Mechanica, deel 2

Daniël Slenders
Faculteit Ingenieurswetenschappen
Katholieke Universiteit Leuven

Academiejaar 2010 - 2011

Kinematica

De kinematica beschrijft de beweging van een voorwerp.

Samenstelling van ogenblikkelijke rotaties

Beweging bestaande uit combinatie van verschillende rotaties. Voor de rotatiesnelheid geldt:

$$\vec{\omega} = \sum_i \vec{\omega}_i$$

Voor de snelheid van een willekeurig punt P geldt:

$$\vec{v}_P = \sum_i \vec{\omega}_i \times \vec{O_iP}$$

Samengestelde beweging

Een assenstelsel $Ax'y'z'$ beweegt ten opzichte van een wereldassenstelsel $Oxyz$. Hierdoor kan de beweging van een punt beschreven worden door de beweging in het relatief assenstelsel $\vec{v}_{relatief}$ opgeteld met een beweging van dit relatief assenstelsel $\vec{v}_{sleep}$.

Voor de positie geldt:

$$\begin{aligned} \vec{r}_P &= \vec{r}_A + \vec{r}'_P \\ \vec{r}_P &= \vec{r}_A + \vec{r}_{P|A} \end{aligned} \tag{1}$$

Voor de snelheid geldt:

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \vec{v}_{sleep} + \vec{v}_{relatief} \\ \vec{v}_P &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'_P \end{aligned} \tag{2}$$

Voor de versnelling geldt:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_{sleep} + \vec{a}_{relatief} + \vec{a}_{complementair} \\ \vec{a}_P &= \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}'_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_P) + \vec{a}_{relatief} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}'_P) \end{aligned} \tag{3}$$

waarbij $\vec{\omega}$ de rotatiecomponent van de sleepbeweging is.

Traagheidskrachten

Voor de wetten van Newton in een niet-inertieel assenstelsel geldt:

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} = m(\vec{a}_r' + \vec{a}_s + \vec{a}_c) \\ \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_s - \vec{a}_c = m\vec{a}_r' \\ \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_T = m\vec{a}_r'\end{aligned} \tag{4}$$

met $\vec{F}_T$ de traagheidskrachten.

Dynamica

De dynamica beschrijft de oorzaken van de beweging van een voorwerp.

Impuls

De impuls is gegeven door:

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{5}$$

De wet van behoud van impuls:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F'}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i \tag{6}$$

met $\vec{F'}_i$ de uitwendige krachten.

Impulsmoment

Het impulsmoment is gegeven door:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \tag{7}$$

Met behulp van het massacentrum C wordt dit:

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C \\ \vec{L}_O &= \mathbf{I}_C \vec{\omega}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C \end{aligned} \tag{8}$$

De wet van behoud van impulsmoment:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \mathbf{I}_C \vec{\alpha}_C + \frac{d\mathbf{I}_C}{dt} \vec{\omega}_C + \vec{r}_C \times m\vec{a}_C \tag{9}$$

Stappenplan om het moment te bepalen

Dit stappenplan is bruikbaar als de snelheid gelijk is aan nul, dus een beweging beschreven door hoeksnelheden.

Stel $Oxyz$ het wereldassenstelsel en $Ax'y'z'$ het bewegend assenstelsel.

1. transformatie hoeksnelheid naar bewegend assenstelsel:

$$\vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}' \tag{10}$$

2. berekening impulsmoment in bewegend assenstelsel:

$$\vec{L}' = I\vec{\omega}' \tag{11}$$

3. afleiden van impulsmoment in bewegend assenstelsel:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \left(\frac{d\vec{L}'}{dt}\right)_{rel} + \vec{\omega}_A \times \vec{L}' \tag{12}$$

4. moment is gelijk aan verandering impulsmoment

$$\vec{M}' = \frac{d\vec{L}'}{dt} \tag{13}$$

5. moment transformeren naar wereldassenstelsel:

$$\vec{M}' \rightarrow \vec{M} \tag{14}$$

Stelling van Steiner

De stelling van Steiner laat toe het traagheidsmoment te bepalen rond een as die niet door het massacentrum gaat.

$$I_{a'} = I_a + d^2 m \tag{15}$$

met d de loodrechte afstand tussen a' (de as waarrond I te bepalen) en a (de as door het massacentrum).

Virtuele arbeid

Dit is een methode om het evenwicht van een systeem te bepalen.

Voor een inertieel assenstelsel moet gelden:

$$\forall \delta\vec{u}_C, \delta\vec{\theta}_C : \delta V = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \cdot \delta\vec{\theta}_i = 0 \tag{16}$$

Voor een niet-inertieel assenstelsel moet gelden:

$$\forall \delta\vec{u}_C, \delta\vec{\theta}_C : \delta V = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i + \vec{F}_{T,i}\right) \cdot \delta\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \cdot \delta\vec{\theta}_i = 0 \tag{17}$$

Bij één veralgemeende coördinaat: $\delta\vec{u}_C$ in functie van $\delta\vec{\theta}_C$ zetten of omgekeerd. Bij meerdere veralgemeende coördinaten: steeds één van de virtuele veranderingen niet gelijk aan nul stellen, de andere wel, en dan vergelijking per vergelijking uitrekenen.

Stappenplan

1. bepaal voor alle massapunten
   - positie $\vec{r}_i$
   - versnelling $\vec{a}_i$
2. bepaal voor alle aangrijpingspunten
   - positie $\vec{r}_i$
3. afleiden van positievectoren
   - $\delta\vec{r}_i$
4. opstellen vergelijking van virtuele arbeid

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i - m_i \cdot \vec{a}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{M}_i \cdot \delta\vec{\theta}_i - I \cdot \vec{\alpha}_i \cdot \delta\theta_i\right) = 0 \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{F}_{T,i} \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{M}_i \cdot \delta\vec{\theta}_i + \vec{M}_{T,i} \cdot \delta\vec{\theta}_i\right) = 0 \tag{19}$$