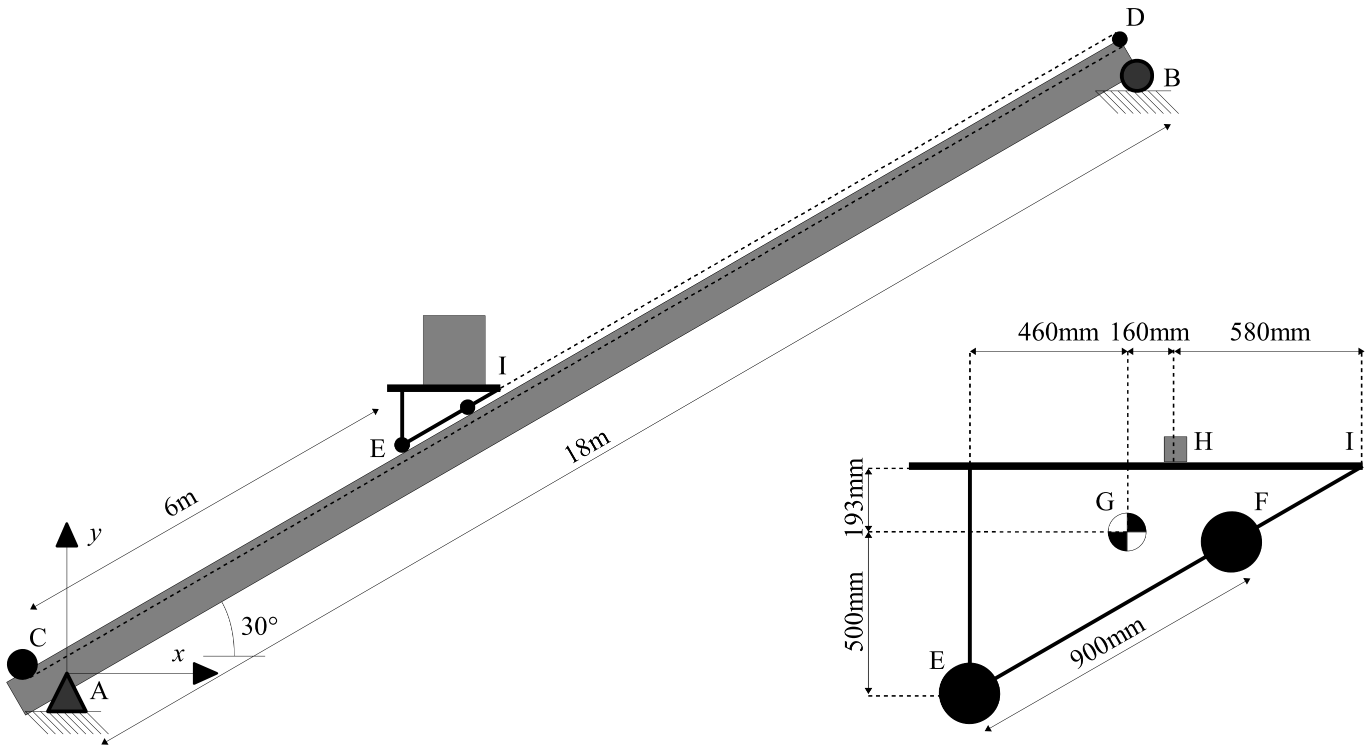
Vraag 1

Een lift van een verhuisbedrijf bestaat uit een uitschuifbare ladderbalk die op een kleine wagen is gemonteerd. In de figuur stelt het punt A de wagen voor, die als een vast punt kan worden aanzien. De helling van de ladder is instelbaar, en in dit geval is de helling ingesteld op 30° ten opzichte van de horizontale. Nadat de lift is geplaatst rust het uiteinde van de ladder in het punt B met een vrij draaiend wiel op een horizontaal vlak. In de volledig uitgeschoven toestand van de ladder is de afstand tussen de punten A en B gelijk aan 18m. De massa van de balk mag als uniform verdeeld worden beschouwd over de lengte, en de totale massa bedraagt 630kg.



Op de ladderbalk loopt een wagentje met een massa van 45kg. In de bestudeerde situatie bevindt het laagste wiel E van het wagentje zich op 6m van het punt A. De inzet in de figuur geeft de ligging van het massacentrum G van het wagentje weer in een assenstelsel dat is georiënteerd volgens de horizontale en de verticale. Op het wagentje ligt een last ter grootte van 200kg. De inzet in de figuur geeft de plaats H aan waar het gewicht van de last aangrijpt. Er is geen wrijving in de wielen van het wagentje.

Een motor drijft de trommel in het punt C aan waar de massaloze kabel wordt opgewikkeld die de positie van het wagentje bepaalt. De diameter van de trommel C bedraagt 200mm. Op het bovenste uiteinde van de ladderbalk bevindt zich een wiel met diameter 80mm waar de kabel over 180° omkeert. De kabel is aan het wagentje bevestigd in het punt I. Het assenstelsel heeft zijn oorsprong in A, en de x-as is horizontaal.

gevraagd : bereken krachten en momenten in de lift en zijn onderdelen wanneer het wagentje stilstaat in punt E

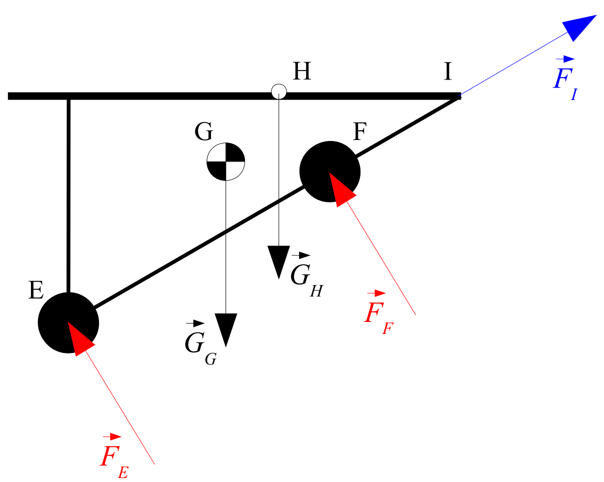
1. maak een vrijlichaamdiagram van het wagentje en bereken de krachten in de beide wielen
2. bereken het koppel dat de motor moet uitoefenen op de trommel C
3. maak een vrijlichaamdiagram van de ladderbalk en bereken de krachten in de punten A en B
4. benoem alle snedekrachten in de ladderbalk, en bereken het buigmoment in de ladderbalk in de sectie die zich bevindt onder het laagste wiel van het wagentje

Bij de bepaling van de positie van de aangrijpingspunten van de krachten mogen de hoogte van de ladderbalk en de diameters van de wielen gelijk genomen worden aan 0.

oplossing : de aangrijpingspunten van de verschillende optredende krachten worden uitgedrukt in een zelfde assenstelsel

	x [m]	y [m]		x [m]	y [m]		x [m]	y [m]		x [m]	y [m]
B	15.588	9.000	E	5.196	3.000	G	5.656	3.500	I	6.396	3.693
D	15.588	9.000	F	5.976	3.450	H	5.816	3.693	J	7.794	4.500

