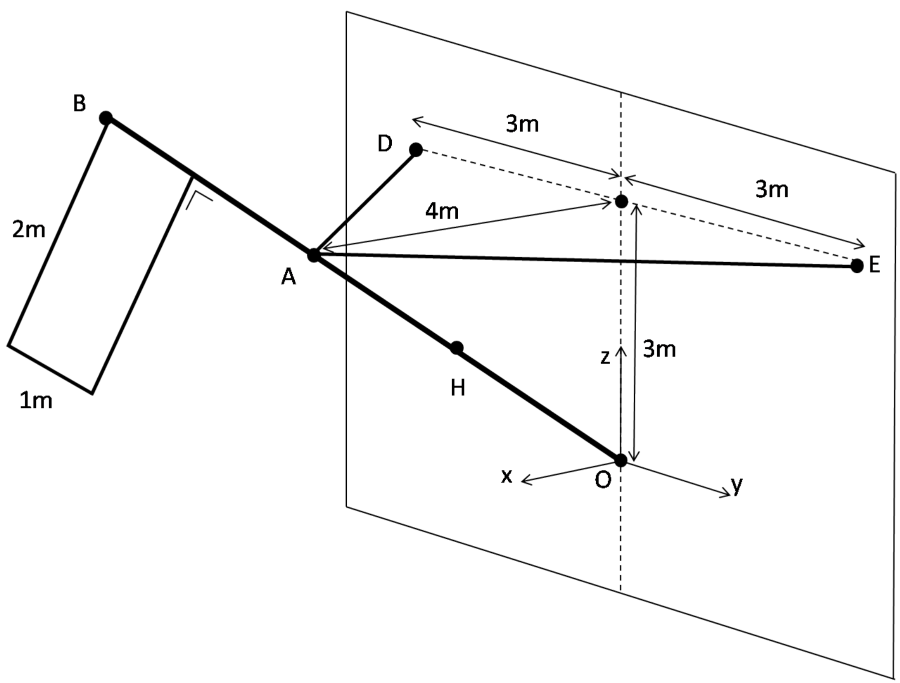
Vraag 1

Een mast met een massa m=20kg is scharnierend verbonden met de muur van een gemeentehuis. De mast kan beschouwd worden als een homogene dunne staaf met lengte OB=9m. De verbinding van de mast met de muur in het punt O is een scharnierverbinding die translatie volgens de x-,y- en z-richting verhindert, evenals een rotatie rond de as van de mast OB verhindert. Twee gewichtloze staven AD en AE verbinden de mast bovenaan met de muur. Deze staven zijn scharnierend verbonden met de mast in het punt A en met de muur in de punten D en E. Deze staven bevinden zich in een horizontaal vlak. Op het einde van de mast bevindt zich een rechthoekig uithangbord van 1m op 2m met massa m_b=5kg. Dit bord is onwrikbaar verbonden met de mast. Op dit uithangbord werkt een windbelasting evenwijdig met de y-as. Deze windbelasting is gelijkmatig over het bord verdeeld.

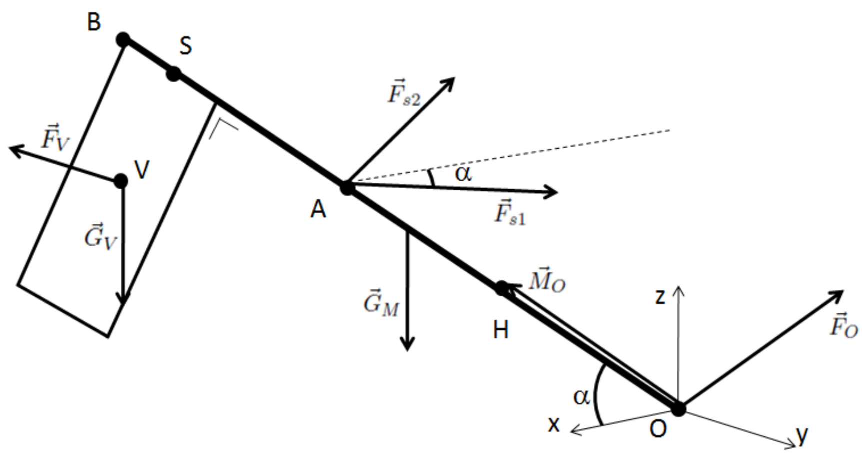


gevraagd :

1. Teken een vrijlichaamsdiagram van de mast met uithangbord bij windstilte.
2. Bereken de reactiekracht en reactiemoment in het scharnierpunt O met de muur, geef de componenten van de kracht en het moment die op de mast werkt in het xyz-assenstelsel bij windstilte.
3. Bereken de kracht in de twee verbindingsstaven bij een windbelasting van 100N. Geef duidelijk aan of de staven aan druk of aan trek onderworpen zijn.
4. Bereken de snedekracht en het snedemoment in het punt H, gelegen in het midden van OA, voor de windbelasting uit vraag 3. Geef deze kracht en moment als normaalkracht, dwarskracht, buigmoment en torsiemoment op het stuk van de mast dat tussen het punt H en de muur ligt.

oplossing :

1. Teken een vrijlichaamsdiagram van de mast met uithangbord bij windstilte.



2. Bereken de reactiekracht en reactiemoment in het scharnierpunt O met de muur, geef de componenten van de kracht en het moment die op de mast werkt in het xyz-assenstelsel bij windstilte.

