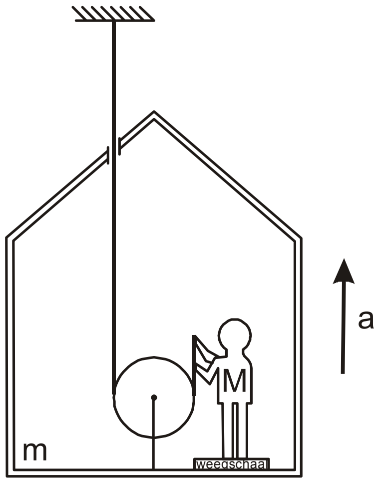
A1

Een man (massa M) bevindt zich op een weegschaal op een platform (massa m = M/2) en trekt zichzelf omhoog met versnelling a. Bepaal welke kracht S hij daarvoor op het touw moet uitoefenen en wat zijn schijnbaar gewicht R (zijn drukkracht op de weegschaal) is. (Katrol en touw zijn ideaal).



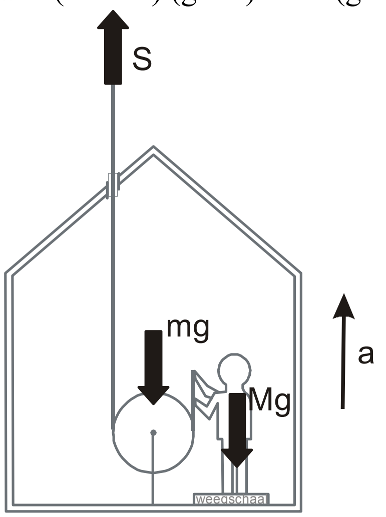
Oplossing:

Maak het geheel vrij. Er werken drie uitwendige krachten: de gewichten van man en platform Mg en mg, en de spankracht S in het touw. Al deze krachten werken in de y-richting. Aangezien het platform en de man dezelfde versnelling a hebben, kunnen we het tweede postulaat van Newton, geprojecteerd op de y-as schrijven als:

$S - mg - Mg = (m + M)a$

waaruit meteen volgt:

$S = (m + M).(g + a) = 3M(g + a)/2$

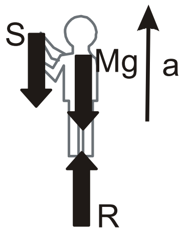


Wanneer we nu de man vrijmaken krijgen we de volgende uitdrukking voor het tweede postulaat van Newton:

$R - S - Mg = Ma$

Invullen van S en herschikken van de vergelijking levert dan:

$R = 5M(g + a)/2$



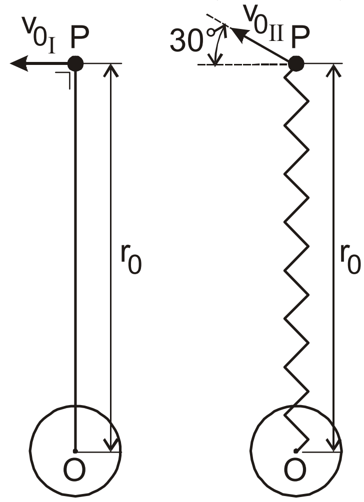
Eventueel kan ook het platform vrijgemaakt worden, maar dit levert uiteraard precies dezelfde resultaten op.

A2

In het raam van een denkoefening over de beweging van een satelliet rond de aarde worden twee fictieve gevallen vergeleken. In beide gevallen wordt een puntmassa P ("de satelliet", met massa m = 1 kg) weggeschoten ("gelanceerd") met een gegeven beginsnelheid v_0 vanuit een gegeven beginpositie ten opzichte van een vast punt O ("de aarde").

I) De satelliet is met de aarde verbonden door een ideaal touw. Loodrechte lancering, $v_{0I} = 10$ m/s, $r_0 = 5$ m.

II) De satelliet is met de aarde verbonden door een veer die op het ogenblik van de lancering 1 meter uitgerokken is, en een veerconstante k heeft (k = 10 N/m).
Lancering onder een hoek van 10°, $v_{0II} = 11{,}547$ m/s, $r_0 = 5$ m.