1. maak een vrijlichaamdiagram van het wagentje en bereken de krachten die de beide wielen op de ladderbalk uitoefenen



Op het wagentje grijpen de krachten aan :

- de kracht in het wiel E : $\vec{F}_E = F_E(-\sin 30°\vec{e}_x + \cos 30°\vec{e}_y)$
- de kracht in het wiel F : $\vec{F}_F = F_F(-\sin 30°\vec{e}_x + \cos 30°\vec{e}_y)$
- het gewicht $\vec{G}_G = -G_G\vec{e}_y$ van het wagentje zelf
- het gewicht $\vec{G}_H = -G_H\vec{e}_y$ van de last
- de kabelkracht in het punt I : $\vec{F}_I = F_I(\cos 30°\vec{e}_x + \sin 30°\vec{e}_y)$

Het momentenevenwicht rond het punt E vereist :

$$\begin{aligned}&(\vec{r}_F - \vec{r}_E)\times\vec{F}_F + (\vec{r}_G - \vec{r}_E)\times\vec{G}_G + (\vec{r}_H - \vec{r}_E)\times\vec{G}_H + (\vec{r}_I - \vec{r}_E)\times\vec{F}_I = \\ &\qquad (0.9\text{m}F_F - 0.46\text{m}\cdot 450\text{N} - 0.62\text{m}\cdot 2000\text{N})\vec{e}_z = \vec{0} \\ &\Rightarrow \quad F_F = 1608\text{N}\end{aligned}$$

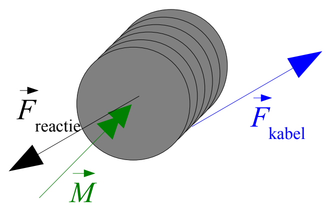
Het momentenevenwicht rond het punt F vereist :

$$\begin{aligned}&(\vec{r}_E - \vec{r}_F)\times\vec{F}_E + (\vec{r}_G - \vec{r}_F)\times\vec{G}_G + (\vec{r}_H - \vec{r}_F)\times\vec{G}_H + (\vec{r}_I - \vec{r}_F)\times\vec{F}_I = \\ &\qquad (-0.9\text{m}F_E + 0.32\text{m}\cdot 450\text{N} + 0.16\text{m}\cdot 2000\text{N})\vec{e}_z = \vec{0} \\ &\Rightarrow \quad F_E = 516\text{N}\end{aligned}$$

Het krachtenevenwicht vereist :

$$\begin{aligned}&\vec{F}_E + \vec{F}_F + \vec{G}_G + \vec{G}_H + \vec{F}_I = \\ &\qquad 516\text{N}\left\{\begin{array}{c}-\sin 30° \\ \cos 30°\end{array}\right\} + 1608\text{N}\left\{\begin{array}{c}-\sin 30° \\ \cos 30°\end{array}\right\} + 450\text{N}\left\{\begin{array}{c}0 \\ -1\end{array}\right\} + 2000\text{N}\left\{\begin{array}{c}0 \\ -1\end{array}\right\} + \ldots \\ &\qquad \ldots + F_I\left\{\begin{array}{c}\cos 30° \\ \sin 30°\end{array}\right\} = \vec{0} \\ &\Rightarrow \quad F_I = 1225\text{N}\end{aligned}$$

2. bereken het koppel dat de motor moet uitoefenen op de trommel C



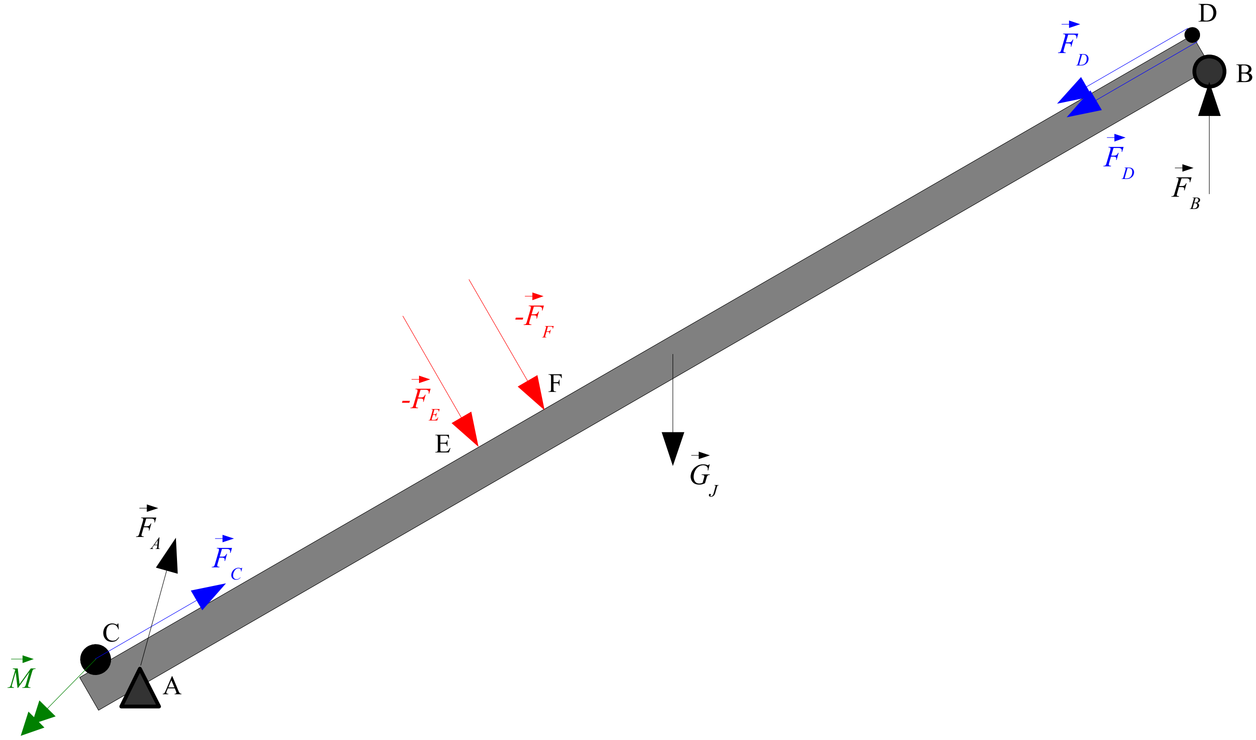
Het vrijlichaamdiagram van de trommel waarop de kabel is opgewikkeld vereist de introductie van :

- de kabelkracht $\vec{F}_{\text{kabel}} = F_{\text{kabel}}(\cos 30°\vec{e}_x + \sin 30°\vec{e}_y)$, doordat er geen wrijving is in het omkeerwiel D is deze kracht gelijk aan $\vec{F}_I = 1225\text{N}(\cos 30°\vec{e}_x + \sin 30°\vec{e}_y)$
- de reactiekracht die de as op de trommel uitoefent
- het moment dat door de motor wordt geleverd $\vec{M} = M\vec{e}_z$

Uitdrukking van het momentenevenwicht om de as van de trommel geeft :

$$\vec{M} = -F_{\text{kabel}} \cdot R_{\text{trommel}} \vec{e}_z = -122.5\text{Nm}\vec{e}_z$$

