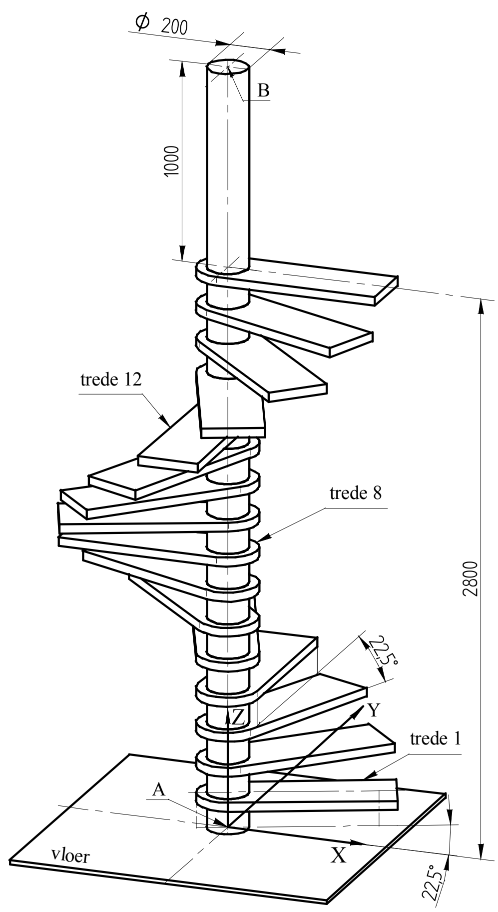
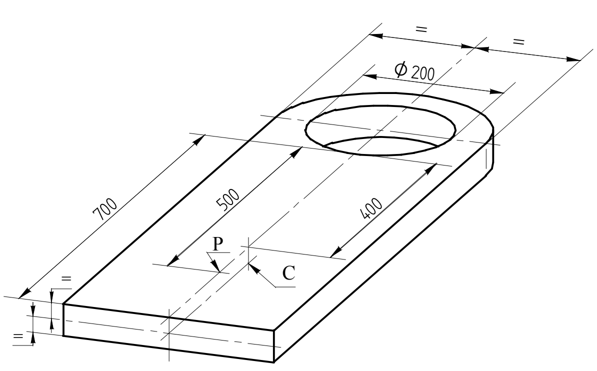
23 januari 2009, 13u30

Examen H1B0 Toegepaste Mechanica 1

Vraag 1

Een spiltrap in een gezinswoning verbindt een hoogteverschil van 2.8m tussen twee verdiepingen. De trap bestaat uit een centrale verticale spil AB met een diameter van 200mm, waartegen 16 radiale treden zijn vastgelast. De spil steekt nog 1m uit boven de bovenste trede. Elke trede steekt 700mm uit ten opzichte van de diameter van de centrale spil, en in het bovenaanzicht verspringt de middellijn van elke trede 22.5°. De massa van de centrale spil is 50kg. Elke trede heeft een massa van 9kg, en het massacentrum C ligt 400mm buiten de diameter van de centrale spil.





Bij de plaatsing van de trap in de woning is het onderste uiteinde van de centrale spil zodanig vastgezet dat dit uiteinde zich in geen enkele richting kan verplaatsen en dat een rotatie rond de verticale spilas evenmin mogelijk is. Rotatie van het onderuiteinde om de beide horizontale assen is daarentegen niet verhinderd. Het bovenuiteinde van de spilas is enkel verhinderd te verplaatsen in de beide horizontale richtingen.

Voor de analyse van de krachtswerking worden twee soorten personen gebruikt : personen van 90kg en personen van 50kg. Elke persoon staat op een radiale afstand van 500mm buiten de diameter van de centrale spil (punt P).

gevraagd : maak de trap vrij, en bereken de reactiekrachten in A en B door achtereenvolgens onderstaande vragen te beantwoorden:

1. omschrijf in woorden de vectoren die de reactiekrachten en -momenten voorstellen die optreden in elk van beide uiteinden A en B van de spil
2. maak een vrijlichaamsdiagram van de volledige trap onder een belasting van één persoon van 90kg op de 8^e trede
3. bereken het totale gewicht van de trap (spil + alle treden) en de ligging van het zwaartepunt
4. bereken alle reactiekrachten voor het belastingsgeval met één persoon van 90kg, en geef het verloop van de componenten van deze reactiekrachten weer wanneer deze persoon de trap beklimt, en zijn gewicht zich achtereenvolgens op elk van de 16 treden bevindt
5. bereken alle reactiekrachten voor het belastingsgeval waarbij vier personen van 90kg zich bevinden op de 2^e, de 6^e, de 10^e en de 14^e trede
6. bereken alle reactiekrachten voor het belastingsgeval waarbij vier personen van 50kg zich bevinden op de 8^e, de 10^e, de 12^e en de 14^e trede
7. maak een vrijlichaamsdiagram van één trede onder de belasting van één persoon van 90kg en bereken de snedekrachten en -momenten in de verbinding met de spil

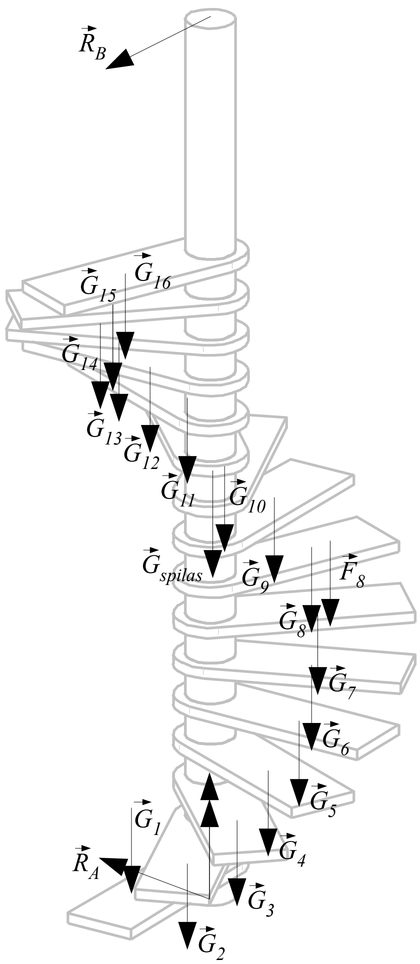
oplossing : Trede i sluit een hoek $22.5°i$ in met de x-as, zij ligt op een hoogte $0.175i$m boven het onderuiteinde A.

1. *omschrijf in woorden de vectoren die de reactiekrachten en -momenten voorstellen die optreden in elk van beide uiteinden A en B van de spil*

   In het onderste uiteinde A kan de spilas noch in de x-richting, noch in de y-richting, noch in de z-richting een verplaatsing vertonen. Dit betekent dat er in elk van de drie richtingen een component van de reactiekracht kan optreden, of met andere woorden : $\vec{R}_A = R_{Ax}\vec{e}_x + R_{Ay}\vec{e}_y + R_{Az}\vec{e}_z$. Bovendien is de as verhinderd om te roteren omheen de vertikale z-as. Daardoor kan er hier een reactiemoment aangrijpen : $\vec{M}_A = M_{Az}\vec{e}_z$.

   In het bovenste uiteinde B kan de spilas noch in de x-richting, noch in de y-richting een verplaatsing vertonen. Dit betekent dat er in elk van deze beide richtingen een component van de reactiekracht kan optreden, of met andere woorden : $\vec{R}_B = R_{Bx}\vec{e}_x + R_{By}\vec{e}_y$. Er is geen reactiemoment in dit punt.