1. Bepaal voor beide gevallen I en II de vector impulsmoment van de satelliet P ten opzichte van het punt O op het ogenblik van de lancering.
2. Hoe evolueert dit impulsmoment na de lancering in het geval I en in het geval II? (Verklaar uw antwoord.)
3. In welk van de twee gevallen blijft de satelliet bewegen in een plat vlak dat gaat door O? Waardoor wordt dit vlak dan bepaald? (Verklaar uw antwoord.)
4. Bepaal in beide gevallen de "perksnelheid", en bereken de tijd die de voerstraal OP vanaf de lancering nodig heeft om een oppervlakte van 75 m^2 te beschrijven.

Oplossing:

1. Volgens de definitie geldt: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Voor geval I wordt dit dus:
   $\overrightarrow{L_{OI}} = \vec{r_0} \times m\overrightarrow{v_{OI}} = (0\ 5\ 0) \times (-10\ 0\ 0) = 50\vec{k}\ kgm^2/s$
   en voor geval II:

$\overrightarrow{L_{OII}} = \vec{r_0} \times m\overrightarrow{v_{OII}} = (0\ 5\ 0) \times (-10\ 5.774\ 0) = 50\vec{k}\ kgm^2/s$

De twee impulsmomenten zijn dus gelijk en gericht volgens de z-as (loodrecht op het vlak van de tekening en naar de lezer toe).

2. Alle uitwendige krachten op de satelliet gaan door het punt O (in I de touwkracht S, in II de veerkracht F_v). Zij leveren dus geen moment tegenover O. Vermits geldt dat het moment van de uitwendige krachten tegenover O gelijk is aan de verandering van het impulsmoment van de satelliet tegenover O, moet dit laatste dus gelijk zijn aan nul (zowel in I als in II). Het impulsmoment blijft met andere woorden constant.
3. Uit het voorgaande volgt dat het impulsmoment niet alleen in grootte maar ook in richting constant blijft. De impulsmomentvector staat, volgens de definitie, altijd loodrecht op de positievector $\vec{r}$ en de snelheidsvector $\vec{v}$. Deze vectoren blijven dus in hetzelfde plat vlak liggen dat dan ook het bewegingsvlak van de satelliet is. Dit geldt voor situatie I en II.
4. De perksnelheid $\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r_0} \times \vec{v}$. Voor geval I wordt dit dus:

$$\frac{d\overrightarrow{S_I}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \vec{r_0} \times \overrightarrow{v_{0I}} = \frac{1}{2} \cdot 50\vec{k} = 25\vec{k}\ m^2/s$$

en voor geval II: $\frac{d\overrightarrow{S_{II}}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \vec{r_0} \times \overrightarrow{v_{0II}} = \frac{1}{2} \cdot 50\vec{k} = 25\vec{k}\ m^2/s$

Aangezien de perksnelheid in beide gevallen constant is, kunnen we zeggen:

$$\Delta S = \int \frac{dS}{dt} dt = \frac{dS}{dt}\Delta t = 25\Delta t = 75\ m^2$$

waaruit volgt dat Δt gelijk is aan 3 sec.

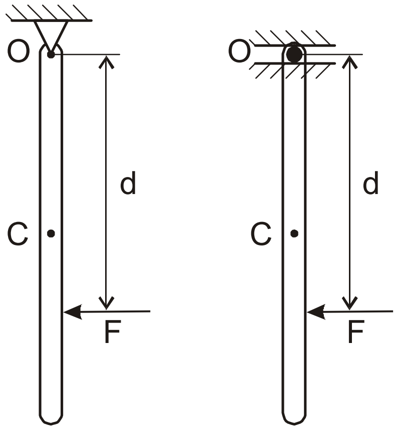
A3

Een homogene dunne staaf met lengte ℓ en massa m wordt vanuit een verticale beginpositie in beweging gebracht door een horizontale kracht F die aangrijpt op een afstand d van het bovenuiteinde. Er worden twee condities bekeken.

I) De staaf is in zijn bovenuiteinde scharnierend verbonden met de omgeving (vast punt O)

II) Het bovenuiteinde kan vrij schuiven over de horizontale door O (ideaal vrij contact).

Waaraan moet d gelijk zijn opdat de hoekversnelling α in de beide condities precies dezelfde zou zijn?



