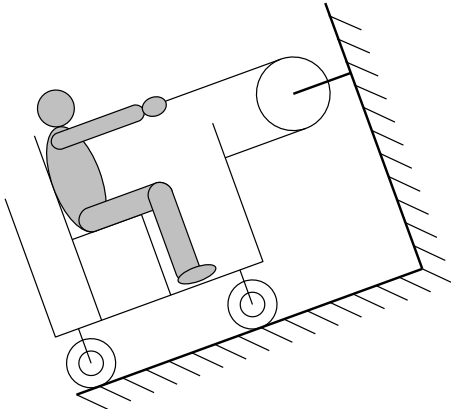


# Examen H1B0 Toegepaste Mechanica 1

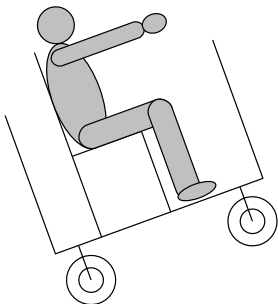
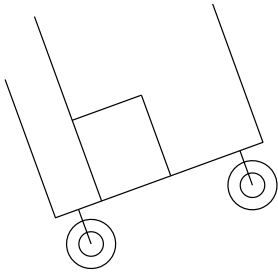
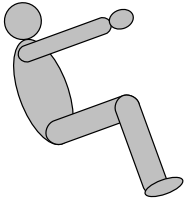
## Vraag 1



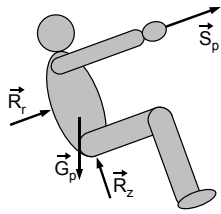
Een persoon zit op een stoel in een wagentje, en trekt zichzelf omhoog met een touw. Het touw is ideaal en massaloos, de katrol is ideaal en massaloos en de wielen van het wagentje bewegen wrijvingsloos. De voeten van de persoon maken geen contact met de vloer van het wagentje.

*gevraagd :* Geef in de drie gevallen op de onderstaande tekeningen duidelijk aan welke krachten moeten aangebracht worden bij het vrijmaken van de onderdelen. Stel deze krachten voor met een vector en benoem deze vector. Geef bij elke kracht een korte verklaring of toelichting waarom je deze kracht invoert. Als één en dezelfde kracht op verschillende vrijgemaakte onderdelen of systemen inwerkt, gebruik dezelfde naam.

1. de persoon
2. het wagentje met ingebouwde stoel
3. het geheel van wagentje, stoel en persoon



oplossing :



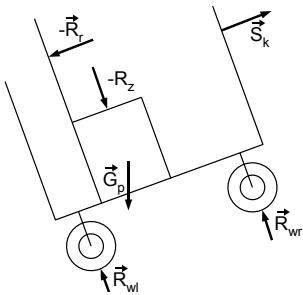
Volgende uitwendige krachten grijpen aan :

- $\vec{G}_p$  het gewicht van de persoon, aangrijpend in het zwaartepunt van het lichaam van de persoon
- $\vec{G}_k$  het gewicht van het karretje en de stoel, aangrijpend in het zwaartepunt van dit geheel  
Het is ook mogelijk om de gewichten van stoel en karretje als aparte krachten te aanzien, die elk in hun eigen zwaartepunt aangrijpen. Zoals de vraag hier is gesteld is dit niet noodzakelijk. (Als de stoel en/of het karretje apart zouden moeten worden vrijgemaakt, zou deze opdeling wel noodzakelijk zijn.)

Volgende krachten zijn afhankelijk van de actie van de persoon :

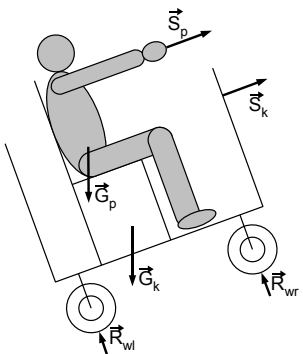
- $\vec{S}_p$  de kracht waarmee de persoon aan de kabel trekt
- $\vec{S}_k$  de kracht waarmee de kabel aan het karretje trekt  
Als de katrol wrijvingsloos werkt, dan is de spankracht over de hele lengte van de kabel constant  $S_p = S_k$

Tussen het karretje (al dan niet met de persoon erin) en het hellend vlak werken volgende krachten :



- $\vec{R}_{wl}$  de kracht tussen het linkerwiel en het hellend vlak; doordat er geen wrijving is tussen het wiel en het hellend vlak staat deze kracht loodrecht op het hellend vlak
- $\vec{R}_{wr}$  de kracht tussen het rechterwiel en het hellend vlak; doordat er geen wrijving is tussen het wiel en het hellend vlak staat deze kracht loodrecht op het hellend vlak

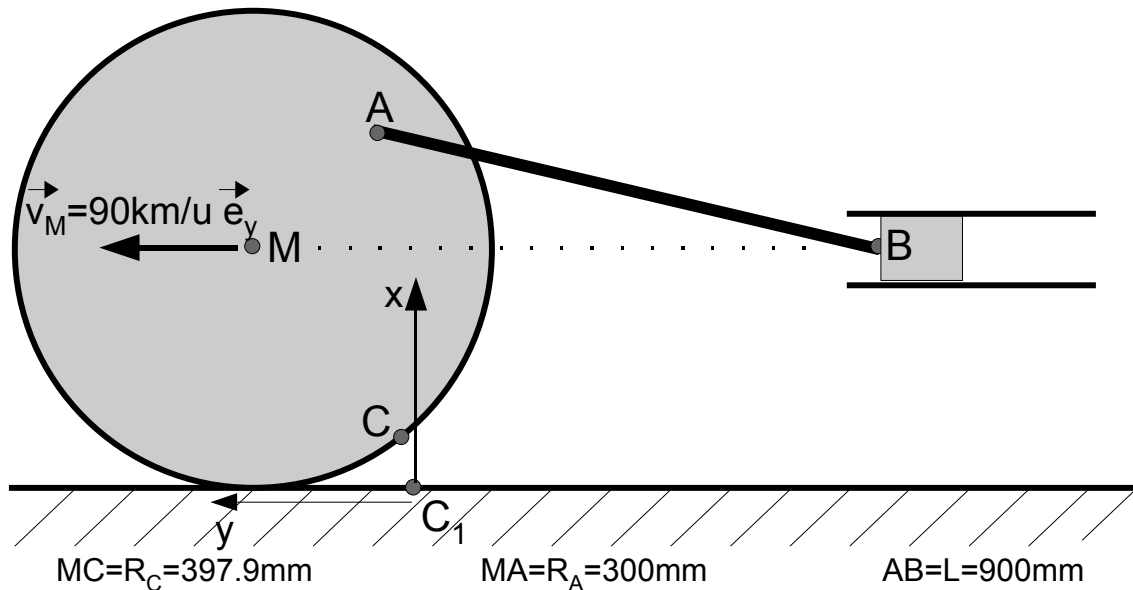
Tussen de stoel en de persoon werken volgende krachten :



