}$
- de veerkracht $\vec{F_v}$

Aangezien het gewicht en de normaalkracht elkaar opheffen, wil dat zeggen dat de veerkracht de enige kracht is die voor de versnelling zorgt:

$$\begin{aligned} F_v &= m_2 * a_2 \\ F_v &= 1 * 10\ kg = m/s^2 \\ F_v &= 10\ N \end{aligned} \tag{99}$$

De lengte van de veer bij de constante kracht $\vec{F}$ kunnen we dan halen uit de volgende formule:

$$F_v = k * (l_0 - l) \tag{100}$$

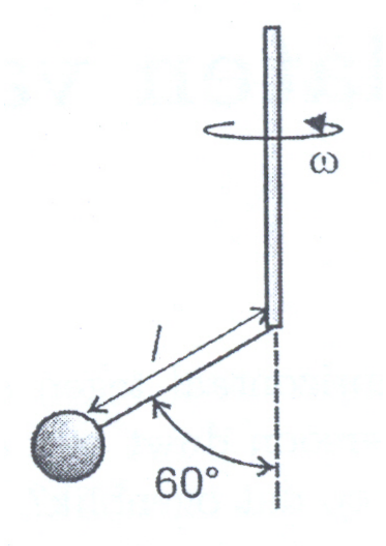
Voor deze veer wordt dat:

$$\begin{aligned} F_v &= k * (l_0 - l) \\ 10 &= 20 * (1 - l)\ N \\ l &= 0.5\ m \end{aligned} \tag{101}$$

Oefening 6

Vraag

Een kogel (massa $m = 5\ kg$) hangt aan een touwtje met lengte $l = 20\ cm$. Iemand brengt de kogel aan het draaien rond een verticale as. Met welke hoeksnelheid ω moet hij de kogel doen draaien opdat het touw een hoek van $60°$ zou maken met de verticale en hoe groot is dan de spankracht in het touw?



Oplossing

Op de kogel werken de volgende krachten:

- het gewicht $\vec{G}$
- de spankracht in het touw $\vec{S}$

Aangezien de resulterende kracht gelijk moet zijn aan de massa maal de versnelling. geeft dat de volgende vectoriële vergelijking:

$$\vec{G} + \vec{S} = m * \vec{a_n}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S * cos(30) \\ S * sin(30) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 * a_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (102)$$

Hieruit kunnen we de grootte S van de spankracht en a_n van de normaalversnelling halen. Voor S wordt dit:

$$\begin{aligned} -50 + S * sin(30) &= 0 \\ S &= 100\ N \end{aligned} \quad (103)$$

En voor a_n:

$$
\begin{aligned}
5 * a_n + S * cos(30) = 0 \\
a_n = |-17.32|\ m/s^2 \\
a_n = 17.32\ m/s^2
\end{aligned}
\tag{104}
$$

Om de grootte van de hoeksnelheid ω te weten, moeten we ook nog de straal van de cirkel waarin de baan van de kogel ligt, weten. Dit wordt:

$$
\begin{aligned}
R = l * cos(30) \\
R = 0.17\ m
\end{aligned}
\tag{105}
$$

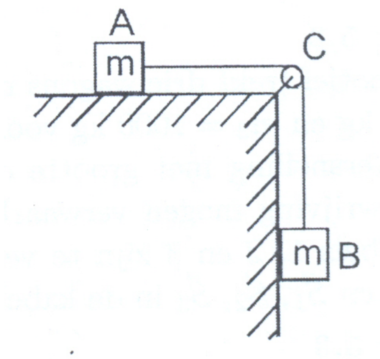
De hoeksnelheid ω wordt dan:

$$
\begin{aligned}
a_n = R * \omega^2 \\
\omega = \sqrt{\frac{17}{0.17}}\ rad/s \\
\omega = 10\ rad/s
\end{aligned}
\tag{106}
$$

Oefening 7

Vraag

De blokken A en B hebben massa's m_A en m_B, $m_A = 2 * m_B$, en zijn verbonden door een gewichtsloos soepel koord dat over een gewichtsloze wrijvingsloze katrol in C loopt. De trekkrachten in het touw links en rechts van de katrol zijn in grootte gelijk. A glijdt wrijvingsloos over het horizontale tafelblad. Bepaal de versnellingen van A en B en de grootte van de trekkracht in het touw.



Oplossing

De krachten die in de onderdelen werken, zijn als volgt. Voor A:

- het gewicht $\vec{G_A}$
- de normaalkracht $\vec{N_A}$

- de trekkracht $\vec{F}$ in het touw

En voor B:

- het gewicht $\vec{G_B}$
- de trekkracht $\vec{F'}$ (waarvan de grootte gelijk is aan F) in het touw

De versnelling van A is gelijk aan die van B. Dit geeft dus voor A:

$$\begin{aligned} \vec{F} + \vec{G} + \vec{N} &= m_A * \vec{a} \\ \vec{F} &= 2 * m_B * \vec{a} \end{aligned} \tag{107}$$

En voor B:

$$\begin{aligned} \vec{F'} + \vec{G} &= m_B * \vec{a} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{pmatrix} &= m_B * \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \\ 2 * m_B * a - 10 * m_B &= -m_B * a \\ 3 * m_B * a &= 10 * m_B \\ a &= \frac{10}{3}\ m/s^2 \end{aligned} \tag{108}$$

De grootte F van de trekkracht in het touw wordt dan:

$$\begin{aligned} F &= 2 * m_B * a \\ F &= 6.66 * m_B \end{aligned} \tag{109}$$

Oefening 8

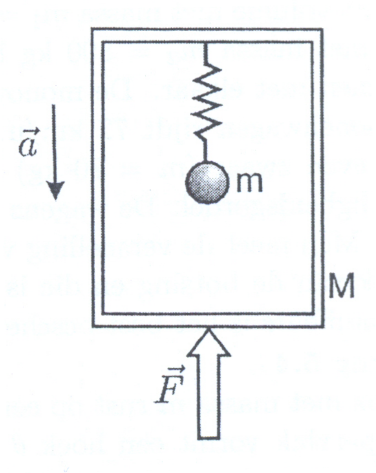
Vraag

Een lift met massa M valt verticaal. Zij wordt hierbij afgeremd door een constante kracht $\vec{F}$. In deze lift is een massa m opgehangen aan een veer. In onbelaste toestand heeft deze veer een lengte l_0, terwijl ze met de massa eraan gehangen in de stilstaande lift een lengte l_1 heeft. Bepaal de lengte l die de veer in de nieuwe evenwichtstoestand aanneemt zolang de kracht $\vec{F}$ werkt. $M = 99\ kg$, $m = 1\ kg$, $l_0 = 0.2\ m$, $l_1 = 0.25\ m$, $F = 40\ kg$

Oplossing

Allereerst moeten we de versnelling van het geheel berekenen. Aangezien op de lift de volgende krachten inwerken:

- de kracht $\vec{F}$



- het gewicht $\vec{G}$ van het geheel $M + m$

wordt dat:

$$\begin{aligned} \vec{a_{tot}} &= \vec{a} + \vec{F}/m \\ a_{tot} &= -10 + \frac{400}{100}\ m/s^2 \\ a_{tot} &= -6\ m/s^2 \end{aligned} \tag{110}$$

Om de lengte van de veer in de nieuwe evenwichtstoestand te berekenen, hebben we de veerconstante k nodig. Deze halen we uit l_0 en l_1:

$$\begin{aligned} k * (l_1 - l_0) &= F_v \\ k * 0.05\ m &= 1 * 10\ N \\ k &= 200\ M/m \end{aligned} \tag{111}$$

Op de massa m werken de volgende krachten:

- het gewicht $\vec{G_m}$
- de veerkracht $\vec{F_v}$

Uit het feit dat de resulterende kracht gelijk is aan het product van de massa met de versnelling, kunnen we hieruit de grootte van de veerkracht halen:

$$\begin{gathered} \vec{G_m} + \vec{F_v} = m * \vec{a} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 * 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ F_v = 4\ N \end{gathered} \tag{112}$$

De lengte van de veer wordt dan:

$$\begin{aligned} k * (l - l_0) &= F_v \\ 200 * (l - 0.2) &= 4 \\ l &= 0.02 + 0.2\ m \\ l &= 0.22\ m \end{aligned} \tag{113}$$

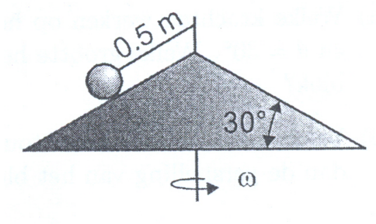
Oefening 9

Vraag

Een kegel draait rond een verticale as met een hoeksnelheid ω van $4\ rad/s$. Op de kegel ligt een puntmassa m die met een touw vastgemaakt is aan de top van de kegel.

1. Bereken de spankracht in het touw bij $\omega = 4\ rad/s$.
2. Bij welke hoeksnelheid zal de puntmassa loskomen van de kegel?

$m = 750\ g$, $l = 0.5\ m$, $\theta = 30°$



Oplossing - 1

Op de kogel werken de volgende krachten in:

- het gewicht $\vec{G}$
- de normaalkracht $\vec{N}$
- de spankracht $\vec{S}$

De resulterende kracht is gelijk aan het product van de massa met de versnelling. De versnelling $\vec{a}$ kunnen we uit de hoeksnelheid halen:

$$\begin{aligned} a &= R * \omega^2 \\ a &= 0.5 * cos(30) * 4^2 \\ a &= 6.93\ m/s^2 \end{aligned} \tag{114}$$

Als we de x-as evenwijdig laten lopen met het touw en de y-as daar loodrecht op wordt de vectoriële vergelijking van de versnelling dan:

$$\begin{gathered} \vec{G} + \vec{N} + \vec{S} = m * \vec{a} \\ \begin{pmatrix} 7.5 * cos(-120) \\ 7.5 * sin(-120) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 * 6.9 * cos(-30) \\ 0.75 * 6.9 * sin(-30) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3.75 \\ -6.5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ -2.6 \\ 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{115}$$

De grootte S van de spankracht wordt dan:

$$\begin{aligned} S &= 4.5 + 3.75\ N \\ S &= 8.25\ N \end{aligned} \tag{116}$$

Oplossing - 2

Als de puntmassa loskomt van de kegel, wil dat zeggen dat de normaalkracht wegvalt. De vectoriële vergelijking van de versnelling wordt dan:

$$\vec{G} + \vec{S} = m * \vec{a}$$
$$\begin{pmatrix} 7.5 * cos(-120) \\ 7.5 * sin(-120) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 * a * cos(-30) \\ 0.75 * a * sin(-30) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{117}$$

De grootte a van de versnelling wordt dan:

$$\begin{aligned} -6.5 &= -0.375 * a \\ a &= 17.33\ m/s^2 \end{aligned} \tag{118}$$

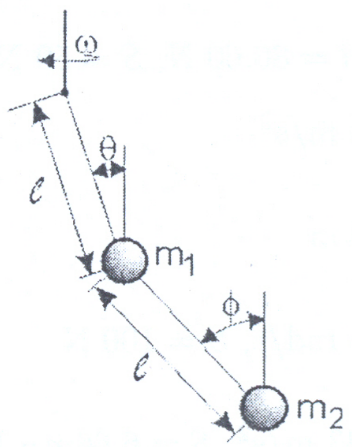
De grootte van de hoeksnelheid wordt dan:

$$\begin{aligned} a &= R * \omega^2 \\ \omega &= \sqrt{\frac{17.33}{0.5 * cos(30)}} \\ \omega &= 6.33\ rad/s \end{aligned} \tag{119}$$

Oefening 10

Vraag

Twee puntmassa's m_1 en m_2 zijn met behulp van staven (beide met lengte $0.5\ m$) scharnierend aan mekaar vastgemaakt. Het geheel draait rond een verticale as met hoeksnelheid ω. men stelt vast de de hoeken θ en ϕ respectievelijk gelijk zijn aan $30°$ en $45°$. Bepaal ω en de verhouding $\frac{m_1}{m_2}$.