   We berekenen eerst de verschillende krachten, de coördinaten van hun aangrijpingspunten en de momenten van de krachten t.o.v $Oxyz$.

$$\sin\alpha = 3/5;\ \cos\alpha = 4/5;\ OB = 9\text{m};\ SV = 1\text{m};\ OA = 5\text{m}$$

$$\vec{r}_V = \vec{OS} + \vec{SV} = (OS\cos\alpha + SV\sin\alpha, 0, OS\sin\alpha - SV\cos\alpha) = (7.4\text{m}, 0, 4.3\text{m})$$

$$\vec{G}_V = m_V\vec{g} = (0, 0, -50\text{N})$$

$$\vec{F}_V = m_V\vec{g} = (0, -100\text{N}, 0)$$

$$\vec{r}_M = (OB/2\cos\alpha, 0, OB/2\sin\alpha) = (3.6\text{m}, 0, 2.7\text{m})$$

$$\vec{G}_M = m_M\vec{g} = (0, 0, -200\text{N})$$

$$\vec{r}_A = (4\text{m}, 0, 3\text{m})$$

$$\vec{F}_{s1} = (-4/5F_{s1}, 3/5F_{s1}, 0)$$

$$\vec{F}_{s2} = (-4/5F_{s2}, -3/5F_{s2}, 0)$$

$$\vec{F}_O = (F_{Ox}, F_{Oy}, F_{Oz})$$

$$\vec{M}_O = (4/5M_O, 0, 3/5M_O)$$

$$\vec{r}_V \times \vec{G}_V = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 7.4\text{m} & 0 & 4.3\text{m} \\ 0 & 0 & -50\text{N} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 370\text{Nm} \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\vec{r}_V \times \vec{F}_V = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 7.4\text{m} & 0 & 4.3\text{m} \\ 0 & F_{Vy} & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} -F_{Vy}4.3 \\ 0 \\ F_{Vy}7.4 \end{array} \right\}\text{m}$$

$$\vec{r}_M \times \vec{G}_M = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3.6\text{m} & 0 & 2.7\text{m} \\ 0 & 0 & -200\text{N} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 720\text{Nm} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{r}_A \times \vec{F}_{s1} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4\text{m} & 0 & 3\text{m} \\ -4/5F_{s1} & 3/5F_{s1} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -9/5F_{s1} \\ -12/5F_{s1} \\ 12/5F_{s1} \end{Bmatrix}\text{m}$$

$$\vec{r}_A \times \vec{F}_{s2} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4\text{m} & 0 & 3\text{m} \\ -4/5F_{s2} & -3/5F_{s2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 9/5F_{s1} \\ -12/5F_{s1} \\ -12/5F_{s1} \end{Bmatrix}\text{m}$$

De evenwichtsvergelijkingen zijn:

$$\vec{G}_V + \vec{G}_M + \vec{F}_{s1} + \vec{F}_{s2} + \vec{F}_O + \vec{F}_V = \vec{0}(\text{krachtenevenwicht})$$

$$\vec{r}_V \times \vec{G}_V + \vec{r}_M \times \vec{G}_M + \vec{r}_A \times \vec{F}_{s1} + \vec{r}_A \times \vec{F}_{s2} + \vec{r}_v \times \vec{F}_v + \vec{M}_O = \vec{0}(\text{momentenevenwicht t.o.v } O)$$

Bij windstilte is $F_v = 0$. Wanneer we bovenstaande gegevens invullen in de evenwichtsvergelijkingen en het 6×6 stelsel oplossen vinden we

$$\vec{M}_O = \vec{0}$$

$$\vec{F}_O = 363\text{N}\vec{e}_x + 250\text{N}\vec{e}_y$$

3. Bereken de kracht in de twee verbindingsstaven bij een windbelasting van $100N$. Geef duidelijk aan of de staven aan druk of aan trek onderworpen zijn.

   Wanneer we bovenstaande gegevens invullen in de evenwichtsvergelijkingen, rekening houden met $F_{vy} = 100N$ en het 6×6 stelsel oplossen vinden we

   $$F_{s1} = 85\text{N};\ F_{s2} = 369\text{N}$$

   Beide staven ondervinden een trekkracht.

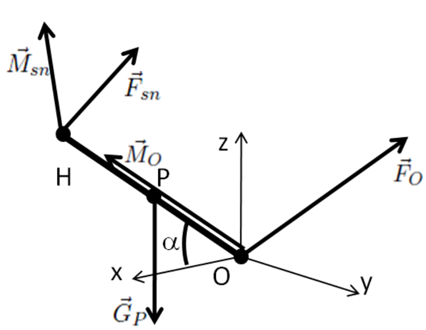
   Bij het oplossen van het stelsel vinden we ook

   $$\vec{M}_O = -80\text{Nm}\vec{e}_x - 60\text{Nm}\vec{e}_z$$

   $$\vec{F}_O = 363\text{N}\vec{e}_x + 70\text{N}\vec{e}_y + 250\text{N}\vec{e}_z$$

4. Bereken de snedekracht en het snedemoment in het punt H, gelegen in het midden van OA, voor de windbelasting uit vraag 3. Geef deze kracht en moment als normaalkracht, dwarskracht, buigmoment en torsiemoment op het stuk van de mast dat tussen het punt H en de muur ligt.

   Een vrijlichaamsdiagram van het stuk van de mast OH is gegeven door



   $$\vec{r}_P = (1\text{m}, 0, 0.75\text{m})$$

$$\vec{G}_P = -\frac{OH}{OB} m_M \vec{g} = -56N\vec{e}_z$$

$$\vec{r}_H = (2\text{m}, 0, 1.5\text{m})$$

$$\vec{e}_H = \frac{\vec{r}_H}{\|\vec{r}_H\|} = (4/5, 0, 3/5)$$

Het snedemoment kan berekend worden uit de momentenvergelijking t.o.v. H:

$$\vec{M}_{sn} + \vec{M}_O + (\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \vec{G}_P + (\vec{r}_O - \vec{r}_H) \times \vec{F}_O = \vec{0}$$

zodat

$$\vec{M}_{sn} = -\vec{M}_O - (\vec{r}_P - \vec{r}_H) \times \vec{G}_P - (\vec{r}_O - \vec{r}_H) \times \vec{F}_O = \vec{0}$$

Wanneer we de gegevens invullen en verder uitwerken vinden we dat

$$\vec{M}_{sn} = \left\{ \begin{array}{c} -25 \\ 100.6 \\ 200 \end{array} \right\} \text{Nm}$$

$\vec{M}_{torsie}$ is de projectie van het snedemoment op de as OH en is gegeven door

$$\vec{M}_{torsie} = (\vec{M}_{sn} \cdot \vec{e}_H)\vec{e}_H = \left\{ \begin{array}{c} 80 \\ 0 \\ 60 \end{array} \right\} \text{Nm}$$

$$\vec{M}_{buig} = \vec{M}_{sn} - \vec{M}_{torsie} = \left\{ \begin{array}{c} -105 \\ 100.6 \\ 140 \end{array} \right\} \text{Nm}$$