Oplossing:
We stellen voor beide gevallen de momentenvergelijking op.
In I is O een vast punt en dus kunnen we zeggen:

$$\sum \mathcal{M}_O \overline{F}_i' = I_O \alpha$$

De enige kracht die een moment levert tegenover O is F en bijgevolg wordt de vergelijking:

$Fd = ml^2\alpha/3$

Of dus: $\alpha = \dfrac{3Fd}{m\ell^2}$

In geval II moeten we de momentenvergelijking opstellen tegenover het massacentrum C. Ook nu levert alleen F een moment tegenover C (de uitwendige kracht in O staat immers loodrecht op de geleiding en gaat dus door C). De momentenvergelijking wordt in dit geval dus:

$$F \cdot \left(d - \frac{\ell}{2} \right) = \frac{m\ell^2}{12}\alpha$$

En dus: $\alpha = \dfrac{12F\left(d - \dfrac{\ell}{2} \right)}{m\ell^2}$

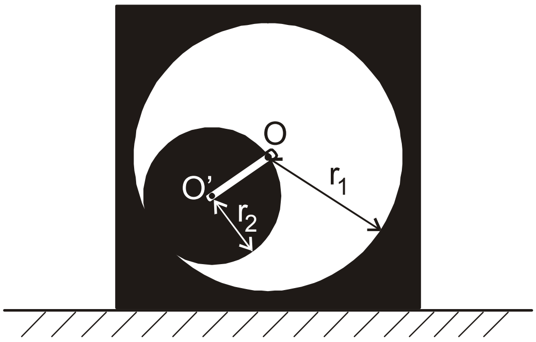
Gelijkstellen van beide uitdrukkingen voor α levert tenslotte:

$d = 2\ell/3$

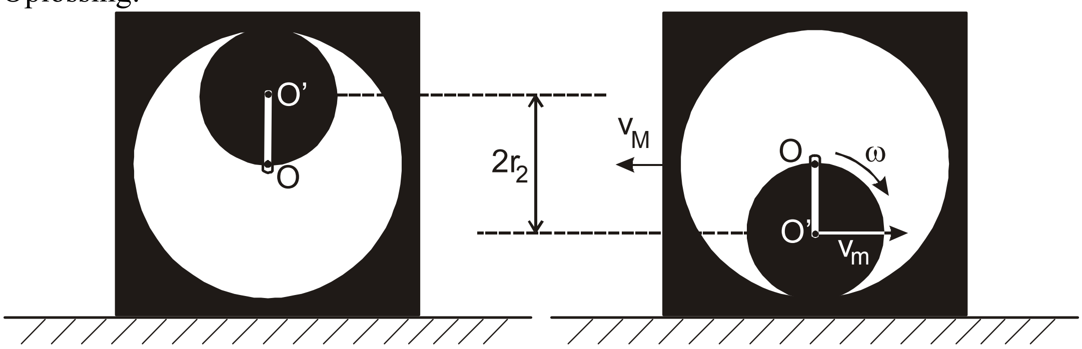
B1

Het voorgestelde systeem bestaat uit een blok met massa M en een (vol) wiel met massa m dat rolt zonder glijden in een cirkelvormige baan in het blok. Hierbij levert de wrijving geen arbeid. Het middelpunt van het wiel is m.b.v. een massaloze staaf scharnierend verbonden met het middelpunt van de cirkel. Het blok rust op een horizontaal vlak zonder wrijving. Het systeem wordt uit rust losgelaten met het tandwiel in de hoogste stand. (OO' verticaal naar omhoog).
Bereken de snelheden van het blok en het wiel, op het ogenblik dat dit in de laagste stand doorkomt. (OO' verticaal naar beneden).

M = 2 kg; m = 1 kg; r_1 = 20 cm; r_2 = 10 cm



Oplossing:



Tijdens de overgang van de beginsituatie (wiel bovenaan) naar de beschouwde situatie (wiel komt onderaan door) gelden de twee behoudswetten:

- er is behoud van impuls in de x-richting (aangezien er geen uitwendige krachten, en dus stoten, werken in deze richting op het systeem als geheel). De uitdrukking hiervoor is:

$$0 = -Mv_M + mv_m \qquad (1)$$

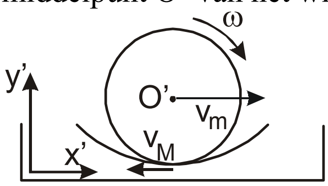
  v_m is de absolute snelheid van het massacentrum van het wiel in de onderste stand.
- er is behoud van energie voor het systeem als geheel (alleen potentiaalkrachten leveren arbeid). De vergelijking is:

$$mg \cdot 2r_2 = \frac{Mv_M{}^2}{2} + \frac{mv_m{}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \qquad (2)$$

  waarbij het nulniveau voor de potentiële energie in de onderste stand van O' genomen is en $I = mr_2^2/2$