- $\pm \vec{R}_r$  de kracht tussen de rug van de persoon en de rugleuning van de stoel; deze kracht staat min of meer loodrecht op de rugleuning, maar aanwezigheid van wrijving tussen de leuning en de rug kan aanleiding geven tot een kleine tangentiële kracht
- $\pm \vec{R}_z$  de kracht tussen het zitvlak van de persoon en het zitje van de stoel; deze kracht staat min of meer loodrecht op het zitje, maar aanwezigheid van wrijving tussen het zitvlak en het zitje kan aanleiding geven tot een kleine tangentiële kracht

## Vraag 2

Het wiel van een spoorrijtuig heeft een diameter  $2R_C$  van 795.8mm. De aandrijving van het wiel gebeurt door middel van een drijfstang AB met een lengte  $L$  van 900mm. Aan het ene uiteinde A is de stang bevestigd aan het wiel op een straal  $R_A$  van 300mm. Aan het andere uiteinde B beweegt de stang heen en weer in een rechte horizontale geleiding, waarvan het verlengde door de as van het wiel loopt. Op het tijdstip  $t=0s$  staat de drijfstang in haar uiterste stand rechts van het wiel verwijderd. Op dat ogenblik is het punt C dat zich op het wiel bevindt in contact met het spoor in het punt  $C_1$ . Het vaste assenstelsel is in dit punt  $C_1$  bevestigd aan het spoor, en de  $y$ -as is georiënteerd volgens het spoor. Het rijtuig rijdt met een constante snelheid van 90km/u. Het wiel rolt zonder glijden.



gevraagd : bereken de snelheid in onderstaande situaties, druk ze uit in m/s.

1. Bereken de vector van de absolute snelheid van het punt C op het tijdstip waarop het punt A in zijn laagste stand staat, en duid deze vector aan in een figuur.
2. Bereken de horizontale component van de absolute snelheid van het punt A op het tijdstip waarop het punt A door zijn laagste stand gaat.
3. Maak in gedachten een momentopname van het draaiend wiel op een willekeurig tijdstip. Welk punt van het wiel heeft dan de hoogste absolute snelheid, en hoe groot is die snelheid ?
4. Bereken het traject van de punt C voor een tijdsinterval  $t=[0s, 0.3s]$  : stel een expliciete uitdrukking op als functie van de tijd, en schets de baan van het punt C in een grafiek.
5. Bereken de absolute snelheid van het punt B op het tijdstip waarop het punt A in een positie  $45^\circ$  rechtsboven het centrum M van het wiel staat (zoals op de figuur).

oplossing :

De beweging van het wiel is de samenstelling van een translatie en een rotatie. Het centrum M van het wiel vertoont een zuivere translatie met snelheid  $\vec{v}_M = 90\text{km/u}\vec{e}_y = 25\text{m/s}\vec{e}_y$ . Ten opzichte van dit centrum is de beweging een zuivere rotatie met hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  :

$$\vec{\omega} = \frac{25\text{m/s}}{0.3979\text{m}}\vec{e}_z = 62.83\text{rad/s}\vec{e}_z = 20\pi\text{rad/s}\vec{e}_z$$

De beweging van de punten van het wiel zelf wordt dus best beschreven als een samengestelde beweging. Gebruik daartoe een relatief assenstelsel  $x'y'$  dat verbonden is aan het centrum M, en dat dus enkel een translatie ondergaat. De oriëntatie van de assen is zo gekozen dat op tijdstip  $t=0\text{s}$  het punt C samenvalt met het punt  $C_1$ , en dat de hoekpositie  $\theta$  in het relatieve assenstelsel dan lineair verloopt met de tijd  $\theta = \omega t$ .

In het relatieve assenstelsel is de relatieve snelheid deze van een eenparige cirkelbeweging :

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \omega r(-\sin\theta\vec{e}_{x'} + \cos\theta\vec{e}_{y'}) = \omega r(\sin\theta\vec{e}_x - \cos\theta\vec{e}_y) \quad (1)$$

In het absolute assenstelsel is de absolute snelheid deze :

$$\vec{v}_{\text{abs}} = \vec{v}_M + \omega r(-\sin\theta\vec{e}_{x'} + \cos\theta\vec{e}_{y'}) = \omega r\sin\theta\vec{e}_x + (v_M - \omega r\cos\theta)\vec{e}_y \quad (2)$$

In de uitdrukkingen (1) en (2) is  $r$  de radiale afstand van het beschouwde punt tot het centrum van het wiel. Deze uitdrukkingen zijn geldig voor elk punt van het hele wiel.

1. Als het punt A in zijn laagste stand staat, bevindt het punt C zich in de stand  $\theta = 270^\circ$  in het relatieve assenstelsel. Invulling in de uitdrukkingen (1) en (2) met de straal  $r = 0.3979\text{m}$  geeft :

$$\vec{v}_{C,\text{rel}} = -25\text{m/s}\vec{e}_x \quad (3)$$

$$\vec{v}_{C,\text{abs}} = -25\text{m/s}\vec{e}_x + 25\text{m/s}\vec{e}_y \quad (4)$$

2. Als het punt A in zijn laagste stand staat, betekent dit  $\theta = 0^\circ$  in het relatieve assenstelsel. Invulling in de uitdrukkingen (1) en (2) met de straal  $r = 0.3\text{m}$  geeft :

$$\vec{v}_{A,\text{rel}} = -18.85\text{m/s}\vec{e}_y \quad (5)$$

$$\vec{v}_{A,\text{abs}} = 6.15\text{m/s}\vec{e}_y \quad (6)$$

3. In het punt dat de hoogste absolute snelheid bereikt versterken de relatieve snelheid en de sleepsnelheid elkaar. Daar de sleepsnelheid een constante vector is, is het gezochte punt gelijk aan het punt met de grootste component van de relatieve snelheid volgens de absolute  $y$ -as. Dit punt is op elk tijdstip gelegen op de bovenrand van het wiel bij  $\theta = 180^\circ$  en  $r = 0.3979\text{m}$ . Invulling in de uitdrukking (2) geeft :

$$\vec{v}_{\text{max,abs}} = 50\text{m/s}\vec{e}_y \quad (7)$$

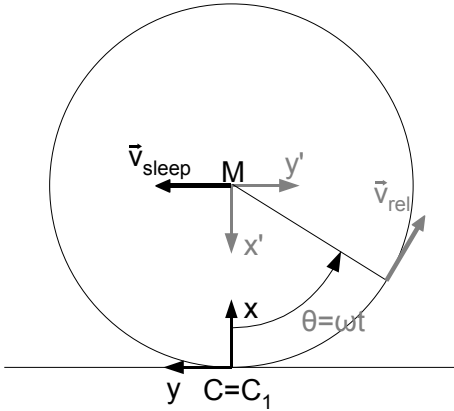
4. Het traject van het punt is gelijk aan de positievector van het punt C als functie van de tijd. De positie volgt uit de integratie naar de tijd van de absolute snelheid van het punt C. De berekening begint met de uitdrukking (2) voor de straal  $r = 0.3979\text{m}$ , waarin de tijd als variabele is ingevoerd via  $\theta = \omega t$  :