2. *maak een vrijlichaamsdiagram van de volledige trap met één persoon van 90kg op de 8^e trede*



   Op de trap grijpen volgende krachten en momenten aan :

   - de reactiekracht in het onderuiteinde A is $\vec{R}_A = R_{Ax}\vec{e}_x + R_{Ay}\vec{e}_y + R_{Az}\vec{e}_z$
     het onderuiteinde van de spilas ligt op de positie $\vec{r}_A = \vec{0}$
   - het reactiemoment in het onderuiteinde A is $\vec{M}_A = M_{Az}\vec{e}_z$
   - de reactiekracht in het bovenuiteinde B is $\vec{R}_B = R_{Bx}\vec{e}_x + R_{By}\vec{e}_y$
     het bovenuiteinde van de spilas ligt op de positie $\vec{r}_B = 3.8\text{m}\vec{e}_z$
   - het gewicht van de spilas is $\vec{G}_{\text{spilas}} = -500\text{N}\vec{e}_z$
     het zwaartepunt van de spilas ligt op de positie $\vec{r}_{\text{spilas}} = 1.9\text{m}\vec{e}_z$
   - het gewicht van elk van de 16 treden i is $\vec{G}_i = -90\text{N}\vec{e}_z$
     het massacentrum van trede i ligt op de positie $\vec{r}_{Ci} = 0.5\text{m}\cos(22.5°i)\vec{e}_x + 0.5\text{m}\sin(22.5°i)\vec{e}_y + 0.175i\text{m}\vec{e}_z$
   - het gewicht van de persoon op de 8^e trede is $\vec{F}_8 = -900\text{N}\vec{e}_z$
     de voet van een persoon op trede i staat op de positie $\vec{r}_{Pi} = 0.6\text{m}\cos(22.5°i)\vec{e}_x + 0.6\text{m}\sin(22.5°i)\vec{e}_y + 0.175i\text{m}$

3. *bereken het totale gewicht van de trap (spil + alle treden) en de ligging van het zwaartepunt*

   De gehele trap (spilas + 16 treden) heeft een totaalgewicht $\vec{G} = \vec{G}_{\text{spilas}} + \sum G_i = -1940N\vec{e}_z$. Het zwaartepunt ligt volgens de definitie op de positie :

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_C &= \frac{m_{\text{spilas}}\vec{r}_{\text{spilas}} + \sum_{i=1}^{16} m_i\vec{r}_{Ci}}{m_{\text{spilas}} + \sum_{i=1}^{16} m_i} \\
&= \frac{50\text{kg}\ 1.9\text{m}\vec{e}_z + 144\text{kg}\ 1.4875\text{m}\vec{e}_z}{50\text{kg} + 144\text{kg}} \\
&= 1.594\text{m}\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

   Het zwaartepunt van alle treden samen ligt op de spilas doordat de treden geheel symmetrisch rond de as liggen : trede 1 ligt vlak tegenover trede 9, trede 2 ligt tegenover trede 10, enz.

In de verdere berekeningen zal telkens het gewicht van de gehele trap in rekening worden gebracht in het zwaartepunt C.

4. *bereken alle reactiekrachten voor het belastingsgeval met één persoon van 90kg, en geef het verloop van deze reactiekrachten weer wanneer deze persoon de trap beklimt, en zijn gewicht zich achtereenvolgens op elk van de 16 treden bevindt*

Het krachtenevenwicht geeft, voor een persoon die zich bevindt op trede j :

$$\begin{aligned}
\vec{0} = \vec{F}_{\text{resulterend}} &= \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{G} + \vec{F}_j \\
&= \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1940\text{N} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -900\text{N} \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

en het momentenevenwicht, genomen omheen het punt A :

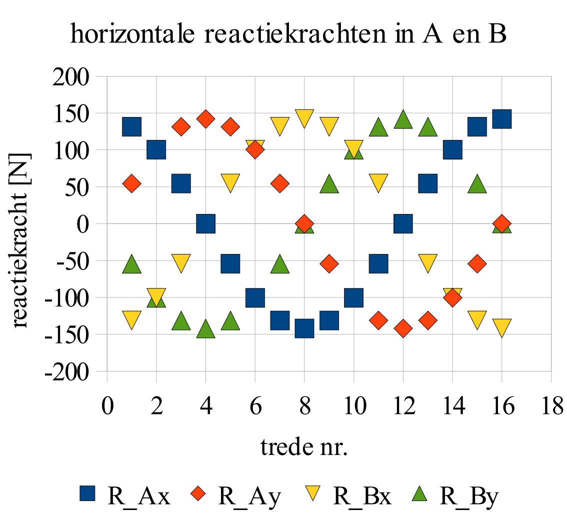
$$\begin{aligned}
\vec{0} = \vec{M}_{\text{resulterend,A}} &= \vec{M}_A + (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{R}_B + (\vec{r}_C - \vec{r}_A) \times \vec{G} + (\vec{r}_{Pj} - \vec{r}_A) \times \vec{F}_j \\
&= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{Az} \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 3.8\text{m} \\ R_{Bx} & R_{By} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0.6\text{m}\cos(22.5^\circ j) & 0.6\text{m}\sin(22.5^\circ j) & 0.175\text{m}j \\ 0 & 0 & -900\text{N} \end{vmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{Az} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -3.8\text{m}R_{By} \\ 3.8\text{m}R_{Bx} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -540\text{Nm}\sin(22.5^\circ j) \\ 540\text{Nm}\cos(22.5^\circ j) \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

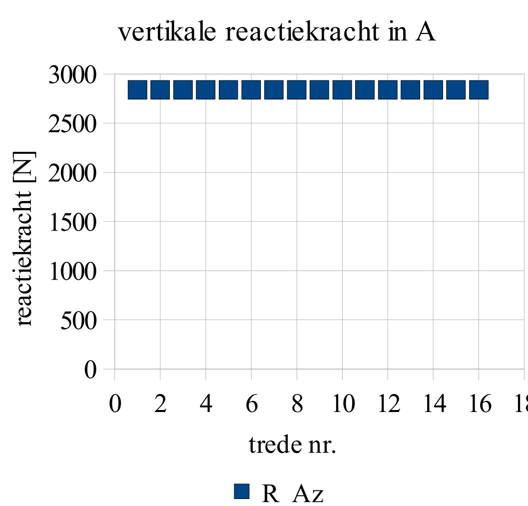
In het resulterend moment om het punt A verdwijnt de bijdrage van het gewicht van de gehele trap omdat de werklijn door het punt A gaat.

De reactiekrachten en -momenten zijn dan :

$$\vec{R}_A = \begin{Bmatrix} 142\cos(22.5^\circ j) \\ 142\sin(22.5^\circ j) \\ 2840 \end{Bmatrix}\text{N} \qquad \vec{R}_B = \begin{Bmatrix} -142\cos(22.5^\circ j) \\ -142\sin(22.5^\circ j) \\ 0 \end{Bmatrix}\text{N} \qquad \vec{M}_A = \vec{0}$$

De figuur toont de reactiekrachten in beide uiteinden van de spilas voor de verschillende posities van de persoon die de trap beklimt. De vertikale reactie in A blijft constant, maar beide horizontale componenten in elk van beide uiteinden varieert met de positie van de persoon.





5. *bereken alle reactiekrachten voor het belastingsgeval waarbij vier personen van 90kg zich bevinden op de 2^e, de 6^e, de 10^e en de 14^e trede*

   Het krachtenevenwicht geeft, voor vier personen die zich bevinden op treden 2, 6, 10 en 14 :

$$\begin{aligned}\vec{0} = \vec{F}_{\text{resulterend}} &= \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{G} + \vec{F}_2 + \vec{F}_6 + \vec{F}_{10} + \vec{F}_{14} \\ &= \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1940\text{N} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3600\text{N} \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

   en het momentenevenwicht, genomen omheen het punt A :

$$\begin{aligned}\vec{0} = \vec{M}_{\text{resulterend,A}} &= \vec{M}_A + (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{R}_B + (\vec{r}_C - \vec{r}_A) \times \vec{G} + \ldots \\ &\quad \ldots + (\vec{r}_{P2} - \vec{r}_A) \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_{P6} - \vec{r}_A) \times \vec{F}_6 + (\vec{r}_{P10} - \vec{r}_A) \times \vec{F}_{10} + (\vec{r}_{P14} - \vec{r}_A) \times \vec{F}_{14} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{Az} \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 3.8\text{m} \\ R_{Bx} & R_{By} & 0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

   In het resulterend moment om het punt A verdwijnen naast de bijdrage van het gewicht van de trap nu ook de bijdragen van de vier personen die elkaar compenseren doordat zij op tegenover elkaar liggende treden staan.

