

rischio e valore nelle banche riunisce  
principali aree di rischio che condizionano  
una banca ed è semplicemente il meglio scritto  
completo tra i recenti libri sull'argomento.

ALTMAN, Stern School of Business, New York University

Rischio e valore nelle banche

Andrea Resti  
Andrea Sironi

# Rischio e valore nelle banche

Misura, regolamentazione, gestione



SP.7.  
05.02  
0205(2)

254 164334

238-3125-4



831254

[www.egeaonline.it](http://www.egeaonline.it)

e Egea

$$\max_{\gamma} \frac{|z_A - z_B|}{\sigma_z} = \frac{|\gamma' \mathbf{x}_A - \gamma' \mathbf{x}_B|}{\sigma_z} \quad [11A.1]$$

Per evitare di lavorare con il valore assoluto (funzione non derivabile), possiamo lavorare sul quadrato  $q$  dell'espressione nella [11A.1] e riscrivere il nostro problema come:

$$\max_{\gamma} \frac{(\gamma' \mathbf{x}_A - \gamma' \mathbf{x}_B)^2}{\sigma_z^2} = \frac{(\gamma' \mathbf{x}_A - \gamma' \mathbf{x}_B)^2}{\gamma' \Sigma \gamma} = q(\gamma) \quad [11A.2]$$

Prima di procedere, osserviamo che la funzione  $q(\cdot)$  è omogenea di grado zero in  $\gamma$ . In altri termini, si ha che  $q(k\gamma) = q(\gamma)$  per qualsiasi scalare  $k$  reale. Infatti:

$$q(k\gamma) = \frac{(k\gamma' \mathbf{x}_A - k\gamma' \mathbf{x}_B)^2}{k\gamma' \Sigma k\gamma} = \frac{k^2 (\gamma' \mathbf{x}_A - \gamma' \mathbf{x}_B)^2}{k^2 \gamma' \Sigma \gamma} = q(\gamma)$$

Questa considerazione ci tornerà utile tra poco.

Ora, per identificare  $\gamma$  che massimizza  $q$ , calcoliamo il gradiente di  $q$  e imponiamo che sia uguale a zero:

$$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = \frac{2 (\gamma' \mathbf{x}_A - \gamma' \mathbf{x}_B) (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \gamma' \Sigma \gamma - 2 \Sigma \gamma (\gamma' \mathbf{x}_A - \gamma' \mathbf{x}_B)^2}{(\gamma' \Sigma \gamma)^2} = 0 \quad [11A.3]$$

cioè che il suo numeratore – semplificato per la costante scalare  $2 (\gamma' \mathbf{x}_B - \gamma' \mathbf{x}_A)$  – sia nullo:

$$(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \gamma' \Sigma \gamma - \Sigma \gamma (\gamma' \mathbf{x}_B - \gamma' \mathbf{x}_A) = 0 \quad [11A.4]$$

$$\gamma = \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \frac{\gamma' \Sigma \gamma}{(\gamma' \mathbf{x}_A - \gamma' \mathbf{x}_B)} \quad [11A.5]$$

Consideriamo ora la quantità  $\frac{\gamma' \Sigma \gamma}{(\gamma' \mathbf{x}_A - \gamma' \mathbf{x}_B)}$  nella [11A.5]: si tratta di uno scalare.

Poiché  $q(\gamma)$  è omogenea di grado zero, lo scalare può essere eliminato senza alterare il valore di  $q(\cdot)$ . La [11A.5] diventa allora semplicemente:

$$\gamma = \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

cioè l'equazione [11.3] vista nel testo del capitolo.

## 12 I modelli fondati sul mercato dei capitali

### 12.1 Introduzione

Negli ultimi decenni, lo sviluppo dei mercati internazionali dei capitali (azionari e obbligazionari) si è accompagnato a quello dei modelli matematici per la determinazione del prezzo delle attività finanziarie (asset pricing). Ciò ha fatto sì che in molti campi della finanza i prezzi dei valori mobiliari, in quanto espressione sintetica di tutte le informazioni disponibili e allo stesso tempo delle aspettative degli operatori, venissero utilizzati come input per la stima di altre variabili di mercato: si pensi all'utilizzo dei tassi spot per ricavare i tassi forward, o all'uso dei prezzi delle opzioni per ricavare la volatilità del sottostante.

In questo ambito si collocano le metodologie analizzate in questo capitolo (capital market approach) che, partendo dai prezzi di azioni e obbligazioni, ricavano la probabilità di insolvenza dell'emittente.

Il § 12.2 presenta alcuni esempi di modelli che utilizzano i prezzi obbligazionari. Il § 12.3 analizza i modelli, originariamente sviluppati dal premio Nobel Robert Merton nei primi anni Settanta, che usano come informazione di partenza i prezzi azionari e adottano un approccio basato sulla teoria delle opzioni (contingent claim approach).

### 12.2 L'approccio basato sugli spread dei corporate bond

Il punto di partenza dell'approccio fondato sui prezzi obbligazionari è relativamente semplice e intuitivo: la maggiorazione di rendimento (spread) richiesta dal mercato ai titoli obbligazionari rischiosi (rispetto al rendimento di titoli di uguale scadenza, ma privi di rischio di insolvenza) riflette le aspettative del mercato circa la probabilità di insolvenza degli emittenti. Gli spread sintetizzano dunque tutte le informazioni disponibili sui fattori (specifici o sistematici) che influiscono sulla PD.

I dati di input di questi modelli sono i seguenti:

- la curva, per scadenza, dei differenziali (spread) tra i rendimenti zero-coupon dei corporate bond di una certa impresa e i rendimenti zero-coupon dei titoli risk-free (in pratica, dei titoli di Stato);

■ una stima del tasso di recupero atteso, sui corporate bond, in caso di insolvenza.

Sulla base di questi dati è possibile ricavare i dati relativi ai tassi di insolvenza attesi per ogni periodo futuro<sup>1</sup>.

### 12.2.1 Premessa: tassi composti continui

In questo capitolo esprimeremo i tassi di interesse ( $i$ ) come tassi composti continui. In pratica, il montante  $M$  di un debito a fine anno sarà dato dal capitale iniziale  $C$  moltiplicato per un fattore di montante di tipo esponenziale:

$$M = Ce^i \quad [12.1]$$

e non dal consueto fattore di montante semplice o composto:

$$M = C(1 + i) \quad [12.2]$$

Si noti che, se indichiamo con  $S_0$  il valore corrente del debito ( $C$ ) e con  $S_T$  il suo valore finale ( $M$ ), dalla [12.1] segue che:

$$i = \ln \frac{S_T}{S_0}$$

Il concetto di tasso composto continuo è dunque equivalente al concetto di rendimento logaritmico che abbiamo estensivamente utilizzato, trattando di rischi di mercato, nel Capitolo 6 e nella Parte II di questo volume.

I motivi della scelta di utilizzare tassi composti continui diverranno più chiari tra breve<sup>2</sup>. Per ora, osserviamo che è sempre possibile passare da un tasso semplice o composto periodale  $i_s$  al corrispondente tasso composto continuo  $i_c$ , semplicemente imponendo che entrambi conducano, a parità di capitale, allo stesso montante:

$$Ce^{i_c} = V = C(1 + i_s)$$

da cui:

$$i_s = e^{i_c} - 1 \quad [12.3]$$

$$i_c = \ln(1 + i_s) \quad [12.4]$$

<sup>1</sup> In particolare, se si desidera stimare PD per orizzonti temporali superiori all'anno, è possibile procedere in due modi, che verranno analizzati in sequenza nel seguito di questo paragrafo. È infatti possibile utilizzare, alternativamente, gli spread su obbligazioni a medio-lungo termine, oppure gli spread impliciti nella curva dei tassi forward.

<sup>2</sup> Cfr. nota 4.

Per esempio, utilizzando la [12.3] si ricava che un tasso composto continuo del 4 per cento su base annua equivale a un tasso annuo semplice, o composto annuo, del 3,92 per cento circa. La possibilità di passare da un regime all'altro è particolarmente preziosa, considerato che i mercati quotano di norma tassi composti annui o semestrali.

### 12.2.2 La stima della probabilità di insolvenza a un anno

Supponiamo che la PD di un'impresa che ha emesso un titolo obbligazionario sia pari a  $p$ . Supponiamo inoltre che in caso di insolvenza dell'emittente gli investitori perdano l'intero capitale ( $LGD = 100\%$ ), ossia non riescano a recuperare nulla. Si affina  $i$  il tasso di rendimento privo di rischio a un anno, approssimato dal tasso di rendimento dei titoli di Stato a un anno, e  $i^* = i + d$  il tasso di rendimento a un anno del titolo obbligazionario, dove  $d$  indica lo spread, o differenziale di rendimento, fra titolo rischioso e titolo risk-free.

Un investitore neutrale al rischio<sup>3</sup> dovrebbe essere indifferente fra i due investimenti alternativi (titolo obbligazionario rischioso e titolo di Stato privo di rischio) quando il montante di un euro investito nel titolo risk-free è pari al montante di un euro investito nel corporate bond, ponderato per la probabilità che questo venga regolarmente restituito:

$$e^i = (1 - p) e^{i+d} \quad [12.5]$$

da cui:

$$p = 1 - e^{-d} \quad [12.6]$$

Dalla [12.6] emerge che  $p$  è una funzione crescente di  $d$ . In pratica, quanto maggiore è lo spread  $d$  richiesto dal mercato, tanto maggiore è la probabilità di default. Si noti, inoltre, che la PD implicita nei tassi obbligazionari non dipende dal livello degli stessi (cioè da  $i$  e  $i^*$ ), ma soltanto dal differenziale (spread) tra tassi rischiosi e tassi privi di rischio<sup>4</sup>.

Supponiamo che  $i^*$  sia pari al 5 per cento e  $i$  al 4 per cento. Lo spread  $d$  sarebbe pari all'1 per cento e si avrebbe:

<sup>3</sup> Sugli effetti dell'ipotesi di neutralità al rischio si ritornerà più avanti nel capitolo. Essa richiede che un investitore sia indifferente tra un investimento certo e uno rischioso, purché il valore finale atteso del secondo sia pari al valore finale certo del primo. Per esempio, che sia indifferente fra un montante di un milione di euro ottenuto con certezza e una lotteria che produce cento milioni di euro con probabilità dell'1 per cento e zero con probabilità del 99 per cento.

<sup>4</sup> Questa semplificazione è resa possibile dall'utilizzo dei tassi composti continui. Se si prova a riscrivere la [12.5] e la [12.6] utilizzando i tradizionali tassi semplici o composti, ci si accorgerebbe che non è possibile scrivere  $p$  come una funzione del solo spread, ma è necessario specificare anche il livello assoluto dei tassi.



$$p = 1 - e^{-0,01} = 0,995\%$$

È questo, dunque, il valore di PD che conduce gli investitori a richiedere un premio al rischio, rispetto al tasso risk-free, di un punto percentuale (5%-4%).

Si supponga a questo punto, più realisticamente, che i creditori, partecipando alla liquidazione delle attività dell'impresa in caso di insolvenza dell'emittente, riescano a recuperare una quota  $R$  del capitale prestato, più i relativi interessi al tasso  $i^*$ .

In questo caso un investitore neutrale al rischio sarebbe indifferente fra i due investimenti (titolo privo di rischio e obbligazione rischiosa) se:

$$e^i = [(1 - p) + pR]e^{i+d} = [1 - p(1 - R)]e^{i+d} \quad [12.7]$$

da cui:

$$p = \frac{1 - e^{-d}}{1 - R} = \frac{1 - e^{-d}}{LGD} \quad [12.8]$$

Si noti che  $1 - R$  rappresenta la LGD attesa sull'obbligazione, cioè il tasso di perdita in caso di insolvenza espresso come percentuale del capitale prestato.

Se lo spread  $d$  è ancora pari all'1 per cento e il tasso di recupero  $R$  è il 50 per cento, dalla [12.8] si ottiene:

$$p = \frac{1 - e^{-0,01}}{1 - 0,5} = 1,99\%$$

La probabilità di insolvenza è il doppio di quella ottenuta in precedenza ipotizzando un tasso di recupero nullo: si tratta di un risultato logico. Infatti, se gli investitori continuano a chiedere un identico premio per il rischio ( $d = 1\%$ ) nonostante un'aspettativa di recupero in caso di insolvenza del 50 per cento, ciò significa che la PD da essi stimata è sensibilmente maggiore che nell'esempio precedente.

### 12.2.3 Probabilità di insolvenza su orizzonti superiori all'anno

Fino a ora l'analisi si è limitata al caso più semplice dei tassi di rendimento a un anno. Sulla base dello spread si è ricavata la probabilità di insolvenza implicita dell'impresa emittente. Si tratta a questo punto di estendere l'analisi al caso più complesso e realistico di scadenze pluriennali: come si vedrà, utilizzando i differenziali di rendimento relativi a scadenze diverse, è possibile ricavare stime delle PD relative a diversi orizzonti temporali.

Consideriamo dunque la curva dei tassi zero-coupon, associati a diverse scadenze, dei corporate bond di un certo emittente e dei titoli privi di rischio, nonché i relativi spread (cfr. le prime quattro colonne della Tab. 12.1 e la Fig. 12.1). Si noti come, in questo esempio, gli spread aumentino al crescere della scadenza.

Indichiamo ora con  $p_T$  la probabilità di default cumulata relativa a un periodo di  $T$  anni, ovvero la probabilità che l'emittente fallisca tra oggi e la fine del  $T$ -esimo anno.

**Tabella 12.1 Curve dei tassi zero-coupon composti continui**

Scadenza (T anni)	Rendimento su titoli privi di rischio ( $i_p$ )	Rendimento su obbligazioni societarie rischiose ( $i_r$ )	Spread ( $d_p$ )	$p_T$	$p'_T$ condizionata all'assenza di default nei periodi precedenti
1	4,00%	5,00%	1,00%	2,49%	2,49%
2	4,10%	5,20%	1,10%	5,44%	3,03%
3	4,20%	5,50%	1,30%	9,56%	4,36%
4	4,30%	5,80%	1,50%	14,56%	5,52%
5	4,50%	6,20%	1,70%	20,37%	6,80%



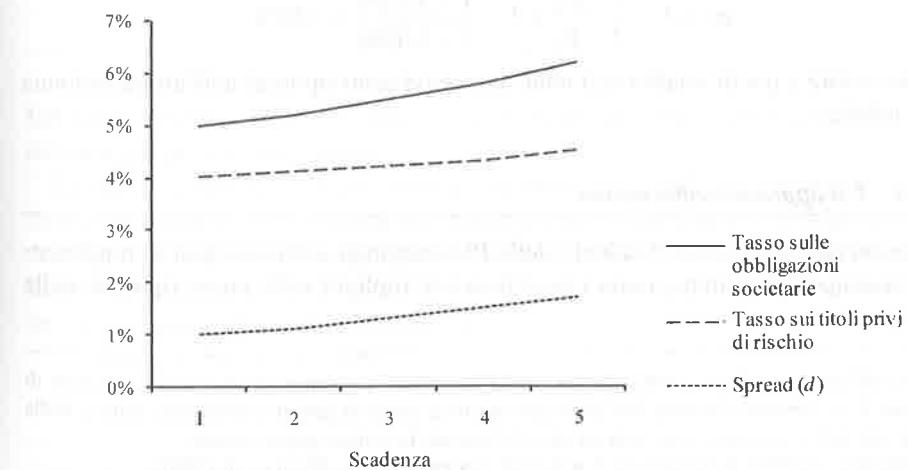
Se chi acquista corporate bond a  $T$  anni è neutrale al rischio, richiederà che il montante atteso di un euro investito nel corporate bond (rimborso del capitale ponderato per la probabilità che questo venga regolarmente restituito, più valore di recupero  $R$  ponderato per la probabilità di default) sia uguale al montante di un euro investito nel titolo risk-free. In pratica, generalizzando la [12.7], richiederà che:

$$e^{i_r T} = [1 - p_T + p_T R]e^{(i_r + d_p)T} = [1 - p_T(1 - R)]e^{(i_r + d_p)T} \quad [12.9]$$

da cui:

$$p_T = \frac{1 - e^{-d_p T}}{1 - R} = \frac{1 - e^{-d_p T}}{LGD} \quad [12.10]$$

**Figura 12.1 Tassi zero-coupon su titoli privi di rischio e obbligazioni societarie rischiose**



Applicando la [12.10] è possibile ricavare le probabilità di default cumulate associate alle diverse scadenze<sup>5</sup>. Un esempio è riportato nella quinta colonna della Tab. 12.1, dove si è utilizzato un valore di  $R$  pari al 60 per cento. Come si vede, al crescere dell'orizzonte temporale utilizzato, le PD cumulate vanno crescendo, in quanto ognuna incorpora il rischio relativo ai periodi precedenti, più il rischio di un default nel  $T$ -esimo anno.

Indichiamo ora con  $s_T = 1 - p_T$  la probabilità che il debitore sopravviva (cioè non fallisca) tra oggi e la fine del  $T$ -esimo anno; indichiamo inoltre con  $s'_T$  la probabilità di sopravvivenza marginale durante il  $T$ -esimo anno, cioè la probabilità (condizionata alla sopravvivenza del debitore fino alla fine dell'anno  $T - 1$ ) che il debitore non fallisca nel corso dell'anno  $T$ . Per qualsiasi  $T$  avremo:

$$s_T = s_{T-1} \cdot s'_T \quad [12.11]$$

Ovvero: la probabilità di sopravvivenza tra 0 e  $T$  è data dal prodotto tra la probabilità di sopravvivenza tra 0 e  $T - 1$  e la probabilità (marginale) di sopravvivenza il  $T$ -esimo anno. Ne segue che la probabilità di sopravvivenza marginale può essere espressa come:

$$s'_T = \frac{s_T}{s_{T-1}} \quad [12.12]$$

La probabilità di default marginale durante l'anno  $T$  ( $p'_T$ ) sarà data dal complemento a uno della relativa probabilità di sopravvivenza marginale:

$$p'_T = 1 - s'_T = 1 - \frac{s_T}{s_{T-1}} = 1 - \frac{1 - p_T}{1 - p_{T-1}} \quad [12.13]$$

Applicando la [12.13] è possibile utilizzare le probabilità di default cumulate per stimare le probabilità di default marginali associate agli spread della Tab. 12.1. Per esempio, la probabilità di default marginale nel secondo anno (sempre nell'ipotesi che  $R$  sia pari al 60 per cento) risulterà pari a:

$$p'_2 = 1 - \frac{1 - p_2}{1 - p_1} = 1 - \frac{1 - 5,44\%}{1 - 2,49\%} \approx 3,03\%$$

Questo valore e quelli relativi agli anni successivi sono riportati nell'ultima colonna della tabella.

#### 12.2.4 Un approccio alternativo

Un approccio alternativo<sup>6</sup> al calcolo delle PD marginali utilizza i tassi di rendimento zero-coupon<sup>7</sup> a termine, ossia i tassi forward impliciti nelle curve riportate nella

<sup>5</sup> Come affermato da Hull (2006), questa formula conduce a risultati precisi solo se il tasso di recupero  $R$  si riferisce al valore dell'obbligazione in assenza di default (no-default value). Nella pratica, ciò può non essere vero, e in tal caso la formula ha valore approssimato.

<sup>6</sup> La relazione tra PD e tassi forward è utilizzata, per esempio, da Elton *et al.* (2001).

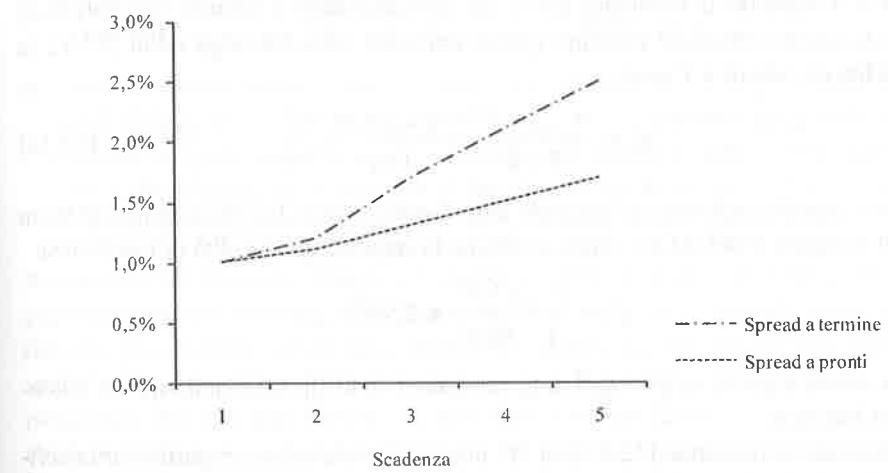
<sup>7</sup> Cfr. l'Appendice 3A al Capitolo 3.



Tabella 12.2 Tassi forward a un anno

Data di decorrenza ( $T-1$ )	Data di scadenza ( $T$ )	Tasso forward su titoli privi di rischio ( $i_{T-1}$ )	Tasso forward su obbligazioni societarie ( $i_{T-1}^s$ )	Spread forward ( $i_{T-1}^s - i_{T-1}$ )	$p'_T$ condizionata all'assenza di default precedenti	$p_T$
0	1	4,00%	5,00%	1,00%	2,49%	2,49%
1	2	4,20%	5,40%	1,20%	2,98%	5,40%
2	3	4,40%	6,10%	1,70%	4,21%	9,38%
3	4	4,60%	6,70%	2,10%	5,20%	14,09%
4	5	5,30%	7,80%	2,50%	6,17%	19,39%

Figura 12.2 Spread tra tassi a pronti e a termine



Tab. 12.2<sup>8</sup>. Tali tassi rappresentano, seguendo la teoria delle aspettative<sup>9</sup>, i tassi attesi dal mercato per i periodi futuri.

La Tab. 12.2 riporta i tassi forward per operazioni annuali con decorrenza, rispettivamente, tra 0, 1, 2, 3 e 4 anni (nel primo caso, evidentemente, si tratta ancora di tassi spot). Si tratta, come già in precedenza, di tassi composti continuamente. Ricordiamo che, dati i tassi spot a  $T$  e  $T - 1$  anni, il tasso forward per un'operazione a un anno con decorrenza al tempo  $T - 1$  è dato da:

$$i_{T-1}^s = i_T T - i_{T-1} (T - 1) \quad [12.14]$$

<sup>8</sup> Cfr. l'Appendice 1B al Capitolo 1.

<sup>9</sup> Cfr. l'Appendice 1A al Capitolo 1.

È interessante osservare come gli spread fra i tassi spot relativi alle due categorie di titoli si riflettano in spread più elevati fra i tassi a termine. Questo fenomeno è dovuto al fatto che la curva degli spread a pronti è a sua volta una curva inclinata positivamente, e dunque presuppone aspettative di spread crescenti relativamente ai periodi futuri. Ne segue che la curva degli spread a termine è posizionata al di sopra della curva degli spread a pronti (Fig. 12.2).

Disponendo degli spread relativi agli anni seguenti, è possibile stimare le probabilità di insolvenza relative agli anni successivi al primo usando il medesimo criterio con cui si è ricavata la probabilità di insolvenza a un anno.

In particolare, ricordando che  $p'_T$  rappresenta la probabilità di un default nel corso del  $T$ -esimo anno, condizionato alla sopravvivenza del debitore fino alla fine dell'anno  $T - 1$ , potremo riscrivere la [12.7] come:

$$e^{T-i_1} = [(1 - p'_{T-1}) + p'_{T-1}R]e^{T-i_1+i_{T-1}d_1} = [1 - p'_{T-1}(1 - R)]e^{T-i_1+i_{T-1}d_1} \quad [12.15]$$

dove il primo membro rappresenta il montante di un'operazione a termine priva di rischio e il secondo il montante atteso da un'operazione a termine sul corporate bond. Da questa relazione potremo quindi derivare, sulla falsariga della [12.8], la probabilità di default a  $T$  anni:

$$p'_T = \frac{1 - e^{-T-i_1}}{1 - R} = \frac{1 - e^{-T-i_1}}{LGD} \quad [12.16]$$

Così, per esempio, nel caso del secondo anno, applicando la [12.16] e ipotizzando un tasso di recupero  $R$  del 60 per cento, si ottiene la seguente probabilità di insolvenza:

$$p'_2 = \frac{1 - e^{-1,20\%}}{1 - 60\%} \cong 2,98\%$$

Questo valore e quelli relativi agli anni successivi sono riportati nella quinta colonna della Tab. 12.2.

Utilizzando la relazione [12.13] tra PD marginali e cumulate, in particolare riscrivendola come:

$$p_T = 1 - (1 - p'_T)(1 - p_{T-1}) \quad [12.17]$$

Possiamo trovare le PD cumulate associate a queste PD marginali. Per esempio, la PD cumulata a due anni sarà data da:

$$p_2 = 1 - (1 - p'_2)(1 - p_1) = 1 - (1 - 2,98\%)(1 - 2,49\%) \cong 5,40\%$$

In alternativa, poiché la probabilità di sopravvivenza cumulata può essere vista come la produttoria di tutte le probabilità di sopravvivenza marginali per gli anni da 1 a  $T$ :

$$s_T = \prod_{t=1}^T s'_t = \prod_{t=1}^T (1 - p'_t) \quad [12.18]$$

potremmo calcolare le PD cumulate direttamente come:

$$p_T = 1 - s_T = \prod_{t=1}^T (1 - p'_t) \quad [12.19]$$

Cioè come una funzione delle sole PD marginali. Per esempio  $p_3$ , la probabilità di un default tra oggi e la fine del terzo anno, può essere calcolata come:

$$p_3 = \prod_{t=1}^3 (1 - p'_t) = (1 - p'_1)(1 - p'_2)(1 - p'_3) = (1 - 2,49\%)(1 - 2,98\%)(1 - 4,21\%) \cong 9,38\%$$

Il risultato dell'applicazione della [12.19] a tutti i dati del nostro esempio è indicato nell'ultima colonna della Tab. 12.2. È interessante notare come questa metodologia alternativa, basata sui tassi forward, fornisca risultati complessivamente simili alla prima (cfr. Tab. 12.1).

### 12.2.5 Pregi e limiti del metodo basato sugli spread obbligazionari

Il metodo descritto in questo paragrafo presenta due principali vantaggi:

- utilizza dati di mercato, per loro natura oggettivi, e dunque esogeni rispetto alle valutazioni soggettive della singola istituzione finanziaria;
- è un modello «forward looking», capace cioè di stimare i tassi di insolvenza attesi dal mercato per il futuro, e non quelli verificatisi in passato; quest'ultima caratteristica lo rende superiore, per esempio, agli approcci seguiti dalle agenzie di rating, che rilevano la percentuale di bond terminati insolventi nelle diverse classi di rating e la usano come stima delle PD future delle singole classi.

A fronte di tali vantaggi, l'approccio fondato sulla struttura a termine degli spread presenta numerosi svantaggi. Anzitutto, l'ipotesi che tutto lo spread rispetto al tasso risk-free possa essere attribuito al rischio di credito, mentre sovente una parte dello spread sui corporate bond riflette semplicemente la loro minore liquidità. Si pensi in particolare alla seconda variante da noi esaminata, quella basata sui tassi forward: abbiamo utilizzato i tassi forward come se essi rappresentassero una stima non distorta dei futuri tassi spot, ipotizzando che fosse valida la teoria delle aspettative. Tuttavia, tale teoria appare difficilmente sostenibile, specie per le scadenze più lontane per le quali risulta evidente la presenza di premi di liquidità crescenti, non direttamente connessi al rischio di insolvenza.

Una seconda ipotesi sottesa a questi modelli è quella di neutralità al rischio. Nell'equazione [12.7] abbiamo infatti supposto che per l'acquirente di un bond sia indifferente ricevere il montante (certo) su un titolo di Stato, oppure il montante (rischioso) su un corporate bond, a patto che il loro valore atteso sia il medesimo. Nella realtà, invece, per scambiare un investimento certo con uno rischioso gli investitori richiedono un premio, cioè richiedono che il montante atteso dal titolo rischioso sia pari a quello del titolo risk-free più un premio  $P$ . La [12.7] diventa dunque:

$$e^i + P = [(1 - p^*) (1 - R)]e^{i+d} \quad [12.20]$$

Dal confronto delle due espressioni è evidente che il valore di  $p$  che risolve la [12.7] è più elevato del valore,  $p^*$ , che risolve la [12.20]. Poiché la [12.20] riflette la reale mentalità degli investitori<sup>10</sup>, che sono avversi al rischio, dobbiamo concluderne che la [12.7] e le equazioni successive generano PD *distorte verso l'alto*. Tali PD, basate sull'ipotesi di neutralità al rischio, vengono denominate *PD risk neutral* e possono essere utilizzate in numerosi modelli di asset pricing (per esempio, per la stima del valore equo di un credit default swap); tuttavia, esse non sono direttamente confrontabili con le PD reali (e con i tassi annuali di default sui bond, che di tali PD rappresentano la controparte empirica).

A fianco di questi limiti di natura teorica, l'approccio descritto soffre inoltre di evidenti limiti di tipo operativo: in primo luogo, esso risulta chiaramente inapplicabile per imprese che non emettono titoli obbligazionari quotati; in secondo luogo, anche per le imprese con debito quotato esso si scontra spesso con la carenza di dati relativi ai tassi di rendimento zero-coupon associati alle diverse scadenze. I tassi zero-coupon possono essere ricavati indirettamente a partire da titoli con cedola, attraverso procedure di bootstrapping come quella descritta nell'Appendice 3A al Capitolo 3; occorre tuttavia che l'impresa considerata abbia emesso titoli di diversa scadenza per poter ricavare l'intera curva degli spread.

A conclusione di questo paragrafo, osserviamo che la relazione tra spread e PD può essere utilizzata anche in modo diverso. È infatti possibile che una banca possa avere una stima della PD del cliente e desideri servirsene per determinare il tasso «equo» sul prestito. Relazioni come la [12.7] possono dunque essere utilizzate per fissare lo spread  $d$  in funzione della PD (neutrale al rischio) del cliente. Il tema è approfondito nell'Appendice 12A e verrà ripreso nel Capitolo 16.

## 12.3 I modelli strutturali basati sulle quotazioni azionarie

### 12.3.1 Introduzione ai modelli strutturali

Un secondo approccio basato su informazioni tratte dal mercato dei capitali trae origine dal modello di pricing delle opzioni originariamente sviluppato da Black e Scholes (1973). Questo approccio, basato sulla contingent claim analysis, è stato per la prima volta applicato al rischio di insolvenza da Robert Merton nel 1974<sup>11</sup>.

I parametri del modello di Merton possono essere stimati a partire dalle quotazioni azionarie; oltre che per stimare la PD, esso può essere utilizzato anche per determinare lo spread di equilibrio dei titoli obbligazionari. Il modello è stato oggetto di numerose elaborazioni successive volte a rimuovere alcune ipotesi poco realistiche e a rendere più agevole la sua concreta applicazione.

<sup>10</sup> L'ipotesi di neutralità al rischio, assumendo che gli investitori richiedano di essere compensati solo per la perdita attesa e non anche per la possibile volatilità delle perdite, nega implicitamente la rilevanza stessa delle perdite inattese, cioè del rischio di credito propriamente detto (cfr. l'introduzione a questa parte del volume).

<sup>11</sup> Cfr. Merton (1974).

Il modello si basa su un'intuizione molto semplice: l'insolvenza di un'impresa avviene nel momento in cui il valore delle attività risulta inferiore al valore delle passività verso terzi. Infatti, quando gli investimenti realizzati da un'impresa con i fondi presi a prestito da banche e obbligazionisti si rivelano incapaci di generare i flussi di cassa originariamente previsti, gli azionisti subiscono una perdita massima limitata al capitale di rischio da essi versato nell'impresa. Se il valore del capitale è azzerato (cioè se, come si è detto, il valore delle attività è inferiore a quello del passivo verso terzi) essi hanno già perduto tutto ciò che potevano perdere: il principio della responsabilità limitata prevede infatti che essi non siano tenuti a versare ulteriori capitali nell'impresa per fare fronte ai debiti. Di conseguenza, in corrispondenza del primo pagamento dovuto ai creditori, gli azionisti avranno convenienza a dichiarare l'insolvenza e a lasciare l'azienda (il cui valore netto è ormai negativo) nelle mani dei creditori.

In altri termini, si può dire che gli azionisti detengono l'opzione di dichiarare insolvenza nei confronti dei creditori, cioè di cedere loro l'azienda anziché rimborsare il debito, quando il valore delle passività verso terzi è superiore al valore dell'attivo.

Il modello di Merton e le sue ulteriori versioni analizzate in questo paragrafo sono generalmente denominati *modelli strutturali*. Come si vedrà, questa denominazione deriva dal fatto che tali modelli si concentrano sulle caratteristiche strutturali di un'impresa che determinano la sua PD: il valore dell'attivo, il valore del debito (e, conseguentemente, il grado di leva finanziaria) e la volatilità dei valori dell'attivo. Essi ne misurano dunque tanto il financial risk (legato a un leverage più o meno elevato), quanto il business risk (dovuto ad attività particolarmente volatili).

I modelli basati sugli spread obbligazionari come quelli esaminati nel § 12.2 sono invece denominati *modelli ridotti*: essi, infatti, non risalgono alle cause del default ma si limitano a prendere atto che la possibilità di un default esiste, ed è riflessa negli spread sulle obbligazioni.

### 12.3.2 Il modello di Merton: struttura generale

Il modello originariamente formulato da Merton nel 1974 descrive la struttura finanziaria dell'impresa debitrice in maniera semplificata. Si ipotizza infatti che quest'ultima abbia una sola forma di passività verso terzi, rappresentata da un prestito ( bancario o obbligazionario) che prevede il rimborso del capitale in unica soluzione a scadenza. Più precisamente, tale passività prevede il rimborso di un ammontare  $F$  alla scadenza  $T$  ed ha valore di mercato pari a  $B$ . L'attivo dell'impresa, sempre valutato a valore di mercato e non a valore contabile, è pari a  $V$ . La differenza tra  $V$  e  $B$  rappresenta il valore del capitale di rischio,  $E$ . Indichiamo con  $B_0$ ,  $V_0$  e  $E_0$  il valore corrente (oggi) di queste tre quantità.

Il valore di mercato dell'attivo aziendale varia in ogni istante, in modo parzialmente imprevedibile. Più precisamente, Merton ipotizza che le sue variazioni istantanee percentuali ( $dV/V$ ) possano essere rappresentate con il seguente moto browniano geometrico:

$B$  valore di mercato dell'attivo aziendale

$$\frac{dV}{V} = \mu dt + \sigma_V dz = \mu dt + \sigma_V e^{\sqrt{dt}} [12.21]$$

dove  $\mu$  rappresenta il rendimento istantaneo atteso dagli attivi e  $dz$  (dato dal prodotto tra un termine  $e$  distribuito secondo una normale standard e la radice quadrata del tempo) è un disturbo casuale, i cui effetti vengono ridotti o amplificati dal coefficiente  $\sigma_V$  (che rappresenta il tasso di variabilità del moto browniano geometrico).

In pratica, le variazioni percentuali dell'attivo («rendimento dell'attivo») si muovono in modo stocastico, e l'incertezza sulla loro evoluzione futura aumenta al crescere dell'orizzonte temporale considerato. Tale fenomeno è visualizzato nella Fig. 12.3.

Il rischio di credito riguarda la possibilità che alla scadenza del debito ( $T$ ) il valore dell'attivo dell'impresa,  $V_T$ , sia inferiore al valore di rimborso del prestito,  $F$ . Questa possibilità è tanto maggiore quanto maggiori sono:

- il rapporto fra  $B_0/V_0$ , ossia la leva finanziaria dell'impresa al tempo zero;
- la volatilità del rendimento delle attività dell'impresa, misurata dalla deviazione standard del rendimento dell'attivo  $\sigma_V$ ;
- la scadenza del debito.

La probabilità di insolvenza di un'impresa è data dalla probabilità che  $V_T < F$ . Graficamente (cfr. la coda evidenziata nella Fig. 12.3), tale probabilità equivale all'area sottostante alla distribuzione normale, rappresentativa di tutti quei rendimenti negativi dell'attivo sufficientemente pronunciati da portare dal  $V_0$  corrente a un  $V_T$  a scadenza inferiore al valore di rimborso del debito.

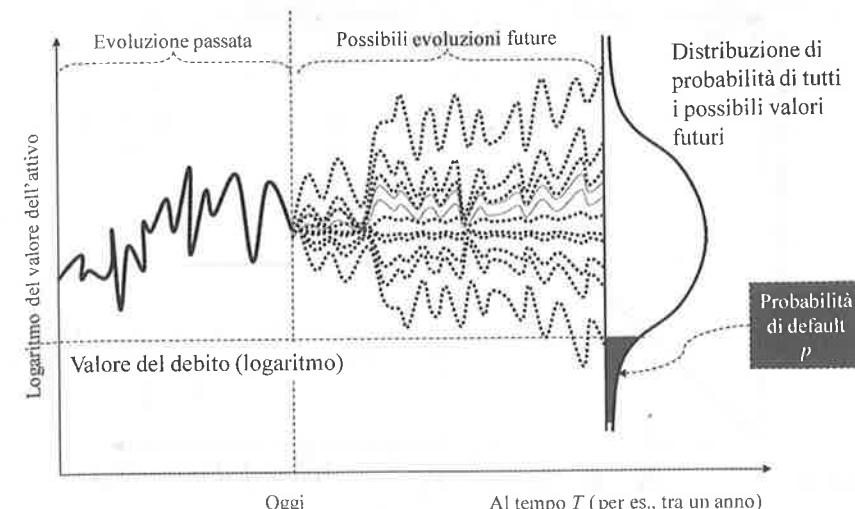
Quest'area è, a parità di altre condizioni, tanto maggiore quanto:

- minore è il valore di mercato di partenza dell'attivo ( $V_0$ );
- maggiore è il valore nominale del debito ( $F$ );
- maggiore è la volatilità del valore di mercato dell'attivo (in presenza di  $\sigma_V$  elevati, la distribuzione risulta più «schacciata», dunque con code più spesse);
- maggiore è la scadenza del debito.

In particolare, dato un certo orizzonte  $T$ , le prime tre variabili racchiudono tutti i fattori rilevanti per la determinazione della probabilità di insolvenza di un'impresa:

- le prospettive di evoluzione dell'impresa, del settore economico di appartenenza e della congiuntura macroeconomica, implicite nei flussi di cassa futuri attesi dall'impresa, il cui valore attuale rappresenta il valore di mercato corrente  $V_0$  delle attività;
- il rischio finanziario dell'impresa (financial risk), implicitamente considerato dal rapporto fra valore dell'attivo e valore del passivo, ossia dal grado di leva finanziaria;
- il grado di rischio di impresa (business risk), implicitamente considerato dalla volatilità del rendimento del valore delle attività.

Figura 12.3 La logica sottostante al modello di Merton



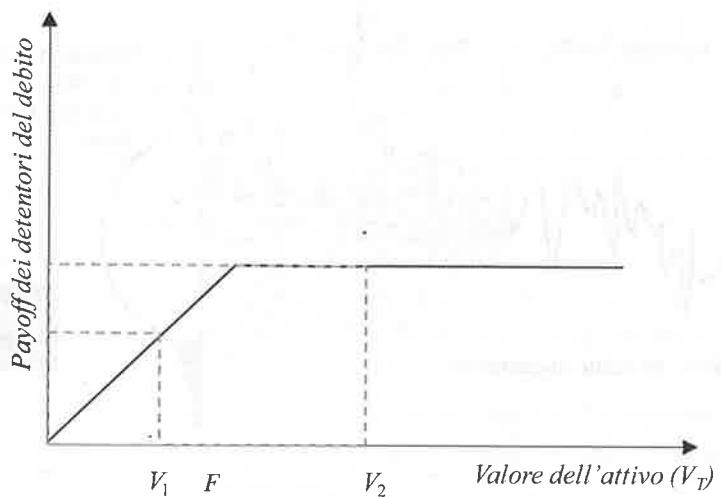
### 12.3.3 Il modello di Merton: il ruolo della contingent claim analysis

Abbiamo detto che gli azionisti detengono un'opzione nei confronti dei creditori: l'opzione di cedere loro l'azienda anziché rimborsare il debito. In pratica, dunque, essi possono scambiare  $V_T$  con  $F$ , quando il primo è inferiore al secondo.

Si tratta evidentemente di un'opzione put (possibilità di cedere a un prezzo concordato), che i finanziatori dell'impresa (per esempio, una banca) hanno concesso agli azionisti. In particolare, si tratta di una put sul valore delle attività della stessa impresa con prezzo di esercizio pari al valore nominale di rimborso del debito ( $F$ ) e scadenza  $T$  pari a quella del debito.

La Fig. 12.4 mostra graficamente questa intuizione. Per valori di  $V_T$  superiori al valore nominale di rimborso del debito ( $F$ ), come il punto  $V_2$ , il valore dell'attivo è tale da poter rimborsare la banca (creditori) dell'intero capitale impiegato e dei relativi interessi maturati. Il valore residuo ( $V_2 - F$ ) va a beneficio degli azionisti dell'impresa. Viceversa, per valori di  $V$  inferiori al valore del debito, quale il punto  $V_1$ , l'impresa è insolvente e la banca riceve solo parte del pagamento dovuto. Come è possibile osservare, il profilo del payoff nella Fig. 12.4 è quello di una posizione corta (di vendita) su un'opzione put.

In effetti, è facile dimostrare che per coprire il rischio di credito connesso al prestito, la banca potrebbe a sua volta acquistare un'opzione put sul valore dell'attivo dell'impresa ( $V$ ), con scadenza pari alla scadenza del prestito ( $T$ ) e prezzo di esercizio pari al valore di rimborso del debito ( $F$ ). La combinazione del prestito e dell'acquisto dell'opzione put produce infatti un payoff garantito (indipendente dal valore

**Figura 12.4 Il profilo dei payoff di una banca che ha concesso un prestito**

a scadenza dell'attivo) pari a  $F$ , come dimostrato dalla **Tab. 12.3** (dove con  $P_0$  si è indicato il premio pagato, al tempo 0, per l'acquisto della put).

L'ultima riga della tabella mostra che la banca, affiancando al prestito una put sul valore delle attività dell'impresa, potrebbe eliminare il rischio di credito, trasformando di fatto il proprio impiego rischioso in un impiego privo di rischio.

Se è vero che tale posizione sintetica è esente da rischio, allora, in equilibrio, il suo valore ( $B_0 + P_0$ ) deve essere pari a quello di un titolo privo di rischio che a scadenza paga  $F$ . In breve:

$$P_0 + B_0 = Fe^{-iT} \quad [12.22]$$

Il valore dell'opzione put,  $P_0$ , può essere a sua volta determinato utilizzando un modello di pricing delle opzioni. Merton utilizza quello originariamente sviluppato da Black e Scholes (1973)<sup>12</sup>, ottenendo il seguente risultato:

$$P_0 = Fe^{-iT} N(-d_2) - N(-d_1) V_0 \quad [12.23]$$

dove  $N(\cdot)$  rappresenta, come di consueto, la funzione di ripartizione normale standard<sup>13</sup>, mentre le quantità  $d_1$  e  $d_2$  sono date da:

**Tabella 12.3 Pay-off al tempo 0 e al tempo  $T$  connesso alla concessione di un prestito e all'acquisto di un'opzione put**

	Payoff al tempo 0		Payoff al tempo $T$	
	se $V_T < F$	se $V_T > F$	se $V_T < F$	se $V_T > F$
Concessione prestito	$-B_0$	$V_T$	$F$	$F$
Acquisto put	$-P_0$	$F - V_T$	0	0
<b>Totale</b>	$-(B_0 + P_0)$	$F$	$F$	$F$

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/F) + (i + 1/2 \sigma_V^2)T}{\sigma_V \sqrt{T}} = \frac{\ln(V_0/Fe^{-iT}) + 1/2 \sigma_V^2 T}{\sigma_V \sqrt{T}} = \frac{1/2 \sigma_V^2 T - \ln(L)}{\sigma_V \sqrt{T}} \quad [12.24]$$

$$d_2 = \frac{1/2 \sigma_V^2 T + \ln(L)}{\sigma_V \sqrt{T}} = d_1 - \sigma_V \sqrt{T} \quad [12.24 \text{ bis}]$$

Si noti che con  $L = Fe^{-iT}/V$  abbiamo indicato una possibile misura della leva finanziaria dell'impresa debitrice.

Nelle prossime sezioni di questo paragrafo mostreremo come, dalle [12.23]-[12.24], sia possibile ricavare tre importanti risultati:

- il valore di mercato corrente,  $B_0$ , del prestito;
- il rendimento che dovrebbe essere richiesto dalla banca sul prestito e il relativo spread rispetto al tasso privo di rischio;
- la probabilità di insolvenza (risk neutral) dell'impresa debitrice.

#### 12.3.4 Il modello di Merton: il valore del prestito e lo spread di equilibrio

Il valore di mercato del prestito,  $B_0$ , può essere ottenuto sostituendo il valore di  $P_0$  espresso dalla [12.22] nella [12.21]. Analiticamente:

$$B_0 = Fe^{-iT} [1 - N(-d_2)] + N(-d_1) V_0 = Fe^{-iT} \left[ N(d_2) + \frac{1}{L} N(-d_1) \right] \quad [12.25]$$

La [12.25] mostra come il valore del prestito sia tanto maggiore quanto minore è il grado di leva finanziaria dell'impresa debitrice e quanto minore è la scadenza del prestito.

Il rendimento di equilibrio del prestito è il tasso di sconto  $i^*$  che rende uguale al valore di mercato corrente del prestito,  $B_0$ , il valore attuale del rimborso finale  $F$ . Analiticamente:

$$Fe^{-i^*T} = B_0 \quad [12.26]$$

<sup>12</sup> Cfr. Appendice 12C.

<sup>13</sup> Cfr. per es. il Capitolo 6.

da cui:

$$i^* = -\frac{\ln \frac{B_0}{F}}{T} - \frac{\ln \frac{Fe^{-iT} - P_0}{F}}{T} \quad [12.27]$$

Sostituendo la [12.23] nella [12.27] è quindi possibile ricavare  $i^*$ , nonché lo spread  $d = i^* - i$  di equilibrio. È facile verificare che quest'ultimo risulta pari a:

$$d = i^* - i = -\frac{1}{T} \ln \left[ N(d_2) + \frac{V_0}{Fe^{-iT}} N(-d_1) \right] = -\frac{1}{T} \ln \left[ N(d_2) + \frac{N(-d_1)}{L} \right] \quad [12.28]$$

Per comprendere a fondo le implicazioni della [12.28] esaminiamo ora alcuni esempi.

 Consideriamo dapprima un'impresa con un valore di mercato corrente dell'attivo ( $V_0$ ) pari a 100.000 euro, una variabilità di quest'ultimo ( $\sigma_V$ ) pari al 10 per cento e un valore di rimborso del debito ( $F$ ) pari a 90.000 euro. Si ipotizzi inoltre che la scadenza del debito ( $T$ ) sia pari a 1 anno e il tasso di interesse privo di rischio ( $i$ ) sia pari al 5 per cento.

La leva finanziaria  $L$  dell'impresa in esame è pari al rapporto fra  $Fe^{-iT}$  e  $V$ , ossia 85,61 per cento. Sulla base di questo valore e degli altri dati è possibile stimare il valore di mercato del debito,  $B_0$ , e il premio al rischio di equilibrio ( $d$ ). Analiticamente:

$$d_1 = \frac{1/2 \sigma_V^2 T + \ln(L)}{\sigma_V \sqrt{T}} \approx 1,604$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T} \approx 1,504$$

$$N(-d_1) \approx 0,054$$

$$N(d_2) \approx 0,934$$

da cui, infine:

$$B_0 = Fe^{-iT} \left[ N(d_2) + \frac{N(-d_1)}{L} \right] \approx 85,371$$

$$d = -\frac{1}{T} \ln \left[ N(d_2) + \frac{1}{L} N(-d_1) \right] = 0,280\%$$

All'impresa dovrà dunque essere applicato un tasso attivo del 5,28 per cento, pari al tasso risk-free più lo spread  $d$ .

La Tab. 12.4 consente di generalizzare questo primo esempio calcolando i valori dello spread di equilibrio (nel caso di un prestito a un anno e di un tasso di interesse privo di rischio pari al 5 per cento) in corrispondenza di diversi livelli di leva finanziaria e di diverse volatilità dei rendimenti dell'attivo.

**Tabella 12.4 Premi al rischio corrispondenti a diversi livelli di leva finanziaria e di volatilità dei rendimenti dell'attivo ( $T = 1; i = 5\%$ )**

$\sigma_V$	5%	10%	15%	20%	25%	30%
$L$						
50%	0,000%	0,000%	0,000%	0,002%	0,029%	0,149%
60%	0,000%	0,000%	0,002%	0,044%	0,243%	0,700%
70%	0,000%	0,001%	0,052%	0,355%	1,032%	2,063%
80%	0,000%	0,050%	0,506%	1,494%	2,873%	4,519%
90%	0,033%	0,795%	2,272%	4,070%	6,036%	8,112%
100%	2,015%	4,069%	6,165%	8,301%	10,478%	12,696%

Come è possibile osservare, il premio al rischio – e dunque lo spread – è tanto maggiore quanto maggiore è, a parità di altre condizioni, il grado di leva finanziaria, ossia il financial risk dell'impresa, e quanto maggiore è la volatilità dell'attivo, ossia il business risk dell'impresa.

### 12.3.5 Il modello di Merton: la probabilità di default

Il terzo risultato che è possibile ricavare dal modello di Merton è la probabilità di insolvenza dell'impresa. Quest'ultima equivale alla probabilità che, alla scadenza del prestito, il valore di mercato dell'attivo dell'impresa sia inferiore al valore di rimborso del debito. Analiticamente:

$$p = pr(V_T < F) \quad [12.29]$$

Come si è visto, tale probabilità equivale alla probabilità di esercizio dell'opzione put implicita nel prestito. Utilizzando il modello di Black e Scholes è possibile mostrare che la probabilità di esercizio di un'opzione put è data da:

$$N(-d_2) = 1 - N(d_2)$$

È dunque possibile stimare la PD come:

$$PD = p = pr(V_T < F) = N(-d_2) = 1 - N(d_2) \quad [12.30]$$

Si consideri l'esempio riportato sopra, con  $i = 5\%$ ,  $V_0 = 100.000$  e  $F = 90.000$  (dunque  $L = 85,61\%$ ),  $\sigma_V = 10\%$ ,  $T = 1$ . La PD dell'impresa risulta pari a:

$$p = Pr(V_T < F) = 1 - N(d_2) = N(-d_2) = 6,63\%$$

Prima di procedere, è importante sottolineare che le PD così ottenute rappresentano (come già accadeva per i modelli presentati nel § 12.2) probabilità neutrali al

rischio. Il motivo è che, nel derivare la [12.30], il tasso di rendimento atteso sull'attivo ( $\mu$  nell'equazione [12.21]) viene sostituito, per comodità, con il tasso risk-free  $i$ : stiamo dunque ipotizzando che chi investe negli attivi rischiosi di un'impresa lo faccia senza richiedere alcun premio rispetto ai tassi sui titoli privi di rischio. Come nel § 12.2, stiamo dunque adottando la psicologia di un investitore neutrale al rischio; tale scelta conduce a sovrastimare le PD, per ragioni analoghe a quelle spiegate nel § 12.2.5<sup>14</sup>.

### 12.3.6 La struttura a termine degli spread e delle probabilità di default

Un risultato interessante che emerge dal modello di Merton è rappresentato dal fatto che la curva per scadenza degli spread è crescente per le imprese caratterizzate da una PD relativamente contenuta, mentre è decrescente per le imprese con PD elevata.

Si consideri l'esempio riportato nella Tab. 12.5, che ipotizzando un tasso risk-free del 5 per cento stima le probabilità di insolvenza cumulate (ricavate con la [12.30]) e i corrispondenti spread composti continuui annui (ricavati con la [12.28]) per due imprese caratterizzate da un diverso livello di leva finanziaria e di variabilità dell'attivo. Questi ultimi sono ripresi anche nella Fig. 12.5.