Oplossing

Op massa m_1 werken de volgende krachten:

- de kracht $\vec{S_1}$ volgens de staaf naar linksboven
- de kracht $-\vec{S_2}$ volgens de staaf naar rechtsonder
- het gewicht $\vec{G_1}$

De grootte a_1 van de versnelling van m_1 is gelijk aan de straal van de cirkel maal de hoeksnelheid in het kwadraat. Deze staat loodrecht op de raaklijn aan de cirkel (dus enkel volgens de x-as). Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} a_1 &= R_1 * \omega^2 \\ a_1 &= 0.5 * sin(30) * \omega^2 \\ a_1 &= 0.025 * \omega^2 \end{aligned} \tag{120}$$

Volgens het tweede postulaat van Newton wordt dit dus:

$$\begin{gathered} \vec{S_1} - \vec{S_2} + \vec{G_1} = m_1 * \vec{a_1} \\ \begin{pmatrix} -S_1 * sin(30) \\ S_1 * cos(30) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_2 * cos(45) \\ -S_2 * sin(45) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -10 * m_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_1 * 0.025 * \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{121}$$

Op massa m_2 werken de volgende krachten:

- de kracht $\vec{S_2}$ volgens de staaf naar rechtsboven
- het gewicht $\vec{G_2}$

De grootte a_2 van de versnelling van m_2 is gelijk aan de straal van de cirkel maal de hoeksnelheid in het kwadraat. Deze staat loodrecht op de raaklijn aan de cirkel (dus enkel volgens de x-as). Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} a_2 &= R_2 * \omega^2 \\ a_2 &= 0.5 * (sin(30) + sin(45)) * \omega^2 \\ a_2 &= 0.6 * \omega^2 \end{aligned} \tag{122}$$

Volgens het tweede postulaat van Newton wordt dit dus:

$$\begin{gathered} \vec{S_2} + \vec{G_2} = m_2 * \vec{a_2} \\ \begin{pmatrix} -S_2 * cos(45) \\ S_2 * sin(45) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -10 * m_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_2 * 0.6 * \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{123}$$

Als we de x-componenten van 121 en 123 door elkaar delen, geeft dat:

$$
\begin{aligned}
\frac{-S_1 * sin(30) + S_2 * cos(45)}{-S_2 * cos(45)} &= \frac{-m_1 * 0.025 * \omega^2}{-m_2 * 0.6 * \omega^2} \\
\frac{m_1}{m_2} &= \frac{-(10 * m_1 + 10 * m_2) * tan(30) + 10 * m_2}{-10 * m_2} * \frac{0.6}{0.025} \\
\frac{m_1}{m_2} &= 2.59
\end{aligned} \tag{124}
$$

De hoeksnelheid ω is dan gelijk aan:

$$
\begin{aligned}
-m_1 * 0.025 * \omega^2 &= -S_1 * sin(30) + S_2 * cos(45) \\
\omega^2 &= -\frac{10 * m_2 - 10 * m_1 * tan(30) - 10 * m_2 * tan(30)}{m_1 * 0.025} \\
\omega &= \sqrt{-40 * \frac{m_2}{m_1} + 40 * tan(30) + 40 * \frac{m_2}{m_1} * tan(30)} \\
\omega &= 4.07 \ rad/s
\end{aligned} \tag{125}
$$

Impulswet - Energiewet

Oefening 1

Vraag

Welke stoot heeft een tennisbal nodig opdat deze, vertrekkend uit rust, kan weggeslagen worden met een snelheid van $40\ m/s$? De massa van de tennisbal is $0.06\ kg$. Als de contacttijd van de bal met de racket $5 * 10^{-3}\ s$ is, wat is dan de gemiddelde kracht op de bal?

Oplossing

Volgens de impulswet is $\vec{N} = \vec{p_{II}} - \vec{p_I}$. Voor de tennisbal wordt dat:

$$\begin{aligned} N &= p_{II} - p_I \\ N &= m * v_{II} - m * v_I \\ N &= 0.06 * 40 - 0.06 * 0\ Ns \\ N &= 2.4\ Ms \end{aligned} \tag{126}$$

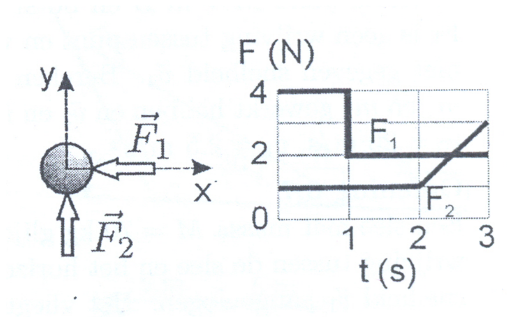
Aangezien $N = \int_I^{II} F dt$ geldt volgens de middelwaardestelling dat $N = F_{gem} * \Delta t$. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} N &= F_{gem} * \Delta t \\ F_{gem} &= \frac{2.4}{5 * 10^{-3}}\ N \\ F_{gem} &= 480\ N \end{aligned} \tag{127}$$

Oefening 2

Vraag

Een puntmassa van $0.5\ kg$ beweegt op $t = 0$ met een snelheid van $10\ m/s$ in de x-richting. Twee krachten $\vec{F_1}$ en $\vec{F_2}$, waarvan de grootte varieert in de tijd volgens de aangegeven grafiek, werken erop in. Welke stoot werkte op de puntmassa? Bepaal ook de eindsnelheid (op $t = 3\ s$) van de puntmassa.



Oplossing

De totale stoot is de integraal van de som van de krachten over de tijd. Aangezien $\vec{F_1}$ en $\vec{F_2}$ beide stuksgewijs continue functies van de tijd zijn, kunnen we ze als volgt voorstellen:

$$\vec{F_1}(t) = \begin{cases} 4 & \text{als } t \in [0,1] \\ 2 & \text{als } t > 1 \end{cases}$$
$$\vec{F_2}(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } t \in [0,2] \\ 2*t-3 & \text{als } t > 2 \end{cases} \tag{128}$$

Als we deze functies integreren over de tijd geeft dat de volgende waarden. Voor $\vec{F_1}$:

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_0^3 F_1 \\ N_1 &= (4*1-4*0)+(2*3-2*1) \\ N_1 &= 8\ Ns \end{aligned} \tag{129}$$

En voor $\vec{F_2}$:

$$\begin{aligned} N_2 &= \int_0^3 F_2 \\ N_2 &= (1*2-1*0)+((3^2-3*3)-(2^2-3*2)) \\ N_2 &= 4\ Ns \end{aligned} \tag{130}$$

Aangezien $\vec{F_1}$ volgens de negatieve x-as ligt, en $\vec{F_2}$ volgens de positieve y-as, geeft dat voor de totale stoot:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= -N_1 * \vec{e_x} + N_2 * \vec{e_y} \\ \vec{N} &= -8 * \vec{e_x} + 4 * \vec{e_y} \end{aligned} \tag{131}$$

Om de eindsnelheid te bepalen, kunnen we de volgende formule gebruiken:

$$\vec{N} = \vec{p_{II}} - \vec{p_I} \tag{132}$$

Als we dit invullen, geeft dat:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = m * \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 * 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{-8+5}{m} \\ &= \frac{-3}{0.5} \\ &= -6\ m/s \\ v_y &= \frac{4}{m} \\ &= \frac{4}{0.5} \\ &= 8\ m/s \end{aligned} \tag{133}$$

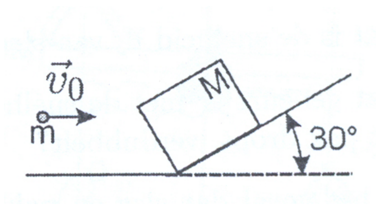
De eindsnelheid is dus gelijk aan:

$$\vec{v} = -6 * \vec{e_x} + 8 * \vec{e_y}\ m/s \tag{134}$$

Oefening 3

Vraag

Een blok met massa M ligt in rust op een helling. Tussen het blok en de helling is geen wrijving. Er wordt een puntmassa m in het blok geschoten met snelheid $\vec{v_0}$. De botsing tussen het blok en de puntmassa duurt zeer kort en de puntmassa dringt in het blok en blijft erin vastzitten. Bepaal de snelheid waarmee het blok na de botsing beweegt. $m = 0.03\ kg$, $M = 2\ kg$, $v_0 = 100\ m/s$, $\theta = 30°$



Oplossing

De snelheid van het blok kunnen we uit de eerste behoudswet (behoud van impuls) halen. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} m * \vec{v_0} &= (m+M) * \vec{v} \\ 0.03 * 100 * cos(30) &= 2.03 * v \\ v &= 1.28\ m/s \end{aligned} \tag{135}$$

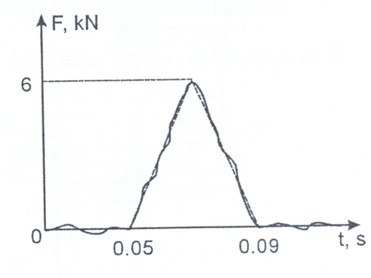
Aangezien de snelheid van het blok evenwijdig is met de helling wordt dat:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 1.28 * cos(30) * \vec{e_x} + 1.28 * sin(30) * \vec{e_y} \\ \vec{v} &= 1.11 * \vec{e_x} + 0.64 * \vec{e_y} \end{aligned} \tag{136}$$

Oefening 4

Vraag

Een voorwerp van $5\ kg$ glijdt zonder wrijving over een horizontaal oppervlak met een snelheid van $20\ m/s$. Het krijgt een slag tegen zijn beweging in waarvan de kracht kan benaderd worden door de stippellijn in de grafiek. Welke stoot werkte op het voorwerp. Bereken de eindsnelheid van het voorwerp.