   De reactiekrachten en -momenten zijn dan :

$$\vec{R}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5540 \end{Bmatrix} \text{N} \qquad \vec{R}_B = \vec{0} \qquad \vec{M}_A = \vec{0}$$

6. *bereken alle reactiekrachten voor het belastingsgeval waarbij vier personen van 50kg zich bevinden op de 8^e, de 10^e, de 12^e en de 14^e trede*

   Het krachtenevenwicht geeft, voor vier personen die zich bevinden op treden 8, 10, 12 en 14 :

$$\begin{aligned}\vec{0} = \vec{F}_{\text{resulterend}} &= \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{G} + \vec{F}_8 + \vec{F}_{10} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{14} \\ &= \begin{Bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1940\text{N} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2000\text{N} \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

   en het momentenevenwicht, genomen omheen het punt A :

$$\begin{aligned}\vec{0} = \vec{M}_{\text{resulterend,A}} &= \vec{M}_A + (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{R}_B + (\vec{r}_C - \vec{r}_A) \times \vec{G} + \ldots \\ &\quad \ldots + (\vec{r}_{P8} - \vec{r}_A) \times \vec{F}_8 + (\vec{r}_{P10} - \vec{r}_A) \times \vec{F}_{10} + (\vec{r}_{P12} - \vec{r}_A) \times \vec{F}_{12} + (\vec{r}_{P14} - \vec{r}_A) \times \vec{F}_{14} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{Az} \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 3.8\text{m} \\ R_{Bx} & R_{By} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -0.6\text{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -500\text{N} \end{vmatrix} + \ldots \\ &\quad \ldots + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -0.424\text{m} & -0.424\text{m} & 0 \\ 0 & 0 & -500\text{N} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & -0.6\text{m} & 0 \\ 0 & 0 & -500\text{N} \end{vmatrix} + \ldots \\ &\quad \ldots + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0.424\text{m} & -0.424\text{m} & 0 \\ 0 & 0 & -500\text{N} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

   In het resulterend moment om het punt A verdwijnt de bijdrage van het gewicht van de trap nog steeds, maar de bijdragen van de vier personen compenseren elkaar niet doordat zij niet op tegenover elkaar liggende treden staan.

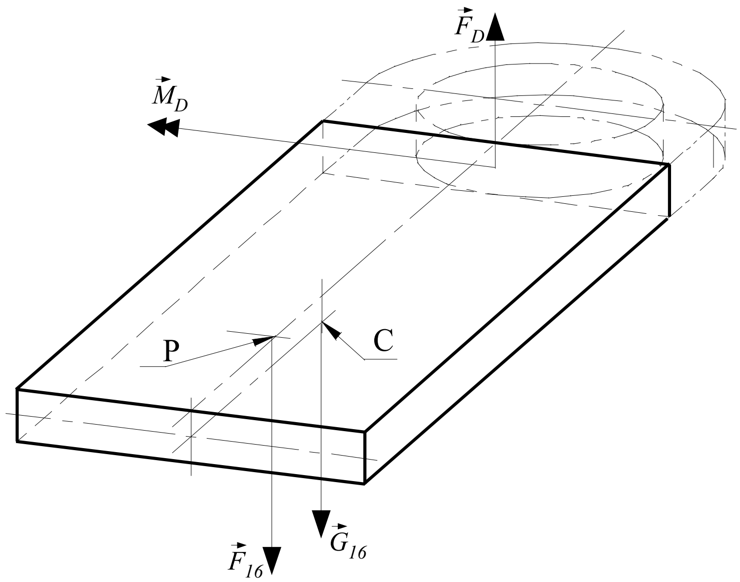
De reactiekrachten en -momenten zijn dan :

$$\vec{R}_A = \left\{ \begin{array}{c} -79 \\ -191 \\ 3940 \end{array} \right\} \text{N} \qquad \vec{R}_B = \left\{ \begin{array}{c} 79 \\ 191 \\ 0 \end{array} \right\} \text{N} \qquad \vec{M}_A = \vec{0}$$

7. *maak één trede vrij, met daarop een persoon van 90kg, maak een vrijlichaamsdiagram en bereken de snedekrachten en -momenten in de verbinding met de spil*

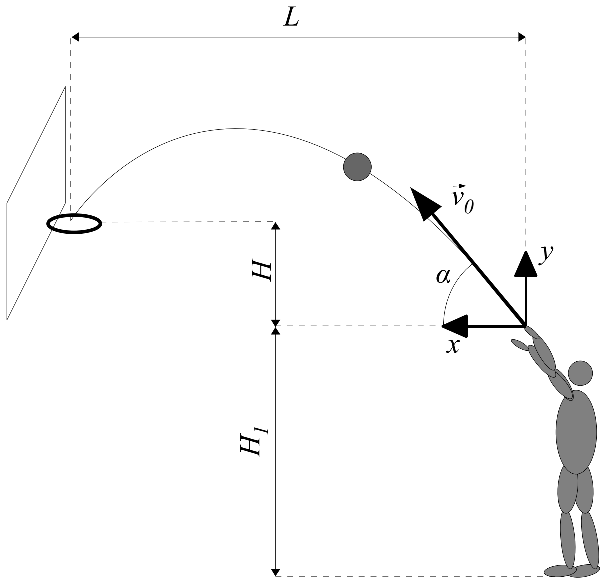
   Neem bij voorbeeld de laatste trede nr.16, die georiënteerd is volgens de x-as. De uitwendige krachten die op een trede aangrijpen zijn het eigengewicht $\vec{G}_{16}$ en het gewicht van een persoon $\vec{F}_{16}$. In de snede van een vrijgemaakte trede werken een snedekracht $\vec{F}_D$ en een snedemoment $\vec{M}_D$. Volgens de definitie zijn de snedekracht en het snedemoment dan de kracht en het moment die in de snede moeten worden aangebracht om het evenwicht van het vrijgemaakte deel te herstellen :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_D &= -\vec{G}_{16} - \vec{F}_{16} \\
&= -\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -90 \end{array} \right\} \text{N} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -900 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 990 \end{array} \right\} \text{N} \\
\vec{M}_D &= -(\vec{r}_{C16} - \vec{D}) \times \vec{G}_{16} \\
&\quad -(\vec{r}_{P16} - \vec{D}) \times \vec{F}_{16} \\
&= -\left| \begin{array}{ccc} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0.4\text{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -90\text{N} \end{array} \right| \\
&\quad -\left| \begin{array}{ccc} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0.5\text{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -900\text{N} \end{array} \right| \\
&= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -486 \\ 0 \end{array} \right\} \text{Nm}
\end{aligned}$$



Vraag 2

Een basketbalspeler neemt een vrijworp. Hij legt de baan van de bal vast in de beginsnelheidsvector (grootte van de snelheid v_0 en hoek met de horizontale α).