De snedekracht kan berekend worden uit het krachtenevenwicht:

$$\vec{F}_{sn} + \vec{G}_P + \vec{F}_O = \vec{0}$$

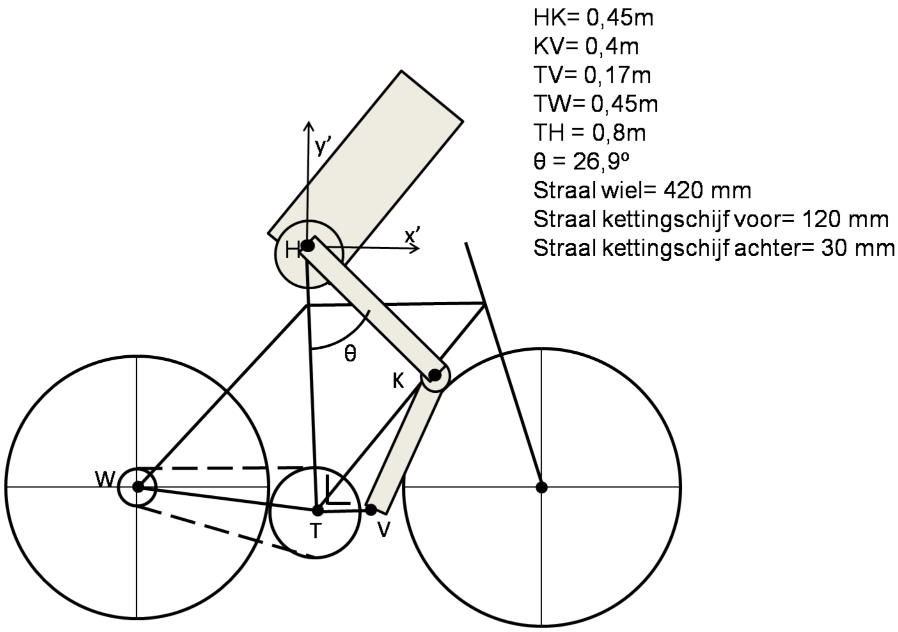
$$\vec{F}_{sn} = -\vec{G}_P - \vec{F}_O = \left\{ \begin{array}{c} -363 \\ -70 \\ -194 \end{array} \right\} \text{N}$$

$$\vec{F}_{norm} = (\vec{F}_{sn} \cdot \vec{e}_H)\vec{e}_H = \left\{ \begin{array}{c} -326 \\ 0 \\ -244 \end{array} \right\} \text{Nm}$$

$$\vec{F}_{dwars} = \vec{F}_{sn} - \vec{F}_{norm} = \left\{ \begin{array}{c} -37 \\ -70 \\ 50 \end{array} \right\} \text{Nm}$$

Vraag 2

Een fietser drijft de beweging van zijn fiets aan door met zijn bovenbeen HK en zijn onderbeen KV op de trapper te duwen. Daarbij kan de heup H als vast ten opzichte van het frame van de fiets worden beschouwd. De knie K is een scharnier en de voet V drukt rechtstreeks op de trapper. De trappers zitten met een trapperstang vast op de trapperas T, waarop ook een grote kettingschijf zit gemonteerd. De ketting loopt naar de kleine kettingschijf die op de wielas W is gemonteerd. De bovenste helft van de ketting is gespannen. De trapas maakt één omwenteling per seconde. Een waarnemer staat aan de zijkant van de weg en ziet de fietser voorbijrijden.



gevraagd :

1. Beschrijf en bereken de beweging van de verschillende onderdelen van de aandrijving
   (a) De grootte van de relatieve snelheid van de trappende voet V t.o.v. het frame
   (b) De grootte van de relatieve snelheid van het gespannen deel van de ketting t.o.v. het frame
   (c) De hoeksnelheid van de wielas W
   (d) De snelheid van de fietser t.o.v. het wegdek
2. Beschrijf de beweging die de waarnemer ziet als hij kijkt naar de knie K van de fietser
   (a) Omschrijf in één zin de beweging van het punt K zoals die door de waarnemer wordt waargenomen
   (b) Bereken de vector van de absolute snelheid van de knie op het ogenblik waarop de trapperstang voorwaarts horizontaal staat (zoals aangegeven in de figuur)
3. Verklaar in één zin waarom de snelheid van de fiets min of meer constant blijft ondanks het feit dat het koppel op de trapas fluctueert

oplossing :

1. beschrijf en bereken de beweging van de verschillende onderdelen van de aandrijving

   De onderdelen van de aandrijflijn maken t.o.v. het frame elk een eigen cirkelbeweging met constante snelheid :

   - de trappers en de voeten V van de fietser roteren om de as T met een hoeksnelheid ω_T; deze as maakt 1 omwenteling per seconde, en dus ω_T=2πrad/s=6.28rad/s
   - de schakels van de ketting die in contact zijn met de grote kettingschijf maken eveneens een cirkelbeweging met dezelfde hoeksnelheid ω_T
   - de schakels van de ketting die in contact zijn met de kleine kettingschijf maken een cirkelbeweging rond de achteras W van de fiets, met een hoeksnelheid ω_W
   - het achterwiel maakt een rotatiebeweging, eveneens rond de as W, en met dezelfde hoeksnelheid

   De relatie tussen de hoeksnelheid ω en de translatiesnelheid v van een punt op een straal R is bekend : $v = R\omega$.

   (a) de grootte van de relatieve snelheid van de trappende voet V t.o.v. het frame
   De voet maakt een cirkelbeweging met straal 0.17m en hoeksnelheid ω_T :

   $$v_V = 0.17\text{m} \times 6.28\text{rad/s} = 1.07\text{m/s}$$

   (b) de grootte van de relatieve snelheid van het gespannen deel van de ketting
   Een schakel van de ketting die op de grote kettingschijf loopt maakt een cirkelbeweging met straal 0.12m en hoeksnelheid ω_T :

   $$v_{\text{ketting}} = 0.12\text{m} \times 6.28\text{rad/s} = 0.754\text{m/s}$$

   Elke schakel heeft een snelheidsvector met dezelfde grootte, maar met een variabele oriëntatie : als de schakel in contact is met één van de beide kettingschijven is de snelheidsvector rakend aan de cirkel van die kettingschijf, als de schakel zich bevindt in het gespannen deel van de ketting is de snelheidsvector gericht rakend aan het gespannen deel en wijzend naar het achterwiel.