3. maak een vrijlichaamdiagram van de ladderbalk en bereken de krachten in de punten A en B



Op de balk grijpen krachten en momenten aan :

- de reactiekracht van de wagen op de ladderbalk $\vec{F}_A = F_{Ax}\vec{e}_x + F_{Ay}\vec{e}_y$
- de reactiekracht van de steun in het punt B $\vec{F}_B = F_B\vec{e}_y$
- de kracht die de kabel in het punt C via de trommel op de balk uitoefent $\vec{F}_C$=1225N$(\cos 30°\vec{e}_x + \sin 30°\vec{e}_y)$
- het moment dat kabel in het punt C via de trommel op de balk uitoefent $-\vec{M}$=122.5Nm$\vec{e}_z$
- de krachten die de kabel in het punt D via het omkeerwiel op de balk uitoefent, aan de bovenzijde en aan de onderzijde van wiel telkens $\vec{F}_D$= 1225N$(-\cos 30°\vec{e}_x - \sin 30°\vec{e}_y)$
- de kracht die het onderste wiel van het wagentje op de balk uitoefent, en die tegengesteld is aan de $\vec{F}_E$ die eerder is berekend $-\vec{F}_E$=516N$(\sin 30°\vec{e}_x - \cos 30°\vec{e}_y)$
- de kracht die het bovenste wiel van het wagentje op de balk uitoefent, en die tegengesteld is aan de $\vec{F}_F$ die eerder is berekend $-\vec{F}_F$=1608N$(\sin 30°\vec{e}_x - \cos 30°\vec{e}_y)$
- het gewicht van de ladderbalk zelf $\vec{G}_J = -6300\text{N}\vec{e}_y$

Het momentenevenwicht om het punt A vereist :

$$\begin{aligned}
&(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}_B + (-\vec{M}) + (\vec{r}_E - \vec{r}_A) \times (-\vec{F}_E) + (\vec{r}_F - \vec{r}_A) \times (-\vec{F}_F) + (\vec{r}_J - \vec{r}_A) \times \vec{G}_J = \\
&\qquad (15.588\text{m} \cdot F_B + 122.5\text{Nm} - 6\text{m} \cdot 516\text{N} - 6.9\text{m} \cdot 1608\text{N} - 7.794\text{m} \cdot 6300\text{N})\vec{e}_z = \vec{0} \\
&\Rightarrow \quad F_B = 4053\text{N}
\end{aligned}$$

Het krachtenevenwicht vereist :

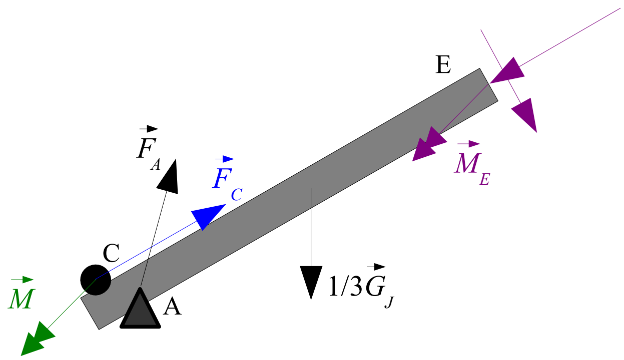
$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + 2\vec{F}_D + (-\vec{F}_E) + (-\vec{F}_F) + \vec{G}_J =$$

$$\left\{\begin{array}{c} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{array}\right\} + 4053\text{N}\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right\} + 1225\text{N}\left\{\begin{array}{c} \cos 30° \\ \sin 30° \end{array}\right\} + 2\cdot 1225\text{N}\left\{\begin{array}{c} -\cos 30° \\ -\sin 30° \end{array}\right\} + \dots$$

$$\dots + 516\text{N}\left\{\begin{array}{c} \sin 30° \\ -\cos 30° \end{array}\right\} + 1608\text{N}\left\{\begin{array}{c} \sin 30° \\ -\cos 30° \end{array}\right\} + 6300\text{N}\left\{\begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array}\right\} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_A = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 4699\text{N} \end{array}\right\}$$

4. benoem alle snedekrachten in de ladderbalk, en bereken het buigmoment in de ladderbalk in de sectie die zich bevindt onder het laagste wiel van het wagentje



In de ladderbalk werken drie snedekrachten, die bij vrijmaken van het deel AE van de balk gelijk zijn aan :

- een normaalkracht $2524\text{N}(-\cos 30°\vec{e}_x - \sin 30°\vec{e}_y)$, een drukkracht
- een dwarskracht $2250\text{N}(\sin 30°\vec{e}_x - \cos 30°\vec{e}_y)$
- een buigmoment

$$\begin{aligned} \vec{M}_E &= -(\vec{r}_A - \vec{r}_E)\times\vec{F}_A - (\vec{r}_{1/3G} - \vec{r}_E)\times\vec{G}_J/3 + (-\vec{M}) \\ &= (5.196\text{m}\cdot 4699\text{N} - 2.598\text{m}\cdot 2100\text{N} + 122.5\text{Nm})\vec{e}_z \\ &= 19083\text{Nm}\,\vec{e}_z \end{aligned}$$

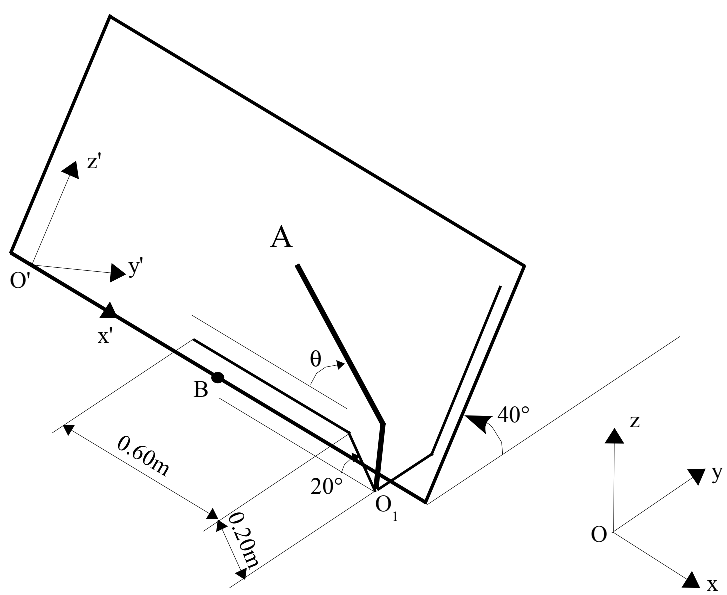
Vraag 2

De reiniging van de voorruit van een personenwagen gebeurt typisch met twee ruitenwissers. De scharnierpunten van de ruitenwissers met het koetswerk van de wagen worden onder de ruit geplaatst. Hiertoe worden de ruitenwissers uitgevoerd in een enigszins geplooide vorm. De figuur toont een typische vorm van één van de ruitenwissers, zijn scharnierpunt O_1 met het koetswerk, evenals de inplanting ten opzichte van een vlakke voorruit. De voorruit maakt een hoek van 40° met de horizontale.
De hoek θ geeft de oriëntatie van de ruitenwisser aan ten opzichte van de onderkant van de voorruit, die horizontaal blijft. De hoek θ wordt dus gemeten in het vlak van de voorruit. Een aandrijfmechanisme zorgt ervoor dat de hoek θ als functie van de tijd varieert als volgt: $\theta = \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}t)$ (θ in radialen, t in seconden). Dit verband geldt voor t tussen 0 en 1 seconde.