Volgende maten zijn gegeven :

- de diameter van de bal d=240mm
- de binnendiameter van de ring D=435mm
- de massa van de bal m=0.63kg
- de hoogte ten opzichte van de vloer waar de bal de werphand verlaat H_1=2.1m
- de hoogte van de ring ten opzichte van de werphand H=0.95m
- de hoogte van het plafond ten opzichte van de vloer H_2=10m
- de horizontale afstand tussen de werphand en het centrum van de ring L=4.2m

Gebruik het assenstelsel dat in de figuur is aangeduid, met de oorsprong in het centrum van de bal in de werphand van de speler.

gevraagd : bereken de baan van de bal en de inspanning die de speler bij de worp moet leveren; schrijf voor elke deelvraag eerst het antwoord symbolisch neer, en vul de cijferwaarden pas op het allerlaatst in

1. schrijf een uitdrukking neer die de positievector van het centrum van de bal expliciet weergeeft als functie van de tijd
2. stel een uitdrukking op die de grootte van de beginsnelheid v_0 in verband brengt met de hoek α, zodat het centrum van de bal precies door het centrum van de ring gaat
3. bereken voor de baan met een hoek $\alpha = 60°$ de tangentiële en de normale versnelling van de bal op het tijdstip waarop de bal zijn hoogste punt bereikt
4. binnen de mogelijke combinaties voor beginsnelheid en hoek die voldoen aan de voorwaarde onder puntje 2, geef aan waardoor de grenzen op de snelheid worden bepaald
   (a) de minimale hoek waaronder de bal moet vertrekken is 48.1°. Welke voorwaarde bepaalt de minimale vertrekhoek? Een kort antwoord in woorden volstaat, een berekening is niet gevraagd.
   (b) de maximale hoek waaronder de bal moet vertrekken is 82.1°. Welke voorwaarde bepaalt de maximale vertrekhoek? Een kort antwoord in woorden volstaat, een berekening is niet gevraagd.
5. beschouw alle mogelijke banen waarbij de bal door het centrum van de ring gaat
   (a) bij welke baan is de totale energie van de bal minimaal ? Leg uit in woorden.
   (b) welke mechanische grootheid beschrijft het effect dat de speler op de bal moet uitoefenen om de toestand van de bal te veranderen tussen rust in zijn hand en de situatie vlak na het verlaten van de hand ? Bij welke baan is dit effect minimaal. Leg uit in woorden.

   Is er een verband tussen de banen uit vraagjes 5a en 5b ? Zo ja, verklaar dit verband.

   BONUSVRAAG (aanvulling 5b): bereken de hoek waarbij het effect van de speler minimaal is.
   Met deze vraag kan je extra punten verdienen

oplossing : in onderstaande oplossing is het tijdstip t_0 het ogenblik waarop de speler de bal loslaat (gekozen 0s), t_I het tijdstip waarop de bal het hoogste punt in de baan bereikt, en t_{II} het tijdstip waarop de bal door de ring gaat.

1. *schrijf een uitdrukking neer die de positievector van het centrum van de bal expliciet weergeeft als functie van de tijd*

   Bij een vertrek op tijdstip $t_0 = 0\text{s}$ vanuit een beginpositie $\vec{r}(0\text{s}) = \vec{r}_0 = \vec{0}$, met een beginsnelheid $\vec{v}(0\text{s}) = \vec{v}_0$ en met een versnelling $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ is de positie van het centrum van de bal op tijdstip t gegeven door :

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + 0.5\vec{g}t^2 \\ &= v_0(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y)t - 0.5gt^2\vec{e}_y \\ &= \left\{\begin{array}{c} v_0 t\cos\alpha \\ v_0 t\sin\alpha \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -0.5gt^2 \end{array}\right\}\end{aligned}$$

2. *stel een uitdrukking op die de grootte van de beginsnelheid v_0 in verband brengt met de hoek α, zodat het centrum van de bal precies door het centrum van de ring gaat*

   De positie van de bal op het tijdstip t_{II} is bekend :

$$\vec{r}(t_{II}) = \left\{\begin{array}{c} v_0 t_{II}\cos\alpha \\ v_0 t_{II}\sin\alpha \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ -0.5gt_{II}^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} L \\ H \end{array}\right\} \tag{1}$$

   De tweede van deze scalaire vergelijkingen (1) laat toe het tijdstip t_{II} te bepalen :

$$t_{II} = \frac{v_0\sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gH}}{g}$$

   Alleen de oplossing met het +teken is hier relevant, want bij de oplossing met het -teken hoort een baan waarbij de bal van onder naar boven door de ring gaat. Het gevonden tijdstip t_{II} moet nu ook passen in de eerste vergelijking van (1), of :

$$t_{II} = \frac{v_0\sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g^2} - 2\frac{H}{g}} = \frac{L}{v_0\cos\alpha}$$

   Oplossing van deze vergelijking levert de grootte van de beginsnelheid als functie van de vertrekhoek die nodig is opdat het centrum van de bal in een neerwaartse beweging precies door het centrum van de ring gaat :

$$v_0 = \frac{L}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(L\tan\alpha - H)}} \tag{2}$$

3. *bereken voor de baan met een hoek $\alpha = 60°$ de tangentiële en de normale versnelling van de bal op het tijdstip waarop de bal zijn hoogste punt bereikt*

   De versnelling is constant $\vec{g}$. Op het ogenblik t_I waarop de bal zijn hoogste punt bereikt, is de snelheid horizontaal, en dus loodrecht op de versnelling. De tangentiële component van de versnelling is dus 0, en normale component is gelijk aan g=10m/s^2. Dit geldt voor een willekeurige grootte van de beginsnelheid.

   Het tijdstip t_I is gegeven door $t_I = v_0\sin\alpha/g$. Bij een hoek α=60° is de vereiste beginsnelheid volgens (2) gelijk aan 7.47m/s. Bij deze hoek en deze snelheid is t_I =0.65s.

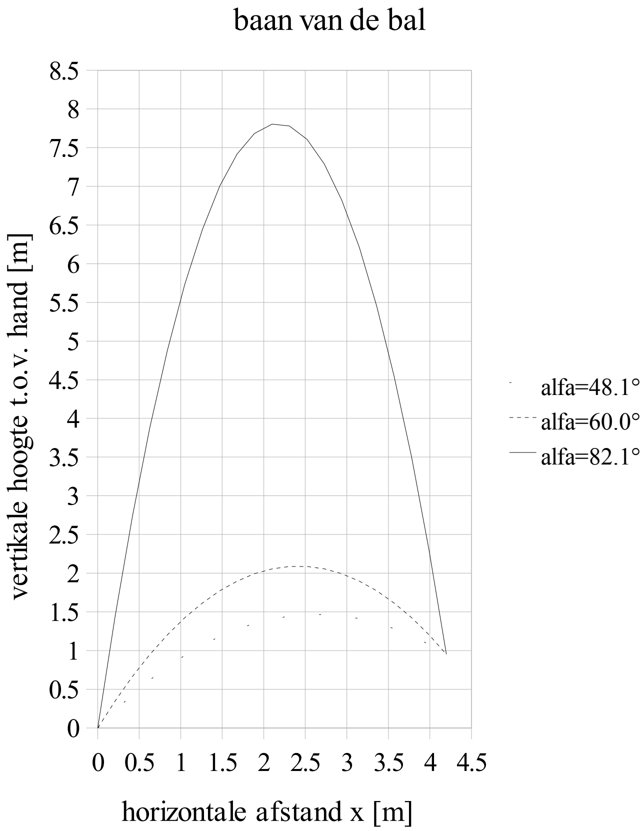
4. *binnen de mogelijke combinaties voor beginsnelheid en hoek die voldoen aan de voorwaarde onder puntje 2, geef aan waardoor de limieten op de snelheid worden bepaald*

(a) *de minimale hoek waaronder de bal moet vertrekken is 48.1°. Welke voorwaarde bepaalt de minimale vertrekhoek ? Een kort antwoord in woorden volstaat, een berekening is niet gevraagd.*

Opdat de bal doorheen de ring zou kunnen gaan moet het dalende deel van de baan voldoende steil zijn. De diameters van bal en ring zijn daarbij bepalend. De hoek van de baan in dalende lijn ten opzichte van de horizontale moet in absolute waarde tenminste gelijk zijn aan $\arcsin(d/D)$=33.5°. Deze baan heeft een vertrekhoek van 48.1° en een beginsnelheid van 7.28m/s.

(b) *de maximale hoek waaronder de bal mag vertrekken is 82.1°. Welke voorwaarde bepaalt de minimale vertrekhoek ? Een kort antwoord in woorden volstaat, een berekening is niet gevraagd.*

De bal mag het plafond van de zaal niet raken. Het centrum van de bal mag op het toppunt van de baan ten hoogste 7.78m boven de werphand liggen, of $r_y(t_I) \leq$7.78m. Deze baan heeft een vertrekhoek van 82.1° en een beginsnelheid van 12.62m/s.