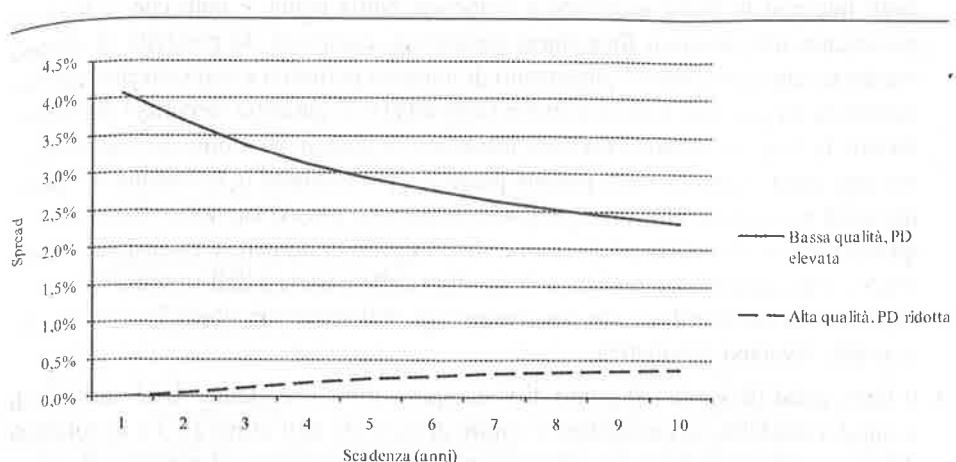
Come emerge dall'esempio, scadenze più lunghe conducono, a parità di altre condizioni, a premi al rischio anni più ridotti quando la probabilità di insolvenza è considerevole. Questo risultato, apparentemente controiduitivo, si spiega con il fatto che le imprese caratterizzate da una probabilità di insolvenza molto elevata presentano un consistente rischio di non «sopravvivere» al primo anno. Se tuttavia

Tabella 12.5 Probabilità di insolvenza ( $p$ ) e premio al rischio ( $d$ ) per scadenza

Scadenza $T$ (anni)	$L = 90\%, \sigma_v = 20\%$		$L = 75\%, \sigma_v = 10\%$	
	$p$ (PD cumulata)	$d$ (spread)	$p$ (PD cumulata)	$d$ (spread)
1	33,48%	4,07%	0,24%	0,01%
2	40,86%	3,69%	2,48%	0,06%
3	44,79%	3,37%	5,77%	0,13%
4	47,47%	3,12%	9,04%	0,19%
5	49,52%	2,93%	12,00%	0,24%
6	51,19%	2,77%	14,64%	0,28%
7	52,61%	2,64%	16,98%	0,31%
8	53,85%	2,53%	19,06%	0,33%
9	54,95%	2,44%	20,93%	0,35%
10	55,95%	2,36%	22,61%	0,36%

<sup>14</sup> Per ulteriori dettagli cfr. l'Appendice 12B.

Figura 12.5 Struttura a termine degli spread creditizi per diverse tipologie di debitore



superano il primo anno, la probabilità di divenire insolventi negli anni successivi si riduce significativamente, in quanto molte di esse migliorano il proprio merito creditizio: l'elevata volatilità dell'attivo, infatti, se da un lato conduce una quota elevata di tali imprese a divenire insolventi il primo anno, dall'altro fa sì che una porzione altrettanto elevata riduca significativamente la propria leva finanziaria, e con essa la probabilità di insolvenza relativa agli anni successivi. Ciò fa sì che la curva delle PD marginali decresca al crescere dell'orizzonte temporale considerato, giustificando l'inclinazione negativa (visualizzata nella Fig. 12.6) della struttura per scadenza dei loro spread creditizi.

### 12.3.7 Pregi e limiti del modello di Merton

Il modello di Merton presenta due importanti pregi. In primo luogo, esso mostra efficacemente le variabili rilevanti per determinare la PD di un'impresa (e dunque gli spread richiesti sul suo debito), ovvero:

- il rapporto fra valore del debito e valore dell'attivo, ossia la leva finanziaria, rappresentativa del rischio finanziario (financial risk)?
- la variabilità del valore dell'attivo, che dipende dalla variabilità dei flussi di cassa operativi attesi dalle attività dell'impresa, ed è dunque rappresentativa del grado di rischio di impresa (business risk).

In secondo luogo, partendo da questi input il modello di Merton consente di ricavare PD e spread in un modo oggettivo, chiaro, formalmente elegante.

Esso presenta tuttavia anche diversi limiti, che diventano particolarmente rilevanti quando da un'analisi puramente teorica si passa all'utilizzo del modello per la stima empirica delle PD o degli spread. In particolare, ricordiamo:

1. l'ipotesi semplificatrice di un'unica passività, che prevede il rimborso del capitale e degli interessi in unica soluzione a scadenza. Nella realtà, è noto che le imprese presentano una struttura finanziaria complessa, composta da passività di diversa scadenza, che prevedono il pagamento di interessi periodici e sono sovente caratterizzate da un grado di subordinazione (seniority) e di garanzia (security) differente. Inoltre, le imprese possono divenire insolventi in qualunque momento, indipendentemente dalla scadenza delle proprie passività, per esempio in occasione del pagamento di una cedola sulle obbligazioni o di interessi passivi sul debito bancario. Per questo motivo, il modello di Merton è stato oggetto di numerose estensioni, volte a rendere più complessa e realistica la struttura delle passività dell'impresa<sup>15</sup>;
2. l'ipotesi che la distribuzione dei rendimenti dell'attivo sia normale, ipotesi che potrebbe rivelarsi irrealistica;
3. il fatto, assai rilevante dal punto di vista applicativo, che alcune delle variabili di input del modello, in particolare il valore di mercato dell'attivo ( $V_0$ ) e la volatilità del suo rendimento ( $\sigma_V$ ), non sono direttamente osservabili nel mercato. Il valore di mercato dell'attivo è dato dalla somma del valore del capitale e del valore del debito (in simboli  $V = E + B$ ); mentre il valore della prima componente può essere osservato se l'impresa è quotata, quello della seconda potrebbe esserlo solo nel caso (evidentemente poco plausibile) in cui tutte le passività dell'impresa verso terzi fossero rappresentate da obbligazioni attivamente scambiate sul mercato secondario. A queste condizioni, il valore dell'attivo potrebbe essere ricostruito come somma delle due componenti ricordate, e sarebbe possibile misurarne il

<sup>15</sup> Questo problema è stato affrontato in versioni successive del modello, elaborate da altri ricercatori. Geske (1977) ha introdotto la possibilità che l'insolvenza dell'impresa avvenga prima della scadenza del debito per effetto della presenza di passività che pagano interessi o di covenant. Nel suo modello, l'insolvenza può in particolare avvenire in corrispondenza della data di pagamento di interessi anche quando il valore dell'attivo è superiore a quello del debito se tale pagamento porterebbe il valore dell'equity a un livello non conveniente per gli azionisti. Black e Cox (1976) hanno considerato la possibilità che l'insolvenza si verifichi in qualunque momento se il valore dell'attivo scende al di sotto della soglia minima  $k$  imposta da un covenant sul debito. Partendo dall'osservazione che sovente le imprese continuano a operare anche quando il valore dell'attivo scende al di sotto al valore del debito (perché parte di quest'ultimo è a lungo termine e non necessita di un rimborso immediato), Vasicek (1984) ha introdotto la distinzione fra passività a breve e a lungo termine, modellando l'insolvenza come l'evento che si verifica quando il valore dell'attivo scende al di sotto compreso fra le passività a breve e il totale del debito. L'estensione più nota del modello di Merton è forse quella proposta da Longstaff e Schwartz (1995). Essa si differenzia dal lavoro di Merton in tre aspetti: anzitutto l'insolvenza si verifica contestualmente per tutte le passività quando il valore dell'attivo scende sotto una soglia  $k$ , come in Black e Cox (1976); in secondo luogo, Longstaff e Schwartz considerano il tasso di recupero come una costante che dipende dalla negoziazione successiva all'insolvenza (ed è quindi esogena rispetto al modello); infine, il tasso di interesse privo di rischio è stocastico. Il modello produce risultati coerenti con la realtà empirica e per questo è stato concretamente utilizzato da diverse istituzioni finanziarie, specie a fini di pricing. In particolare, il modello produce probabilità di insolvenza crescenti al crescere della scadenza, spread che aumentano al crescere della correlazione fra tassi di interesse e valori dell'attivo dell'impresa, e una correlazione negativa fra il livello degli spread e il livello dei tassi di rendimento dei titoli di Stato.

- valore corrente e stimarne la volatilità passata. Si tratta tuttavia di condizioni chiaramente irrealistiche, in quanto la maggior parte delle imprese fa ricorso anche a obbligazioni non quotate, prestiti bancari, crediti di fornitura o altre forme di finanziamento prive di un mercato secondario liquido;
4. l'ipotesi di tassi di interesse privi di rischio costanti. Questa ipotesi, che non consente di analizzare la relazione fra rischio di interesse e rischio di credito, è stata rimossa da svariati autori successivi. Tra questi, ricordiamo Kim, Ramaswamy e Sundaresan (1993), che propongono un modello à la Merton con tassi di interesse stocastici e costi di liquidazione dell'impresa (bankruptcy cost);
  5. la logica arbitrage-free, ossia di assenza di opportunità di arbitraggio, tipica del modello di Black e Scholes utilizzato da Merton. Tale logica presuppone la possibilità di effettuare in via continuativa arbitraggi sull'attività sottostante al contratto di opzione, che nel caso in esame è rappresentata dalle attività dell'impresa. Tale ipotesi appare alquanto irrealistica, visto che gli attivi di un'impresa non sono di norma liberamente negoziabili sul mercato finanziario;
  6. il fatto che il modello si concentra sul solo rischio di insolvenza, senza dunque considerare il rischio di migrazione, ossia il rischio di deterioramento del merito creditizio dell'emittente<sup>16</sup>. In altri termini, il modello di Merton non fornisce alcuna indicazione circa la probabilità che l'impresa in esame, pur restando solvente, subisca un deterioramento del proprio merito creditizio.

### 12.3.8 Il modello di KMV per la stima di $V_0$ e $\sigma_V$

I problemi 1-3 (struttura delle passività semplificata, normalità dei rendimenti dell'attivo, stima di  $V_0$  e  $\sigma_V$ ) vengono esplicitamente affrontati dal modello sviluppato da KMV<sup>17</sup>, una società californiana acquisita, qualche anno fa, da Moody's Investor Services. In questa sezione ci concentreremo sul terzo (stima di  $V_0$  e  $\sigma_V$ ), rinviando alla sezione successiva la discussione dei restanti due.

Il modello di KMV parte dalla constatazione (implicita nel modello di Merton<sup>18</sup>) che il valore del capitale azionario ( $E$ ) è equivalente al valore di un'opzione call sul

<sup>16</sup> Questo limite può essere superato considerando, anziché un unico livello del valore dell'attivo al di sotto del quale «scatta» l'insolvenza, più soglie associate anche a possibili variazioni di rating, come avviene nel modello CreditMetrics (cfr. Capitolo 15).

<sup>17</sup> L'acronimo KMV deriva dalle iniziali dei cognomi dei tre soci fondatori: Steven Kealhofer, John Andrew McQuown e Oldrich Vasicek. Kealhofer e Vasicek sono due ex accademici dell'Università di Berkeley. Il nome della società è oggi «Moody's KMV»; noi manteniamo il riferimento alla ragione sociale valida quando il modello fu messo a punto e reso noto.

<sup>18</sup> Per definizione, si ha che  $V_0 = E_0 + B_0$ . Inoltre, secondo il modello di Merton, si ha che  $B_0 = Fe^{-iT} - P_0$ , dove  $P_0$  è il valore di una put. Ne segue che  $V_0 = E_0 + Fe^{-iT} - P_0$ , cioè che  $V_0 + P_0 = E_0 + Fe^{-iT}$ . A questo punto, è sufficiente ricordare che, per la put/call parity tra opzioni europee,  $S + p = c + Xe^{-iT}$  (dove i simboli hanno il significato specificato nell'Appendice C) per accorgersi che  $E_0$  coincide con il valore  $c$  di una call scritta su  $V$ , con scadenza  $T$  e prezzo di esercizio  $F$ .

**Tabella 12.6 Payoff connessi alla posizione di azionista o all'acquisto di una call sul valore dell'attivo con prezzo di esercizio pari a  $F$**

	Payoff al tempo 0		Payoff al tempo $T$
	se $V_T < F$	se $V_T > F$	
Azionista	$-E_0$	0	$(V_T - F)$
Acquisto di una call	$-C_0$	0	$(V_T - F)$

valore dell'attivo dell'impresa, con scadenza pari alla vita residua del debito ( $T$ ) e prezzo di esercizio pari al valore nominale di rimborso del debito ( $F$ ). La Tab. 12.6 mostra come, in effetti, alla scadenza ( $T$ ) le due posizioni (possesso delle azioni dell'impresa o acquisto di una call sul suo attivo) producano un risultato equivalente. Tale equivalenza è mostrata graficamente nella Fig. 12.6.

Come si può notare, per valori di  $V_T$  inferiori al valore nominale del debito, l'impresa è insolvente e l'attivo residuo viene interamente utilizzato per rimborsare il debito; gli azionisti perdono dunque l'intero valore del proprio investimento iniziale ( $E_0$ ) e ottengono zero. Viceversa, se il valore dell'attivo è superiore al valore nominale del debito, la differenza  $V_T - F$  rappresenta la ricchezza degli azionisti (e il potenziale guadagno è illimitato). Tale payoff è equivalente a quello connesso a una posizione lunga (acquisto) su un'opzione call.

Se le due posizioni sono equivalenti in termini di payoff a scadenza, ne segue che anche il relativo costo iniziale deve essere, per la legge del prezzo unico, identico<sup>19</sup>. È dunque possibile esprimere il valore di mercato del capitale azionario usando una formula per il pricing delle opzioni call. Se, in analogia a quanto fatto per il modello di Merton, adottiamo la formula di Black e Scholes<sup>20</sup>, avremo che:

$$E_0 = V_0 \cdot N(d_1) - Fe^{-iT} N(d_2) \quad [12.31]$$

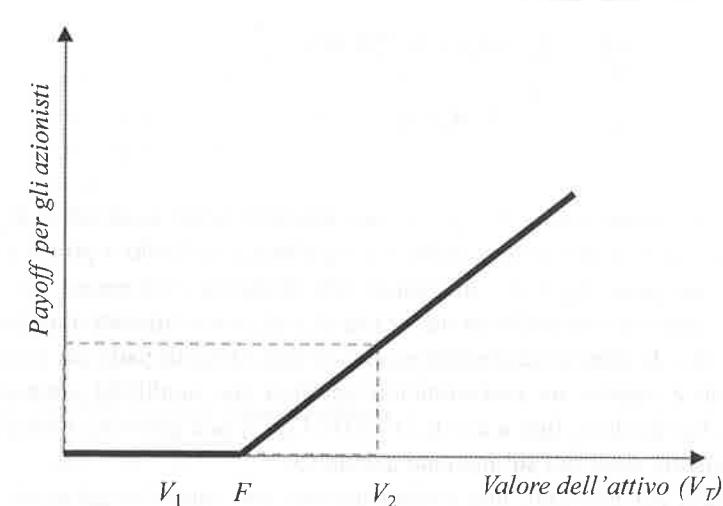
Se stiamo analizzando un'impresa quotata,  $E_0$  è noto, ed è dato in pratica dal valore della capitalizzazione di borsa. Potremmo dunque cercare il valore di  $V_0$  coerente con tale valore empirico di  $E_0$ , e in questo modo determinare  $V_0$  che, come detto in precedenza, non è direttamente osservabile sul mercato.

Tuttavia,  $V_0$  non è la sola quantità ignota che compare nella [12.31]. Come si ricorderà, infatti,  $d_1$  e  $d_2$  dipendono (oltre che dallo stesso  $V_0$ ) da  $\sigma_V$ , la volatilità dell'attivo. Anche questa seconda grandezza non è osservabile, e dunque non è

<sup>19</sup> La legge del prezzo unico afferma semplicemente che se due attività finanziarie danno diritto alle medesime prestazioni future, allora su un mercato efficiente i loro prezzi correnti devono coincidere.

<sup>20</sup> Cfr. ancora la nota 10.

**Figura 12.6 Il profilo del payoff per gli azionisti**



nota. Possono quindi esistere infinite coppie di valori per  $V_0$  e  $\sigma_V$  coerenti con il valore osservato di  $E_0$ , e non è possibile individuare quale, tra esse, sia quella corretta.

Per poter trovare una soluzione unica, è necessario disporre di una seconda equazione che leggi tra loro  $V_0$  e  $\sigma_V$ , così da ottenere un sistema di due equazioni in due incognite. Questa seconda equazione può essere ricavata applicando un teorema del calcolo stocastico noto come lemma di Ito, ed è la seguente<sup>21</sup>:

$$\sigma_E = \frac{V_0}{E_0} N(d_1) \sigma_V \quad [12.32]$$

A primo membro compare la volatilità del valore di mercato del capitale ( $\sigma_E$ ), che nel caso di imprese quotate può essere stimata empiricamente (per esempio, come deviazione standard dei rendimenti passati del titolo azionario) e dunque può essere considerata come una quantità nota. A secondo membro compaiono nuovamente le

<sup>21</sup> Intuitivamente, la [12.32] esprime la volatilità del rendimento del capitale azionario come una funzione della volatilità dell'attivo, tanto maggiore quanto maggiore è il grado di leva finanziaria dell'impresa in esame. Ciò si spiega con il fatto che il business risk grava, in prima istanza, sugli azionisti e solo successivamente (quando il valore di mercato dell'attivo diventa inferiore a quello delle passività verso terzi) sugli obbligazionisti. Di conseguenza, la variabilità dell'attivo si trasmette «amplificata» alla volatilità del capitale azionario, con un'amplificazione tanto maggiore quanto maggiore è la quota di attivo finanziata con debito.

nostre due incognite,  $V_0$  e  $\sigma_V$  (sia in maniera esplicita che in maniera «nascosta» nel termine  $d_1$ ). Possiamo dunque raccogliere la [12.31] e la [12.32] nel sistema:

$$\begin{cases} E_0 = V_0 N(d_1) - F e^{-iT} N(d_2) \\ \sigma_E = \frac{V_0}{E_0} N(d_1) \sigma_V \end{cases}$$

e risolverlo, trovando i valori di  $V_0$  e  $\sigma_V$  coerenti con i valori osservati di  $E_0$  e  $\sigma_E$ .

La risoluzione non può essere svolta per via diretta, isolando a primo membro i valori delle incognite  $V_0$  e  $\sigma_V$ , in quanto tali incognite compaiono più volte in entrambe le equazioni (ricordiamo infatti che  $d_1$  e  $d_2$  sono funzioni, non lineari, sia di  $V_0$  che di  $\sigma_V$ ). È dunque necessario assegnare due valori di partenza «verosimili» alle incognite e seguire un procedimento iterativo che modifichi gradualmente i valori sia di  $V_0$  che di  $\sigma_V$  fino a che le [12.31]-[12.32] non generino i valori di  $E_0$  e  $\sigma_E$  empiricamente osservati sul mercato azionario.

Si consideri, per esempio, una società quotata con capitalizzazione di mercato ( $E_0$ ) pari a 10 milioni di euro e deviazione standard su base annua dei rendimenti azionari ( $\sigma_E$ ) pari al 50%. Si ipotizzi inoltre che la società abbia un'unica passività, in scadenza tra  $T = 1$  anno, per un valore nominale ( $F$ ) di 90 milioni di euro. Infine, il tasso di interesse privo di rischio ( $i$ ) sia pari al 5 per cento.

Vediamo ora il procedimento iterativo necessario per identificare il valore di mercato corrente degli attivi ( $V_0$ ) e la volatilità del loro rendimento ( $\sigma_V$ ). Inizialmente assegniamo alle due incognite due valori sufficientemente realistici: per il valore di mercato dell'attivo utilizziamo, per esempio, la somma del valore nominale del debito e del valore di mercato del capitale azionario ( $90 + 10 = 100$  milioni di euro); per la volatilità del rendimento dell'attivo utilizziamo un valore inferiore a quello stimato per la volatilità dei rendimenti azionari (per esempio, 10 per cento anziché 50 per cento).

Sostituendo questi valori nel nostro sistema otterremo:

$$\begin{cases} E_0 = 14,63 \\ \sigma_E = 65\% \end{cases}$$

Si tratta di valori troppo elevati, perché superiori a quelli osservati empiricamente. Potremmo provare a specificare due valori più bassi, per esempio  $V_0 = 90$  e  $\sigma_V = 2\%$ . I nuovi valori del sistema sarebbero:

$$\begin{cases} E_0 = 4,39 \\ \sigma_E = 41\% \end{cases}$$

Questa volta, i valori ottenuti sarebbero errati per difetto; potremmo provare valori leggermente più alti e procedere per tentativi. In realtà, ci conviene automatizzare

**Tabella 12.7 La stima del valore di mercato e della volatilità dell'attivo**

Input	
Valore di mercato del capitale azionario ( $E$ )	10.000.000
Deviazione standard del rendimento azionario ( $\sigma_E$ )	50%
Valore nominale di rimborso del debito ( $F$ )	90.000.000
Tasso di interesse privo di rischio ( $i$ )	5%
Scadenza del debito ( $T$ )	1
Output	
Valore di mercato dell'attivo ( $V_0$ )	95.576.493
Deviazione standard annua del rendimento dell'attivo ( $\sigma_V$ )	5,33%
Ulteriori output ottenibili con il modello di Merton	
Valore di mercato del debito ( $B_0$ )	85.576.495
Spread $d$ di equilibrio	0,04%
Tasso ( $i^* = i + d$ ) di equilibrio	5,04%
Probabilità di insolvenza risk-neutral ( $p$ )	2,07%

questo processo iterativo, chiedendo a un software di ottimizzazione<sup>22</sup> di modificare  $V_0$  e  $\sigma_V$  fino a ottenere valori di  $E_0$  e  $\sigma_E$  corrispondenti ai due valori rilevati empiricamente. I dati del nostro problema e un esempio di possibile soluzione ottenuta con il calcolatore sono riportati nella Tab. 12.7. Come si vede, i valori coerenti con  $E_0 = 10$  milioni e  $\sigma_E = 50\%$  risultano essere  $V_0 = 95.576.493$  euro e  $\sigma_V = 5,33\%$ . Utilizzando questi valori di  $V_0$  e  $\sigma_V$  potremmo impiegare le equazioni di Merton per stimare i valori della PD e dello spread di equilibrio sul prestito (equazioni [12.30] e [12.28]). I risultati sono riportati nella terza parte della Tab. 12.7.

Paradossalmente, tuttavia, dopo aver stimato  $V_0$  e  $\sigma_V$ , il modello KMV non li utilizza secondo le formule indicate da Merton, ma segue una procedura diversa. Tale procedura (presentata in dettaglio nella prossima sezione) consente di rimuovere l'ipotesi di normalità nella distribuzione dei rendimenti dell'attivo e di ottenere PD reali, e non neutrali al rischio.

### 12.3.9 L'approccio di KMV alla stima delle PD

Invece di stimare direttamente la probabilità di insolvenza di un'impresa utilizzando la [12.30] e i valori di  $V_0$  e  $\sigma_V$ , KMV adotta un approccio a due stadi:

<sup>22</sup> Questo processo può essere effettuato anche con la funzione «risolutore» presente nel foglio elettronico di Excel.

1. viene dapprima stimato un indice di rischio chiamato «distanza dall'insolvenza» (distance to default,  $DD$ ), che assume valori più elevati per le imprese migliori e non può essere direttamente interpretato come una PD;
2.  $DD$  viene convertito in una probabilità di default mediante una legge empirica, basata dell'esperienza passata.

Analizzeremo ora in dettaglio queste due fasi<sup>23</sup>. Prima, tuttavia, introduciamo il concetto di default point (DP), un'altra delle innovazioni che distinguono il modello di KMV da quello di Merton.

Come si ricorderà, nel modello di Merton si ha default se il valore degli attivi scende al di sotto del valore nominale del debito; un limite del modello è che esso ipotizza che le passività siano costituite da un unico debito con scadenza pari a  $T$ . Al contrario, KMV riconosce che, nella realtà, le imprese si finanzianno con una combinazione di debito a breve termine e di debito a lungo termine. Mentre è importante che il valore degli attivi non scenda al di sotto di quello del debito a breve (il cui rimborso è prossimo nel tempo), è possibile che gli attivi scendano al di sotto del debito totale senza che si abbia insolvenza dell'impresa<sup>24</sup>, visto che una parte del debito a lungo termine dovrà essere rimborsata solo in un futuro lontano.

Di conseguenza, anziché considerare come soglia critica per il default il valore totale del debito  $F$ , KMV utilizza una quantità, chiamata default point ( $DP$ ), data da tutto il debito a breve termine ( $b$ ) più il 50 per cento del debito a lungo termine ( $l$ ). In simboli:

$$DP = b + \frac{1}{2} l \quad [12.33]$$

In questo modo, è possibile tenere conto della diversa scadenza delle passività di un'impresa in modo più realistico di quanto non accada nel modello di Merton.

Avendo chiarito il significato del default point, possiamo ora introdurre una definizione formale della distance to default (DD). Essa è data dalla differenza fra valore dell'attivo<sup>25</sup> e livello del default point, espressa come multiplo della deviazione standard dell'attivo:

<sup>23</sup> Il procedimento è analogo a quello seguito da molte banche per associare le PD ai loro modelli di scoring, descritto nel capitolo precedente. Come si ricorderà, in quel caso prima si assegna a ogni debitore uno score (non interpretabile direttamente come una PD), quindi si «traduce» lo score in una PD sulla base dei tassi di default passati. L'equazione [12.30] del modello di Merton «compatta» in un solo passaggio questi due stadi, un po' come l'analisi discriminante consente di stimare direttamente la PD di un'impresa partendo dai suoi dati di bilancio. KMV li separa, rendendo più leggibile e flessibile il procedimento di stima della PD.

<sup>24</sup> Questa intuizione del modello di KMV si basa sull'osservazione empirica. Osservando centinaia di imprese statunitensi insolventi, infatti, KMV ha notato che l'insolvenza si verifica quando il valore dell'attivo raggiunge una soglia che si colloca fra le passività a breve e il totale delle passività.

<sup>25</sup> Per semplicità, utilizziamo il valore dell'attivo corrente. Versioni alternative della DD si possono costruire utilizzando il valore atteso dell'attivo a scadenza.

$$DD = \frac{V_0 - DP}{V_0 \cdot \sigma_V} \quad [12.34]$$

Si consideri, per esempio, un'impresa con debiti a breve termine per 6 milioni di euro e debiti a lungo termine per 2 milioni di euro. Si supponga che, sulla base del sistema [12.31]-[12.32], si sia stimato un valore dell'attivo di 10 milioni di euro, a fronte di una volatilità  $\sigma_V$  del 10%.

Il default point sarà pari a:

$$DP = 6 + \frac{1}{2} 2 = 7 \text{ milioni di euro}$$

e la distance to default risulterà pari a:

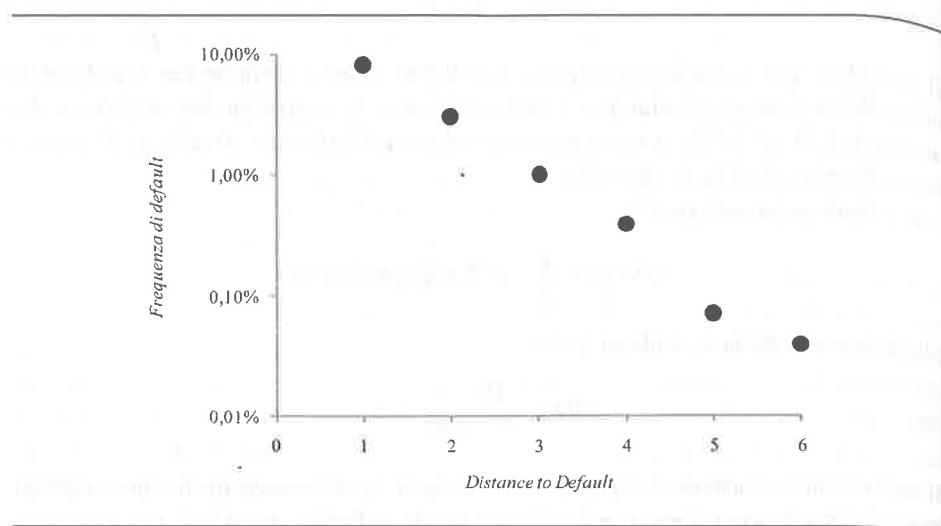
$$DD = \frac{10 - 7}{10 \cdot 10\%} = 3$$

Si noti che nella formula della distance to default, la differenza tra il valore dell'attivo e il default point viene standardizzata per la volatilità. In effetti, un «cuscinetto» di 3 milioni di euro tra valore dell'attivo e default point può essere considerato più o meno consistente a seconda della variabilità evidenziata, in passato, dagli attivi aziendali. Se, per esempio, l'azienda opera in un settore fortemente volatile, e il suo valore, negli anni scorsi, ha conosciuto brusche oscillazioni, allora anche un differenziale di 3 milioni potrebbe essere «bruciato» con relativa facilità; 3 milioni di euro avrebbero, in questo caso, un minor potere di «protezione dal default». La [12.34] tiene conto di questo aspetto: se, per esempio, la  $\sigma_V$  dell'impresa che stiamo esaminando non fosse pari al 10 per cento, bensì al 30 per cento, allora la sua DD sarebbe pari solamente a 1.

La seconda fase del procedimento di stima della PD adottato nel modello KMV è basata su una corrispondenza empirica tra DD e tassi di default empiricamente registrati in passato. A tal fine, gli Autori del modello hanno stimato il valore della DD a partire dai dati passati di un vasto campione di imprese, in parte terminate in default. Per diverse «fasce» di DD è stata poi calcolata la percentuale di imprese

Tabella 12.8 Esempio di relazione tra DD e PD (frequenza di default)

DD (valore approssimato)	(a) n. di società	(b) n. di società insolventi	(c) = (b) / (a) Frequenza di default
1	9000	720	8%
2	15000	450	3%
3	20000	200	1%
4	35000	150	0,4%
5	40000	28	0,07%
6	42000	17	0,04%

**Figura 12.7 Il legame tra DD e PD (frequenze di default)**

risultate successivamente insolventi: un esempio di simili analisi empiriche è riportato nella Tab. 12.8 e nella Fig. 12.7<sup>26</sup>.

Come si vede, i dati suggeriscono un legame empirico abbastanza preciso tra DD e frequenze di default passate. Nota la DD di un'impresa, tale legame può essere utilizzato per stimare la PD a essa associata (che gli autori del modello KMV definiscono EDF, expected default frequency, cioè frequenza di default attesa). Per esempio all'impresa considerata in precedenza (con  $V_0$  di 10 milioni di euro, default point di 7 milioni di euro e  $\sigma_V$  pari al 10%), vista la DD pari a 3, potrà essere assegnata una PD dell'1 per cento.

### 12.3.10 Pregi e limiti del modello KMV

Il modello sviluppato da KMV ha conosciuto una forte diffusione ed è attualmente adottato da molte banche internazionali americane, europee e asiatiche. Questa diffusione si giustifica alla luce di tre principali vantaggi rispetto ad altri strumenti di stima della PD (e in particolare rispetto ai rating prodotti da agenzie quali Moody's, Standard & Poor's e Fitch).

**1.** Le EDF si adeguano rapidamente alle mutevoli condizioni economico-finanziarie delle imprese valutate. L'evidenza empirica ha infatti mostrato come, a seguito di un peggioramento del merito creditizio delle imprese, le EDF di KMV subiscano a rapidi incrementi, diversamente dai rating assegnati dalle agenzie, che tendono a

<sup>26</sup> La tabella, tratta da Basel Committee on Banking Supervision (2000), ha valore meramente esemplificativo.

essere modificati con significativo ritardo<sup>27</sup>. Questo vantaggio è principalmente dovuto al fatto che le EDF si fondono su dati di mercato ( $E_0$  e  $\sigma_E$ ), reattivi e fortemente forward looking.

**2.** Le EDF non subiscono variazioni significative al variare del ciclo economico, diversamente da quanto accade ai tassi di insolvenza empirici associati alle classi di rating delle agenzie. In generale, questi ultimi tendono ad aumentare nelle fasi recessive, mentre il contrario accade nelle fasi di espansione. Ciò è dovuto al fatto che l'assegnazione dei debitori alle classi di rating da parte delle agenzie è in qualche misura «rigida» al variare del ciclo, in parte perché le agenzie modificano le proprie valutazioni con ritardo, in parte perché esse adottano un approccio, detto *through the cycle*<sup>28</sup>, basato su valutazioni medie di lungo periodo dell'affidabilità dei debitori e non su una stima puntuale della PD a breve termine. Se la composizione delle classi di rating resta stabile, quando lo stato di salute delle stesse peggiora (migliora) succede che i tassi di default nelle singole classi aumentano (diminuiscono). Al contrario, le EDF relative alle singole classi di merito di KMV (basate sui valori della DD) non cambiano nelle diverse fasi del ciclo. Ciò è dovuto al fatto che, in una recessione, il peggioramento del merito creditizio di un'impresa si traduce in un'immediata diminuzione della sua DD e nel conseguente spostamento della stessa in una classe di DD peggiore (secondo una logica di valutazione che è detta *point in time*). Ne consegue che le caratteristiche di rischio (e i tassi empirici di default) di una certa classe di DD restano invariate, perché le imprese il cui merito creditizio è peggiorato (migliorato) sono «migrate» verso classi peggiori (migliori). Questa logica di attribuzione del rating del modello KMV fa sì che le variazioni di rating («migrazioni») siano più frequenti che per le agenzie tradizionali. Questa differenza può essere colta confrontando le matrici di transizione a un anno di Standard & Poor's e di KMV, riportate nelle Tab. 12.9 e Tab. 12.10: tali matrici riportano le frequenze con cui le imprese appartenenti a una data classe a inizio anno (righe) «migrano» verso altre classi nel corso dell'anno oppure (cfr. i valori sulla diagonale) rimangono nella classe di partenza. Si nota chiaramente che i valori sulla diagonale sono in media molto maggiori per Standard & Poor's: la probabilità di migrare verso altre classi di rating è dunque molto maggiore nel sistema di KMV.

**3.** Mentre tutte le imprese assegnate da un'agenzia a una certa classe di rating dividono la stessa stima della PD (basata sul tasso di insolvenza storico di quella classe<sup>29</sup>), il modello KMV consente di assegnare a ogni impresa un valore di EDF specifico, ottenuto attraverso la relazione che lega le EDF alle DD (cfr. ancora la Fig. 12.7). Si tratta di un pregio potenzialmente rilevante, in quanto le analisi

<sup>27</sup> In generale, le variazioni delle EDF tendono ad anticipare di circa un anno i downgrading dei rating da parte delle agenzie.

<sup>28</sup> Cfr. Capitolo 14.

<sup>29</sup> Cfr. ancora il Capitolo 14.

Tabella 12.9 Matrice di transizione a un anno – Standard &amp; Poor's

	Rating alla fine dell'anno (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
Rating iniziale	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0,00	0,00	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,30	1,17	1,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,20
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,79

Fonte: Standard &amp; Poor's

Tabella 12.10 Matrice di transizione a un anno – KMV<sup>30</sup>

	Rating alla fine dell'anno (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
Rating iniziale	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	66,26	22,22	7,37	2,45	0,86	0,67	0,14	0,02
AA	21,66	43,04	25,83	6,56	1,99	0,68	0,20	0,04
A	2,76	20,34	44,19	22,94	7,42	1,97	0,28	0,10
BBB	0,30	2,80	22,63	42,54	23,52	6,95	1,00	0,26
BB	0,08	0,24	3,69	22,93	44,41	24,53	3,41	0,71
B	0,01	0,05	0,39	3,48	20,47	53,00	20,58	2,01
CCC	0,00	0,01	0,09	0,26	1,79	17,77	69,94	10,13

Fonte: Crouhy, Galai e Mark (2000)

empiriche hanno dimostrato che, all'interno di una certa classe di rating tradizionale (per esempio, AA), esiste una significativa differenza in termini di PD tra le imprese migliori e quelle peggiori. Le stesse agenzie di rating riconoscono tale differenza nel momento in cui aggiungono ai loro rating degli ulteriori qualificatori (per esempio, AA+, AA e AA-) per distinguere tra diverse gradazioni (notch) all'interno della stessa classe.

<sup>30</sup> Le «classi di rating» riportate nella Tab. 12.10 corrispondono a intervalli discreti di EDF, scelti in maniera simile alle classi di rating di Standard & Poor's per facilitare il confronto con la Tab. 12.9.

A fronte di tali vantaggi, questi modelli presentano tuttavia due principali limiti.

1. Non possono essere utilizzati per la stima della probabilità di insolvenza delle imprese non quotate, per cui non sono disponibili il valore di mercato e la volatilità del capitale azionario. Si tratta di un problema particolarmente rilevante per una banca che affida imprese prevalentemente di piccole e medie dimensioni, che non hanno accesso al mercato dei capitali. Negli anni, KMV ha cercato di risolvere il problema in vari modi. Una prima soluzione («private firm model») si basava sull'utilizzo dei dati di mercato di imprese quotate *simili* (per esempio, per settore produttivo, livello di leva finanziaria, dimensioni) all'impresa non quodata che si desidera valutare; l'ipotesi sottostante era che i rendimenti dell'attivo di quest'ultima impresa – ancorché non osservabili – fossero fortemente correlati con quelli del suo peer group di imprese quotate<sup>31</sup>. Una seconda soluzione («RiskCalc»), adottata dopo la confluenza della società KMV nel gruppo Moody's, prevede invece che si proceda al calcolo di uno score basato principalmente su dati di bilancio (non dissimile da quelli presentati nel Capitolo 11) e che tra le variabili indipendenti che determinano tale score si inserisca la distance to default media di un peer-group di imprese quotate operanti nello stesso settore di quella analizzata. L'utilizzo della DD media di settore, accanto a indicatori backward looking come gli indici economico-finanziari tratti dal bilancio, consente di rendere le previsioni del modello maggiormente reattive e forward looking, recependo il «sentiment» del mercato dei capitali rispetto alla prevedibile evoluzione futura del settore a cui appartiene l'impresa oggetto di valutazione.
2. Il modello KMV, come tutti i modelli basati sull'approccio contingent claim, si fonda sull'ipotesi di efficienza dei mercati azionari. Il prezzo di mercato dei titoli azionari e la volatilità del loro rendimento vengono infatti utilizzati come input per la stima del valore di mercato e della volatilità dell'attivo. È evidente come, in presenza di mercati inefficienti, poco liquidi e in generale incapaci di riflettere adeguatamente tutte le informazioni disponibili, simili input divengano scarsamente affidabili. In generale, in presenza di mercati azionari poco efficienti, il prezzo e la volatilità delle azioni tendono a essere particolarmente volatili: ne segue che anche le stime di PD ottenute partendo da tali dati tendono a essere instabili. Vi è dunque il rischio di un'elevata variabilità dei giudizi assegnati alle imprese.

<sup>31</sup> Per stimare le due incognite a loro volta necessarie per la stima della DD – il valore di mercato dell'attivo e la volatilità dell'attivo – il private firm model utilizzava i dati di società quotate comparibili. Più in particolare, il valore di mercato dell'attivo veniva stimato sulla base dell'EBITDA (utili operativi al lordo di imposte, svalutazioni e ammortamenti), ipotizzando che il valore di mercato dell'attivo fosse pari al valore attuale di tutti i flussi di EBITDA attesi per il futuro; la volatilità dell'attivo, invece, veniva stimata in base alla dimensione (totale attivo contabile) dell'impresa, ipotizzando che a dimensioni maggiori corrisponda un mix di attivi più diversificato, dunque di valore più stabile nel tempo.

**Esercizi**

1. La seguente tabella riporta i rendimenti (composti continui) sulle obbligazioni di una società con rating A e sui titoli di Stato (tasso risk-free), le une e gli altri con vita residua di uno o due anni. Calcolate i tassi di perdita attesa impliciti per le obbligazioni rischiose e mettete in evidenza le principali ipotesi sottese all'approccio basato sugli spread obbligazionari.

	Scadenza	1 anno	2 anni
Titoli di Stato (risk-free)	4,50%	4,70%	
Obbligazioni societarie con rating A	4,75%	5,00%	



2. La società Alfa paga – sulle sue obbligazioni zero-coupon a un anno – uno spread del 2 per cento sul rendimento dei titoli di Stato con identica struttura e scadenza. Sulle sue obbligazioni zero-coupon a due anni, il differenziale rispetto ai titoli di Stato con identica scadenza è il 2,5 per cento. Sapendo che gli investitori si attendono, in caso di default di Alfa, un tasso di recupero pari a un terzo del valore nominale a scadenza, calcolate la probabilità di default (neutrale al rischio) che il mercato sta implicitamente assegnando ad Alfa, per il solo secondo anno.
3. Il modello di Merton dimostra che un prestito a una società rischiosa corrisponde a un portafoglio composto da un prestito privo di rischio e da...
- a) ... una posizione lunga su una call;
  - b) ... una posizione corta su una put;
  - c) ... una posizione lunga su una put;
  - d) ... una posizione corta su una call.
4. Una società, che dispone di attivi del valore di 100 milioni di euro, con una volatilità del 15 per cento, sta sostituendo tutti i suoi debiti con un unico, grande prestito del valore nominale a scadenza di 85 milioni di euro e una durata di due anni. I tassi privi di rischio sono, attualmente, al 6 per cento (composti continuamente). Usando il modello di Merton, controllate se il tasso «equo» da applicare al prestito dovrebbe essere maggiore del 6,5 per cento. Inoltre, immaginate che la società stia emettendo 20 milioni di euro di nuovo capitale, che verrà investito in maniera tale da lasciare invariata la volatilità dell'attivo. Pensate che, in conseguenza di questo nuovo capitale, il tasso «equo» sul prestito dovrebbe scendere? Pensate che possa scendere al di sotto del 6,1 per cento?
5. Quale, tra le seguenti informazioni, non è necessaria per stimare la EDF (frequenza di default attesa) di una società quotata utilizzando il modello Moody's KMV?



- a) La volatilità dei rendimenti azionari.
  - b) Il valore di mercato degli attivi societari.
  - c) Il rating della società.
  - d) Il valore contabile del debito della società.
6. Nel modello Moody's KMV, la «distance to default» è espressa...
- a) ... nella stessa unità di misura degli attivi aziendali;
  - b) ... come numero puro;
  - c) ... nella stessa unità di misura della volatilità degli attivi aziendali;
  - d) ... nella stessa unità di misura del logaritmo degli attivi aziendali.

**Appendice 12A La determinazione del premio per il rischio**

Nel § 12.2 di questo capitolo abbiamo ipotizzato di conoscere lo spread su una certa obbligazione e di essere interessati a ricavare la PD dell'emittente. In realtà, equazioni come la [12.7] possono essere utilizzate anche in maniera diversa, e cioè per determinare lo spread  $d$  che una banca dovrebbe chiedere a un'impresa, della quale conosce la PD e il tasso di recupero atteso. Si ricava infatti agevolmente che:

$$d = -\ln [1 - p (1 - R)] = -\ln (1 - PD \cdot LGD) \quad [12A.1]$$

Se, per esempio, la PD è pari all'1,5 per cento e il tasso di recupero  $R$  è pari allo 0 per cento (LGD del 100 per cento), si ottiene:

$$d = -\ln [1 - 1,5\% \cdot 100\%] \approx 1,51\%$$

Se invece la banca riuscisse a ottenere garanzie, tali da ridurre al 40 per cento la LGD attesa, lo spread si ridurrebbe a

$$d = -\ln [1 - 1,5\% \cdot 40\%] \approx 0,60\%$$

La [12A.1] utilizza (secondo la convenzione seguita in tutto il capitolo) lo spread tra tassi *composti continui*; tuttavia, i tassi sui prestiti bancari vengono spesso fissati in termini di tassi semplici, o composti annui. Può dunque essere utile riscrivere la [12.7] utilizzando tassi semplici o composti annui (identificati dal pedice «s»):

$$1 + i_s = [1 - p (1 - R)] (1 + i_s^*) = [1 - p (1 - R)] (1 + i_s + d_s) \quad [12A.2]$$

e ricavare lo spread (tra tassi semplici o composti annui) come:

$$d_s = \frac{1 + i_s}{1 - p (1 - R)} - 1 - i_s = \frac{p (1 - R) (1 + i_s)}{1 - p (1 - R)} = \frac{PD \cdot LGD}{1 - PD \cdot LGD} (1 + i_s) \quad [12A.3]$$

Così, se  $PD = 1,5\%$ ,  $LGD = 40\%$  e  $i_s = 6\%$ , otterremo che lo spread necessario per ottenere il tasso (semplice o composto annuo) da praticare al debitore è:

$$d_s = \frac{PD \cdot LGD}{1 - PD \cdot LGD} (1 + i_s) = \frac{1,5\% \cdot 40\%}{1 - 1,5\% \cdot 40\%} (1 + 6\%) \approx 0,64\%$$

In pratica, dunque, il tasso sul prestito rischioso ( $i_s^* = i_s + d_s$ ) sarà pari al 6,64 per cento.

Si noti come lo spread tra tassi semplici o composti annui sia:

- diverso, a parità di PD e LGD, da quello tra tassi composti continuamente (0,60 per cento);
- funzione non solo di PD e LGD del debitore, ma anche del tasso privo di rischio: si verifica infatti facilmente che, se  $i_s$  fosse pari all'8 per cento anziché al 6 per cento, la [12A.3] condurrebbe a uno spread pari allo 0,65 per cento.

## Appendice 12B Probabilità di insolvenza reali e *risk-neutral*

La probabilità di insolvenza di un'impresa può essere calcolata, seguendo un modello strutturale à la Merton, considerando la probabilità che il valore dell'attivo alla scadenza del debito ( $V_T$ ) risulti inferiore al valore di rimborso del debito stesso ( $F$ ). Come indicato dalla [12.21], il modello di Merton ipotizza che il valore delle attività segua un moto geometrico browniano. Dalla [12.21] è possibile ricavare l'espressione per il valore dell'attivo a scadenza,  $V_T$ , ottenendo:

$$V_T = V_0 \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right) T + \sigma_V \sqrt{T} \cdot Z} \quad [12B.1]$$

Come illustrato nel corso del capitolo, la probabilità di insolvenza è data da:

$$p = pr(V_T < F) \quad [12B.2]$$

Sostituendo la [12B.1] nella [12B.2] otteniamo:

$$\begin{aligned} p^* &= pr\left(V_0 \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right) T + \sigma_V \sqrt{T} \cdot Z} < F\right) = pr\left[\left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right) T + \sigma_V \sqrt{T} \cdot Z < \ln\left(\frac{F}{V_0}\right)\right] = \\ &= pr\left[Z < \frac{\ln\left(\frac{F}{V_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma_V^2}{2}\right) T}{\sigma_V \sqrt{T}}\right] = pr\left[Z < \frac{\ln\left(\frac{Fe^{-\mu T}}{V_0}\right) + \frac{\sigma_V^2}{2} T}{\sigma_V \sqrt{T}}\right] \end{aligned} \quad [12B.3]$$

Considerato che  $Z$  è una normale standard, la [12B.3] potrà essere riscritta come:

$$p^* = N\left(\frac{\ln\left(\frac{Fe^{-\mu T}}{V_0}\right) + \frac{\sigma_V^2}{2} T}{\sigma_V \sqrt{T}}\right) = N(-d_2^*) \quad [12B.4]$$

Si noti che la [12B.4] è simile alla [12.30] utilizzata nel capitolo per il calcolo della PD, ma con una significativa differenza. Al posto del consueto termine  $d_2$  (il cui significato è stato indicato nella 18b), compare una versione modificata, che abbiamo indicato come  $d_2^*$ , calcolata utilizzando il vero tasso di rendimento  $\mu$ , anziché il tasso risk-free  $i$ .

La [12.30] rappresenta dunque una semplificazione della vera espressione della PD (la [12B.4]), ottenuta sostituendo il vero tasso di rendimento dell'attivo con il tasso privo di rischio. La [12.30] genera dunque una probabilità di insolvenza risk-neutral, valida solo in un mondo neutrale al rischio in cui  $\mu = i$ , cioè dove chi investe negli attivi di un'impresa rischiosa si accontenta di un tasso di rendimento atteso  $i$  in linea con quello degli investimenti privi di rischio. Nel mondo reale gli investitori chiederanno invece un  $\mu > i$ , e dunque la vera PD, data dalla [B.4], sarà diversa da quella indicata dalla [12.30]. In particolare, avremo che  $d_2^* < d_2$ , quindi  $N(-d_2^*) > N(-d_2)$  e  $p > p^*$ . Come i modelli basati sugli spread obbligazionari (visti nel § 12.2 di questo capitolo), anche il modello di Merton genera quindi probabilità *risk-neutral*, distorte verso l'alto rispetto a quelle reali.

## Appendice 12C Formule di Black e Scholes

In questa Appendice non proponiamo una derivazione delle formule di Black e Scholes per il calcolo del valore delle opzioni europee, ma ci limitiamo a richiamarle, per comodità del lettore, rinviando per approfondimenti a Hull (2006).

In base al modello di Black e Scholes (1973), il valore di una call ( $C$ ) e quello di una put ( $P$ ) europea sono dati, rispettivamente, da:

$$C = S \cdot N(d_1) - Xe^{-iT} N(d_2) \quad [12C.1]$$

$$P = Xe^{-iT} N(-d_2) - S \cdot N(-d_1) \quad [12C.2]$$

dove:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (i + \sigma^2/2) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad [12C.3]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T} \quad [12C.4]$$

ed inoltre  $S$ ,  $X$ ,  $T$ ,  $i$  e  $\sigma$  indicano rispettivamente il prezzo di mercato dell'attività sottostante, il prezzo di esercizio dell'opzione, la scadenza dell'opzione, il tasso di interesse privo di rischio e la deviazione standard del rendimento dell'attività sottostante.

## 13 Il rischio di recupero e la loss given default

### 13.1 Introduzione

Il tasso di perdita in caso di default (loss given default, LGD), è il tasso di perdita<sup>1</sup> sperimentato da una banca o da un investitore, su un'esposizione creditizia, se il debitore risulta insolvente. È dato dal complemento a uno del tasso di recupero (recovery rate, RR) e può assumere qualsiasi valore tra 0 per cento e 100 per cento:

$$LGD = 1 - RR \quad [13.1]$$

La LGD non è mai nota quando un prestito viene emesso, e nemmeno nel momento in cui il prestito diventa insolvente, quanto meno se non esiste un mercato secondario per l'esposizione in default. Se, viceversa, quest'ultima può essere scambiata su un mercato secondario liquido, allora la LGD e il RR possono essere stimati in base al prezzo di mercato all'indomani del default. In termini generali, comunque, la LGD può essere stimata con certezza soltanto quando l'intero processo di recupero («workout») è terminato.

Nei tardi anni '90, un'indagine sui sistemi di rating delle maggiori banche mondiali, svolta da una task force nominata dal Comitato di Basilea, metteva in luce che solo alcune di esse stimavano separatamente la LGD delle esposizioni creditizie e la loro PD. Molte, in effetti, erano solite stimare direttamente il prodotto di queste due quantità, ovvero il tasso di perdita attesa (expected loss rate, ELR). Inoltre, le maggiori agenzie di rating come Moody's, Standard & Poor's e Fitchratings non

<sup>1</sup> In teoria, bisognerebbe indicare il tasso di perdita in caso di default come LGDR (loss given default rate) e riservare il termine LGD per la perdita assoluta (per es. in euro o in dollari) in caso di default. Tuttavia, il termine LGD viene utilizzato dalla maggior parte delle banche (e dal nuovo accordo di Basilea sul capitale, cfr. Capitolo 21) per indicare il tasso di perdita, mentre la perdita assoluta è solitamente indicata con il prodotto LGD · EAD (exposure at default, cfr. l'introduzione a questa Parte terza del volume).

producevano, di norma, valutazioni separate per la PD e la LGD delle obbligazioni societarie<sup>2</sup>.

Nel 1999, la task force invitava le banche ad adottare modelli di stima separati per le PD e i tassi di recupero, dato che questi due parametri dipendono in larga parte da fattori di rischio e meccanismi distinti. L'invito è stato ripetuto nel 2004, nel nuovo accordo di Basilea sul capitale minimo regolamentare (cfr. Capitolo 21), che ha richiesto alle banche di adottare sistemi di misura *ad hoc* per la LGD.

Negli ultimi anni, tale suggerimento è stato accolto dalla maggior parte delle banche; per questo motivo tratteremo separatamente, in questo capitolo, le tecniche utilizzate per la stima della LGD e del tasso di recupero<sup>3</sup>.