In de deelvragen die volgen, komen twee situaties aan bod:

(a) de personenwagen rijdt rechtdoor op een vlakke baan met een constante snelheid van 20m/s

(b) de personenwagen maakt een bocht op een vlakke baan met een kromtestraal van 100m, horizontaal gemeten tussen het midden van de cirkelbeweging en het punt B, het midden van de onderrand van de voorruit. De snelheid van punt B op het beschouwde ogenblik is 20m/s. De horizontale afstand tussen het middelpunt van de cirkelbeweging en O_1 bedraagt 99.35m.



gevraagd :

1. Bereken de snelheid van het eindpunt A van de ruitenwisser op het ogenblik dat de ruitenwisser een hoek θ maakt van 60° met de horizontale, en dit in de situaties (a) en (b). Geef de snelheid met componenten in een wereldassenkruis $Oxyz$. Op het beschouwde ogenblik is de onderrand van de voorruit evenwijdig met de x-as.

2. Bereken de snelheid van het eindpunt A van de ruitenwisser in de situatie (b) op het ogenblik dat de ruitenwisser een hoek θ maakt van 60° met de horizontale, zoals gezien door een waarnemer die zich bevindt in het midden van de cirkel die de personenwagen beschrijft en die meeroteert met de beweging van de personenwagen. Geef de snelheid met de vectoriële componenten volgens de richtingen van het assenkruis $Oxyz$. Op het beschouwde ogenblik is de onderrand van de voorruit evenwijdig met de x-as.

3. Bereken de versnelling van het eindpunt A van de ruitenwisser in de situatie (a) op het ogenblik dat de ruitenwisser een hoek θ maakt van 60° met de horizontale. Geef de natuurlijke componenten van de versnelling in een assenkruis vastgemaakt aan de ruit $(O'x'y'z')$.

oplossing: De hoek, hoeksnelheid en hoekversnelling van de ruitenwisser in een assenstelsel vast aan de ruit zijn gegeven door:

$$\theta = \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}t), t \in [0;1]$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(\frac{\pi}{2}t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sqrt{1-\sin^2(\frac{\pi}{2}t)} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \theta^2}$$

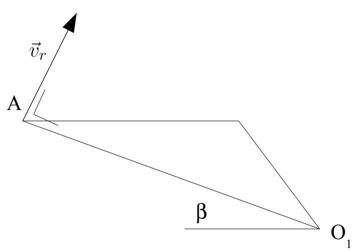
$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \sin(\frac{\pi}{2}t) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \theta$$

Voor $\theta = \pi/3$ is $\omega = 1.839\text{rad/s}$ en $\alpha = -2.584\text{rad/s}^2$.

1. Bereken de snelheid van het eindpunt A van de ruitenwisser op het ogenblik dat de ruitenwisser een hoek θ maakt van 60° met de horizontale, en dit in de situaties (a) en (b). Geef de snelheid met componenten in een wereldassenkruis $Oxyz$. Op het beschouwde ogenblik is de onderrand van de voorruit evenwijdig met de x-as.

   De ruitenwisser maakt een samengestelde beweging: de ruitenwisser roteert rond de as loodrecht op de voorruit door O_1; de rotatieas beweegt mee met de auto.

   (a) We kiezen het bewegend assenstelsel translerend volgens de y-as.



Volgens de wet van de samengestelde beweging vinden we:

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{v}_s + \vec{v}_r$$

De sleepsnelheid is gegeven door $\vec{v}_s = -20\text{m/s}\vec{e}_y$.

De relatieve snelheid t.o.v. een assenstelsel dat meebeweegt met de auto is gegeven door

$$\begin{aligned}
\vec{v}_r &= \vec{\omega} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_{O1}) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \\ 0 & \omega & 0 \\ -|AO_1|\cos(\theta+\beta) & 0 & |AO_1|\sin(\theta+\beta) \end{vmatrix} \\
&= \omega|AO_1|\sin(\theta+\beta)\vec{e}_{x'} + \omega|AO_1|\cos(\theta+\beta)\vec{e}_{z'} \\
&= \omega|AO_1|\sin(\theta+\beta)\vec{e}_x + \omega|AO_1|\cos(\theta+\beta)\cos(40°)\vec{e}_y + \omega|AO_1|\cos(\theta+\beta)\sin(40°)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Via de cos-regel vinden we $|AO_1| = 0.79\text{m}$. De hoek β kan berekend worden gebruik makend van de sin-regel en is $\beta = 5°$, zodat

$$\vec{v}_r = 1.316\text{m/s}\vec{e}_x + 0.471\text{m/s}\vec{e}_y + 0.395\text{m/s}\vec{e}_z$$

De absolute snelheid van het punt A is dus

$$\vec{v}_{Aa} = \vec{v}_s + \vec{v}_r = 1.316\text{m/s}\vec{e}_x - 19.529\text{m/s}\vec{e}_y + 0.395\text{m/s}\vec{e}_z$$

   (b) We kiezen het bewegend assenstelsel meeroterend met de auto en oorsprong in C, het middelpunt van de cirkelbeweging. De hoeksnelheid waarmee de auto roteert is gegeven door $\vec{\omega}_B = v_B/100\text{m}\vec{e}_z = 0.2\text{rad/s}\vec{e}_z$. De vector $\vec{r}_A - \vec{r}_C$ is gegeven door

$$\begin{aligned}
\vec{r}_A - \vec{r}_C &= (-99.35\text{m} + |AO_1|\cos(\theta+\beta))\vec{e}_{x'} + |AO_1|\sin(\theta+\beta))\vec{e}_{z'} \\
&= (-99.35\text{m} + |AO_1|\cos(\theta+\beta))\vec{e}_x + |AO_1|\sin(\theta+\beta)\cos(40°)\vec{e}_y + |AO_1|\sin(\theta+\beta)\sin(40°)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Hieruit vinden we voor de sleepsnelheid

$$\vec{v}_s = \vec{\omega}_B \times (\vec{r}_A - \vec{r}_C) = -0.1097\text{m/s}\vec{e}_x - 19.937\text{m/s}\vec{e}_y$$

De relatieve snelheid is identiek als in (a), zodat de absolute snelheid van A berekend kan worden als

$$\vec{v}_{Ab} = 1.2063\text{m/s}\vec{e}_x - 19.466\text{m/s}\vec{e}_y + 0.395\text{m/s}\vec{e}_z$$

2. Bereken de snelheid van het eindpunt A van de ruitenwisser in de situatie (b) op het ogenblik dat de ruitenwisser een hoek θ maakt van 60° met de horizontale, zoals gezien door een waarnemer die zich bevindt in het midden van de cirkel die de personenwagen beschrijft en die meeroteert met de beweging van de personenwagen. Geef de snelheid met de vectoriële componenten volgens de richtingen van het assenkruis $Oxyz$. Op het beschouwde ogenblik is de onderrand van de voorruit evenwijdig met de x-as.