Oplossing

De grafiek van de kracht als functie van de tijd is ongeveer een driehoek. Als we deze functie willen integreren over de tijd om de grootte van de totale stoot te weten, moeten we de oppervlakte van deze driehoek bepalen:

$$
\begin{aligned}
N &= \int_{0.05}^{0.09} F dt \\
N &= \frac{(0.09 - 0.05) * 6000}{2} \\
N &= 120\ Ms
\end{aligned} \tag{137}
$$

Deze stoot is gelijk aan de verandering van impuls. Dat wordt dus:

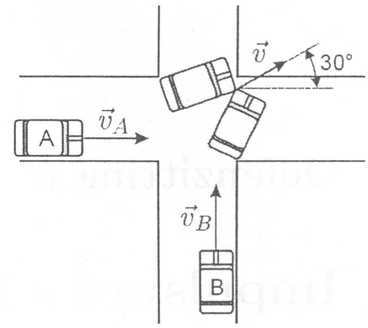
$$
\begin{aligned}
\vec{N} &= \vec{p_{II}} - \vec{p_I} \\
\begin{pmatrix} -120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m * v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
v &= \frac{-120 + 100}{5} \\
v &= -4\ m/s
\end{aligned} \tag{138}
$$

De eindsnelheid van het voorwerp is dus $4\ m/s$ in de tegengestelde richting.

Oefening 5

Vraag

Twee auto's A en B botsen op een beijzeld kruispunt. Ze glijden samen weg in een richting zoals aangegeven op de figuur. De verhouding $\frac{m_A}{m_B} = 1.2$. Bereken de verhouding $\frac{v_A}{v_B}$. Op het kruispunt ondervinden de auto's geen wrijving.



Oplossing

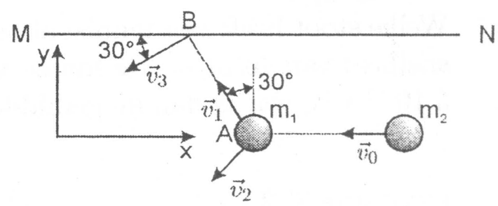
Aangezien er geen uitwendige krachten op het systeem inwerken, kunnen we de wet van behoud van impuls gebruiken. Dit wordt dsu:

$$\begin{aligned}
m_A * \vec{v_A} + m_B * \vec{v_B} &= (m_A + m_B) * \vec{v} \\
\begin{pmatrix} 1.2 * m_B * v_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m_B * v_B \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2.2 * m_B * v * cos(30) \\ 2.2 * m_B * v * sin(30) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\frac{1.2 * m_B * v_A}{m_B * v_B} &= \frac{2.2 * m_B * v * cos(30)}{2.2 * m_B * v * sin(30)} \\
\frac{1.2 * v_A}{v_B} &= cot(30) \\
\frac{v_A}{v_B} &= \frac{cot(30)}{1.2} \\
\frac{v_A}{v_B} &= 1.44
\end{aligned} \tag{139}$$

Oefening 6

Vraag

Twee puntmassa's m_1 en m_2 kunnen wrijvingsloos bewegen over een horizontaal vlak, hier samenvallend met het vlak van de figuur. In het begin ligt m_1 in rust in positie A. Punt m_2 botst ertegen met snelheid $\vec{v_0}$ zoals aangegeven. Na de botsing krijgt m_1 een snelheid $\vec{v_1}$. Dit punt botst tegen een verticale wand MN in B en botst terug zoals aangegeven. Er is geen wrijving tussen punt en wand. Punt m_2 krijgt de niet gegeven snelheid $\vec{v_2}$. Bereken alle stoten, die in A op m_1 en m_2 gewerkt hebben en $\vec{v_2}$ en $\vec{v_3}$. $m_1 = 20\ g$, $m_2 = 5\ g$, $v_0 = 20\ m/s$, $v_1 = 2.5\ m/s$



Oplossing

Aangezien er geen uitwendige krachten op dit systeem inwerken, kunnen we de snelheid $\vec{v_2}$ uit de wet van behoud van impuls halen. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned}
\vec{p_{II}} &= \vec{p_I} \\
m_1 * \vec{v_1} + m_2 * \vec{v_2} &= m_2 * \vec{v_0} \\
\begin{pmatrix} 2.5 * 0.020 * cos(120) \\ 2.5 * 0.020 * sin(120) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 * v_{2x} \\ 5 * v_{vy} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_{2x} &= \frac{-0.100 + 0.050 * 0.5}{0.005} \\
&= -15\ m/s \\
v_{2y} &= \frac{0.050 * \sqrt{3}/2}{0.005} \\
&= 5 * \sqrt{3}\ m/s
\end{aligned} \tag{140}$$

Dit is dus:

$$\vec{v_2} = -15 * \vec{e_x} + 5 * \sqrt{3} * \vec{e_y} \tag{141}$$

De stoot die in A op m_1 werkt, is dan:

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \vec{p_{II}} - \vec{p_I} \\
\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -m_1 * v_1 * cos(60) \\ m_1 * v_1 * sin(60) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{N} &= -0.025 * \vec{e_x} + 0.025 * \sqrt{3} * \vec{e_y}
\end{aligned} \tag{142}$$

De snelheid $\vec{v_3}$ wordt dan:

$$\begin{aligned}
\vec{p_{III}} &= \vec{p_{II}} \\
\begin{pmatrix} -0.020 * v_3 * cos(30) \\ -0.020 * v_3 * sin(30) \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -0.025 \\ 0.025 * \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_3 &= \frac{-0.025}{-0.02 * cos(30)} \\
v_3 &= 1.44\ m/s
\end{aligned} \tag{143}$$

De snelheid $\vec{v_3}$ is dus gelijk aan:

$$\begin{aligned}
\vec{v_3} &= -1.44 * cos(30) * \vec{e_x} - 1.44 * sin(30) * \vec{e_y} \\
\vec{v_3} &= -1.25 * \vec{e_x} - 0.72 * \vec{e_y}
\end{aligned} \tag{144}$$

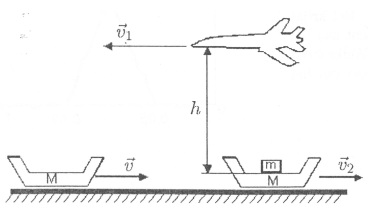
Oefening 7

Vraag

Een slee met massa $M = 70\ kg$ glijdt met een constante snelheid $\vec{v}$ over een horizontaal vlak. Er is geen wrijving tussen de slee en het horizontaal vlak. Uit de tegenovergestelde richting komt een vliegtuig met een snelheid $\vec{v_1}$ aangevlogen. Het vliegtuig dropt een pakketje met massa $m = 3\ kg$, dat op de slee valt en op de slee blijft liggen.

1. Wat is de snelheid $\vec{v_2}$ van slee en pakketje, nadat het pakketje op de slee gedropt is?
2. Wat gebeurt er met de snelheid $\vec{v_2}$ van slee en pakketje als de hoogte h van waarop het vliegtuig het pak dropt, verdubbelt?
3. in het geval dat slee en pakketje stilstaan na de botsing van het pakketje op de slee ($\vec{v_2} = 0$), wat was dan de verhouding van de grootte van de snelheid van het vliegtuig tot de grootte van de snelheid van de slee ($\frac{\vec{v_1}}{\vec{v}}$)?

$v = 4\ m/s$ en $v_1 = 70\ m/s$



Oplossing - 1

Op tijdstip $t = I$ (voor dat het pakketje de slee raakt) geldt er voor de impuls het volgende:

$$\begin{aligned} \vec{p_I} &= M * \vec{v} + m * \vec{v_1} \\ p_{Ix} &= 70 * 4 - 3 * 70\ Ns\ \vec{e_x} \\ p_{Ix} &= 70\ Ns\ \vec{e_x} \end{aligned} \tag{145}$$

Op tijdstip $t = II$ (wanneer het pakketje op de slee ligt) geldt er voor de impuls het volgende:

$$\begin{aligned} \vec{p_{II}} &= (M + m) * \vec{v_2} \\ p_{IIx} &= 73 * v_2\ Ns\ \vec{e_x} \end{aligned} \tag{146}$$

Uit de wet van behoud van impuls geldt dat p_I en p_{II} aan elkaar gelijk moeten zijn. Dit geeft dus:

$$\begin{aligned} p_{Ix} &= p_{IIx} \\ 70\ Ns &= 73 * v_2\ Ns \\ v_2 &= 0.96\ m/s\ \vec{e_x} \end{aligned} \tag{147}$$

Oplossing - 2

Aangezien enkel de horizontale snelheid van het pakketje invloed heeft op de snelheid van de slee (die horizontaal beweegt), heeft de hoogte h geen invloed op de snelheid $\vec{v_2}$ van de slee.

Oplossing - 3

Als v_2 gelijk is aan 0, wil dat zeggen dat p_{II} en dus ook p_I gelijk moet zijn aan 0. Dit geeft dus:

$$\begin{aligned} p_I = 0 &= M * v - m * v_1 \\ M * v &= m * v_1 \\ \frac{v_1}{v} &= \frac{70}{3} \\ \frac{v_1}{v} &= 23.33 \end{aligned} \tag{148}$$

Oefening 8

Vraag

Een man in een stil liggen de kano gooit een zware zak weg volgens de lengteas van de boot, onder een hoek van $30°$ met de horizontale en met een snelheid van $3\ m/s$. De zak weegt $15\ kg$, de ma $75\ kg$, de kano $30\ kg$. Bereken de horizontale snelheid van de kano (in de veronderstelling dat de kano zonder wrijving kan bewegen op het water) als de gegeven $3\ m/s$ de

1. grootte van de absolute snelheid van de zak is.
2. grootte van de snelheid van de zak tegenover de kano is.

Oplossing - 1

Op tijdstip $t = I$ (voordat de man de zak gooit), is de totale impuls gelijk aan $0\ Ns$ (alles ligt stil). Op tijdstip $t = II$ (nadat de man de zak gegooid heeft), is de totale impuls gelijk aan:

$$\begin{aligned} p_{II} &= (m_{kano} + m_{man}) * v_1 + m_{zak} * v_2 * cos(30) \\ p_{II} &= 105 * v_1 + 45 * \frac{\sqrt{3}}{2}\ Ns \end{aligned} \tag{149}$$

Volgens de wet van behoud van impuls is p_{II} gelijk aan p_I en dus gelijk aan $0\ Ns$. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} p_{II} = 0 &= 105 * v_1 + 45 * \frac{\sqrt{3}}{2} \\ v_1 &= \frac{-45 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{105}\ m/s \\ v_1 &= -0.37\ m/s \end{aligned} \tag{150}$$

De horizontale snelheid van de kano is dus gelijk aan $\vec{v_1} = -0.37\ m/s\ \vec{e_x}$.