Per prima cosa, mostreremo quali fattori influenzano il tasso di recupero atteso su un'esposizione creditizia, e quali criteri possono essere utilizzati per la sua stima; a tal fine, richiameremo le principali metodologie disponibili (soffermandoci in particolare sul *workout approach*, che rappresenta la soluzione più diffusa tra le banche) e i risultati di alcuni studi empirici condotti negli anni passati. Affronteremo quindi il significato e le caratteristiche del rischio di recupero propriamente detto, ovvero del rischio che il tasso di recupero finale, rilevato *ex post*, differisca da quanto atteso *ex ante*. Il paragrafo conclusivo sarà dedicato al legame tra rischio di default (PD) e di recupero (LGD).

## 13.2 Le determinanti del tasso di recupero

I fattori che influenzano la LGD possono essere raggruppati in quattro principali categorie: le caratteristiche dell'esposizione, quelle del debitore, quelle della banca che gestisce il processo di recupero e infine i fattori esterni.

**1. Le caratteristiche dell'esposizione** includono: la presenza di eventuali garanzie reali (collateral), costituite da attività finanziarie o da altri beni (impianti, beni immobili, scorte ecc.) e il grado di efficacia di tali garanzie (ovvero la facilità/prontezza con cui esse possono essere escusse e liquidate); il grado di priorità dell'esposizione, che può essere senior oppure subordinata al preventivo sòddisfacimento di altri crediti; eventuali garanzie personali fornite da terzi (banche, società capogruppo, entità del settore pubblico).

<sup>2</sup> Solitamente, le agenzie di rating assegnano «rating di emissione» (issue rating) alle obbligazioni. Tali rating contengono una valutazione tanto della LGD dell'esposizione, quanto della PD dell'emittente. Sovente, essi coincidono con il rating dell'emittente (issuer rating, che descrive la sola PD), a meno che l'obbligazione non sia subordinata; in tal caso, il rating di emissione è più basso del rating di emittente di un «notch» quando quest'ultimo è di tipo investment grade (cioè compreso tra AAA e BBB–, utilizzando come esempio la scala di Standard & Poor's e Fitch ratings), oppure di due notch, quando l'emittente ha ricevuto un rating di tipo speculative grade (compreso tra BB+ e CCC).

<sup>3</sup> Cfr. per una presentazione più estesa Altman, Resti e Sironi, *Recovery Risk – The Next Challenge in Credit Risk Management*, 2005.

**Tabella 13.1 Principali determinanti del tasso di recupero**

Tipologia di fattori	Fattore	Impatto su...
Caratteristiche dell'esposizione	Garanzie reali Grado di subordinazione Garanzie personali	Ammontare recuperato
Caratteristiche del debitore	Settore Paese Ratios di bilancio	Possibilità di trovare un compratore per l'impresa insolvente Durata del processo di recupero Ammontare recuperato
Fattori interni alla banca	Velocità ed efficienza del processo di recupero Cessione di crediti in contenzioso e utilizzo di procedure stragiudiziali	Importo recuperato e durata del processo
Fattori esterni di tipo macroeconomico	Stato del ciclo economico Livello dei tassi d'interesse	Ammontare recuperato Valore attuale dei recuperi

2. Le caratteristiche del debitore includono: il settore in cui la società opera, che può influenzare il processo di liquidazione, cioè la facilità con cui gli attivi aziendali possono essere venduti e trasformati in risorse finanziarie per i creditori<sup>4</sup>; il Paese in cui opera il debitore, che può influenzare velocità ed efficacia della procedura fallimentare; alcuni indici finanziari, come la leva (e più precisamente il rapporto tra attivo e passività di terzi, che mostra quanti euro di attivi sono riportati in bilancio per ogni euro di debito da ripagare); il rapporto tra EBITDA (utile operativo al lordo di tasse, svalutazioni e ammortamenti) e fatturato (che indica se la società insolvente è ancora in grado di generare un volume apprezzabile di flussi di cassa).
3. Le caratteristiche della banca comprendono: i livelli di efficienza dell'ufficio che si occupa del processo di recupero (workout department); la frequenza con cui si utilizzano accordi stragiudiziali con i debitori; la tendenza a cedere a terzi «pacchetti» di crediti in contenzioso<sup>5</sup>.
4. I fattori esterni includono lo stato del ciclo economico (se l'economia è in recessione, il valore al quale gli attivi aziendali possono essere liquidati sarà probabil-

<sup>4</sup> Per un'analisi empirica del ruolo dei settori nel determinare i tassi di recupero, cfr. Altman e Kishore (1996), Acharya, Bharath e Srinivasan (2007), Hu e Perraudin (2002).

<sup>5</sup> La vendita di crediti in contenzioso e gli accordi stragiudiziali, pur riducendo il valore nominale dei recuperi (rispetto a quanto si potrebbe ottenere attraverso una formale procedura di liquidazione), riducono anche, e in misura significativa, la durata del processo di recupero. L'effetto finanziario di questo minor tempo di recupero compensa spesso il minor importo nominale del recupero (cfr. il § 13.4).

mente più ridotto) e il livello dei tassi di interesse (tassi elevati riducono, a parità di altre condizioni, il valore attuale dei possibili recuperi futuri). Il ciclo economico, peraltro, oltre a influenzare il valore di liquidazione degli attivi e dunque la LGD, esercita probabilmente un impatto anche sulla probabilità di default (PD) dei debitori; ciò può determinare una correlazione tra rischio di recupero e rischio di default, su cui ritorneremo nell'ultima parte di questo capitolo.

La Tab. 13.1 sintetizza le considerazioni ora svolte. Le prime due colonne indicano le diverse tipologie di fattori che influenzano la LGD, la terza riporta le componenti della LGD su cui si esercita tale influenza. Ulteriori dettagli sull'impatto di alcuni di questi fattori (come la seniority o il settore del prestitore) saranno forniti nel § 13.4.

### 13.3 La stima del tasso di recupero

#### 13.3.1 Market LGD e workout LGD

Esistono due approcci principali per calcolare i tassi di recupero sulle esposizioni in default<sup>6</sup>:

- il primo (market LGD) utilizza i prezzi delle esposizioni in default come stima del tasso di recupero. In pratica, se un'obbligazione emessa da una società insolvente («distressed bond») viene scambiata a 30 centesimi per ogni euro di capitale nominale, se ne può dedurre che il mercato sta stimando un tasso di recupero attorno al 30 per cento (dunque, una LGD del 70 per cento). Questo approccio può essere utilizzato solo per le esposizioni (per la verità abbastanza rare nel caso del portafoglio prestiti di una banca tradizionale) dotate di un mercato secondario. Una variante di questo approccio stima il tasso di recupero in base al valore di mercato dei nuovi strumenti finanziari (di solito azioni, o obbligazioni a lungo termine) offerti agli investitori in sostituzione dei loro crediti, divenuti inesigibili. Tali strumenti finanziari vengono ovviamente emessi (ed è possibile conoscerne il prezzo di mercato) solo quando il processo di ristrutturazione aziendale si è concluso e la società insolvente «riemerge» dal default; il loro valore deve pertanto essere scontato a ritroso nel tempo fino all'istante in cui si è verificata l'insolvenza. Questa variante della market LGD è detta *emergence LGD*. Un'altra variante di calcolo della market LGD utilizza, come fonte di informazione, gli spread pagati da obbligazioni non in default; come si è visto nel Capitolo 12, in effetti, gli spread sui corporate bond dipendono anche dal tasso di recupero atteso. Se ipotizziamo che la banca disponga di una stima della PD del debitore, allora è possibile ricavare la LGD implicita negli spread di mercato (si parla, in tal caso, di *implied market LGD*);
- il secondo approccio (workout LGD) muove dalla constatazione che i dati di mercato, pur rappresentando una fonte d'informazione obiettiva e aggiornata per

<sup>6</sup> Cfr. Schuermann (2005).

la stima della LGD, sono disponibili solo per le obbligazioni emesse da società di grandi dimensioni. La maggior parte dei tradizionali prestiti bancari, invece, non è quotata; non è dunque possibile osservare alcun prezzo di mercato. È pertanto necessaria una metodologia diversa, basata sulla misura degli effettivi flussi di recupero conseguiti nei mesi (o anni) successivi al default. Questo approccio richiede la produzione di un archivio di tutti i default passati che, per ognuno di essi, tenga traccia degli ammontari recuperati, dei tempi di recupero e delle procedure seguite (per esempio, l'escusione di garanzie o la cessione di crediti). Tali dati verranno quindi segmentati in base al tipo di esposizione, di debitore, di procedura seguita ecc., in modo da identificare un numero finito di «famiglie» (cluster) con caratteristiche simili e LGD analoghe. Tali cluster verranno poi usati come guida per stimare la LGD attesa sui default futuri.

Allorché si confrontano i risultati ottenuti con l'approccio della market LGD e della workout LGD, è necessario ricordare che la definizione di default, così come la durata e l'efficacia del processo di recupero, possono essere molto diversi per le obbligazioni e i prestiti bancari. I valori stimati con uno dei due approcci devono dunque essere valutati con cautela, prima di poter essere confronti con stime basate sull'altro.

Inoltre, due banche potrebbero giungere a stime di LGD differenti anche se entrambe utilizzassero il workout approach. Nel Capitolo 11 abbiamo osservato che una definizione di default più ampia o più ristretta può incidere sulle PD stimate; lo stesso fenomeno si verifica per i tassi di recupero. Una definizione di insolvenza più ampia (che includa, per esempio, qualunque ritardo sui pagamenti contrattuali) conduce non soltanto a tassi di default più elevati (e dunque a PD più alte), ma anche a tassi di recupero più consistenti, visto che parte dei debitori classificati come «insolventi» saranno in uno stato di difficoltà più lieve di quanto accadrebbe se la banca utilizzasse una definizione di default più stringente (comprendiva, per esempio, delle sole procedure concorsuali) e potranno quindi rimborsare una porzione più significativa dell'esposizione terminata in default. Viceversa, una definizione più ristretta di default, che includa solo le controparti in stato di marcata difficoltà finanziaria, implicherà necessariamente tassi di recupero più modesti e dunque LGD più elevate.

È dunque opportuno che le banche adottino una definizione di default omogenea, così da poter mettere a fattor comune e confrontare le loro stime; inoltre, la definizione di default dev'essere la medesima sia nella stima della PD che in quella della LGD, perché diversamente le stime del rischio di credito complessivo fronteggiato da una banca risulterebbero incoerenti e distorte.

#### 13.3.2 Il calcolo della workout LGD

La LGD rinveniente da una procedura di recupero (workout) dev'essere analizzata dal punto di vista economico, e non sulla base di una prospettiva meramente contabile. In altri termini, è necessario tenere conto di tutti i fattori che concorrono a ridurre il valore finale della porzione di credito recuperata. Si pensi all'effetto finanziario del tempo che trascorre tra il default e i recuperi; oppure alle varie voci di

costo, dirette e indirette, che una banca deve sostenere per recuperare un'esposizione in contenzioso.

Tenuto conto di simili fattori, il tasso di recupero in caso di default e la relativa LGD vanno calcolati secondo formule come la seguente:

$$RR = \frac{RNS}{EAD} = \frac{RL}{EAD} \cdot \frac{RL - CA}{RL} \cdot (1 + i)^{-T} \quad [13.2]$$

dove:

$RR$  è il tasso di recupero effettivo su un'esposizione insolvente;

$RNS$  è il recupero netto scontato, cioè il valore attuale, al momento del default, degli importi recuperati, al netto di tutti i relativi costi;

$EAD$  è l'esposizione al momento del default;

$RL$  è il recupero lordo, cioè il valore nominale degli importi recuperati, così come emerge dalle scritture contabili della banca;

$CA$  sono i costi amministrativi connessi con la procedura di recupero;

$i$  è un tasso di sconto;

$T$  è la durata del processo di recupero.

Si supponga, per esempio, che su un'esposizione al default di 100 milioni di euro vengano recuperati 60 milioni di euro dopo sei mesi. Si ipotizzi inoltre di avere sostenuto costi per un milione di euro legati alla procedura di recupero, e che un tasso di sconto del 10 per cento rappresenti un valore ragionevole. Si giungerebbe a un tasso di recupero pari a:

$$RR = \frac{60}{100} = \frac{60 - 1}{60} \cdot (1 + 10\%)^{-0,5} = 56,3\%$$

cioè a una LGD del 43,7 per cento.

Per poter applicare la [13.2] a esempi reali, leggermente più complessi, è necessaria qualche precisazione su alcune sue componenti.

In primo luogo, il valore nominale dei recuperi deve comprendere tutte le commissioni incassate dal debitore insolvente, inclusi gli interessi di mora. Tali commissioni (compresi gli interessi di mora contabilizzati dalla banca, ma non incassati) devono tuttavia essere aggiunte anche alla EAD originaria.

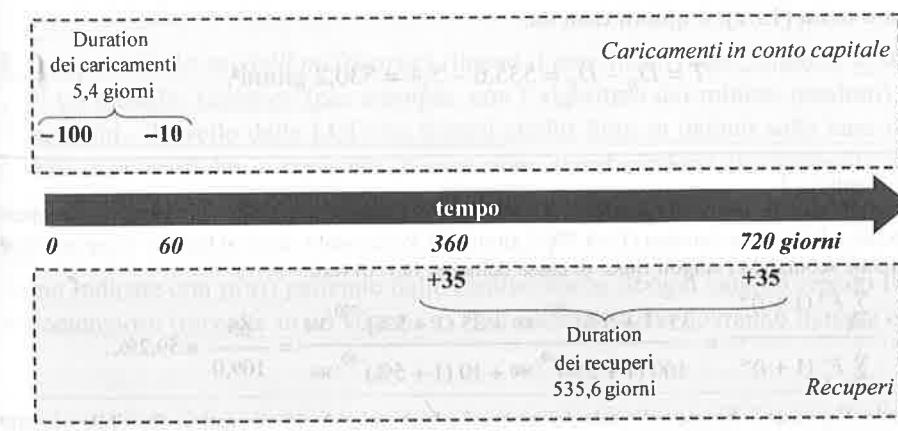
I costi amministrativi dovrebbero includere tutte le spese dirette e indirette sostenute dalla banca a fronte dei recuperi sull'esposizione insolvente (comprese le spese legali per professionisti esterni). Si noti che il fattore  $(RL - CA) / RL$  descrive l'incidenza unitaria dei costi amministrativi (costi per ogni euro recuperato) e può essere stimato analizzando i dati passati. In alternativa, la stima di tale fattore può basarsi sulle tariffe praticate alla banca dalle società esterne specializzate nel recupero dei crediti; più spesso, tuttavia, all'interno dei grandi gruppi bancari esiste una società specializzata (la cosiddetta «bad bank») che provvede al recupero dei crediti insolventi, ed è ai prezzi praticati da tale società che è opportuno fare riferimento.

Si noti infine che, se le commissioni richieste per la procedura di recupero sono espresse in percentuale dell'importo recuperato (cioè se  $CA = k \cdot RL$ ), allora il fattore  $(RL - CA) / RL$  diventa, semplicemente,  $(1 - k)$ .

Il tasso di sconto  $i$ , da utilizzare per il calcolo del valore attuale dei recuperi al momento del default, potrebbe in teoria essere basato su valori storici, cioè sui tassi medi di mercato osservati nel periodo compreso tra l'istante del default e la chiusura del processo di recupero. Tuttavia, ciò condurrebbe, evidentemente, a una stima backward looking, intrinsecamente incapace di dare conto delle condizioni di mercato correnti (e future). In effetti, una banca che stima il rischio di recupero sui prestiti che potrebbero diventare insolventi in futuro, non è interessata ai tassi passati, ma a quelli validi, sul mercato, all'indomani di un nuovo default. Visto che le PD implicano, solitamente, un orizzonte di rischio di un anno, le LGD stimate si riferiscono a default che potrebbero emergere un anno più tardi. Se simili considerazioni sono corrette, allora l'utilizzo di tassi d'interesse passati è irrazionale e ingiustificato. Viceversa, nel calcolo del valore attuale dei recuperi sui default che accadranno in futuro, appare corretto utilizzare, a mo' di stima dei futuri tassi a pronti, i tassi d'interesse forward a un anno. Per esempio, se la durata attesa del processo di recupero è di  $T$  anni, allora un tasso forward a  $T$  anni con decorrenza tra un anno ( $i_T$ ) rappresenterebbe una scelta ragionevole.

Proprio la durata,  $T$ , del processo di recupero, richiede qualche ulteriore precisione. Essa dovrebbe essere calcolata in senso finanziario, dando conto dell'esistenza di eventuali flussi di cassa intermedi. In effetti, i recuperi sulle esposizioni in default possono aver luogo in maniera graduale, con successivi incassi collocati in differenti istanti. Qualcosa di simile potrebbe accadere anche per la EAD, quando all'esposizione originaria fosse necessario aggiungere ulteriori aggiustamenti legati agli interessi di mora, all'arrivo di partite insolute o all'escissione di garanzie per-

**Figura 13.1 La durata finanziaria del processo di recupero in presenza di caricamenti e recuperi multipli**





sonali prestate dalla banca a favore del debitore insolvente. In tutti questi casi, la EAD totale, su cui si calcola il tasso di recupero, sarebbe la somma dell'EAD originaria e di tutti gli aggiustamenti successivi.

La Fig. 13.1 mostra un esempio di caricamenti e recuperi multipli. Il debitore è terminato originariamente in default per 100 euro, ma successivamente altri 10 euro sono stati addebitati sul suo conto; la banca è riuscita a recuperare 35 euro alla fine del primo anno, e altri 35 alla fine del secondo anno. Di conseguenza, 110 rappresenta la EAD totale, mentre 70 è il recupero lordo, non attualizzato (RL), secondo le evidenze contabili della banca. Anche se apparentemente il processo di workout ha richiesto due anni, un simile periodo sovrastimerebbe sensibilmente la durata finanziaria del recupero.

In particolare, visto che non tutti i caricamenti ( $F^-$ ) hanno avuto luogo all'inizio del periodo, il default non deve essere situato al tempo zero, ma a una data intermedia tra zero e 60 giorni. Usando un tasso d'interesse  $i$  del 5 per cento per tutte le scadenze, possiamo facilmente calcolare la duration di Macaulay<sup>7</sup> dei caricamenti ( $D_C$ ):

$$D_C = \frac{\sum_{t=0}^T t \cdot F_t^- (1+i)^{-t}}{\sum_{t=0}^T F_t^- (1+i)^{-t}} = \frac{0 \cdot 100 (1+5\%)^{-0/360} + 60 \cdot 10 (1+5\%)^{-10/360}}{100 (1+5\%)^{-0/360} + 10 (1+5\%)^{-10/360}} \approx 5,4 \text{ giorni}$$

Analogamente, la duration dei recuperi ( $D_R$ ) associata con il recupero lordo totale RL non sarà due giorni ma, semmai, una media ponderata delle scadenze associate con i due flussi di recupero ( $F^+$ ). Usando nuovamente la formula di Macaulay otteniamo:

$$D_R = \frac{\sum_{t=0}^T t \cdot F_t^+ (1+i)^{-t}}{\sum_{t=0}^T F_t^+ (1+i)^{-t}} = \frac{360 \cdot 35 (1+5\%)^{-360/360} + 720 \cdot 35 (1+5\%)^{-720/360}}{35 (1+5\%)^{-360/360} + 35 (1+5\%)^{-720/360}} \approx 535,6 \text{ giorni}$$

La durata finanziaria (duration) del processo di recupero, ovvero il valore T da utilizzare nella [13.2], è quindi data da:

$$T = D_R - D_C = 535,6 - 5,4 = 530,2 \text{ giorni}^8.$$

<sup>7</sup> Cfr. Capitolo 2.

<sup>8</sup> Si noti che il tasso di recupero basato su un'esposizione (EAD) di 110, un recupero lordo (RL) di 70 e una duration (T) di 530,2 giorni (58,3%) è molto simile al tasso di recupero che si otterrebbe scontando i singoli flussi di cassa della Fig. 13.1, ovvero:

$$RR = \frac{\sum_{t=0}^T F_t^+ (1+i)^{-t}}{\sum_{t=0}^T F_t^- (1+i)^{-t}} = \frac{35 (1+5\%)^{-360/360} + 35 (1+5\%)^{-720/360}}{100 (1+5\%)^{-0/360} + 10 (1+5\%)^{-60/360}} = \frac{65}{109,0} \approx 59,2\%.$$

Tuttavia, l'approccio basato sul totale dei recuperi e la duration è più compatto e flessibile, rispetto al calcolo dei singoli flussi di cassa attualizzati.

### 13.3.3 Dai dati passati alle stime di LGD

Si supponga di disporre di un database sulle esperienze di workout passate, simile a quello descritto nel paragrafo precedente. La distribuzione di frequenza empirica di questi valori del tasso di recupero deve ora essere descritta tramite alcuni indicatori sintetici, che consentano di stimare la LGD sui possibili default futuri.

In teoria, potremmo calcolare la media di tale distribuzione e usarla come una stima, grezza ma veloce, dei possibili tassi di recupero futuri. Tuttavia, di norma i risk manager non sono interessati ai valori medi, dato che solo le deviazioni dal valore atteso rappresentano un rischio in senso stretto; inoltre, nel caso dei RR e delle LGD, la media risulta un indicatore assai insoddisfacente, visto che la maggior parte dei valori tende ad addensarsi vicino a zero e a uno.

Ciò accade perché alcune esposizioni (come il leasing o i mutui su edilizia residenziale) tendono ad avere tassi di recupero elevati (prossimi al 100 per cento), mentre i recuperi risultano sostanzialmente nulli per altre (come gli scoperti in conto corrente non assistiti da garanzie, in particolare se il debitore insolvente era un nuovo cliente, ancora poco noto alla banca).

Tale situazione è rappresentata nella Fig. 13.2, basata sui dati reali di una banca europea. Come si nota, data la forma a «U» (cioè bimodale) della distribuzione di frequenza, la probabilità di osservare valori prossimi alla media è assai modesta.

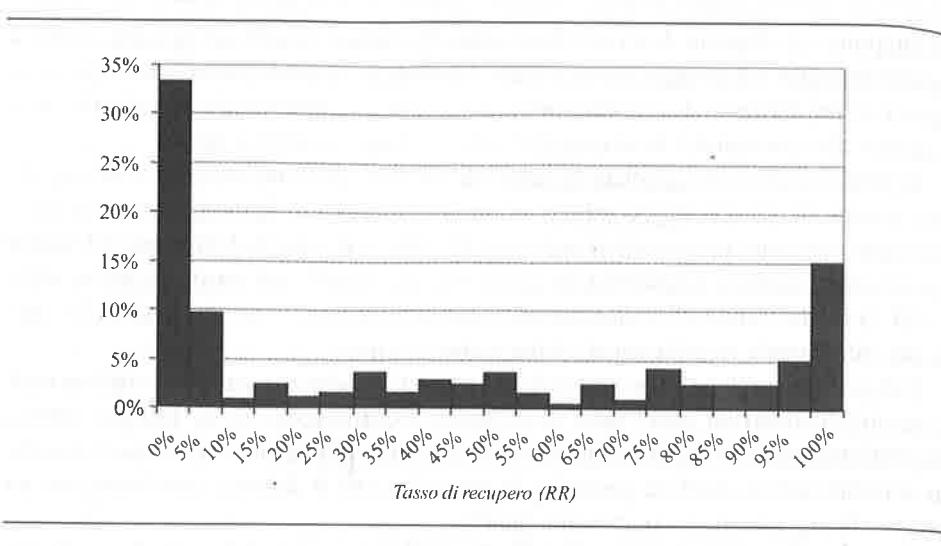
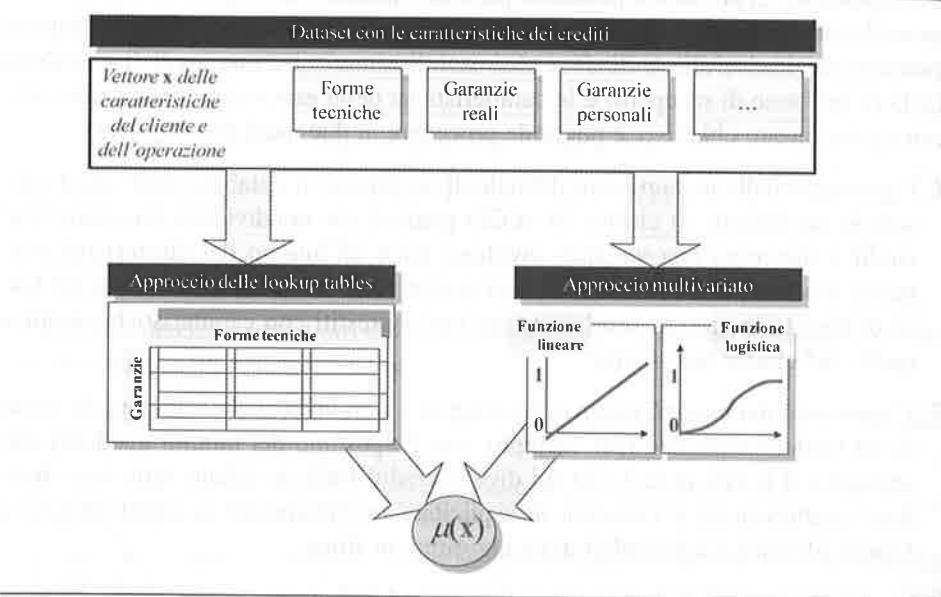
Un possibile approccio al problema prevede l'utilizzo, in luogo di una sola media generale, di medie condizionate relative a particolari combinazioni di forma tecnica, garanzie, debitori e altro<sup>9</sup>. Si deve cioè stabilire una relazione tra il livello della LGD (o del tasso di recupero) e le caratteristiche delle esposizioni considerate. Per conseguire questo obiettivo, è possibile procedere in due modi (cfr. Fig. 13.3):

1. l'approccio delle *lookup table* richiede di scomporre il database delle LGD passate in un insieme di cluster (o «LGD grade») che condividono caratteristiche simili e mostrano una varianza «within» (cioè all'interno del cluster) relativamente modesta; la LGD media di ogni cluster viene utilizzata come stima del tasso di perdita in caso di insolvenza per tutti i prestiti con caratteristiche simili a quelle del cluster analizzato;

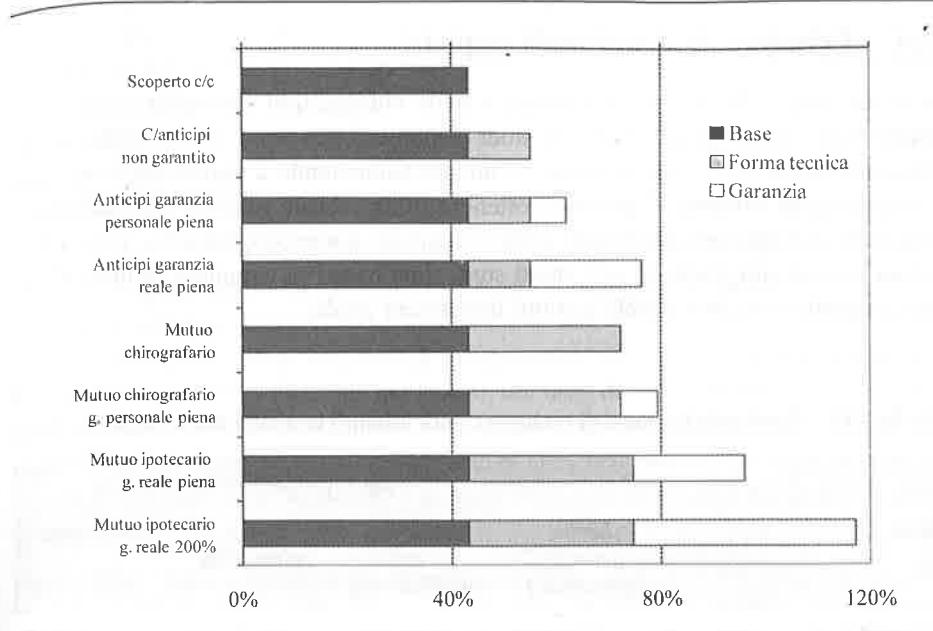
2. L'approccio dei *modelli multivariati* (lineari o non lineari) che comporta la stima di un modello statistico (per esempio, con l'algoritmo dei minimi quadrati) che «spieghi» il livello della LGD sui diversi crediti finiti in default sulla base delle loro caratteristiche, e consenta di esplicitare (verificandone la significatività) i legami rilevanti, traducendoli in un algoritmo di stima.

Entrambi gli approcci mirano a determinare una LGD media condizionata (che possiamo indicare con  $\mu(x)$ ) partendo dalle caratteristiche di ogni singolo credito finito in contenzioso (raccolte in un vettore  $x$ ). Tali caratteristiche dovranno dunque esse-

<sup>9</sup> Tra le variabili rilevanti è possibile includere anche l'anno in cui sono terminate in default le esposizioni, così da «catturare» l'effetto sulla LGD delle diverse fasi del ciclo macroeconomico.

**Figura 13.2 Distribuzione empirica dei recovery rate di una banca****Figura 13.3 Due possibili approcci alla stima della LGD**

re archiviate nel database delle esposizioni in default, insieme alle *workout* LGD calcolate sulla base della metodologia descritta nel § 12.3.2. Le medesime variabili dovranno essere disponibili nel database che descrive il portafoglio crediti corrente, così da poter associare a ogni prestito vivo la sua LGD stimata.

**Figura 13.4 Esempi di tassi di recupero medi condizionati per diverse forme tecniche e garanzie**

Il contenuto del vettore  $\mathbf{x}$  varia, ovviamente, da banca a banca. Esso dovrebbe includere, in linea di massima, la forma tecnica del credito (per esempio, scoperto di conto corrente, anticipo di effetti commerciali, mutui a lungo termine), il tipo di garanzie reali disponibili (strumenti finanziari, immobili, impianti o scorte) e il relativo tasso di copertura, la presenza di eventuali garanzie reali (per esempio, una fidejussione a favore dell'impresa insolvente emessa da parte della sua capogruppo, che potrebbe fare pressione per indurre il debitore in default a rimborsare il debito) e tutti gli altri fattori significativi (cfr. ancora la Tab. 13.1) nello spiegare le differenze tra i tassi di recupero passati.

Nell'approccio dei modelli multivariati,  $\mu(\mathbf{x})$  può essere espresso come una funzione lineare degli  $x_i$ ; in tal caso, gli effetti dei diversi fattori (per esempio, una certa forma tecnica e una certa garanzia in titoli di Stato) saranno additivi, e la LGD media condizionata sarà semplicemente la somma del valore non condizionato e di una serie di aggiustamenti (cfr. la Fig. 13.4 per un esempio); il contributo al tasso di recupero atteso delle diverse caratteristiche dell'esposizione sarà trasparente e facile da valutare. Tuttavia, visto che una funzione lineare può assumere qualunque valore tra  $-\infty$  e  $+\infty$ , la media condizionata potrebbe indicare un tasso di perdita superiore al 100 per cento, o addirittura una LGD negativa. Risultati di questo tipo, chiaramente contrari all'intuizione economica, possono essere evitati se per rappresentare il legame tra le caratteristiche del prestito e  $\mu(\mathbf{x})$  si utilizza una funzione non-lineare con

codominio limitato tra zero e uno (come la funzione logistica o la funzione di ripartizione normale standard<sup>10</sup>).

### 13.4 I risultati di alcuni studi empirici

Le analisi empiriche sui tassi di recupero delle obbligazioni societarie sono solitamente basate sulla market LGD. Gli studi disponibili non sono, per la verità, molto numerosi, anche se la loro frequenza è andata aumentando a partire dalla seconda metà degli anni Novanta. È possibile ottenere stime robuste soltanto partendo da un dataset di obbligazioni insolventi sufficientemente numeroso; tuttavia, visto che i default sono eventi piuttosto rari, molti studi sono basati su campioni limitati. Ciò è vero, in particolare, per le obbligazioni investment grade.

**Tabella 13.2 Confronto tra tassi di recupero medi ottenuti in alcuni studi empirici**

Studio	Tipologia di obbligazioni			
	Senior garantite (`secured'')	Senior non garantite (`unsecured'')	Senior subordinate	Subordinate
Fons (1994)	65%	48%	40%	30%
Altman e Kishore (1996)	58%	48%	34%	31%
Carty e Lieberman (1996)	57%	46%	n.d.	34%
Van de Castle e Keisman (1999)	66%	49%	37%	26%
Hu e Perraudin (2002)	53%	50%	38%	33%

La Tab. 13.2 riporta i risultati, in termini di tassi di recupero medi organizzati per seniority e per tipo di garanzie reali, ottenuti in cinque dei principali studi basati su campioni di obbligazioni in default. Tutti gli studi confermano che i tassi di recupero crescono in presenza di maggiori garanzie reali e diminuiscono al crescere del grado di subordinazione. È interessante notare che i tassi di recupero medi ottenuti nei diversi studi tendono a essere simili tra di loro.

Questa somiglianza farebbe pensare che la stima dei tassi di recupero su un'obbligazione in default sia relativamente semplice. In realtà, è necessario sottolineare due problemi. Il primo è che esiste un'elevata volatilità tra i dati delle singole obbligazioni sintetizzati in un certo valore medio; la Tab. 13.3 riporta maggiori dettagli su uno degli studi considerati in precedenza, e mostra la elevata deviazione standard

<sup>10</sup> Cfr. Capitolo 11.

**Tabella 13.3 Livello medio e volatilità dei tassi di recupero**

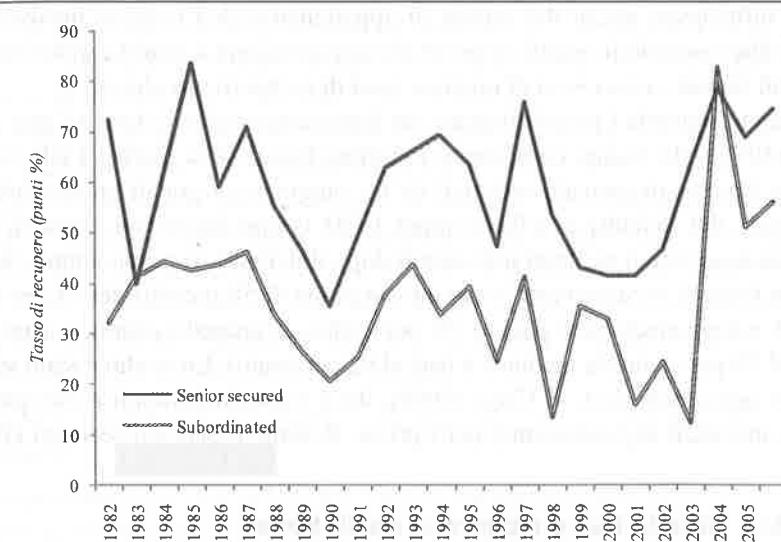
Tipo di obbligazioni	Numero	Media	Deviazione standard
Senior Secured	85	57%	23%
Senior Unsecured	221	48%	27%
Senior Subordinated	177	34%	25%
Subordinated	214	31%	22%

Fonte: Altman e Kishore (1996)

(oltre il 20 per cento) che caratterizza i tassi di recupero dei bond aventi identica seniority e subordinazione<sup>11</sup>.

Il secondo problema è che i tassi di recupero tendono a essere instabili nel tempo. La Fig. 13.5 mostra l'evoluzione, nel tempo, dei tassi di recupero medi sulle obbligazioni senior secured e subordinate. Si nota che i valori fluttuano sensibilmente nel tempo, così che i valori effettivi dei singoli anni possono essere assai diversi dal valore atteso, dato dalla media del lungo periodo; ciò dà luogo a un rischio di recu-

**Figura 13.5 Tassi di recupero per diversi livelli di seniority**



Fonte: Moody's Investors Service (2007)

<sup>11</sup> Si noti che, se la distribuzione di probabilità dei tassi di recupero fosse uniforme (con tutti i valori tra 0 per cento e 100 per cento ugualmente probabili), la sua deviazione standard sarebbe all'incirca uguale al 29 per cento. Le deviazioni standard riportate nella Tabella suggeriscono dunque un grado di incertezza elevato.

**Tabella 13.4 Tassi di recupero medi per settore di attività del debitore**

Settori	Numero	Media	Deviazione standard
Trasporti	72	38,6%	27,4%
Industria	728	40,5%	24,4%
Assicurazione	12	39,8%	21,4%
Banche	25	22,6%	16,6%
Utility	57	69,6%	21,8%
Finanza	11	45,6%	31,2%
Immobiliari	8	25,7%	17,2%
Titoli di Stato	8	56,8%	27,4%

Fonte: Hu e Perrauidin (2002)

pero che verrà approfondito nel § 13.5. Addirittura, si nota che nel 1983 e nel 2004 la tipica relazione tra i tassi di recupero delle obbligazioni senior e di quelle subordinate (con i primi superiori ai secondi) risulta smentita dai dati. Se ne deduce che cluster basati soltanto su seniority e presenza di garanzie reali, come quelli indicati nella Tab. 13.2, seppure utili, non sono a prova di errore.

La Tab. 13.4, tratta da Hu e Perrauidin (2002), mostra infine come il tasso di recupero sia influenzato anche dal settore di appartenenza dell'impresa insolvente. A parità di altre condizioni, infatti, imprese che appartengono a settori caratterizzati da attività più liquide consentono di ottenere tassi di recupero più elevati.

Per quanto riguarda i prestiti bancari, un importante studio si deve a Carty e Lieberman (1996), che hanno confrontato i risultati basati sulla market LGD (stimati attraverso i prezzi di mercato registrati da un campione di grandi prestiti sindacati all'indomani del default) e sulla workout LGD (stime basate sui flussi di cassa attualizzati associati ai recuperi intervenuti dopo il default). Il primo approccio conduce a un tasso di recupero medio (su un campione di 58 prestiti) del 71 per cento, mentre il valore mediano è pari al 77 per cento; il secondo conduce a un tasso medio del 79 per cento (la mediana è pari al 92 per cento). Lo studio è stato successivamente aggiornato da L.V. Carty (1998), dove i prestiti garantiti e non garantiti vengono analizzati separatamente; per i primi, le stime basate sui recuperi effettivi

**Tabella 13.5 Stime dei tassi di recupero sui prestiti bancari**

Tipo di prestiti	N.	Media	Mediana	Minimo	Massimo	Deviazione standard
Secured (w)	178	86,7%	100,0%	7,4%	128,7%	22,8%
Unsecured (W)	19	79,4%	90,0%	23,6%	100,4%	26,6%
Secured (M)	72	72,8%	79,8%	15,0%	98,0%	21,0%

Fonte: L.V. Carty (1998)

(workout LGD, W) vengono confrontate con quelle basate sui prezzi di mercato (market LGD, M); i risultati sono sintetizzati nella Tab. 13.5.

Basandosi sui prezzi di mercato un mese dopo il default, Gupton, Gates e Carty (2000) trovano tassi di recupero medi del 69,5 per cento per i prestiti garantiti e del 52,1 per cento per quelli non garantiti; la medesima metodologia è usata da Hamilton, Cantor e Ou (2002) su un campione di prestiti bancari garantiti, e conduce a un tasso di recupero del 71,3 per cento.

Van de Castle e Keisman (1999) analizzano circa 1.200 esposizioni creditizie in default, tra cui 258 prestiti bancari. Le stime dei tassi di recupero sono basate sui dati di mercato, corretti per tenere conto di eventuali scambi tra debito e azioni, o tra debito e attività. Il tasso di recupero medio è dell'84,5 per cento. Gli autori, entrambi esperti dell'agenzia di rating Standard & Poor's, sviluppano inoltre un semplice modello multivariato (simile ai modelli citati nel § 13.3.3), per verificare l'effetto sul tasso di recupero di diverse tipologie di garanzie reali, grado di seniority e altre variabili.

Un secondo esempio di modello multivariato si deve a Gupton e Stein (2002); di tale modello, noto come LossCalc e commercializzato dall'agenzia di rating Moody's, è stata resa nota solo la struttura di massima, senza però fornire dettagli sui valori dei coefficienti e sulla loro significatività statistica. La Tab. 13.6 propone un confronto tra i tratti salienti dei due modelli, evidenziandone analogie e differenze.

In primo luogo, risulta diverso il criterio di costruzione dei tassi di recupero: se Standard & Poor's utilizza un approccio basato sui valori recuperati, al termine della fase di dissesto aziendale, sul mercato secondario (emergence LGD), Moody's preferisce utilizzare i prezzi di mercato delle obbligazioni (o dei prestiti sindacati per cui esiste un secondario) un mese dopo l'insolvenza.

Venendo infine all'Italia, un importante studio relativo ai tassi di recupero delle banche è quello diffuso dalla Banca d'Italia nel 2001<sup>12</sup>, basato su un questionario a cui hanno risposto oltre 250 banche (pari a oltre il 90 per cento degli impieghi totali verso residenti). Il questionario ha analizzato tempi e tassi medi di recupero sulle posizioni in sofferenza chiuse nel corso del 1999 (Banca d'Italia, 2001), con particolare riguardo alle diverse tipologie di procedure di recupero utilizzate. I principali risultati confermano quanto rilevato in un precedente studio della stessa Banca d'Italia Generale e Gobbi (1996) e cioè che:

- i costi amministrativi di recupero sono pari al 2,3 per cento del totale dei costi operativi;
- i tempi di recupero dei crediti attraverso i canali giudiziari si avvicinano mediamente ai tre anni per le procedure esecutive mobiliari, ai sei per quelle immobiliari e per i concordati preventivi, ai sette per le procedure fallimentari, con valori mediamente superiori al Sud;
- il tasso di recupero medio (secondo l'approccio del workout) è pari al 37,5 per cento. Esiste tuttavia una notevole dispersione dei tassi di recupero fra banche e

<sup>12</sup> Cfr. Banca d'Italia (2001).

**Tabella 13.6 Modelli di Standard & Poor's e di Moody's a confronto**

		<b>Standard &amp; Poor's</b>	<b>Moody's</b>
<i>Misura del tasso di recupero</i>		Effettivi recuperi alla riemersione dal default	Prezzi di mercato delle obbligazioni un mese dopo il default
<i>Variabili esplicative</i>	<i>Caratteristiche del debito</i>	Tipo di strumento Seniority Presenza di garanzie reali	Tipo di strumento Seniority
<i>Caratteristiche del contenzioso</i>		<i>Durata (in anni)</i>	
		Percentuale di debito aziendale totale subordinato a questa emissione («debt cushion»)	Grado di priorità relativo dell'emissione nel passivo aziendale Leverage (solo per prestiti non garantiti)
	<i>Settore</i>	Recovery rate medi di settore	
	<i>Variabili macroeconomiche</i>	Prezzo dei distressed bond Frequenza dei default sui junk bond Frequenza dei default attesa Indice dei leading indicator dell'economia	
<i>Struttura del modello</i>	Multivariato lineare		Risultati filtrati con una distribuzione di probabilità beta

anche all'interno di ogni banca. Per spiegare la varianza dei tassi di recupero è possibile utilizzare la loro durata, la dimensione del prestito (i tassi di recupero decrescono al crescere dell'importo prestato), il grado di copertura con garanzie<sup>13</sup> e il tipo di procedura utilizzata (cfr. Tab. 13.7);

- per oltre un terzo delle pratiche di contenzioso verso le imprese, le banche hanno utilizzato accordi di tipo privatistico, che hanno consentito di recuperare quote di credito comparabili a quelle ottenute mediante le procedure giudiziali più efficaci, ma con tempi assai più contenuti.

<sup>13</sup> Le posizioni integralmente assistite da garanzie reali registrano un tasso di recupero medio del 70 per cento, mentre per le posizioni non garantite il tasso di recupero si attesta al 32 per cento.

**Tabella 13.7 Caratteristiche del recupero per canale utilizzato**

<b>Canale di recupero</b>	<b>Durata (anni)</b>	<b>Quote mediamente recuperate</b>	<b>Valore medio delle posizioni (milioni di lire)<sup>14</sup></b>
Procedure esecutive mobiliari	2,8	44%	41
Procedure esecutive immobiliari	6,3	57%	143
Concordati preventivi	6,2	36%	427
Procedure fallimentari	6,8	27%	394
Accordi di tipo privatistico	2,1	68%	97

Fonte: Banca d'Italia (2001)

### 13.5 Il rischio di recupero

Per «rischio di recupero» si intende il rischio che l'effettivo tasso di recupero conseguito dal creditore al termine del processo di recupero possa essere diverso da quello inizialmente stimato (per esempio, sulla base di un campione di recuperi passati).

L'equazione [13.2] ci aiuta a comprendere l'origine di tale rischio. In effetti, essa include quattro variabili per cui è impossibile specificare, a priori, un valore certo:

- il recupero lordo nominale ( $RL$ );
- i costi amministrativi del recupero ( $CA$ );
- il tasso di sconto ( $i$ );
- la durata ( $T$ ) del contenzioso.

Da queste variabili stocastiche origina il rischio di recupero<sup>14</sup>. Le evidenze empiriche disponibili suggeriscono che tale rischio può essere consistente: dalla Tab. 13.3 si ricorderà che, anche quando si tenga conto del diverso grado di subordinazione e della presenza di garanzie, i tassi di recupero sulle singole obbligazioni in default possono essere assai diversi tra loro; similmente, la Fig. 13.5 ha mostrato che anche i tassi di recupero medi (ovviamente meno volatili dei tassi di recupero registrati sui singoli bond) possono fluttuare in maniera sensibile nel tempo<sup>15</sup>.

Peraltro, i valori nella Tab. 13.3 derivano da studi basati sulla market LGD. Di conseguenza, i tassi di recupero sono stati calcolati sulla base dei prezzi obbligazionari dopo il default; tali prezzi tendono a concentrarsi attorno ai valori centrali del-

<sup>14</sup> Ovviamente, la [13.2] include un ulteriore elemento stocastico, ovvero la EAD. Come si è visto nell'introduzione a questa Parte II, tuttavia, la volatilità della EAD è solitamente considerata un fattore di rischio a parte (rischio di esposizione), misurato e gestito in modo distinto rispetto al rischio di recupero.

<sup>15</sup> Nel periodo 1978-2001 i tassi di recupero indicati nella figura oscillano tra il 12 per cento e il 76 per cento.

l'intervallo 0 per cento-100 per cento. Il motivo è che se un investitore pensa che una certa obbligazione potrebbe essere rimborsata pienamente nel 50 per cento dei casi, e si attende invece un rimborso nullo nel restante 50 per cento, allora offrirà un prezzo, per l'obbligazione in default, attorno ai 50 centesimi per euro.

Se, invece, le LGD sono calcolate sulla base dell'approccio *workout*, allora la distribuzione di probabilità dei tassi di recupero tenderà a concentrarsi attorno ai valori estremi (0 per cento e 100 per cento). Il motivo è che le esposizioni bancarie (cfr. ancora la Fig. 13.2) tendono perlopiù a essere recuperate in pieno, oppure a restare totalmente impagate. Di conseguenza, la volatilità dei tassi di recupero calcolati con la *workout* LGD è notevolmente più elevata di quelle mostrate nella Tab. 13.3, e di solito è superiore anche al valore tipico di una distribuzione uniforme<sup>16</sup>.

Simili differenze vanno tenute presenti quando si sceglie la distribuzione di probabilità teorica più adatta ad approssimare il comportamento empirico dei tassi di recupero. La distribuzione normale è chiaramente inadeguata a rappresentare situazioni come quelle della Fig. 13.2, mentre possono risultare utili le distribuzioni beta (cfr. Appendice 13B). Tali distribuzioni possono essere limitate tra 0 per cento e 100 per cento e parametrizzate in modo da avere una o due mode; i relativi parametri possono essere stimati in modo relativamente semplice adottando il metodo dei momenti generalizzato<sup>17</sup>.

La volatilità dei tassi di recupero (cioè il rischio di recupero) contribuisce ad accrescere il rischio creditizio di un'esposizione. Per capire perché, consideriamo un prestito di un euro e calcoliamone una misura di rischio elementare: la deviazione standard delle perdite future. Per semplicità, adottiamo un approccio binario, dove l'insolvenza è l'unico evento che genera perdite<sup>18</sup>. Di conseguenza, saranno possibili solo due risultati: il prestito va in default (con perdita pari a  $LGD = 1 - RR$ ) oppure rimane solvibile (con perdita zero).

La perdita attesa sarà dunque data da:

$$EL = PD \cdot LGD \quad [13.3]$$

Se la LGD è non-stocastica (cioè, se non esiste rischio di recupero), la volatilità delle perdite sarà:

$$\sigma_L = LGD \cdot \sqrt{PD \cdot (1 - PD)} \quad [13.4]$$

<sup>16</sup> Per esempio, Banca d'Italia 2001 stimava una deviazione standard del 37 per cento per i tassi di recupero delle banche italiane; si tratta di un valore sensibilmente superiore al 29 per cento (cfr. nota 11) della distribuzione uniforme.

<sup>17</sup> In alternativa alla distribuzione beta, sono stati suggeriti approcci non parametrici basati sul «beta kernel». Tali approcci Renault e Scaillet (2004), Hagmann, Renault e Scaillet (2005) consentono di stimare la distribuzione di probabilità senza imporre eccessivi vincoli alla sua struttura.

<sup>18</sup> Cfr. l'introduzione a questa parte del volume e il Capitolo 15.

dove  $PD \cdot (1 - PD)$  è la varianza della variabile binaria (bernoulliana) che rappresenta il default, e assume valore 1 in caso di insolvenza, 0 altrimenti.

Ipotizzando, per esempio, una PD pari allo 0,5 per cento e una LGD del 50 per cento, la [13.4] conduce alla seguente deviazione standard:

$$\sigma_L = 0,5 \cdot \sqrt{0,005 \cdot 0,995} = 3,53\%$$

Se, invece, ipotizziamo che la LGD sia stocastica, con valore atteso pari a  $\overline{LGD}$  e deviazione standard pari a  $\sigma_{LGD}$  (cioè se aggiungiamo il rischio di recupero al modello), allora la [13.4] va modificata come segue<sup>19</sup>:

$$\sigma_L = \sqrt{PD \cdot (1 - PD) (\overline{LGD})^2 + PD^2 \cdot \sigma_{LGD}^2 + PD \cdot (1 - PD) \cdot \sigma_{LGD}^2} \quad [13.5]$$

e si semplifica in<sup>20</sup>:

$$\sigma_L = \sqrt{PD \cdot (1 - PD) \overline{LGD}^2 + PD \cdot \sigma_{LGD}^2} \quad [13.6]$$

Nell'esempio precedente, se 50 per cento fosse la LGD attesa ( $\overline{LGD}$ ), attorno alla quale si registra una volatilità  $\sigma_{LGD}$  del 20 per cento, allora la deviazione standard delle perdite future sarebbe:

$$\sigma_L = \sqrt{0,005 \cdot 0,995 \cdot 0,25 + 0,005 \cdot 0,2^2} \approx 3,80\%$$

un valore sensibilmente superiore a quello calcolato in precedenza, assumendo un tasso di recupero costante. Dal confronto tra la [13.4] e la [13.6] notiamo, peraltro, che l'impatto di  $\sigma_{LGD}$  è più marcato quando la PD è maggiore, cioè per i clienti di peggiore qualità.



### 13.6 Il legame tra rischio di default e rischio di recupero

Molti modelli per la gestione del rischio di credito oggi disponibili considerano PD e LGD due variabili stocastiche indipendenti<sup>21</sup>, come se esse fossero funzioni di fattori di rischio distinti. In effetti, il tasso di default registrato su un portafoglio di prestiti dipende principalmente dalle condizioni economico-finanziarie dei debitori, che

<sup>19</sup> Per ottenere la [13.5] utilizziamo la formula per la deviazione standard del prodotto di due variabili casuali indipendenti. Date  $x$  e  $y$ , stocastiche e indipendenti, e data  $z = xy$ , avremo che  $\sigma_z^2 = \mu_x^2 \sigma_y^2 + \mu_y^2 \sigma_x^2 + \sigma_x^2 \sigma_y^2$ . Se  $x$  è una bernoulliana che rappresenta il default (e perciò ha media PD e varianza  $PD \cdot (1 - PD)$ ) e  $y$  è la LGD, questa formula conduce alla [13.5]. Si noti che, per semplicità, stiamo immaginando che default e recuperi siano indipendenti.

<sup>20</sup> Sviluppando la [13.5] otteniamo  $\sigma_L = \sqrt{PD \cdot (1 - PD) (\overline{LGD})^2 + PD^2 \cdot \sigma_{LGD}^2 + PD \sigma_{LGD}^2 - PD^2 \sigma_{LGD}^2}$  e quindi, per semplificazione di termini simili, la [13.6].