   De gevraagde snelheid is de relatieve snelheid uit deelvraag 1 en is bijgevolg

$$\vec{v}_r = 1.316\text{m/s}\vec{e}_x + 0.471\text{m/s}\vec{e}_y + 0.395\text{m/s}\vec{e}_z$$

3. Bereken de versnelling van het eindpunt A van de ruitenwisser in de situatie (a) op het ogenblik dat de ruitenwisser een hoek θ maakt van 60° met de horizontale. Geef de natuurlijke componenten van de versnelling in een assenkruis vastgemaakt aan de ruit $(O'x'y'z')$.

   De tangentiële component van de versnelling heeft een grootte $a_t = |AO1|\alpha = -2.041\text{m/s}^2$ De normale component van de versnelling heeft een grootte $a_n = |AO1|\omega^2 = 2.672\text{m/s}^2$ De componenten volgens $O'x'y'z'$ zijn

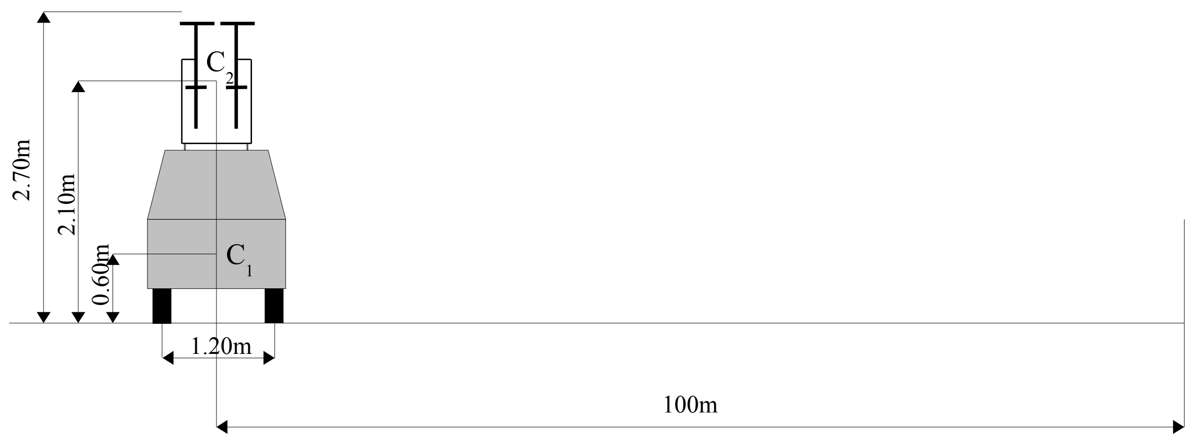
$$\vec{a}_t = -2.041\sin(\theta+\beta)\vec{e}_{x'} - 2.041\cos(\theta+\beta)\vec{e}_{z'} = -1.849\text{m/s}^2\vec{e}_{x'} - 0.864\text{m/s}^2\vec{e}_{z'}$$

$$\vec{a}_n = 2.672\cos(\theta+\beta)\vec{e}_{x'} - 2.672\sin(\theta+\beta)\vec{e}_{z'} = 1.131\text{m/s}^2\vec{e}_{x'} - 2.421\text{m/s}^2\vec{e}_{z'}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t = -0.718\text{m/s}^2\vec{e}_{x'} - 3.285\text{m/s}^2\vec{e}_{z'}$$

Vraag 3

Een kleine lichte auto met massa 900kg (inclusief twee inzittenden op de voorste zetels) is voorzien van een daksteun waarop zich twee fietsen bevinden. Het geheel van deze steun met fietsen heeft een massa van 50kg. De koffer is vast verbonden met het dak van de auto. De auto heeft een massacentrum in het punt C_1, het geheel van de daksteun met de twee fietsen heeft een massacentrum in het punt C_2. Ook het massatraagheidsmoment rond een as door het massacentrum, loodrecht op het vlak van de tekening is gekend: I_1 voor de auto en I_2 voor het geheel van daksteun en fietsen ($I_1 = 276.7500\text{kgm}^2$, $I_2 = 10.1667\text{kgm}^2$).



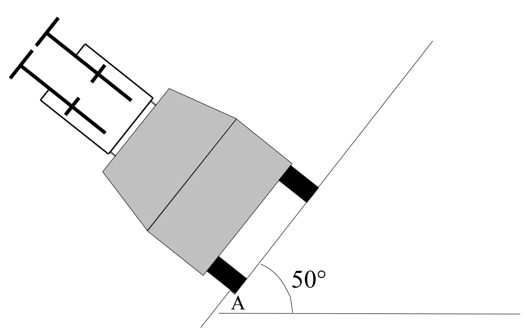
gevraagd :

1. Bereken de positie van het massacentrum van het geheel van de auto, daksteun en fietsen, in het getoonde vlak. Bereken ook het massatraagheidsmoment van het geheel, ten opzichte van het massacentrum van het geheel, rond een as loodrecht op het getoonde vlak.

2. De auto maakt een bocht met een straal van 100m op een ruw wegdek zodat de wrijvingscoﬃciënt tussen wegdek en banden van de auto gelijk is aan 0.95. Als het onmogelijk is dat de auto met daksteun en fietsen zou omkantelen, wat is dan de maximum snelheid die de auto kan halen in de beschreven bocht, zonder uit de bocht te gaan? Beschouw hiertoe het geheel van auto, daksteun en fietsen als een puntmassa.

3. In de meer realistische veronderstelling dat de auto wel kan kantelen en dus als een star lichaam beschouwd kan worden, bereken de maximum snelheid die de auto kan halen vooraleer de banden aan de binnenkant van de bocht het contact met het wegdek verliezen. De gevraagde snelheid is de snelheid van het massacentrum van het geheel van auto, daksteun en fietsen.

4. De chauffeur parkeert zich ongelukkig in de buurt van een steile en gladde helling, zodat de auto traag naar beneden glijdt en tot stilstand komt tegen een stoeprand, zoals aangeduid in onderstaande figuur. Bereken de hoekversnelling waarmee de auto vanuit stilstand zal beginnen roteren rond het punt A, het contactpunt van de onderste wielen met de stoeprand. De hoogte van de stoeprand is verwaarloosbaar.



1. Bereken de positie van het massacentrum van het geheel van de auto, daksteun en fietsen, in het getoonde vlak. Bereken ook het massatraagheidsmoment van het geheel, ten opzichte van het massacentrum van het geheel, rond een as loodrecht op het getoonde vlak.