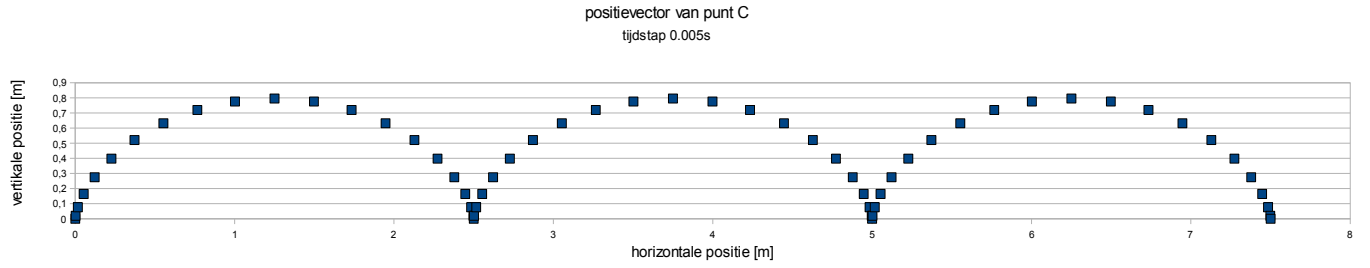
$$\vec{v}_{C,\text{abs}}(t) = \omega r_C \sin\omega t\vec{e}_x + (v_M - \omega r_C \cos\omega t)\vec{e}_y \quad (8)$$

$$\vec{r}_{C,\text{abs}}(t) = \vec{r}_0 - r_C \cos\omega t\vec{e}_x + (v_M t - r_C \sin\omega t)\vec{e}_y \quad (9)$$

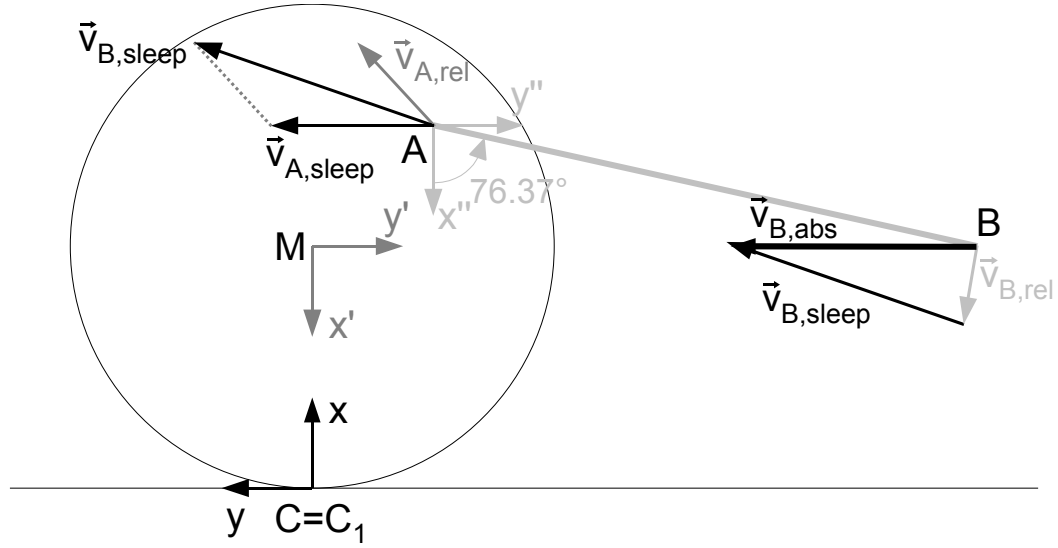
$$= 0.3979\text{m}(1 - \cos 20\pi\text{rad/st})\vec{e}_x + (25\text{m/st} - 0.3979\text{m} \sin 20\pi\text{rad/st})\vec{e}_y \quad (10)$$

Hierbij is  $\vec{r}_0$  in (9) de integratieconstante die eenvoudig te bepalen is uit de voorwaarde  $\vec{r}(0) = \vec{0}$ , waaruit blijkt  $\vec{r}_0 = r_C\vec{e}_x$ . De figuur toont het verloop (10).





5. Voor de bepaling van de snelheid van de stang is er nog een tweede relatieve beweging in rekening te brengen, door een relatief assenstelsel aan te brengen in A, dat transleert met het punt A :



- De sleepsnelheid is de absolute snelheid van het punt met de straal  $r = 0.3\text{m}$  en de stand  $\theta = 135^\circ$ , die bekend is met de uitdrukking (2) :

$$\vec{v}_{B,\text{sleep}} = \vec{v}_{A,\text{abs}} = 13.33\text{m/s}\vec{e}_x + 38.33\text{m/s}\vec{e}_y \quad (11)$$

- De relatieve snelheid in het assenstelsel  $x''y''$  is een rotatiebeweging vanuit de hoek  $76.37^\circ$  ten opzichte van de  $x''$ -as. Deze hoek is bepaald uit de gelijkheid :

$$r_A \sin 45^\circ = L \cos 76.37^\circ$$

en de relatieve snelheid  $\vec{v}_{B,\text{rel}}$  is dus van de vorm :

$$\vec{v}_{B,\text{rel}} = v_{B,\text{rel}}(\sin 76.37^\circ \vec{e}_{x''} - \cos 76.37^\circ \vec{e}_{y''}) = -v_{B,\text{rel}}(\sin 76.37^\circ \vec{e}_x - \cos 76.37^\circ \vec{e}_y) \quad (12)$$

De absolute snelheid van het punt is nu de som van (11) en (12), op een zodanige manier dat de absolute snelheid gericht is volgens de absolute  $y$ -as :

$$\vec{v}_{B,\text{abs}} = (13.33\text{m/s} - v_{B,\text{rel}} \sin 76.37^\circ) \vec{e}_x + (38.33\text{m/s} + v_{B,\text{rel}} \cos 76.37^\circ) \vec{e}_y$$

Uit de voorwaarde dat de absolute snelheid van B gericht is volgens de absolute  $y$ -as volgt de grootte van de relatieve snelheid van B :

$$v_{B,\text{rel}} = 13.72\text{m/s}$$

en daarmee is de absolute snelheid van het punt B gelijk aan :

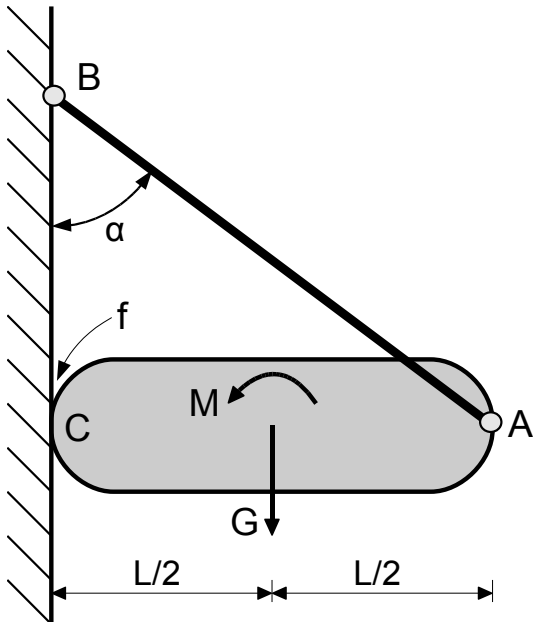
$$\vec{v}_{B,\text{abs}} = 41.56\text{m/s}\vec{e}_y$$

### Vraag 3

Een balk met lengte  $L$  is aan beide zijden scharnierend met een massaloze stang AB opgehangen aan een vaste wand. Het andere uiteinde C steunt tegen de wand, zodat de balk zich in een horizontale stand bevindt. In het contactvlak tussen wand en balk treedt wrijving op met een coëfficiënt  $f$ . De balk heeft een gewicht  $G$ . Rond het zwaartepunt van de balk kan tevens een moment  $M$  werken (de momentvector staat loodrecht op het vlak waarin de balk en de stang zich bevinden).

