Oplossingen Mechanics 2013

TODO

October 11, 2013

Contents

1 Part 1

1.1 K1

1.2 K2

1.3 K3

gegeven

$a = 0.5m$, $\theta = 30°$, $v_O = 2\frac{m}{s}$.

gevraagd

v_{cx}, v_{cy}, a_{cx}, a_{cy}

berekeningen

De plaats van C en A in functie van de hoek valt af te leiden via Pythagoras.

$$r_c = \begin{pmatrix} 2a\cos(\theta(t)) \\ 2a\sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \text{ en } r_a = \begin{pmatrix} 2a\cos(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hieruit leiden we de snelheid en de versnelling af.

$$v_c = \begin{pmatrix} -2a\sin(\theta(t)) \cdot \omega(t) \\ 2a\cos(\theta(t)) \cdot \omega(t) \end{pmatrix} \text{ en } r_a = \begin{pmatrix} -2a\sin(\theta(t)) \cdot \omega(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_c = \begin{pmatrix} \alpha(t) \cdot (-2a\sin(\theta(t)) - 2a\cos(\theta(t)) \cdot \omega(t)^2 \\ \alpha(t) \cdot (2a\cos 5(\theta(t)) - 2a\sin(\theta(t)) \cdot \omega(t)^2 \end{pmatrix} \text{ en } r_a = \begin{pmatrix} \alpha(t) \cdot (-2a\sin(\theta(t)) - 2a\cos(\theta(t)) \cdot \omega(t)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

We zien dat de bewegingen van A en C precies gelijk zijn in de x richting. We kennen nu ook de volledige plaatsfunctie van A.

$$r_a = \begin{pmatrix} 2a\cos(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_O \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 2a\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dit is in functie van t. Hier halen we θ in functie van t uit.

$$\theta(t) = \arccos\left(\frac{v_O t + 2a\cos\theta}{2a}\right)$$

In deze vergelijking weten we alles.

1.4 K4

1.5 B1

1.6 B2

1.7 B3

2 Part 2

2.1 K1

gegeven

$|v| = 900\frac{km}{h} = 250\frac{m}{s}$

gevraagd

$n : n \leq r$

berekeningen

We weten dat $a_n = \frac{v^2}{r}$ en $a_t = \frac{dv}{dt}$.

$$a_t = \frac{d(250)}{dt} = 0$$

$$a_n = \frac{|v|^2}{r} \leq 4g$$

$$\frac{|v|^2}{4g} \leq r$$

Antwoord

$$n = \frac{|v|^2}{4g} = \frac{250^2}{4 \cdot 10} = 1562.5m$$

2.2 K2

2.3 K3

gegeven

$r_x(t) = 3t^2 m$, $v_y(t) = -\sqrt{13}\frac{m}{s}$

gevraagd

a_t, a_n

berekeningen

We leiden de plaats van het punt in de x richting af naar de tijd en bekomen zo de snelheid en versnelling in de x richting.

$$v_x(t) = 6t,\ a_x(t) = 6$$

We leiden ook de versnelling van het punt in de y richting af naar de tijd om de versnelling in de y richting te vinden.

$$a_y = 0$$

Omdat de versnelling van het punt in de y richting nul is, weten we dat $a = a_x$
We weten dat

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d\sqrt{(6t)^2 + (\sqrt{13})^2}}{dt} = \frac{36t}{\sqrt{36t^2 + 13}}$$

en ook dat

$$a_n = \sqrt{a^2 + a_t^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{36t}{\sqrt{36t^2 + 13}}\right)^2}$$

In beide van deze vergelijkingen kennen we alle 'onbekenden'. Na invullen:

$$a_n = 3.1\frac{m}{s^2} \text{ en } a_t = 5.14\frac{m}{s^2}$$

2.4 B1

gegeven

$R = -0.08m$, $v_{py} = -0.06\frac{m}{s}$, $\theta = 60°$

gevraagd

$\omega(\theta)$, $\alpha(\theta)$, a_p

berekeningen

We kunnen de plaatsfunctie van P bepalen.