   Uit symmetrie weten we dat het massacentrum C op de verbindingsas C_1C_2 moet liggen. De hoogte t.ov. de grond is gegeven door

   $$z_c = \frac{m_1 z_{C1} + m_2 z_{C2}}{m_1 + m_2} + \frac{0.6 \cdot 900 + 2.1 \cdot 50}{950}\text{m} = 0.68\text{m}$$

   Het traagheidsmoment van de auto t.o.v. de as door het massacentrum C, loodrecht op het vlak van de tekening kan berekend worden door de stelling van Steiner toe te passen:

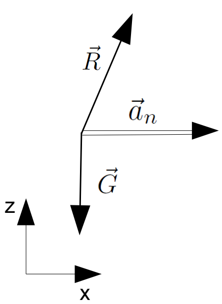
   $$I_1' = I_1 + m_1(0.08\text{m})^2 = 282.51\text{kgm}^2$$

   Analoog vinden we voor de dakkoffer

   $$I_2' = I_2 + m_2(1.42\text{m})^2 = 110.98\text{kgm}^2$$

   Het totale traagheidsmoment is dan $I_1' + I_2' = 393.50\text{kgm}^2$

2. De auto maakt een bocht met een straal van 100m op een ruw wegdek zodat de wrijvingscofficiënt tussen wegdek en banden van de auto gelijk is aan 0.95. Als het onmogelijk is dat de auto met daksteun en fietsen zou omkantelen, wat is dan de maximum snelheid die de auto kan halen in de beschreven bocht, zonder uit de bocht te gaan? Beschouw hiertoe het geheel van auto, daksteun en fietsen als een puntmassa.



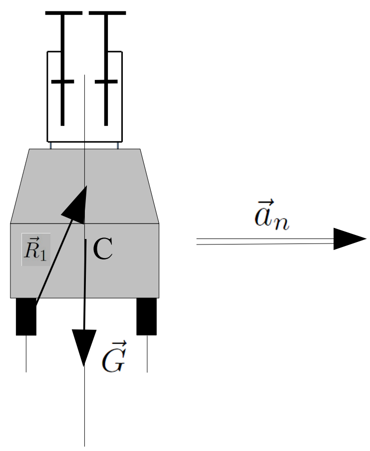
   De maximumsnelheid wordt bereikt als de wrijvingskracht maximaal is of $R_\parallel = \mu R_\perp$
   De dynamische krachtenvergelijking is gegeven door:

   $$\vec{G} + \vec{R} = m\vec{a}$$

   $$\left\{ \begin{array}{c} R_\parallel \\ 0 \\ R_\perp \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -G \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} ma_n \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

   Hieruit vinden we dat $R_\perp = G = 9500\text{N}$ en $R_\parallel = \mu R_\perp = \mu mg = ma_n$ of $a_n = \mu g = 9.5\text{m/s}^2$. Voor de cirkelbeweging geldt $a_n = v^2/R$ met $R = 100\text{m}$ de straal van de cirkel. Hieruit vinden we de maximale snelheid zonder uit de bocht te gaan, $v = 30.8\text{m/s}$.

3. In de meer realistische veronderstelling dat de auto wel kan kantelen en dus als een star lichaam beschouwd kan worden, bereken de maximum snelheid die de auto kan halen vooraleer de banden aan de binnenkant van de bocht het contact met het wegdek verliezen. De gevraagde snelheid is de snelheid van het massacentrum van het geheel van auto, daksteun en fietsen.



De auto gaat net niet kantelen als de reactiekracht op het binnenste wiel en het moment t.o.v. het massacentrum $\vec{0}$ zijn.

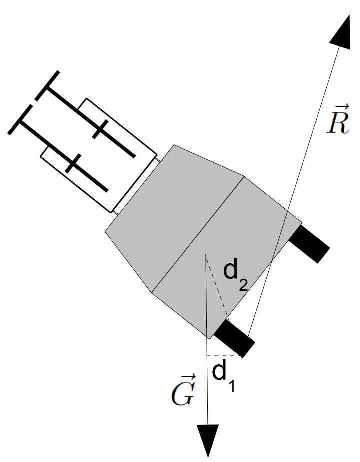
$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_C) \times R_1 = \vec{0}$$

Dit betekent dat $\vec{R}_1 \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_c)$ De krachtenvergelijking $\vec{R}_1 + \vec{G} = m\vec{a}_n$ wordt dan

$$\left\{ \begin{array}{c} 0.662R_1 \\ 0.750R_1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -G \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} ma_n \\ 0 \end{array} \right\}$$

Hieruit vinden we dat $R_1 = 12699\text{N}$ en $a_n = 8.83\text{m/s}^2$. Gebruik makend van $a_n = v^2/R$ vinden we dat de auto zal gaan kantelen vanaf een snelheid van $v = 29.7\text{m/s}$.

4. De chauffeur parkeert zich ongelukkig in de buurt van een steile en gladde helling, zodat de auto traag naar beneden glijdt en tot stilstand komt tegen een stoeprand. Bereken de hoekversnelling waarmee de auto vanuit stilstand zal beginnen roteren rond het punt A, het contactpunt van de onderste wielen met de stoeprand. De hoogte van de stoeprand is verwaarloosbaar.



Er is een vaste as ter hoogte van het onderste wiel. Het traagheidsmoment t.o.v. deze as kan berekend worden m.b.v. de stelling van Steiner, $I_A = I' + md_2^2 = 1174.77\text{kgm}^2$. De dynamische momentenvergelijking tov deze as is