*gevraagd* : Bepaal de reactiekracht tussen wand en balk in punt C, en het moment dat nodig is om de horizontale evenwichtsstand te verbreken. Volg daarbij onderstaande stappen.

*Je kan dit vraagstuk oplossen door de evenwichtsvergelijkingen op te stellen. Gebruik van het principe van virtuele arbeid is echter directer, en een correcte uitwerking met dit principe verdubbelt je cijfer voor deze vraag.*



1. Bepaal de reactiekracht in C die evenwijdig is aan de wand voor het geval waarbij er geen moment aangrijpt
2. Bepaal de reactiekracht in C die loodrecht staat op de wand voor het geval waarbij er geen moment aangrijpt
3. Bepaal het verband waaraan  $\alpha$  en  $f$  moeten voldoen opdat de oplossing uit puntjes 1 en 2 geldig is.
4. Herneem de berekeningen uit puntjes 1 en 2 voor het geval met het moment  $M$ , en bereken de grootte van het moment dat nodig is om de balk uit zijn horizontale stand te verplaatsen.

oplossing :

Ongeacht de oplossingstechniek die verder gebruikt wordt is de eerste stap het vrijmaken van het systeem. Doordat de stang AB aan beide uiteinden scharnierend is en dat er geen uitwendige krachten aangrijpen tussen de uiteinden, is het meteen duidelijk dat de kracht die door de stang wordt doorgeleid ook gericht is volgens de verbindingssas AB zelf. De reactiekracht in B ligt dus volgens dezelfde oriëntatie. Er zijn 2 reactiekrachten :

$$\vec{R}_B = -R_B \sin \alpha \vec{e}_x + R_B \cos \alpha \vec{e}_y \quad (13)$$

$$\vec{R}_C = R_{\perp} \vec{e}_x + R_{\parallel} \vec{e}_y \quad (14)$$

Alleen het moment  $\vec{M}$  is georiënteerd volgens de z-as.

In de onderstaande oplossingsmethoden verschillen alleen de stappen 1 en 2.

### oplossing met evenwichtsvergelijkingen

1. In afwezigheid van het moment  $\vec{M}$ , schrijf een momentenevenwicht om het punt A :

$$(\vec{r}_C - \vec{r}_A) \times \vec{R}_C + (\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{G} = \vec{0} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -L & 0 & 0 \\ R_{\perp} & R_{\parallel} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -L/2 & 0 & 0 \\ 0 & -G & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \quad (16)$$

$$\left( -LR_{\parallel} + \frac{GL}{2} \right) \vec{e}_z = \vec{0} \quad (17)$$

Hieruit volgt de grootte van de verticale reactiekracht in C :  $R_{\parallel} = G/2$

2. Schrijf een momentenevenwicht om het punt B :

$$(\vec{r}_C - \vec{r}_B) \times \vec{R}_C + (\vec{r}_G - \vec{r}_B) \times \vec{G} = \vec{0} \quad (18)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & -L \cot \alpha & 0 \\ R_{\perp} & R_{\parallel} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ L/2 & -L \cot \alpha & 0 \\ 0 & -G & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \quad (19)$$

$$\left( R_{\perp} L \cot \alpha - \frac{GL}{2} \right) \vec{e}_z = \vec{0} \quad (20)$$

Hieruit volgt de grootte van de horizontale reactiekracht in C :  $R_{\perp} = 0.5G \tan \alpha$

3. De verticale reactie in C is beperkt door de wrijvingsvoorwaarde  $R_{\parallel} \leq f R_{\perp}$ , en invulling van de resultaten geeft :

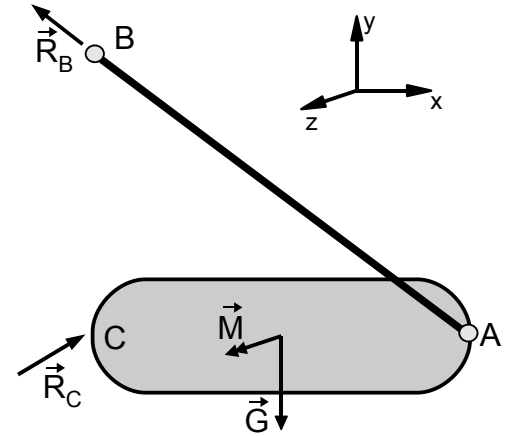
$$\frac{G}{2} \leq f \frac{G}{2} \tan \alpha \Rightarrow f \tan \alpha \geq 1$$

4. Als het moment  $\vec{M}$  nu wel aangrijpt, komt er in de evenwichtsvergelijkingen (15) en (18) telkens een term  $M \vec{e}_z$  bij in het linkerlid, die telkens doorwerkt in (16) en (17) en in (19) en (20). Deze leidt tot aangepaste reactiekrachten :

$$R_{\parallel} = \frac{G}{2} + \frac{M}{L} \quad R_{\perp} = \left( \frac{G}{2} - \frac{M}{L} \right) \tan \alpha$$

De grenstoestand voor het evenwicht treedt op wanneer de wrijvingsvoorwaarde  $R_{\parallel} = f R_{\perp}$  precies voldaan wordt, wat betekent :

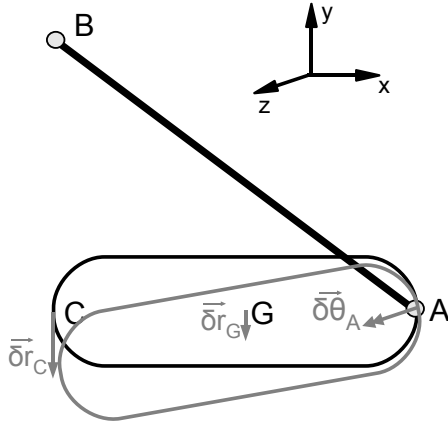
$$\frac{G}{2} + \frac{M}{L} = f \left( \frac{G}{2} - \frac{M}{L} \right) \tan \alpha \Rightarrow M = \frac{1}{2} GL \frac{f \tan \alpha - 1}{f \tan \alpha + 1}$$



## oplossing met het principe van virtuele arbeid

Bij de methode van virtuele arbeid is een oordeelkundige keuze van de virtuele verplaatsing belangrijk.