5. *beschouw alle mogelijke banen waarbij de bal door het centrum van de ring gaat,*

   (a) *bij welke baan is de totale energie van de bal minimaal ?*

   De totale energie van de bal bestaat uit potentiële energie en kinetische energie. De potentiële energie hangt af van de hoogte van de bal ten opzichte van een gekozen referentie, bij voorbeeld de werphand van de speler. De kinetische energie hangt alleen af van de grootte van de snelheid van de bal. De totale energie blijft constant tijdens het volledige traject van de bal. Bij vertrek is de potentiële energie gelijk aan nul, en de kinetische energie hangt dus alleen af van de grootte van de beginsnelheid v_0.

   (b) *welke mechanische grootheid beschrijft het effect dat de speler op de bal moet uitoefenen om de toestand van de bal te veranderen tussen rust in de hand van de speler en de situatie vlak na het verlaten van de hand ? Bereken de hoek waarbij de inspanning van de speler minimaal is.*

   De mechanische grootheid die het effect uitdrukt dat de speler op de bal moet uitoefenen is de stoot. Door het uitoefenen van een stoot (= een kracht × een tijdsinterval) verandert de speler de grootte en de oriëntatie van de snelheid van de bal.

   Het mechanisch effect waarvan sprake kan ook geïnterpreteerd worden als de arbeid die uitgeoefend wordt op de bal : de elementaire arbeid op de bal is gelijk aan de elementaire verandering in de kinetische energie van de bal.

Is er een verband tussen de banen uit vraagjes 5a en 5b ? Zo ja, verklaar dit verband.

De beide antwoorden zijn gelijk. De minimale kinetische energie treedt immers op bij een minimale snelheid, en de minimale stoot treedt eveneens op bij een minimale snelheid.

BONUSVRAAG (aanvulling 5b): bereken de hoek waarbij het effect van de speler minimaal is

De minimale snelheid en dus ook de minimale stoot wordt gevonden als het wiskundig minimum van de functie (2). Deze functie is minimaal als haar kwadraat minimaal is :

$$v_0^2 = \frac{L^2 g}{2\cos^2\alpha(L\tan\alpha - H)} \propto \frac{1}{-H\cos^2\alpha + L\cos\alpha\sin\alpha}$$

Deze functie bereikt een minimum als de noemer een maximum bereikt, of

$$\max[-H\cos^2\alpha + L\cos\alpha\sin\alpha] = \max[f(\alpha)]$$

Dit maximum wordt bereikt als de afgeleide gelijk is aan nul, of :

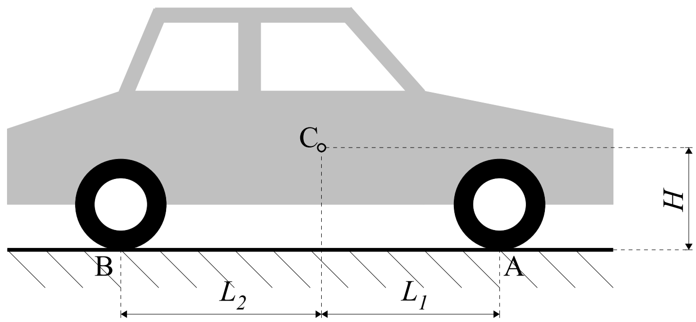
$$\begin{aligned}\frac{df}{d\alpha} = 0 &= 2H\cos\alpha\sin\alpha - L\sin^2\alpha + L\cos^2\alpha \\ &= H\sin 2\alpha + L\cos 2\alpha\end{aligned}$$

Deze afgeleide is 0 bij $\alpha = 0.5\arctan(-L/H)$. Met de cijfergegevens stemt dit overeen met een hoek $\alpha = 51.37°$.
De beginsnelheid is dan 7.25m/s en de vertrekhoek is 51.4°.

Het energieniveau in de bal is dan 16.56J, en de stoot is $4.57\text{Ns}(\cos 51.37°\vec{e}_x + \sin 51.37°\vec{e}_y)$.

Vraag 3

Een auto heeft in beladen toestand een massa m en een massacentrum C. De massaverdeling van het voertuig zelf en de belading zijn symmetrisch ten opzichte van de lengteas van het voertuig, zodat de beide voorwielen A dezelfde last dragen en zodat ook de beide achterwielen B dezelfde last dragen. De wagen heeft achterwielaandrijving, wat betekent dat de aandrijving door de motor volledig via de achterwielen gebeurt. Het remmen gebeurt alleen op de voorwielen.



Volgende maten zijn gegeven :

- de hoogte van het massacentrum C ten opzichte van het wegdek H= 620mm
- de afstand gemeten volgens de lengteas van het voorwiel tot het massacentrum L_1=1240mm
- de afstand gemeten volgens de lengteas van het achterwiel tot het massacentrum L_2=1395mm
- de massa en het traagheidsmoment van de wielen zijn verwaarloosbaar

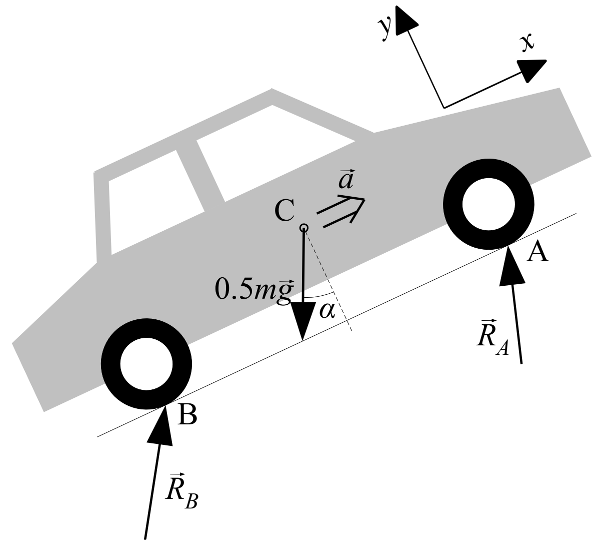
De halve massa $m/2$ van het voertuig in beladen toestand bedraagt 850kg.
gevraagd : bereken de krachten die het wegdek uitoefent op elk van de wielen, in verschillende situaties; maak daarbij zelf een geschikte keuze voor het assenstelsel

1. de wagen staat stil op een horizontaal vlak.
2. de wagen staat stil op een helling van 10% ($\tan\alpha = 0.1$), met de voorwielen hoger dan de achterwielen. In deze situatie is de rem ingedrukt en wordt de auto niet aangedreven.
3. de wagen versnelt op een horizontale rechte weg met een versnelling $\vec{a} = 3\vec{e_t}$ m/s^2.
4. de wagen remt op een dalende rechte weg (helling 5%) met een versnelling $\vec{a} = -4\vec{e_t}$ m/s^2. In deze situatie wordt de auto niet aangedreven.
5. welke wrijvingscoëfficiënt tussen band en wegdek is minimaal vereist opdat al de bovenstaande situaties mogelijk zouden zijn ?
6. in de situatie van deelvraag 4, welke strategie volg je om na te gaan of er risico bestaat op voorover kantelen van de wagen. Leg uit in woorden.

oplossing : het ligt voor de hand om een van de assen van het assenstelsel (hier de x-as) evenwijdig te kiezen met de lengteas van het voertuig. De x-as sluit dan een hoek α in met de vertikale ($\alpha > 0$ als het voertuig met de neus bergop staat, en $\alpha < 0$ indien bergaf). De oorsprong is willekeurig.