$$(\vec{r}_C - \vec{r}_A) \times \vec{G} = I_A\vec{\alpha}$$

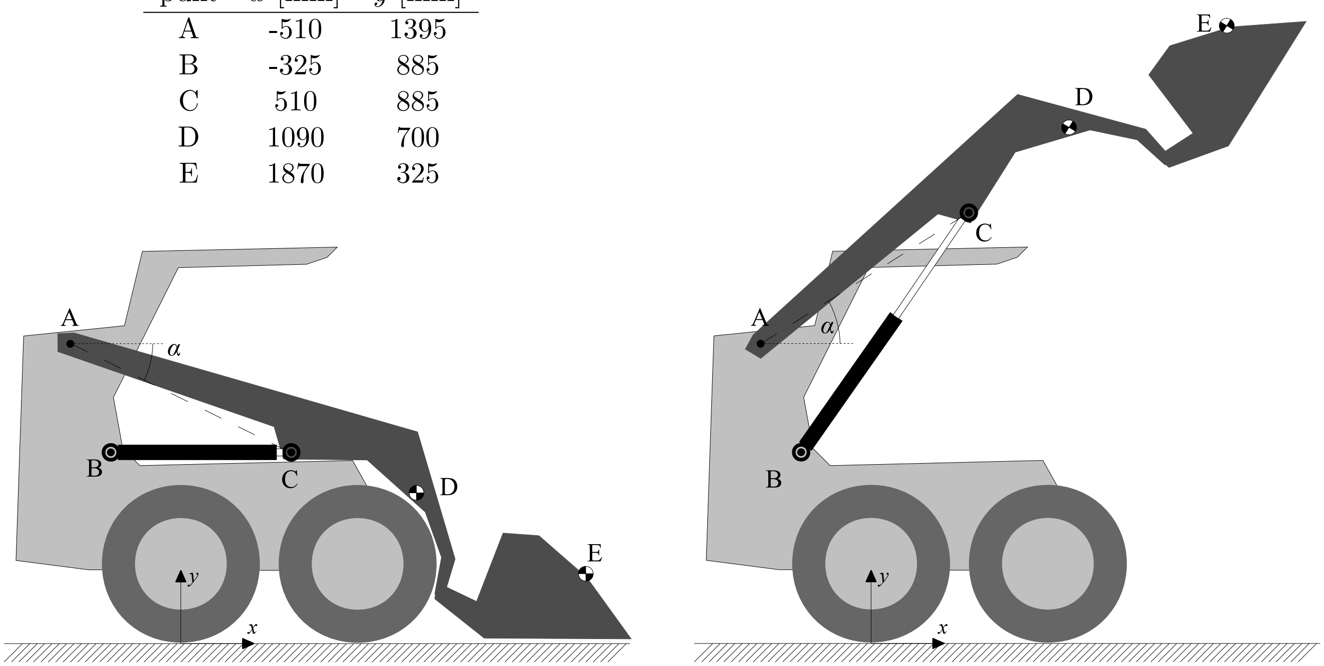
$$d_1 mg = I_A \alpha$$

Met $d_1 = (0.68\sin(50°) - 0.60\cos(50°))\text{m}$ vinden we als hoekversnelling $\alpha = 1.09\text{rad/s}^2$.

Vraag 4

De schepbak van een kleine graafmachine is verbonden aan de hefarm ACDE, die roteert rond het punt A. Een massaloze zuiger BC is met wrijvingsloze scharnieren verbonden aan het frame van de machine (in het punt B) en aan de arm van de schepbak (in het punt C). De schepbak wordt opgetild door de lengte van de zuiger BC te vergroten, waarbij de zuiger een normaalkracht levert. De linkerhelft van de figuur toont de machine met de hefarm in de rusttoestand, wanneer de zuiger een lengte heeft van 835mm. De rechterhelft van de figuur toont de hoogste stand van de machine, wanneer de zuiger BC een lengte heeft van 1360mm.

punt	x [mm]	y [mm]
A	-510	1395
B	-325	885
C	510	885
D	1090	700
E	1870	325



De tabel geeft de coördinaten van de verschillende scharnierpunten en de zwaartepunten in de rusttoestand van de machine. Het punt D is het zwaartepunt van het geheel van de hefarm en de lege schepbak samen. Het punt E is het zwaartepunt van de last die in de schepbak ligt. Deze coördinaten zijn uitgedrukt in een assenstelsel waarvan de oorsprong ligt in het contactpunt van het achterwiel van de machine met de bodem, met een x-as evenwijdig met de horizontale en een y-as volgens de verticale. Het geheel van hefarm en lege schepbak heeft een massa van 320kg, en de last in de schepbak heeft een massa van 750kg.

gevraagd : bereken met behulp van het principe van virtuele arbeid de kracht die de zuiger moet ontwikkelen

1. verklaar hoe het principe van virtuele arbeid gebruikt wordt om de kracht in de zuiger BC te berekenen
2. maak een vrijlichaamdiagram van het geheel van de hefarm, de schepbak en de last, op het ogenblik waarop de hefarm uit de rusttoestand loskomt, en duid alle krachten aan; duid ook de virtuele verplaatsingen aan
3. bereken de kracht die de zuiger moet leveren om de hefarm uit de rusttoestand te bewegen
4. bereken de grenzen van het interval van de hoek α tussen de horizontale en het lijnstuk AC
5. maak voor een willekeurige stand van de hefarm een vrijlichaamdiagram van het geheel van de hefarm, de schepbak en de last, en duid alle krachten aan; duid ook alle virtuele verplaatsingen aan
6. bespreek hoe de kracht in de zuiger berekend kan worden voor een willekeurige stand van de hefarm; een correcte uitwerking levert bonuspunten op

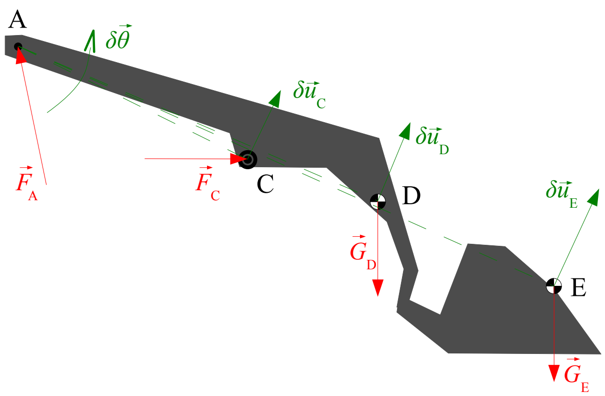
oplossing :

1. verklaar hoe het principe van virtuele arbeid gebruikt wordt om de kracht in de zuiger BC te berekenen

   Het principe van de virtuele arbeid vereist een goed gekozen virtuele verplaatsing. De arbeid van alle krachten in deze verplaatsing moet gelijk zijn aan nul, wat equivalent is met evenwicht van het lichaam. De virtuele verplaatsing mag geen afbreuk doen aan de samenhang van het lichaam. Elke virtuele verplaatsing is dus de weergave van het effect van een virtuele rotatie van het geheel van de hefarm en de schepbak rond het punt A.

   Hier is het aangewezen een verplaatsing als star lichaam te nemen van het geheel van de hefarm en de schepbak. Dit geheel roteert rond het vaste scharnier A. Voor elk van de punten waar krachten aangrijpen is de kennis van de virtuele verplaatsing nodig.

2. maak een vrijlichaamdiagram van het geheel van de hefarm, de schepbak en de last, op het ogenblik waarop de hefarm uit de rusttoestand loskomt, en duid alle krachten aan; duid ook de virtuele verplaatsingen aan



Op het vrijlichaamdiagram grijpen 4 krachten aan :

- de reactiekracht $\vec{F}_A$ in het scharnier A
- de zuigerkracht $\vec{F}_C = F_C\vec{e}_x$ in het uiteinde C van de zuiger
- het gewicht $\vec{G}_D = -G_D\vec{e}_y$ in het zwaartepunt D van de hefarm
- het gewicht $\vec{G}_E = -G_E\vec{e}_y$ in het zwaartepunt E van de last

Elk van deze punten ondergaat een virtuele verplaatsing, die berekend wordt uit de hoek $\delta\vec{\theta} = \delta\theta\vec{e}_z$ van de rotatie rond A :

- het punt A verplaatst niet $\delta\vec{u}_A = \vec{0}$
- het punt C heeft een virtuele verplaatsingsvector

$$\delta\vec{u}_C = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ 1.02\text{m} & -0.51\text{m} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.51\text{m}\;\delta\theta \\ 1.02\text{m}\;\delta\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- het punt D heeft een virtuele verplaatsingsvector

$$\delta\vec{u}_D = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ 1.60\text{m} & -0.695\text{m} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.695\text{m}\;\delta\theta \\ 1.60\text{m}\;\delta\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- het punt E heeft een virtuele verplaatsingsvector

$$\delta\vec{u}_E = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ 2.38\text{m} & -1.67\text{m} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.67\text{m}\;\delta\theta \\ 2.38\text{m}\;\delta\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