$$r_p(t) = \begin{pmatrix} -\cos(\theta(t) \cdot R \\ -\sin(\theta(t) \cdot R \end{pmatrix}$$

We kunnen dit afleiden naar de tijd, maar we weten dat de snelheid van P in de y richting constant is:

$$v_p(t) = \begin{pmatrix} \omega(t)\sin(\theta(t)) \cdot R \\ v_{py} \end{pmatrix}$$

met $v_{py} = -\omega(t)\cos(\theta(t)) \cdot R$.

$$a_p(t) = \begin{pmatrix} R \cdot (\cos(\theta(t))\omega(t)^2 + \alpha(t)\sin(\theta(t))) \\ R \cdot (-\sin(\theta(t))\omega(t)^2 + \alpha(t)\cos(\theta(t))) \end{pmatrix}$$

met $a_{py} = 0$ want v_{py} is constant.

Hieruit kunnen we halen dat

$$\omega(t) = -\frac{v_{py}}{\cos(\theta(t)) \cdot R}$$

Dit is $1.5\frac{rad}{s}$ in de gegeven positie.
Nu weten we dat

$$0 = R \cdot (-\sin(\theta(t))\omega(t)^2 + \alpha(t)\cos(\theta(t)))$$

en dat wordt:

$$\alpha(t) = -\tan(\theta(t))\omega(t)^2$$

Hierin kennen we alle 'onbekenden'. Na invullen is $\alpha = -3.9\frac{rad}{s^2}$.
We weten dat

$$a_t = R \cdot \alpha(t) \text{ en } a_n = R \cdot \omega(t)^2$$

en

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Hierin kennen we opnieuw alle 'onbekenden'. Na invullen blijkt dat $a = 0.36\frac{m}{s^2}$ op het gegeven moment.

2.5 B2

2.6 B3

3 Part 3

3.1 K1

3.2 K2

3.3 K3

3.4 K4

gegeven

$|OA| = 0.35m$, $|AB| = 0.60m$, $\theta = A\hat{O}B = 45°$, $180° - \gamma = B\hat{C}O = 180° - 60°$, $\omega_{OA} = 6\frac{rad}{s}$

gevraagd

ω_{CB}

berekeningen

We zullen ω_{BC} bepalen met een tussenstap. Stap 1: We bepalen een punt waarvan we de snelheid zoeken. We kiezen hier voor $P = A$.
Stap 2: We bepalen het bewegende assenstelsel $O'x'y'z'$ We kiezen hier voor een translerend bewegend assenstelsel met $O' = A$ en $x' = AB$. Omdat dit een translerend assenstelsel is, dat niet roteerd, is: $e_x = e_{x'}$, $e_z = e_{z'}$, $e_z = e_{z'}$. We weten dat:

$$\vec{v_{ba}} = \vec{v_{bs}} + \vec{v_{br}}$$

Nu zien we dat:

$$\vec{v_{bs}} = \vec{v_A} = \omega_{OA} \times (\vec{r_A} - \vec{r_O}) = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_x} & \vec{e_x} \\ 0 & 0 & \omega_{OA} \\ |OA|\cos\theta(t) & |OA|\sin\theta(t) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_{OA} \cdot |OA|\sin\theta(t) \\ -\omega_{OA} \cdot |OA|\cos\theta(t) 0 \end{pmatrix}$$

We weten ook dat:

$$\vec{v_{br}} = \omega_{AB} \times (\vec{r_B} - \vec{r_A}) = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_x} & \vec{e_x} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ |AB| & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_{AB} \cdot |AB| \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ten slotte weten we nog dat:

$$\vec{v_{ba}} = \omega_{CB} \times (\vec{r_B} - \vec{r_C}) = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_x} & \vec{e_x} \\ 0 & 0 & \omega_{CB} \\ |BC|\cos\gamma(t) & |BC|\sin\gamma(t) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_{CB} \cdot |BC|\sin\gamma(t) \\ -\omega_{CB} \cdot |BC|\cos\gamma(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als we dit allemaal samen stellen is het:

$$\begin{cases} -\omega_{OA} \cdot |OA|\sin\theta(t) + 0 & = -\omega_{CB} \cdot |BC|\sin\gamma(t) \\ -\omega_{OA} \cdot |OA|\cos\theta(t) + -\omega_{AB} \cdot |AB| & = -\omega_{CB} \cdot |BC|\cos\gamma(t) \end{cases}$$