1. In afwezigheid van het moment  $\vec{M}$ , kies een rotatie  $\delta\vec{\theta}_A = \delta\theta_A \vec{e}_z$  rond het punt A :



$$\begin{aligned}\delta\vec{r}_C &= \delta\vec{\theta}_A \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta_A \\ -L & 0 & 0 \end{vmatrix} = -L\delta\theta_A \vec{e}_y\end{aligned}$$

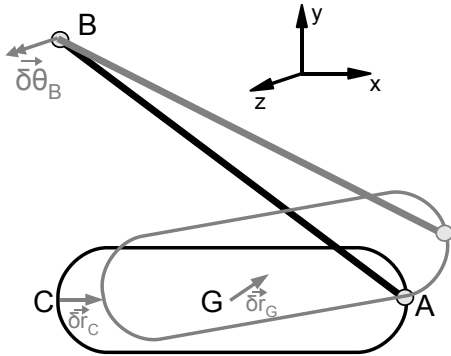
$$\begin{aligned}\delta\vec{r}_G &= \delta\vec{\theta}_A \times (\vec{r}_G - \vec{r}_A) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta_A \\ -L/2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0.5L\delta\theta_A \vec{e}_y\end{aligned}$$

In deze verplaatsing is de totale virtuele arbeid :

$$\delta V = \vec{R}_C \cdot \delta\vec{r}_C + \vec{G} \cdot \delta\vec{r}_G = \left( -R_{\parallel}L + \frac{1}{2}GL \right) \delta\theta_A = 0 \quad (21)$$

waaruit de reactiekracht volgt :  $R_{\parallel} = 0.5G$

2. Kies een rotatie  $\delta\vec{\theta}_B = \delta\theta_B \vec{e}_z$  rond het punt B :



$$\begin{aligned}\delta\vec{r}_C &= \delta\vec{\theta}_B \times (\vec{r}_C - \vec{r}_B) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta_B \\ 0 & -L\cotan \alpha & 0 \end{vmatrix} = L\cotan \alpha \delta\theta_B \vec{e}_x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\vec{r}_G &= \delta\vec{\theta}_B \times (\vec{r}_G - \vec{r}_B) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \delta\theta_B \\ L/2 & -L\cotan \alpha & 0 \end{vmatrix} = L\cotan \alpha \delta\theta_B \vec{e}_x + 0.5L\delta\theta_B \vec{e}_y\end{aligned}$$

In deze verplaatsing is de totale virtuele arbeid :

$$\delta V = \vec{R}_C \cdot \delta\vec{r}_C + \vec{G} \cdot \delta\vec{r}_G = \left( R_{\perp}L\cotan \alpha - \frac{1}{2}GL \right) \delta\theta_B = 0 \quad (22)$$

waaruit de reactiekracht volgt :  $R_{\perp} = 0.5G \tan \alpha$

3. De verticale reactie in C is beperkt door de wrijvingsvoorwaarde  $R_{\parallel} \leq fR_{\perp}$ , en invulling van de resultaten geeft :

$$\frac{G}{2} \leq f \frac{G}{2} \tan \alpha \Rightarrow f \tan \alpha \geq 1$$

4. Als het moment  $\vec{M}$  nu wel aangrijpt, komt er in de vergelijkingen van virtuele arbeid (21) en (22) telkens een term  $\vec{M} \cdot \delta\theta$  bij in het linkerlid. Deze leidt tot aangepaste reactiekrachten :

$$R_{\parallel} = \frac{G}{2} + \frac{M}{L} \quad R_{\perp} = \left( \frac{G}{2} - \frac{M}{L} \right) \tan \alpha$$

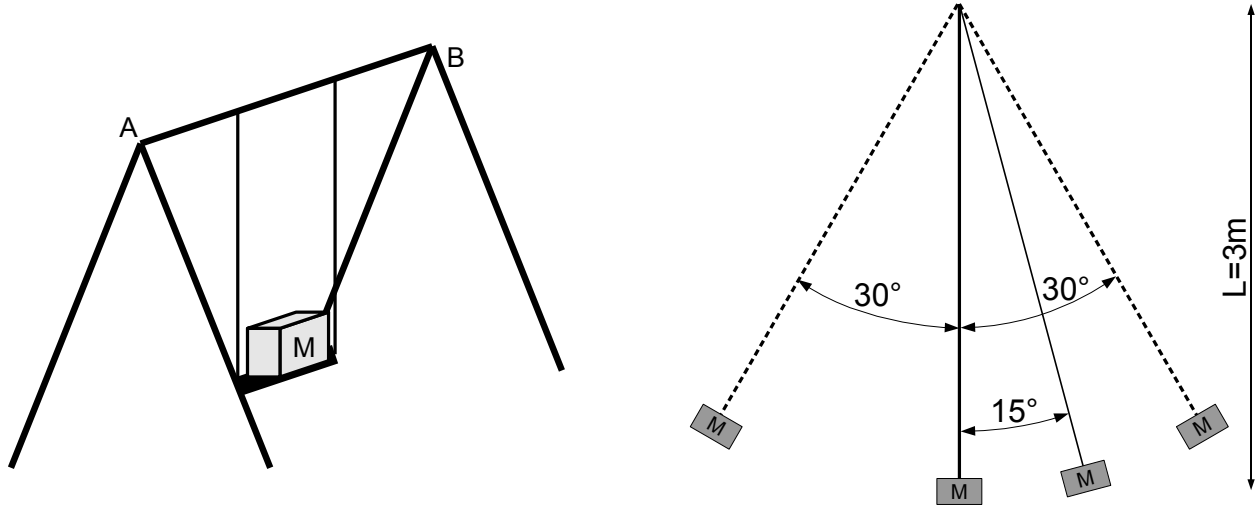
De grenstoestand voor het evenwicht treedt op wanneer de wrijvingsvoorwaarde  $R_{\parallel} = fR_{\perp}$  precies voldaan wordt, wat betekent :

$$\frac{G}{2} + \frac{M}{L} = f \left( \frac{G}{2} - \frac{M}{L} \right) \tan \alpha \Rightarrow M = \frac{1}{2}GL \frac{f \tan \alpha - 1}{f \tan \alpha + 1}$$



#### Vraag 4

Een kind met massa  $M=20\text{kg}$  zit op een schommel. Het zitje is opgehangen aan 2 touwen. De lengte van de touwen waaraan het zitje van de schommel is bevestigd is  $L=3\text{m}$ . De schommel maakt een beweging tot een hoek van  $30^\circ$  met de verticale. De beweging is symmetrisch, waardoor beide touwen gelijktijdig een zelfde beweging maken en ook een even grote kracht doorleiden. Het kind kan als een puntmassa beschouwd worden die zich beweegt op een afstand van  $3\text{m}$  van de ligger AB. De massa van de touwen en het zitje is verwaarloosbaar.



zij aanzicht van de schommelbeweging

gevraagd :