<sup>21</sup> Per un esame di come i diversi modelli sul rischio di credito trattano la relazione tra PD e LGD, cfr. Altman, Resti and Sironi (2005) o Altman, Resti e Sironi (2005).

a loro volta dipendono da fattori specifici delle singole imprese (per esempio la qualità del management, il livello di leva finanziaria, la redditività, la liquidità ecc.) o dei settori economici in cui esse operano (le prospettive di sviluppo, il livello di concorrenza, la normativa, l'esistenza di barriere all'entrata). D'altra parte, è noto (cfr. per esempio la Tab. 13.4) che i tassi di recupero dipendono fortemente da fattori specifici delle singole esposizioni, come il grado di seniority e il livello di copertura con garanzie reali.

Tuttavia, possono esistere anche fattori sistematici che incidono contemporaneamente sui tassi di default e sui tassi di recupero. Potrebbe trattarsi di fattori macroeconomici (per esempio, il numero di fallimenti, il livello dei tassi d'interesse, il tasso di cambio effettivo, l'andamento del mercato azionario e, più in generale, il ciclo economico) o di fattori che incidono sul valore atteso degli attivi aziendali. In effetti, è possibile identificare diversi motivi per cui i due profili di rischio potrebbero essere collegati tra loro. A titolo meramente esemplificativo, citiamo:

- effetti a catena: se il tasso di default aumenta a causa di una crisi economica e parte degli attivi delle imprese insolventi è rappresentata da crediti verso altre imprese fallite, è naturale attendersi anche una riduzione nei tassi di recupero;
- tassi d'interesse e attività finanziarie: se le garanzie reali che assistono le esposizioni in default sono costituite da attività finanziarie (per esempio, titoli a reddito fisso), un aumento dei tassi di default conseguente a un aumento dei tassi d'interesse e dunque degli oneri finanziari delle imprese potrebbe portare con sé anche una riduzione del valore delle garanzie, e quindi del tasso di recupero;
- tassi d'interesse e proprietà immobiliari: se invece le garanzie sono costituite da proprietà immobiliari, l'aumento del tasso di default causato da una recessione potrebbe condurre a una riduzione dei prezzi degli immobili e quindi dei tassi di recupero;
- effetti settoriali: se il tasso di default aumenta in uno specifico settore a causa della riduzione nel fatturato legata all'obsolescenza di prodotto (come può accadere nei settori a tecnologia avanzata o nel settore farmaceutico), allora anche il valore degli impianti produttivi e delle scorte risulterà fortemente ridotto, e ciò si rifletterà in un peggioramento dei tassi di recupero.

È inoltre possibile analizzare in modo più rigoroso la correlazione tra tassi di default e tasso di recupero attraverso il modello di Merton (cfr. Capitolo 12). Tale modello suggerisce infatti che la probabilità di un default dipende dal livello di leverage del debitore; sempre il leverage, inoltre, influenza l'ammontare di attività aziendali disponibile per ogni euro di debito, e dunque anche il tasso di recupero. Per una dimostrazione più formale, cfr. l'Appendice 13A.

Passando dagli aspetti teorici all'evidenza pratica, è possibile fare riferimento ai dati sulle obbligazioni societarie speculative grade statunitensi (cfr. Tab. 13.8) per verificare che i tassi di recupero sui bond di imprese involventi sono correlati con le condizioni macroeconomiche e dunque con il tasso di default complessivo del mercato.

Tabella 13.8 Tassi di default, tassi di recupero, tassi di perdita

Anno	Obbligazioni in circolazione (a) (mln. di Usd)	Valore nominale dei default (b) (mln. di Usd)	Tasso di default	Prezzo medio ponderato all'indomani del recupero (Recovery Rate)	Coupon ponderato	Perdite legate ai default (c)
2001	649,000	63,609	9,80%	25,5%	9,18%	7,76%
2000	597,200	30,295	5,07%	26,4%	8,54%	3,95%
1999	567,400	23,532	4,15%	27,9%	10,55%	3,21%
1998	465,500	7,464	1,60%	35,9%	9,46%	1,10%
1997	335,400	4,200	1,25%	54,2%	11,87%	0,65%
1996	271,000	3,336	1,23%	51,9%	8,92%	0,65%
1995	240,000	4,551	1,90%	40,6%	11,83%	1,24%
1994	235,000	3,418	1,45%	39,4%	10,25%	0,96%
1993	206,907	2,287	1,11%	56,6%	12,98%	0,56%
1992	163,000	5,545	3,40%	50,1%	12,32%	1,91%
1991	183,600	18,862	10,27%	36,0%	11,59%	7,16%
1990	181,000	18,354	10,14%	23,4%	12,94%	8,42%
1989	189,258	8,110	4,29%	38,3%	13,40%	2,93%
1988	148,187	3,944	2,66%	43,6%	11,91%	1,66%
1987	129,557	1,736	1,34%	62,0%	12,07%	0,59%
1986	90,243	3,156	3,50%	34,5%	10,61%	2,48%
1985	58,088	992	1,71%	45,9%	13,69%	1,04%
1984	40,939	344	0,84%	48,6%	12,23%	0,48%
1983	27,492	301	1,09%	55,7%	10,11%	0,54%
1982	18,109	577	3,19%	38,6%	9,61%	2,11%
<b>Media ponderata</b>			<b>4,19%</b>	<b>37,2%</b>	<b>10,60%</b>	<b>3,16%</b>

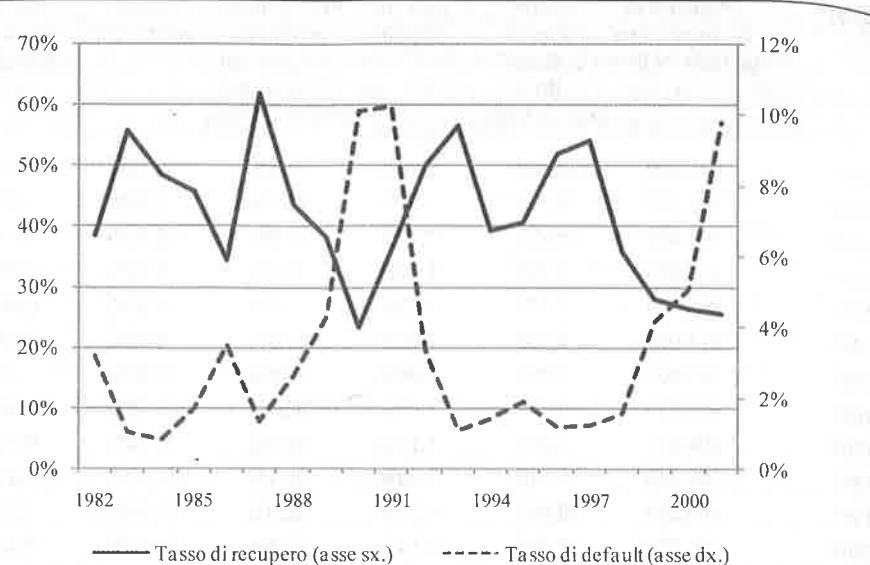
Note: (a) misurato a metà anno, al netto delle emissioni terminate in default; (b) non include il fallimento di Texaco nel 1987; (c) include la perdita sui coupon e sul capitale.

Fonte: Altman, Brady *et al.* (2005)

I dati della tabella, riportati in forma grafica nella Fig. 13.6, mostrano infatti che a partire dal 1980 i tassi di recupero sono diminuiti nelle fasi di contrazione del ciclo (come nel 1981 e nel 1990) e sono aumentati durante le fasi di espansione (come alla metà degli anni Ottanta e Novanta). Ancora più eloquenti risultano gli ultimi dati della tabella (1999-2001), quando i tassi di default sono aumentati, a fronte di una riduzione dei tassi di recupero.

Questo tipo di evidenze empiriche ha stimolato, negli ultimi anni, lo sviluppo di nuovi modelli e schemi di analisi in grado di spiegare la relazione tra PD e RR. Frye ha proposto un modello<sup>22</sup> dove un singolo fattore di rischio sistematico – lo stato

<sup>22</sup> Cfr. Frye (2000b e c).

**Figura 13.6 La relazione tra tassi di recupero e tassi di default sulle obbligazioni Usa**Fonte: Altman, Brady *et al.* (2005)

dell'economia – può causare un aumento del tasso di default e una riduzione del tasso di recupero. L'intuizione di base del modello è relativamente semplice: se un debitore risulta insolvente su un prestito, le prospettive di recupero dei suoi creditori dipendono dalle garanzie; il valore di queste ultime, tuttavia, come per qualsiasi attività finanziaria, dipende dallo stato dell'economia. Se questa è in recessione, i tassi di recupero scenderanno proprio mentre i default si fanno più frequenti. Sulla base di questo modello, Frye effettua un'analisi empirica<sup>23</sup> e conclude che, in caso di sensibile recessione economica, i tassi di recupero sulle obbligazioni possono ridursi del 20-25 per cento rispetto al loro valore medio negli anni «normali». Una riduzione analoga si osserva per i tassi di recupero sui prestiti bancari, che tuttavia si attestano su livelli superiori.

Utilizzando i dati storici trimestrali raccolti da Moody's, Hu e Perraudin (2002) esaminano la relazione tra tassi di recupero e di default. Gli Autori provvedono dapprima a standardizzare i dati per eliminare quella parte di volatilità dei tassi di recupero che è dovuta alla variazione, nel tempo, della composizione del campione; quindi riscontrano una correlazione tra tassi di recupero e di default delle obbligazioni emesse da prenitori statunitensi pari al 19 per cento nel periodo 1971-2000 e al 22 per cento se ci si limita al periodo 1983-2000.

<sup>23</sup> Cfr. Frye (2000a e c).

Altman, Brady *et al.* (2005) analizzano empiricamente le determinanti dei tassi di recupero delle obbligazioni e trovano una correlazione negativa tra tassi di default e di recupero (cfr. la Fig. 13.6 e la già citata Tab. 13.8). Tuttavia, essi riscontrano che un unico fattore sistematico – la performance complessiva dell'economia – è meno efficace, a fini di previsione di PD e LGD, di quanto suggerirebbero gli studi citati in precedenza, enfatizzano quindi il ruolo svolto, nel determinare i tassi di recupero medi calcolati con l'approccio della market LGD, della domanda e dell'offerta di obbligazioni distressed. I loro modelli econometrici assegnano un ruolo chiave all'offerta di bond in default e mostrano che questa variabile, unitamente ad altre che danno conto della dimensione del mercato delle obbligazioni speculative grade, spiega una significativa porzione della varianza totale dei tassi di recupero, osservati per diversi livelli di subordinazione e per differenti gradi di copertura con garanzie reali.

I principali modelli di pricing del credito e di calcolo del VaR per il rischio di credito<sup>24</sup> ignorano l'esistenza del rischio di recupero (limitandosi a ipotizzare una LGD attesa costante), oppure ipotizzano che esso sia indipendente dal rischio di default, trattandolo come una forma di rischio idiosincratico che può essere interamente eliminato attraverso la diversificazione di portafoglio. Se, al contrario, la volatilità nei recuperi venisse considerata correlata con il rischio di default, allora anche il rischio di recupero dovrebbe essere trattato come sistematico, e porterebbe con sé un premio al rischio.

La correlazione tra PD e LGD, ove presente, porterebbe con sé significative conseguenze per il livello delle perdite attese e inattese su un portafoglio crediti. Simili conseguenze sono state stimate, attraverso un esercizio di simulazione, da Altman, Resti e Sironi (2001). Lo studio stimava perdita attesa ( $EL$ ), deviazione standard delle perdite ( $\sigma_L$ ) e VaR<sup>25</sup> di un portafoglio-tipo di esposizioni creditizie, sulla base di tre ipotesi di lavoro alternative:

1. tassi di recupero deterministici (fissi);
2. tassi di recupero stocastici ma non correlati con la probabilità di default;
3. tassi di recupero stocastici e negativamente correlati con la probabilità di default.

Il terzo approccio produce un notevole incremento (+30%) sia nelle misure di rischio che nella misura di perdita attesa (cfr. Tab. 13.9). Quest'ultimo risultato è particolarmente importante, visto che la perdita attesa su un'esposizione di un euro viene solitamente calcolata (cfr. anche l'introduzione a questa Parte III) semplicemente moltiplicando la PD attesa di lungo periodo per la LGD attesa; una simile prassi, tuttavia, non è corretta (e può condurre a una significativa sottostima della perdita attesa) se il rischio di default e quello di recupero sono correlati tra loro.

<sup>24</sup> Cfr. Capitolo 15.<sup>25</sup> Sul calcolo del VaR a fronte del rischio di credito si ritroverà diffusamente nel Capitolo 15.

**Tabella 13.9 Risultati di un esercizio di simulazione**

	LGD modellata secondo l'approccio		
	1.	2.	3.
Perdita attesa (EL)	46,26	45,81	59,85
Deviazione standard ( $\sigma_L$ )	98,17	97,84	127,16
VaR al 95%	189,91	187,96	244,86
VaR al 99%	435,41	437,08	564,46
VaR al 99,5%	549,05	545,83	710,15
VaR al 99,9%	809,22	814,52	1053,13

\* Calcolato come  $(3. - 1.) / 1.$

Fonte: Altman, Resti e Sironi (2001)

## Esercizi



1. Un cliente risulta insolvente su un prestito di 20 milioni di euro. Nei successivi quattro anni, la banca riesce a recuperare 18 milioni di euro, il 20 per cento dei quali è assorbito da spese legali e amministrative. La duration del processo di recupero (tenuto conto dell'effetto dei flussi di recupero intermedi) è stata di 2,5 anni. Il tasso di sconto medio nel corso del periodo di recupero è stato dell'8 per cento circa, composto annualmente. Calcolate il tasso di recupero sul prestito.



2. Il primo gennaio 2003, un cliente risulta insolvente su un credito del valore di 10 milioni di euro. Il 1º aprile del medesimo anno, la banca deve pagare altri tre milioni di euro a fronte di una garanzia che aveva prestato per conto del cliente. Il 1º giugno 2004, la banca riesce a liquidare una garanzia reale, da cui ricava quattro milioni al netto delle spese. Ulteriori recuperi si registrano il 1º ottobre 2004 (500.000 euro) e infine il primo maggio 2005 (due milioni di euro). Utilizzando un anno di 360 giorni e una curva dei tassi piatta al 10 per cento, calcolate:

- a) la EAD totale, i recuperi totali e il rapporto ( $R$ ) tra i due;
- b) il rapporto tra il valore attuale totale (all'istante del default) dei singoli recuperi e il valore attuale totale (all'istante del default) dei singoli caricamenti che compongono la EAD totale, e confrontatelo con il valore di  $R$ ; quale dei due vi aspettate sia minore, e perché?
- c) la duration del processo di recupero, moltiplicate  $R$  per un fattore di sconto basato su questa duration e confrontate il risultato con quello ottenuto al punto b.

3. Considerate le seguenti affermazioni sul rischio di recupero:

- i) le obbligazioni senior hanno solitamente LGD più basse dei prestiti junior e delle preference share;
- ii) i prestiti alle utility tendono ad avere tassi di recupero più elevati perché la società insolvente potrebbe ancora riuscire a generare un consistente flusso di cassa, rendendo più facile per la banca il reperimento di un compratore in grado di rimborsare parte del debito;
- iii) il quoziente tra attivo e passività di terzi di una società insolvente tende a essere negativamente correlato con la LGD;
- iv) il Paese in cui ha sede il debitore insolvente può influenzare la LGD tramite la velocità e l'efficacia delle procedure concorsuali previste dal suo ordinamento.

Con quali siete d'accordo?

- a) Tutte tranne la iii.
- b) Tutte tranne la i.
- c) Tutte.
- d) Tutte tranne la ii.

4. Per «rischio di recupero» si intende il fatto che, di solito:

- a) la LGD è maggiore di zero;
- b) la LGD e il tasso di recupero, sommati, potrebbero, in totale, dare meno di uno;
- c) la volatilità della LGD è diversa da quella del tasso di recupero;
- d) la volatilità della LGD è diversa da zero.

5. Usando un approccio di tipo binario (default mode), calcolate la volatilità della perdita su un prestito di un euro avente le seguenti caratteristiche: una PD dello 0,8 per cento, una LGD attesa del 40 per cento e una deviazione standard della LGD del 6 per cento. Ipotizzate che PD e LGD siano indipendenti.



## Appendice 13A Relazione tra PD e tasso di recupero nel modello di Merton

I modelli à la Merton ci forniscono una cornice concettuale per derivare la probabilità di default di un debitore, e insieme il suo tasso di recupero atteso in caso di default. Mentre alla prima è stato dedicato un consistente filone di ricerca, il secondo è stato relativamente poco analizzato dagli studiosi.

Come mostrato nel Capitolo 12, nel modello di Merton il valore degli attivi aziendali del debitore segue un moto browniano geometrico:

$$dV = \mu V dt + \sigma_V V dz \quad [13A.1]$$

dove  $\mu$  e  $\sigma_V$  sono il tasso di deriva e di volatilità dell'impresa debitrice e  $dz$  è un processo di Wiener.

Dalla [13A.1] segue che il logaritmo del valore degli attivi in un certo istante futuro  $T$ ,

$$\ln V_T = \ln V_0 + \left( \mu - \frac{\sigma_v^2}{2} \right) T + \sigma_v \sqrt{T} \epsilon \quad [13A.2]$$

segue una distribuzione normale con media  $\mu_* = \ln V_0 + \left( \mu - \frac{\sigma_v^2}{2} \right) T$  e varianza  $\sigma_*^2 = \sigma_v^2 T$ . Di conseguenza, il valore degli attivi al tempo  $T$  segue una distribuzione lognormale con media  $V_0 e^{\mu T}$  e varianza  $V_0^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma_v^2 T} - 1)$ .

Come indicato nel Capitolo 12, si verifica un default se, al tempo  $T$ , il valore delle attività aziendali è minore di quello del debito  $F$ . Ciò significa che la probabilità di default di un'impresa è pari a:

$$PD = p[V_T < F] = N \left( -\frac{\ln \frac{V_0}{F} + \left( \mu + \frac{\sigma_v^2}{2} \right) T}{\sigma_v \sqrt{T}} \right) = N(-d_2^*) \quad [13A.3]$$

dove  $N(\cdot)$  indica, come di consueto, la funzione di ripartizione normale standard<sup>26</sup>.

Ipotizzando, per semplicità, che non esistano costi di liquidazione, il tasso di recupero in caso di default sarà dato dal rapporto tra il valore degli attivi e quello del debito,  $V_T/F$ . Il tasso di recupero atteso è dunque  $E(V_T/F)$ , ovvero  $E(V_T)/F$ . Tuttavia, ciò vale solo se  $V_T < F$ ; diversamente, non si verifica alcuna insolvenza e non si osserva alcun recupero. Di conseguenza, il tasso di recupero atteso è dato da:

$$E \left( \frac{V_T}{F} \middle| V_T < F \right) = \frac{1}{F} E(V_T | V_T < F) d \quad [13A.4]$$

vale a dire, da  $1/F$  volte la media di una variabile casuale lognormale tronca. Tale media è calcolabile come<sup>27</sup>:

$$E(V_T | V_T < F) = e^{\mu^* + \frac{\sigma_*^2}{2}} \frac{N \left( \frac{\ln F - \mu_* - \sigma_*}{\sigma_*} \right)}{N \left( \frac{\ln F - \mu_*}{\sigma_*} \right)} \quad [13A.5]$$

Sostituendo le espressioni di  $\mu^*$  e  $\sigma_*^2$  nella [13A.4] otteniamo:

<sup>26</sup> Si noti che, come nell'Appendice 12B al Capitolo 12, stiamo calcolando la PD reale, basata sul tasso di rendimento corretto per il rischio,  $\mu$ , atteso sulle attività aziendali. Utilizzando PD risk-neutral si otterrebbero risultati simili.

<sup>27</sup> Per una dimostrazione, cfr. Liu *et al.* (1997).

$$\begin{aligned} E(V_T | V_T < F) &= e^{\log V_0 + \mu T} \frac{N \left( -\frac{\ln \frac{V_0}{F} + \left( \mu + \frac{\sigma_v^2}{2} \right) T}{\sigma_v \sqrt{T}} \right)}{N \left( \frac{\ln \frac{V_0}{F} + \left( \mu - \frac{\sigma_v^2}{2} \right) T}{\sigma_v \sqrt{T}} \right)} = V_0 e^{\mu T} \frac{N(-d_1^*)}{N(-d_2^*)} = \\ &= E(V_T) \frac{N(-d_1^*)}{N(-d_2^*)} \end{aligned}$$

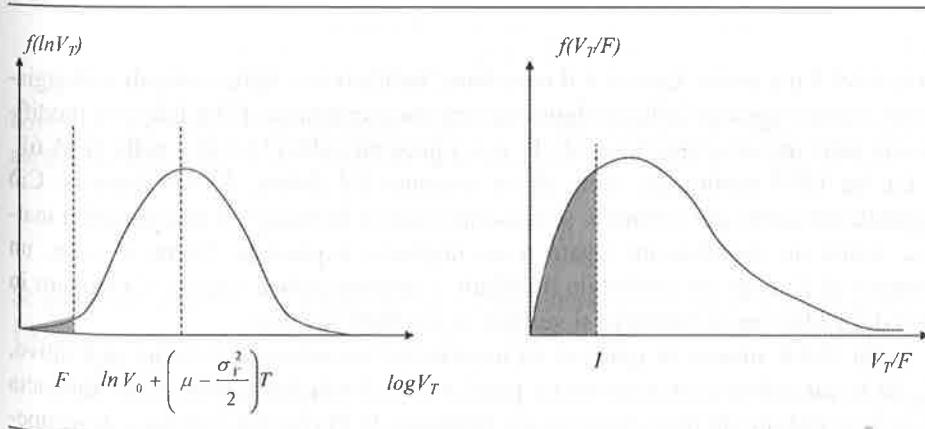
Il tasso di recupero atteso è dunque pari a:

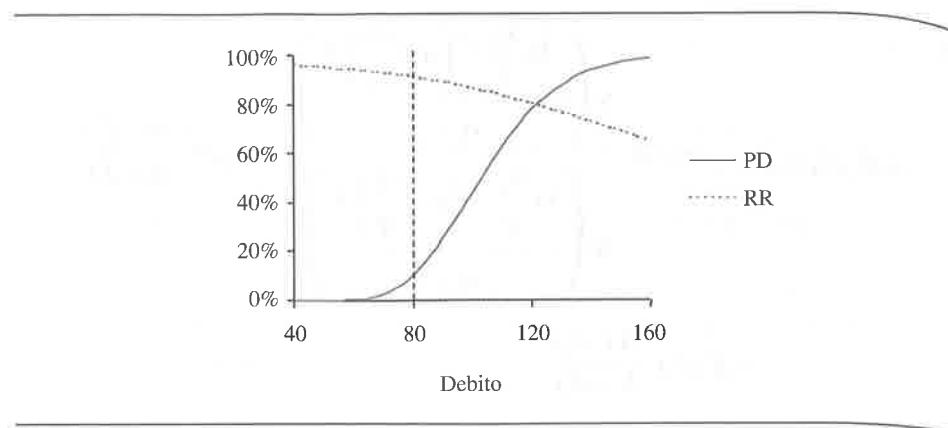
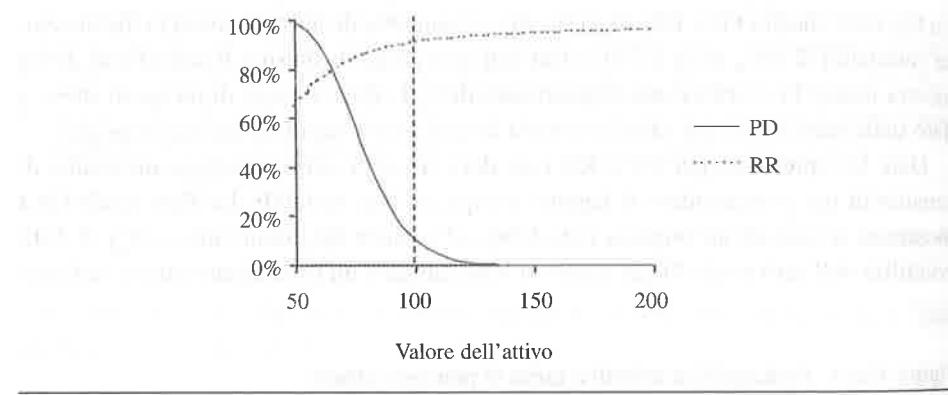
$$RR = E \left( \frac{V_T}{F} \middle| V_T < F \right) = \frac{V_0}{F} e^{\mu T} \frac{\Phi(-d_1^*)}{\Phi(-d_2^*)} = E \left( \frac{V_T}{F} \right) \frac{\Phi(-d_1^*)}{\Phi(-d_2^*)} \quad [13A.6]$$

La Fig. 13A.1 mostra PD e RR. In particolare, il pannello di sinistra mostra la distribuzione (normale) di  $\ln V_T$ , dove la PD è data dall'area grigia di sinistra; il pannello di destra mostra invece la distribuzione (lognormale) di  $V_T/F$ , dove il tasso di recupero atteso è dato dalla media di tutti i valori a sinistra di uno, cioè i valori della coda in grigio.

Date le espressioni per PD e RR così derivate, è possibile svolgere un'analisi di sensitività per comprendere il legame tra queste due variabili. Le Figg. 13A.2-13A.4 mostrano il caso di un'impresa con debito ( $F$ ) pari a 80, totale attivo ( $V_0$ ) di 100, volatilità dell'attivo del 20 per cento su base annua e un rendimento atteso sull'atti-

Figura 13A.1 Probabilità di default e tasso di recupero atteso

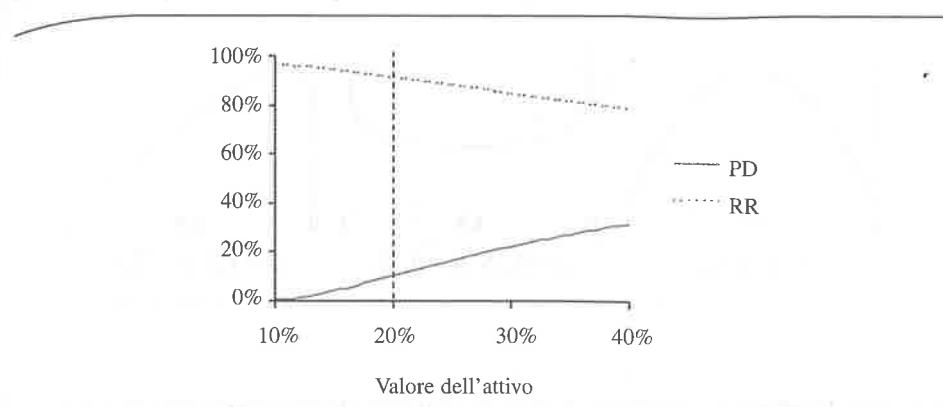


**Figura 13A.2 Effetto del valore del debito su PD e RR****Figura 13A.3 Effetto del valore dell'attivo su PD e RR**

vo ( $\mu$ ) del 5 per cento. Questo è il caso-base, indicato con righe verticali tratteggiate nel grafico; ognuna delle tre figure mostra come cambiano PD e RR se si modifica una delle tre variabili-chiave ( $F$ ,  $V_T$  e  $\sigma_V$ ) presenti nella [13A.3] e nella [13A.6].

La Fig. 13A.2 mostra gli effetti di un aumento del debito,  $F$ , dell'impresa. Ciò potrebbe accadere, per esempio, se fosse necessario fronteggiare una passività inattesa, come un risarcimento legato a un impianto inquinante. Come si vede, un aumento di  $F$  rende più probabile il default, e insieme riduce il tasso di recupero in caso di insolvenza; il contrario si verifica se il debito si riduce.

In Fig. 13A.3, invece, si ipotizza un'improvvisa variazione del valore dell'attivo,  $V_0$ . Se la variazione è in aumento (si pensi a un'azienda farmaceutica che annuncia di avere registrato un importante nuovo farmaco), la PD scende e il tasso di recupe-

**Figura 13A.4 Effetto della volatilità dell'attivo su PD e RR**

ro atteso assume valori più elevati; se la variazione è negativa (azienda farmaceutica danneggiata da un nuovo brevetto di un concorrente), il default diventa insieme più probabile e più «costoso» in termini di LGD.

La Fig. 13A.4, infine, mostra cosa accade se aumenta la volatilità dei rendimenti dell'attivo; si pensi al caso dell'industria delle telecomunicazioni nel 2000, quando il rallentamento nella domanda di nuovi servizi telematici e di connettività ha reso più incerti i ritorni sugli investimenti compiuti negli anni precedenti. In un simile caso, come si vede, anche lasciando invariato il leverage del debitore, si avrebbero probabilità di default più elevate e tassi di recupero più bassi.

### Appendice 13B Cenni sulla distribuzione beta

Data la variabile casuale  $x$ , distribuita nell'intervallo  $[0, M]$  secondo la distribuzione beta ( $a, b$ ), dove  $a$  e  $b$  sono due parametri, la sua funzione di densità di probabilità è:

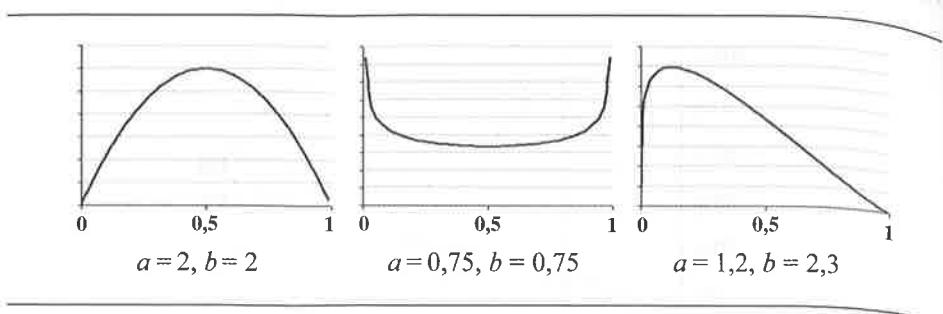
$$f(x; a, b) = \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \left(\frac{x}{M}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{x}{M}\right)^{b-1} \frac{1_{x \in [0, M]}}{M} \quad [13B.1]$$

dove  $1_{x \in [0, M]}$  è una funzione indicatrice, che vale 1 se  $x$  cade nell'intervallo  $[0, M]$  e zero altrimenti, mentre  $\Gamma(\cdot)$  è una funzione (nota come funzione gamma), definita come:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad [13B.2]$$

Se (come accade per i tassi di recupero) siamo interessati all'intervallo [0 per cento, 100 per cento], cioè a  $M = 1$ , la [13B.1] si semplifica in:

$$f(x; a, b) = \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} (x)^{a-1} (1 - x)^{b-1} 1_{x \in [0, 1]} \quad [13B.3]$$

**Figura 13B.1 Esempi di distribuzioni beta con differenti parametri**

Data una distribuzione empirica di tassi di recupero, di cui conosciamo la media  $\bar{x}$  e la varianza  $\sigma^2$ , è possibile ricavare  $a$  e  $b$  con il metodo dei momenti, come:

$$a = \frac{\bar{x}(\bar{x} - \bar{x}^2 - \sigma^2)}{\sigma^2} \quad [13B.4]$$

$$b = \frac{(1 - \bar{x})\bar{x}^2 - \bar{x}\sigma^2}{\bar{x}\sigma^2(1 - \bar{x})} \quad [13B.5]$$

Calibrando i valori di  $a$  e  $b$  è possibile fare in modo che la funzione (che risulta molto flessibile) assuma forme diverse: la Fig. 13B.1 fornisce alcuni esempi.

La funzione di ripartizione della distribuzione beta è facilmente calcolabile in MS Excel attraverso le funzioni DISTRIB.BETA(.) e INV.BETA(.). Per maggiori approfondimenti, cfr. Greene (2003), Gupton, Finger e Bhatia (1997), Crouhy, Galai e Mark (2000).

## 14 I sistemi di rating

### 14.1 Introduzione

Un rating è una valutazione sintetica del merito di credito. Un rating di emittente (o di PD) si concentra sulla capacità di un debitore di onorare tempestivamente e integralmente le proprie obbligazioni; un rating di emissione, o di facility, analizza congiuntamente la PD del debitore e i possibili margini di recupero in caso di default (RR o LGD).

Nei capitoli precedenti ci si è soffermati sulle metodologie di tipo matematico-statistico rivolte alla stima della PD e della LGD. Ad esse si contrappongono metodologie di natura maggiormente qualitativa, quali quelle seguite dalle agenzie internazionali di rating (Moody's, Standard & Poor's e FitchRatings), fondate su valutazioni non automatiche e sul lavoro di esperti che analizzano un set informativo ampio e non rigidamente strutturato.

Negli ultimi decenni, le banche che hanno sviluppato sistemi di rating della clientela hanno generalmente attinto a entrambi gli approcci sopra ricordati<sup>1</sup>. Così, per esempio, l'attribuzione del rating a una media impresa è spesso basata, insieme, su analisi qualitative e sull'output di un modello quantitativo (analisi discriminante o logit) e su analisi qualitative (riguardanti, per esempio, la posizione competitiva dell'impresa, il suo portafoglio prodotti, la qualità del management, le prospettive del settore produttivo in cui opera, i possibili mutamenti nella normativa).

Nel corso degli ultimi venti anni i sistemi di rating sono andati assumendo una rilevanza crescente nei mercati creditizi e finanziari. Le agenzie di rating giocano oggi un ruolo cruciale nella determinazione del rendimento dei titoli obbligazionari, e dunque del costo del debito per gli emittenti<sup>2</sup>; analogamente, i rating interni delle

<sup>1</sup> Del resto, persino nel processo di assegnazione del rating seguito dalle agenzie, che pure di norma non usano modelli come quelli dei Capitoli 11-13, ricorrono elementi quantitativi quali l'analisi degli indici di bilancio e dei cash flow.

<sup>2</sup> Cfr. Gabbi e Sironi (2005) mostrano come oltre il 75 per cento della variabilità cross-section degli spread all'emissione dei corporate bond dell'euromercato (eurobond) sia determinato dalle differenze di rating.

banche rappresentano una delle principali determinanti del tasso di interesse praticato ai clienti<sup>3</sup>.

Questo capitolo descrive la costruzione di un sistema di rating, ossia la scelta dei criteri sottostanti la fase di assegnazione del rating (rating assignment); a tal fine, esamina brevemente le metodologie adottate sia dalle principali agenzie di rating, sia dai sistemi interni sviluppati dalle banche. Successivamente, l'attenzione si soffrona sulla fase di rating quantification, ossia sulla stima di una misura di PD associata alle diverse classi di rating, introducendo grandezze come i tassi di insolvenza marginali e cumulati, o i tassi di migrazione. Infine, l'attenzione si soffrona sulle metodologie per valutare la qualità di un sistema di rating (rating validation).

## 14.2 Il processo di assegnazione del rating

### 14.2.1 Rating esterni e interni: quali differenze?

Prima di esaminare i criteri di attribuzione di un rating, è importante chiarire che essi sono generalmente diversi a seconda che si considerino i rating «esterni», attribuiti dalle agenzie agli emittenti di obbligazioni, o quelli «interni», assegnati dalle banche ai propri debitori. Queste differenze sono riconducibili principalmente a tre motivi: le controparti oggetto di valutazione, le informazioni disponibili e il sistema di incentivi del «valutatore». Di seguito li analizziamo sinteticamente.

1. Le agenzie internazionali svolgono una funzione di delegated monitoring a beneficio degli investitori attivi nel mercato dei titoli obbligazionari. In particolare, esse contribuiscono a ridurre le asimmetrie informative tra l'emittente di uno strumento finanziario e gli investitori riguardo all'effettiva capacità del primo di rimborsare puntualmente i propri debiti. Ne segue che l'oggetto delle loro valutazioni sono i soggetti che emettono titoli nel mercato dei capitali, ossia grandi imprese (incluse le istituzioni finanziarie), enti sovrani e banche multilaterali di sviluppo. Si tratta di soggetti di dimensioni elevate, spesso presenti sul mercato da molto tempo, con attività distribuite in più regioni geografiche e talvolta in più settori produttivi. Nel caso delle banche, invece, le controparti oggetto di rating sono molto più numerose e varie, e vanno dalle grandi imprese (large corporate) fino alle imprese artigiane e ai clienti privati del segmento retail. Mentre nel caso dei grandi emittenti di obbligazioni la dimensione giustifica il costo connesso ad analisi accurate, prolungate e non standardizzate<sup>4</sup>, nel caso delle piccole imprese che richiedono credito alle banche è necessario contenere i costi del processo di rating, anche aiutandosi con modelli di valutazione automatici.

2. La seconda differenza riguarda la disponibilità di informazioni. In primo luogo, per molte controparti bancarie non sono reperibili informazioni (le quotazioni azionarie, gli spread sulle obbligazioni, i bilanci certificati ecc.) che risultano invece disponibili per le imprese valutate dalle agenzie. In secondo luogo, anche a parità di soggetti considerati, agenzie e banche hanno accesso a informazioni diverse; ciò è vero non tanto nella fase iniziale (quando entrambi i soggetti, grazie al proprio potere contrattuale<sup>5</sup>, riescono ad accedere a una mole elevata di informazioni, anche riservate), quanto nella fase successiva. La banca dispone infatti di una preziosa fonte informativa addizionale, non disponibile per le agenzie, data dall'andamento dei rapporti di conto con il debitore, ossia dalla movimentazione del finanziamento. Per esempio, se la controparte utilizza al massimo il credito assegnato, o addirittura tende a sconfinare, ciò potrebbe rappresentare un segnale (tempestivo e non disponibile per le agenzie di rating) del deterioramento del suo merito di credito. Questo tipo di analisi è detto «andamentale» e viene spesso utilizzato come input dalle banche per rivedere periodicamente il rating dei clienti.

3. Infine, l'attività delle agenzie e delle banche è guidata da un diverso sistema di incentivi. Nel primo caso, l'obiettivo è quello di offrire una opinione indipendente agli investitori (independent credit opinion) fondata su criteri il più possibile oggettivi e precisi. Le agenzie di rating, infatti, pur ricevendo commissioni dalle società oggetto di valutazione, devono assolutamente tutelare la propria reputazione, ossia la credibilità dei propri giudizi, per garantire la propria stessa sopravvivenza. Vanno dunque limitati al massimo i casi in cui un deterioramento della qualità creditizia dell'emittente «contraddice» le valutazioni precedentemente emesse dall'agenzia, costringendola a rivedere il proprio giudizio in senso peggiorativo. Per questo, le agenzie di rating tendono ad attribuire giudizi il più possibile stabili e robusti rispetto all'evoluzione di medio-lungo periodo dell'impresa valutata. Questo significa che, se l'economia attraversa una fase di espansione, ma si ritiene che l'emittente potrebbe diventare più rischioso in presenza di una recessione, verrà assegnato un rating più basso, che in qualche modo anticipa gli effetti negativi dei possibili peggioramenti futuri del ciclo economico. Nel caso dei rating interni, invece, la banca è insieme autore e destinatario delle proprie valutazioni, ed è interessata a tutelare i propri prestiti e non tanto la propria reputazione di analista «infallibile». Ne segue che il rating deve essere il più possibile reattivo, cioè capace di riflettere in modo immediato eventuali variazioni delle condizioni economico-finanziarie. Non interessa cioè la stabilità del rating (e la sua capacità di anticipare valutazioni di medio-lungo periodo), quanto la sua capacità di riflettere le condizioni attuali, segnalando tempestivamente eventuali deterioramenti. Questa diversità di obiettivi determina un'importante differenza

<sup>3</sup> A questa tendenza ha indubbiamente contribuito la riforma della normativa in tema di adeguatezza patrimoniale introdotta nel 2004 dal Comitato di Basilea (cfr. il Capitolo 21).

<sup>4</sup> Nel caso delle agenzie di rating, in particolare, i costi dell'attività di rating vengono sostenuti dall'emittente, che riconosce all'agenzia una commissione.

<sup>5</sup> Il debitore è disposto a fornire informazioni perché desidera ottenere credito dalla banca o perché consapevole del fatto che dal rating delle agenzie dipenderà in modo cruciale il costo del suo indebitamento.

nei criteri di rating assignment delle agenzie, da un lato, e delle banche dall'altro. Come osservato da Carey e Treacy (2000), le agenzie di rating seguono un processo definito *through the cycle* (cioè valutano la capacità di rimborso di un'impresa nell'eventualità di una recessione, anche se la congiuntura attuale è favorevole); al contrario, le banche si basano su una metodologia detta *point in time*, che si limita a valutare il merito di credito della controparte sulla base delle condizioni correnti e previste per l'immediato futuro. Naturalmente, l'arco temporale futuro coperto da una previsione point in time sarà in generale proporzionato alla vita residua del finanziamento. Poiché molte banche erogano un ammontare considerevole di finanziamenti a vista o a breve termine, l'orizzonte di valutazione dell'approccio point in time tende quindi a essere piuttosto breve<sup>6</sup>.

Queste differenze riguardano il cosiddetto *issuer rating*, o rating di PD. Come noto, il rischio di perdita su un credito dipende non solo dalla probabilità di default, ma anche dal tasso di perdita in caso di insolvenza, o LGD<sup>7</sup>. Una valutazione che incorpori anche questa componente dà luogo a un issue rating o facility rating, che riguarda dunque una specifica esposizione.

Anche su questo fronte le metodologie seguite dalle agenzie di rating e dalle banche possono essere differenti.

Nel caso delle agenzie, il passaggio dall'issuer rating all'issue rating può prevedere una riduzione del giudizio (notching down) in funzione del grado di subordinazione dell'esposizione. Nel caso di emissioni senior secured (cioè garantite e non subordinate), l'issue rating coincide generalmente con l'issuer rating; per le obbligazioni subordinate l'issue rating viene ridotto di un notch se l'emittente ha un rating investment grade (per esempio, usando la scala di Standard & Poor's si passa da un issuer rating di A- a un issue rating di BBB+) o di due se l'emittente è caratterizzato da un rating speculative grade (per esempio passando da B+ a B-). Questa riduzione del rating dipende dal minor tasso di recupero in caso di insolvenza sulle emissioni subordinate. Al contrario, fattori che possono giustificare un issue rating in linea con l'issuer rating o superiore (notching up) sono la presenza di garanzie (obbligazioni secured) o di covenant.

Per molto tempo, le agenzie non hanno valutato individualmente le prospettive di recupero delle esposizioni creditizie, anche se tale valutazione poteva essere ricavata indirettamente, attraverso un confronto tra il rating di emittente e il rating di emissione. Negli ultimi anni, tuttavia, i tassi di recupero attesi sono diventati l'oggetto di procedure di rating *ad hoc*: così, per esempio, dal 2003 Standard & Poor's pubblica appositi recovery rating che misurano le prospettive di recupero dei prestiti<sup>8</sup>; un servizio analogo è fornito da Fitchratings.

<sup>6</sup> La tendenza a valutare point in time potrà essere ridotta dal nuovo accordo di Basilea sul capitale, dove si chiede alle banche di assegnare il rating con un orizzonte temporale di medio periodo e prestando attenzione agli effetti di possibili condizioni macroeconomiche.

<sup>7</sup> Cfr. Capitolo 13.

<sup>8</sup> Cfr. Chew e Kerr (2005).

Nel caso dei rating interni delle banche, la stima della LGD non viene necessariamente incorporata in un rating della specifica esposizione. In altri termini, non sempre si procede a indicare uno specifico facility rating. Al rating di PD (che misura il rischio del debitore) si affianca una stima della LGD sui diversi prestiti; le due grandezze vengono quindi utilizzate congiuntamente per la stima del tasso di perdita attesa.

#### 14.2.2 I rating delle agenzie

Le agenzie di rating sono nate ai primi del Novecento, negli Usa. I mercati finanziari di quel Paese, nella seconda metà dell'Ottocento, avevano conosciuto un significativo sviluppo delle obbligazioni emesse da compagnie ferroviarie; negli ultimi anni del XIX secolo, tuttavia, una consistente ondata di insolvenze – di società ferroviarie ma anche di titoli emessi dagli enti locali – aveva profondamente scosso la fiducia del pubblico in questo tipo di investimenti. Fu in questo contesto che, nel 1909, John Moody rese noto il suo primo giudizio sull'affidabilità di un'emissione obbligazionaria. Mano a mano che, negli anni successivi, l'agenzia andava conquistandosi una favorevole reputazione presso il pubblico, le società interessate a raccogliere nuovi prestiti scoprirono l'utilità di presentarsi sul mercato accompagnate da un rating. Nei quasi cento anni successivi l'agenzia Moody's ha conosciuto una progressiva espansione, che la porta a essere oggi presente in 17 Paesi con circa 800 analisti.

Nel 1916, sempre negli Stati Uniti, Standard Statistics assegnò il suo primo rating a un'obbligazione societaria; nel 1941 la fusione con la casa editrice specializzata Poor's Publishing condusse alla nascita di Standard & Poor's. Oggi l'agenzia, una divisione dalla casa editrice McGraw-Hill, opera in 16 Paesi tra cui l'Italia. I suoi giudizi coprono circa 158.000 bond, riguardanti oltre 22.000 emittenti di circa 100 nazionalità diverse.

Nel 1924 pubblicò il suo primo rating, negli Usa, la società editoriale di John Fitch, che attraverso una serie di acquisizioni successive darà vita all'odierna Fitch-ratings. La compagnia, che insieme a Moody's e Standard & Poor's riceverà dalle autorità statunitensi, nel 1975, il riconoscimento di «national recognised statistical rating organisation», si specializza in misura prevalente nella valutazione di aziende bancarie e di emissioni strutturate, mentre risulta meno attiva delle altre due agenzie nell'analisi delle imprese industriali<sup>9</sup>.

Negli ultimi cento anni i rating hanno conosciuto una crescente fortuna; tuttavia, la loro diffusione nelle principali economie avanzate è ancor oggi piuttosto disomogenea. Secondo Estrella (2000), fatto 100 il numero di imprese industria-

<sup>9</sup> Accanto ai tre soggetti ora ricordati, contraddistinti da una presenza ampia e radicata nell'intero mercato globale, il settore del rating registra l'attività di un altro centinaio di agenzie a base nazionale o locale, che spesso ricorrono a modelli automatici per valutare, a costi ridotti, un ampio numero di aziende. Cfr. Basel Committee on Banking Supervision (2000a).

li con fatturato superiore ai 500 milioni di dollari, negli Usa una cinquantina riceve il rating da Moody's, da Standard & Poor's o da entrambe le agenzie ora citate. La percentuale scende al 12-13 per cento in Olanda e nel Regno Unito, attorno al 5 per cento in Francia e attorno all'1-2 per cento in Paesi come la Germania e l'Italia.

Come documentato da Cantor e Packer (1994), inizialmente le agenzie pubblicavano i propri rating senza richiedere commissioni alle imprese oggetto di valutazione, e si finanziavano attraverso la vendita di pubblicazioni e materiali di analisi. Lo sviluppo delle macchine fotocopiatrici mise gradualmente in crisi questo *modus operandi*; si diffuse quindi la prassi di richiedere una commissione alle società valutate<sup>10</sup>.

Il compenso dell'agenzia può essere pattuito separatamente per ogni singola emissione da valutare, oppure, nel caso di società che ricorrono sovente al mercato obbligazionario, può essere costituito da un forfait periodico. Le agenzie traggono parte dei propri ricavi da servizi diversi dai rating, per esempio le attività di formazione e di consulenza fornite (attraverso strutture separate) a banche e intermediari finanziari che desiderano sviluppare i propri processi interni di rating.

I rating (in particolare quelli relativi all'emittente o alle emissioni a lungo termine) sono accompagnati da un'indicazione sulle prospettive future (outlook), che possono essere positive, negative o stabili. Tale indicazione adombra la possibilità che in futuro, tipicamente nel successivo anno o biennio, l'agenzia decida di rivedere il giudizio in senso migliorativo o peggiorativo, ma non costituisce in nessun modo una garanzia o un preannuncio che il rating sarà cambiato. La «messa sotto osservazione» (creditwatch, positivo o negativo) indica invece che sono intervenute novità riguardanti l'emittente (per esempio, la società ha annunciato per sommi capi un'operazione straordinaria che potrebbe indebolirne il patrimonio) sulle quali l'agenzia sta raccogliendo informazioni, e in funzione delle quali potrebbe modificare, in genere entro sei mesi, il proprio giudizio<sup>11</sup>.

Il processo di prima assegnazione di un rating può durare da alcune settimane a alcuni mesi. Esso è teso ad acquisire tutte le informazioni rilevanti sul grado di affidabilità di una società e a trasformare in un giudizio sintetico questa mole di dati (spesso di natura qualitativa, e perciò difficilmente quantificabile in modo assoluta-

<sup>10</sup> Tale prassi conobbe una forte accelerazione negli anni Settanta, allorché, dopo il fallimento di Penn Central Railroad, i risparmiatori abbandonarono in massa il mercato delle passività aziendali a breve termine (cambiali finanziarie). Non potendo più fare affidamento su nuove emissioni, altre società sperimentarono crisi di liquidità, e si verificarono ulteriori dissetti, che a loro volta acuirono i timori degli investitori. Per rassicurare i risparmiatori, molti emittenti decisero allora di pagare i servigi di un'agenzia di rating.

<sup>11</sup> Riepilogando, mentre l'outlook segnala che l'agenzia dispone di nuove informazioni ancora non incorporate nel rating, insufficienti a modificare il giudizio ma indicative di un possibile miglioramento (upgrade) o peggioramento (downgrade) futuro, il creditwatch indica che l'agenzia è in attesa di formarsi un quadro preciso su uno o più eventi rilevanti di cui ancora non conosce adeguatamente i dettagli.

**Tabella 14.1 Valori mediani di alcuni financial ratio per diverse classi di rating (medie triennali 1998-2000, società non finanziarie Usa)**

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Margine operativo lordo (MOL) su oneri finanziari	21,4	10,1	6,1	3,7	2,1	0,8	0,1
MOL ante ammortamenti e svalutazioni su oneri finanziari	26,5	12,9	9,1	5,3	3,4	1,8	1,3
Cash flow operativo libero su debito totale (%)	84,2	25,2	15,0	8,5	2,6	-3,2	-12,9
Fondi dalla gestione operativa su debito totale (%)	128,8	55,4	43,2	30,8	18,8	7,8	1,6
Rendimento dei capitali investiti (%)	34,9	21,7	19,4	13,6	11,6	6,6	1,0
Utile operativo su fatturato (%)	27,0	22,1	18,6	15,4	15,9	11,9	11,9
Debito a lungo termine su capitali investiti (%)	13,3	28,2	33,9	42,5	57,2	69,7	68,8
Debito totale/capitali investiti (%)	22,9	37,7	42,5	48,2	62,6	74,8	87,7
Numero di società	8	29	136	218	273	281	22

Fonte: Standard & Poor's, citato in de Servigny e Renault (2004)

mente oggettivo) attraverso una procedura uniforme nel tempo e tra emittenti. Il processo di rating delle maggiori agenzie prevede che la società richiedente venga seguita da un team, che analizza sia il rischio di business che il rischio finanziario dell'impresa.

L'analisi del rischio di business comporta la valutazione del contesto economico e di mercato nel quale opera l'emittente, valutazione tesa ad asseverare, per esempio, la posizione competitiva all'interno del settore merceologico di riferimento, le prospettive del settore stesso, i rischi per la tenuta del fatturato e dei margini di profitto. Vengono altresì valutate le future strategie gestionali e di sviluppo indicate dall'impresa, tenendo conto delle capacità dimostrate in passato dal management e della linearità dei meccanismi di governo aziendale.

L'analisi del rischio finanziario utilizza i dati di bilancio<sup>12</sup> i budget futuri comunicati dall'impresa, oltre a proprie simulazioni sui flussi di cassa attesi e sulla loro adeguatezza ai fini del rimborso del debito. Sulla base dei dati rettificati, si calcolano indici di bilancio per meglio apprezzare la solidità finanziaria dell'impresa (per esempio, il quoziente tra volume totale del debito netto e flussi di cassa incassati in un anno). Tali indici (ratio) vengono sovente confrontati con i valori «tipici» delle imprese a cui l'agenzia ha già concesso un determinato rating (i cosiddetti *valori mediani*), al fine di verificarne la coerenza con le prassi valutative seguite in passato; un esempio di valori mediani è riportato nella Tab. 14.1.

Il confronto con i valori mediani non avviene in modo automatico, né i suoi esiti sono tassativi; rappresenta comunque un utile termine di paragone per garantire

<sup>12</sup> Può accadere che i dati di bilancio vengano rettificati in senso prudentiale, per tenere conto, per esempio, di forme di finanziamento precarie che potrebbero venire meno già nel brevissimo termine.