In (1) en (2) komen drie onbekenden voor: v_M, v_m, ω. We hebben dus nog een derde vergelijking nodig om het probleem te kunnen oplossen. Deze derde vergelijking is een verbindingsvergelijking die het verband geeft tussen de snelheden van blok en wiel. We kunnen ze bijvoorbeeld afleiden met behulp van samengestelde beweging.

Neem een translerend assenstelsel x'y' vastgemaakt aan het blok en kijk naar het middelpunt O' van het wiel in de onderste stand.



De sleepsnelheid van O' is dan natuurlijk de snelheid van het blok: $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_M}$. De relatieve snelheid van dit punt is het gevolg van de rolbeweging van het wiel over het blok: $\overrightarrow{v_r} = r_2\omega\vec{i}$. De absolute snelheid van O' is gelijk aan de vector $\overrightarrow{v_m}$. Uit de vergelijking van de samengestelde beweging $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_s} + \overrightarrow{v_r}$, vinden we dus:

$\overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{v_M} + r_2\omega \cdot \vec{i}$ en na projectie op de x-as:

$$v_m = -v_M + r_2\omega \qquad (3)$$

De oplossing van de drie vergelijkingen geeft:

$v_M = \sqrt{\dfrac{8}{21}} = 0.617\ m/s$

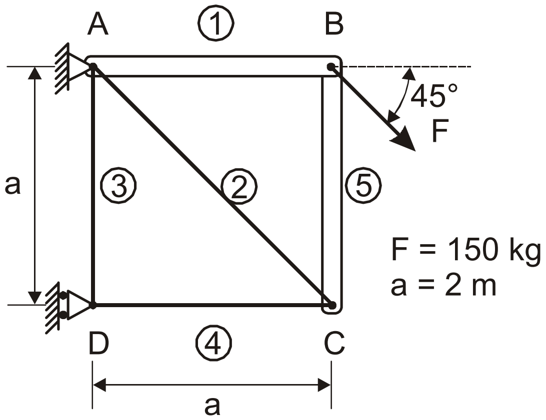
$v_m = 1.234\ m/s$

$\omega = 18.516\ rad/s$

B2

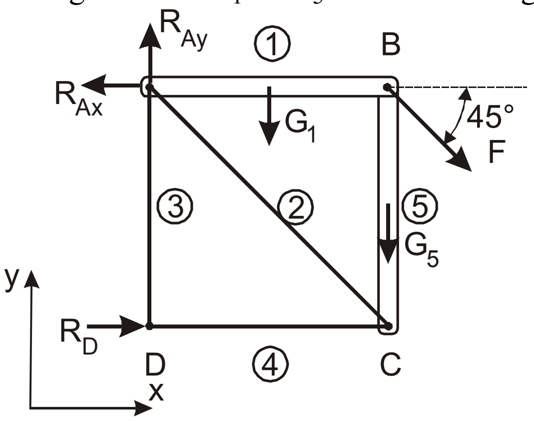
De constructie bestaat uit 5 staven met scharnierverbindingen in A, B, C en D. In A is een scharnierverbinding met de muur, in D een ideaal vrij contact.
De staven ① en ⑤ hebben een massa van 20 kg, de andere zijn gewichtsloos. Op de constructie werkt de kracht F die aangrijpt in het scharnierpunt B (F = 150 kg).
Bereken (volg de vijf aangegeven stappen!):

1. De verbindingskrachten van de muur op de constructie in A en D.
2. De krachten in de staven ③ en ④.
   (Hint: punt D)
3. De totale kracht $\overrightarrow{R_{B_5}}$ die in punt B werkt op staaf ⑤, de kracht in de staaf ② en de totale kracht $\overrightarrow{R_{C_5}}$ die in C werkt op staaf ⑤.
   (Hint: staaf ⑤; punt C).
4. De totale kracht $\overrightarrow{R_{A_1}}$ die in A werkt op de staaf ①.
   (Hint: punt A).
5. Uit stappen 1 tot 4 zijn alle onbekende krachten berekend. Gebruik nu de evenwichtsvoorwaarden voor staaf ① als controle op het resultaat.