1. Bereken de snelheid van het zitje van de schommel op het ogenblik dat het door de verticale stand  $0^\circ$  gaat.
2. Bereken de kracht in de touwen op het ogenblik dat het zitje van de schommel door de verticale stand  $0^\circ$  gaat.
3. Bereken de natuurlijke componenten van de versnelling die het zitje van de schommel ondergaat op het ogenblik dat het door de stand  $15^\circ$  gaat.
4. Maak een vrijlichaamdiagram van de horizontale ligger AB van de schommel op het ogenblik dat het zitje door de stand  $15^\circ$  gaat, en duid de krachten aan die op de ligger aangrijpen. Je hoeft geen vergelijkingen neer te schrijven.
5. Op het ogenblik dat het zitje van de schommel zich in zijn uiterste stand  $30^\circ$  bevindt, verliest het kind een schoen (massa  $100\text{g}$ ). Verandert de schommelbeweging nadien, en zo ja, hoe? Leg uit. Een cijfermatige uitwerking is hier niet gevraagd.
6. Veronderstel dat het kind wordt voorgesteld als een balkvormig lichaam met massa  $M$ , breedte  $b$ , diepte  $d$  en hoogte  $h$ . Het massacentrum van de balk bevindt zich op dezelfde plaats als de puntmassa. Tijdens de beweging blijft de as van de balk evenwijdig met de touwen. Schrijf de bewegingsvergelijkingen.

oplossing :

1. snelheid in de stand  $0^\circ$

De stelling van behoud van energie is toepasbaar :  $V + T = \text{constant}$

- in de stand  $30^\circ$  is de snelheid nul, en dus ook de kinetische energie  $T = 0$ . De potentiële energie van de zwaartekracht is in die stand, ten opzichte van een referentie  $0^\circ$  :

$$V = MgL(1 - \cos 30^\circ)$$

- in de stand  $0^\circ$  is de potentiële energie van de zwaartekracht ten opzichte van de referentie  $0^\circ$  gelijk aan 0. Daarentegen is de kinetische energie nu gelijk aan :

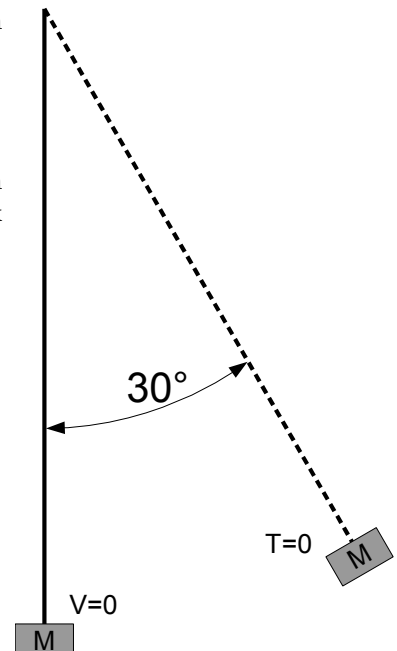
$$T = \frac{1}{2}Mv_0^2$$

De totale energie moet in elke stand van de beweging dus gelijk zijn :

$$\begin{aligned} V + T &= V_{30^\circ} = MgL \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= T_{0^\circ} = \frac{1}{2}Mv_0^2 \end{aligned}$$

Hieruit volgt de snelheid in de vertikale stand :

$$v_0 = \sqrt{2gL \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = 2.835 \text{ m/s}$$



2. kracht in de touwen in de stand  $0^\circ$

Maak het zitje met de massa van het kind vrij. Naast de zwaartekracht werkt op het zitje ook de nog onbekende kracht van de touwen  $\vec{S}$  in. Hiermee luidt het 2<sup>e</sup> postulaat van Newton :

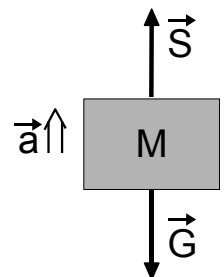
$$\vec{G} + \vec{S} = M\vec{a} \Rightarrow \vec{S} = M\vec{a} - \vec{G} = M(\vec{a} - \vec{g})$$

De ontbinding van de versnelling in de natuurlijke componenten geeft :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

De snelheid bereikt in de stand  $0^\circ$  een maximum, en daardoor is de eerste term gelijk aan 0. Met de reeds gekende snelheid  $v_0$  en de straal  $\rho = L = 3\text{m}$  wordt de versnelling  $a = a_n = 2.679 \text{ m/s}^2$ , en daarmee wordt de spanning in de touwen

$$S = M(a + g) = 253.6 \text{ N}$$



3. versnelling in de stand  $15^\circ$

Bereken eerst de snelheid in de stand  $15^\circ$  door toepassing van het behoud van energie :

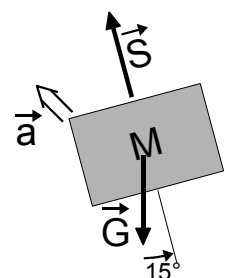
$$v_{15^\circ} = \sqrt{2gL(\cos 15^\circ - \cos 30^\circ)} = 2.448 \text{ m/s}$$

Hieruit volgt de normale component van de versnelling :

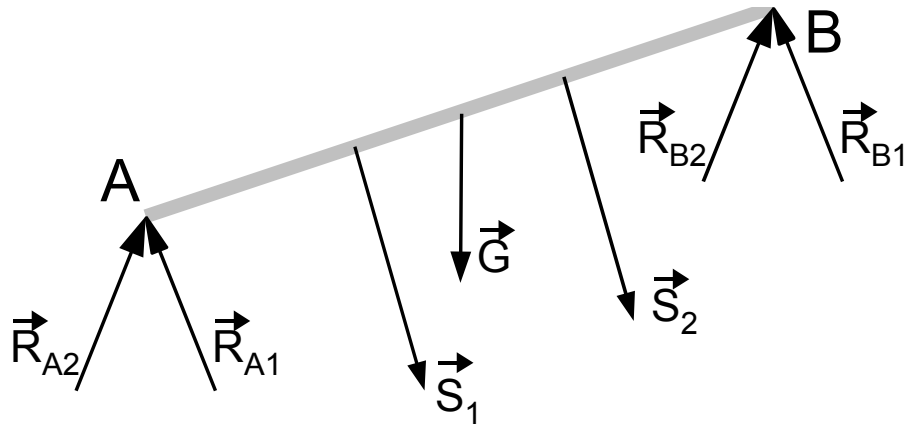
$$a_{n,15^\circ} = \frac{v_{15^\circ}^2}{\rho} = 1.998 \text{ m/s}^2$$

Neem de projectie van het 2<sup>e</sup> postulaat op de tangentiële as :

$$Ma_t = G \sin 15^\circ \Rightarrow a_t = 2.588 \text{ m/s}^2$$



4. De kracht in de touwen is een dynamische kracht die ingrijpt op het statisch geheel van de ligger van de schommel. Voor zover zij niet verwaarloosbaar is, grijpt het gewicht van de ligger in het midden aan. De steunconstructie levert de reactiekrachten naar de bodem.



5. De beweging van het zitje en het kind verandert niet nadat het kind een schoen heeft verloren, doordat de schoen van het kind is gescheiden met beginsnelheid gelijk aan nul. In de vergelijkingen die de beweging van de schommel beschrijft is de grootte van de massa nergens van belang (de massa is wel van belang in de bepaling van de krachten).
6. Het kind heeft nu niet enkel massa maar ook een traagheidsmoment  $I$ , te berekenen rond de horizontale as die loopt doorheen het zwaartepunt van de balk, en die evenwijdig is met het zitje.