**Tabella 14.2 Valori minimi (in %) del cash flow coverage ratio (cash flow libero/debito) per differenti classi di rating**

Rating di business risk	Rating finale				
	AAA	AA	A	BBB	BB
Eccellente (AAA/AA)	80	60	40	25	10
Sopra la media (A)	150	80	50	30	15
Medio (BBB)	—	105	60	35	20
Sotto la media (BB)	—	—	85	40	25
Molto sotto la media (B)	—	—	—	65	45

Fonte: Standard & Poor's (2003)

**Tabella 14.3 Valori minimi (in %) del leverage (debito/capitali investiti) per differenti classi di rating**

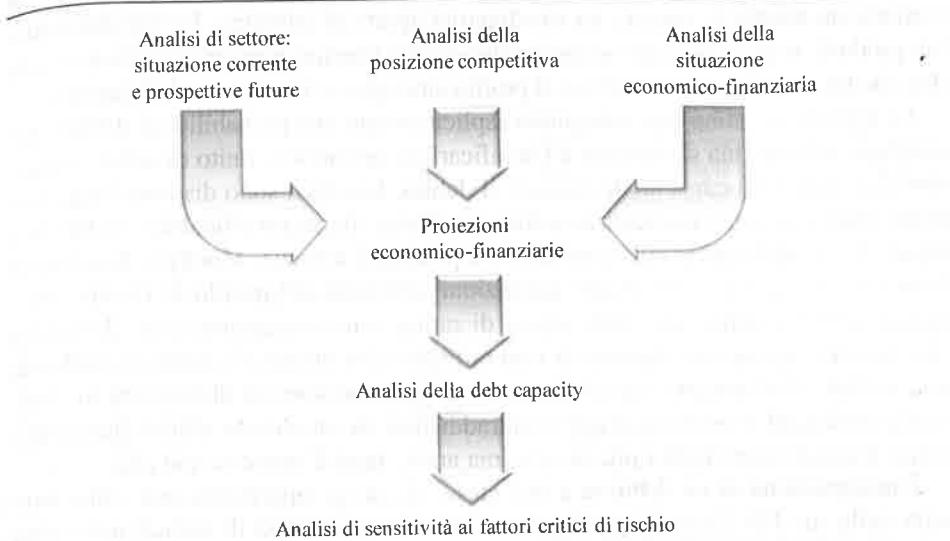
Rating di business risk	Rating finale				
	AAA	AA	A	BBB	BB
Eccellente (AAA/AA)	30	40	50	60	70
Sopra la media (A)	20	25	40	50	60
Medio (BBB)	—	15	30	40	55
Sotto la media (BB)	—	—	25	35	45
Molto sotto la media (B)	—	—	—	25	35

Fonte: Standard & Poor's (2003)

omogeneità all'attività di rating (nel tempo e tra emittenti diversi). Questa parte dell'analisi concorre a determinare il cosiddetto *financial risk* dell'azienda oggetto di valutazione, e risente anche del livello di business risk riscontrato in precedenza, che può indurre a svolgere in modo più o meno severo l'analisi di coerenza tra i ratio finanziari e i valori mediani tipici delle diverse classi di rating di cui si è detto poc'anzi. Per esempio, un più elevato livello di indebitamento può essere considerato accettabile, e condurre a un rating comparativamente migliore, se la società valutata ha una quota di mercato costante in un settore non influenzato dal ciclo economico, così che i suoi flussi di cassa futuri possono essere considerati stabili.

Le Tab. 14.2 e Tab. 14.3 mostrano alcuni esempi di questa interazione; si noti come cash flow più modesti (Tab. 14.2) e leverage più elevati (Tab. 14.3) vengano giudicati compatibili con un certo rating purché all'impresa venga associato un business risk modesto. Peraltro, tale flessibilità non è infinita: per esempio, una società con un

**Figura 14.1 Processo di analisi sottostante l'assegnazione del rating di un'agenzia**



cash flow inferiore all'80 per cento del debito non potrà ottenere un rating AAA, indipendentemente dal livello del suo rischio di business.

I dati «quantitativi» tratti dal bilancio rappresentano dunque soltanto un ingrediente di un processo più complesso. L'approccio seguito dalle grandi agenzie di rating si basa infatti sull'interazione tra rischio finanziario e rischio di business, secondo una logica non dissimile dal modello di Merton presentato nel Capitolo 12. La Fig. 14.1 riassume schematicamente le principali fasi di tale processo. Come si vede, l'analisi dei due profili di business risk e di financial risk è seguita generalmente dalla formulazione di previsioni relative alla capacità futura dell'impresa di generare flussi di cassa operativi. Sulla base di tali previsioni è possibile valutare la capacità di indebitamento dell'impresa (debt capacity). Tale valutazione viene peraltro accompagnata da analisi di sensitività volte a verificare cosa accadrebbe alla capacità di indebitamento dell'impresa nell'ipotesi di scenari worst case, legati per esempio, a un calo della domanda, una perdita di efficienza, un aumento del costo dell'indebitamento, o altri possibili eventi sfavorevoli.

I risultati delle analisi sopra descritte vengono sintetizzati in un apposito rapporto che raccomanda un determinato giudizio, sottoposto all'esame di un comitato di rating, che valuta l'adeguatezza delle informazioni ricevute dall'emittente, la coerenza tra financial risk e business risk, le prevedibili evoluzioni future delle strategie aziendali e degli assetti economico-patrimoniali. Il giudizio prescelto dal comitato di rating viene portato a conoscenza dell'impresa esaminata, che può chiederne una revisione, purché fornisca nuova informazione non incorporata nel report. Sulla base di questi eventuali ulteriori elementi, il rating può essere rivisto e viene quindi defi-

nitivamente approvato. Se l'emittente autorizza la diffusione del giudizio finale<sup>13</sup>, questo viene divulgato tramite i principali canali d'informazione finanziaria, un comunicato stampa e, spesso, un sito Internet aperto al pubblico. Per gli abbonati a tali prodotti, le agenzie rendono inoltre disponibili ulteriori rapporti e comunicati che descrivono in modo più dettagliato il profilo strategico e finanziario dell'impresa.

Le agenzie di rating non assegnano esplicitamente una probabilità di default agli emittenti valutati, ma si limitano a classificarli in un numero finito di classi, espresive di una diversa capacità di ripagare il debito. Le classi sono disposte lungo una scala, dalla più sicura (indicata di solito con AAA) alla meno affidabile. La Tab. 14.4 riporta le classi di rating utilizzate dalle tre principali agenzie, Moody's, Standard & Poor's e Fitchratings, con alcune definizioni sintetiche del profilo di rischio corrispondente<sup>14</sup>. Le definizioni delle classi di rating sono non-quantitative: il rating è una variabile qualitativa discreta di tipo ordinale (che misura il rischio di credito di una società relativamente a quello di altre). Esse consentono di distinguere tra debitori/investimenti *investment-grade* (contraddistinti da un'elevata affidabilità) e *speculative-grade* (con rischio più elevato, ma anche tassi d'interesse più alti).

L'assegnazione di un debitore a una classe di rating rappresenta una stima indiretta della sua PD. La corrispondenza tra classi e probabilità di default può infatti essere ricavata osservando la percentuale di insolvenze verificatesi, in passato, nelle diverse classi; a tal fine, le agenzie diffondono pubblicamente un elevato volume di informazioni sulla performance passata delle diverse classi. Simili statistiche vengono largamente utilizzate dagli investitori; rituneremo in argomento nel paragrafo dedicato alla rating quantification.

#### 14.2.3 I rating interni delle banche

Nel § 14.2.1 si è visto come i rating di PD stimati internamente dalle banche differiscano da quelli delle agenzie sotto svariati profili (diversa tipologia di soggetti valutati, diverso set informativo disponibile, diverso sistema di incentivi, da cui scaturisce un differente orizzonte di valutazione). Tuttavia, anch'essi rappresentano un giudizio sintetico sulla capacità di un'impresa di adempiere puntualmente alle proprie obbligazioni, valutandone financial risk e business risk. Restano dunque invariati i fattori presi in considerazione, quali per esempio la redditività, il grado di leva

<sup>13</sup> In molti Paesi, in sede di prima assegnazione del rating, se l'emittente non ritiene corretto il giudizio finale, l'agenzia è tenuta a mantenerlo riservato. Questo comportamento, apparentemente sorprendente, si giustifica con il fatto che il rating è, in primo luogo, un servizio acquistato dagli emittenti per rassicurare i potenziali sottoscrittori. In questi casi, un giudizio che l'agenzia ritiene di aver elaborato correttamente non viene diffuso agli investitori; tuttavia, la stessa assenza di un rating, in particolare a fronte di emissioni o emittenti di grandi dimensioni, costituisce di per sé un'informazione che il mercato è libero di valutare. Cfr. Mancinelli (2005).

<sup>14</sup> Può essere utile ricordare che normalmente il rating assegnato a un'impresa non può essere migliore di quello del Paese in cui essa opera. Tra le pochissime eccezioni va ricordata la Toyota, alla quale S&P ha attribuito un rating AAA, più elevato di quello del Giappone (AA-), in relazione alla scarsa dipendenza dell'azienda dall'economia del Paese, anche grazie alla diversificazione geografica delle sue attività.

Tabella 14.4 Classi di rating e relativo significato

Moody's	S&P e Fitchratings	Nomenclatura corrente	Descrizione
Aaa	AAA		Buona qualità dell'attivo, ampia diversificazione e dimensione consolidata, eccellente posizionamento di mercato, abilità manageriale distintiva, elevatissime capacità di copertura del debito.
Aa1	AA+		Buona qualità e liquidità dell'attivo, buon inserimento di mercato e diversificazione di sbocchi, buona qualità del management, solida capacità di copertura del debito
Aa2	AA	High investment grade	
Aa3	AA-		
A1	A+	Investment grade	Qualità e liquidità dell'attivo soddisfacenti, inserimento di mercato e qualità del management nella media, standard creditizi normali, capacità di copertura del debito nella media.
A2	A		Qualità e liquidità dell'attivo accettabili seppure con un grado di rischio apprezzabile, più debole capacità di copertura del debito
A3	A-	Lower investment grade	
Baa1	BBB+		Qualità e liquidità dell'attivo accettabili seppure con un grado di rischio significativo, scarsa diversificazione delle attività, contenuta liquidità e limitati margini di copertura del debito
Baa2	BBB		
Baa3	BBB-		
Ba1	BB+	Below investment grade	Qualità e liquidità dell'attivo accettabili seppure con un grado di rischio significativo, scarsa diversificazione delle attività, contenuta liquidità e limitati margini di copertura del debito
Ba2	BB		
Ba3	BB-		
B1	B+	Non investment grade	Credito sotto osservazione, qualità dell'attivo accettabile seppure con difficoltà temporanee di liquidità, alta leva finanziaria, qualche debolezza manageriale, di posizionamento e di inserimento di mercato
B2	B		
B3	B-	Speculative grade	
Caa	CCC		Come sopra, ma con difficoltà evidenti e gestione del debito a volte tesa e affannosa. Incertezze sulle possibilità di ripagamento degli interessi, non ancora del capitale
Ca	CC	High risk	

finanziaria, la liquidità, le prospettive del settore di appartenenza, la qualità del management, la posizione competitiva.

In generale, ogni banca segue procedure e prassi diverse. Esistono tuttavia alcuni punti fermi, cui sarà dedicato il seguito di questo paragrafo: la scelta del numero di classi di rating, la selezione delle informazioni rilevanti, la scelta di una definizione di insolvenza, il passaggio dal rating di PD alla valutazione delle diverse esposizioni creditizie, i tempi e le logiche di revisione del rating.

Per quanto riguarda il numero di classi («granularità» del sistema di rating), le survey condotte negli Usa e a livello internazionale<sup>15</sup> mostrano una notevole variabi-

<sup>15</sup> Cfr. English e Nelson (1998), Basel Committee on Banking Supervision (2000c), Carey e Treacy (2000).

lità tra banche. Il numero di classi «pass» (classi dedicate a soggetti «affidabili», dette anche *non problem grades* e contenenti *non impaired loan*) è mediamente pari a 10, ma può variare da un minimo di due a un massimo di oltre 20. Il numero di classi dedicate a soggetti «problematici» (cui la banca vorrebbe poter revocare il credito) è in media tre, ma può variare da zero a sei. In generale, la granularità cresce con l'età del sistema di rating ed è mediamente più elevata per le banche più esperte nella gestione del rischio di credito.

Un sistema di rating granulare, nonostante la maggiore complessità connessa al processo di rating assignment, risulta preferibile per due motivi: da un lato, aiuta a evitare l'eccessiva concentrazione dei debitori in una o poche classi, dall'altro consente un pricing dei prestiti più accurato<sup>16</sup>, aiutando la banca a essere maggiormente competitiva. Infatti, visto che il tasso su un prestito è funzione della sua PD<sup>17</sup>, riunire molti debitori in una sola classe di rating (cui corrisponde una PD unica) equivale a praticare a tutti questi debitori, a parità di altre condizioni, lo stesso tasso attivo. Questo tasso risulterà troppo alto per i debitori migliori (che potranno trovare tassi più convenienti altrove e quindi lasciare la banca), troppo basso per i debitori peggiori (che aumenteranno la loro domanda di credito). Al contrario, suddividere i debitori in un numero maggiore di classi consente di ottenere stime più precise della PD e di praticare tassi più direttamente connessi all'effettivo grado di rischio dei debitori<sup>18</sup>.

Per quanto riguarda la informazioni utilizzate, i sistemi di rating delle banche sono molto diversi a seconda del segmento di clientela considerato. Nel caso delle imprese, i principali input potrebbero essere i seguenti:

- indici economico-finanziari tratti dal bilancio, che possono essere analizzati direttamente da un esperto oppure elaborati in modo automatico da un sistema di scoring (basato, per esempio, sull'analisi discriminante o su un modello logit);
- variabili qualitative (tipicamente non elaborabili con un modello di scoring) quali la qualità del management, il posizionamento competitivo dell'impresa, la qualità e il grado di innovazione dei prodotti/servizi offerti dalla stessa;
- un'analisi delle condizioni e delle prospettive del settore di appartenenza dell'impresa, solitamente affidata a un analista specializzato;
- nel caso di imprese già clienti della banca, un'analisi («andamentale») delle informazioni che derivano dall'evoluzione dei rapporti di credito/debito (presenza di sconfinamenti e ritardi nei pagamenti, presenza di effetti presentati per l'incasso e ritornati insoluti ecc.);
- ove presenti, i dati della centrale dei rischi pubblica (Central Credit Registry) o di centrali dei rischi private (Credit Bureau). Si tratta di consorzi interbancari (gesti-

<sup>16</sup> Cfr. il Capitolo 16.

<sup>17</sup> Cfr. l'Appendice 12A al Capitolo 12.

<sup>18</sup> Questa capacità di differenziare le condizioni praticate alla clientela risulta particolarmente rilevante nel segmento delle grandi imprese (large corporate), dove le banche sono più competitive e i clienti maggiormente «mobili».

ti dalle autorità di vigilanza o da società private) che raccolgono informazioni su tutti i crediti erogati da ogni singola banca e li restituiscono, in forma aggregata, a tutte le banche partecipanti alla rilevazione. Attraverso queste centrali, è possibile ottenere dati sui rapporti tra l'impresa e l'intero sistema bancario, verificando, per esempio, se essa ha recentemente richiesto credito ad altre, banche, o ha aumentato il tasso di utilizzo degli affidamenti ricevuti<sup>19</sup>.

In alcuni casi, e in particolare nel caso di piccoli prestiti a privati e famiglie (c.d. settore *retail*), gli input disponibili possono essere elaborati in modo totalmente automatico, attribuendo a ogni variabile un peso determinato in funzione di un modello di natura statistica. In questi casi le variabili qualitative (di norma raccolte chiedendo al debitore di compilare un questionario *ad hoc*) vengono tradotte in un valore numerico e successivamente inserite all'interno di modelli statistici che cercano di valutarne, sulla base delle caratteristiche dei prestiti risultati insolventi in passato, la rilevanza ai fini della previsione dei default (nello stesso modo in cui i modelli esaminati nel Capitolo 10 determinano il peso da attribuire a un indice di bilancio).

In altri casi, si lascia maggiore discrezionalità agli analisti addetti al credito; gli output dei sistemi di scoring, ove disponibili, possono essere utilizzati oppure modificati laddove il loro risultato venga giudicato non affidabile (per esempio, sulla base di informazioni di natura qualitativa che l'analista conosce, e che il modello di scoring tipicamente non ha considerato<sup>20</sup>).

Il ricorso a scoring automatici (comunque integrati con le valutazioni soggettive di un'analista) è generalmente più accentuato nel caso delle piccole imprese. Per le grandi imprese, invece, è più frequente il ricorso ad analisi fondate sul lavoro di uno o più esperti<sup>21</sup>. Queste differenze fra segmenti di clientela sono dovute a due principali fattori: da un lato, i guadagni connessi ai prestiti a una piccola impresa sono spesso tali da non giustificare elevati costi di analisi e monitoraggio, e richiedono dunque l'adozione di procedure il più possibile standardizzate e poco dispendiose; dall'altro, il numero di controparti di grandi dimensioni è generalmente piuttosto limitato, e non è dunque possibile costruire campioni abbastanza numerosi da rendere significativi i risultati di un modello statistico.

La costruzione del rating di PD passa, talvolta, attraverso un processo a più stadi, che prevede la produzione di rating «parziali», ossia di giudizi che incorporano solo alcuni aspetti dell'analisi. Così, per esempio, potrebbero esistere un rating di primo

<sup>19</sup> Centrali dei rischi pubbliche sono presenti, per esempio, in Spagna, Francia e Italia. Esse risultano invece poco diffuse nei Paesi anglosassoni. Per approfondimenti sull'Italia e per un quadro internazionale, cfr. rispettivamente Banca d'Italia (2002) e Trucharte Artigas (2004).

<sup>20</sup> Per un esame del diverso ruolo che gli addetti ai fidi possono rivestire nel processo di assegnazione del rating nelle grandi banche italiane, cfr. De Laurentis e Di Giulì (2004).

<sup>21</sup> Per un'analisi più approfondita, cfr. Basel Committee on Banking Supervision (2000c), dove si afferma che «statistically-based approaches have a more prominent role in small corporate lending than for middle market or large corporates».

livello fondato unicamente su un modello di scoring (a sua volta basato su variabili di bilancio), un rating di secondo livello che integra il precedente con le informazioni di natura qualitativa sull'impresa un rating di terzo livello che tiene conto anche delle prospettive del settore o del Paese in cui il debitore opera.

Dal rating di PD del debitore discende, data una stima della LGD (cfr. Capitolo 13), la stima del tasso di perdita attesa di uno specifico prestito; in tal caso, il procedimento che conduce a valutare la qualità del prestito è detto bi-dimensionale, perché considera separatamente rischio di default e rischio di recupero. Alcune banche, anziché stimare separatamente PD ed LGD, preferiscono valutare direttamente le singole esposizioni, assegnandole a classi contraddistinte da tassi di perdita attesa (EL rate) omogenei. Questo approccio unidimensionale prevede che il rating venga attribuito direttamente al prestito (si parla perciò di «facility rating») ed è utilizzato, talvolta, per le esposizioni retail come i mutui immobiliari e le carte di credito.

### 14.3 Rating quantification

#### 14.3.1 Gli approcci possibili

Una volta assegnato un rating ai debitori, resta il problema di tradurre tale rating in una PD. Esistono, in proposito, tre possibili approcci:

- l'*approccio statistico*, che prevede che la PD venga calcolata, per ogni singolo debitore, a partire dal valore del punteggio ottenuto con un modello di scoring. Tale approccio, se da un lato è rapido e consente di assegnare a ogni cliente una PD specifica, dall'altro soffre di due limitazioni. In primo luogo, è praticabile soltanto quando la valutazione del cliente è avvenuta attraverso un modello statistico (e non in caso di valutazione qualitativa, operata da un esperto); in secondo luogo, può basarsi su ipotesi di lavoro scarsamente realistiche. Un esempio, visto nel Capitolo 11, è quello delle PD ricavate dagli score di analisi discriminante, che ipotizzano che la distribuzione delle variabili usate nello score sia di tipo normale multivariato. Queste due limitazioni fanno sì che l'approccio statistico venga utilizzato raramente e con molta cautela;
- l'*approccio attuariale*, o delle frequenze di default, che prevede che il tasso di insolvenza passato registrato sulle diverse classi di rating venga utilizzato come stima della PD futura dei debitori assegnati alle differenti classi. Così, per esempio, se i dati passati mostrano che l'1 per cento dei clienti assegnati alla classe BB tende a fallire entro un anno, una PD dell'1 per cento verrà assegnata a tutti i debitori oggi presenti in tale classe. Questo approccio è generalmente seguito dalle agenzie di rating, che periodicamente diffondono statistiche sui default registrati negli anni e decenni precedenti. Anche molte banche adottano lo stesso approccio, ma i relativi risultati non vengono resi pubblici. All'approccio attuariale sono dedicate le successive due sezioni di questo paragrafo;
- l'*approccio del mapping*. Proprio perché esistono dati pubblici per i tassi di default dei rating emessi dalle agenzie, molte banche trovano utile stabilire una

corrispondenza («mapping») tra i propri rating interni e quelli di Moody's o Standard & Poor's (per esempio stabilendo, sulla base di un giudizio soggettivo, che un rating interno pari a «10» equivale a un «AAA» di Standard & Poor's), e utilizzare quindi i tassi di default pubblicati dalle agenzie come stima delle PD associate ai propri rating interni. Questo approccio richiede molta cautela, visto che la corrispondenza tra rating interni e rating di agenzia potrebbe essere imperfetta; si pensi, in proposito, al fatto che le agenzie valutano «through the cycle» e le banche «point in time»: questa differenza, da sola, potrebbe rendere il mapping instabile e inaffidabile.

#### 14.3.2 L'approccio attuariale: tassi di insolvenza marginali, cumulati e annualizzati

A partire dagli anni Novanta, le principali agenzie di rating internazionali hanno iniziato a rendere pubblici i dati relativi ai tassi di insolvenza (o «mortalità») registrati dalle imprese dotate di rating. Vengono inoltre diffusi, periodicamente, dati sulle variazioni di rating (rating migration), ossia sulla frequenza con cui le imprese delle diverse classi di rating «migrano» verso altre classi (tassi di migrazione); simili dati vengono organizzati in matrici, dette *matrici di transizione*.

Per stimare questi dati, si procede come segue:

- all'inizio di ogni anno gli emittenti (o le emissioni) vengono raggruppati per classi di rating; ogni anno viene chiamato «coorte» o *pool*;
- ogni pool viene monitorato negli anni successivi, registrando i tassi di insolvenza (annui e pluriennali) relativi a un determinato rating;
- i tassi annui e pluriennali di insolvenza relativi ai diversi pool possono essere combinati per ottenere dati medi.

Più precisamente, è possibile calcolare tassi di default ( $d$ ) marginali o cumulati. Il tasso di insolvenza marginale relativo all'anno  $t$  è dato da:

$$d'_t = \frac{D_t}{N_t} \quad [14.1]$$

dove  $D_t$  indica il numero di insolvenze registrato nell'anno  $t$ ,  $N_t$  il numero di emittenti (o di obbligazioni) presenti all'inizio dell'anno  $t$ . È inoltre possibile indicare con:

$$s'_t = \frac{N_t - D_t}{N_t} = 1 - d'_t \quad [14.2]$$

il tasso di sopravvivenza marginale nell'anno  $t$ .

I tassi di insolvenza marginali calcolati su una popolazione di emissioni obbligazionarie rappresentano una stima della probabilità che un'emissione risulti insolvente dopo  $t$  anni dall'emissione. La Tab. 14.5 riporta un esempio, stimato su un campione di obbligazioni con rating emesso da Moody's.

**Tabella 14.5 Tassi di insolvenza marginali ( $d'$ ) su un campione di bond con rating di Moody's**

Rating	Anno (t)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aaa	0,01%	0,02%	0,03%	0,03%	0,07%	0,07%	0,11%	0,12%	0,14%	0,15%
Aa1	0,02%	0,05%	0,07%	0,08%	0,10%	0,10%	0,11%	0,12%	0,13%	0,15%
Aa2	0,02%	0,08%	0,12%	0,12%	0,14%	0,12%	0,11%	0,11%	0,13%	0,15%
Aa3	0,03%	0,08%	0,13%	0,14%	0,17%	0,15%	0,12%	0,16%	0,19%	0,22%
A1	0,05%	0,09%	0,14%	0,16%	0,21%	0,18%	0,14%	0,20%	0,24%	0,28%
A2	0,06%	0,09%	0,15%	0,18%	0,24%	0,20%	0,15%	0,24%	0,30%	0,35%
A3	0,09%	0,18%	0,23%	0,30%	0,33%	0,30%	0,31%	0,38%	0,42%	0,42%
Baa1	0,13%	0,27%	0,31%	0,43%	0,42%	0,40%	0,47%	0,51%	0,53%	0,50%
Baa2	0,16%	0,36%	0,40%	0,55%	0,51%	0,49%	0,63%	0,64%	0,65%	0,57%
Baa3	0,70%	1,11%	1,11%	1,19%	1,15%	0,98%	0,93%	0,91%	0,90%	0,84%
Ba1	1,25%	1,85%	1,82%	1,84%	1,80%	1,47%	1,22%	1,17%	1,15%	1,11%
Ba2	1,79%	2,59%	2,53%	2,48%	2,44%	1,96%	1,51%	1,44%	1,40%	1,39%
Ba3	3,96%	3,90%	3,53%	3,12%	2,71%	2,60%	1,81%	1,75%	1,50%	1,47%
B1	6,14%	5,21%	4,54%	3,75%	2,98%	3,25%	2,11%	2,05%	1,60%	1,55%
B2	8,31%	6,52%	5,54%	4,39%	3,24%	3,90%	2,41%	2,35%	1,70%	1,64%
B3	15,08%	6,82%	5,21%	3,80%	3,14%	4,43%	2,58%	1,69%	2,54%	2,01%

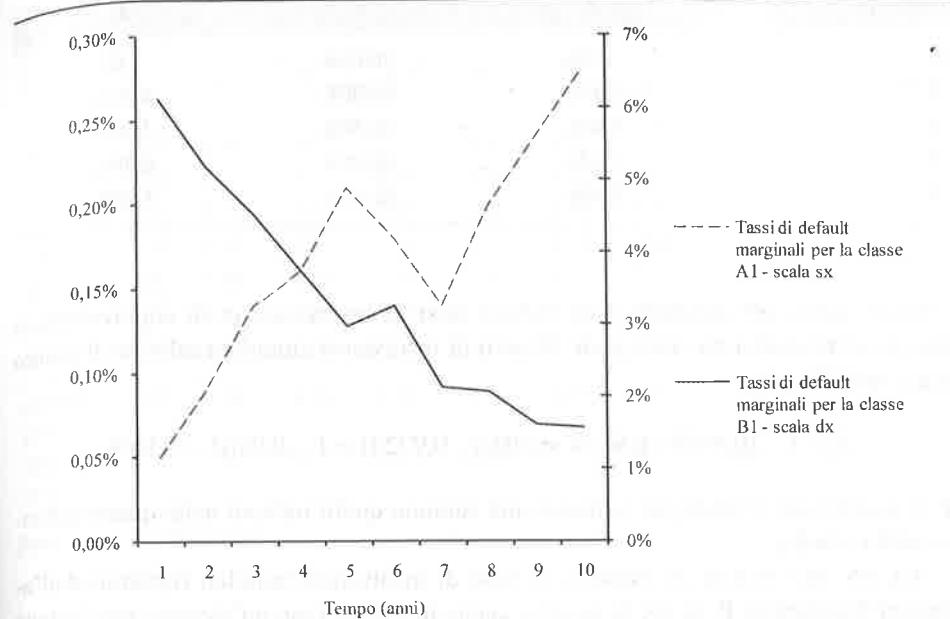
Fonte: Moody's Investors Service

Osserviamo che:

- i pool con rating peggiore (se si eccettuano alcuni rari casi) sono contraddistinti da  $d'$  più elevate; i rating assegnati dalle agenzie riescono dunque a classificare in maniera efficace il grado di rischiosità dei diversi emittenti;
- i tassi di insolvenza marginali crescono al crescere di  $t$  per le classi di rating migliori, mentre accade il contrario per le classi di rating peggiori. Il fenomeno è illustrato nella Fig. 14.2, che per semplicità riporta solo i dati delle classi A1 e B1. Questo comportamento è coerente con le previsioni del modello di Merton (cfr. Capitolo 12)<sup>22</sup> e si spiega con il fenomeno del *rating drift*: in pratica, mentre col passare del tempo le aziende con rating elevato (se non falliscono) rischiano di migrare in classi di rating peggiori (cui si associano tassi di insolvenza più elevati), al contrario, le imprese peggiori, se non falliscono, possono migliorare il loro rating e dunque ridurre, col passare degli anni, il proprio tasso di insolvenza marginale.

<sup>22</sup> A questo fenomeno è riconducibile la diversa inclinazione della curva degli spread per i titoli investment grade e speculative grade, illustrata sempre nel Capitolo 12.

**Figura 14.2 Esempi di curve per scadenza dei tassi marginali di insolvenza**



Definiamo ora il tasso di insolvenza *cumulato* relativo al periodo compreso tra 0 e  $T$ ,  $d_T$ , come:

$$d_T = \frac{\sum_{t=1}^T D_t}{N_1} \quad [14.3]$$

Esso è dato da tutti i default accaduti tra 0 e  $T$ , diviso per la consistenza iniziale del pool. Analogamente, il tasso di sopravvivenza cumulato tra 0 e  $T$  è dato da:

$$s_T = 1 - d_T = \frac{N_1 - \sum_{t=1}^T D_t}{N_1} \quad [14.4]$$

Ricordando che, per definizione,  $N_{t+1} = N_t - D_t$ , è possibile riscrivere  $s_t$  come:

$$s_T = \prod_{t=1}^T s'_T \quad [14.5]$$

da cui:

$$d_T = 1 - s_T = 1 - \prod_{t=1}^T (1 - d'_T) \quad [14.6]$$

Dai tassi di insolvenza marginali è possibile ricavare, utilizzando la [14.6], i tassi di insolvenza cumulati. Questi ultimi rappresentano una proxy della probabilità di insolvenza dal momento dell'emissione fino a un certo anno successivo alla stessa.

**Tabella 14.6 Esempio di tassi di insolvenza marginali e cumulati**

Anno ( $t$ )	$d_t$	$s'_t$	$d_T$
1	0,0%	100,0%	0,0%
2	0,91%	99,09%	0,91%
3	3,66%	96,34%	4,54%
4	1,93%	98,07%	6,38%
5	2,78%	97,22%	8,98%

Consideriamo, per esempio (Tab. 14.6), i tassi di insolvenza (e di sopravvivenza) marginali relativi a un certo pool. Il tasso di insolvenza cumulato relativo al quinto anno sarà dato da:

$$d_5 = 1 - (0,9909 \cdot 0,9634 \cdot 0,9807 \cdot 0,9722) = 1 - 0,9103 = 8,98\%$$

Più in generale, i valori per i diversi anni saranno quelli indicati nella quarta colonna della tabella.

La Tab. 14.7 riporta un esempio di tassi di insolvenza cumulati registrati dall'agenzia Standard & Poor's<sup>23</sup>. Si osserva anche in questo caso un'elevata correlazione fra classi di rating e tassi di insolvenza medi. A differenza di quanto riscontrato per i tassi di insolvenza marginali della Tab. 14.6, i tassi di insolvenza cumulati sono ovviamente tutti crescenti al variare di  $T$ .

Dato un certo tasso d'insolvenza cumulato  $d_T$ , è inoltre possibile ricavare il corrispondente tasso di insolvenza medio annuo  $\bar{d}_T$ , ovvero il valore che, sostituito ai diversi tassi di insolvenza marginali, condurrebbe a  $d_T$ . In simboli, ricordando la [14.6]:

$$\bar{d}_T = d^* | 1 - \prod_{t=1}^T (1 - d^*) = 1 - (1 - d^*)^T = d_T$$

da cui:

$$\bar{d}_T = 1 - \sqrt[T]{1 - d_T} \quad [14.7]$$

I tassi d'insolvenza medi annui possono risultare utili per determinare lo spread necessario a copertura della perdita attesa di un prestito. Tale spread, infatti, è funzione della PD e del tasso di recupero atteso. Tuttavia, in presenza di prestiti pluriennali, il tasso di insolvenza cumulato fornirebbe una stima della PD eccessivamente elevata, che va dall'emissione fino alla scadenza del prestito. Il suo utilizzo per il calcolo dello spread (che, per definizione, è sempre espresso su base annua)

**Tabella 14.7 Tassi di insolvenza cumulati ( $d_T$ ) per classe di rating (valori %)**

Rating	Anno ( $T$ )									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA	0,00	0,00	0,06	0,12	0,19	0,35	0,52	0,82	0,93	1,06
AA	0,00	0,02	0,10	0,20	0,35	0,53	0,70	0,84	0,91	1,00
A	0,05	0,14	0,24	0,39	0,58	0,77	0,97	1,22	1,49	1,76
BBB	0,18	0,42	0,67	1,21	1,68	2,18	2,66	3,07	3,38	3,71
BB	0,91	2,95	5,15	7,32	9,25	11,22	12,29	13,40	14,33	15,07
B	4,74	9,91	14,29	17,42	19,70	21,26	22,56	23,75	24,71	25,55
CCC	18,90	26,01	30,99	35,10	39,02	39,88	40,87	41,17	41,86	42,72
Investment grade	0,07	0,18	0,31	0,54	0,78	1,05	1,31	1,58	1,79	2,02
Speculative grade	3,75	7,60	11,03	13,79	16,03	17,72	18,90	20,00	20,93	21,73

Fonte: Standard & Poor's (1998)

**Tabella 14.8 Tassi di insolvenza marginali, cumulati e medi della classe BB**

Anno ( $t$ )	$d_t$	$d_T$	$\bar{d}_T$
1	0,0%	0,0%	0,00%
2	0,91%	0,91%	0,46%
3	3,66%	4,54%	1,54%
4	1,93%	6,38%	1,63%
5	2,78%	8,98%	1,86%

finirebbe per generare un premio di rendimento molto superiore al dovuto. I tassi di insolvenza medi annui generati dalla [14.7] appaiono quindi maggiormente adatti allo scopo.

Utilizzando i dati della Tab. 14.6, la Tab. 14.8 riporta i dati relativi ai tassi di insolvenza annui. Si noti come questi ultimi siano significativamente inferiori ai tassi di insolvenza cumulati.

La stima di  $d'_t$ ,  $d_T$  e  $\bar{d}_T$  è in apparenza semplice. In realtà, è necessario tenere conto di alcune complicazioni tecniche, che possono condurre ad adottare soluzioni differenti. Queste complicazioni riguardano in particolare la definizione di insolvenza, la natura dei dati e la natura del campione utilizzato.

La *definizione di insolvenza*, così come si è visto a proposito dei modelli di scoring, può variare in modo significativo nelle diverse analisi. Così, per esempio, Standard & Poor's la definisce come l'inadempienza di una qualsiasi obbligazione

<sup>23</sup> I tassi d'insolvenza cumulati della Tab. 14.7 provengono da pool diversi da quelli utilizzati per la stima dei tassi d'insolvenza marginali della Tab. 14.5, e non è dunque possibile derivare gli uni dagli altri utilizzando la [14.6]. Il lettore è invitato, per esercizio, a ricavare i tassi cumulati impliciti nella Tab. 14.5 e i tassi marginali impliciti nella Tab. 14.7.

finanziaria (l'insolvenza scatta quindi alla prima scadenza in cui l'emittente omette il dovuto pagamento degli interessi o la restituzione del capitale<sup>24</sup>). Diversamente, Moody's adotta una definizione più ampia che comprende ogni mancato o ritardato rimborso di interessi e/o di capitale, la bancarotta, la liquidazione coatta amministrativa o, ancora, la ristrutturazione del debito<sup>25</sup>.

I dati possono essere riferiti al valore monetario delle obbligazioni comprese nel campione, al numero di obbligazioni o, ancora, al numero di emittenti. Nel primo caso il tasso di insolvenza relativo a una certa classe di rating viene calcolato come rapporto fra il valore dei titoli divenuti insolventi nel periodo  $t$  e il valore complessivo dei titoli in essere all'inizio del medesimo periodo. Nel secondo caso il tasso di insolvenza relativo a una determinata classe di rating viene calcolato come rapporto fra il numero di emissioni insolventi in  $t$  e il numero di emissioni presenti all'inizio di  $t$ , senza tenere conto del diverso valore dei titoli. Nel terzo caso, la variabile rilevante è il numero di emittenti: società presenti nel campione con più titoli vengono dunque conteggiate una sola volta. Il primo criterio è stato seguito per esempio da Altman (1989); il secondo e il terzo, invece, da Moody's e Standard & Poor's<sup>26</sup>. Il primo criterio, attribuendo un peso maggiore all'eventuale insolvenza delle imprese di maggiori dimensioni, risulta adeguato se la finalità perseguita è quella di stimare il «costo» atteso delle insolvenze; se invece la finalità perseguita è quella di stimare la probabilità di insolvenza di un'impresa appartenente a una data classe di rating, non vi è motivo per ponderare maggiormente le emissioni più grandi.

Infine, con riferimento al terzo problema (*natura del campione*), va detto che la coorte su cui viene svolta l'analisi può essere formata da obbligazioni appena emesse (cioè tutte nate al tempo 0) oppure da un pool di obbligazioni emesse anche in epoche precedenti. Il primo approccio è seguito, per esempio, da Altman e Kao

<sup>24</sup> «Un default ha luogo al verificarsi del primo mancato pagamento su qualunque obbligazione finanziaria, con o senza rating, che non sia un'obbligazione finanziaria oggetto di un genuino contenzioso commerciale; fanno eccezione i pagamenti di interessi non effettuati alla scadenza ma entro il periodo di grazia» (Standard & Poor's, 1998, 4).

<sup>25</sup> «Moody's definisce il default come qualsiasi mancato/ritardato pagamento di capitale o interessi, fallimento, curatela, concambio di strumenti finanziari in fase di difficoltà dove: i) l'emittente offre agli obbligazionisti un nuovo pacchetto di titoli che corrispondono a una ridotta obbligazione finanziaria (azioni ordinarie o privilegiate, debito con cedola o capitale minori); ii) lo scambio è evidentemente diretto ad aiutare il debitore a evitare il default» Carty e Lieberman (1996).

<sup>26</sup> Come osservato da Moody's (Carty e Lieberman, 1996), «per calcolare i tassi di default, che sono una stima di quella componente del rating legata alla PD dell'emittente, utilizziamo l'emittente come unità di osservazione, piuttosto che il numero di emissioni o l'importo. Poiché i rating di Moody's sono rivolti a supportare le decisioni in materia di credito, che non variano né con la dimensione, né con il numero di obbligazioni che un'impresa ha in circolazione, crediamo che questa metodologia produca stime più significative della probabilità di default. Poiché la probabilità di default è essenzialmente la stessa per tutte le emissioni pubbliche di debito dell'impresa, indipendentemente dalla loro dimensione, ponderare le nostre statistiche per il numero di emissioni o per l'importo finirebbe semplicemente per distorcere i nostri risultati in direzione delle caratteristiche dei grandi emittenti».

(1992); il secondo, che Altman, Caouette e Narayanan (1998) definiscono «approccio dei pool statici», è generalmente utilizzato dalle agenzie di rating<sup>27</sup>.

I due approcci possono condurre a risultati leggermente diversi. Il motivo è che, per le obbligazioni appena emesse, il tasso di insolvenza al primo anno per un'emissione obbligazionaria risulta generalmente molto inferiore. Dunque, se nella coorte vengono inserite, al tempo zero, anche emissioni realizzate negli anni precedenti, è probabile che il tasso d'insolvenza medio risulti più elevato. Questa divergenza, legata al cosiddetto «aging effect» o «effetto invecchiamento», è spiegata dal fatto che un'impresa che ha appena emesso un'obbligazione, essendosi finanziata e avendo dunque appena ricevuto una significativa iniezione di contanti, sarà quasi certamente in grado di far fronte ai propri impegni con i creditori (legati al pagamento degli interessi ed eventualmente al rimborso di debiti precedenti).

L'approccio di Altman e Kao (inserire nel pool solo obbligazioni appena emesse) è detto anche approccio dei *mortality rate*<sup>28</sup>. Il procedimento ricalca infatti quello utilizzato nel settore assicurativo per la determinazione dei premi connessi alle polizze vita, dove il tasso di mortalità è associato all'età dell'assicurato misurata dalla nascita.

A conclusione di questa sezione, notiamo che l'approccio attuariale si basa su due ipotesi impegnative: la prima è che la PD sia identica per tutte le imprese della medesima classe di rating (una variabile per sua natura continua, come la PD, viene dunque approssimata con un sistema di valori discreti); la seconda è che la PD associata a una certa classe di rating rimanga stazionaria nel tempo (e dunque che la PD futura sia uguale a quella passata, di cui il tasso di insolvenza rappresenta una manifestazione).

Altman (1989) mostra come la prima di queste ipotesi sia spesso violata nella realtà. Più in particolare, mostra come sussistano significative differenze fra i tassi di insolvenza di specifici sottogruppi di imprese appartenenti alle medesime classi di rating (al punto che alcuni sottogruppi in una classe di rating possono presentare tassi di insolvenza maggiori di quelli associati a sottogruppi di imprese appartenenti a classi di rating peggiori)<sup>29</sup>. Con riferimento alla seconda ipotesi, inoltre, lo studio citato indica che i tassi di insolvenza medi storici possono deviare in modo significativo dai tassi di insolvenza relativi ai periodi successivi.

#### 14.3.3 L'approccio attuariale: tassi di migrazione e matrici di transizione

Oltre che per stimare le PD, l'approccio attuariale può servire per stimare la frequenza con cui le imprese di una certa classe di rating «migrano» verso altre classi di rating. Anche su questo fenomeno, come già sui tassi di insolvenza, esistono

<sup>27</sup> Cfr. Standard & Poor's (1998).

<sup>28</sup> Cfr. Altman (1989).

<sup>29</sup> Questo fenomeno, secondo Altman, è spiegato dal ritardo con il quale le agenzie di rating (che valutano gli emittenti through the cycle) decidono l'upgrading o il downgrading di una società.

**Tabella 14.9 Matrice di transizione a un anno – Standard & Poor's**

Rating iniziale	Rating a fine anno (%)								
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default	N.R.*
AAA	88,77	7,80	0,68	0,05	0,10	0,00	0,00	0,00	2,60
AA	0,68	88,28	7,42	0,55	0,05	0,15	0,02	0,00	3,03
A	0,07	2,25	87,88	4,88	0,61	0,25	0,01	0,05	4,01
BBB	0,03	0,28	5,33	83,01	4,44	0,99	0,10	0,18	5,63
BB	0,02	0,10	0,53	7,07	74,44	7,27	0,79	0,91	8,87
B	0,00	0,08	0,25	0,41	6,12	73,03	3,32	4,74	12,06
CCC	0,16	0,00	0,32	0,97	2,26	9,86	53,15	18,90	14,38

\* N.R. («not rated») indica le imprese non più soggette a rating e dunque uscite dal campione

Fonte: Standard & Poor's (1998)

**Tabella 14.10 Matrice di transizione a un anno - Moody's**

Rating iniziale	Rating a fine anno (%)								
	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Default	W.R.*
Aaa	88,32	6,15	0,99	0,23	0,02	0,00	0,00	0,00	4,29
Aa	1,21	86,76	5,76	0,66	0,16	0,02	0,00	0,06	5,36
A	0,07	2,30	86,09	4,67	0,63	0,10	0,02	0,12	5,99
Baa	0,03	0,24	3,87	82,52	4,68	0,61	0,06	0,28	7,71
Ba	0,01	0,08	0,39	4,61	79,03	4,96	0,41	1,11	9,39
B	0,00	0,04	0,13	0,060	5,79	76,30	3,08	3,49	10,53
Caa	0,00	0,02	0,04	0,34	1,26	5,29	71,87	12,41	8,78

\*W.R. («withdrawn rating») indica le imprese non più soggette a rating e dunque uscite dal campione

Fonte: Carty (1998)

numerose statistiche diffuse periodicamente da Standard & Poor's e Moody's sotto forma di matrici di transizione, o di migrazione. Le **Tabb. 14.9 e 14.10** riportano due esempi.

Dalle due tabelle emerge, in primo luogo, che le classi di rating migliori sono caratterizzate da una maggiore stabilità: per esempio, dai dati di Standard & Poor's emerge che un soggetto classificato AAA ha una probabilità dell'88,77% di essere ancora nella medesima classe dopo un anno. Tale probabilità scende al 53,15 per cento per un soggetto inizialmente classificato CCC.

In secondo luogo, è interessante notare che le classi di rating migliori (rispettivamente, AAA e Aaa) hanno una frequenza di default praticamente nulla (cfr. le

**Tabella 14.11 Confronto tra due diversi approcci al rating**

	Tassi di migrazione Tassi di insolvenza	Point in time	Through the cycle
		Più elevati Stabili	Più bassi Instabili

penultime colonne delle due tabelle, che confermano quanto emerso dalle **Tabb. 14.5 e 14.7**). Se dunque ci concentriamo sulla sola insolvenza (tralasciando il rischio di migrazione<sup>30</sup>), finiremmo per considerare questo tipo di esposizioni praticamente prive di rischio. In realtà, si nota che chi investe, per esempio, in una obbligazione AAA ha una probabilità superiore all'8 per cento che questa subisca un downgrading, dunque una riduzione di valore legata al deterioramento del merito creditizio.

I tassi di migrazione stimati a partire dai rating delle agenzie non sono facilmente confrontabili con quelli ricavati dal sistema di rating interno di una banca. Il motivo riguarda il diverso approccio – through the cycle e point in time – adottato da questi due soggetti (cfr. § 14.2). Se infatti la valutazione è through the cycle, il rating incorpora fin dall'inizio le possibili variazioni del ciclo economico; l'andamento della congiuntura negli anni successivi, quindi, incide in modo relativamente modesto sul rating delle imprese, così che le migrazioni verso altre classi di rating sono comparativamente limitate. Tuttavia, proprio perché le imprese allocate a una certa classe di rating rimangono in buona misura le stesse, i tassi di insolvenza registrati su quella classe possono essere relativamente instabili nel tempo: si registreranno infatti valori più bassi quando le imprese godono di prospettive di breve periodo più favorevoli, più elevate quando l'economia si avvicina alla fase peggiore del ciclo.

Se il rating è assegnato point in time, le imprese vengono spostate in classi di rating diverse non appena presentano segni di miglioramento o peggioramento. Ciò condurrà a tassi di migrazione più elevati. Tuttavia, poiché le imprese assegnate a una certa classe di rating saranno sempre coerenti con le caratteristiche di rischio a breve termine di quella classe, i tassi di insolvenza a un anno tenderanno a essere più stabili nel tempo (**Tab. 14.11**).

#### 14.4 Rating validation

Un sistema di rating va sottoposto ad analisi periodiche volte a verificarne l'efficacia. Si tratta cioè di capire se i giudizi espressi *ex-ante* dal sistema risultano coerenti *ex-post* con il comportamento dei soggetti valutati. Questo processo di valutazione della qualità ha assunto particolare rilevanza in seguito al nuovo accordo di Basilea sull'adeguatezza patrimoniale delle banche (cfr. Capitolo 21): tale accordo prevede infatti che le banche che vogliono utilizzare i rating interni per la determina-

<sup>30</sup> Cfr. l'introduzione a questa parte del volume.

zione dei requisiti patrimoniali obbligatori debbano sottoporre i propri sistemi alla valutazione («validazione») delle autorità di vigilanza<sup>31</sup>.

In generale, tale valutazione dovrebbe riguardare la qualità degli input che alimentano il sistema e l'affidabilità del processo con cui vengono elaborati. Questi due aspetti, insieme, determinano la correttezza degli output prodotti dal sistema, che può essere valutata con diversi criteri<sup>32</sup>.

In questo paragrafo, dopo aver brevemente richiamato alcune regole di buon senso per la valutazione di un sistema di rating (§ 14.4.1), ci concentriamo su alcuni semplici strumenti quantitativi (contingency tables, curve ROC e CAP, accuracy ratio e AUROC) che consentono di misurare la correttezza del procedimento seguito da una banca nella fase di rating assignment (§ 14.4.2). Dedichiamo infine un cenno al problema della validazione della fase di rating quantification, ovvero, a come verificare la coerenza tra le PD stimate *ex-ante* e i tassi di insolvenza effettivamente registrati *ex-post*.

#### 14.4.1 Alcuni criteri qualitativi

Alcune semplici regole per verificare la correttezza dei rating sono le seguenti:

- i tassi di insolvenza dovrebbero risultare crescenti in modo monotono al peggiorare del rating;
- i tassi di insolvenza per classe di rating dovrebbero essere stabili nel tempo, in particolare nel caso di rating assegnati secondo la logica point in time;
- la percentuale di esposizioni che rimangono nella stessa classe di rating da un anno all'altro dovrebbe comunque essere sufficientemente elevata;
- i tassi di migrazione verso classi di rating vicine dovrebbero essere più elevati rispetto a quelli verso classi più lontane;
- i debitori divenuti insolventi dovrebbero essere stati classificati in una classe di rating bassa (peggiore) già da diversi anni.

#### 14.4.2 Criteri quantitativi per la validazione del rating assignment

Oltre a queste semplici regole, sono stati proposti alcuni strumenti più sofisticati per verificare la correttezza del procedimento di assegnazione dei rating.

Un primo strumento è la contingency table. Essa può essere applicata nel caso di sistemi di rating molto elementari, che si limitano a dividere i potenziali clienti della banca in modo binario (separando le imprese «accettabili» da quelle ad alto

**Tabella 14.12 Esempio di contingency table**

Giudizio del modello	Comportamento reale del debitore	
	Performing	Insolvente
Sano	Valutazione corretta ( $N_1$ casi)	Errore ( $N_2$ casi)
Anomalo	Errore ( $N_3$ casi)	Valutazione corretta ( $N_4$ casi)

rischio di default). Si tratta di una matrice, come quella riportata nella Tab. 14.2, che confronta le previsioni di un modello con gli eventi che si sono effettivamente verificati in seguito (per esempio, un anno dopo che il modello aveva prodotto la propria valutazione). I suoi quattro quadranti indicano:

- il numero  $N_1$  di imprese correttamente valutate come sane dal modello;
- il numero  $N_2$  di imprese erroneamente valutate come sane;
- il numero  $N_3$  di imprese erroneamente valutate come anomale;
- il numero  $N_4$  di imprese correttamente valutate come anomale.

Sulla base dei valori della contingency table è possibile calcolare numerosi indicatori di successo e di errore. I principali sono:

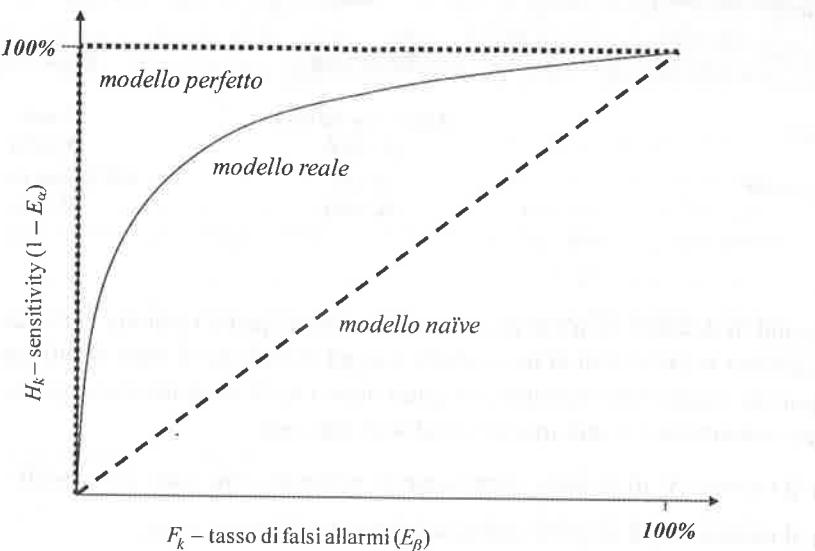
- la *sensitivity* (percentuale di imprese insolventi correttamente identificate):  $\frac{N_4}{N_2 + N_4}$ ;
- la *specificity* (percentuale di imprese sane correttamente identificate):  $\frac{N_1}{N_1 + N_3}$ ;
- il *tasso di errore alfa* ( $E_\alpha$ , percentuale di imprese insolventi erroneamente classificate come sane):  $\frac{N_2}{N_2 + N_4}$ ;
- il *tasso di errore beta* o ( $E_\beta$ , percentuale di imprese sane erroneamente classificate come insolventi):  $\frac{N_3}{N_1 + N_3}$ ;
- il *tasso di successo* o *hit rate* (percentuale di imprese correttamente classificate):

$$\frac{N_1 + N_4}{N_1 + N_2 + N_3 + N_4} = \frac{N_1 + N_4}{N}$$

La qualità del modello di scoring o di rating andrà valutata analizzando i valori assunti da  $E_\alpha$  ed  $E_\beta$ , anche alla luce del diverso costo dei due errori. Peraltra, come già evidenziato nel Capitolo 11, il livello di  $E_\alpha$  ed  $E_\beta$  dipende in modo cruciale dal

<sup>31</sup> Sebbene non sia ancora del tutto chiaro come avverrà concretamente questa validazione, il Comitato di Basilea ha già formulato alcune linee guida relative alle caratteristiche richieste a un sistema interno di rating (numerosità delle classi, definizione di insolvenza, modalità di assegnazione del rating, organi coinvolti nel processo).