   (c) de hoeksnelheid van de wielas W
   Een schakel van de ketting die op de kleine kettingschijf loopt maakt een cirkelbeweging met straal 0.03m en translatiesnelheid 0.754m. De gevraagde hoeksnelheid is dan

   $$\omega_W = \frac{v_{\text{ketting}}}{R_{\text{schijf}}} = \frac{0.754\text{m/s}}{0.03\text{m}} = 25.13\text{rad/s} = 8\pi\text{rad/s}$$

   (d) de snelheid van de fietser t.o.v. het wegdek
   Het achterwiel van de fiets maakt een cirkelbeweging met straal 0.42m en hoeksnelheid 25.13rad/s :

   $$v_{\text{wiel}} = 0.42\text{m} \times 25.13\text{rad/s} = 10.56\text{m/s}$$

   Doordat er geen slip optreedt tussen het wiel en de stilstaande weg is deze snelheid meteen de lineaire snelheid van de fiets v_{fiets}=10.56m/s.

2. beschrijf de beweging die de waarnemer ziet als hij kijkt naar de knie K van de fietser

   De waarnemer gebruikt een vast assenstelsel als referentie, met x-as evenwijdig aan de rijrichting van de fiets en de y-as er loodrecht op. De fiets voert een translatiebeweging uit met snelheid

   $$\vec{v}_{\text{fiets}} = 10.56\text{m/s}\vec{e}_x$$

   De benen van de fietser en de onderdelen van de aandrijving voeren bovendien een relatieve beweging uit t.o.v. het frame van de fiets, zoals berekend in voorgaand puntje. De absolute beweging van de onderdelen van de aandrijving is dus gelijk aan de som van de sleepbeweging (translatie van het frame van de fiets en de heup van de fietser) en een relatieve beweging van het onderdeel t.o.v. het frame van de fiets of de heup van de fietser. De beweging t.o.v. de heup wordt uitgedrukt in het assenstelsel $x'y'$ met oorsprong in de heup.

(a) omschrijf in één zin de beweging van het punt K zoals die door de waarnemer wordt waargenomen

Een waarnemer naast de weg ziet de beweging van de knie van de fietser als de samenstelling van een translatie met snelheid v_{fiets} met een heen en weergaande cirkelbeweging van de knie rond de heup.

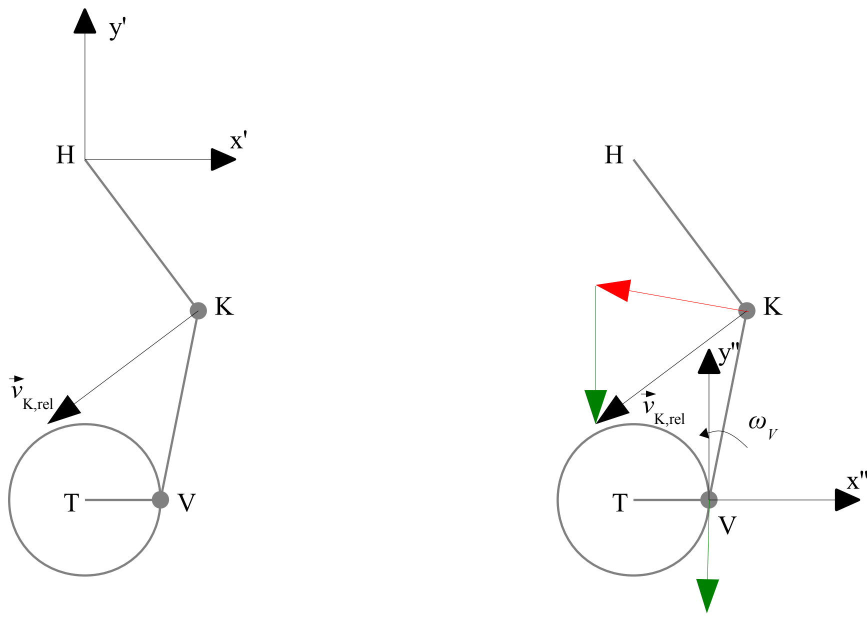
(b) bereken de vector van de absolute snelheid van de knie op het ogenblik waarop de trapperstang voorwaarts horizontaal staat (zoals aangegeven in de figuur)

De absolute snelheid van de knie K bestaat uit 2 componenten :

$$\vec{v}_{K,\text{abs}} = \vec{v}_{K,\text{sleep}} + \vec{v}_{K,\text{rel}}$$

De sleepcomponent is gelijk aan de snelheid van de heup

$$\vec{v}_{K,\text{sleep}} = 10.56\text{m/s}\vec{e}_x$$



De relatieve snelheid van de knie kan op 2 manieren worden berekend :

i. als een rotatiebeweging van het bovenbeen HK rond de heup H, maar met nog onbekende hoeksnelheid in de beweging rond H

ii. als een beweging van het onderbeen ten opzichte van de voet V, waarvan de snelheid bekend is, maar waarbij de grootte van de hoeksnelheid van het onderbeen nog niet bekend is

De eerste stap gebruikt het linkerdeel van de figuur en de tweede stap gebruikt het rechterdeel.

De snelheid van de knie K die langs beide wegen wordt berekend, moet uiteraard gelijk zijn, en dat laat toe om de onbekende kinematische grootheden te bepalen.