Oplossing:

1. We maken de hele constructie vrij. In A werkt een uitwendige verbindingskracht vanwege het scharnier: twee onbekende componenten R_{Ax} en R_{Ay}, in D werkt een uitwendige verbindingskracht vanwege het vrij contact R_D. Verder werken nog twee gewichten G_1 en G_5 en de uitwendige kracht F op de constructie in.

   Dit leidt tot volgende evenwichtsvergelijkingen:

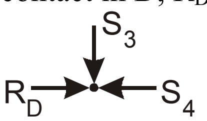
   $$x: \quad \frac{\sqrt{2}}{2}F - R_{Ax} + R_D = 0$$

   $$y: \quad R_{Ay} - \frac{\sqrt{2}}{2}F - G_1 - G_5 = 0$$

   $$\mathcal{M}_A : R_D \cdot a - G_1 \cdot \frac{a}{2} - G_5 \cdot a - \frac{\sqrt{2}}{2}F \cdot a = 0$$

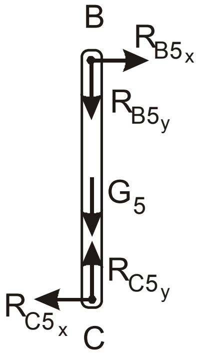
   De oplossing van dit stelsel is:
   $R_D = 406.07$ N
   $R_{Ax} = 512.13$ N
   $R_{Ay} = 506.07$ N

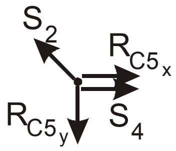
2. We maken knooppunt D vrij. Dit punt ondervindt krachten vanwege het vrij contact in D, R_D, en vanwege de ideale staven 3 en 4: S_3 en S_4.

   Uit de evenwichtsvergelijkingen volgt meteen dat S_3 gelijk is aan nul en dat S_4 gelijk moet zijn aan 406.07 N.

3. Maak staaf 5 en punt C vrij.





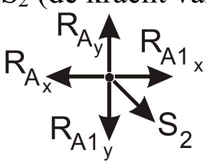
Zowel B als C kunnen beschouwd worden als meervoudige contacten. Staaf 5 ondervindt in beide punten dus een kracht vanwege het knooppunt: R_{B5x}, R_{B5y}, R_{C5x}, R_{C5y}. Op knooppunt C werken de gelijke en tegengestelde kracht met als componenten R_{C5x} en R_{C5y} en de krachten vanwege staven 2 en 4: S_2 en S_4. De evenwichtsvergelijkingen worden:

$$\left.\begin{aligned} x:&\quad R_{B5x} - R_{C5x} = 0 \\ y:&\quad R_{C5y} - R_{B5y} - G_5 = 0 \\ \mathcal{M}_B&: -R_{C5x}\cdot a = 0 \end{aligned}\right\}\text{staaf 5}$$

$$\left.\begin{aligned} x:&\quad S_4 + R_{C5x} - \frac{\sqrt{2}}{2}S_2 = 0 \\ y:&\quad \frac{\sqrt{2}}{2}S_2 - R_{C5y} = 0 \end{aligned}\right\}\text{punt C}$$

Uit dit stelsel volgt:
$R_{C5x} = 0$ N
$R_{B5x} = 0$ N
$S_2 = 574.26$ N
$R_{C5y} = 406.07$ N
$R_{B5y} = 206.07$ N

4. Knooppunt A ondervindt een kracht vanwege staaf 1 met componenten R_{A1x} en R_{A1y}, een kracht vanwege het scharnier R_{Ax} en R_{Ay} en de kracht vanwege staaf 2 S_2 (de kracht vanwege staaf 3 is gelijk aan nul, zie 2.):



De evenwichtsvergelijkingen zijn:

$$x:\quad R_{A1x} + \frac{\sqrt{2}}{2}S_2 - R_{Ax} = 0$$

$$y:\quad R_{Ay} - \frac{\sqrt{2}}{2}S_2 - R_{A1y} = 0$$

En dus: $R_{A1x} = 106.06$ N en $R_{A1y} = 100$ N. Op de staaf staan deze krachten resp. naar links en naar boven.