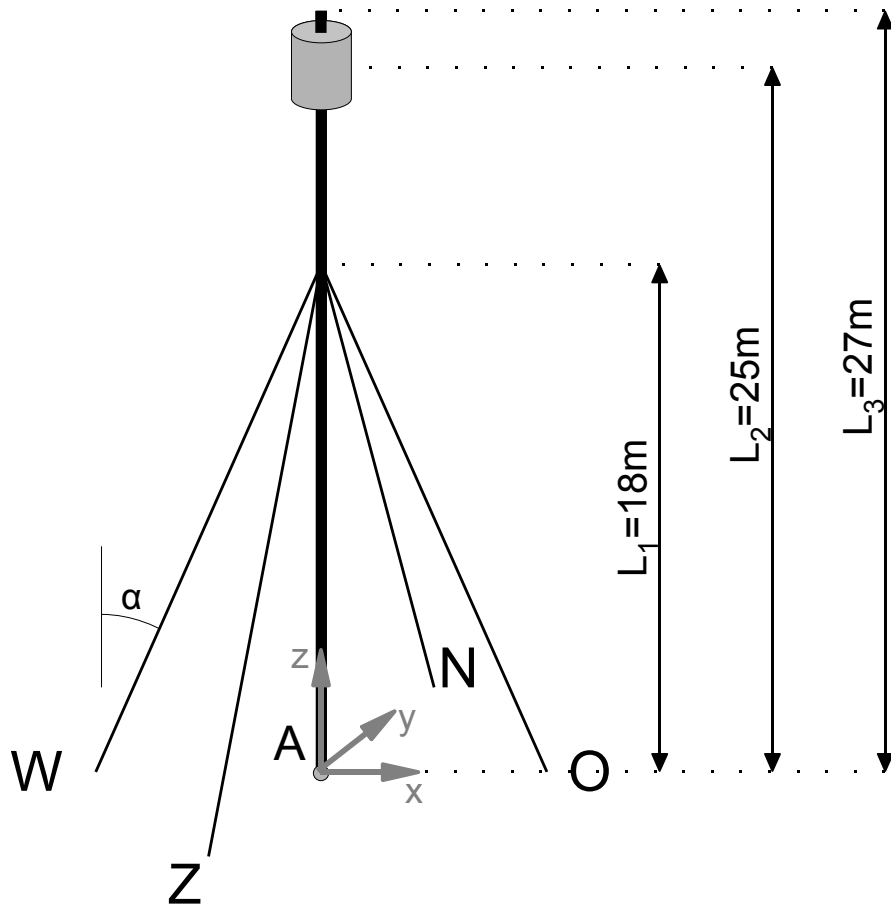
Er zijn nu 2 bewegingsvergelijkingen :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= M\vec{a} \\ \vec{M} &= I\vec{\alpha}\end{aligned}$$

Doordat de balk een rotatiebeweging maakt rond zijn dwarse as, is er dus ook een dynamisch moment rond die as.

## Vraag 5

Een GSM-mast is verankerd in de grond op een fundering (punt A) waarop de mast scharnierend is bevestigd. De mast is zijdelings gesteund met 4 tuikabels, *die alleen trekkrachten kunnen uitoefenen*. Ten opzichte van de fundering van de mast zijn de verankeringspunten van de tuikabels geplaatst in noordelijke, oostelijke, zuidelijke en westelijke richting. De massa van de tuikabels is verwaarloosbaar. De kabels zijn aan de mast bevestigd op een hoogte van 18m, en ze sluiten een hoek  $\alpha$  in met de verticale. De mast is 27m hoog, en zijn massa van 520kg is uniform verdeeld over de hoogte. De mast draagt aan elke van zijn 4 zijden een antenne die elk een massa heeft van 40kg, en die elk aan de mast is bevestigd op een hoogte van 25m. De 4 antennes samen kunnen worden beschreven als een cilinder van 160kg, met zwaartepunt op de mast op een hoogte van 25m. De wind oefent een horizontale kracht van 400N uit op de antennes, doorheen het zwaartepunt van de cilinder. Doordat de mast als een open vakwerk is opgebouwd kan de windbelasting op de mast zelf verwaarloosd worden, en ook de windbelasting op de tuikabels is verwaarloosbaar. Bij windstilte zijn de kabels alle spanningsloos.



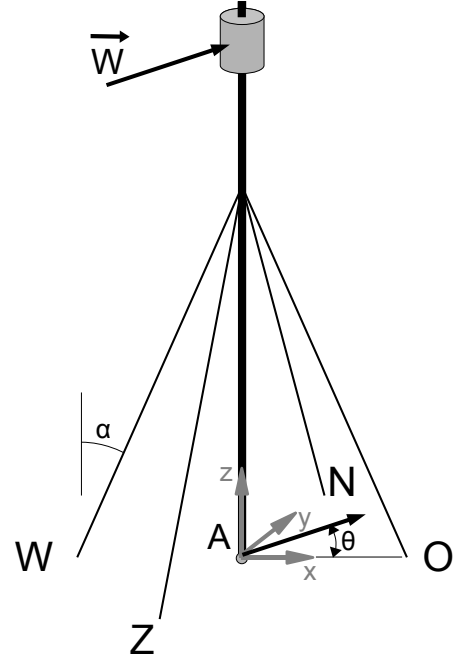
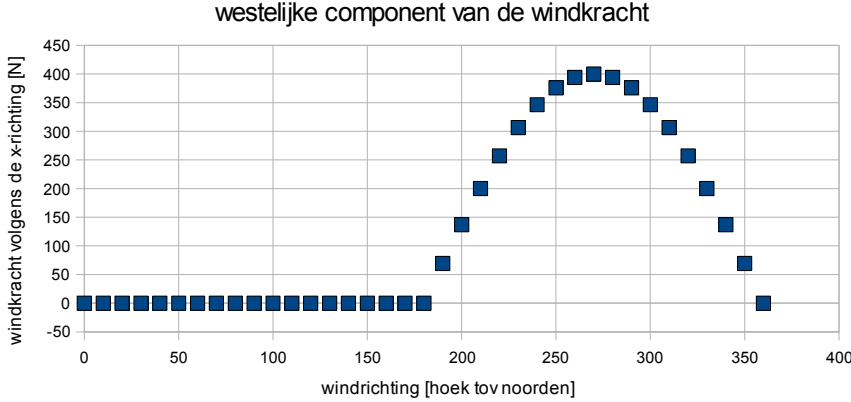
gevraagd :

1. Bereken de kracht in de westelijke tuikabel als functie van de windrichting, en toon dit verloop in een diagram. Plaats op de horizontale as de windrichting ( $N = 0^\circ/360^\circ$ ,  $O = 90^\circ$ ,  $Z = 180^\circ$ ,  $W = 270^\circ$ ), en op de verticale as de grootte van de kracht.
2. Bij welke windrichting(en) is de verticale reactiekracht op de fundering van de mast het grootst ?
3. Bereken de hoek  $\alpha$  zodanig dat de verticale reactiekracht op de fundering van de mast niet groter is dan 7500N.