In een algemene situatie van helling waarop het voertuig zich bevindt zijn de krachten die op de wagen aangrijpen :

- het gewicht van het voertuig $0.5\vec{G} = 0.5m\vec{g} = 0.5mg(-\sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_y)$, aangrijpend in het massacentrum C
- de reactiekracht in het voorwiel $\vec{R}_A = R_{Ax}\vec{e}_x + R_{Ay}\vec{e}_y$, aangrijpend in het punt A
- de reactiekracht in het achterwiel $\vec{R}_B = R_{Bx}\vec{e}_x + R_{By}\vec{e}_y$, aangrijpend in het punt B



Afhankelijk van de situatie waarin de auto zich bevindt zijn de x-componenten R_x van één of beide reactiekrachten bekend (gelijk aan 0). Daarnaast kan het massacentrum van het voertuig een versnelling vertonen $\vec{a} = a\vec{e}_x$.

De evenwichtsvergelijkingen zijn in elk van de gevallen een krachtenevenwicht en een momentenevenwicht. Voor gevallen van statisch evenwicht (deelvragen 1 en 2) is de keuze van het punt waarrond het momentenevenwicht wordt uitgedrukt vrij, maar in situaties van dynamisch evenwicht (deelvragen 3 en 4) is deze keuze niet vrij. Doordat de kracht die overeenstemt met de versnelling aangrijpt in het massacentrum is het noodzakelijk de momentenvergelijking te schrijven ten opzichte van het massacentrum C. De evenwichtsvergelijkingen luiden dan :

$$\vec{F}_{\text{resulterend}} = 0.5\vec{G} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = m\vec{a} \tag{3}$$

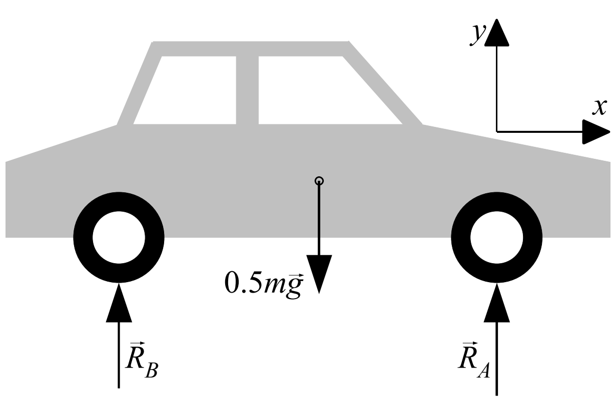
$$\vec{M}_{\text{resulterend,C}} = (\vec{r}_A - \vec{r}_C) \times \vec{R}_A + (\vec{r}_B - \vec{r}_C) \times \vec{R}_B = \vec{0} \tag{4}$$

De momentenvergelijking (4) kan algemeen worden uitgewerkt :

$$\vec{M}_{\text{resulterend,C}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ L_1 & -H & 0 \\ R_{Ax} & R_{Ay} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -L_2 & -H & 0 \\ R_{Bx} & R_{By} & 0 \end{vmatrix} = (R_{Ay}L_1 + R_{Ax}H - R_{By}L_2 + R_{Bx}H)\,\vec{e}_z = \vec{0} \tag{5}$$

De vergelijking (5) geldig in situaties van statisch evenwicht en in gevallen van dynamisch evenlwicht.

1. *de wagen staat stil op een horizontaal vlak*



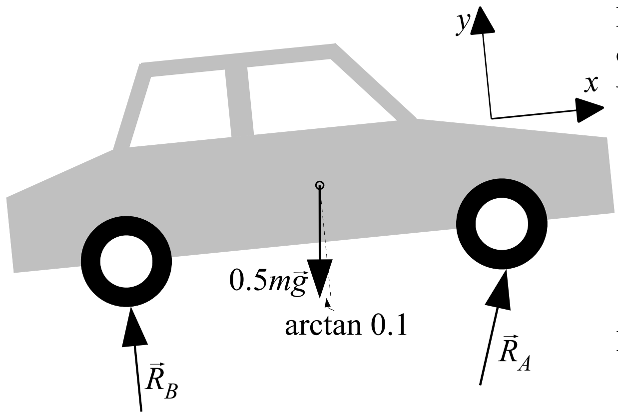
In deze situatie is $\alpha = 0°$, $a = 0$, doordat de aandrijving niet werkt is $R_{Bx} = 0$. Het krachtenevenwicht (3) geeft dan :

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -0.5mg \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ R_{By} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

De oplossing van deze vergelijking en (5) is :

$$\begin{aligned} R_{Ax} &= 0 \\ R_{Ay} &= \frac{0.5mgL_2}{L_1 + L_2} = 4500\text{N} \\ R_{By} &= \frac{0.5mgL_1}{L_1 + L_2} = 4000\text{N} \end{aligned}$$

2. *de wagen staat stil op een helling van 10% (*$\tan\alpha = 0.1$*), met de voorwielen hoger dan de achterwielen*



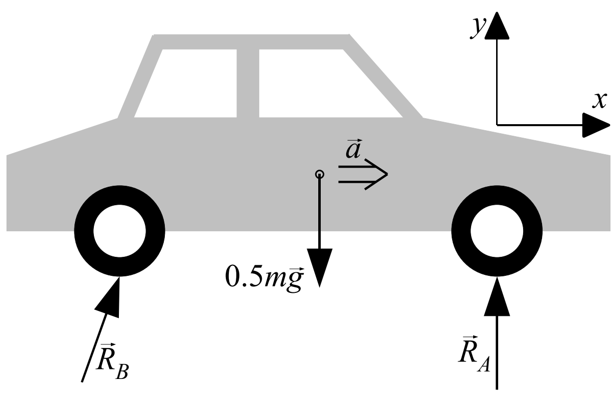
In deze situatie is $\alpha = \arctan 0.1 = 5.7°$, $a = 0$, doordat de aandrijving niet werkt is $R_{Bx} = 0$. Het krachtenevenwicht (3) geeft dan :

$$\left\{ \begin{array}{c} -0.5mg\sin 5.7° \\ -0.5mg\cos 5.7° \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ R_{By} \end{array} \right\} = $$
$$= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

De oplossing van deze vergelijking en (5) is :

$$R_{Ax} = 846\text{N} \qquad R_{Ay} = 4279\text{N} \qquad R_{By} = 4179\text{N}$$

3. *de wagen versnelt op een horizontale rechte weg met een versnelling* $\vec{a}$=3m/s$^2\vec{e}_t$



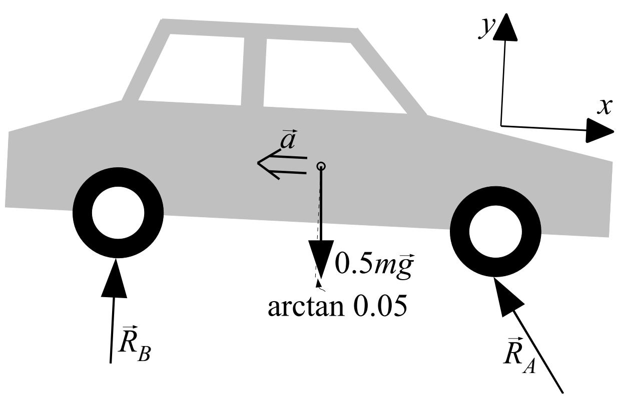
In deze situatie is $\alpha = 0°$, $a = 3\text{m/s}^2$, doordat de rem niet werkt is $R_{Ax} = 0$. Het krachtenevenwicht (3) geeft dan :

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -0.5mg \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ R_{Ay} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} R_{Bx} \\ R_{By} \end{array} \right\} = $$
$$= \left\{ \begin{array}{c} 0.5ma \\ 0 \end{array} \right\}$$

De oplossing van deze vergelijking en (5) is :

$$R_{Ay} = 3900\text{N} \qquad R_{Bx} = 2550\text{N} \qquad R_{By} = 4600\text{N}$$

4. *de wagen remt op een dalende rechte weg (helling 5%) met een versnelling* $\vec{a}$=-4m/s$^2\vec{e}_t$