<sup>32</sup> Cfr. Basel Committee on Banking Supervision (2005).

**Figura 14.3 Esempi di curve ROC**

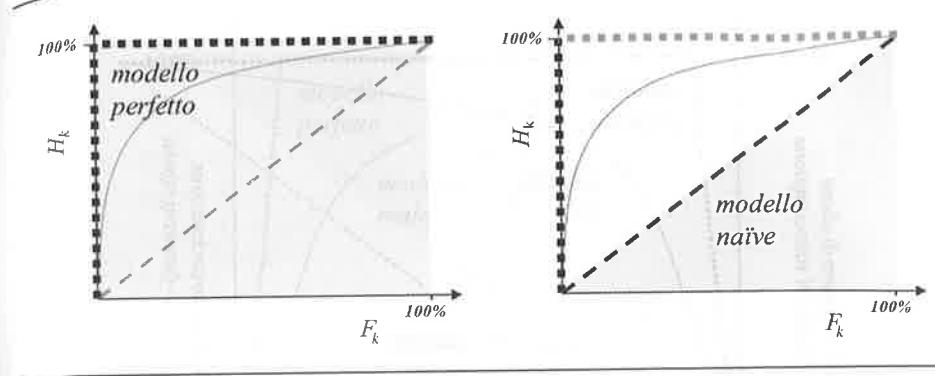
valore del cutoff utilizzato per discriminare le imprese sane dalle insolventi: un valore della soglia più selettivo tende infatti a ridurre  $E_\alpha$  accrescendo  $E_\beta$ . La valutazione accurata di un modello richiederebbe dunque di verificare come cambia la sua performance al variare del punto di cutoff.

Su quest'ultima intuizione si basa un altro strumento per la validazione dei modelli di rating: la curva ROC (Receiver Operating Characteristic). Tale grafico analizza proprio i livelli di errore associati a tutti i possibili valori del cutoff che separa i debitori «buoni» (pass) da quelli «cattivi» (fail). Più precisamente, per ogni possibile cutoff  $k$ , il grafico riporta:

- in ascissa il corrispondente valore dell'errore del secondo tipo ( $E_\beta$ ), indicato anche con  $F_k$  (dove  $F$  sta per «false alarm», considerato che si tratta di imprese sane classificate come «fail»);
- in ordinata il corrispondente valore della sensitivity, indicato con  $H_k$ <sup>33</sup>.

È evidente che un sistema di scoring/rating risulta tanto migliore quanto minore è il primo indicatore ( $F_k$ ) e quanto maggiore è il secondo ( $H_k$ ). In particolare, aumentando  $k$  un buon modello sarà in grado di isolare efficacemente tutte le imprese anomale

<sup>33</sup> La lettera  $H$  viene talvolta interpretata come «hit rate», cioè tasso di successo. Si noti tuttavia che la sensitivity è un tasso di successo limitato alle sole imprese anomale, dunque è diversa dallo «hit rate» complessivo, definito in precedenza.

**Figura 14.4 Differenti aree sotto la curva ROC (AUROC)**

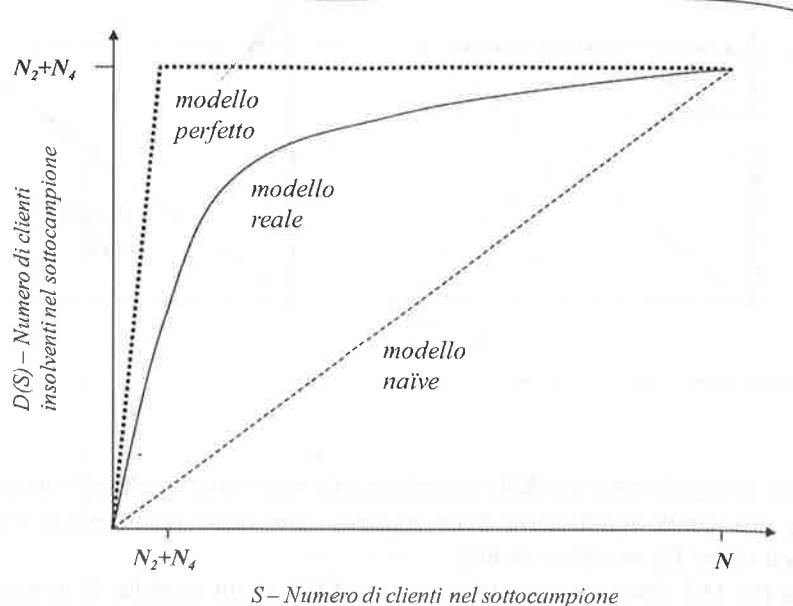
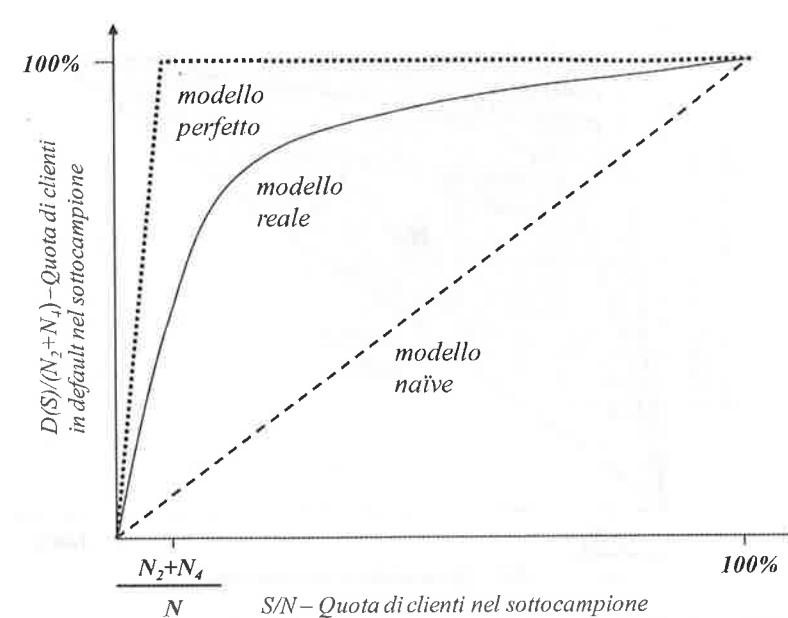
le (con un rapido aumento della sensitivity,  $H_k$ ) senza tuttavia classificare come anomalie una quota significativa delle imprese sane (cioè mantenendo l'errore del secondo tipo,  $F_k$ , su valori ridotti).

La Fig. 14.3 riporta un esempio di curva ROC di un modello di rating, indicata con il termine «modello reale» (il ruolo degli altri due modelli indicati nella figura diverrà chiaro tra breve). Quanto maggiore è l'inclinazione del tratto iniziale della curva, tanto minore è il numero di «falsi allarmi» rispetto a quello di imprese correttamente identificate come cattive, e dunque tanto migliore è la performance del modello. Come osservato da (de Servigny e Renault 2004), la curva ROC esprime il trade-off fra errori  $E_\alpha$  ( $1 - H_k$ ) ed errori  $E_\beta$  ( $F_k$ ).

Nella figura vengono indicate, come termini di confronto, due curve ROC teoriche:

- la prima è quella di un modello «perfetto», per cui esiste un valore di  $k$  che consente di classificare correttamente il 100 per cento ( $H_k$ ) di imprese anomale senza commettere nemmeno un errore ( $F_k = 0$ ). Notiamo che, poiché il massimo valore di  $F_k$  e  $H_k$  è pari al 100 per cento, l'area a sud-est della curva ROC (Area Under the ROC curve, in breve AUROC) è pari, in questo caso, esattamente a 1 (cfr. Fig. 14.4, primo pannello);
- la seconda è quella di un modello completamente «na飗e», privo di alcuna reale capacità di separare le imprese sane da quelle anomale. In tale modello, al variazione della soglia, la percentuale di imprese sane classificate come insolventi e di imprese anomale classificate correttamente (rispettivamente:  $F_k$  e  $H_k$ ) rimane costante. Geometricamente, quindi, la curva ROC è la diagonale del grafico. In questo caso, l'AUROC è pari a 1/2 (Fig. 14.4, secondo pannello).

L'AUROC è sovente utilizzata per sintetizzare in una misura numerica il grado di efficacia del modello ed è denominata anche «coefficient of concordance» (CoC). Si dimostra che l'AUROC può essere interpretata come la probabilità di classificare

**Figura 14.5 Curve che misurano l'efficacia di diversi modelli****Figura 14.6 Curve CAP**

correttamente, data una qualsiasi coppia di imprese, quella sana e quella anomala; è inoltre possibile costruire intervalli di confidenza per l'AUROC, che aiutano a comprenderne il «vero» valore, al netto delle possibili distorsioni legate ai disturbi casuali impliciti nelle analisi campionarie<sup>34</sup>.

Un'ulteriore misura della performance di un modello è rappresentata dalla curva di Gini, o «cumulative accuracy profile» (CAP). Immaginiamo di disporre di un campione di  $N$  imprese valutato da un modello, e di considerarne, di volta in volta, un numero  $S$  crescente ( $S = 1, 2, 3, \dots, N-1, N$  imprese), cominciando da quelle a cui è stato assegnato lo score peggiore; indichiamo sull'asse orizzontale  $S$  (numero di imprese considerato). All'interno di ognuno di questi sottocampioni, individuiamo il numero di aziende risultate effettivamente insolventi, indichiamo questo numero (che chiaramente vale al massimo  $S$ ) con  $D(S)$  e riportiamolo sull'asse verticale.

Consideriamo ora la Fig. 14.5. Se il modello ha una capacità previsiva perfetta, tutti i sottocampioni di numerosità  $S \leq N_2 + N_4$  saranno costituiti unicamente da imprese anomale (si avrà cioè  $D(S) = S$  per qualsiasi  $S \leq N_2 + N_4$ ). Per  $S \geq N_2 + N_4$ ,  $D(S)$  resterà costante e pari a  $N_2 + N_4$  (visto che non ci sono altre imprese anomale, il modello, per quanto efficiente, non potrà individuarle!). Se invece il modello ha capacità previsiva nulla, le imprese anomale saranno sempre pari a una percentuale

costante  $p$  (con  $p = (N_2 + N_4)/N$ ) del numero di imprese  $S$  considerato (si avrà cioè  $D(S) = p \cdot S$  per qualsiasi  $S$ ).

Un modello reale avrà una curva compresa tra questi due casi estremi, tanto più vicina al primo quanto più il modello è efficace.

Per rendere maggiormente leggibili i risultati, la curva CAP viene solitamente disegnata considerando, piuttosto che i valori assoluti, la percentuale di clienti compresa nei diversi sottocampioni (l'asse orizzontale riporta dunque  $S/N$  e non  $S$ ) e la relativa percentuale di clienti anomali (l'asse verticale riporta dunque  $D(S)/D(N)$ , dove  $D(N) = N_2 + N_4$  è il numero di clienti anomali nell'intero campione). Una tipica curva CAP è dunque simile a quella rappresentata nella Fig. 14.6.

Un indice di performance del sistema di rating, denominato rapporto di Gini o Accuracy Ratio (AR), è dato dal rapporto fra l'area compresa fra la curva CAP del sistema di rating reale e la curva CAP corrispondente al modello con capacità previsiva nulla (area  $B$  nella Fig. 14.7) e l'area compresa tra la curva CAP di un sistema perfetto e, di nuovo, la curva CAP di un modello con capacità previsiva nulla (area  $A+B$  nella Fig. 14.7). Analiticamente:

$$G = \frac{B}{A+B} \quad [14.8]$$

Il rapporto di Gini può assumere valori compresi fra zero e uno. Quanto maggiore è il valore del rapporto, tanto maggiore è il potere discriminante del sistema di rating in esame.

<sup>34</sup> Cfr. Engelmann, Hayden e Tasche (2002), Engelmann, Hayden e Tasche (2003).

Figura 14.7 Aree usate nel calcolo dell'Accuracy Ratio

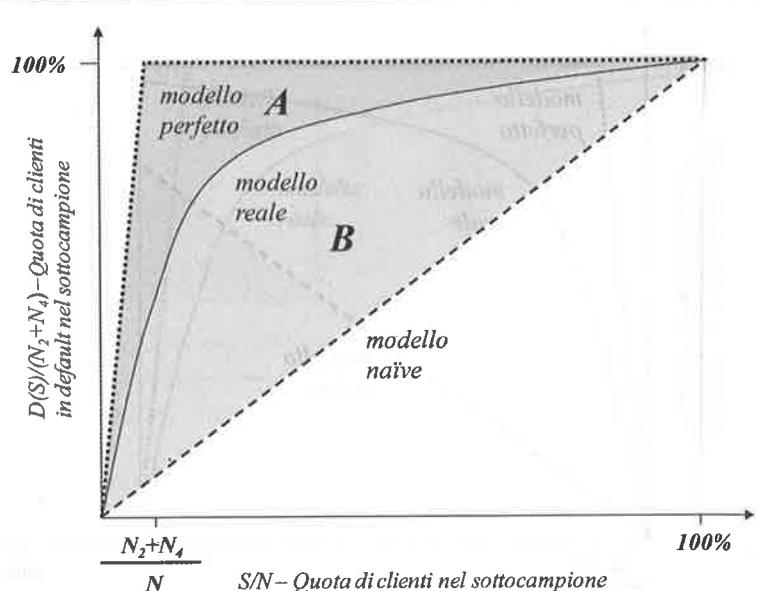
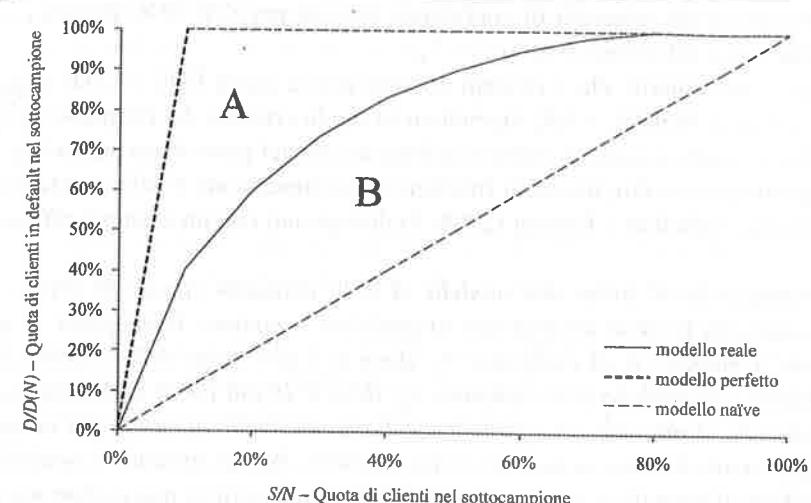


Tabella 14.13 Curva CAP: esempio per un sistema di rating con 10 classi

Classe di rating, $j$	N. di clienti, $C_j$	N. di clienti insolventi, $D_j$	Valori cumulati assoluti		Valori percentuali	
			N. di clienti nel sottocampione, $S = \sum_{l \leq j} C_l$	N. di insolvenze su $S$ , $D(S) = \sum_{l \leq j} D_l$	S/N	$D/D(M)$
10	100	24	100	24	10	2,4
9	100	12	200	36	20	3,6
8	100	8	300	44	30	4,4
7	100	6	400	50	40	5,0
6	100	4	500	54	50	5,4
5	100	3	600	57	60	5,7
4	100	2	700	59	70	5,9
3	100	1	800	60	80	6,0
2	100	0	900	60	90	6,0
1	100	0	1000	60	100	6,0
<b>Totale</b>	<b>1000</b>	<b>60</b>				

Figura 14.8 Esempio di curva CAP per un sistema di 10 classi di rating



Si noti che strumenti come la curva CAP (o la curva ROC) sono applicabili non solo a modelli di scoring basati su punteggi continui, ma anche a sistemi di rating fondati sulla classificazione dei debitori in un numero di classi discrete. Si consideri, per esempio, il sistema composto da 10 classi riportato nella Tab. 14.13. La tabella riporta il numero  $C_j$  di soggetti assegnati alle diverse classi (ordinate dalla peggiore alla migliore), che per semplicità si immagina essere uguale a 100 per tutte le classi. Per ogni classe è inoltre indicato il numero  $D_j$  di soggetti divenuti insolventi nel corso dell'ultimo anno.

Sulla base dei dati riportati nella tabella, è possibile costruire la curva CAP della Fig. 14.8, grazie alla quale è inoltre possibile misurare:

- l'area compresa fra la curva CAP del sistema di rating reale e quella corrispondente al modello con capacità previsiva nulla (area B), che risulta pari a 0,29;
- l'area compresa tra la curva CAP di un sistema perfetto (quella che si otterrebbe se il sistema di rating fosse in grado di assegnare alla classe peggiore tutti i soggetti che diverranno insolventi) e quella del modello con capacità previsiva nulla (area A + B), che risulta pari a 0,45;
- il quoziente tra le due (accuracy ratio), pari al 64 per cento.

Le curve ROC e CAP rappresentano due modi simili di fotografare uno stesso fenomeno, cioè il livello di accuratezza di un sistema di rating. È possibile, in effetti, ricavare una relazione algebrica tra AR (basato sulla curva CAP) e AUROC (derivato dalla curva ROC), e precisamente<sup>35</sup>:

<sup>35</sup> Cfr. Engelmann, Hayden e Tasche (2002).

$$AR = 2 \cdot AUROC - 1 \quad [14.9]$$

In questo modo, gli intervalli di confidenza derivati per l'AUROC possono essere facilmente estesi all'accuracy ratio.

È importante chiarire che i risultati ottenuti con le curve ROC e CAP, e dunque anche i valori di AUROC e AR, dipendono in modo cruciale dal campione utilizzato. In altri termini, sistemi di rating ugualmente efficaci potrebbero presentare indici di performance molto diversi in funzione della dimensione e delle caratteristiche del campione. Sobehart e Keenan (2004) lo dimostrano con un esempio efficace:

*«Immaginate di avere due modelli, A e B, entrambi capaci di prevedere il rischio con perfetta accuratezza su qualsiasi campione. Immaginate di applicare il modello A al campione  $S_A$ , dove il 5 per cento delle osservazioni è default, e il modello B al campione  $S_B$ , dove il 10 per cento delle osservazioni è default. Ordiniamo i campioni e scegliamo un livello di cutoff, per esempio il 5 per cento di osservazioni con score peggiore. Poiché entrambi i modelli sono perfetti, il modello A, con un cutoff al 5 per cento, ottiene una performance del 100 per cento; il modello B, invece, fissando il cutoff al 5 per cento, cattura solo la metà delle osservazioni in default. Ovviamente, affermare che il modello A è meglio del modello B per via di questo tasso di successo più elevato sarebbe errato. Il problema è che il cutoff selezionato ha un significato differente, in termini di tasso di rifiuto, a seconda del campione a cui viene applicato, e in particolare a seconda del numero di osservazioni in default».*

Questa «sample dependency» ha due conseguenze rilevanti. La prima è che non è possibile definire a priori una soglia minima dell'accuracy ratio oltre la quale un sistema di rating può essere giudicato «buono» o «accettabile». La seconda è che il confronto dell'efficacia di due sistemi di rating deve tendenzialmente avvenire sulla base del medesimo campione di osservazioni, o di campioni simili.

#### 14.4.3 Validare la rating quantification

Gli strumenti esaminati fino a ora (contingency table, ROC, AUROC, CAP, AR) possono essere utilizzati per validare la fase di rating assignment, ovvero la fase in cui il sistema di rating di un'agenzia o di una banca suddivide i debitori in classi di rating o assegna a ognuno uno score.

Recentemente, l'attenzione degli studiosi si è spostata anche sulla fase di rating quantification, cioè la fase in cui le classi di rating o gli score vengono convertiti in PD.

I modelli proposti si basano sul confronto tra la PD teorica dei clienti assegnati a una certa classe di rating (così come stimata dalla banca) e i tassi di default empiricamente registrati su tale classe. In particolare, essi cercano di ricavare, per ogni classe di rating, un intervallo di confidenza all'interno del quale i valori delle frequenze empiriche di default possono essere considerati accettabili.

In particolare, un primo approccio si basa sull'utilizzo della distribuzione binomiale, ed è simile al test di Kupiec visto nel Capitolo 9<sup>36</sup>. Se il numero di clienti presenti in un bucket è sufficientemente elevato, la binomiale converge a una normale, e gli estremi dell'intervallo, basato su un livello di confidenza pari a  $1 - 2\alpha$ , sono dati da:

$$\left( \hat{p} - |z_\alpha| \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}} ; \hat{p} + |z_\alpha| \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}} \right) \quad [14.10]$$

dove  $\hat{p}$  rappresenta la PD stimata dalla banca,  $N$  il numero di clienti presenti nella classe di rating e  $z_\alpha = N^{-1}(\alpha)$  il percentile  $\alpha$ -esimo di una distribuzione normale standard.

Così, per esempio, se una banca ha stimato una PD dell'1 per cento per una classe di rating contenente  $N = 1000$  clienti, possiamo fissare  $\alpha = 5\%$  e ottenere il seguente intervallo di confidenza al 90 per cento ( $1 - 2 \cdot \alpha$ ):

$$\left( 0,01 - |N^{-1}(5\%)| \cdot \sqrt{\frac{0,01 \cdot 0,99}{1000}} ; 0,01 + |N^{-1}(5\%)| \cdot \sqrt{\frac{0,01 \cdot 0,99}{1000}} \right) = \\ = (0,0048; 0,152)$$



Il massimo tasso di default accettabile sarebbe dunque pari all'1,52 per cento. Considerato che i clienti sono 1000, se ne deduce che il massimo numero di default ammissibile, per poter considerare credibile una PD dell'1 per cento, è pari a 15. Se su questa classe di rating dovessero verificarsi 16 default o più, la banca dovrebbe dubitare della bontà della PD stimata.

Gli intervalli di confidenza costruiti secondo la [14.10] risentono di due limitazioni.

In primo luogo, essi verificano la correttezza della PD stimata per una singola classe di rating. È dunque necessario applicarli più volte, alle singole classi del sistema di rating costruito dalla banca. Se poi per alcune classi il numero di default effettivo giacesse all'interno dell'intervallo di confidenza, e per altre classi all'esterno di esso, sarebbe difficile giungere a un giudizio sulla qualità del sistema nel suo complesso.

Nasce dunque l'interesse per un test che verifichi congiuntamente la correttezza delle PD stimate per *tutte* le classi di un sistema di rating. A tal fine, si dimostra che, se tutte le PD stimate sono corrette e se tutte le classi di rating contengono un numero di debitori sufficientemente elevato, allora la statistica

$$\chi_m^2 \sum_{i=1}^m \frac{(N_i \hat{p}_i - D_i)^2}{N_i \hat{p}_i (1 - \hat{p}_i)} \quad [14.11]$$

<sup>36</sup> Al lettore non sfuggirà, inoltre, l'analogia con l'intervallo di confidenza per i percentili presentato nell'Appendice 8B del Capitolo 8.

**Tabella 14.14 Effetto della correlazione tra default sull'estremo superiore dell'intervallo di confidenza ( $\hat{p} = 1\%$ ,  $N = 1000$ )**

Ipotesi di lavoro	Estremo superiore
Nessuna correlazione (approccio binomiale, equazione [14.10])	15
<i>Asset correlation (<math>\rho</math>) del 5%</i>	
Approccio 1: Gordy (2003)	24
Approccio 2: distribuzione beta	25
<i>Asset correlation (<math>\rho</math>) del 20%</i>	
Approccio 1: Gordy (2003)	39
Approccio 2: distribuzione beta	42

Fonte: Tasche (2003)

(dove  $m$  è il numero di classi di rating nel sistema,  $N_i$  il numero di clienti e  $D_i$  il numero di default nella classe  $i$ -esima) si distribuisce secondo una chi-quadrato con  $m$  gradi di libertà. Di conseguenza, valori elevati di  $\chi_m$  inducono a respingere, con un rischio di errore molto modesto, l'ipotesi che le PD stimate siano corrette; si noti che ciò accade quando il numeratore del test è significativamente maggiore di zero, cioè quando il numero dei default effettivamente osservati ( $D_i$ ) è sensibilmente diverso da quello ( $N_i \hat{p}_i$ ) che era lecito attendersi sulla base delle PD stimate<sup>37</sup>.

Una seconda limitazione degli intervalli di confidenza costruiti secondo la [14.10] è che essi potrebbero, in realtà, risultare eccessivamente ristretti. Il motivo è che nel costruirli si utilizza una distribuzione binomiale, ipotizzando implicitamente che i default dei singoli debitori siano incorrelati tra loro.

In realtà, i debitori delle banche e le imprese che emettono obbligazioni tendono a fallire «in grappoli» sulla base del ciclo economico: nelle fasi di recessione, i default si fanno più frequenti, mentre diventano più rari nei periodi di espansione dell'economia. Questo significa che le insolvenze non sono eventi perfettamente indipendenti. È dunque possibile che il tasso di insolvenza registrato su una classe di rating si discosti anche sensibilmente dal suo valore atteso stimato (la PD stimata dalla banca) senza che questo implichi che la PD stimata era errata.

Tasche (2003) propone due metodologie per ricavare intervalli di confidenza quando i default sono correlati. La prima utilizza il modello di Gordy (2003) per un portafoglio di default correlati, completandolo con l'aggiustamento proposto da Martin e Wilde (2002); la seconda, una distribuzione beta stimata con il metodo dei momenti. In entrambi i casi, gli intervalli di confidenza sono più ampi di quelli che si otterebbero con una semplice binomiale. La Tab. 14.4, tratta da Tasche (2003),

mostra come l'estremo superiore (massimo numero di default accettabile) dell'intervallo di confidenza considerato possa cambiare, per l'esempio visto poc' anzi, quando si introduce l'ipotesi di correlazione tra i default. Il parametro  $\rho$  («asset correlation») è una misura della dipendenza tra default diversi<sup>38</sup>: quanto più forte è questa correlazione, tanto maggiore è il numero massimo di default compatibile con l'ipotesi che una PD dell'1 per cento sia corretta.

## 14.5 Osservazioni conclusive

In questo capitolo abbiamo analizzato i diversi passaggi che stanno alla base dei sistemi di rating adottati da banche e agenzie: rating assignment, rating quantification e rating validation. Come osservato, ognuno di questi passaggi si fonda su un mix di analisi qualitative e di modelli quantitativi. In conclusione, vi sono tre aspetti che riteniamo opportuno sottolineare.

Il primo riguarda la crescente rilevanza che i sistemi di rating sono andati assumendo nel corso degli ultimi anni. Questa rilevanza riguarda sia il ruolo giocato dalle agenzie di rating, i cui giudizi rappresentano ormai un fattore cruciale nella determinazione del rendimento dei titoli obbligazionari e dunque del costo del debito per gli emittenti, sia il peso assunto dai sistemi di rating interni delle banche, che costituiscono una delle principali determinanti del tasso di interesse praticato ai clienti. Con riferimento ai rating interni delle banche, è inoltre importante sottolineare come questi ultimi non rappresentino solamente sistemi di misurazione del rischio, ma anche un importante fattore di vantaggio competitivo. Come osservato nel corso del capitolo, un sistema di rating più preciso e granulare consente infatti a una banca di essere maggiormente competitiva nei confronti dei clienti di maggiore qualità.

Il secondo aspetto riguarda il processo di rating assignment. Nel corso del capitolo si è osservato come le misure prodotte da alcuni dei modelli quantitativi analizzati nei capitoli precedenti, quali l'analisi discriminante e il modello di KMV, possano rappresentare un importante input per l'attribuzione del rating a una controparte. Il peso attribuito a questi modelli può variare in funzione della natura della controparte (retail, small business, corporate ecc.) e delle informazioni di natura qualitativa di cui dispone la singola banca. In questo senso, un sistema di rating rappresenta la sintesi di un complesso set di informazioni – sia quantitative che qualitative – che una banca deve saper gestire in modo efficiente ed efficace.

Infine, è importante osservare che un sistema di rating rappresenta a sua volta l'input di altri modelli e applicazioni, che saranno oggetto di analisi dei prossimi capitoli. In particolare, nel prossimo capitolo avremo modo di analizzare i modelli di portafoglio, attraverso i quali una banca può misurare il VaR associato a un portafoglio di esposizioni creditizie. Gli input fondamentali di questi modelli sono rappresentati dalle PD delle controparti e dalle LGD delle esposizioni, stimate nella maggioranza dei casi da un sistema interno di rating. È dunque evidente come la

<sup>37</sup> Per approfondimenti, cfr. Basel Committee on Banking Supervision (2005).

<sup>38</sup> Cfr. Capitolo 15.

qualità di tale sistema sia determinante anche per l'affidabilità delle misure di rischio costruite con i modelli VaR.

### Esercizi

- Sulla base di informazioni simili e di un'identica scala di rating, la banca Alfa e la banca Beta hanno assegnato rating diversi a una stessa società. Infatti il rating emesso da Alfa, AA, è notevolmente migliore di quello emesso da Beta (BBB). Quale dei seguenti fatti potrebbe spiegare la differenza?
  - Beta valuta «through the cycle» mentre Alfa valuta «point in time», e l'economia è attualmente in recessione.
  - Alfa valuta «through the cycle» mentre Beta valuta «point in time», e l'economia è attualmente in recessione.
  - Beta valuta «through the cycle» mentre Alfa valuta «point in time», e l'economia è attualmente in espansione.
  - Alfa valuta «through the cycle» mentre Beta valuta «point in time», e l'economia è attualmente in espansione.



- Per una certa classe di obbligazioni i tassi di default marginali nei primi tre anni dopo l'emissione sono pari, rispettivamente, a 0,5 per cento, 0,8 per cento e 1,2 per cento. Calcolate il tasso di insolvenza cumulato e il tasso di insolvenza medio annuo per il triennio.



- Usando la matrice di transizione a un anno della Tab. 14.9 e ipotizzando che le transizioni a un anno siano serialmente incorrelate (così che la stessa matrice di transizione può essere utilizzata due volte di seguito), calcolate la probabilità che un'obbligazione con rating BBB

- abbia ancora rating BBB alla fine del primo anno e risultati insolvente alla fine del secondo;
- sia promossa in classe AA alla fine del primo anno e risultati insolvente alla fine del secondo;
- sia retrocessa in classe B alla fine del primo anno e risultati insolvente alla fine del secondo;
- migrò in qualsiasi altra classe (a parte quelle già indicate sub a, b e c) alla fine del primo anno e risultati insolvente alla fine del secondo;
- sia insolvente già alla fine del primo anno.

Siete ora in grado di stimare la probabilità di default a due anni di un'obbligazione con rating BBB?



- Una banca ha utilizzato un modello di scoring per valutare 15 debitori, 4 dei quali sono poi risultati insolventi. La tabella che segue mostra i loro score (score elevati indicano rischio basso), evidenziando quelli terminati in default. Usando questi dati e un foglio di carta a quadretti, disegnate la curva CAP. Quindi aggiungete la curva CAP di un modello perfetto e quella per un modello naïve (nel calcolare il numero di clienti in default individuati da quest'ultimo, arrotondate all'intero più vicino). Infine, immaginate che il cliente 5 avesse ricevuto uno

Cliente	Score	Insolvente?
1	0,4	no
2	0,7	sì
3	1,2	sì
4	1,5	sì
5	2,6	no
6	3,2	no
7	3,3	no
8	4	no
9	4,3	no
10	4,3	no
11	5	no
12	5,7	no
13	6	sì
14	8	no
15	8,5	no

score pari a 3 e il cliente 13 uno score pari a 3,5: come cambierebbe il quoziente di Gini? Tale cambiamento andrebbe interpretato come un miglioramento o come un peggioramento della performance del modello?

- Sulla base dei dati del precedente esercizio, provate a fissare la soglia tra imprese «anomale» e imprese «sane» a 0, 0,5, 1... e continuate così fino a raggiungere 9. Per ogni soglia, calcolate il tasso di falso allarme  $F_i$  e il sensitivity ratio  $H_i$  e trascrivete i due valori in una tabella. Sulla base della tabella, disegnate la curva ROC del modello. Completate il grafico disegnando la curva ROC di un modello «perfetto». Ora confrontate questo grafico con quello disegnato nell'esercizio 4, e dite in che cosa differiscono.



degli anni Novanta. Essi, seguendo una logica simile a quella dei modelli VaR per i rischi di mercato, sono volti a determinare la massima perdita che un portafoglio di esposizioni può subire, entro un predefinito orizzonte temporale, con un certo livello di confidenza («massima perdita probabile»).

In particolare, l'analisi si sofferma su quattro modelli<sup>1</sup>:

- *CreditMetrics*, originariamente proposto dalla banca statunitense J.P. Morgan e fondato sui dati relativi ai tassi di migrazione, ai tassi di insolvenza e agli *spread* (rispetto ai rendimenti dei titoli di Stato) dei debitori appartenenti a diverse categorie di rating;
- *CreditPortfolioView*, sviluppato dalla società di consulenza McKinsey e fondato sull'analisi econometrica della relazione che lega i tassi di insolvenza e di migrazione all'evoluzione del ciclo macroeconomico;
- *Creditrisk+*, proposto dalla banca di investimento svizzera Credit Suisse Financial Products (CSFP) fondato sui modelli matematici «attuariali» propri del settore assicurativo;
- *PortfolioManager*, sviluppato dalla società californiana KMV (oggi, Moody's KMV), fondato sul modello di Merton e sulle logiche di stima della probabilità di insolvenza illustrate nel Capitolo 12.

Dopo aver introdotto il concetto di VaR marginale per il rischio di credito, il capitolo si conclude con un confronto tra questi modelli e con un'analisi dei problemi che ancora contraddistinguono questa famiglia di tecniche e che verosimilmente verranno affrontati dai modelli di prossima generazione.

## 15.2 Scelta dell'orizzonte temporale e del livello di confidenza

Prima di analizzare i singoli modelli è opportuno soffermarsi brevemente su due problemi comuni: la scelta dell'orizzonte temporale di riferimento e quella del livello di confidenza.

### 15.2.1 La scelta dell'orizzonte di rischio

Il VaR su un portafoglio di crediti dipende dalla distribuzione delle possibili perdite future. È dunque necessario specificare a quale intervallo di tempo nel futuro si desidera fare riferimento. È evidente che la distribuzione delle perdite nei prossimi tre anni sarà assai più incerta di quella relativa ai prossimi tre giorni. L'orizzonte

<sup>1</sup> I modelli di portafoglio per il rischio di credito rappresentano un filone di ricerca particolarmente vivace, così che non è possibile dare conto, in questo capitolo, di tutti gli approcci proposti negli anni più recenti. Un ulteriore modello, per esempio, è stato recentemente proposto da Standard & Poor's con il nome di «Portfolio Risk Tracker» de Servigny *et al.* (2003) per superare alcuni dei problemi dei modelli di prima generazione (cfr. anche l'ultimo paragrafo di questo capitolo).

temporale di riferimento («orizzonte di rischio») va dunque scelto e mantenuto costante in tutte le fasi della costruzione di un modello per la stima delle perdite su un portafoglio creditizio.

Teoricamente, sulla falsariga di quanto visto a proposito dei rischi di mercato<sup>2</sup>, la scelta di questo orizzonte temporale dovrebbe basarsi su due fattori:

- il primo, e più importante, è di tipo oggettivo (e non dipende quindi dalle preferenze soggettive della banca). Esso è rappresentato dal grado di liquidità del mercato su cui è possibile cedere le esposizioni creditizie. Se, infatti, queste possono essere ragionevolmente vendute nell'arco di  $n$  giorni, non vi è motivo che la banca si preoccupi delle possibili perdite su un intervallo di tempo più ampio, visto che successivamente all' $n$ -esimo giorno le posizioni a rischio saranno già state cedute o, come si dice, «chiuse»;
- il secondo è invece di tipo soggettivo, perché dipende dalle preferenze dell'investitore (in particolare, della banca) che detiene il portafoglio di crediti. Si tratta del periodo di detenzione (holding period), ossia dal periodo di tempo per il quale la banca intende conservare il portafoglio.

Entrambi i fattori risultano tuttavia poco utili nel caso del rischio di credito: infatti, l'illiquidità di molti prestiti bancari fa sì che per essi non esista, di norma, alcun mercato secondario; pertanto, se anche la banca avesse un holding period breve (cioè desiderasse mantenere in portafoglio i prestiti solo per poco tempo), la mancanza di un mercato su cui cedere i crediti (e la limitata disponibilità di strumenti di trasferimento del rischio, come i derivati creditizi<sup>3</sup>) non le consentirebbe di chiudere le proprie posizioni entro il termine desiderato.

Sembrerebbe dunque inevitabile adottare come orizzonte temporale di riferimento, per ogni singolo prestito, la sua scadenza finale, visto che tutte le perdite, da oggi fino a tale scadenza, sono destinate a gravare sulla banca.

Questa soluzione comporterebbe tuttavia notevoli problemi. In primo luogo, adottando orizzonti di rischio differenziati in funzione della scadenza dei singoli crediti, la banca dovrebbe dotarsi di stime di PD, LGD e EAD misurate su orizzonti temporali differenti, e ciò renderebbe ancor più complessa e incerta la stima di tali parametri. In secondo luogo, sarebbe praticamente impossibile «combinare» tra loro le perdite sui singoli crediti per giungere a una distribuzione di probabilità delle perdite totali: non avrebbe senso, infatti, sommare le possibili perdite nei prossimi tre mesi su un prestito a breve termine con le possibili perdite a 10 anni su un mutuo ipotecario.

In terzo luogo, numerose esposizioni creditizie sono contrattualmente prive di scadenza. In particolare, molte aperture di credito in conto corrente sono erogate «a vista», cioè liberamente revocabili in ogni momento. In realtà, visto che esse vengo-

<sup>2</sup> Cfr. la seconda parte di questo volume.

<sup>3</sup> I credit derivative consentono di trasferire il rischio conservando la relazione con il cliente (cfr. l'Appendice 16A al Capitolo 16).

no rinnovate di anno in anno e che la banca non può controllare ogni giorno lo stato di salute del debitore, esse rappresentano spesso, di fatto, dei prestiti a breve medio termine<sup>4</sup>, dei quali tuttavia non è facile determinare la «scadenza effettiva».

Per questi motivi, l'orizzonte temporale dei modelli per il rischio di credito viene spesso fissato, in maniera convenzionale, a un anno. È questa la soluzione generalmente adottata dai modelli presentati in questo capitolo.

Esistono diverse buone ragioni per giustificare tale scelta:

1. tutti i parametri stimati dal sistema di rating di una banca (ed in particolare PD, LGD, EAD ed, eventualmente, probabilità di migrazione) sono solitamente riferiti a un orizzonte temporale di un anno. Se i modelli di portafoglio che verranno descritti nei prossimi paragrafi adottassero un orizzonte temporale diverso dall'anno, i parametri stimati dal sistema di rating della banca dovrebbero essere adattati a questo diverso orizzonte di rischio. Ciò potrebbe condurre a errori e a confusione;
2. il capitale economico stimato con i modelli presentati in questo capitolo viene utilizzato da molte banche nella stesura dei propri budget annuali. In particolare (come si vedrà nella Parte VI del volume), in sede di preventivo e di consuntivo le diverse unità operative della banca vengono chiamate a remunerare, con un adeguato flusso di utili, la quantità di capitale necessaria a coprire i rischi da esse generate. È dunque necessario che l'orizzonte temporale di calcolo del capitale economico sia coerente con l'ampiezza dei budget e dei consuntivi economici, solitamente pari a un anno;
3. un orizzonte di un anno è solitamente sufficiente, per la banca, per organizzare un aumento di capitale che consenta di ripristinare la dotazione patrimoniale ottimale dopo che questa è stata erosa da perdite inattese. In questo senso, è vero che un prestito a lungo termine, non cedibile su un mercato secondario, può causare alla banca un flusso di perdite superiore a quello previsto su un orizzonte temporale di un anno; tuttavia, un anno di tempo dovrebbe bastare per raccogliere nuovo capitale e fronteggiare queste ulteriori perdite;
4. se la misura del rischio è funzionale alla fissazione di adeguati tassi attivi, che incorporino tanto il costo della perdita attesa, quanto il costo del capitale necessario a coprire le perdite inattese, allora la misura del rischio va calibrata non tanto sulla scadenza finale del prestito, quanto sul periodo di riprezzamento dello stesso. Un orizzonte di rischio di un anno risulterebbe quindi adeguato per i prestiti nei quali la banca ha facoltà di rivedere il tasso ogni dodici mesi;

<sup>4</sup> Osserviamo peraltro che un'improvvisa richiesta di rimborso dei finanziamenti a vista potrebbe generare fenomeni di selezione avversa, nel senso che verrebbero rimborsati, verosimilmente, solo i crediti migliori, mentre i debitori meno affidabili sarebbero nell'impossibilità di rendere prontamente il prestito. Il risultato sarebbe un deterioramento della qualità del portafoglio prestiti della banca.

5. un'ulteriore motivazione invocata talvolta a favore della scelta di un orizzonte di un anno è che esso coincide, per molte banche, con il periodo di rotazione media del portafoglio. In altri termini, nell'arco di un anno la banca rivede o rinnova, mediamente, tutti i suoi prestiti (a fronte degli impieghi pluriennali, infatti, vi sono finanziamenti a brevissimo termine che possono essere rivisti più volte l'anno). Un anno corrisponde quindi al tempo necessario per impostare un'azione correttiva sul portafoglio<sup>5</sup>.

Infine, la decisione di utilizzare un orizzonte di rischio arbitrariamente fissato a un anno risulta maggiormente accettabile quando la banca utilizza un modello VaR di tipo multinomiale, come per esempio CreditMetrics. In questo tipo di modelli, infatti, parte dei rischi legati a un orizzonte temporale superiore all'anno viene indirettamente recepita considerando la possibilità che, alla fine dell'anno, le esposizioni siano migrate in una classe di rating peggiore. Questo meccanismo è descritto in dettaglio nel § 15.3.

La Tab. 15.1 riepiloga le principali motivazioni ora richiamate in merito alla scelta dell'orizzonte di rischio.

### 15.2.2 La determinazione del livello di confidenza

La scelta del livello di confidenza per il calcolo del VaR rappresenta un passaggio più delicato, nel caso del rischio di credito, di quanto non sia, per esempio, per la stima del rischio di mercato con l'approccio parametrico.

Nell'approccio parametrico ai rischi di mercato<sup>6</sup>, infatti, il VaR è semplicemente un multiplo della deviazione standard: è dunque sufficiente moltiplicare quest'ultima per un diverso fattore scalare per ottenere misure di VaR associate a livelli di confidenza differenti. Nel caso dei rischi di credito, la situazione è molto diversa: infatti, come nel caso dei modelli di simulazione visti nel Capitolo 8, il VaR deve essere ricavato in via analitica «tagliando» la distribuzione delle perdite future in corrispondenza del percentile desiderato.

Nel caso delle perdite su crediti, in effetti, l'utilizzo di distribuzioni normali a media nulla (su cui si basa l'approccio parametrico ai rischi di mercato) va necessariamente scartato per almeno due motivi:

- la media della distribuzione delle perdite non è nulla, ma maggiore di zero. Si tratta infatti della somma delle perdite attese sui singoli crediti che compongono il portafoglio, il cui valore (cfr. l'introduzione alla Parte terza di questo volume)

<sup>5</sup> Quest'ultima motivazione in realtà non è del tutto convincente, specie se si pensa al rischio di credito delle singole esposizioni, piuttosto che a quello sull'intero portafoglio. Infatti, se un'esposizione ha vita residua superiore all'anno, la rotazione di altri prestiti nel portafoglio non ha alcun impatto sui rischi da essa generati: in assenza di un mercato secondario su cui cedere la posizione, infatti, essa rimane in portafoglio fino alla sua naturale scadenza.

<sup>6</sup> Cfr. Capitolo 6.

**Tabella 15.1 La scelta dell'orizzonte temporale**

Obiettivo	Fattori rilevanti	Orizzonte ideale
Misurazione e controllo del rischio	Effettiva liquidità delle posizioni e holding period della banca	Vita residua delle esposizioni
Semplificazione	Coerenza con l'orizzonte temporale adottato per la stima delle PD e degli altri parametri di rischio	1 anno
Misurazione delle risk-adjusted performances (RAP) delle diverse unità della banca	Frequenza del processo di budgeting Frequenza del processo di rilevazione dei risultati a consuntivo Allocazione del capitale	1 anno 1 anno 1 anno
Congruità tra rischio e capitale	Tempo necessario per raccogliere nuovo capitale	1 anno
Impostazione di azioni correttive sul portafoglio	Periodo di rotazione medio del portafoglio	1 anno
Pricing	Scadenza delle esposizioni Frequenza di revisione delle condizioni di tasso	Vita residua delle esposizioni 1 anno

può essere stimato come il prodotto tra le rispettive PD, LGD e EAD<sup>7</sup>. Tale quantità è evidentemente maggiore di zero<sup>8</sup>;

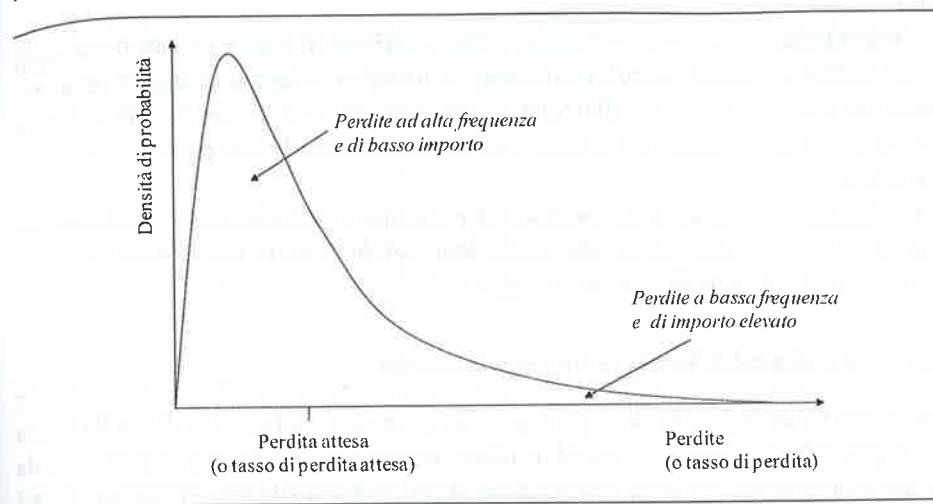
- la distribuzione delle perdite, o anche dei tassi unitari di perdita<sup>9</sup>, è fortemente asimmetrica. L'esperienza mostra infatti che su un portafoglio di crediti si registrano sovente perdite contenute e solo eccezionalmente (per esempio, in corrispondenza di periodi di forte recessione economica) perdite molto rilevanti<sup>10</sup>. Tale fenomeno è illustrato nella Fig. 15.1.

<sup>7</sup> Il prodotto PD · LGD · EAD conduce a risultati corretti quando i tre fattori di rischio (rischio di default, di recupero e di esposizione) sono incorrelati. Nel caso in cui PD ed LGD siano correlate, si veda il Capitolo 13.

<sup>8</sup> Naturalmente, anche la media della distribuzione di profitti e perdite di un portafoglio esposto a rischi di mercato è in generale diversa da zero. Tuttavia, come si ricorderà (Capitolo 6), se si adotta un orizzonte di rischio molto breve (come accade nel caso di portafogli composti da titoli facilmente liquidabili) è possibile ipotizzare che la media dei rendimenti sia nulla.

<sup>9</sup> Il tasso unitario di perdita corrisponde alla perdita divisa per il valore iniziale del portafoglio crediti.

<sup>10</sup> L'asimmetria della distribuzione dei tassi di perdita è dovuta anche al fatto che essi non possono assumere valori negativi, mentre possono raggiungere livelli positivi e molto elevati, di gran lunga superiori al tasso di perdita atteso. Così, per esempio, su un portafoglio con tasso di perdita attesa dell'1 per cento, è probabile che si verifichino tassi di perdita superiori al 2 per cento (media + 1 per cento), mentre è chiaramente impossibile osservare tassi di perdita inferiori allo 0 per cento (media - 1 per cento).

**Figura 15.1 La tipica distribuzione di probabilità delle perdite su crediti**

È dunque necessario utilizzare distribuzioni di probabilità diverse dalla normale e spesso anche adottare approcci basati sulle simulazioni (cfr. Capitolo 8). Come si è detto, ciò fa sì che, variando il livello di confidenza prescelto, il VaR cambi in modo non facilmente ricalcolabile; inoltre, dato che la distribuzione delle perdite future è fortemente asimmetrica (e può avere code più «grasse» della normale), il passaggio a un livello di confidenza diverso comporta spesso variazioni assai significative nel VaR.

Per una banca che utilizza modelli di stima del rischio di credito è dunque opportuno adottare fin dall'inizio un livello di confidenza il più possibile credibile e condiviso dal management, dalle autorità di Vigilanza, dagli azionisti e dalle agenzie di rating.

Tale livello di confidenza dovrebbe risultare omogeneo per tutte le aree di attività, e dunque per tutte le tipologie di rischio, della banca. In questo senso, tale parametro dovrebbe essere scelto dal top management e dovrebbe rappresentare un dato esogeno per il Servizio Crediti e per il Servizio Risk Management. Se così non fosse (per esempio, se per il VaR sul rischio di credito e per quello sul rischio di mercato si adottassero livelli di confidenza differenti), sarebbe necessario renderli omogenei prima di poter calcolare il capitale economico dell'intera banca (cfr. Capitolo 23).

### 15.3 L'approccio delle migrazioni: CreditMetrics

Un modello molto noto per la stima del rischio di credito di un portafoglio di esposizioni (prestiti o obbligazioni) è CreditMetrics (Gupton, Finger e Bhatia, 1997), originariamente introdotto dalla banca statunitense J.P. Morgan. Esso riecheggia, nel nome, il più noto RiskMetrics, sviluppato dalla stessa J.P. Morgan

per i rischi di mercato<sup>11</sup>; tuttavia, come vedremo, adotta logiche e soluzioni differenti.

CreditMetrics stima la distribuzione delle variazioni di valore che un portafoglio di esposizioni creditizie potrebbe subire entro un certo orizzonte di rischio (generalmente un anno). Da tale distribuzione è possibile ottenere la perdita attesa (EL) e misure di perdita inattesa (UL) quali la deviazione standard delle perdite, i percentili e il relativo VaR.

CreditMetrics è un modello multinomiale, dunque considera sia le perdite dovute a un default che quelle legate alla migrazione del debitore in una diversa classe di rating (si parla dunque di *migration approach*<sup>12</sup>).

### 15.3.1 La stima del rischio su un singolo credito

CreditMetrics ipotizza che per ogni esposizione presente nel portafoglio della banca sia disponibile un rating (che potrebbe essere stato assegnato dalla banca stessa o da un'agenzia esterna). Ipotizza inoltre che la banca abbia registrato, in passato, i tassi di default e di migrazione a un anno associati alle diverse classi di rating, e che tali tassi (di cui diamo un esempio nella Tab. 15.2) siano indicativi delle probabilità di default e di migrazione per l'anno successivo.