Oplossing - 2

Als de snelheid van de zak ten opzichte van de kano gelijk is aan $3\ m/s$, dan is de absolute snelheid van de zak gelijk aan $v_2 = v_{rel} + v_1 = 3 * cos(30) + v_1$. De totale impuls op tijdstip $t = I$ is weer gelijk aan $0\ Ns$. Op tijdstip $t = II$ is de totale impuls gelijk aan:

$$\begin{aligned} p_{II} &= (m_{kano} + m_{man}) * v_1 + m_{zak} * (3 * cos(30) + v_1) \\ p_{II} &= 105 * v_1 + 15 * v_1 + 45 * \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{151}$$

Volgens de wet van behoud van impuls is p_{II} gelijk aan p_I en dus gelijk aan $0\ Ns$. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} p_{II} = 0 &= 105 * v_1 + 15 * v_1 + 45 * \frac{\sqrt{3}}{2} \\ v_1 &= \frac{-45 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{105 + 15}\ m/s \\ v_1 &= -0.325\ m/s \end{aligned} \tag{152}$$

De horizontale snelheid van de kano is dus gelijk aan $\vec{v_1} = -0.325\ m/s\ \vec{e_x}$.

Oefening 9

Vraag

Twee mannen (beide met massa $80\ kg$) staan op een vlot (massa $300\ kg$) dat stilligt op het water. Ze duiken er na elkaar af in dezelfde richting met een horizontale snelheid van $3\ m/s$ tegenover het vlot. Bereken de eindsnelheid van het vlot in de veronderstelling dat het zonder horizontale weerstand kan bewegen.

Oplossing

Op tijdstip $t = I$ (wanneer beide mannen nog op het vlot staan), is de totale impuls gelijk aan $0\ Ns$ (er beweegt niets). Op tijdstip $t = II$ (wanneer de eerste man eraf duikt), wordt de totale impuls gelijk aan:

$$\begin{aligned} p_{II} &= (m_{vlot} + m_{man}) * v_1 + m_{man} * v_{abs} \\ p_{II} &= 380 * v_1 + 80 * (3 + v_1)\ Ns \\ p_{II} &= 460 * v_1 + 240\ Ns \end{aligned} \tag{153}$$

Volgens de wet van behoud van impuls is p_{II} gelijk aan p_I en dus gelijk aan $0\ Ns$. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} p_{II} = 0 &= 460 * v_1 + 240\ Ns \\ v_1 &= \frac{-240}{460}\ m/s \\ v_1 &= -0.52\ m/s \end{aligned} \tag{154}$$

De impuls p_{man} van de man die van het vlot springt is dus gelijk aan $80 * (3 + v_1) = 198\ Ns$.

Op tijdstip $t = III$ (wanneer de tweede man eraf duikt), wordt de totale impuls gelijk aan:

$$\begin{aligned} p_{III} &= m_{vlot} * v_2 + m_{man} * v_{abs} + p_{man} \\ p_{III} &= 300 * v_2 + 80 * (3 + v_2) + 198\ Ns \\ p_{III} &= 380 * v_2 + 438\ Ns \end{aligned} \tag{155}$$

Volgens de wet van behoud van impuls is p_{II} gelijk aan p_I en dus gelijk aan $0\ Ns$. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} p_{III} = 0 &= 380 * v_2 + 438\ Ns \\ v_2 &= \frac{-438}{380}\ m/s \\ v_2 &= -1.15\ m/s \end{aligned} \tag{156}$$

De eindsnelheid van het vlot is dus gelijk aan $-1.15\ m/s\ \vec{e_x}$.

Oefening 11

Vraag

Gegeven drie situaties. In de eerste situatie staat een persoon met massa M op een stilliggend vlot met massa $3M$. Op 5 meter van de persoon bevindt zich in het water een (vaste) boei met een kat erop. De persoon op het vlot begint naar de kat toe te lopen met een snelheid v van $1\ m/s$ tegenover het vlot. In de tweede situatie staat er nog iemand anders op de andere kant van het vlot. Deze persoon heeft een massa $2M$ en staat ook op een afstand van 5 meter van de boei (zie figuur). Deze persoon heeft echter geen zin om naar de kat toe te lopen. In de derde situatie staan dezelfde personen op het vlot, maar ditmaal bewegen ze allebei in de richting van de kat, mat een snelheid v van $1\ m/s$ tegenover het vlot. Rangschik de drie situaties volgens de tijd die nodig is om de kat te bereiken. In de drie situaties is er geen wrijving tussen het vlot en het water.

Oplossing

Alle drie de situaties vertrekken vanuit rust, dus de initiële impuls is steeds gelijk aan $0\ Ns$. Er werken geen uitwendige krachten op het systeem in, dus kunnen we de wet van behoud van impuls gebruiken.

In de eerste situatie heeft de man een relatieve snelheid van $1\ m/s$. Het vlot met de man heeft een absolute snelheid van v_1. Als we dit invullen in de wet van behoud van impuls (in de horizontale richting) geeft dat:

$$\begin{aligned} p_I &= p_{II} \\ 0 &= M * v + 4 * M * v_1 \\ v_1 &= \frac{-1}{4}\ m/s \end{aligned} \tag{157}$$

De absolute snelheid van de man is dan de som van zijn relatieve snelheid en de snelheid van het vlot. Dit is dus:

$$\begin{aligned} v_{man} &= v + v_1 \\ v_{man} &= 0.75\ m/s \end{aligned} \tag{158}$$

In de tweede situatie is het enige echte verschil met de eerste situatie dat het vlot verzwaard is met $2M$. Dit geeft dus:

$$\begin{aligned} p_I &= p_{II} \\ 0 &= M * v + (4+2) * M * v_2 \\ v_2 &= \frac{-1}{6}\ m/s \end{aligned} \tag{159}$$

De absolute snelheid van de man is dan de som van zijn relatieve snelheid en de snelheid van het vlot. Dit is dus:

$$\begin{aligned} v_{man} &= v + v_2 \\ v_{man} &= 0.83\ m/s \end{aligned} \tag{160}$$

In de derde situatie heeft ook de tweede man een relatieve snelheid $-v$ tegenover het vlot. De totale massa is dezelfde als in de tweede situatie. Dit geeft dus:

$$\begin{aligned} p_I &= p_{II} \\ 0 &= M * v + 2 * M * (-v) + (6) * M * v_3 \\ v_3 &= \frac{1}{6}\ m/s \end{aligned} \tag{161}$$

De absolute snelheid van de man is dan de som van zijn relatieve snelheid en de snelheid van het vlot. Dit is dus:

$$\begin{aligned} v_{man} &= v + v_3 \\ v_{man} &= 1.17\ m/s \end{aligned} \tag{162}$$

De tijd $t = \frac{x}{v_{man}}$ die nodig is om de kat te bereiken, is dan in elke situatie gelijk aan:

1. $t = \frac{5}{0.75} = 6.67\ s$
2. $t = \frac{5}{0.83} = 6\ s$
3. $t = \frac{5}{1.17} = 4.29\ s$

Oefening 16

Vraag

Een blok van $3\ kg$ wordt uit rust losgelaten in A en glijdt zonder wrijving langs een staaf in een verticaal vlak. De veer heeft een veerconstante van $350\ N/m$ en een rustlengte van $0.6\ m$. Bepaal de snelheid van het blok als het in B passeert.

Oplossing

Op tijdstip $T = I$ (wanneer het systeem nog in rust is) is de totale energie gelijk aan de som van de potentiële energie door de zwaartekracht en de potentiële energie door de veerkracht. Dit is gelijk aan:

$$
\begin{aligned}
E_I &= m * g * h + \frac{1}{2} * k * (\Delta x)^2 \\
E_I &= 3 * 10 * 0.6 + 0.5 * 350 * 0.6^2 \ J \\
E_I &= 18 + 63 \ J \\
E_I &= 81 \ J
\end{aligned}
\tag{163}
$$

Op tijdstip $T = II$ (wanneer het blok in B passeert) is de totale energie gelijk aan de som van de kinetische energie en de potentiële energie door de veerkracht. Dit is gelijk aan:

$$
\begin{aligned}
E_{II} &= \frac{1}{2} * k * (\Delta x)^2 + \frac{m * v^2}{2} \\
E_{II} &= 0.5 * 350 * (\sqrt{0.6^2 + 0.6^2} - 0.6)^2 + 0.5 * 3 * v^2 \ J \\
E_{II} &= 10.8 + 1.5 * v^2 \ J
\end{aligned}
\tag{164}
$$

Uit de wet van behoud van energie kunnen we dan de snelheid v halen:

$$
\begin{aligned}
E_I &= E_{II} \\
81 &= 10.8 + 1.5 * v^2 \\
v &= \sqrt{\frac{81 - 10.8}{1.5}} \ m/s \\
v &= 6.84 \ m/s
\end{aligned}
\tag{165}
$$

Oefening 17

Vraag

Welke snelheid bereikt het wagentje in B als het uit rust losgelaten wordt in A? De rustlengte van de veer bedraagt $0.04 \ m$. De veerconstante is $800 \ N/m$ en de massa van het wagentje is $0.1 \ kg$. Er is geen wrijving tussen het wagentje en de geleiding.

Oplossing

Op tijdstip $T = I$ (wanneer het systeem nog in rust is) is de totale energie gelijk aan de potentiële energie door de veerkracht. Dit is gelijk aan:

$$
\begin{aligned}
E_I &= \frac{1}{2} * k * (\Delta x)^2 \\
E_I &= 0.5 * 800 * (\sqrt{0.12^2 + 0.05^2} - 0.04)^2 \ J \\
E_I &= 3.24 \ J
\end{aligned}
\tag{166}
$$

Op tijdstip $T = II$ (wanneer het wagentje in B passeert) is de totale energie gelijk aan de som van de kinetische energie en de potentiële energie door de veerkracht. Dit is gelijk aan:

$$\begin{aligned} E_{II} &= \frac{1}{2} * k * (\Delta x)^2 + \frac{m * v^2}{2} \\ E_{II} &= 0.5 * 800 * (0.05 - 0.04)^2 + 0.5 * 0.1 * v^2 \ J \\ E_{II} &= 0.04 + 0.05 * v^2 \ J \end{aligned} \tag{167}$$

Uit de wet van behoud van energie kunnen we dan de snelheid v halen:

$$\begin{aligned} E_I &= E_{II} \\ 3.24 &= 0.04 + 0.05 * v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{3.24 - 0.04}{0.05}} \ m/s \\ v &= 8 \ m/s \end{aligned} \tag{168}$$

Oefening 18

Vraag

Een man in een stilliggende kano gooit een zware zak weg volgens de lengteas van de boot, onder een hoek van $30°$ met de horizontale. De man levert een arbeid van $150 \ J$, terwijl hij de zak weggooit. De zak weegt $15 \ kg$, de man $75 \ kg$, de kano $30 \ kg$. Je mag veronderstellen dat de kano zonder wrijving op het water beweegt. Bereken de snelheid $\vec{v_z}$ van de zak en de snelheid $\vec{v_k}$ van de kano.