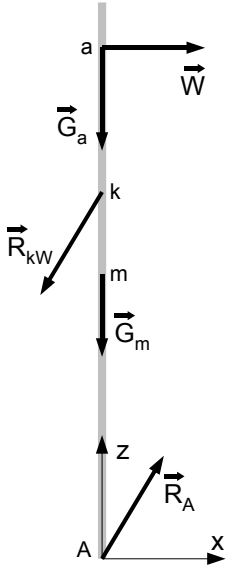
*oplossing* : Een tuikabel vertoont een spanning als de wind uit die richting blaast. Als de wind uit westelijke richting blaast, draagt alleen de westelijke kabel een spanning. Als de wind blaast uit de sector tussen noord en west of tussen zuid en west, dan draagt naast de westelijke kabel ook de noordelijke kabel respectievelijk de zuidelijke kabel een spanning. We noemen  $\theta$  de hoek tussen de windrichting en de richting wijzend uit het westen. Als de wind een component heeft uit het oosten, dan blijft de westelijke kabel spanningsloos. Voor de westelijke kabel is dus de westelijke component van de windkracht  $\vec{W}$  van belang :

$$W_x = \begin{cases} W \cos \theta & \theta \in [-90^\circ, 90^\circ] \\ 0 & \theta \notin [-90^\circ, 90^\circ] \end{cases}$$

Deze kracht heeft een verloop zoals in de figuur.



Maak eerst de mast vrij.



De grijze staaf stelt de mast voor (in een vlakke figuur in het  $xz$ -vlak), daarop grijpen 5 of 6 krachten aan :

- de windkracht  $\vec{W} = W_x \vec{e}_x = 400 \text{ N} \cos \theta \vec{e}_x$ , die aangrijpt in het punt a
- het gewicht van de antennes  $\vec{G}_a = -G_a \vec{e}_z = -1600 \text{ N} \vec{e}_z$ , dat aangrijpt in het punt a
- het gewicht van de mast  $\vec{G}_m = -G_m \vec{e}_z = -5200 \text{ N} \vec{e}_z$ , dat aangrijpt in het zwaartepunt m
- de kracht in de westelijke kabel  $\vec{R}_{kW} = -R_{kW} \sin \alpha \vec{e}_x - R_{kW} \cos \alpha \vec{e}_z$
- (indien de windkracht ook een component heeft volgens de  $y$ -as (volgens N of Z) dan is er ook in de noordelijke, respectievelijk zuidelijke kabel een kracht)
- de reactiekracht van de fundering op de mast  $\vec{R}_A = R_{Ax} \vec{e}_x + R_{Ay} \vec{e}_y + R_{Az} \vec{e}_z$  (indien de wind zuiver uit het westen blaast is  $R_{Ay} = 0$ )

1. De meest directe manier om de kracht in de kabel te berekenen is een uitdrukking van evenwicht, die zo is gekozen dat alleen de onbekende kracht  $\vec{R}_k$  erin voorkomt. Het momentenevenwicht om het punt A is hier de aangewezen vergelijking, omdat  $\vec{R}_A$  dan geen bijdrage levert, evenmin als  $\vec{G}_a$  en  $\vec{G}_m$  :

$$(\vec{r}_k - \vec{r}_A) \times \vec{R}_k + (\vec{r}_W - \vec{r}_A) \times \vec{W} = \vec{0} \quad (23)$$

Uitwerking levert :

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & L_1 \\ -R_{kW} \sin \alpha & 0 & -R_{kW} \cos \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & L_2 \\ W & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-L_1 R_{kW} \sin \alpha + W L_2) \vec{e}_y = \vec{0}$$

Hieruit volgt de grootte van de kabelkracht :

$$R_{kW} = \frac{W L_2}{L_1 \sin \alpha} \quad (24)$$

Indien de wind niet zuiver uit de westelijke richting blaast, dan moet  $W$  in de uitdrukking (24) vervangen worden door  $W_x = W \cos \theta$ . Het verloop van de kabelkracht als functie van de windrichting is dus helemaal gelijkaardig aan dat van  $W_x$ , zoals in de figuur hierboven. De grootte van de kabelkracht hangt verder af van de hoek waaronder de kabel is gespannen. Voor  $\alpha = 45^\circ$  is de kracht maximaal  $R_{kW} = 785.7\text{N}$ , en voor  $\alpha = 30^\circ$  is de kracht maximaal  $R_{kW} = 1111.1\text{N}$

2. Veronderstel eerst dat de wind zuiver uit de westelijke richting blaast  $\theta = 0^\circ$ . Het krachtenevenwicht van de mast vereist dan :

$$\vec{W} + \vec{G}_a + \vec{G}_m + \vec{R}_{kW} + \vec{R}_A = \vec{0} \quad (25)$$

Invulling van de krachtcomponenten geeft dan :

$$(W - R_{kW} \sin \alpha + R_{Ax})\vec{e}_x + (-G_a - G_m - R_{kW} \cos \alpha + R_{Az})\vec{e}_z = \vec{0}$$

De  $z$ -component van deze uitdrukking geeft de gezochte verticale reactiekracht :

$$R_{Az} = G_a + G_m + R_{kW} \cos \alpha = G_a + G_m + \frac{WL_2}{L_1} \cotan \alpha \quad (26)$$

Bekijk nu ook het geval dat de windkracht naast de  $x$ -component ook een  $y$ -component heeft. Als de wind bij voorbeeld uit een richting tussen W en Z blaast, met een hoek  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ), dan voert ook de zuidelijke tuikabel een kracht, en dan komt in de evenwichtsvergelijking (25) een bijkomende kracht  $\vec{R}_{kZ}$  voor,

$$\vec{W} + \vec{G}_a + \vec{G}_m + \vec{R}_{kW} + \vec{R}_{kZ} + \vec{R}_A = \vec{0} \quad (27)$$

waarbij :

$$R_{kW} = \frac{WL_2 \cos \theta}{L_1 \sin \alpha} \quad R_{kZ} = \frac{WL_2 \sin \theta}{L_1 \sin \alpha}$$

De verticale reactie in de fundering (26) wordt dan :

$$R_{Az} = G_a + G_m + (R_{kW} + R_{kZ}) \cos \alpha = G_a + G_m + \frac{WL_2}{L_1} \cotan \alpha (\cos \theta + \sin \theta) \quad (28)$$

Deze verticale reactiekracht is het grootst voor  $\theta = 45^\circ$  :

$$R_{Az} = G_a + G_m + (R_{kW} + R_{kZ}) \cos \alpha = G_a + G_m + \frac{\sqrt{2}WL_2}{L_1} \cotan \alpha \quad (29)$$

3. de voorwaarde opdat de verticale reactiekracht niet groter zij dan  $7500\text{N}$ , volgt uit (29) :

$$R_{Az} = G_a + G_m + \frac{\sqrt{2}WL_2}{L_1} \cotan \alpha \leq 7500\text{N}$$

of

$$\cotan \alpha \leq \frac{7500 - G_a - G_m}{W} \frac{L_1}{\sqrt{2}L_2} = 0.89$$

waaruit  $\alpha \geq 48.3^\circ$