Het onderbeen KV sluit een hoek in met de vertikale die bepaald is als :

$$\arcsin\frac{\text{HK}\sin 26.9^\circ - \text{TV}}{\text{KV}} = 4.82^\circ$$

i. rotatiebeweging rond de heup H : de snelheidsvector $\vec{v}_{K,\text{rel}}$ staat loodrecht op het bovenbeen HK, maar hij heeft een nog onbekende grootte $v_{K,\text{rel}}$

$$\vec{v}_{K,\text{rel}} = v_{K,\text{rel}}(-\cos 26.9^\circ\vec{e}_{x'} - \sin 26.9^\circ\vec{e}_{y'}) = -0.892v_{K,\text{rel}}\vec{e}_{x'} - 0.452v_{K,\text{rel}}\vec{e}_{y'}$$

ii. samengestelde beweging rond de trapas T

De beweging van de knie kan nu aanzien worden als een samenstelling van de sleepbeweging van de voet V (met een snelheidsvector waarvan de grootte berekend is in voorgaand puntje 1.07m/s, en waarvan de oriëntatie in deze stand van de trapas bekend is als verticaal neerwaarts), en een rotatiebeweging van het onderbeen VK rond de voet V (waarvan de oriëntatie bekend is, maar de grootte ω_V nog niet). Op het rechterdeel van de figuur staat de sleepsnelheid in het groen aangeduid en de relatieve snelheid in het rood.

$$\vec{v}_{K,\text{rel}} = \underbrace{\vec{v}_V}_{\text{sleep}} + \underbrace{\vec{\omega}_V \times \vec{KV}}_{\text{relatief}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{-1.07\text{m/s}\vec{e}_{y''}}_{\text{sleep}} + \underbrace{-\text{KV}\omega_V \cos 4.82^\circ \vec{e}_{x''} + \text{KV}\omega_V \sin 4.82^\circ \vec{e}_{y''}}_{\text{relatief}} \\
&= -0.399\text{m}\omega_V \vec{e}_{x''} + (0.0336\text{m}\omega_V - 1.07\text{m/s})\vec{e}_{y''}
\end{aligned}
$$

Gelijkstelling van de beide uitdrukkingen voor de relatieve snelheid (de zwarte pijl in de snelheidsdriehoek) geeft 2 vergelijkingen :

$$
\begin{cases}
-0.892 v_{K,\text{rel}} &= -0.399\text{m}\omega_V \\
-0.452 v_{K,\text{rel}} &= 0.0336\text{m}\omega_V - 1.07\text{m/s}
\end{cases}
$$

Oplossing van dit stelsel geeft onder meer : $v_{K,\text{rel}}$=2.03m/s. Nu is de vector van de relatieve snelheid volledig bekend :

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_{K,\text{absoluut}} &= \vec{v}_{K,\text{sleep}} + \vec{v}_{K,\text{relatief}} \\
&= 10.56\text{m/s}\vec{e}_x + (-1.81\text{m/s}\vec{e}_x - 0.918\text{m/s}\vec{e}_y) \\
&= 8.75\text{m/s}\vec{e}_x - 0.918\text{m/s}\vec{e}_y
\end{aligned}
$$

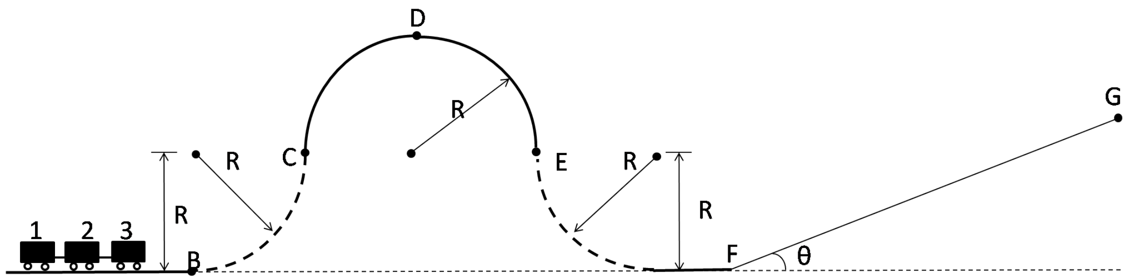
De waarnemer ziet de knie ogenblikkelijk bewegen met een voorwaartse snelheidscomponent van 8.75m/s en een neerwaartse component van 0.918m/s.

3. verklaar in één zin waarom de snelheid van de fiets min of meer constant blijft ondanks het feit dat het koppel op de trapas fluctueert

   De grote traagheid van de fiets en de fietser (stel ongeveer 80kg) zorgen ervoor dat de snelheid nauwelijks varieert, want elke snelheidsverandering (= versnelling) zou een traagheidskracht ma vergen, die de aandrijving niet kan leveren.

Vraag 3

Een treintje bestaat uit drie identieke wagentjes, elk met een massa m=100kg. Ze zijn onderling scharnierend verbonden door gewichtloze staven. In de scharnieren is er geen wrijving. De afstanden tussen de massacentra van de drie wagentjes zijn gelijk aan d=3m, de afstand van de wagentjes tot de rail kan verwaarloosd worden. De wielen van de wagentjes bewegen wrijvingsloos in de rails van een pretparkattractie. De rails zijn zo geconstrueerd dat de wielen niet uit de rails kunnen loskomen. Het bestudeerde stuk van de attractie bevindt zich in een verticaal vlak. Het traject bestaat uit rechte stukken en cirkelbogen met straal R=15m zoals aangegeven op onderstaande figuur.



gevraagd :

1. Op het rechte stuk AB versnellen de wagentjes vanuit rust tot een snelheid v_1=30m/s doordat een luchtdrukmechanisme een constante kracht uitoefent op het laatste (meest achteraan gelegen) wagentje van het treintje. De versnelling vanuit rust tot snelheid v_1 vindt plaats in een tijdspanne t_1=5s.

   (a) Bereken de kracht die het luchtdrukmechanisme levert bij de beschreven constante versnelling van het treintje.

   (b) Bereken de krachten in de gewichtsloze staven tussen de wagentjes 1 en 2, en tussen de wagentjes 2 en 3.

2. Verder op het traject komt het treintje terecht op het cirkelvormige stuk rail tussen de punten C en E. De straal van de cirkel is gelijk aan R=15m. CE komt overeen met een halve cirkelomtrek.

   (a) Bereken de snelheid waarmee het massacentrum van het middelste wagentje (2) doorkomt in de punten D en E.

   (b) Bereken de reactiekracht van de rail op wagentje 1 wanneer het middelste wagentje 2 doorkomt in het punt D. Bereken ook de reactiekracht op dat moment van de rail op respectievelijk wagentje 2 en 3.

3. Op het eind van de rit wordt het treintje afgeremd op het stuk rail tussen F en G, dat een hoek θ=10° ten opzichte van de horizontale maakt. De afremming van de snelheid bij het begin van deze helling tot het platform waar de reizigers kunnen uitstappen (afstand FG) is 60 meter. De afremming gebeurt met een constante vertraging.

   (a) Bereken de gemiddelde remkracht die volgens de richting van de rail geleverd moet worden.