De eerste vergelijking hier in:

$$-\omega_{OA} \cdot |OA| \sin\theta(t) = -\omega_{CB} \cdot |BC| \sin\gamma(t)$$

is om te vormen naar

$$\omega_{CB} = \frac{\omega_{OA} \cdot |OA| \sin\theta(t)}{|BC| \sin\gamma(t)}$$

In deze vergelijking kennen we enkel $|BC|$ niet.
We kunnen $|OC|$ berekenen via de cosinusregel:

$$|OB| = \sqrt{|OA|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |AB| \cdot \cos(O\hat{A}B)}$$

Nu weten we dat $|OB| = 0.883m$ We weten volgens de sinusregel dat:

$$\frac{\sin(45° - B\hat{O}C)}{|AB|} = \frac{\sin(O\hat{A}B)}{|OB|} \Leftrightarrow B\hat{O}C = 16.3°$$

Volgens diezelfde sinusregel weten we nu ook dat

$$\frac{\sin(B\hat{O}C)}{|OB|} = \frac{\sin(B\hat{O}C)}{|BC|} \Leftrightarrow |BC| = 0.28m$$

Nu we ook $|BC|$ kennen rest er ons enkel nog de formule voor ω_{CB} in te vullen.

$$\omega_{CB} = \frac{\omega_{OA} \cdot |OA| \sin\theta(t)}{|BC| \sin\gamma(t)} = 6\ \frac{rad}{s}$$

3.5 B1

gegeven

$d(A,B) = d = 200m$
$v_{zwemmer} = 1.8\frac{km}{u} = 0.5\frac{m}{s}$
Geval a,b:
$v_{water} = 0.54\frac{km}{u} = 0.15\frac{m}{s}$
Geval c:
$v_{water} = 0\frac{m}{s}$

Geval a:

$$\widehat{v_{water}, AB} = 0°$$

Geval b:

$$\widehat{v_{water}, AB} = 30°$$

gevraagd

$\Delta t_{A\to B} + \Delta t_{B\to A}$

berekeningen

$$t = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

a)

$$\Delta t_{A \to B} = \frac{d}{v_{zwemmer} + \cdot v_{water}} = \frac{200}{0.5 + 0.15} = 307s$$

$$\Delta t_{B \to A} = \frac{d}{v_{zwemmer} + \cdot v_{water}} = \frac{200}{0.5 - 0.15} = 571s$$

Antwoord: $\Delta t_{A \to B} + \Delta t_{B \to A} = 879$ s.

b)
De zwemmer moet nu de hoek waaronder hij zwemt ten opzichte van AB zodat hij in een rechte lijn zwemt voor een waarnemer op de oever.

$$\sin\theta \cdot v_{zwemmer} + \sin(-30°) \cdot v_{water} = 0 \Leftrightarrow \theta = \arcsin\frac{(\sin(30°) \cdot v_{water})}{v_{zwemmer}}$$

$$\theta = 8.63°$$

$$\Delta t_{A \to B} = \frac{d}{\cos\theta v_{zwemmer} + \cos(-30°) v_{water}} = 320s$$

$$\Delta t_{B \to A} = \frac{d}{\cos\theta v_{zwemmer} - \cos(-30°) v_{water}} = 549s$$

Antwoord: $\Delta t_{A \to B} + \Delta t_{B \to A} = 869$ s.
c)

$$\Delta t_{A \to B} = \frac{d}{v_{zwemmer}} = \Delta t_{B \to A} = 400$$

Antwoord: $\Delta t_{A \to B} + \Delta t_{B \to A} = 800$ s.

3.6 B2

3.7 B3

3.8 B4