In deze situatie is $\alpha = \arctan(-0.05) = -2.86°$, $a = -4\text{m/s}^2$, doordat de aandrijving niet werkt is $R_{Bx} = 0$. Het krachtenevenwicht (3) geeft dan :

$$\left\{ \begin{array}{c} 0.5mg\sin 2.86° \\ -0.5mg\cos 2.86° \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} R_{Ax} \\ R_{Ay} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ R_{By} \end{array} \right\} = $$
$$= \left\{ \begin{array}{c} 0.5ma \\ 0 \end{array} \right\}$$

De oplossing van deze vergelijking en (5) is :

$$R_{Ax} = -3824\text{N} \qquad R_{Ay} = 5394\text{N} \qquad R_{By} = 3095\text{N}$$

5. *voor al de bovenstaande situaties, welke wrijvingscoëfficiënt tussen band en wegdek is minimaal vereist ?*

   De tangentiële kracht op een wiel is het grootst in de situatie waarbij het voertuig afremt tijdens een afdaling (geval 4). De tangentiële kracht is dan 3824N, bij een normale kracht in hetzelfde wiel van 5394N. De minimaal vereiste wrijvingscoëfficiënt tussen band en wegdek is dan : $\mu >$3824/5394=0.71

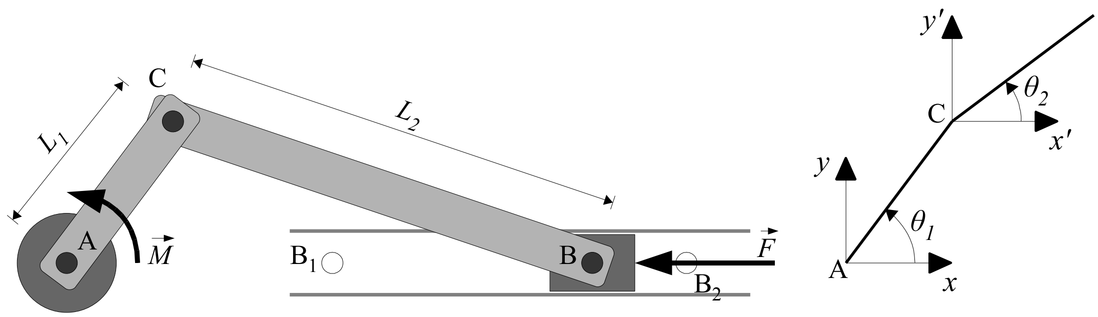
6. *in de situatie van deelvraag 4, welke strategie volg je om na te gaan of er risico bestaat op voorover kantelen van de wagen. Leg uit in woorden.*

   Zolang het achterwiel een neerwaartse kracht uitoefent op het wegdek blijft het contact gegarandeerd. Bij toenemende neerwaartse helling en bij toenemende grootte van de versnelling bij afremmen neemt de grootte van reactiekracht $\vec{R}_B$ af. In rij-omstandigheden waarbij deze reactiekracht negatief wordt (dus bij te steile helling en/of te sterke afremming), is het beschouwde krachtensysteem niet meer in dynamisch evenwicht. De achterwielen kunnen dan loskomen van het wegdek. Mede rekening houdend met de rotatie-inertie van de wagen omheen een dwarse horizontale as, kan het voertuig voorover kantelen.

Vele studenten hebben de reactiekrachten berekend voor een volledige as van het voertuig, dus met twee wielen in plaats van één wiel. Deze antwoorden zijn als correct aanzien, als er geen andere fouten in voorkomen.

Vraag 4

In een verbrandingsmotor zet een kruk-drijfstangmechanisme de pulserende lineaire beweging van een zuiger bevestigd aan B om in een rotatiebeweging van een as in het punt A. Daartoe is de stang BC verbonden aan de kruk AC. Het punt A is vast. De scharnieren in B en C zijn wrijvingsloos, en de zuiger in het punt B loopt in een wrijvingsloze geleiding. Een kracht F drukt de zuiger in de geleiding naar het punt A toe. A en B liggen op dezelfde hoogte. De stang BC en de kruk AC zijn massaloos.



Volgende maten zijn gegeven :

- de lengte van de kruk L_1=120mm
- de lengte van de drijfstang L_2=400mm

De grootte van de kracht F bedraagt 100N. Het mechanisme beweegt traag, zodat het probleem als statisch kan worden aanzien.

gevraagd : bereken met behulp van de methode van virtuele arbeid het moment dat in het punt A op de as wordt uitgeoefend; gebruik daarbij de assenstelsels die in de figuur aangeduid zijn; schrijf voor elke deelvraag eerst het antwoord symbolisch neer, en vul de cijferwaarden pas op het allerlaatst in

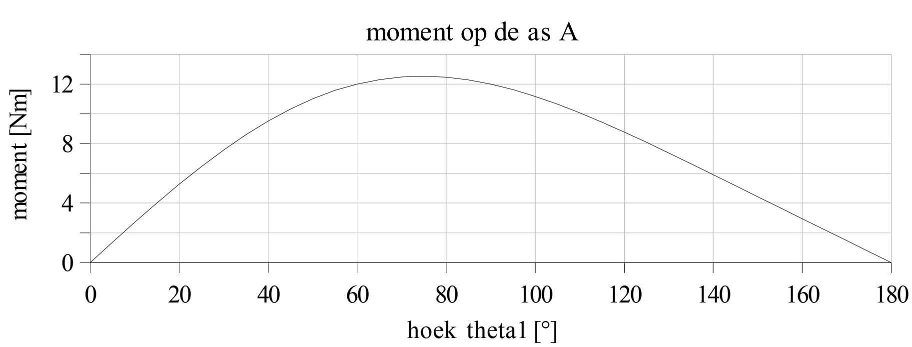
1. verklaar de betekenis van de stelling van virtuele arbeid in dit specifieke geval, en bespreek de virtuele verplaatsing van de kruk en de drijfstang

   De nodige en voldoende voorwaarde opdat het lichaam in evenwicht verkeert, is dat de virtuele arbeid van de uitwendige krachten in een willekeurige maar toelaatbare virtuele verplaatsing gelijk is aan nul.

2. bereken het moment dat de kruk rond het punt A uitoefent in de stand waarbij de zuiger B in het midden staat tussen de beide uiterste standen B_1 en B_2 van de zuiger in de geleiding

3. bereken het moment dat de kruk rond het punt A uitoefent als functie van de stand θ_1 van de kruk AC

4. toon aan dat het verloop van het moment, berekend in punt 3, is als weergegeven in onderstaande figuur; dit wil zeggen, verklaar de nulpunten van dit verloop en ook de ligging van het maximum



oplossing : voor de kinematische analyse van dit systeem is het aangewezen om de virtuele beweging te aanzien als een samengestelde beweging, met name een rotatie van de kruk AC rond het vaste punt A en een rotatie van de drijfstang BC rond het translerend punt C; kies voor het bewegend assenstelsel een translerend assenstelsel dat beweegt met het punt C

1. *verklaar de betekenis van de stelling van virtuele arbeid toe voor dit specifieke geval, en bespreek de virtuele verplaatsing van de kruk en de drijfstang*

   > *De nodige en voldoende voorwaarde opdat het lichaam in evenwicht verkeert, is dat de virtuele arbeid van de uitwendige krachten in een willekeurige maar toelaatbare virtuele verplaatsing gelijk is aan nul.*

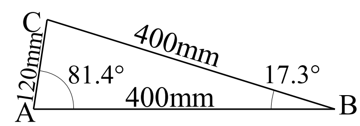
   Geef het stangensysteem een virtuele verplaatsing die geen afbreuk doet aan de inwendige samenhang, d.w.z. met een unieke verplaatsing van het punt C. Het verband tussen de virtuele verplaatsing $\delta\vec{u}_B$ van het punt B en de virtuele hoekverdraaiing $\delta\vec{\theta}_1$ van de kruk AC moet bepaald worden uit de samenhang van het stelsel. Dan is de totale arbeid geleverd door de kracht in B en door het moment in A gelijk aan nul :

   $$\delta V = \vec{F} \cdot \delta\vec{u}_B + \vec{M} \cdot \delta\vec{\theta}_1 = 0 \tag{6}$$

   Bij een willekeurige stand van het stangensysteem is er een relatie tussen de hoeken θ_1 en θ_2.

