Oplossingen Mechanics 2013

TODO

October 11, 2013

Contents

1 Part 1

1.1 K1

1.2 K2

1.3 K3

gegeven

$a = 0.5m$, $\theta = 30°$, $v_O = 2\frac{m}{s}$.

gevraagd

v_{cx}, v_{cy}, a_{cx}, a_{cy}

berekeningen

De plaats van C en A in functie van de hoek valt af te leiden via Pythagoras.

$$r_c = \begin{pmatrix} 2a\cos(\theta(t)) \\ 2a\sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \text{ en } r_a = \begin{pmatrix} 2a\cos(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hieruit leiden we de snelheid en de versnelling af.

$$v_c = \begin{pmatrix} -2a\sin(\theta(t)) \cdot \omega(t) \\ 2a\cos(\theta(t)) \cdot \omega(t) \end{pmatrix} \text{ en } r_a = \begin{pmatrix} -2a\sin(\theta(t)) \cdot \omega(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_c = \begin{pmatrix} \alpha(t) \cdot (-2a\sin(\theta(t)) - 2a\cos(\theta(t)) \cdot \omega(t)^2 \\ \alpha(t) \cdot (2a\cos 5(\theta(t)) - 2a\sin(\theta(t)) \cdot \omega(t)^2 \end{pmatrix} \text{ en } r_a = \begin{pmatrix} \alpha(t) \cdot (-2a\sin(\theta(t)) - 2a\cos(\theta(t)) \cdot \omega(t)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

We zien dat de bewegingen van A en C precies gelijk zijn in de x richting. We kennen nu ook de volledige plaatsfunctie van A.

$$r_a = \begin{pmatrix} 2a\cos(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_O \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 2a\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dit is in functie van t. Hier halen we θ in functie van t uit.

$$\theta(t) = \arccos\left(\frac{v_O t + 2a\cos\theta}{2a}\right)$$

In deze vergelijking weten we alles.

1.4 K4

1.5 B1

1.6 B2

1.7 B3

2 Part 2

2.1 K1

gegeven

$|v| = 900\frac{km}{h} = 250\frac{m}{s}$

gevraagd

$n : n \leq r$

berekeningen

We weten dat $a_n = \frac{v^2}{r}$ en $a_t = \frac{dv}{dt}$.

$$a_t = \frac{d(250)}{dt} = 0$$

$$a_n = \frac{|v|^2}{r} \leq 4g$$

$$\frac{|v|^2}{4g} \leq r$$

Antwoord

$$n = \frac{|v|^2}{4g} = \frac{250^2}{4 \cdot 10} = 1562.5m$$

2.2 K2

2.3 K3

gegeven

$r_x(t) = 3t^2 m$, $v_y(t) = -\sqrt{13}\frac{m}{s}$

gevraagd

a_t, a_n

berekeningen

We leiden de plaats van het punt in de x richting af naar de tijd en bekomen zo de snelheid en versnelling in de x richting.

$$v_x(t) = 6t,\ a_x(t) = 6$$

We leiden ook de versnelling van het punt in de y richting af naar de tijd om de versnelling in de y richting te vinden.

$$a_y = 0$$

Omdat de versnelling van het punt in de y richting nul is, weten we dat $a = a_x$
We weten dat

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d\sqrt{(6t)^2 + (\sqrt{13})^2}}{dt} = \frac{36t}{\sqrt{36t^2 + 13}}$$

en ook dat

$$a_n = \sqrt{a^2 + a_t^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{36t}{\sqrt{36t^2 + 13}}\right)^2}$$

In beide van deze vergelijkingen kennen we alle 'onbekenden'. Na invullen:

$$a_n = 3.1\frac{m}{s^2} \text{ en } a_t = 5.14\frac{m}{s^2}$$

2.4 B1

gegeven

$R = -0.08m$, $v_{py} = -0.06\frac{m}{s}$, $\theta = 60°$

gevraagd

$\omega(\theta)$, $\alpha(\theta)$, a_p

berekeningen

We kunnen de plaatsfunctie van P bepalen.