I dati della tabella indicano, per esempio, che per un'impresa BBB la probabilità di conservare, nell'anno successivo, il proprio rating iniziale è pari all'86,93 per cento. La probabilità di migrazione verso le classi adiacenti risulta relativamente elevata: 5,95 per cento per un upgrading in classe A, 5,30 per cento per un downgrading in classe BB; la probabilità di migrare verso le classi più lontane risulta più ridotta, e quella di terminare l'anno in default è dello 0,18 per cento. Notiamo come l'insolvenza sia solo uno dei possibili credit event, cioè degli eventi che possono influenzare il valore di un credito. Si tratta di uno stato «assorbente», nel senso che, una volta terminata in default, un'impresa non può più tornare in uno stato sano (performing).

I dati della Tab. 15.2 mostrano che un credito assegnato, oggi, alla classe BBB potrebbe trovarsi, tra un anno, in una qualsiasi delle sette classi di rating. Dunque, poiché il valore di un'esposizione dipende dal suo merito creditizio, potrebbe assumere sette valori diversi. Ricaviamo ora questi possibili *valori del credito tra un anno*.

Il valore del credito tra un anno, come il valore di qualunque altro investimento, sarà dato semplicemente dal valore attuale dei flussi di cassa attesi in futuro (interessi e rimborso del capitale<sup>13</sup>), calcolato tra un anno sulla base di un tasso adeguato al rating futuro del debitore.

<sup>11</sup> Cfr. la Parte II di questo volume.

<sup>12</sup> Cfr. Crouhy, Galai e Mark (2000).

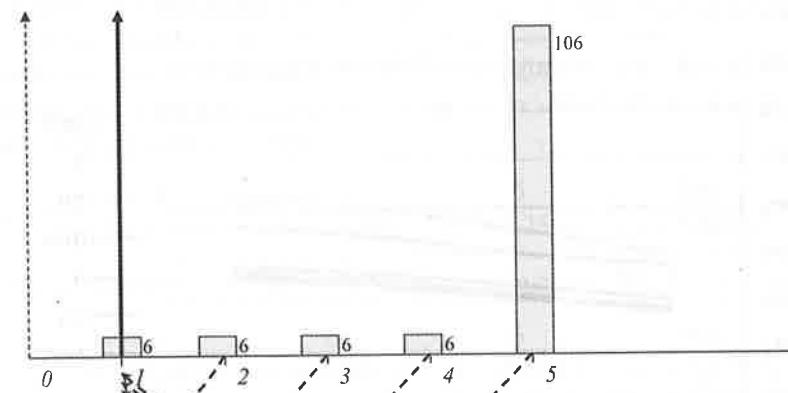
<sup>13</sup> Per semplicità, immaginiamo di conoscere senza incertezza il piano dei flussi di cassa del credito. Per inciso, osserviamo che spesso non è così: per esempio, nel caso di un loan commitment il credito utilizzato potrebbe variare nel tempo in modo imprevedibile; ancora, il valore di un derivato over the counter per il quale la banca ha un rischio di controparte (cfr. Capitolo 17) dipenderebbe dall'evoluzione futura dei fattori di mercato sottostanti.

Tabella 15.2 Probabilità di transizione a 1 anno (valori percentuali)

Rating iniziale	Rating a fine anno							Default
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	
AAA	90,81	8,33	0,68	0,06	0,12	0	0	0,00
AA	0,70	90,65	7,79	0,64	0,06	0,14	0,02	0,00
A	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06
BBB	0,02	0,33	5,95	86,93	5,30	1,17	0,12	0,18
BB	0,03	0,14	0,67	7,73	80,53	8,84	1,00	1,06
B	0,00	0,11	0,24	0,43	6,48	83,46	4,07	5,20
CCC	0,22	0,00	0,22	1,30	2,38	11,24	64,86	19,79

Fonte: S&P CreditWeek (15 aprile 1996), citato in Gupton, Finger e Bhatia (1997)

Figura 15.2 Esempio di flussi di cassa scontati tra un anno



Consideriamo per esempio un titolo con rating BBB<sup>14</sup> che prevede il pagamento di una cedola di 6 milioni di euro per i primi quattro anni e di un'ultima cedola, tra cinque anni, insieme al rimborso del capitale (per complessivi 106 milioni). Immaginiamo di volerne calcolare il valore attuale non oggi, ma tra un anno. Questo significa (v. Fig. 15.2) che il primo flusso di cassa non dovrebbe essere scontato, in quanto verrebbe incassato nell'esatto momento in cui avviene il calcolo del valore

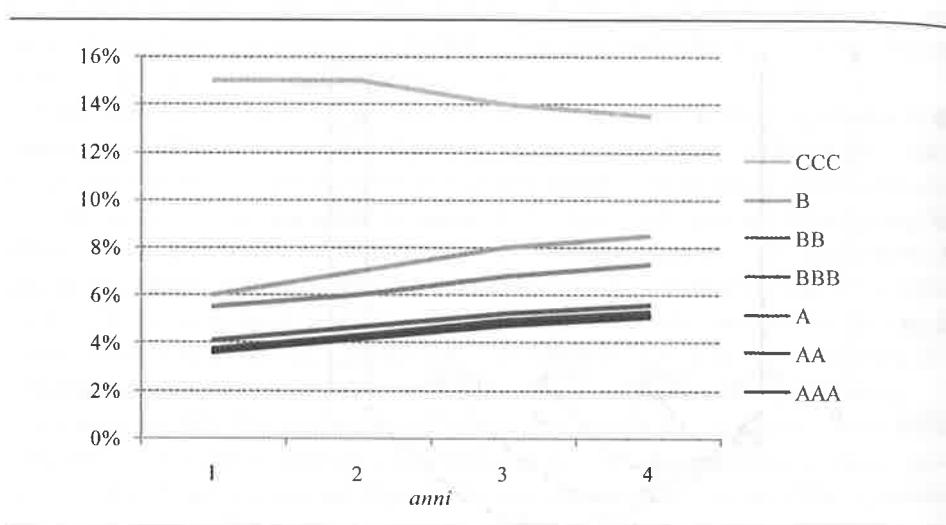
<sup>14</sup> Esempio tratto da Gupton, Finger e Bhatia (1997).

Tabella 15.3 Esempio di curva dei tassi forward zero-coupon a 1 anno (valori %)

Classe di rating (Standard & Poor's)	Scadenza			
	1 anno	2 anni	3 anni	4 anni
AAA	3,60	4,17	4,73	5,12
AA	3,65	4,22	4,78	5,17
A	3,72	4,32	4,93	5,32
BBB	4,10	4,67	5,25	5,63
BB	5,55	6,02	6,78	7,27
B	6,05	7,02	8,03	8,52
CCC	15,05	15,02	14,03	13,52

Fonte: Gupton, Finger e Bhatia (1997)

Figura 15.3 Esempio di curve forward zero-coupon



attuale (tra un anno); il secondo andrebbe scontato su un periodo di un solo anno (distanza tra il tempo 2 e il tempo 1) e così via.

L'operazione di sconto non deve ovviamente avvenire ai tassi correnti, ma a un tasso che riflette i possibili valori dei tassi di mercato (spot) tra un anno. Se siamo disposti ad accettare la teoria delle aspettative presentata nel Capitolo 1 (o a considerare accettabili i margini di errore impliciti in tale teoria), possiamo utilizzare i tassi forward validi per operazioni con decorrenza tra un anno. Più precisamente, poiché tra un anno il credito potrebbe trovarsi in una qualunque delle sette classi di rating, sarà necessario ripetere il calcolo del valore attuale sette volte, utilizzando sette diverse curve dei tassi forward.

Tabella 15.4 Distribuzione dei valori di mercato a 1 anno di un titolo BBB

Stato a fine anno ( $j$ )	Valore attuale tra un anno ( $FV_{1,j}$ )	Probabilità ( $p_j$ valori %)	$\Delta V_j = FV_j - E(FV)$
AAA	109,35	0,02	2,28
AA	109,17	0,33	2,10
A	108,64	5,95	1,57
BBB	107,53	86,93	0,46
BB	102,01	5,3	-5,07
B	98,09	1,17	-8,99
CCC	83,63	0,12	-23,45
Insolvenza	53,80	0,18	-53,27
Media, $E(FV) = \sum p_j FV_j$	107,07		

La Tab. 15.3, tratta da Gupton, Finger e Bhatia (1997), fornisce un esempio di curve dei tassi forward zero-coupon a un anno per le diverse classi di rating. I dati sono riportati, in forma grafica, anche nella Fig. 15.3<sup>15</sup>.

Consideriamo ora il titolo della Fig. 15.2, e immaginiamo che alla fine del primo anno esso si trovi ancora in classe BBB. Il suo *valore attuale tra un anno* (FV, future value o forward value) sarebbe:

$$FV_{1,BBB} = 6 + \frac{6}{(1 + 4,10\%)} + \frac{6}{(1 + 4,67\%)^2} + \frac{6}{(1 + 5,25\%)^3} + \frac{106}{(1 + 5,63\%)^4} = 107,53$$

Se viceversa l'emittente subisse un downgrading alla classe BB, il valore sarebbe:

$$FV_{1,BB} = 6 + \frac{6}{(1 + 5,55\%)} + \frac{6}{(1 + 6,02\%)^2} + \frac{6}{(1 + 6,78\%)^3} + \frac{106}{(1 + 7,27\%)^4} = 102,01$$

Com'è logico, un downgrading causerebbe quindi una riduzione di valore, pari a 5,52 milioni di euro ( $107,53 - 102,01$ ).

In modo analogo a questi due esempi, usando le diverse curve forward indicate nella Tab. 15.3, è possibile ricavare il valore di mercato che il titolo avrebbe alla fine dell'anno in corrispondenza di tutte le possibili classi di rating; i risultati sono riportati nella Tab. 15.4. Si noti che a ogni valore è stata affiancata, nella seconda colonna, la relativa probabilità, ricavata dalla matrice di transizione (Tab. 15.2).

Se l'emittente divenisse insolvente, il valore di mercato del titolo sarebbe dato dal relativo valore di recupero ( $EAD \cdot RR$ ). Quest'ultimo potrebbe essere stimato dalla banca con un proprio modello interno o facendo riferimento agli studi pubblici.

<sup>15</sup> Come si può notare, le curve sono inclinate positivamente, con l'unica eccezione della classe peggiore (CCC). I dati sono dunque coerenti con le previsioni del modello di Merton (Capitolo 12) e con le curve dei tassi d'insolvenza marginali (Capitolo 14).

**Tabella 15.5 Tassi di recupero stimati (valori %)**

	Tipologia di titolo				
	Senior secured	Senior unsecured	Senior subordinated	Subordinated	Junior subordinated
Media	53,80	51,13	38,52	32,74	17,09
Deviazione standard	26,86	25,45	23,81	20,18	10,90

Fonte: Gupton, Finger e Bhatia (1997)

cati dalle agenzie di rating, che stimano diversi tassi di recupero attesi a seconda del grado di seniority del titolo e delle garanzie (security) che lo assistono (cfr. Capitolo 13). La Tab. 15.5 riporta un esempio di tali dati.

Immaginiamo che il titolo da noi esaminato sia di tipo senior secured: sulla base delle stime della Tab. 15.5, la banca gli assegna dunque, in caso di default, un valore atteso pari a 53,80 milioni di euro<sup>16</sup>. Anche questo valore viene riportato nella Tab. 15.4, assegnandogli una probabilità pari alla PD di un debitore di classe BBB (anch'essa ripresa dalla Tab. 15.2).

Sulla base dei dati raccolti nella Tab. 15.4 possiamo calcolare il valore atteso del credito tra un anno, pari a 107,07 milioni, ottenuto semplicemente come media degli otto valori calcolati in precedenza, ognuno ponderato per la propria probabilità. I possibili valori futuri del credito possono quindi essere riscritti (cfr. l'ultima colonna della Tab. 15.4) come variazioni ( $\Delta V_j$ ) rispetto al valore atteso.

Si noti che il valore atteso (107,07 milioni) è diverso dal valore in caso di permanenza del debitore nella classe di rating iniziale ( $FV_{1,BBB} = 107,53$ ); la differenza fra i due valori ( $107,53 - 107,07 = 0,46$ ) può essere considerata una misura della *perdita attesa* (EL) sul titolo.

Dalla distribuzione di probabilità della Tab. 15.4 è inoltre possibile ricavare la deviazione standard dei valori futuri del credito, calcolata come di consueto come:

$$\sigma_{FV} = \sigma_{\Delta V} = \sqrt{\sum_j [FV_j - E(FV)]^2 p_j} = \sqrt{\sum_j \Delta V_j^2 p_j} \approx 2,9$$

È inoltre possibile calcolare il valore a rischio (VaR) corrispondente a un certo livello di confidenza «tagliando» la distribuzione delle variazioni di valore a un anno in corrispondenza del percentile desiderato. A tal fine, può essere utile affiancare ai  $\Delta V_j$  le relative probabilità cumulate, calcolate partendo dalle perdite peggiori (cfr. Tab. 15.6).

Così, per esempio, il VaR al 99 per cento di confidenza è ottenuto tagliando la distribuzione in corrispondenza di un valore di perdita (8,99) che isola almeno l'1

<sup>16</sup> Per semplicità, stiamo assumendo che la EAD coincida con il valore nominale del capitale (100 milioni) e che la stima formulata dalla banca sia sufficientemente affidabile da poter trascurare il rischio di recupero (v. Capitolo 13).

**Tabella 15.6 Valori e probabilità cumulate**

$\Delta V_j$	Probabilità $p_j$ (%)	Probabilità cumulata (%) $c_j = \sum_{V_k \leq V_j} p_k$
-53,27	0,18	0,18
-23,45	0,12	0,3
-8,99	1,17	1,47
-5,07	5,3	6,77
0,46	86,93	93,7
1,57	5,95	99,65
2,1	0,33	99,98
2,28	0,02	100

per cento dei casi peggiori<sup>17</sup>. Il VaR al 95 per cento è ottenuto isolando almeno il 5 per cento di casi peggiori e risulta pari a 5,07.

Se, anziché calcolare il VaR con il metodo del percentile, avessimo utilizzato l'approccio parametrico basato sulla distribuzione normale, avremmo ottenuto misure molto diverse, sotto- o sovrastimate rispetto al valore reale. Avremmo infatti calcolato:

$$VaR_{99\%} = |z_{1\%}| \cdot \sigma_{\Delta V} = N^{-1}(0,99) \cdot \sigma_{\Delta V} \approx 2,32 \cdot 2,9 \approx 6,75$$

e:

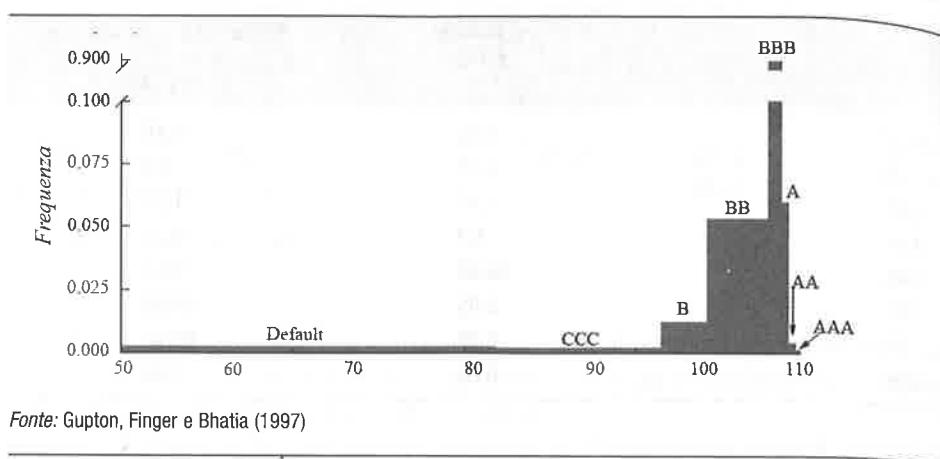
$$VaR_{95\%} = |z_{5\%}| \cdot \sigma_{\Delta V} = N^{-1}(0,95) \cdot \sigma_{\Delta V} \approx 1,64 \cdot 2,9 \approx 4,77$$

Il motivo di questa discrepanza è che la distribuzione dei valori futuri del credito (da cui deriva quella delle variazioni di valore) è fortemente asimmetrica (cfr. Fig. 15.4) e dunque non può essere approssimata con una normale. A conferma di quanto osservato nel § 15.2, infatti, forti variazioni negative di valore sono relativamente poco probabili, mentre variazioni di modesta entità risultano assai più frequenti. Si noti come, trattandosi della distribuzione dei valori futuri e non di quella delle perdite, la «coda» della distribuzione si allunga verso sinistra (valori inferiori) piuttosto che verso destra come accadeva nella Fig. 15.1 (perdite maggiori).

<sup>17</sup> A causa della natura discreta, e non continua, della distribuzione di probabilità, in realtà il valore -8,99 viene superato solo nello 0,3 per cento dei casi (0,12% + 0,18%); tuttavia, se si considerasse il valore -5,07, esso verrebbe superato in una percentuale di casi pari all'1,47 per cento (0,12% + 0,18% + 1,17%), superiore all'1 per cento ricercato.



Figura 15.4 La distribuzione dei valori futuri (FV)



### 15.3.2 La stima del rischio di un portafoglio di due esposizioni

Passiamo ora dal caso di una singola esposizione a quello di un portafoglio. Per semplicità, consideriamo inizialmente due sole esposizioni, un titolo con rating BBB (quello visto nella sezione precedente) e un titolo con rating A.

Se il default e le migrazioni dei due emittenti fossero indipendenti, sarebbe immediato calcolare le probabilità congiunte: così, per esempio, la probabilità che entrambi restino nella propria classe iniziale sarebbe data dal prodotto delle due rispettive probabilità. Utilizzando i dati riportati nella Tab. 15.2, si avrebbe:  $86,93\% \cdot 91,05\% = 79,15\%$ ; analogamente, la probabilità che entrambi divengano insolventi sarebbe data da:  $0,06\% \cdot 0,18\% \approx 0,00\%$ . La Tab. 15.7 riporta tali probabilità congiunte, calcolate in ipotesi di indipendenza.

L'ipotesi di indipendenza è tuttavia molto irrealistica. È noto, infatti, che le variazioni nel rating delle imprese e le loro insolvenze sono in parte guidate da fattori comuni, quali il ciclo economico, il livello dei tassi di interesse, i prezzi delle materie prime e altri ancora.

È dunque necessario stimare le probabilità congiunte nell'ipotesi che tra i due debitori sussista una certa correlazione. A tal fine, CreditMetrics:

1. utilizza una variante del modello di Merton, dove non solo il default, ma anche le migrazioni verso rating diversi dipendono dalle variazioni nel valore degli attivi aziendali (AVR, asset value return);
2. stima la correlazione tra gli asset value return dei due debitori;
3. da tale correlazione ricava una distribuzione di proprietà congiunte che, diversamente dalla Tab. 15.7, non implica indipendenza.

Vediamo dunque, per prima cosa, come sia possibile estendere il modello di Merton, originariamente fondato su una logica binaria (sopravvivenza/insolvenza) al caso multinomiale che include default e migrazioni tra rating diversi.

Tabella 15.7 Probabilità di migrazione congiunta di due emittenti in ipotesi di indipendenza (valori percentuali)

Emittente con rating BBB	Emittente con rating A								Qual-siasi stato
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default	
AAA	0,00	0,00	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02
AA	0,00	0,01	0,30	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,33
A	0,01	0,14	5,42	0,33	0,04	0,02	0,00	0,00	5,95
BBB	0,08	1,97	79,15	4,80	0,64	0,23	0,01	0,05	86,93
BB	0,00	0,12	4,83	0,29	0,04	0,01	0,00	0,00	5,30
B	0,00	0,03	1,07	0,06	0,01	0,00	0,00	0,00	1,17
CCC	0,00	0,00	0,11	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,12
Default	0,00	0,00	0,16	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,18
Qualsiasi stato	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06	100,00

La Fig. 15.5 presenta la distribuzione di probabilità standardizzata degli AVR di un'impresa con rating iniziale BBB; indicheremo tali return come  $r_{BBB}$  e, come già nel modello di Merton, ipotizzeremo che la loro distribuzione sia normale.

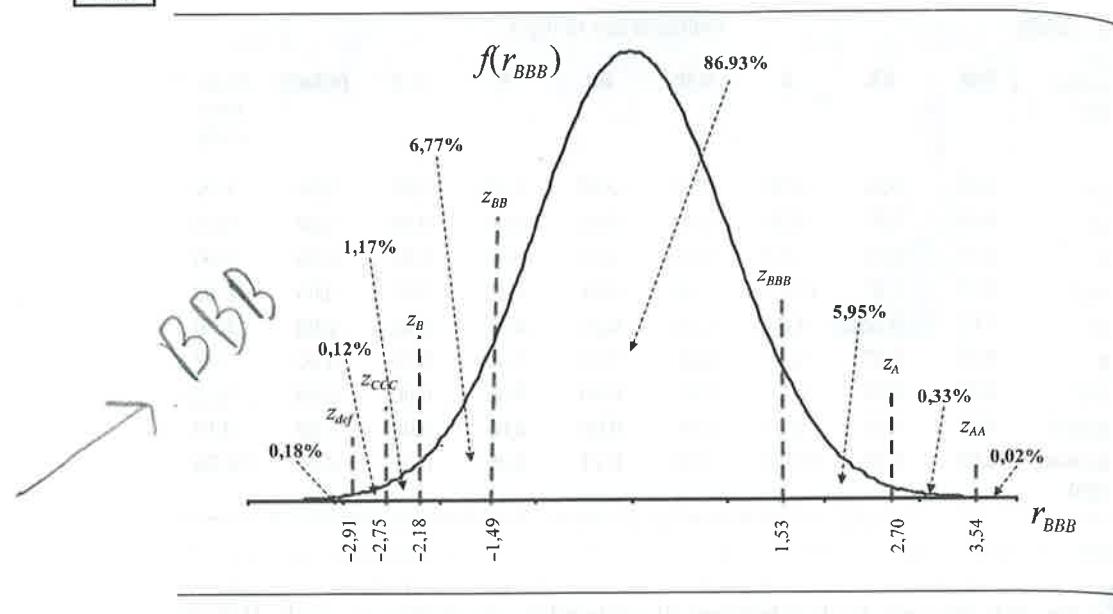
Se l'anno prossimo si verificasse un  $r_{BBB}$  tale da portare il valore dell'attivo su livelli particolarmente bassi, l'impresa (come suggerito dal modello di Merton nella sua versione originaria) risulterebbe insolvente. Indichiamo con  $z_{def}$  la soglia<sup>18</sup> al di sotto della quale gli AVR determinano il fallimento dell'impresa. In presenza di AVR superiori a tale soglia l'impresa resterebbe solvibile; tuttavia, non è detto che il suo rating resti invariato. Possiamo pensare che esista una seconda soglia,  $z_{CCC}$ , tale che, se  $r_{BBB}$  è compreso tra  $z_{def}$  e  $z_{CCC}$ , la forte riduzione del valore dell'attivo induca gli analisti della banca a un downgrading del debitore in classe CCC; all'estremo opposto, esisterà una soglia  $z_{AA}$  tale che, se gli  $r_{BBB}$  sono superiori a essa, gli analisti le assegneranno un rating AAA<sup>19</sup>. Inoltre, possiamo pensare che esistano due soglie,  $z_{BB}$  e  $z_{BBB}$ , tali che se l'AVR è compreso tra di esse il valore degli attivi aziendali non cambia in misura sufficiente per giustificare una variazione di rating, e l'impresa rimane in classe BBB. Questo sistema di soglie ( dette *asset value return thresholds*, o AVRT) è rappresentato nella Fig. 15.5.

<sup>18</sup> Nel modello di Merton, tale soglia era pari al valore del debito,  $F$ . Come si vedrà, in CreditMetrics essa viene ricavata indirettamente dalla matrice di transizione.

<sup>19</sup> Dati  $n$  stati (classi di rating più il default), esistono ovviamente  $n - 1$  soglie. Per questo l'ultima soglia è  $z_{AA}$  e non  $z_{AAA}$ .



**Figura 15.5 Esempio di distribuzione degli asset value return in un modello à la Merton multinomiale**



Nel modello di Merton originario (cfr. Capitolo 12) la stima di  $z_{def}$  comportava un'analisi del debito aziendale e del leverage, mentre la conoscenza della distribuzione degli AVR implicava una stima della volatilità dell'attivo. In CreditMetrics, invece,  $z_{def}$  e tutte le altre AVRT vengono ricavate indirettamente dalle probabilità riportate nella matrice di transizione.

Per esempio,  $z_{def}$  è scelto in modo tale che la probabilità di default (area sotto la curva a sinistra del valore  $z_{def}$ ) sia proprio la PD indicata nell'ultima colonna della matrice di transizione (0,18 per cento nel caso di un titolo BBB), cioè in modo tale che:

$$\int_{-\infty}^{z_{def}} f(r_{BBB}) dr_{BBB} = F(z_{def}) = PD = 0,18\%$$

Se immaginiamo di considerare gli AVR in forma standardizzata (cioè di lavorare con valori già divisi per la loro volatilità), la distribuzione di densità di probabilità degli AVR sarà una normale standard, e la condizione ora vista potrà essere riscritta semplicemente come  $N(z_{def}) = 0,18\%$ , da cui  $z_{def} = N^{-1}(0,18\%) \approx -2,91$ .

Analogamente,  $z_{CCC}$  verrà scelta in modo tale che l'area compresa fra  $z_{def}$  e  $z_{CCC}$  sia pari alla probabilità di migrazione da BBB a CCC ( $p_{BBB \rightarrow CCC}$ ) indicata dalla Tab. 15.2 (0,12%), cioè che:

$$\int_{z_{def}}^{z_{CCC}} f(r_{BBB}) dr_{BBB} = N(z_{CCC}) - N(z_{def}) = p_{BBB \rightarrow CCC} = 0,12\%$$



**Tabella 15.8 Probabilità di transizione e AVRT di un'impresa BBB**

$j$	Stato a fine anno $s_j$	Probabilità di transizione $p_{BBB \rightarrow s_j}$	Probabilità cumulata $c_j = \sum_{k \leq j} p_{BBB \rightarrow s_k}$	AVRT $z_j = N^{-1}(c_j)$
1	Default	0,18%	0,18%	-2,91
2	CCC	0,12%	0,30%	-2,75
3	B	1,17%	1,47%	-2,18
4	BB	5,30%	6,77%	-1,49
5	BBB	86,93%	93,70%	1,53
6	A	5,95%	99,65%	2,70
7	AA	0,33%	99,98%	3,54
8	AAA	0,02%	100,00%	

**Tabella 15.9 Probabilità di transizione e AVRT di un'impresa A**

$j$	Stato a fine anno $s_j$	Probabilità di transizione $p_{A \rightarrow s_j}$	Probabilità cumulata $c_j = \sum_{k \leq j} p_{A \rightarrow s_k}$	AVRT $z_j = N^{-1}(c_j)$
1	Default	0,06%	0,06%	-3,24
2	CCC	0,01%	0,07%	-3,19
3	B	0,26%	0,33%	-2,72
4	BB	0,74%	1,07%	-2,30
5	BBB	5,52%	6,59%	-1,51
6	A	91,05%	97,64%	1,98
7	AA	2,27%	99,91%	3,12
8	AAA	0,09%	100,00%	

Da cui:  $Z_{CCC} = N^{-1}(0,18\% + 0,12\%) \approx -2,75$ .

Seguendo un ragionamento analogo si possono ricavare (cfr. Tab. 15.8) anche le altre AVRT.

Abbiamo considerato un'impresa con rating BBB perché questo è il rating del primo titolo compreso nel portafoglio della banca. La stessa logica può essere seguita anche per gli AVR,  $r_A$ , di un'impresa con rating A (il secondo titolo presente nel portafoglio): le relative AVRT sono indicate nella Tab. 15.9.

Abbiamo così visto come sia possibile ricavare le AVRT dalla matrice di transizione, senza dover conoscere il valore del debito o degli attivi dell'impresa debitrice; inoltre, poiché abbiamo scelto di considerare gli AVR in forma standardizzata, non abbiamo nemmeno dovuto preoccuparci di conoscere la volatilità dei rendimenti dell'attivo. In pratica, nessuna delle quantità che devono essere stimate per poter

implementare il modello di Merton nella sua versione originale (cfr. Capitolo 12) è stata necessaria per modellare la distribuzione degli AVR standardizzati.

In effetti CreditMetrics, nonostante utilizzi in parte l'armamentario concettuale sviluppato da Merton, rappresenta un modello *in forma ridotta*<sup>20</sup>. Infatti, diversamente dai modelli strutturali (come il modello di Merton originario), esso non ricava la probabilità di insolvenza (o di migrazione) sulla base delle caratteristiche dell'impresa (valore di mercato e volatilità dell'attivo, valore del debito): si limita a utilizzare come input i dati storici relativi ai tassi di insolvenza e di migrazione per classi di rating<sup>21</sup>. Da questo punto di vista, può dunque essere definito un modello «agnosticico».

Se gli AVR standardizzati di un debitore sono descritti da una distribuzione normale standard, allora la distribuzione congiunta degli AVR di due imprese debitrici è data da una normale standard bivariata. Tale distribuzione, nel caso generico di due variabili casuali  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ , presenta la seguente funzione di densità di probabilità:

$$n(x; y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}}$$

mentre la sua funzione di densità cumulata  $N(x^*, y^*; \rho)$  (probabilità che  $\tilde{x}$  sia minore di  $x^*$  e, contemporaneamente,  $\tilde{y}$  sia minore di  $y^*$ ) è data dal seguente integrale doppio, calcolabile (o meglio, approssimabile) con numerose routine disponibili per il calcolatore:

$$n(x^*, y^*; \rho) = pr(\tilde{x} < x^* \wedge \tilde{y} < y^*) = \int_{-\infty}^{y^*} \int_{-\infty}^{x^*} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}} dx dy \quad [15.1]$$

Come si vede, entrambe le funzioni dipendono dal parametro  $\rho$ , che nel nostro caso indica la correlazione tra gli asset value return del primo e del secondo debitore (in breve: asset correlation<sup>22</sup>). Immaginiamo per ora di avere già stimato tale parametro (che formerà l'oggetto di un approfondimento tra breve) e che le variazioni dei valori dell'attivo dei due clienti del nostro esempio siano caratterizzate da un coefficiente di correlazione del 38 per cento.

Potremo a questo punto utilizzare la [15.1], il valore di  $\rho$  e i valori delle  $z_{def}$  riportate nelle Tab. 15.7 e Tab. 15.8 per stimare la probabilità congiunta di default dei due debitori

<sup>20</sup> Altri esempi di modelli in forma ridotta sono Jarrow e Turnbull (1995), Jarrow, Lando e Turnbull (1997), Lando (1998), Duffie e Singleton (1999) e Duffie (1998). Per un esame delle caratteristiche generali di questi modelli, cfr. Altman, Resti e Sironi (2005).

<sup>21</sup> Accanto ai modelli ridotti e strutturali, è possibile individuare un'ulteriore classe di modelli, di natura macroeconomica, che spiegano l'evoluzione dei tassi di insolvenza e di migrazione sulla base del ciclo economico. Un esempio è CreditportfolioView (cfr. § 15.5).

<sup>22</sup> L'asset correlation differisce dalla correlazione fra gli eventi di insolvenza, o default correlation. Sulla differenza fra le due, cfr. l'Appendice 15A.

$$pr(r_{BBB} < -2,91 \wedge r_A < -3,24) = N(-2,91, -3,24; 0,38) \cong 0,000027 \quad [15.1 \text{ bis}]$$

Se invece desideriamo calcolare la probabilità che le due imprese si collochino, a fine anno, in una data classe di rating, dovremo utilizzare una generalizzazione della [15.1], utilizzando per ogni impresa i valori delle due AVR rilevanti. Per esempio, la probabilità che entrambe le imprese conservino il rating di partenza (rispettivamente BBB e A) sarà data da:

$$\begin{aligned} pr(-1,49 < r_{BBB} < 1,53; -1,51 < r_A < 1,98) &= \int_{-1,51}^{1,53} \int_{-1,51}^{1,53} n(r_{BBB}, r_A; 0,2) dr_{BBB} dr_A = \\ &= \int_{-1,51}^{1,53} \int_{-1,51}^{1,53} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-0,2^2}} e^{-\frac{r_{BBB}^2 - 0,4r_{BBB}r_A + r_A^2}{2(1-0,2^2)}} dr_{BBB} dr_A \end{aligned}$$

Notiamo che, per le proprietà degli integrali definiti, sarà possibile calcolare questo integrale come:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{1,53} \int_{-\infty}^{1,53} n(r_{BBB}, r_A; 0,38) dr_{BBB} dr_A - \int_{-\infty}^{-1,51} \int_{-\infty}^{-1,51} n(r_{BBB}, r_A; 0,38) dr_{BBB} dr_A + \\ &- \int_{-\infty}^{1,49} \int_{-\infty}^{1,49} n(r_{BBB}, r_A; 0,38) dr_{BBB} dr_A + \int_{-\infty}^{-1,51} \int_{-\infty}^{-1,49} n(r_{BBB}, r_A; 0,2) dr_{BBB} dr_A = \\ &= N(1,53, 1,98; 0,2) - N(1,53, -1,51; 0,2) - N(-1,49, 1,98; 0,2) + \\ &+ N(-1,49, -1,51; 0,2) \cong 0,8001 \end{aligned}$$

Seguendo questa logica è possibile ricostruire tutte le probabilità congiunte e ottenere in questo modo la matrice delle probabilità di migrazione congiunte, in ipotesi di correlazione tra i debitori, riportata nella Tab. 15.10.

Notiamo che i valori differiscono da quelli della Tab. 15.7. Per esempio, la probabilità che entrambi i debitori rimangano nella classe di rating di partenza è pari all'80,01 per cento anziché al 79,15 per cento; la probabilità che entrambi migliori di una classe è pari allo 0,49 per cento anziché allo 0,14 per cento; la probabilità che entrambi peggiorino di una classe è pari allo 0,77 per cento anziché allo 0,29 per cento. In generale, risulta accresciuta la probabilità che si verifichino per entrambi variazioni simili, mentre è più difficile che si verifichino variazioni di rating di tipo opposto. Dall'asset correlation positiva (pari al 38 per cento) con cui sono stati calcolati i valori della Tab. 15.10 consegue dunque una tendenza dei due debitori a evolvere in modo simile.

Per ognuno dei 64 stati del mondo descritti dalla Tab. 15.10 è possibile calcolare il valore del portafoglio composto dai due titoli, semplicemente come somma dei valori futuri dei due titoli, ottenuti scontando tra un anno i relativi flussi di cassa



**Tabella 15.10 Probabilità di migrazione congiunte di due emittenti in ipotesi di asset correlation del 38% (valori percentuali)**

Emittente con rating BBB	Emittente con rating A								Qual- siasi stato
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default	
AAA	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02
AA	0,01	0,05	0,27	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,33
A	0,03	0,49	5,38	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	5,95
BBB	0,05	1,71	80,01	4,41	0,53	0,17	0,01	0,03	86,93
BB	0,00	0,01	4,31	0,77	0,14	0,06	0,00	0,01	5,30
B	0,00	0,00	0,86	0,23	0,05	0,02	0,00	0,01	1,17
CCC	0,00	0,00	0,08	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	0,12
Default	0,00	0,00	0,11	0,05	0,01	0,01	0,00	0,00	0,18
Qualsiasi stato	0,09	2,27	91,05	5,52	0,74	0,26	0,01	0,06	100,00

**Tabella 15.11 Valori del portafoglio ottenuti come somma dei valori dei due titoli**



	Titolo A								Default	
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC			
	106,59	106,49	106,30	105,64	103,15	101,39	88,71	51,13		
AAA	109,35	215,94	215,85	215,66	215,00	212,50	210,74	198,07	160,48	
AA	109,17	215,76	215,67	215,48	214,82	212,32	210,56	197,89	160,30	
A	108,64	215,23	215,14	214,95	214,29	211,79	210,03	197,36	159,77	
Titolo	BBB	107,53	214,12	214,02	213,84	213,17	210,68	208,92	196,24	158,66
BBB	BB	102,01	208,59	208,50	208,31	207,65	205,16	203,40	190,72	153,14
B	98,09	204,67	204,58	204,39	203,73	201,24	199,48	186,80	149,22	
CCC	83,63	190,21	190,12	189,93	189,27	186,78	185,02	172,34	134,76	
Default	53,80	160,39	160,29	160,10	159,44	156,95	155,19	142,51	104,93	

con un tasso forward adeguato alla loro classe di rating. Per il primo titolo (rating BBB), i valori sono riportati nella Tab. 15.4 e nella parte sinistra della Tab. 15.11. Per il secondo titolo, si è supposto che esso abbia durata di tre anni, paghi una cedola di 5 milioni a fine anno e alla fine dell'anno rimborsi anche il capitale, pari a 100 milioni; seguendo il medesimo procedimento utilizzato per la Tab. 15.4, si sono stimati i suoi possibili valori forward tra un anno, riepilogati nella parte alta della Tab.

15.11<sup>23</sup>. La medesima tabella riporta i 64 possibili valori futuri del portafoglio, generati semplicemente come somma dei valori dei due titoli.

Poiché disponiamo delle probabilità (Tab. 15.10) e dei relativi valori futuri del portafoglio (Tab. 15.11), possiamo calcolare la media di questa distribuzione e riepimerla in termini di differenze ( $\Delta V$ ) rispetto alla media (213,28). Ordinando questi 64 valori di  $\Delta V$  in senso crescente e individuando il percentile desiderato, potremo infine ricavare, in analogia a quanto visto nel § 15.3.1, le misure di VaR relative a diversi livelli di confidenza. Il VaR al 95 per cento di confidenza, per esempio, risulterà pari a 4,96 (208,31 – 213,28).

### 15.3.3 La stima dell'asset correlation

Nel paragrafo precedente abbiamo ipotizzato di conoscere la correlazione tra i rendimenti degli attivi dei due debitori, e che questa fosse pari al 38 per cento. In effetti, se entrambi fossero quotati, si potrebbe ricavare dalla serie storica dei loro prezzi azionari una serie storica dei rispettivi valori degli attivi (per esempio, usando la metodologia di KMV vista nel Capitolo 12) e calcolare quindi la correlazione dei relativi rendimenti.

Tuttavia, i debitori delle banche sono spesso imprese non quotate. Inoltre, un portafoglio reale comprende un numero elevato di debitori, così che ricavare tutte le asset correlation per via analitica risulterebbe eccessivamente laborioso e richiederebbe tempi troppo lunghi<sup>24</sup>.

CreditMetrics utilizza quindi un approccio semplificato, basato su due artifici:

1. ipotizza che i rendimenti degli attivi di ogni impresa siano determinati da un insieme di fattori di rischio sistematici e da un fattore idiosincratico. Il fattore idiosincratico è specifico della singola impresa e dunque ha correlazione nulla con qualunque altro fattore<sup>25</sup>. È invece necessario stimare le correlazioni tra i fattori sistematici;
2. a tal fine, CreditMetrics utilizza le correlazioni fra i rendimenti degli indici azionari di diversi Paesi e di diversi settori; la correlazione fra i rendimenti delle attività è dunque approssimata attraverso la correlazione fra rendimenti azionari.

Con riferimento al punto 1, CreditMetrics ipotizza che l'asset value return di un'impresa  $j$  sia dato da una combinazione lineare di uno o più fattori sistematici  $i_k$  (legati, per esempio, all'andamento del settore chimico o automobilistico, ovvero a quel-

<sup>23</sup> In caso di default si è supposto che il titolo fosse senior unsecured e si è utilizzato il relativo valore della Tab. 15.5.

<sup>24</sup> In generale in un portafoglio di  $n$  controparti occorrerebbe stimare  $[n \cdot (n - 1)]/2$  correlazioni. Per  $n$  pari rispettivamente a 100, 1000, 2000, il numero di correlazioni risulterebbe pari a 4950, 499.500, 1.999.000.

<sup>25</sup> La variabilità legata ai fattori specifici può dunque essere eliminata attraverso la diversificazione del portafoglio, mentre la variabilità determinata dai fattori comuni non può essere eliminata.



Tabella 15.12 Pesi dei fattori sistematici e idiosincratici di due imprese A e BBB

	Pesi non standardizzati		Pesi standardizzati	
	Impresa A	Impresa BBB	Impresa A	Impresa BBB
Fattori sistematici rilevanti	$w_{k,A}$	$w_{k,BBB}$	$\beta_{k,A}$	$\beta_{k,BBB}$
$i_1$ - Settore bancario USA	50%		0,77	
$i_2$ - Settore assicurativo USA	40%	—	0,62	
$i_3$ - Settore automobilistico Italia	—	40%		0,75
$i_4$ - Settore finanziario Italia	—	25%		0,47
$i_5$ - Settore energetico Francia	—	20%		0,37
Fattori specifici	$\epsilon_A$	$\epsilon_{BBB}$	$\epsilon_A$	$\epsilon_{BBB}$
	10%	15%	0,15	0,28

lo dell'economia britannica o francese) e di un termine  $\epsilon_j$  specifico dell'impresa  $j$ -esima. Analiticamente:

$$r_j = \beta_{1,j} i_1 + \beta_{2,j} i_2 + \dots + \beta_{n,j} i_n + \delta_j \epsilon_j \quad [15.2]$$

dove  $\beta_{k,j}$  indica il peso del fattore  $i_k$  nello spiegare il rendimento dell'attivo dell'impresa  $j$ , mentre  $\delta_j$  indica il peso della componente idiosincratica.

È necessario che, per ogni debitore, la banca specifichi questo sistema di pesi<sup>26</sup>; è inoltre necessario, come vedremo, che i pesi vengano standardizzati. Per quanto riguarda il peso dei fattori sistematici, è possibile aiutarsi con la ripartizione, per Paese e per settore di attività, del fatturato, degli attivi o dei profitti operativi dell'impresa. Il peso del fattore idiosincratico, inoltre, dovrebbe essere tanto maggiore quanto minori sono le dimensioni dell'impresa: infatti, mentre il successo o l'insuccesso di un'impresa di piccole dimensioni dipendono in misura rilevante da elementi specifici, il valore dei grandi gruppi industriali è più direttamente connesso all'andamento generale del settore o dell'economia nazionale.

La Tab. 15.12 mostra un esempio relativo a due imprese, A e BBB (che possono essere viste come gli emittenti dei due titoli considerati nella sezione precedente). L'impresa A è un gruppo bancario-assicurativo statunitense, mentre l'impresa BBB è un gruppo industriale italiano, con interessi nel settore finanziario e una partecipazione in una compagnia elettrica francese.

Le ultime due colonne della tabella mostrano i pesi in versione standardizzata. È infatti necessario scalarli in modo tale che la somma dei loro quadrati sia pari a uno, se vogliamo che l'espressione [15.2] produca un  $r_j$  con deviazione standard unitaria, adatto a rappresentare un AVR standardizzato.

<sup>26</sup> Per dettagli cfr. Gupton, Finger e Bhatia (1997).



Tabella 15.13 Esempio di correlazioni tra fattori sistematici

	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$
$i_1$ - Settore bancario USA	100%	70%	10%	30%	10%
$i_2$ - Settore assicurativo USA	70%	100%	20%	20%	15%
$i_3$ - Settore automobilistico Italia	10%	20%	100%	45%	20%
$i_4$ - Settore finanziario Italia	30%	20%	45%	100%	25%
$i_5$ - Settore energetico Francia	10%	15%	20%	25%	100%

Applicando la [15.2], possiamo esprimere gli AVR standardizzati delle due imprese come:

$$r_A = \beta_{1,A} i_1 + \beta_{2,A} i_2 + \delta_A \epsilon_A$$

$$r_{BBB} = \beta_{3,BBB} i_3 + \beta_{4,BBB} i_4 + \beta_{5,BBB} i_5 + \delta_{BBB} \epsilon_{BBB}$$

Ne consegue che la correlazione fra i rendimenti degli attivi dell'impresa A e dell'impresa BBB può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \rho_{A,BBB} &= \beta_{1,A} \beta_{3,BBB} \rho_{1,3} + \beta_{2,A} \beta_{3,BBB} \rho_{2,3} + \beta_{1,A} \beta_{4,BBB} \rho_{1,4} + \\ &+ \beta_{2,A} \beta_{4,BBB} \rho_{2,4} + \beta_{1,A} \beta_{5,BBB} \rho_{1,5} + \beta_{2,A} \beta_{5,BBB} \rho_{2,5} \end{aligned} \quad [15.3]$$

dove  $\rho_{pq}$  indica la correlazione tra il fattore sistematico  $i_p$  e il fattore sistematico  $i_q$  (le correlazioni con i fattori idiosincratici sono infatti, per definizione, tutte nulle).

Per poter procedere al calcolo della [15.3], è necessario disporre di una stima di questi  $\rho_{pq}$ . A tal fine, ricorriamo al secondo artificio enunciato in precedenza, e utilizziamo le correlazioni tra gli indici azionari dei diversi settori e Paesi. Un esempio di tali correlazioni è riportato nella Tab. 15.13.

Applicando la [15.3] otteniamo che l'asset correlation tra le due imprese è pari a:

$$\begin{aligned} \rho_{A,BBB} &= 0,77 \cdot 0,75 \cdot 0,10 + 0,62 \cdot 0,47 \cdot 0,20 + 0,77 \cdot 0,37 \cdot 0,30 + 0,62 \cdot 0,75 \cdot 0,20 + \\ &+ 0,77 \cdot 0,47 \cdot 0,10 + 0,62 \cdot 0,37 \cdot 0,15 \approx 0,38 \end{aligned}$$

cioè al 38 per cento (il valore utilizzato in precedenza per il calcolo delle probabilità congiunte).

#### 15.3.4 L'applicazione a un portafoglio di $N$ posizioni

Quando il numero  $N$  di debitori è superiore a due, il numero di stati del mondo per cui è necessario calcolare una distribuzione di probabilità congiunta cresce molto rapidamente. In generale, se il sistema di rating prevede  $g$  classi più il default, la distribuzione di probabilità congiunta comprende  $(g+1)^N$  casi. Per esempio, dato il nostro sistema di sette classi di rating, 20 debitori richiederebbero di stimare  $8^{20}$ ,

cioè oltre un miliardo di miliardi di probabilità diverse. A tal fine, la normale bivariata (equazione [15.1]) dovrebbe essere sostituita da una normale multipla di ordine  $N$ , e ciò complicherebbe enormemente i calcoli.

Per questo motivo, conviene stimare la distribuzione dei valori futuri del portafoglio (e delle differenze  $\Delta V$  dal valore atteso) facendo ricorso a simulazioni Monte Carlo, simili a quelle presentate nel Capitolo 8. Se si utilizza tale approccio, il processo di stima della distribuzione dei valori futuri del portafoglio si compone delle seguenti fasi:

1. vengono individuate le AVRT corrispondenti alle diverse classi di rating;
2. vengono stimate le asset correlation tra gli  $N$  debitori, raccolte in una matrice  $C$  delle correlazioni di ordine  $N \times N$ ;
3. viene calcolata, per esempio attraverso la fattorizzazione di Cholesky, la matrice  $T$  tale che  $T^T T = C$ ;
4. si genera un vettore  $x$  contenente  $N$  estrazioni casuali da altrettante distribuzioni normali standard indipendenti; da questo si ricava un vettore  $r = Tx$ , contenente un possibile scenario per gli  $N$  asset value return (correlati) dei debitori;
5. ogni valore  $r_j$  del vettore  $r$  viene confrontato con le AVRT del relativo debitore; in base al confronto, si determina se il debitore rimane nella classe di rating di partenza, migra in una classe diversa o termina in default;
6. in funzione della classe di rating così individuata e dell'opportuna curva dei tassi forward (oppure del valore di recupero, in caso di default), è possibile calcolare il valore futuro di ogni esposizione in portafoglio;
7. sommando i valori di tutte le  $N$  posizioni, si determina il valore futuro del portafoglio in questo scenario;
8. si torna al punto 4. per un numero elevato di volte, fino a generare una distribuzione di valori futuri  $FV$  del portafoglio simulati sufficientemente numerosa da approssimare bene quella teorica;
9. si calcolano il valore medio di questa distribuzione, gli scostamenti dalla media, la deviazione standard e il VaR associato al livello di confidenza desiderato; il valore medio può inoltre essere confrontato con il valore del portafoglio nel caso in cui tutti i crediti rimangano nella classe di rating iniziale e la differenza tra i due, analogamente a quanto visto nel § 15.3.1, può essere interpretata come una misura di perdita attesa.

Il metodo delle simulazioni Monte Carlo può richiedere tempi di calcolo abbastanza elevati. Tuttavia, esso consente di generare risultati abbastanza accurati<sup>27</sup>.

<sup>27</sup> L'accuratezza dei risultati può essere verificata tramite intervalli di confidenza come quelli illustrati nell'Appendice 8B del Capitolo 8.

Inoltre, esso permette di introdurre nel modello CreditMetrics (sia pure in maniera incompleta e semplificata) il rischio di recupero, che fin qui avevamo trascurato. Si ricorderà infatti che, nel calcolare la distribuzione dei valori futuri nel § 15.3.1, avevamo supposto di conoscere il valore di recupero del credito in caso di default (pari a 53,8 milioni nell'esempio della Tab. 15.5) e non ci eravamo posti il problema del rischio connesso a una sua cattiva previsione. In una simulazione Monte Carlo, quando l'AVR di un debitore è inferiore alla sua  $z_{def}$  è possibile, anziché assegnare al credito un valore di recupero fisso e predeterminato, assegnargli un valore casuale tratto da un'opportuna distribuzione di probabilità. Solitamente, si utilizza la distribuzione beta<sup>28</sup>, che consente di generare tassi di recupero compresi tra 0 per cento e 100 per cento; è possibile costruire tale distribuzione in modo tale che la sua media e la sua volatilità siano pari al recupero medio stimato dalla banca e alla volatilità storicamente osservata (cfr., per esempio, i valori nella Tab. 15.5).

In questo modo viene considerata l'aleatorietà del tasso di recupero, che contribuisce a determinare il VaR complessivo del portafoglio. Si noti, tuttavia, che in questo modo il rischio di recupero dei singoli debitori ha natura puramente idiosincratica (il modello non prevede correlazioni fra i recuperi su esposizioni diverse) e dunque pienamente diversificabile aumentando il numero  $N$  delle posizioni in portafoglio.

### 15.3.5 Pregi e limiti di CreditMetrics

CreditMetrics ha numerosi pregi, talvolta immediatamente evidenti:

- utilizza dati di mercato al contempo oggettivi e forward looking (tassi forward, correlazioni fra indici azionari);
- adotta una logica «a valori di mercato» in base alla quale il valore dei crediti non è dato non dal valore storico di iscrizione in bilancio, ma dal valore attuale dei flussi di cassa futuri, scontati a un tasso scelto in base al rischio della controparte;
- considera non solo il rischio di insolvenza ma anche il rischio di migrazione;
- riconosce la natura asimmetrica della distribuzione dei valori futuri di un portafoglio crediti (dunque, delle relative perdite);
- consente di calcolare misure di rischio marginale, come il VaR marginale.

A fronte di questi vantaggi CreditMetrics presenta alcuni evidenti problemi:

- molti degli input necessari al modello possono essere ottenuti con facilità solo se la banca possiede stime affidabili delle proprie matrici di transizione e se esiste un mercato liquido dal quale trarre informazioni relative ai tassi forward richiesti sui crediti con differente livello di rating;

<sup>28</sup> Cfr. Appendice 13A al Capitolo 13.