   (b) Welke arbeid levert de remkracht tijdens de afremming?

oplossing :

1. Op het rechte stuk AB versnellen de wagentjes vanuit rust tot een snelheid v_1=30m/s doordat een luchtdrukmechanisme een constante kracht uitoefent op het laatste (meest achteraan gelegen) wagentje van het treintje. De versnelling vanuit rust tot snelheid v_1 vindt plaats in een tijdspanne t_1=5s.

   (a) Bereken de kracht die het luchtdrukmechanisme levert bij de beschreven constante versnelling van het treintje.

   (b) Bereken de krachten in de gewichtsloze staven tussen de wagentjes 1 en 2, en tussen de wagentjes 2 en 3.

   (a) Aangezien de versnelling constant is, moet ook de resulterende kracht constant zijn. De stoot die het wagentje krijgt is dus

   $$\vec{N} = \int_0^{t_1} \vec{F} dt = \vec{F} t_1$$

   De impulsverandering is gegeven door

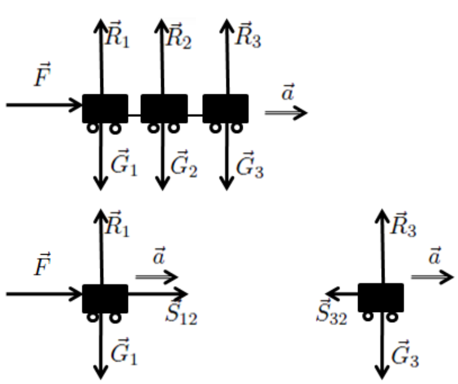
   $$\vec{p}_B - \vec{p}_A = 300 \cdot 30 \text{kg m/s} \vec{e}_x - 0 = 9000 \text{Ns} \vec{e}_x$$

   De kracht kan nu berekend worden m.b.v de impulswet

   $$\vec{N} = \vec{p}_B - \vec{p}_A$$

   $$\vec{F} = \frac{\vec{p}_B - \vec{p}_A}{t_1} = 1800 \text{N} \vec{e}_x$$

   (b) Bereken de krachten in de gewichtsloze staven tussen de wagentjes 1 en 3, en tussen de wagentjes 2 en 3. de vrijlichaamsdiagramma's van de drie wagentjes samen, respectievelijk het eerste en het derde wagentje zijn gegeven door



   De bijhorende dynamische krachtenvergelijkingen volgens de x-as zijn gegeven door:

   $$F_x = F = (m_1 + m_2 + m_3)a \text{ (geheel)}$$

   $$F + S_{12} = m_1 a \text{ (wagentje 1)}$$

   $$-S_{32} = m_3 a \text{ (wagentje 2)}$$

   Hieruit vinden we

   $$a = 6\text{m/s}^2$$

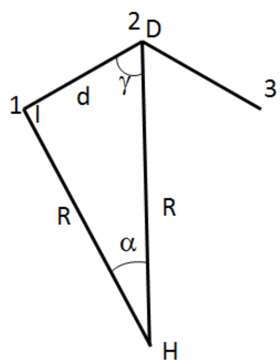
   $$S_{12} = -1200\text{N (druk)}$$

   $$S_{32} = -600\text{N (druk)}$$

2. Verder op het traject komt het treintje terecht op het cirkelvormige stuk rail tussen de punten C en E. De straal van de cirkel is gelijk aan R=15m. CE komt overeen met een halve cirkelomtrek.

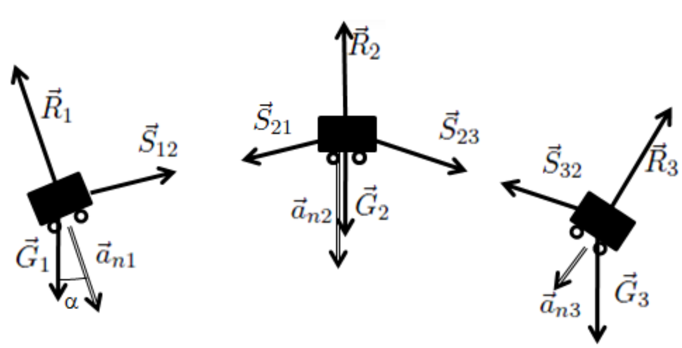
   (a) Bereken de snelheid waarmee het massacentrum van het middelste wagentje (2) doorkomt in de punten D en E.

   - punt D
     Aangezien de wielen wrijvingsloos bewegen, is dit een conservatief systeem. De energiewet voor een conservatief systeem is gegeven door
     $T_B + V_B = T_D + V_D$
     $T_B = (m_1 + m_2 + m_3)v_1^2/2 = 135000\text{J}; V_B = 0$
     Om de potentiële energie te bereken in de tweede stand hebben we de hoogte van ieder wagentje nodig.



     $h_{2D} = 30\text{m}$
     Gebruik makend van de cos-regel in driehoek DHI vinden we
     $15^2 = 3^2 + 15^2 - 2 \cdot 3 \cdot 15 \cos\gamma$ of $\gamma = 84.26°$
     $h_{1D} = h_{3D} = h_{2D} - d\cos\gamma = 29.7\text{m}$
     $V_D = m_1 g h_{1D} + m_2 g h_{2D} + m_3 g h_{3D} = 189400\text{J}$
     $T_D = (m_1 + m_2 + m_3)v_D^2/2$
     Hieruit vinden we dat $v_D = 17.4\text{m/s}$
   - punt E
     Wanneer het middelste wagentje door E passeert, ligt het massacentrum van de 3 wagentjes samen in E
     $V_E = (m_1 + m_2 + m_3)gh_E = 45000\text{J}$
     uit de energiewet
     $T_B + V_B = T_E + V_E$
     vinden we nu dat $v_D = 24.5\text{m/s}$

   (b) Bereken de reactiekracht van de rail op wagentje 1 wanneer het middelste wagentje 2 doorkomt in het punt D. Bereken ook de reactiekracht op dat moment van de rail op respectievelijk wagentje 2 en 3. De vrijlichaamsdiagramma's van de verschillende wagentjes zijn gegeven door