2. *bereken het moment dat de kruk rond het punt A uitoefent in de stand waarbij de zuiger B in het midden staat tussen de beide uiterste standen B_1 en B_2 van de zuiger in de geleiding*

   De positie van het punt in het midden tussen de uiterste posities B_1 en B_2 is $\vec{r}_B$=400mm$\vec{e}_x$. In deze stand zijn de hoeken θ_1 en θ_2 respectievelijk gelijk aan 81.4° en 17.3°. In het translerend assenstelsel is de hoek θ_2 negatief. De virtuele verplaatsing van het punt B is gelijk aan :

   $$\begin{aligned}
   \delta\vec{u}_B &= \delta\vec{u}_{C/A} + \delta\vec{u}_{B/C} \\
   &= \delta\theta_1 \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) + \delta\theta_2 \times (\vec{r}_B - \vec{r}_C) \\
   &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta_1 \\ 17.9\text{mm} & 118.8\text{mm} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta_2 \\ 381.4\text{mm} & -118.8\text{mm} & 0 \end{vmatrix} \\
   &= 118.8\text{mm}(-\delta\theta_1 + \delta\theta_2)\vec{e}_x + (17.9\text{mm}\delta\theta_1 + 381.4\text{mm}\delta\theta_2)\vec{e}_y
   \end{aligned}$$

   De virtuele verplaatsing van het punt B volgens de y-as is gelijk aan 0, wat een verband oplevert tussen de virtuele hoeken : $\delta\theta_2 = -0.047\delta\theta_1$. Daarmee is de virtuele verplaatsing van het punt B volledig gekend :

   $$\delta\vec{u}_B = 118.8\text{mm}(-1 - 0.047)\delta\theta_1\vec{e}_x = -124.4\text{mm}\delta\theta_1\vec{e}_x$$

   De totale virtuele arbeid is daarmee gelijk aan :

   $$\delta V = -100\text{N}\vec{e}_x \cdot (-124.4\text{mm}\delta\theta_1\vec{e}_x) + M\vec{e}_z \cdot \delta\theta_1\vec{e}_z = 0$$

   Hieruit volgt met moment op de as A : $\vec{M} = -12.44\text{Nm}\vec{e}_z$. Dit moment, met het negatief teken, wordt uitgeoefend door de as A op de kruk AC. Het moment dat de kruk op de as A uitoefent is even groot en tegengesteld :

   $$\vec{M} = 12.44\text{Nm}\vec{e}_z$$

3. *bereken het moment dat de kruk rond het punt A uitoefent als functie van de stand θ_1 van de kruk AC*

In een willekeurige stand van het mechanisme is de positie van het punt B te schrijven als :

$$\begin{aligned}\vec{r}_B &= \vec{r}_{C/A} + \vec{r}_{B/C} \\ &= L_1(\cos\theta_1 \vec{e}_x + \sin\theta_1 \vec{e}_y) + L_2(\cos\theta_2 \vec{e}_x + \sin\theta_2 \vec{e}_y) \\ &= (L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2)\vec{e}_x + (L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2)\vec{e}_y\end{aligned}$$

De coördinaat volgens de y-as is gelijk aan 0, wat een verband oplevert tussen de hoeken :

$$\theta_2 = -\arcsin\left(\frac{L_1}{L_2}\sin\theta_1\right)$$

De virtuele verplaatsing van het punt is de som van de sleepverplaatsing (van het punt C) met de relatieve verplaatsing (B ten opzichte van C) :

$$\begin{aligned}\delta\vec{u}_B &= \delta\vec{u}_{C/A} + \delta\vec{u}_{B/C} \\ &= \delta\vec{\theta}_1 \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) + \delta\vec{\theta}_2 \times (\vec{r}_B - \vec{r}_C) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta_1 \\ L_1\cos\theta_1 & L_1\sin\theta_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta_2 \\ L_2\cos\theta_2 & L_2\sin\theta_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-L_1\sin\theta_1\delta\theta_1 - L_2\sin\theta_2\delta\theta_2)\vec{e}_x + (L_1\cos\theta_1\delta\theta_1 + L_2\cos\theta_2\delta\theta_2)\vec{e}_y\end{aligned}$$

De virtuele verplaatsing van het punt B volgens de y-as is gelijk aan 0, wat een verband oplevert tussen de virtuele hoeken : $\delta\theta_2 = -L_1\cos\theta_1/(L_2\cos\theta_2)\delta\theta_1$. Daarmee is de virtuele verplaatsing van het punt B volledig gekend :

$$\delta\vec{u}_B = \left(-L_1\sin\theta_1 + L_1\frac{\cos\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_2}\right)\delta\theta_1\vec{e}_x = -L_1\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cos\theta_2}\delta\theta_1\vec{e}_x$$

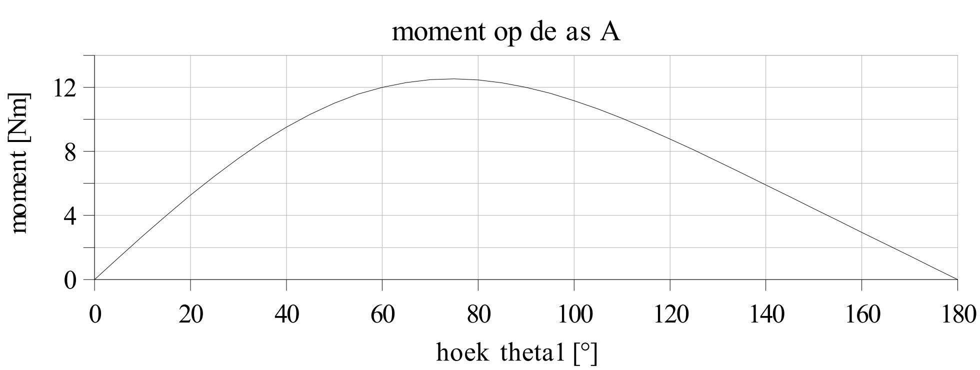
De totale virtuele arbeid is daarmee gelijk aan :

$$\delta V = -F\vec{e}_x \cdot \left(-L_1\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cos\theta_2}\right)\delta\theta_1\vec{e}_x + M\vec{e}_z \cdot \delta\theta_1\vec{e}_z = 0$$

Hieruit volgt het moment op de as A : $\vec{M} = -FL_1\sin(\theta_1-\theta_2)/\cos\theta_2\vec{e}_z$. Dit moment, met het negatief teken, wordt uitgeoefend door de as A op de kruk AC. Het moment dat de kruk op de as A uitoefent is even groot en tegengesteld :

$$\vec{M} = FL_1\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cos\theta_2}\vec{e}_z \qquad \text{waarbij} \quad \theta_2 = -\arcsin\left(\frac{L_1}{L_2}\sin\theta_1\right)$$

De figuur toont het verloop van het moment als functie van de stand van de kruk, met de opgegeven numerieke waarden van kracht en afmetingen.



4. *verklaar de nulpunten van dit verloop en ook de ligging van het maximum*

   De drijfstang BC leidt bij de werking van de motor een drukkracht door. Het verloop van het moment met de hoek van de kruk vertoont een verloop dat in enkele punten verklaarbaar is :

   $\theta_1 = 0°$ dit is de uiterst rechtse stand van het mechanisme, met de punten B en C beide in de uiterst rechtse positie. De beide stangen liggen in elkaars verlengde, en de drukkracht in de stang BC levert geen moment omheen het punt A.

   maximum bij $\theta_1 < 90°$ het moment op de as A is maximaal als de drijfstang BC ongeveer loodrecht staat op de kruk AC

   $\theta_1 = 180°$ dit is de uiterst linkse stand van het mechanisme, met de punten B en C beide in de uiterst linkse positie. De beide stangen liggen in elkaars verlengde, en de drukkracht in de stang BC levert geen moment omheen het punt A.