Oplossing

De totale energie op tijdstip $T = I$ is gelijk aan $0 \ J$ (alles is in rust). De totale energie op tijdstip $T = II$ (wanneer de zak is weggegooid) is gelijk aan de som van de kinetische energie van de zak en de kinetische energie van de kano met de man. Dit is gelijk aan:

$$\begin{aligned} E_{II} &= 0.5 * 15 * v_z^2 + 0.5 * 105 * v_k^2 \ J \\ E_{II} &= 7.5 * v_z^2 + 52.5 * v_k^2 \ J \end{aligned} \tag{169}$$

Er wordt een arbeid van $150 \ J$ geleverd, dus de verandering van de totale energie is gelijk aan $150 \ J$. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 150 \ J \\ E_{II} &= 150 \ J \\ 7.5 * v_z^2 + 52.5 * v_k^2 &= 150 \end{aligned} \tag{170}$$

De totale impuls op tijdstip $T = I$ is gelijk aan $0 \ Ns$. Op tijdstip $T = II$ is deze gelijk aan de som van de impuls van de zak en de impuls van de kano met de man. Voor de horizontale richting is dit gelijk aan:

$$p_{II} = 15 * v_z * cos(30°) + 105 * (-v_k) \tag{171}$$

Aangezien er geen uitwendige krachten op het systeem werken, geldt de wet van behoud van impuls. Dit geeft dus:

$$\begin{aligned} p_I &= p_{II} \\ 0 &= 15 * v_z * cos(30°) + 105 * (-v_k) \\ v_z &= 8.08 * v_k \end{aligned} \tag{172}$$

Als we dit invullen in 170 geeft dat:

$$\begin{aligned} 7.5 * v_z^2 + 52.5 * v_k^2 &= 150 \\ 7.5 * (8.08 * v_k)^2 + 52.5 * v_k^2 &= 150 \\ v_k &= \sqrt{\frac{150}{7.5 * 8.08^2 + 52.5}}\ m/s \\ v_k &= 0.526\ m/s \end{aligned} \tag{173}$$

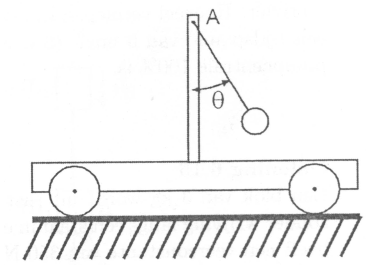
De snelheid v_z van de zak is dan gelijk aan:

$$\begin{aligned} v_z &= 8.08 * v_k \\ v_z &= 8.08 * 0.526\ m/s \\ v_z &= 4.25\ m/s \end{aligned} \tag{174}$$

Oefening 21

Vraag

Een wagentje (massa m_1) kan wrijvingsloos bewegen over de horizontale. De puntmassa m_2 is met een ideale staaf (lengte l) aan het wagentje bevestigd en kan vrij roteren rond A ten opzichte van het wagentje. We laten het systeem los uit de rusttoestand, met de slinger in de beginpositiet $\theta = 90°$. Bepaal, voor het ogenblik waarop de slinger voor de eerste maal doorkomt bij $\theta = 30°$, de snelheid van het wagentje en de snelheid van de puntmassa. $m_1 = 10\ kg$, $m_2 = 5\ kg$, $l = 1\ m$



Oplossing

In de begintoestand ($t = I$) is de totale impuls en de kinetische energie gelijk aan $0\ Ns$ (er is geen beweging). Als we de nullijn op dezelfde hoogte stellen als de laagst mogelijke positie van de puntmassa, dan is de potentiële energie gelijk aan:

$$\begin{aligned} V_I &= m_2 * g * h_1 \\ V_I &= 5 * 10 * 1\ J \\ V_I &= 50\ J \end{aligned} \tag{175}$$

Op tijdstip $t = II$ (het ogenblik waarop de slinger voor de eerste maal doorkomt bij $\theta = 30°$), is er wel beweging. Als we de snelheid van het wagentje gelijkstellen aan $\vec{v_1}$, dan is de snelheid van de puntmassa $\vec{v_2}$ gelijk aan (volgens de samengestelde beweging):

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -v_{rel} * cos(30) + v_1 \\ -v_{rel} * sin(30) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{176}$$

met $\vec{v_{rel}}$ de relatieve snelheid van de puntmassa ten opzichte van het wagentje. Deze is dus rakend aan de cirkelbaan die de puntmassa beschrijft.

De potentiële energie op tijdstip $t = II$ is gelijk aan:

$$\begin{aligned} V_{II} &= m_2 * g * h_2 \\ V_{II} &= 5 * 10 * (1 - cos(30))\ J \\ V_{II} &= 50 - 25 * \sqrt{3}\ J \end{aligned} \tag{177}$$

De kinetische energie op tijdstip $t = II$ is gelijk aan:

$$\begin{aligned} T_{II} &= \frac{m_1 * v_1^2}{2} + \frac{m_2 * v_2^2}{2} \\ T_{II} &= 5 * v_1^2 + 2.5 * v_2^2\ J \end{aligned} \tag{178}$$

Uit de wet van behoud van energie halen we dan de volgende vergelijking:

$$\begin{aligned} T_I + V_I &= T_{II} + V_{II} \\ 50 &= 5 * v_1^2 + 2.5 * v_2^2 + 50 - 25 * \sqrt{3} \\ 25 * \sqrt{3} &= 5 * v_1^2 + 2.5 * v_2^2 \end{aligned} \tag{179}$$

De totale impuls (in de x-richting) op tijdstip $t = II$ is gelijk aan:

$$\begin{aligned} p_{II} &= m_1 * v_1 + m_2 * (-v_{rel} * cos(30) + v_1) \\ p_{II} &= 15 * v_1 - 5 * \frac{\sqrt{3}}{2} * v_{rel} \end{aligned} \tag{180}$$

Uit de wet van behoud van impuls (in de x-richting) halen we de volgende vergelijking:

$$\begin{aligned} p_I &= p_{II} \\ 0 &= 15 * v_1 - 5 * \frac{\sqrt{3}}{2} * v_{rel} \\ 3 * v_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} * v_{rel} \end{aligned} \tag{181}$$

De grootte van $\vec{v_2}$ is dan gelijk aan:

$$\begin{aligned} v_2^2 &= (-v_{rel} * cos(30) + v_1)^2 + (-v_{rel} * sin(30))^2 \\ v_2^2 &= v_{rel}^2 * cos^2(30) - 2 * v_{rel} * cos(30) * v_1 + v_1^2 + v_{rel}^2 * sin^2(30) \\ v_2^2 &= v_{rel}^2 - 2 * 3 * v_1 * v_1 + v_1^2 \\ v_2^2 &= v_{rel}^2 - 5 * v_1^2 \end{aligned} \tag{182}$$

Als we dit invullen in de vergelijking van de wet van behoud van energie geeft dat:

$$\begin{aligned}
25*\sqrt{3} &= 5*v_1^2 + 2.5*v_2^2 \\
25*\sqrt{3} &= 5*v_1^2 + 2.5*(v_{rel}^2 - 5*v_1^2) \\
25*\sqrt{3} &= 5*v_1^2 - 12.5*v_1^2 + 2.5*v_{rel}^2 \\
25*\sqrt{3} &= -7.5*v_1^2 + 2.5*v_{rel}^2 \\
25*\sqrt{3} &= -7.5*(\frac{v_{rel}*cos(30)}{3})^2 + 2.5*v_{rel}^2 \\
25*\sqrt{3} &= 1.875*v_{rel}^2 \\
v_{rel} &= \sqrt{\frac{25*\sqrt{3}}{1.875}} \\
v_{rel} &= 4.81\ m/s
\end{aligned} \tag{183}$$

$\vec{v_1}$ wordt dan:

$$\begin{aligned}
\vec{v_1} &= v_1 * \vec{e_x} \\
\vec{v_1} &= \frac{v_{rel}*cos(30)}{3} * \vec{e_x} \\
\vec{v_1} &= 1.39\ m/s\vec{e_x}
\end{aligned} \tag{184}$$

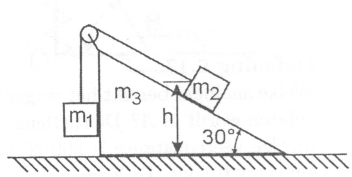
$\vec{v_2}$ wordt dan:

$$\begin{aligned}
\vec{v_2} &= \begin{pmatrix} -v_{rel}*cos(30) + v_1 \\ -v_{rel}*sin(30) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{v_2} &= \begin{pmatrix} -2.77 \\ -2.41 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{185}$$

Oefening 22

Vraag

Een prisma met massa m_3 rust op een wrijvingsloos horizontaal vlak. Op de zijden van dit prisma rusten 2 blokken met massa m_1 en m_2, die verbonden zijn via een touw dat over een ideale katrol loopt. Beide blokken kunnen wrijvingsloos schuiven ten opzichte van de zijden van het prisma. Bereken de snelheden van m_1, m_2 en m_3 op het ogenblik dat m_3 op de grond komt. Het geheel wordt uit rust losgelaten, waarbij m_2 zich op een hoogte h boven de grond bevindt. $m_1 = 20\ kg$, $m_2 = 50\ kg$, $m_3 = 100\ kg$, $h = 1\ m$.



Oplossing

Op tijdstip $t = I$ (voordat het systeem wordt losgelaten) is de totale impuls en kinetische energie gelijk aan $0\ Ns$. De potentiële energie is dan gelijk aan:

$$\begin{aligned} V_I &= m_1 * g * a + m_2 * g * h \\ V_I &= 200a + 500\ J \end{aligned} \tag{186}$$

Op tijdstip $t = II$ (wanneer m_2 de grond raakt) heeft m_3 een snelheid v_s naar links. De absolute snelheden van m_1 en m_2 worden dan:

$$\begin{aligned} \vec{v_1} &= \begin{pmatrix} -v_3 \\ v_{1,rel} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v_2} &= \begin{pmatrix} v_{2,rel} * cos(30) - v_3 \\ -v_{2,rel} * sin(30) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{187}$$

De totale impuls op tijdstip $t = II$ wordt dan (in de x-richting):

$$\begin{aligned} p_{II} &= m_1 * (-v_3) + m_2 * (v_{2,rel} * cos(30) - v_3) + m_3 * (-v_3) \\ p_{II} &= -170 * v_3 + 25 * \sqrt{3} * v_{2,rel} \end{aligned} \tag{188}$$

Volgens de wet van behoud van impuls is dit gelijk aan p_I en dus gelijk aan $0\ Ns$. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} p_{II} = 0 &= -170 * v_3 + 25 * \sqrt{3} * v_{2,rel} \\ v_{2,rel} &= \frac{170 * v_3}{25 * \sqrt{3}} \end{aligned} \tag{189}$$

Aangezien m_1 en m_2 met een touw aan elkaar verbonden zijn, is $v_{1,rel}$ gelijk aan $v_{2,rel}$.