De grootte van de versnelling is voor ieder wagentje identiek en is gegeven door

$$a_{n1} = a_{n2} = a_{n3} = v_D^2/R = 20.18\text{m/s}^2$$

De hoek α is $180° - 2\gamma = 11.84°$

De richting van de staven tov de wagentjes werd niet gegeven. Er zijn verschillende benaderingen mogelijk:

optie 1 Voor elk wagentje benaderen we de richting van de staaf loodrecht op $\vec{a}_{ni}$

optie 2 Voor elk wagentje benaderen we de richting van de staaf door de verbindingsas tussen de massacentra van de verschillende wagentjes

Hier zullen we optie 1 verder uitwerken. De krachtenevenwichtsvergelijkingen zijn dan gegeven door

$$\vec{G}_1 + \vec{R}_1 + \vec{S}_{12} = m_1\vec{a}_{n1}$$

$$\vec{G}_2 + \vec{R}_2 + \vec{S}_{21} + \vec{S}_{23} = m_2\vec{a}_{n2}$$

$$\vec{G}_3 + \vec{R}_3 + \vec{S}_{32} = m_3\vec{a}_{n3}$$

Projectie op de assen evenwijdig met a_{n1}, respectievelijk a_{n2}, a_{n3} levert

$$R_1 - G_1 \cos\alpha = -m_1 a_{n1}$$

$$R_2 - G_2 = -m_2 a_{n2}$$

$$R_3 - G_3 \cos\alpha = -m_3 a_{n3}$$

of

$$R_1 = -1038\text{N}; R_2 = -1018\text{N}; R_3 = -1038\text{N}$$

3. Op het eind van de rit wordt het treintje afgeremd op het stuk rail tussen F en G, dat een hoek θ=10° ten opzichte van de horizontale maakt. De afremming van de snelheid bij het begin van deze helling tot het platform waar de reizigers kunnen uitstappen (afstand FG) is 60 meter. De afremming gebeurt met een constante vertraging.

   (a) Bereken de gemiddelde remkracht die volgens de richting van de rail geleverd moet worden.

   (b) Welke arbeid levert de remkracht tijdens de afremming?

   De arbeid geleverd door de remkracht $\vec{F}$ is gegeven door

$$U_n = V_G - V_F + T_G - T_F$$

met

$$V_F = 0\text{J}; V_F = 60\text{m} \ \sin 10° \cdot (m_1 + m_2 + m_3) = 31260\text{J}$$

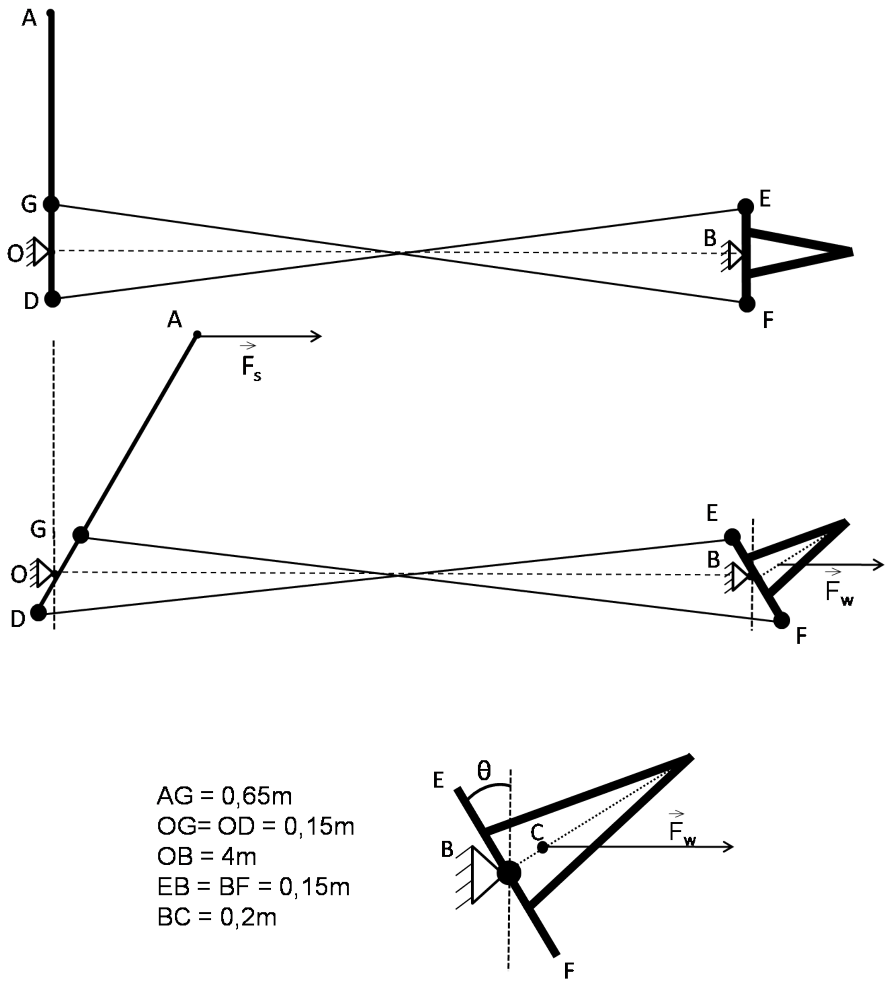
$$T_F = T_B = (m_1 + m_2 + m_3)v_1^2/2 = 135000\text{J}; T_G = 0$$

De gemiddelde remkracht is

$$F = U_n/60\text{m} = 1729\text{N}$$

Vraag 4

Onderstaande figuur toont een schets van de stuurstang en het hoogteroer van een eenvoudig sportvliegtuig. Wanneer de piloot de stuurstang DA naar zich toetrekt, scharniert deze stang in O. Twee kabels (DE en FG) zijn verbonden met het hoogteroer EF. Deze kabels zorgen ervoor dat de kantelbeweging van de stuurstang overgebracht wordt naar de kantelbeweging van het hoogteroer. Door de luchtstroming over het hoogteroer werkt er op het hoogteroer een kracht $\vec{F}_w$. Deze kracht grijpt aan in het punt C en is evenwijdig met de vliegrichting van het vliegtuig. De grootte van deze kracht is gegeven door $F_w = 500\text{N}\,|\sin\theta|$, met θ de uitwijking van het hoogteroer, gemeten ten opzichte van de neutrale instelling van het hoogteroer. De piloot houdt de stuurstang vast met zijn of haar hand in het punt A en beweegt de stang door middel van een kracht $\vec{F}_s$, evenwijdig met de lengte-as van het vliegtuig.