$$r_p(t) = \begin{pmatrix} -\cos(\theta(t) \cdot R \\ -\sin(\theta(t) \cdot R \end{pmatrix}$$

We kunnen dit afleiden naar de tijd, maar we weten dat de snelheid van P in de y richting constant is:

$$v_p(t) = \begin{pmatrix} \omega(t)\sin(\theta(t)) \cdot R \\ v_{py} \end{pmatrix}$$

met $v_{py} = -\omega(t)\cos(\theta(t)) \cdot R$.

$$a_p(t) = \begin{pmatrix} R \cdot (\cos(\theta(t))\omega(t)^2 + \alpha(t)\sin(\theta(t))) \\ R \cdot (-\sin(\theta(t))\omega(t)^2 + \alpha(t)\cos(\theta(t))) \end{pmatrix}$$

met $a_{py} = 0$ want v_{py} is constant.

Hieruit kunnen we halen dat

$$\omega(t) = -\frac{v_{py}}{\cos(\theta(t)) \cdot R}$$

Dit is $1.5\frac{rad}{s}$ in de gegeven positie.
Nu weten we dat

$$0 = R \cdot (-\sin(\theta(t))\omega(t)^2 + \alpha(t)\cos(\theta(t)))$$

en dat wordt:

$$\alpha(t) = -\tan(\theta(t))\omega(t)^2$$

Hierin kennen we alle 'onbekenden'. Na invullen is $\alpha = -3.9\frac{rad}{s^2}$.
We weten dat

$$a_t = R \cdot \alpha(t) \text{ en } a_n = R \cdot \omega(t)^2$$

en

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Hierin kennen we opnieuw alle 'onbekenden'. Na invullen blijkt dat $a = 0.36\frac{m}{s^2}$ op het gegeven moment.

2.5 B2

2.6 B3

3 Part 3

3.1 K1

3.2 K2

3.3 K3

3.4 K4

3.5 B1

gegeven

$d(A, B) = d = 200m$
$v_{zwemmer} = 1.8\frac{km}{u} = 0.5\frac{m}{s}$
Geval a,b:
$v_{water} = 0.54\frac{km}{u} = 0.15\frac{m}{s}$
Geval c:
$v_{water} = 0\frac{m}{s}$

Geval a:

$$\widehat{v_{water}, AB} = 0°$$

Geval b:

$$\widehat{v_{water}, AB} = 30°$$

gevraagd

$\Delta t_{A\to B} + \Delta t_{B\to A}$

berekeningen

$$t = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

a)

$$\Delta t_{A\to B} = \frac{d}{v_{zwemmer} + \cdot v_{water}} = \frac{200}{0.5 + 0.15} = 307s$$
$$\Delta t_{B\to A} = \frac{d}{v_{zwemmer} + \cdot v_{water}} = \frac{200}{0.5 - 0.15} = 571s$$

Antwoord: $\Delta t_{A\to B} + \Delta t_{B\to A} = 879$ s.

b)
De zwemmer moet nu de hoek waaronder hij zwemt ten opzichte van AB zodat hij in een rechte lijn zwemt voor een waarnemer op de oever.

$$\sin\theta \cdot v_{zwemmer} + \sin(-30°) \cdot v_{water} = 0 \Leftrightarrow \theta = \arcsin\frac{(\sin(30°) \cdot v_{water})}{v_{zwemmer}}$$

$$\theta = 8.63°$$

$$\Delta t_{A\to B} = \frac{d}{\cos\theta v_{zwemmer} + \cos{(-30°)} v_{water}} = 320s$$

$$\Delta t_{B\to A} = \frac{d}{\cos\theta v_{zwemmer} - \cos{(-30°)} v_{water}} = 549s$$

Antwoord: $\Delta t_{A\to B} + \Delta t_{B\to A} = 869$ s.
c)

$$\Delta t_{A\to B} = \frac{d}{v_{zwemmer}} = \Delta t_{B\to A} = 400$$

Antwoord: $\Delta t_{A\to B} + \Delta t_{B\to A} = 800$ s.

3.6 B2

3.7 B3

3.8 B4