Op tijdstip $t = II$ is de totale kinetische energie gelijk aan:

$$T_{II} = \frac{m_1 * v_1^2}{2} + \frac{m_2 * v_2^2}{2} + \frac{m_3 * v_3^2}{2} \tag{190}$$

Op tijdstip $t = II$ is de totale potentiële energie gelijk aan:

$$\begin{aligned} V_{II} &= m_1 * g * a' \\ V_{II} &= 200 * a' \end{aligned} \tag{191}$$

Hierbij is $a' - a$ gelijk aan de afstand die m_2 heeft afgelegd. Dit is dus gelijk aan:

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{h}{sin(30)} \\ \Delta a &= 2 \end{aligned} \tag{192}$$

Uit de wet van behoud van energie halen we dan de volgende vergelijking:

$$\begin{aligned}
T_I + V_I &= T_{II} + V_{II} \\
200a + 500 &= \frac{m_1 * v_1^2}{2} + \frac{m_2 * v_2^2}{2} + \frac{m_3 * v_3^2}{2} + 200 * a' \\
500 + 200 * (a - a') &= 10 * (v_3^2 + v_{1,rel}^2) + 25 * (v_{2,rel}^2 - 2 * v_{2,rel} * cos(30) * v_3 + v_3^2) \\
&+ 50 * v_3^2 \\
100 &= 10 * v_3^2 + 10 * (\frac{170 * v_3}{25 * \sqrt{3}})^2 + 25 * (\frac{170 * v_3}{25 * \sqrt{3}})^2 - 170 * v_3^2 \\
&+ 25 * v_3^2 + 50 * v_3^2 \\
100 &= 545.5 * v_3^2 \\
v_3 &= \sqrt{1.9} \\
v_3 &= 0.47
\end{aligned} \tag{193}$$

De snelheid van m_3 is dus gelijk aan $-0.47\ m/s\ \vec{e_x}$. De snelheid van m_1 wordt dan:

$$\begin{aligned}
\vec{v_1} &= \begin{pmatrix} -v_3 \\ v_{1,rel} \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{v_1} &= \begin{pmatrix} -0.47 \\ 1.84 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{194}$$

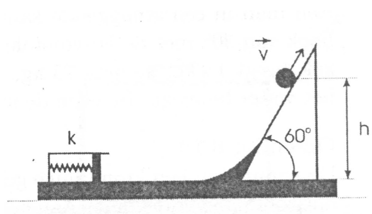
De snelheid van m_2 wordt dan:

$$\begin{aligned}
\vec{v_2} &= \begin{pmatrix} v_{2,rel} * cos(30) - v_3 \\ -v_{2,rel} * sin(30) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{v_2} &= \begin{pmatrix} 1.13 \\ -0.92 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{195}$$

Oefening 23

Vraag

Een slede met massa $m_1 = 20\ kg$, rust op een horizontaal vlak. Op de slede is een katapult gemonteerd die, met het volledige systeem in rust, een kogel met massa $m_2 = 5\ kg$ wegschiet in horizontale richting. Op de slede is een hellend vlak bevestigd. Wanneer de kogel op het hellen vlak een hoogte $h = 0.3\ m$ bereikt, heeft hij nog een snelheid $v = 4\ m/s$ ten opzichte van de slede. De katapult heeft een veerconstante $k = 2000\ N/m$. Bereken de indrukking van de veer voor het afschieten van de kogel. Er is nergens wrijving.



Oplossing

Op tijdstip $T = I$ (voor het afschieten) is er geen beweging. De kinetische energie is dus gelijk aan $0\ J$. De enige potentiële energie is afkomstig van de ingedrukte veer. Deze is gelijk aan:

$$\begin{aligned} V_I &= \frac{k * (\Delta L)^2}{2} \\ V_I &= 1000 * (\Delta L)^2\ J \end{aligned} \tag{196}$$

Op tijdstip $T = II$ (wanneer de kogel op hoogte h is) is de potentiële energie gelijk aan:

$$\begin{aligned} V_{II} &= m_2 * g * h \\ V_{II} &= 15\ J \end{aligned} \tag{197}$$

De kinetische energie is dan gelijk aan;

$$T_{II} = \frac{m_1 * v_1^2}{2} + \frac{m_2 * v_2^2}{2} \tag{198}$$

Met v_1 de snelheid van de slee (naar links georiënteerd) en v_2 de absolute snelheid van de kogel. Deze is gelijk aan:

$$\begin{aligned} \vec{v_2} &= \vec{v_1} + \vec{v_{2|1}} \\ \vec{v_2} &= \begin{pmatrix} -v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 * cos(60) \\ 4 * sin(60) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v_2} &= \begin{pmatrix} 2 - v_1 \\ 2 * \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{199}$$

Uit de wet van behoud van impuls (in de x-richting) kunnen we de grootte van de snelheid van de slee halen. Dit wordt dus:

$$\begin{aligned} -m_1 * v_1 + m_2 * v_2 = 0 \\ 20 * v_1 &= 5 * (2 - v_1 0 \\ v_1 &= \frac{10}{25}\ m/s \\ v_1 &= 0.4\ m/s \end{aligned} \tag{200}$$

Als we dit invullen in de wet van behoud van energie, geeft dat:

$$
\begin{aligned}
T_I + V_I &= T_{II} + V_{II} \\
1000 * (\Delta L)^2 &= \frac{m_1 * v_1^2}{2} + \frac{m_2 * v_2^2}{2} + 15 \\
(\Delta L)^2 &= \frac{10 * 0.4^2 + 2.5 * ((2 - 0.4)^2 + (2 * \sqrt{3})^2) + 15}{1000} \\
\Delta L &= \sqrt{\frac{53}{1000}}\ m \\
\Delta L &= 0.23\ m
\end{aligned}
\tag{201}
$$

Vlakke dynamica van voorwerpen

Oefening 4

Vraag

De homogene staaf AB is in D scharnierend opgehangen. In het uiteinde B grijpt een horizontale kracht $\vec{P}$ aan. Bepaal de hoekversnelling van de staaf en de verbindingskracht in D als de staaf uit rust vertrekt. De staaf weegt $1\ kg$ en $AD = \frac{L}{4}$.

Oplossing

De krachten die op de staaf inwerken zijn de volgende:

- De reactiekracht $\vec{R}$ in D
- De kracht $\vec{P}$ in B
- Het gewicht $\vec{G}$ in het massacentrum C

Uit het tweede postulaat van Newton volgt:

$$\begin{gathered}\vec{R} + \vec{P} + \vec{G} = m * \vec{a} \\ \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m * a_x \\ m * a_y \\ 0 \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{202}$$

Aangezien B loodrecht onder D staat is a_y gelijk aan $0\ m/s$ en is R_y gelijk aan G.

Het moment rond D van de resulterende kracht is gelijk aan:

$$\begin{aligned} M_D &= (\vec{r_C} - \vec{r_D}) \times \vec{G} + (\vec{r_B} - \vec{r_D}) \times \vec{P} \\ M_D &= \frac{3}{4} * L * P \end{aligned} \tag{203}$$

Het impulsmoment rond D is gelijk aan:

$$\begin{aligned} I_D &= I_C + m * d^2 \\ I_D &= \frac{1}{12} * m * L^2 + m * (\frac{L}{4})^2 \end{aligned} \tag{204}$$

Als we dit invullen in 203, dan geeft dat:

$$\begin{aligned} M_D &= I_D * \alpha \\ \frac{3}{4} * L * P &= (\frac{1}{12} * m * L^2 + m * (\frac{L}{4})^2) * \alpha \\ \alpha &= \frac{3}{4} * \frac{P}{L * \frac{7}{48}}\ rad/s^2 \\ \alpha &= 5.14 * \frac{P}{L}\ rad/s^2 \end{aligned} \tag{205}$$

Aangezien $a = R * \alpha$ geeft dit in 202:

$$\begin{aligned} R_x + P &= m * a_x \\ R_x &= \frac{L}{4} * 5.14 * \frac{P}{L} - P \\ R_x &= 0.29 \end{aligned} \tag{206}$$

$\vec{R}$ is dus gelijk aan $0.29\vec{e_x} + G\vec{e_y}$.

Oefening 5

Vraag

Een homogene cilinder van $m = 20\ kg$ en met straal $r = 10\ cm$ draait rond een excentrisch geplaatste horizontale as. In de getekende stand heeft de schijf een hoeksnelheid van $\omega = 3\ rad/s$. Bepaal de hoekversnelling van de schijf en de verbindingskracht in O in deze stand.

Oplossing

De krachten die op de cilinder werken zijn de volgende:

- De verbindingskracht $\vec{R}$ in O
- Het gewicht $\vec{G}$ in het massacentrum C

Uit het tweede postulaat van Newton volgt:

$$\begin{aligned} \vec{R} + \vec{G} &= m * \vec{a} \\ \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G * cos(60°) \\ -G * sin(60°) \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 20 * a_x \\ 20 * a_y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{207}$$

Hierin is a_x gelijk aan de tangentiële versnelling van het massacentrum en a_y gelijk aan de normaalversnelling.

Uit de vergelijking van het traagheidsmoment volgt:

$$\begin{aligned} M_O &= I_O * \alpha \\ 0.05 * G * cos(60°) &= (\frac{1}{2} * 20 * 0.1^2 + 20 * 0.05^2) * \alpha \\ \alpha &= \frac{5}{0.15}\ rad/s^2 \\ \alpha &= 33.3\ rad/s^2 \end{aligned} \tag{208}$$

Aangezien $a_t = a_x$ gelijk is aan $R * \alpha$ geeft dat als we dit invulllen in 207:

$$\begin{aligned} R_x + G * cos(60°) &= 20 * a_x \\ R_x &= 20 * 0.05 * 33.3 - 200 * 0.5 \\ R_x &= -66.67 \end{aligned} \tag{209}$$

De normaalversnelling $a_n = a_y$ is gelijk aan $R * \omega^2$. Als we dit invullen in 207 geeft dat:

$$\begin{aligned} R_y - G * sin(60°) &= 20 * a_y \\ R_y &= 20 * 0.05 * 3^2 + 173.2 \\ R_y &= 182.2 \end{aligned} \tag{210}$$

De reactiekracht $\vec{R}$ in O is dus gelijk aan $-66.67\vec{e_x} + 182.2\vec{e_y}$.

Oefening 9

Vraag

De gewichtsloze staaf OA (lengte $l = 1\ m$) en de cilindervormige schijf (massa $m = 60\ kg$ en straal $r = 0.5\ m$) vormen een star geheel. De staaf OA is in O scharnierend met de omgeving verbonden. Het geheel bevindt zich in een verticaal vlak en wordt uit rust losgelaten uit de getekende stand (met $\phi_0 = 60°$). Bereken de snelheid van het punt A op het ogenblik dat het in zijn laagste stand doorkomt.