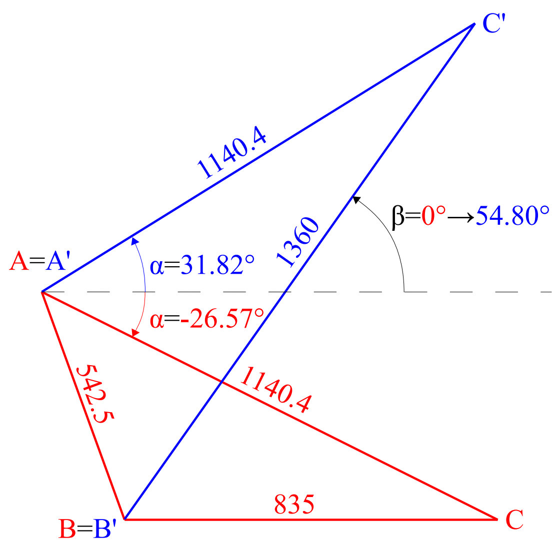
3. bereken de kracht die de zuiger moet leveren om de hefarm uit de rusttoestand te bewegen

   De totale virtuele arbeid moet gelijk zijn aan 0 :

$$\begin{aligned} \delta V &= \vec{F}_C \cdot \delta\vec{u}_C + \vec{F}_D \cdot \delta\vec{u}_D + \vec{F}_E \cdot \delta\vec{u}_E = 0 \\ &= \begin{Bmatrix} F_C \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.51\text{m}\;\delta\theta \\ 1.02\text{m}\;\delta\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -3200\text{N} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.695\text{m}\;\delta\theta \\ 1.60\text{m}\;\delta\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -7500\text{N} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1.67\text{m}\;\delta\theta \\ 2.38\text{m}\;\delta\theta \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow\;& F_C = 45040\text{N} \end{aligned}$$

   De zuiger moet een kracht van 45kN leveren om de hefarm en de last uit de rusttoestand op te tillen.

4. bereken de grenzen van het interval van de hoek α tussen de horizontale en het lijnstuk AC

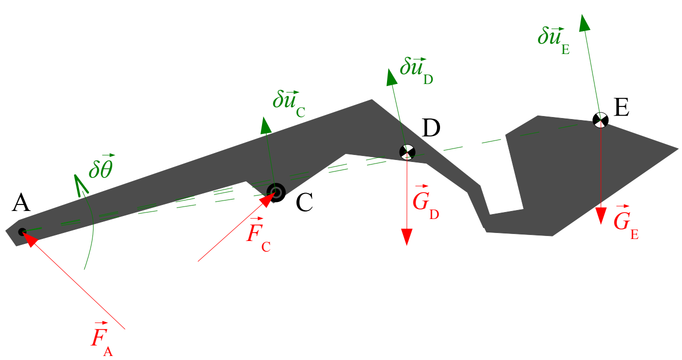


De hefarm AC sluit in de rusttoestand een hoek α in met de horizontale, die gelijk is aan -26.57° (neerwaarts). In de hoogste stand van de graafmachine is de hoek α gelijk aan 31.82° (opwaarts). De zuiger BC sluit daarbij een hoek β in met de horizontale die varieert tussen 0° (laagste stand) en 54.8° (hoogste stand). De relatie tussen de hoeken β en α luidt :

$$\beta = \arctan \frac{510 + 1140 \sin\alpha}{-185 + 1140 \cos\alpha}$$

Bij een rotatie rond A is de hoek die het lijnstuk AD met de horizontale insluit steeds 3.1° groter dan α, en de hoek die het lijnstuk AE met de horizontale insluit steeds 2.35° groter dan α.

5. maak voor een willekeurige stand van de hefarm een vrijlichaamdiagram van het geheel van de hefarm, de schepbak en de last, en duid alle krachten aan; duid ook alle virtuele verplaatsingen aan



Op het vrijlichaamdiagram grijpen 4 krachten aan :

- de reactiekracht $\vec{F}_A$ in het scharnier A
- de zuigerkracht $\vec{F}_C$=$F_C(\cos\beta\vec{e}_x + \sin\beta\vec{e}_y)$ in het uiteinde C van de zuiger
- het gewicht $\vec{G}_D$=$-G_D\vec{e}_y$ in het zwaartepunt D van de hefarm
- het gewicht $\vec{G}_E$=$-G_E\vec{e}_y$ in het zwaartepunt E van de last

Elk van deze punten ondergaat een virtuele verplaatsing, die berekend wordt uit de hoek $\delta\vec{\theta}$=$\delta\theta\vec{e}_z$ van de rotatie rond A :

- het punt A verplaatst niet $\delta\vec{u}_A$=$\vec{0}$
- het punt C heeft een virtuele verplaatsingsvector

$$\delta\vec{u}_C = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ 1.14\text{m } \cos\alpha & 1.14\text{m } \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.14\text{m } \sin\alpha\,\delta\theta \\ 1.14\text{m } \cos\alpha\,\delta\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- het punt D heeft een virtuele verplaatsingsvector

$$\delta\vec{u}_D = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ 1.744\text{m } \cos(\alpha + 3.1°) & 1.744\text{m } \sin(\alpha + 3.1°) & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.744\text{m } \sin(\alpha + 3.1°)\,\delta\theta \\ 1.744\text{m } \cos(\alpha + 3.1°)\,\delta\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- het punt E heeft een virtuele verplaatsingsvector

$$\delta\vec{u}_E = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta \\ 2.61\text{m } \cos(\alpha + 2.35°) & 2.61\text{m } \sin(\alpha + 2.35°) & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.61\text{m } \sin(\alpha + 2.35°)\,\delta\theta \\ 2.61\text{m } \cos(\alpha + 2.35°)\,\delta\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6. bespreek hoe de kracht in de zuiger berekend kan worden voor een willekeurige stand van de hefarm

   De totale virtuele arbeid moet gelijk zijn aan 0 :

$$
\begin{aligned}
\delta V &= \vec{F}_C \cdot \delta\vec{u}_C + \vec{F}_D \cdot \delta\vec{u}_D + \vec{F}_E \cdot \delta\vec{u}_E = 0 \\
&= \left\{ \begin{array}{c} F_C \cos\beta \\ F_C \sin\beta \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} -1.14\mathrm{m}\ \sin\alpha\,\delta\theta \\ 1.14\mathrm{m}\ \cos\alpha\,\delta\theta \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -3200\mathrm{N} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} -1.744\mathrm{m}\ \sin(\alpha + 3.1^\circ)\,\delta\theta \\ 1.744\mathrm{m}\ \cos(\alpha + 3.1^\circ)\,\delta\theta \end{array} \right\} + \ldots \\
&\quad \ldots + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -7500\mathrm{N} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} -2.61\mathrm{m}\ \sin(\alpha + 2.35^\circ)\,\delta\theta \\ 2.61\mathrm{m}\ \cos(\alpha + 2.35^\circ)\,\delta\theta \end{array} \right\} \\
\Rightarrow &\quad F_C = \frac{3200 \cdot 1.744\cos(\alpha + 3.1^\circ) + 7500 \cdot 2.61\cos(\alpha + 2.35^\circ)}{1.14\sin(\beta - \alpha)}\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

De figuur geeft het verloop van de grootte van de kracht weer, als functie van de stand α van de hefarm.