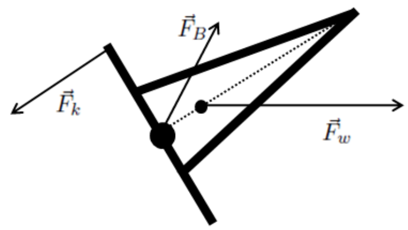


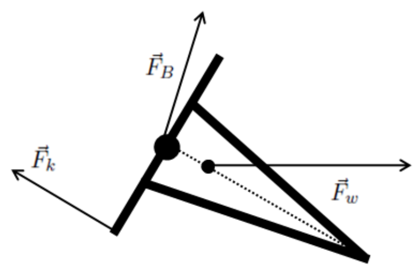
gevraagd :

1. Teken een vrijlichaamsdiagram van het hoogteroer
2. Pas de methode van de virtuele arbeid toe om de kracht $\vec{F}_s$ te berekenen die de piloot op de stuurstang moet uitoefenen, als functie van de uitwijkingshoek θ van het hoogteroer
3. Maak een schets van de functie die de grootte van de kracht $\vec{F}_s$ geeft als functie van de hoek θ en interpreteer (verklaring van eventuele nulpunten, stijgend of dalend verloop). De hoek θ is begrensd tussen -30° en +30°.

oplossing :

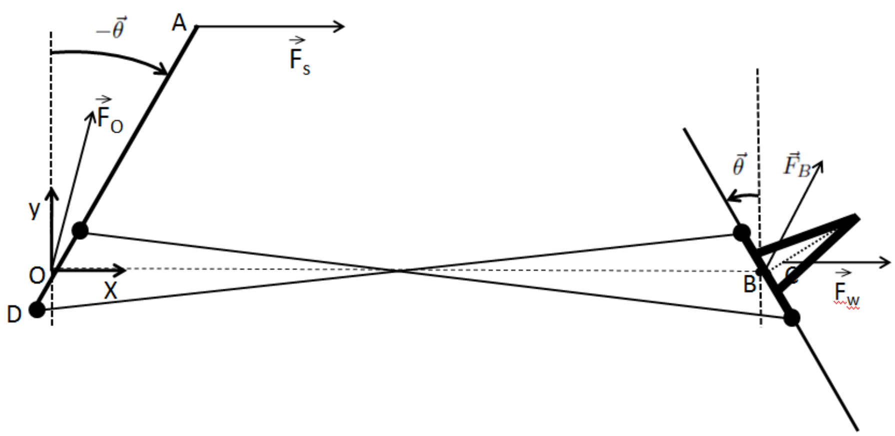
1. Teken een vrijlichaamsdiagram van het hoogteroer





2. Pas de methode van de virtuele arbeid toe om de kracht $\vec{F}_s$ te berekenen die de piloot op de stuurstang moet uitoefenen, als functie van de uitwijkingshoek θ van het hoogteroer

   Het vrijlichaamsdiagram van het volledige systeem is gegeven door



   Als virtuele verplaatsing kiezen we een rotatie van het hoogteroer over een hoek $\delta\vec{\theta} = \delta\theta\vec{e}_z$, rond een vaste as door B en een rotatie van de stuurstang over een hoek $-\delta\vec{\theta}$ rond een vaste as door O. Aangezien de punten O en B niet verplaatsen zullen de reactiekrachten in deze punten geen virtuele arbeid leveren. De stelling van de virtuele arbeid toegepast op dit systeem geeft dus

$$\vec{F}_w \cdot \delta u_C + \vec{F}_s \cdot \delta u_A = 0$$

$$F_w \delta x_C + F_s \delta x_A = 0 \text{ (VA)}$$

   de virtuele verplaatsingen kunnen op 2 manieren berekend worden:

   - rechtstreeks

$$\delta\vec{u}_A = -\delta\vec{\theta} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_O) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & -\delta\theta \\ OA\sin\theta & OA\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \delta x_A = OA\cos\theta\delta\theta$$

$$\delta \vec{u}_C = \delta \vec{\theta} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_B) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ BC\cos\theta & BC\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \delta x_C = -BC\sin\theta\delta\theta$$

- via de veralgemeende coördinaten

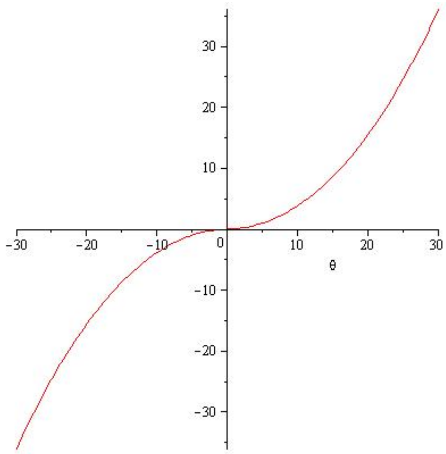
$$x_A = x_O + OA\sin\theta \Rightarrow \delta x_A = \frac{\partial x_A}{\partial\theta}\delta\theta = OA\cos\theta\delta\theta$$

$$x_C = x_B + BC\cos\theta \Rightarrow \delta x_B = \frac{\partial x_B}{\partial\theta}\delta\theta = -BC\sin\theta\delta\theta$$

Beide methodes geven hetzelfde resultaat. Invullen in vergelijking (VA) geeft ons

$$F_s = F_w\frac{BC\sin\theta}{OA\cos\theta} = 125\text{N}|\sin\theta|\tan\theta$$

3. Maak een schets van de functie die de grootte van de kracht $\vec{F}_s$ geeft als functie van de hoek θ en interpreteer (verklaring van eventuele nulpunten, stijgend of dalend verloop). De hoek θ is begrensd tussen -30° en +30°.



Wanneer het hoogteroer niet uitwijkt ($\theta = 0$) is er geen kracht nodig om het roer in evenwicht te houden. Hoe groter de uitwijking θ, hoe groter de kracht die nodig is om evenwicht te houden. Wanneer θ positief is, moet de bestuurder de stuurstang naar zich toe trekken, wanneer θ negatief is, is de kracht F_s negatief, wat betekent dat de bestuurder de stuurstang van zich weg moet duwen.