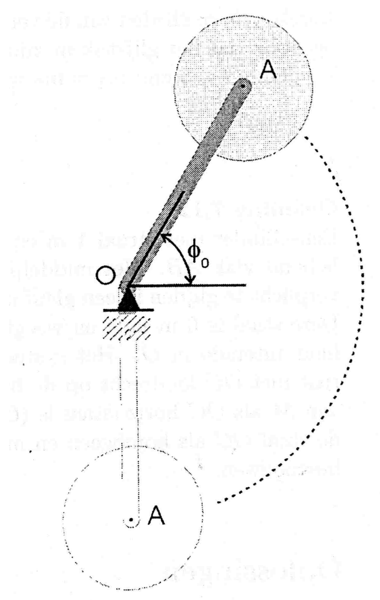
Oplossing

Op tijdstip $T = 1$ (wanneer de schijf nog boven is) is totale energie gelijk aan:

$$\begin{aligned} E_I &= T_I + V_I \\ E_I &= 0 + m * g * (l + l * sin(60)) \\ E_I &= 1120\ J \end{aligned} \tag{211}$$

Op tijdstip $T = II$ (wanneer de schijf in zijn laagste stand voorbijkomt) is de totale energie gelijk aan:

$$\begin{aligned} E_{II} &= T_{II} + V_{II} \\ E_{II} &= \frac{m * v^2}{2} + \frac{I * \omega^2}{2} \end{aligned} \tag{212}$$



De snelheid v van A is gelijk aan de straal maal de hoeksnelheid:

$$\begin{aligned} v &= R * \omega \\ v &= \omega \end{aligned} \tag{213}$$

De waarde van ω kunnen we dan uit de wet van behoud van energie halen;

$$\begin{aligned} E_I &= E_{II} \\ 1120 &= \frac{m * v^2}{2} + \frac{I * \omega^2}{2} \\ \omega^2 &= \frac{1120}{30 + 1/4 * 60 * 0.5^2} \\ \omega &= \sqrt{33.2}\ rad/s \\ \omega &= 5.76\ rad/s \end{aligned} \tag{214}$$

Oefening 10

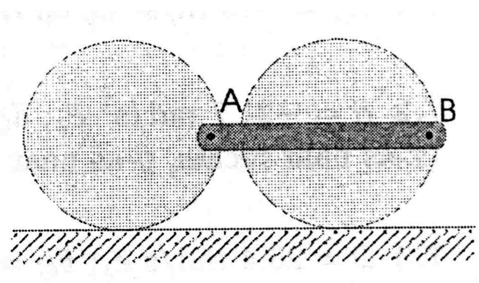
Vraag

De horizontale homogene staaf AB is in A en in B scharnierend met een wiel verbonden. De staaf weegt $m_1 = 24\ kg$ en heeft een lengte van $0.7\ m$. Elk wiel is een cilinder met straal $r = 30\ cm$ en gewicht $m_2 = 16\ kg$. Het systeem vertrekt uit de getekende positie uit rust. Bereken de maximale hoeksnelheid die de wielen zullen bereiken. De wielen rollen zonder te glijden onder invloed van de zwaartekracht.

Oplossing

Op tijdstip $T = I$ (voordat de wielen in beweging zijn) bevat enkel de staaf (potentiële) energie. De totale energie is dan gelijk aan:

$$\begin{aligned} E_I &= m_1 * g * h \\ E_I &= 72\ J \end{aligned} \tag{215}$$



Op tijdstip $T = II$ (wanneer de staaf op zijn laagste positie is en de hoeksnelheid dus maximaal is) bevat de staaf geen energie meer. Hij is op zijn laagste punt (dus geen potentiële energie) en de snelheid is $0\ m/s$ (hij kan niet lager zakken). Beide wielen bezitten dezelfde kinetische energie. De totale energie is dus gelijk aan:

$$\begin{aligned} E_{II} &= 2*(\frac{m_1 * v^2}{2} + \frac{I * \omega^2}{2}) \\ E_{II} &= 16 * v^2 + 8 * 0.3^2 * \omega^2 \end{aligned} \tag{216}$$

De snelheid v van A en B is gelijk aan de straal maal de hoeksnelheid:

$$\begin{aligned} v &= r * \omega \\ v &= 0.3 * \omega \end{aligned} \tag{217}$$

De waarde van ω kunnen we dan uit de wet van behoud van energie halen;

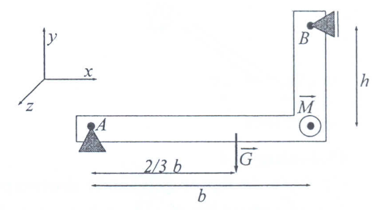
$$\begin{aligned} E_I &= E_{II} \\ 72 &= 16 * v^2 + 8 * 0.3^2 * \omega^2 \\ 72 &= 16 * 0.3^2 * \omega^2 + 0.72 * \omega^2 \\ \omega^2 &= \frac{72}{1.44 + 0.72} \\ \omega &= \sqrt{33.33}\ rad/s \\ \omega &= 5.77\ rad/s \end{aligned} \tag{218}$$

Virtuele arbeid

Oefening 1

Vraag

Gegeven nevenstaande figuur met $b = 1\ m$, $h = 0.5\ m$, $\vec{M} = 10\ Nm\vec{e_z}$, $m = 50\ kg$. Bereken de reactiekrachten met de omgeving gebruik makend van de methode van de virtuele arbeid.



Oplossing

De krachten die op deze constructie inwerken, zijn de volgende:

- de reactiekracht $\vec{R_A}$ in A met een component in de x- en de y-richting
- de reactiekracht $\vec{R_B}$ in B met een component in de x-richting
- het gewicht $\vec{G}$

Volgens de stelling van de virtuele arbeid geldt:

$$\vec{R_A} \cdot \delta\vec{u}_A + \vec{R_B} \cdot \delta\vec{u}_B + \vec{G} \cdot \delta\vec{u}_G + \vec{M} \cdot \delta\vec{\theta} = 0 \qquad (219)$$

Als we een virtuele verplaatsing definiëren als een rotatie rondom A, dan geeft dat:

$$
\begin{aligned}
\delta\vec{u_A} &= \vec{0} \\
\delta\vec{u_B} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ b & h & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -h*\delta\theta \\ b*\delta\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
\delta\vec{u_G} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ \frac{2}{3}*b & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}*b*\delta\theta \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{220}
$$

Als we dit invullen in de stelling van de virtuele arbeid, geeft dat:

$$
\begin{aligned}
\vec{R_A}\cdot\delta\vec{u_A} + \vec{R_B}\cdot\delta\vec{u_B} + \vec{G}\cdot\delta\vec{u_G} + \vec{M}\cdot\vec{\delta\theta} &= 0 \\
0 + (R_B)*(-h*\delta\theta) - G*\frac{2}{3}*b*\delta\theta + M*\delta\theta &= 0 \\
-R_B*h &= 333-10 \\
R_B &= -647
\end{aligned}
\tag{221}
$$

Als we een virtuele verplaatsing definiëren als een verschuiving in de y-richting, dan geeft dat:

$$
\begin{aligned}
\delta\vec{u_A} = \delta\vec{u_B} = \delta\vec{u_G} &= \delta u_A*\vec{e_y} \\
\delta\theta &= 0
\end{aligned}
\tag{222}
$$

Als we dit invullen in de stelling van de virtuele arbeid, geeft dat:

$$
\begin{aligned}
\vec{R_A}\cdot\delta\vec{u_A} + \vec{R_B}\cdot\delta\vec{u_B} + \vec{G}\cdot\delta\vec{u_G} + \vec{M}\cdot\vec{\delta\theta} &= 0 \\
R_{Ay}*\delta u_A - 500*\delta u_A &= 0 \\
R_{Ay} &= 500
\end{aligned}
\tag{223}
$$

Als we een virtuele verplaatsing definiëren als een verschuiving in de x-richting, dan geeft dat:

$$
\begin{aligned}
\delta\vec{u_A} = \delta\vec{u_B} = \delta\vec{u_G} &= \delta u_A*\vec{e_x} \\
\delta\theta &= 0
\end{aligned}
\tag{224}
$$

Als we dit invullen in de stelling van de virtuele arbeid, geeft dat:

$$
\begin{aligned}
\vec{R_A}\cdot\delta\vec{u_A} + \vec{R_B}\cdot\delta\vec{u_B} + \vec{G}\cdot\delta\vec{u_G} + \vec{M}\cdot\vec{\delta\theta} &= 0 \\
R_{Ax}*\delta u_A - 647*\delta u_A &= 0 \\
R_{Ax} &= 647
\end{aligned}
\tag{225}
$$

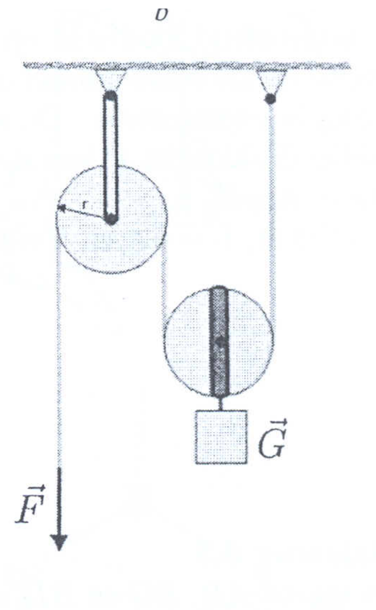
Alles samen wordt dit dus:

- $\vec{R_A} = (647, 500, 0)$
- $\vec{R_B} = (0, -647, 0)$

Oefening 2

Vraag

Gegeven het gewicht $\vec{G}$ aan de losse katrol, hoe groot is de kracht $\vec{F}$ waarmee aan de vaste katrol moet getrokken worden opdat het systeem in evenwicht is? Gebruik het principe van de virtuele arbeid om $\vec{F}$ te bepalen. $r = 0.2\ m$, $G = 500\ N$



Oplossing

Als we een virtuele verplaatsing definiëren als een verplaatstin van $\vec{F}$ in de y-richting, dan zijn de enige krachten die van belang zijn:

- $\vec{F}$
- $\vec{G}$

Aangezien het touw over twee katrollen loopt is de grootte van de virtuele verplaatsing van $\vec{F}$ het dubbele van die van $\vec{G}$. Dit geeft dus:

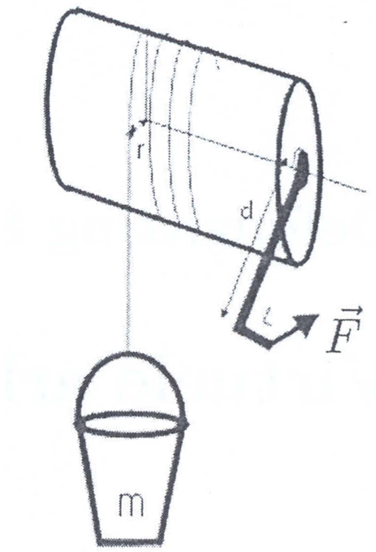
$$
\begin{aligned}
\vec{F} \cdot \delta\vec{u_F} + \vec{G} \cdot \delta\vec{u_G} = 0 \\
-F * \delta u_G - \frac{1}{2} - 500 * \delta u_G = 0 \\
F = -250
\end{aligned}
\tag{226}
$$

De grootte van de kracht $\vec{F}$ is dus gelijk aan $250\ N$.

Oefening 3

Vraag

Luc haalt een volle emmer water uit een waterput naar boven met behulp van een windas. Welke kracht moet Luc minstens op het uiteinde van de kruk aanwenden om de emmer naar boven te hijsen? De kracht $\vec{F}$ staat loodrecht op de hendel van de windas. $m = 45\ kg$, $r = 0.02\ m$, $d = 0.36\ m$



Oplossing

Als we een virtuele verplaatsing definiëren als een rotatie rond de windas, dan geldt:

$$\begin{aligned}
\delta\vec{u_F} &= d * \delta\vec{\theta} \\
&= 0.36 * \delta\vec{\theta} \\
\delta\vec{u_G} &= r * \delta\vec{\theta} \\
&= 0.02 * \delta\vec{\theta}
\end{aligned} \tag{227}$$

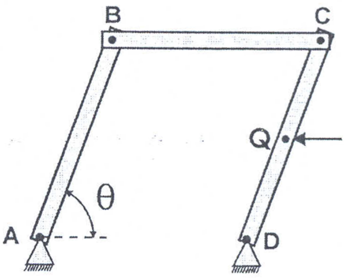
Volgens de stelling van de virtuele arbeid, wordt dat dan:

$$\begin{aligned}
\vec{F} \cdot \delta\vec{u_F} + \vec{G} \cdot \delta\vec{u_G} &= 0 \\
0.36 * F * \delta\theta - 0.02 * 450 * \delta\theta &= 0 \\
F &= \frac{0.02 * 450}{0.36}\ N \\
F &= 25\ N
\end{aligned} \tag{228}$$

Oefening 5

Vraag

De staven AB, BC, CD van het voorgestelde stangensusteem zijn homogeen, hebben een gewicht G en een lengte L. Welke horizontale kracht moet er in het midden van de staaf CD aangrijpen om het susteem onder een gegeven hoek θ in evenwicht te houden?



Oplossing

Stel het midden van staaf AB gelijk aan E, van BC aan F en van CD aan G. De krachten die op het systeem inwerken zijn de volgende:

- het gewicth $\vec{G}$ in E, F en G
- de kracht $\vec{Q}$ in G
- de reactiekracht $\vec{R_A}$ in A
- de reactiekracht $\vec{R_D}$ in D

Als we dan een virtuele verplaatsing definiëren als een rotatie rond A en D, dan geldt:

$$\begin{aligned}
\delta\vec{u}_A &= \delta\vec{u}_D = \vec{0} \\
\delta\vec{u}_E &= \delta\vec{u}_G = \begin{vmatrix} \vec{e_z} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ \frac{L}{2} * cos(\theta) & \frac{L}{2} * sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{L}{2} * sin(\theta) * \delta\theta \\ \frac{L}{2} * cos(\theta) * \delta\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
\delta\vec{u}_F &= \delta\vec{u}_B = \begin{vmatrix} \vec{e_z} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ L * cos(\theta) & L * sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -L * sin(\theta) * \delta\theta \\ L * cos(\theta) * \delta\theta \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{229}$$

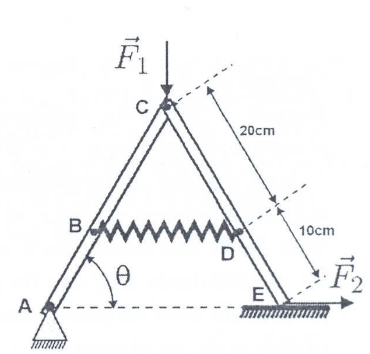
Als we dit invullen in de stelling van de virtuele arbeid, dan geeft dat:

$$\begin{aligned}
\vec{R_A}\cdot\delta\vec{u_A}+\vec{R_D}\cdot\delta\vec{u_D}+\vec{G}\cdot\delta\vec{u_E}+\vec{G}\cdot\delta\vec{u_F}+\vec{G}\cdot\delta\vec{u_G}+\vec{Q}\cdot\delta\vec{u_G}&=0\\
2*(-G*\frac{L}{2}*cos(\theta)*\delta\theta)-G*L*cos(\theta)*\delta\theta+Q*\frac{L}{2}*sin(\theta)*\delta\theta&=0\\
-2*G*cos(\theta)+\frac{Q}{2}*sin(\theta)&=0\\
Q&=\frac{4*G*cos(\theta)}{sin(\theta)}\\
Q&=4*G*cot(\theta)
\end{aligned} \quad (230)$$

Oefening 6

Vraag

In het voorgestelde systeem heeft de veer een rustlengte van $15\ cm$ en een veerconstante van $300\ N/cm$. Onder welke hoek θ is dit systeem in evenwicht? De massa van de staven is te verwaarlosen. $F_1 = 2000\ N$, $F_2 = 1000\ N$



Oplossing

De krachten die op het systeem werken, zijn de volgende:

- de reactiekracht $\vec{R_A}$ in$A$
- de veerkracht $\vec{F_v}$ in B
- de kracht $\vec{F_1}$ in C
- de veerkracht $-\vec{F_v}$ in D
- de kracht $\vec{F_2}$ in E

Als we een virtuele verplaatsing definiëren als een rotatie rond A (waarbij E op de grond blijft), dan geldt:

$$\begin{aligned}
\delta\vec{u_A} &= \vec{0} \\
\delta\vec{u_B} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ 0.1 * cos(\theta) & 0.1 * sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -0.1 * sin(\theta) * \delta\theta \\ 0.1 * cos(\theta) * \delta\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
\delta\vec{u_C} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ 0.3 * cos(\theta) & 0.2 * sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -0.3 * sin(\theta) * \delta\theta \\ 0.3 * cos(\theta) * \delta\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
\delta\vec{u_E} &= \begin{pmatrix} -0.6 * sin(\theta) * \delta\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\delta\vec{u_D} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & -\delta\theta \\ -0.1 * cos(\theta) & 0.1 * sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} + \delta\vec{u_E} \\
&= \begin{pmatrix} -0.5 * sin(\theta) * \delta\theta \\ 0.1 * cos(\theta) * \delta\theta \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{231}$$

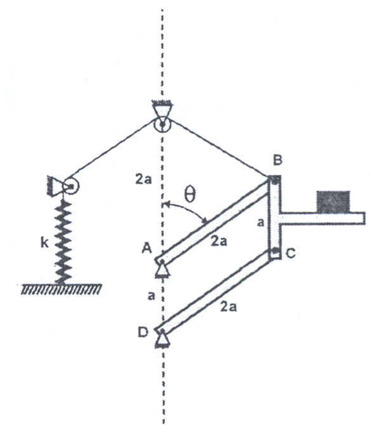
Als we dit invullen in de stelling van de virtuele arbeid, geeft dat:

$$\begin{aligned}
&0 = \vec{R_A} \cdot \delta\vec{u_A} + \vec{F_v} \cdot \delta\vec{u_B} + \vec{F_1} \cdot \delta\vec{u_C} + -\vec{F_v} \cdot \delta\vec{u_D} + \vec{F_2} \cdot \delta\vec{u_E} \\
&0 = k * (l - l_0) * (-0.1 * sin(\theta) * \delta\theta) - F_1 * (0.3 * cos(\theta) * \delta\theta) \\
&\quad - k * (l - l_0) * (-0.5 * sin(\theta) * \delta\theta) + F_2 * (-0.6 * sin(\theta) * \delta\theta) \\
&0 = -k * l * 0.1 * sin(\theta) + k * l_0 * 0.1 * sin(\theta) - 0.3 * F_1 * cos(\theta) + k * l * 0.5 * sin(\theta) \\
&\quad - k * l_0 * 0.5 * sin(\theta) - 0.6 * F_2 * sin(\theta) \\
&0 = 0.4 * k * 0.4 * cos(\theta) * sin(\theta) - 0.4 * k * 0.15 * sin(\theta) - 0.3 * F_1 * cos(\theta) - 0.6 * F_2 * sin(\theta) \\
&0 = 4800 * cos(\theta) * sin(\theta) - 1800 * sin(\theta) - 600 * cos(\theta) - 600 * sin(\theta) \\
&0 = 8 * sin(\theta) - 4 * tan(\theta) - 1 \\
&\theta = 53°43'
\end{aligned} \tag{232}$$

Oefening 9

Vraag

Bepaal de veerconstante k zodanig dat het systeem in evenwichts is in de getekende stand ($\theta = 45°$). De staven AB en DC zijn homogeen en hebben een gewicht G, terwijl BC en de last samen een gewicht $2 * G$ hebben. Als $\theta = 0$ is de veer ontspannen.



Oplossing

Stel het midden van AB gelijk aan E, van CD aan F en van BC aan G.

De krachten die op het systeem inwerken, zijn de volgende:

- het gewicht $\vec{G}$ in E en F
- het gewicht $2 * \vec{G}$ in G
- de veerkracht $\vec{F_v}$, die we voor de berekening volgens het touw in B laten aangrijpen
- de reactiekracht $\vec{R_A}$ in A
- de reactiekracht $\vec{R_D}$ in D

De veerkracht $\vec{F_v}$ is gelijk aan:

$$\vec{F_v} = \begin{pmatrix} -F_v * cos(22.5) \\ F_v * sin(22.5) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{233}$$

Aangezien de veer ontspannen is als θ gelijk is aan 0, is de ΔL gelijk aan de afstand van B tot de top. Dit is dus gelijk aan:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \sqrt{(2*a)^2 + (2*a)^2 - 2*2*a*2*a*cos(theta)} \\ \Delta L &= 2*a*\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{234}$$

Als we een virtuele verplaatsing definiëren als een rotatie rond A en D, geeft dat:

$$\begin{aligned}
\delta\vec{u_A} &= \delta\vec{u_D} = \vec{0} \\
\delta\vec{u_E} = \delta\vec{u_F} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & 0\delta\theta \\ a*sin(\theta) & a*cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a*cos(\theta)*\delta\theta \\ a*sin(\theta)*\delta\theta \\ 0 \end{pmatrix} \\
\delta\vec{u_G} = \delta\vec{u_B} &= \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & 0\delta\theta \\ 2*a*sin(\theta) & 2*a*cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2*a*cos(\theta)*\delta\theta \\ 2*a*sin(\theta)*\delta\theta \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{235}$$

Als we dit invullen in de stelling van de virtuele arbeid, geeft dat:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta\vec{u_A}\cdot\vec{R_A} + \delta\vec{u_D}\cdot\vec{R_D} + 2*\delta\vec{u_E}\cdot\vec{G} + \delta\vec{u_B}\cdot 2\vec{*}G + \delta\vec{u_B}\cdot\vec{F_v} \\
0 &= -2*G*a*sin(\theta)*\delta\theta - 2*G*2*a*sin(\theta)*\delta\theta \\
&\quad + F_v*cos(22.5)*2*a*cos(\theta)*\delta\theta + F_v*sin(22.5)*2*a*sin(\theta)*\delta\theta \\
F_v &= \frac{3*G*sin(\theta)}{cos(22.5)*cos(\theta)+sin(22.5)*sin(\theta)} \\
k &= \frac{3*G*sin(\theta)}{(cos(22.5)*cos(\theta)+sin(22.5)*sin(\theta))*\Delta L} \\
k &= \frac{3*G*sin(45)}{(cos(22.5)*cos(45)+sin(22.5)*sin(45))*(2*a*\sqrt{2-\sqrt{2}})} \\
k &= \frac{3*G}{2*a}
\end{aligned} \tag{236}$$