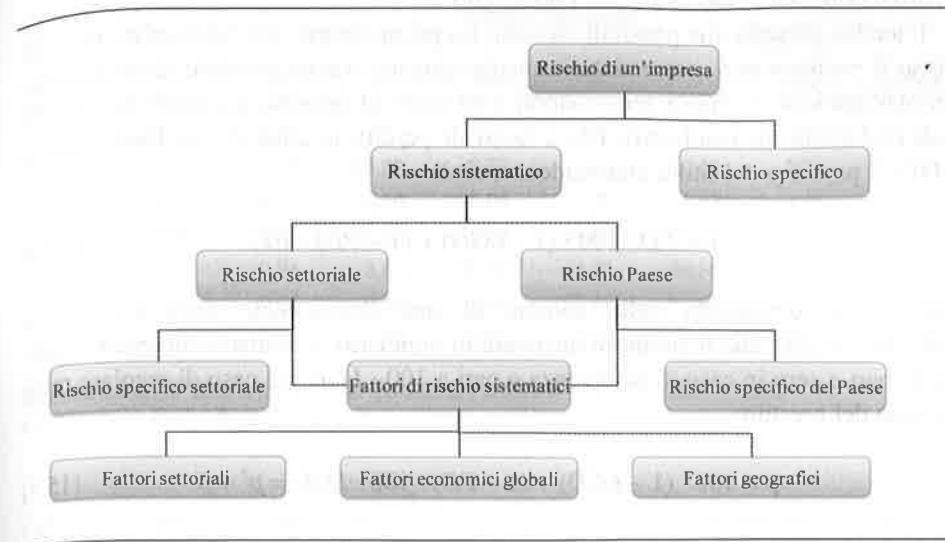
- il modello assume implicitamente che la banca si collochi in posizione di price-taker nel mercato dei crediti, ossia che gli spread pagati dalle diverse classi di rating siano indipendenti dalle sue politiche di impiego;
- un ulteriore limite è legato all'utilizzo delle matrici di transizione storiche. Non è detto, infatti, che le frequenze storiche riflettano adeguatamente le probabilità future, ossia che la matrice di transizione sia temporalmente stabile;
- appare piuttosto irrealistica l'ipotesi che tali probabilità siano uguali per tutte le imprese appartenenti a una data classe di rating; quest'ultimo aspetto (tassi di default e di migrazione uguali per tutti i clienti con un dato rating) dipende dal fatto, già menzionato in precedenza, che CreditMetrics è un modello di tipo ridotto, che tiene conto non delle peculiarità delle singole aziende (il leverage, il valore corrente dell'attivo, la sua volatilità) ma solo dei comportamenti «medi» registrati in passato;
- appare criticabile l'utilizzo delle correlazioni fra indici azionari per misurare le correlazioni tra gli attivi aziendali. Quest'ipotesi equivale ad assumere che le attività delle imprese siano interamente finanziate da capitale di rischio (equity): solo in questo caso, infatti, il rendimento dell'equity coincide con quello dell'attivo. Nel caso di imprese con una leva finanziaria elevata, invece, i rendimenti azionari sono molto più volatili dei rendimenti degli attivi; inoltre, poiché il leverage non resta costante nel tempo, la correlazione tra valori dell'equity può essere diversa da quella tra gli attivi. Infine, il modello stima le correlazioni fra AVR *annui* attraverso correlazioni fra rendimenti azionari che hanno, solitamente, periodicità più brevi; ciò può introdurre distorsioni, visto che i coefficienti di correlazione si modificano al variare dell'orizzonte temporale di stima;
- infine, la scelta dei  $\beta_{jk}$  che collegano gli AVR di un'impresa ai fattori sistematici (e la scelta del peso del fattore idiosincratico) risulta fortemente discrezionale, se non arbitraria, e non è supportata da una metodologia economicamente e finanziariamente rigorosa.

#### 15.4 L'approccio strutturale: PortfolioManager

Alcuni problemi illustrati con riferimento al modello CreditMetrics vengono superati da PortfolioManager, modello sviluppato dalla società californiana KMV (oggi: Moody's KMV)<sup>29</sup>. Questo modello si fonda su una metodologia strutturale, analoga a quella vista nel Capitolo 12 per la stima della PD di un singolo debitore. I default vengono dunque spiegati sulla base di un modello economico (fondato sul valore di mercato e sulla volatilità dell'attivo delle imprese) e non solo dell'esperienza passata.

<sup>29</sup> Cfr. Bohn e Kealhofer (2001).

Figura 15.6 Il mapping del rischio creditizio in PortfolioManager



A fronte di questa differenza di fondo, tuttavia, il modello presenta diverse caratteristiche comuni a CreditMetrics; infatti, anche in PortfolioManager la correlazione fra i rendimenti degli attivi delle imprese controparti è ricavata dalle correlazioni fra i rendimenti azionari.

Più in particolare, il rendimento della singola impresa viene ricondotto a un modello multi-fattoriale in tre fasi distinte (cfr. Fig. 15.6):

1. si individuano una componente sistematica e una specifica;
2. la componente sistematica viene ricondotta a più fattori, associati a diversi settori e Paesi;
3. il rendimento di ogni fattore associato a un settore/paese è a sua volta scomposto in una componente di rischio specifico (industry-specific risk e country specific risk) e in una componente di rischio sistematico (che dipende, per esempio dall'esposizione del Paese/settore all'andamento dell'economia globale).

Analogamente a quanto avviene in CreditMetrics, quindi, gli AVR di un'impresa sono descritti da una combinazione di fattori sistematici e da un fattore specifico; la correlazione fra coppie di imprese è quindi ancora ricavabile come nell'esempio del § 15.3.3 (sulla base dei  $\beta$  che legano l'impresa ai fattori e delle correlazioni di tali fattori sistematici).

Come per CreditMetrics, diviene quindi possibile condurre una simulazione Monte Carlo sui rendimenti dei diversi fattori di rischio (gli indici azionari che rappresentano i fattori sistematici, oltre alle componenti di rischio idiosincratico) e

generare un numero di scenari sufficientemente ampio da consentire di ricostruire la distribuzione dei valori futuri del portafoglio crediti.

L'analisi prevede due possibili varianti. La prima ricorre alla valutazione neutrale verso il rischio e può essere sinteticamente spiegata con un esempio. Consideriamo un'obbligazione rischiosa zero-coupon a un anno di importo nominale pari a 100, con probabilità di insolvenza  $PD$  e tasso di perdita in caso di insolvenza pari a  $LGD$ . Il payoff  $p$  del titolo alla scadenza, cioè:

$$p = PD \cdot 100 \cdot (1 - LGD) + (1 - PD) \cdot 100 \quad [15.4]$$

può essere scomposto nella somma di una componente certa  $p^*$ , pari a  $100 \cdot (1 - LGD)$ , che il creditore incasserà in ogni caso, e di una componente incerta,  $\tilde{p}$ , pari a zero in caso di insolvenza e pari a  $100 \cdot LGD$  nel caso di regolare restituzione del prestito:

$$p = 100 \cdot (1 - LGD) + (1 - PD) \cdot 100 \cdot LGD = p^* + \tilde{p} \quad [15.5]$$

Un investitore neutrale al rischio assegnerebbe alla componente incerta  $\tilde{p}$  un valore attuale  $PV_{\tilde{p}}$  pari al valore atteso futuro scontato al tasso privo di rischio  $i$ , ovvero:

$$PV_{\tilde{p}} = \frac{\tilde{p}}{1+i} = \frac{(1 - PD^*) \cdot 100 \cdot LGD}{1+i} \quad [15.6]$$

Il valore attuale del titolo (payoff rischioso più payoff privo di rischio) sarebbe dunque:

$$PV_p = \frac{p}{1+i} = \frac{100 \cdot (1 - LGD) + (1 - PD^*) \cdot 100 \cdot LGD}{1+i} \quad [15.7]$$

Si noti che nella [15.6] e nella [15.7] compare la  $PD^*$  corrispondente alle aspettative dell'investitore neutrale al rischio (PD risk neutral), che in generale (cfr. Capitolo 12) è maggiore della PD reale. Sappiamo che tale probabilità può essere determinata proprio usando un modello à la Merton, i cui input sono gli stessi utilizzati dal modello di KMV: valore di mercato e volatilità dell'attivo e default point. Dopo aver ricavato tale parametro è dunque possibile determinare, con la [15.7], il valore di mercato della posizione.

Si notino due differenze rispetto a CreditMetrics. In primo luogo, la distribuzione dei possibili eventi tra un anno non è multinominale, ma binomiale; non è dunque possibile stimare le perdite da downgrading, ma è necessario concentrarsi sulle perdite connesse ai default.

In secondo luogo, non è necessario conoscere lo spread richiesto dal mercato al debitore e appropriato per le sue caratteristiche di rischio. In effetti, volendo, tale spread (che indicheremo con  $d$ ) può essere ricavato agevolmente, ricordando che il valore di mercato del credito deve essere lo stesso tanto per l'investitore risk-neutral (che lo calcola usando la [15.7]) quanto per un investitore avverso al rischio (che lo

**Tabella 15.14 Probabilità di transizione a 1 anno basate su classi di EDF (valori percentuali)**

Rating iniziale	Rating a fine anno							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default'
AAA	66,26	22,22	7,37	2,45	0,86	0,67	0,14	0,02
AA	21,66	43,04	25,83	6,56	1,99	0,68	0,20	0,04
A	2,76	20,34	44,19	22,94	7,42	1,97	0,28	0,10
BBB	0,30	2,80	22,63	42,54	23,52	6,95	1,00	0,26
BB	0,08	0,24	3,69	22,93	44,41	24,53	3,41	0,71
B	0,01	0,05	0,39	3,48	20,47	53,00	20,58	2,01
CCC	0,00	0,01	0,09	0,26	1,79	17,77	69,94	10,13

Nota: intervalli di EDF scelti in modo tale da approssimare la scala di rating di Standard & Poor's.

Fonte: Kealhofer, Kwok e Weng (1998)

calcola scontando il capitale nominale, 100, al tasso  $i$  maggiorato dello spread  $d$ ). Da questa uguaglianza:

$$\frac{100 \cdot (1 - LGD) + (1 - PD^*) \cdot 100 \cdot LGD}{1+i} = \frac{100}{1+i+d} \quad [15.8],$$

segue che:

$$d = \frac{(1+i)LGD \cdot PD^*}{1 - PD^* \cdot LGD} \quad [15.9]$$

Questa relazione risulta utile per la seconda variante prevista, in CreditMonitor, per la valutazione del portafoglio a valori di mercato. Essa prevede la costruzione di un certo numero di classi discrete che raggruppano tutti i debitori con expected default frequency (EDF) compresa in un certo intervallo (per esempio, tra 0 per cento e 0,5 per cento, tra 0,5 per cento e 1,5 per cento e così via). Per tali «classi di EDF» è necessario costruire una matrice di migrazione come quella della Tab. 15.2 (un esempio è riportato nella Tab. 15.14). Inoltre a ogni classe viene associato, in base alla sua PD risk neutral media, un credit spread. A questo punto, note le curve degli spread la distribuzione dei valori futuri del portafoglio può essere ricostruita con una metodologia analoga a quella già osservata per CreditMetrics.

È importante osservare che, sebbene tali «classi di EDF» sembrino analoghe alle classi di rating utilizzate da CreditMetrics, esse sono marcatamente diverse. In primo luogo, sono basate sull'EDF dettata da un modello e non sul giudizio di un team di analisti. Secondariamente, esse risentono di una logica di assegnazione del rating di tipo point in time (cfr. Capitolo 14), che si traduce in tassi di migrazione più elevati (cfr. la Tab. 15.14 con la Tab. 15.2 vista in precedenza).

## 15.5 L'approccio macroeconomico: CreditPortfolioView

CreditPortfolioView è un modello sviluppato nel 1997 da Tom Wilson per la società di consulenza McKinsey<sup>30</sup>. Esso parte dalla constatazione che i cicli creditizi dipendono dal ciclo economico. Pertanto, durante le fasi di crescita economica le migrazioni verso classi di rating migliori (upgrading) tendono a essere più frequenti, mentre si fanno più modesti i tassi di migrazione verso classi peggiori (downgradings) e di insolvenza. Il contrario accade durante le fasi di recessione. Le matrici di transizione usate in CreditMetrics dovrebbero dunque essere corrette a seconda della fase corrente del ciclo. Pertanto, CreditPortfolioView propone di legare le probabilità di migrazione e di insolvenza a variabili macroeconomiche come il livello dei tassi di interesse, il tasso di occupazione, la crescita reale del PIL e il tasso di risparmio, «condizionandole» allo stato del ciclo economico.

### 15.5.1 La stima delle probabilità di insolvenza condizionate

Indichiamo con  $p_{jt}$  la probabilità di insolvenza al tempo  $t$  di un gruppo o segmento  $j$  di imprese che reagiscono in modo uniforme all'evoluzione del ciclo economico (generalmente, imprese appartenenti allo stesso settore produttivo e alla stessa area geografica). CreditPortfolioView ipotizza che tale probabilità vari con il ciclo economico; operativamente, essa viene modellata secondo una funzione logit (cfr. Capitolo 11):

$$p_{jt} = \frac{1}{1 + e^{-y_{jt}}} \quad [15.10]$$

dove  $y_{jt}$  rappresenta il valore al tempo  $t$  di un indice dello «stato di salute» del segmento  $j$  basato su fattori macroeconomici. A valori più elevati dell'indice corrisponde una minore probabilità di insolvenza (comunque compresa, in un modello logit, fra zero e uno).

A sua volta, l'indice  $y_{jt}$  è una combinazione lineare di più variabili macroeconomiche  $x_{j1}, x_{j2}, \dots x_{jn}$  (per esempio: il tasso di crescita reale del PIL, il tasso di occupazione, il livello dei tassi di interesse a lungo termine, il livello della spesa pubblica ecc.<sup>31</sup>):

$$y_{jt} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1}x_{j,1,t} + \beta_{j,2}x_{j,2,t} + \beta_{j,3}x_{j,3,t} + v_{jt} \quad [15.11]$$

Il valore dei coefficienti  $\beta_{j,1}, \beta_{j,2}, \dots \beta_{jn}$  viene stimato in base all'esperienza storica, analizzando i dati relativi alle frequenze di default passate per singolo segmento. L'ultimo termine,  $v_{jt}$ , è invece un termine di errore<sup>32</sup>. Mentre i primi termini, legati

**Tabella 15.15 CreditPortfolioView: ciclo economico e matrice di transizione**

PD delle classi speculative	Fase del ciclo economico	Aggiustamenti alle probabilità della matrice di transizione		
		Insolvenza	Downgrading	Upgrading
$PD_t^s > \mu_{PD_t^s}$	Recessione	↑	↑	↓
$PD_t^s < \mu_{PD_t^s}$	Espansione	↓	↓	↑

ai fattori macroeconomici, rappresentano la componente di rischio sistematica (comune a più segmenti che possono condividere gli stessi fattori macroeconomici), il termine casuale identifica la componente di rischio specifico associata al segmento  $j$ .

Ovviamente, per poter utilizzare la [15.10] e la [15.11] a fini di previsione, è necessario disporre di una stima dei valori futuri dei fattori macroeconomici. A tal fine, CreditPortfolioView prevede che, per ogni fattore, si utilizzi un modello autoregressivo di secondo ordine<sup>33</sup> – AR(2) – dato da:

$$x_{j,i,t} = \gamma_{i,0} + \gamma_{i,1}x_{j,i,t-1} + \gamma_{i,2}x_{j,i,t-2} + \varepsilon_{j,i,t} \quad [15.12]$$

dove i coefficienti  $\gamma_{i,j}$  devono essere stimati empiricamente e  $\varepsilon_{j,i,t}$  è un termine di errore normalmente distribuito con media zero.

### 15.5.2 La stima della matrice di transizione condizionata

Il modello non si limita a generare (con le equazioni [5.10]-[5.12]) una previsione sulle probabilità di insolvenza condizionate dei diversi segmenti, ma le utilizza per condizionare l'intera matrice delle probabilità di transizione. CreditPortfolioView prevede infatti di correggere la matrice di transizione media di lungo termine (non condizionata) in funzione delle probabilità di insolvenza attese per l'anno successivo.

In particolare, il modello prevede che le PD condizionate generate per i segmenti di imprese speculative grade<sup>34</sup> vengano confrontate con il loro valore medio di lungo periodo. La scelta di concentrarsi solo su questa tipologia di emittenti discende dal fatto che le loro PD sono più sensibili alle variazioni del ciclo economico.

Se nell'anno  $t$  il valore di tali probabilità di default delle classi speculative ( $PD_t^s$ ) è superiore alla loro media storica ( $\mu_{PD_t^s}$ ), significa che ci si trova in una fase di ciclo economico sfavorevole. In questo caso (cfr. Tab. 15.15), la matrice di transizione viene modificata aumentando le probabilità di insolvenza e di downgrading e riducendo

<sup>30</sup> Cfr. Wilson (1997a e b).

<sup>31</sup> Le variabili utilizzate possono essere diverse per diversi  $j$ .

<sup>32</sup> Gli errori relativi a ogni singolo periodo  $t$  sono per ipotesi indipendenti da  $x_{j,t}$  e caratterizzati da una distribuzione normale con media zero e volatilità  $\sigma_v$ .

<sup>33</sup> In pratica, il valore della variabile dipendente relativo al periodo  $t$  viene stimato sulla base di una regressione nella quale le variabili indipendenti sono rappresentate dai valori assunti dalla stessa variabile dipendente nei due periodi precedenti ( $t - 1$  e  $t - 2$ ).

<sup>34</sup> Cfr. Capitolo 14.

**Tabella 15.16 Le cinque fasi di CreditPortfolioView**

Fase	Equazione rilevante
1. Stima delle variabili macro relative al periodo $t$	$X_{j,t} = \gamma_{j,0} + \gamma_{j,1}X_{j,t-1} + \gamma_{j,2}X_{j,t-2} + \varepsilon_{j,t}$
2. Stima dell'indice di «salute» del singolo segmento $j$ al tempo $t$	$y_{jt} = \beta_{j,0} + \beta_{j,1}X_{j,t} + \beta_{j,2}X_{j,t-1} + \beta_{j,3}X_{j,t-2} + v_{jt}$
3. Stima della probabilità condizionata di insolvenza del segmento $j$ al tempo $t$	$p_{jt} = \frac{1}{1 + e^{-y_{jt}}}$
4. Confronto tra le PD generate per le classi speculative nel periodo $t$ e la loro media di lungo periodo	$PD_t^s > \mu_{PD_t^s}$
5. Correzione della matrice di transizione	

quelle di upgrading. Se invece  $PD_t^s < \mu_{PD_t^s}$ , ci si trova in una fase di ciclo economico favorevole e la matrice di transizione viene modificata riducendo le probabilità di insolvenza e di downgrading e aumentando quelle di upgrading. La correzione è maggiore per le classi di rating peggiori (proprio perché la loro sensibilità all'andamento del ciclo economico è maggiore) rispetto a quelle investment grade.

La Tab. 15.16 riassume le cinque fasi in cui si articola il processo di stima della matrice di transizione condizionata in CreditPortfolioView. Sulla base di questo meccanismo, il modello consente anche di simulare processi di transizione pluriennali, dove anche le matrici degli anni successivi al primo sono condizionate all'andamento dell'economia. In funzione del segno (prevalentemente positivo o negativo) dei coefficienti  $\gamma_{ij}$  (che esprimono l'autocorrelazione delle variabili macroeconomiche), le transizioni pluriennali potranno mostrare un progressivo aggravamento ( $\gamma_{ij}$  positivi) o il ripristinarsi di condizioni di equilibrio ( $\gamma_{ij}$  negativi).

### 15.5.3 Pregi e limiti di CreditPortfolioView

Il principale pregio di CreditPortfolioView consiste nel tentativo di identificare le relazioni tra variabili macroeconomiche e rischio di credito di un portafoglio. In questo modello, infatti, il peggioramento della congiuntura si traduce in un peggioramento delle prospettive economiche dei singoli debitori, oltre che in un aumento della correlazione tra i default<sup>35</sup>.

Tuttavia, il modello soffre di due principali problemi. In primo luogo, la stima dei coefficienti  $\beta$  richiede un'ampia base di dati storici, relativi ai tassi di insolvenza dei singoli segmenti; in secondo luogo, il criterio adottato per condizionare la matrice di transizione al ciclo economico, fondato sulle probabilità di insolvenza

<sup>35</sup> Per una data asset correlation  $\rho$ , infatti, la correlazione tra i default di due debitori è funzione crescente delle loro PD (cfr. Appendice 15A). Un aumento delle PD condizionate produce quindi, a parità di altre condizioni, un aumento della correlazione tra i default.

simulate delle classi di rating speculative grade, appare piuttosto arbitrario. Non è detto, quindi, che esso produca risultati migliori di quelli ottenibili dagli analisti della banca semplicemente correggendo la matrice in modo soggettivo (in base alla propria esperienza e alle previsioni macroeconomiche sui settori e le aree geografiche prodotte dagli economisti).

Infine, va detto che la correzione apportata dal modello alla matrice di transizione di lungo periodo potrebbe non essere necessaria, né opportuna, se la banca assegna il rating secondo un approccio point in time<sup>36</sup>. Ritorneremo in argomento nel § 15.8, in sede di confronto tra CreditPortfolioView e gli altri modelli presentati in questo capitolo.

### 15.6 L'approccio attuariale: il modello Creditrisk+

Creditrisk+, sviluppato nel 1997 da Credit Suisse Financial Products<sup>37</sup>, adotta un approccio derivato dal settore assicurativo; in particolare, esso applica al rischio di credito alcuni tipici strumenti della matematica delle assicurazioni (matematica attuariale).

Le perdite che una compagnia assicurativa subisce derivano da due variabili fondamentali: la frequenza con cui si verifica un certo tipo di sinistro e il pagamento che la compagnia deve effettuare quando il sinistro si verifica (loss severity). È facile scorgere l'analogia con il rischio di credito, dove le perdite dipendono dalla frequenza degli eventi di insolvenza e dal tasso di perdita in caso di default; sulla base di questa analogia, diventa possibile utilizzare modelli di origine assicurativa per stimare le perdite su crediti.

Tali modelli (per sfruttare l'analogia con i sinistri assicurativi) si concentrano necessariamente sul solo rischio di insolvenza, ignorando il rischio di migrazione. Peraltro, come vedremo, l'esposizione al default e il tasso di recupero verranno trattati come deterministici: non è dunque possibile stimare nemmeno il rischio di esposizione e quello di recupero.

Pur con questi limiti, Creditrisk+ è particolarmente efficace nella stima del rischio di portafogli contraddistinti da un numero elevato di posizioni; esso ha quindi trovato applicazione nella gestione di alcuni tradizionali portafogli di crediti bancari, come i prestiti a piccole e medie imprese, i prestiti al consumo e i mutui.

Il modello non cerca di spiegare (a differenza dei modelli strutturali) il processo che conduce all'insolvenza di un'impresa e non produce una propria stima delle PD. Al contrario, esso assume che le probabilità di insolvenza dei debitori e i tassi di recupero dei loro crediti siano già stati stimati con altri strumenti (per esempio, dal sistema di rating interno alla banca o mediante le statistiche prodotte dalle agenzie di rating). Altri input necessari al modello verranno presentati nel seguito di questo paragrafo.

<sup>36</sup> Cfr. Capitolo 14.

<sup>37</sup> Cfr. Credit Suisse Financial Products (1997).

### 15.6.1 La stima della distribuzione di frequenza delle insolvenze

Creditrisk+ descrive la distribuzione di probabilità del numero di insolvenze future (per esempio, su un orizzonte di rischio di un anno) attraverso un tipico strumento della matematica attuariale: la *distribuzione di Poisson*. La probabilità  $p(n)$  che entro un anno si verifichino  $n$  insolvenze è infatti calcolata come:

$$p(n) = \frac{e^{-\mu} - \mu^n}{n!} \quad [15.13]$$

dove  $\mu$  (detto «numero di insolvenze atteso») rappresenta la somma di tutte le PD dei clienti in portafoglio.

Per esempio, per una banca con 400 clienti, ognuno con una PD dell'1 per cento, il valore di  $\mu$  sarà 4. Applicando la [15.13], la probabilità che non si verifichi alcuna insolvenza sarà dunque data da:



$$p(0) = \frac{e^{-4} 4^0}{4!} = 1,83\%$$

mentre la probabilità che si verifichi un numero di insolvenze pari al valore atteso (4 su 100) sarà data da:

$$p(4) = \frac{e^{-4} 4^4}{4!} = 19,54\%$$

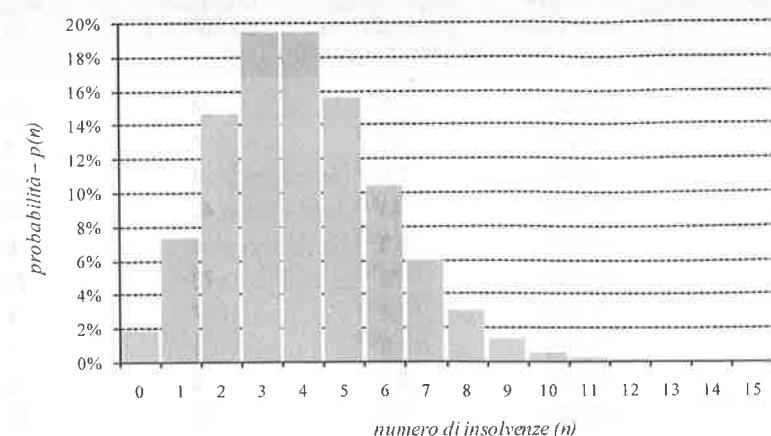
La Fig. 15.7 riporta questi e altri valori, calcolati con la [15.13] per  $n$  compreso tra 0 e 15. Si noti come la distribuzione di probabilità così ottenuta (che presenta un picco in corrispondenza di  $\mu$ ) sia molto diversa dalla normale e fortemente asimmetrica. Per valori di  $n$  elevati, la probabilità si riduce infatti progressivamente fin quasi a zero; la probabilità che non si verifichi alcuna insolvenza (valore minimo di  $n$ ) è invece molto superiore a zero.

La distribuzione di Poisson ha media  $\mu$  e deviazione standard  $\sqrt{\mu}$ . Si tratta di una distribuzione molto «pratica», in quanto l'unico parametro necessario per stimare tutte le diverse  $p(n)$  è  $\mu$ <sup>38</sup>. Tuttavia, essa può essere utilizzata solo se sono verificate due condizioni:

- le singole PD devono essere relativamente contenute; diversamente, la Poisson fornisce un'approssimazione via via meno soddisfacente della reale distribuzione di probabilità. In proposito, si osservi che essa restituisce lo stesso valore di  $p(n)$  sia per un portafoglio di 400 clienti con PD dell'1 per cento, sia per un portafoglio di 100 clienti con PD del 4 per cento, sia per un portafoglio di 10 clienti con PD del 40 per cento (in tutti e tre i casi, infatti,  $\mu$  è pari a 4); tuttavia, nel secondo caso la qualità dell'approssimazione sarà peggiore e nel terzo caso sarà decisamente insoddisfacente (basti pensare che, come si nota nella Fig. 15.7,  $p(11)$  è maggiore di zero, mentre è impossibile che si verifichino 11 insolvenze su un portafoglio di 10 posizioni);

<sup>38</sup> Supponiamo per ora che  $\mu$  sia noto con certezza; ritorneremo in seguito su questa ipotesi.

Figura 15.7 Esempio di distribuzione di Poisson



■ le insolvenze dei singoli debitori devono essere tutte indipendenti tra loro. Questa seconda ipotesi è chiaramente inaccettabile, visto che il rischio di credito nasce proprio dal fatto che i debitori di una banca tendono a fallire «in grappoli», per effetto delle recessioni o di crisi regionali/settoriali. Dovremo quindi provvedere a rimuoverla nel seguito di questo paragrafo (cfr. § 15.6.4).

### 15.6.2 La distribuzione di frequenza delle perdite

Per passare dalla distribuzione del numero di insolvenze a quella delle perdite, è necessario considerare i valori delle esposizioni e dei relativi tassi di recupero attesi. Se un debitore diviene insolvente, infatti, la banca subisce una perdita pari al valore dell'esposizione diminuito dell'importo recuperato. In altri termini, la perdita in caso di insolvenza del debitore  $i$ -esimo è pari a:

$$L_i = LGD_i \cdot EAD_i = (1 - RR_i) \cdot EAD_i \quad [15.14]$$

dove, come di consueto, EAD rappresenta l'esposizione al momento del default e RR il tasso di recupero.

Creditrisk+ ipotizza che la banca sia in grado di stimare EAD e RR senza errore, e di associare a ogni debitore, senza incertezza, il valore di  $L_i$  descritto dalla [15.14].

Se, per esempio, per un certo debitore si ipotizzano un'esposizione al default di 100.000 euro e un tasso di recupero del 50 per cento, a esso verrà associata una perdita  $L_i$  di 50.000; lo stesso accadrà per un debitore con EAD di 200.000 euro e RR del 75 per cento.

Creditrisk+ adotta inoltre un artificio, aggregando tra loro tutte le esposizioni con  $L_i$  simile. Tale aggregazione è detta *banding*, perché prevede che tutte le  $L_i$  vengano

Tabella 15.17 Esempio di banding

Cliente ( $i$ )	Esposizione netta ( $L_i$ )	Esposizione standardizzata $L_i/L$ , con $L = 10.000$	Esposizione arrotondata	Fascia ( $j$ )
1	240.000	24	24	24
2	36.000	3,6	4	4
3	38.000	3,8	4	4
4	430.000	43	43	43
5	63.000	6,3	6	6
6	780.000	78	78	78
7	72.000	7,2	7	7
8	13.000	1,3	1	1
9	81.000	8,1	8	8
10	540.000	54	54	54

aggregate in bande (o fasce) di importo grosso modo equivalente. Più precisamente, le  $L_i$  vengono divise per una quantità costante  $L$ , arrotondando all'intero più vicino, e tutti i clienti con un uguale valore post-arrotondamento vengono allocati alla medesima banda.

Consideriamo, per esempio, i 10 prestiti riportati nella Tab. 15.17 (ognuno con la propria  $L_i$ ) e poniamo  $L$  pari a 10.000 Euro. La tabella mostra la relativa ripartizione in fasce.

Come si può osservare, ogni esposizione viene assegnata a una specifica banda  $j$  in funzione dell'importo  $L_i$  diviso per  $L$  e arrotondato. Si noti come la seconda e la terza esposizione confluiscano entrambe nella banda 4.

Ogni banda rappresenta un portafoglio di prestiti, tutti caratterizzati da perdite in caso di default approssimativamente equivalenti, pari a circa  $j \cdot L$ . Ciò significa che, all'interno di una data banda, le perdite sono direttamente proporzionali al numero dei default. La distribuzione di Poisson vista nella sezione precedente (equazione [15.13]) può quindi essere utilizzata anche per rappresentare la distribuzione di probabilità delle perdite; al posto di  $\mu$  (numero di default attesi sull'intera banca) si utilizzerà, per ogni banda, un diverso  $\mu_j$ , dato dal numero di insolvenze attese in quella specifica banda.

Si dimostra peraltro che per ridurre al minimo le possibili distorsioni implicite nel banding (che prevede, come si è visto, un arrotondamento al multiplo di  $L$  più vicino), è consigliabile calcolare  $\mu_j$  come<sup>39</sup>:

<sup>39</sup> Infatti, se le esposizioni di una certa banda fossero state mediamente arrotondate per difetto (cioè se mediamente  $L_i > jL$ ), la [15.13] correggerebbe questo errore producendo un  $\mu_j$  maggiore della semplice sommatoria delle  $p_i$ .

Tabella 15.18 Distribuzione delle perdite nella fascia 5 ( $jL = 50.000$ )

Numero di insolvenze ( $n$ )	Valore della perdita $nL$	Probabilità (%)
0	0	1,83
1	50.000	7,33
2	100.000	14,65
3	150.000	19,54
4	200.000	19,54
5	250.000	15,63
6	300.000	10,42
7	350.000	5,95
8	400.000	2,98
9	450.000	1,32
10	500.000	0,53
11	550.000	0,19
12	600.000	0,06
13	650.000	0,02
14	700.000	0,01

$$\mu_j = \sum_{i \in j} \frac{p_i L_i}{jL} \quad [15.15]$$

piuttosto che semplicemente come:

$$\mu_j = \sum_{i \in j} p_i$$

Sostituendo questo  $\mu_j$  nella [15.13] si ottiene:

$$p(n) = \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!} \quad [15.16]$$

che rappresenta la probabilità associata al verificarsi, nella banda  $j$ , di  $n$  perdite, ognuna di importo  $j \cdot L$ .

La [15.16] può scriversi anche come:

$$p(nj) = \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!} \quad [15.17]$$

cioè come la probabilità di osservare  $n \cdot j$  perdite, ognuna di importo  $L$ .

Consideriamo per esempio la banda 5 (che riunisce i debitori con perdite, in caso di default, pari a circa  $5 \cdot L$  euro, cioè 50.000 euro) e immaginiamo di avere calcolato (con la [15.15]) un  $\mu_j$  pari a 4. Possiamo ora stimare, con la [15.16] o la [15.17], le probabilità associate ai diversi livelli di perdita, riportate nella Tab. 15.18.

### 15.6.3 La distribuzione delle perdite sull'intero portafoglio

È ora necessario riunire le distribuzioni di probabilità delle perdite *all'interno di ogni singola banda* in un'unica distribuzione di probabilità delle perdite *per l'intera banca*. Tale distribuzione delle perdite di portafoglio rappresenta l'output finale del modello, dal quale è possibile ricavare la perdita attesa e misure di perdita inattesa, come la deviazione standard o il VaR.

A tal fine è necessario integrare fra loro le poissoniane che descrivono le singole bande. Una perdita di 20.000 euro potrebbe infatti essere generata sia da due insolvenze in banda 1 che da una insolvenza in banda 2; una perdita di 120.000 potrebbe derivare da un numero ancor più elevato di bande. Per realizzare questa integrazione, Creditrisk+ adotta un approccio in tre fasi.

1. Per ogni poissoniana associata alle singole fasce, ricava la corrispondente funzione generatrice di probabilità (f.g.p.). In statistica, la f.g.p. è una funzione di una variabile ausiliaria  $z$  che consente di «riassumere» una distribuzione di probabilità (dunque, anche la poissoniana) e che possiede particolari proprietà (una delle quali verrà usata nel passaggio successivo). In particolare, si dimostra che la f.g.p. per la poissoniana della fascia  $j$ , che indicheremo con  $G_j(z)$ , è data da:

$$G_j(z) = e^{-\mu_j + \mu_j z^j} \quad [15.18]$$

2. La seconda fase prevede di ricavare la f.g.p. dell'intero portafoglio aggregando le f.g.p. delle singole fasce. Più precisamente, è possibile sfruttare una proprietà delle f.g.p. che afferma che, se i singoli default sono indipendenti<sup>40</sup> (e quindi anche il numero di default nelle diverse bande lo è), la f.g.p. del portafoglio è semplicemente la produttoria delle f.g.p. delle singole fasce:

$$G(z) = \prod_j e^{-\mu_j + \mu_j z^j} = e^{-\mu + \sum_j \mu_j z^j} \quad [15.19]$$

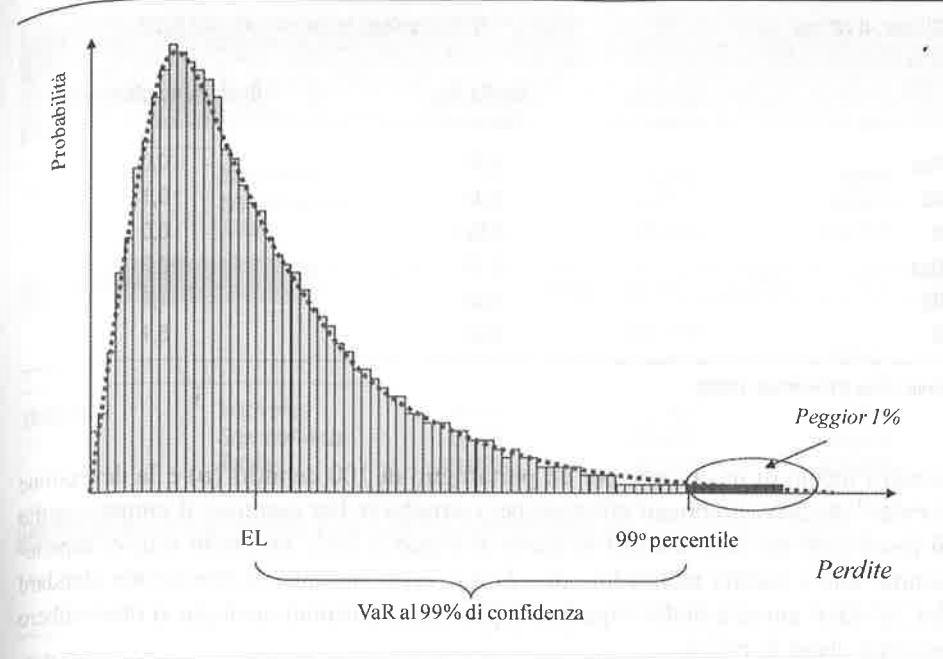
dove  $\mu = \sum_j \mu_j$ .

3. La terza fase prevede che quest'ultima f.g.p. del portafoglio venga ritrasformata in una distribuzione di probabilità. Data una f.g.p., infatti, è sempre possibile ottenere la probabilità (in questo caso, la probabilità di una perdita pari a  $n$  volte  $L$ ) per derivazioni successive. Più precisamente, vale la seguente relazione<sup>41</sup>:

<sup>40</sup> Come si ricorderà, tale ipotesi è necessaria per poter utilizzare la distribuzione di Poisson, ma risulta irrealistica nel caso del rischio di credito. Come preannunciato, essa verrà rimossa nel § 15.6.4.

<sup>41</sup> L'equazione [15.20] afferma, in pratica, che la probabilità di ottenere una perdita di valore  $nL$  è data dalla derivata di ordine  $n$  della f.g.p., valutata in corrispondenza di  $z = 0$  e divisa per il fattoriale di  $n$ . È dunque possibile ottenere qualsiasi probabilità semplicemente calcolando un'opportuna derivata della f.g.p.

Figura 15.8 Distribuzione delle perdite future sul portafoglio dell'intera banca



$$p(nL) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0} \quad [15.20]$$

La [15.20] permette di calcolare la probabilità associata a tutti i possibili livelli di perdite ( $L$ ,  $2L$ ,  $3L$  ecc). Una volta ottenuta questa distribuzione di probabilità delle perdite future (non più su una singola banda, ma sull'intero portafoglio), è possibile ricavarne la media (perdita attesa), il percentile e la misura di VaR desiderata (per esempio, al 99 per cento). Un esempio è rappresentato graficamente nella Fig. 15.8.

### 15.6.4 L'incertezza relativa al tasso di insolvenza medio e le correlazioni

Abbiamo ipotizzato che il numero di insolvenze su un portafoglio possa essere approssimato con una distribuzione di Poisson (con media  $\mu$  e deviazione standard  $\sqrt{\mu}$ ).

Tuttavia, se osserviamo le statistiche sul numero di default realizzati, nel tempo, su portafogli a qualità ( $\mu$ ) costante, la deviazione standard del numero di insolvenze risulta superiore a  $\sqrt{\mu}$ . La Tab. 15.19 riporta un esempio: sulla base dei dati misurati da Moody's nel periodo 1970-1995 per le principali classi di rating, essa riporta il

Tabella 15.19 Numero di insolvenze annue nel periodo 1970-1995

Classe di rating	N. di insolvenze annue per 100 debitori	
	Media ( $\mu$ )	Deviazione standard
Aaa	0,00	0,0
Aa	0,03	0,1
A	0,01	0,0
Baa	0,13	0,3
Ba	1,42	1,3
B	7,62	5,1

Fonte: Carty e Lieberman (1996)

numero medio di insolvenze per un portafoglio di 100 debitori ( $\mu$ ) e la deviazione standard dei 26 dati annuali utilizzati per compilarla. Per esempio, il numero medio di insolvenze per 100 debitori di classe B è pari a 7,62; se questo è  $\mu$ , ci aspetteremmo una volatilità nell'ordine di  $\sqrt{7,62} = 2,76$ . In realtà la deviazione standard dei 26 valori annuali è molto superiore e pari a 5,1. Risultati analoghi si otterrebbero per altre classi di rating.

Il motivo per cui la volatilità dei dati reali è superiore a quella, teorica, della distribuzione di Poisson, è che quest'ultima ipotizza che i default dei singoli clienti siano indipendenti, mentre nella realtà i debitori tendono a fallire «a grappoli», o «a ondate», in quanto risentono tutti, in varia misura, dell'andamento del ciclo economico.

In effetti, dato un portafoglio di clienti per cui si desidera stimare la distribuzione delle possibili perdite, il numero di insolvenze atteso per l'anno successivo ( $\mu$ ) non è un parametro fisso e noto con certezza. Esso può infatti discostarsi dal valore medio di lungo periodo per eccesso (se il ciclo economico peggiora) o per difetto (nel caso opposto).

Gli autori di Creditrisk+ modificano dunque i modelli presentati nei paragrafi precedenti, considerando  $\mu$  non come una costante, bensì come una variabile aleatoria. In questo modo, si ottiene una volatilità del numero di insolvenze maggiore, e coerente con i valori empirici come quelli della Tab. 15.17. Inoltre, cosa ancor più importante, trattare  $\mu$  come stocastico è un modo per rimuovere indirettamente l'ipotesi che i default siano indipendenti, aggiungendo al modello l'ipotesi di correlazione tra i default.

Quest'ultima affermazione non è banale, e merita di essere spiegata accuratamente. Stiamo dicendo che facendo variare  $\mu$  è possibile usare una distribuzione di probabilità dove le insolvenze, per un dato  $\mu$ , sono *indipendenti* (la Poisson) per descrivere il mondo reale, dove le insolvenze sono tra loro *correlate*.

Per spiegare questo apparente paradosso introduciamo un esempio (cfr. Tab. 15.20). Immaginiamo per semplicità due soli debitori (Alpha Inc. e Beta Ltd.) le cui PD variano a seconda del ciclo economico. In particolare, se l'economia è in

Tabella 15.20 Esempio di scenari con probabilità correlate generate attraverso scenari incorrelati

#### Stato I: espansione economica

		Insolvenza	Alpha Inc. Sopravvivenza	Totale
Beta Ltd.	Insolvenza	0,08%	1,92%	2,00%
	Sopravvivenza	3,92%	94,08%	98,00%
	Totale	4,00%	96,00%	100,00%

#### Stato II: recessione

		Insolvenza	Alpha Inc. Sopravvivenza	Totale
Beta Ltd.	Insolvenza	0,60%	5,40%	6,00%
	Sopravvivenza	9,40%	84,60%	94,00%
	Totale	10,00%	90,00%	100,00%

#### Distribuzione non condizionale (50% x Stato I + 50% x Stato II)

		Insolvenza	Alpha Inc. Sopravvivenza	Totale
Beta Ltd.	Insolvenza	0,34%	3,66%	4,00%
	Sopravvivenza	6,66%	89,34%	96,00%
	Totale	7,00%	93,00%	100,00%

espansione Alpha ha PD pari al 4 per cento e Beta al 2 per cento; se invece l'economia è in recessione Alpha ha PD del 10 per cento e Beta del 6 per cento. Si noti che nel primo caso abbiamo  $\mu = 0,06$ , nel secondo  $\mu = 0,16$ . Il numero atteso di insolvenze è quindi una variabile stocastica, che segue una distribuzione bernoulliana; per semplicità, attribuiamo identica probabilità (50 per cento) a un'espansione o a una recessione.

All'interno di ognuno dei due scenari possibili (espansione o recessione) trattiamo i default dei due debitori come indipendenti. Di conseguenza, calcoliamo le probabilità congiunte come semplice prodotto delle probabilità individuali. La probabilità che entrambi siano insolventi sarà dunque pari a  $4\% \cdot 2\% = 0,08\%$  in caso di espansione, a  $10\% \cdot 6\% = 0,60\%$  in caso di recessione; le altre probabilità congiunte sono indicate nei primi due pannelli della Tab. 15.20.

Partendo da queste due distribuzioni di probabilità condizionate (rispettivamente a un'espansione e a una recessione) calcoliamo ora la distribuzione di probabilità non condizionata, valida quando  $\mu$  non è nota con certezza. Essa è data dalla media (con pesi 50 per cento e 50 per cento) delle probabilità valide in caso di espansione o di recessione. Così, per esempio, la PD di Alpha sarà pari alla media tra il 4 per cento e il 10 per cento, cioè al 7 per cento, mentre la probabilità di default congiunto

ta sarà pari alla media tra lo 0,08 per cento e lo 0,60 per cento, cioè allo 0,24 per cento. Tutti i valori sono indicati nel terzo pannello della Tab. 15.20.

La combinazione delle due distribuzioni condizionate, ognuna ricavata ipotizzando indipendenza, dà luogo a una distribuzione che ipotizza correlazione: per vederlo è sufficiente notare che la probabilità di default congiunta (0,34 per cento) è superiore al semplice prodotto delle PD dei due debitori ( $7\% \cdot 4\% = 0,28\%$ ).

Creditrisk+ lavora in modo simile a questo esempio. Per ogni possibile valore di  $\mu$ , infatti, usa una poissoniana, ipotizzando indipendenza. Tuttavia, siccome  $\mu$  è stocastico, la distribuzione di probabilità non condizionata (calcolata integrando su tutti i possibili valori di  $\mu$ ) implica correlazione tra i default. In altri termini, Creditrisk+, introducendo l'aleatorietà di  $\mu$ , riesce a superare l'ipotesi di indipendenza fra i debitori.

Più precisamente, il modello ipotizza che le PD delle imprese (e dunque anche  $\mu$ , che rappresenta la somma di tutte le PD) siano variabili aleatorie funzione di  $n$  fattori sottostanti («background factor»), ognuno rappresentativo di una determinata componente del ciclo economico. Possiamo pensare a tali fattori come a variabili che guidano il ciclo (inflazione, livello dei tassi, tasso di cambio ecc.), oppure direttamente come a variabili che catturano lo «stato di salute» di un determinato settore produttivo; per esempio, ogni fattore  $x_k$  potrebbe essere dato dal numero di insolvenze nel settore  $k$ . In particolare, gli autori di Creditrisk+ ipotizzano che ogni  $x_k$  segua una distribuzione gamma e che i diversi  $x_k$  siano tra loro indipendenti<sup>42</sup>.

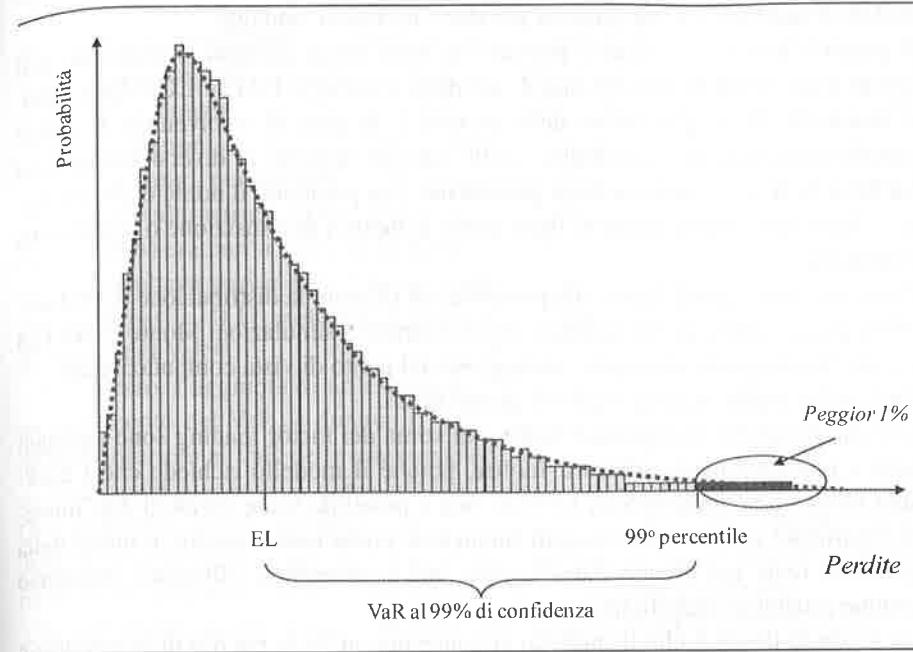
La PD di un'impresa è dunque funzione di uno o più  $x_k$ ; in particolare, per semplificità si ipotizza che si tratti di una funzione lineare. Di conseguenza, la perdita in caso di default sul prestito a una certa impresa (per esempio, la perdita  $L_A$  dell'impresa A) può essere scomposta, dal punto di vista logico, in quote percentuali ( $\theta_{A1}, \theta_{A2} \dots \theta_{An}$ ), ognuna abbinata all'andamento di un diverso fattore. Il portafoglio della banca può dunque essere visto come un insieme di sottoportafogli di fattore, ognuno costituito dalle  $\theta_{ik}$  che rappresentano la quota di perdita sull'impresa  $i$  associata al  $k$ -esimo settore.

Partendo da questa scomposizione è possibile determinare, in via analitica, la distribuzione di probabilità delle perdite per l'intero portafoglio. Un esempio è mostrato nella Fig. 15.9, che mostra (attraverso il confronto con la curva della Fig. 15.8) come si modifica la distribuzione del numero di insolvenze quando  $\mu$  è stocastico. Come è possibile osservare, essa diviene più asimmetrica e più «schiaacciata», ossia più volatile. In altri termini, le probabilità associate a perdite vicino alla media si riducono, mentre perdite estreme divengono maggiormente probabili. Ciò è dovuto al fatto che, mentre nella versione a  $\mu$  costante (Fig. 15.8) l'incertezza riguardava quali debitori sarebbero andati in default, ma non le loro PD, ora anche queste ultime sono in qualche misura imprevedibili<sup>43</sup>.

<sup>42</sup> In pratica gli  $x_k$  vengono «ruotati», per esempio con il metodo degli autovettori, per renderli indipendenti.

<sup>43</sup> Si pensi a come aumenta l'incertezza di chi lancia una moneta dieci volte se non è certo che la moneta sia coniata correttamente, e dunque ignora non soltanto quante «teste» o «croci» si verificheranno, ma persino se la probabilità di ottenere testa o croce sia davvero pari al 50 per cento.

Figura 15.9 Distribuzione delle perdite con e senza correlazione



Osserviamo infine che, sulla base del modello ora descritto, due imprese saranno correlate tra loro solo se le rispettive esposizioni risentono (in tutto o anche solo per una quota  $\theta$ ) del medesimo fattore. In particolare, si dimostra che la correlazione fra l'insolvenza<sup>44</sup> di due imprese A e B è data da:

$$\rho_{A,B} = \sqrt{p_A p_B} \sum_{k=1}^n \theta_{Ak} \theta_{Bk} \left( \frac{\sigma_k}{\mu_k} \right)^2 \quad [15.21]$$

dove  $p_A, p_B$  rappresentano le probabilità attese di insolvenza di A e B e  $\mu_k, \sigma_k$  rappresentano la media e la volatilità del tasso di insolvenza di ognuno degli  $n$  settori. Dalla formula si comprende che la correlazione è pari a zero in due casi: se il numero atteso di insolvenze, come nei §§ 15.6.1-15.6.3, è mantenuto costante (e quindi  $s_k$  è pari a zero) oppure se le due imprese non hanno alcun settore in comune ( $\theta_{Ak} \cdot \theta_{Bk} = 0 \forall k$ ).

<sup>44</sup> Si noti che questa correlazione tra le insolvenze (default correlation) è diversa dalla correlazione fra rendimenti degli attivi (asset correlation), usata da CreditMetrics. Essa assume valori significativamente più bassi dell'asset correlation (cfr. Appendice 15A) e la sua verifica a partire da dati empirici è resa complessa (specie per le controparti con merito di credito più elevato) dal fatto che, se già l'insolvenza di un debitore è un fenomeno raro, l'insolvenza congiunta di più controparti lo è ancora di più.

### 15.6.5 Pregi e limiti di Creditrisk+

Il modello Creditrisk+ si caratterizza per due importanti vantaggi.

Il primo è legato alla relativa parsimonia degli input richiesti. I principali dati necessari sono infatti le PD dei singoli debitori, nonché le EAD e LGD (per calcolare, tramite la [15.14], il valore della perdita  $L_j$  in caso di insolvenza). È inoltre necessario conoscere le «sensibilità» delle singole imprese ai diversi background factor (cioè le  $\theta_{ik}$  viste nella sezione precedente, che prendono il nome di *factor loadings*). Non sono tuttavia richiesti input come le matrici di transizione o le curve dei tassi forward.

Il secondo vantaggio è legato alla possibilità di ricavare la distribuzione di probabilità delle perdite future in via analitica, senza ricorrere a simulazioni Monte Carlo. Ciò rende Creditrisk+ particolarmente vantaggioso dal punto di vista computazionale.

Creditrisk+ soffre tuttavia anche di alcuni limiti.

La definizione dei background factor e la stima dei factor loading sono passaggi delicati e potenzialmente arbitrari. Inoltre, poiché il modello richiede che i background factor siano indipendenti tra loro, non è possibile usare variabili dall'immediato significato economico (variabili finanziarie come tassi e cambi, o indici della congiuntura reale nei diversi Paesi/settori), ma è necessario «filtrarle» attraverso opportune procedure statistiche.

Un secondo limite è che il modello si concentra sul solo rischio di insolvenza e trascura il rischio di migrazione. Tale limite risulta particolarmente rilevante per le esposizioni con scadenza superiore all'anno. Consideriamo infatti un prestito a lungo termine che non diventa insolvente entro 12 mesi, ma subisce una riduzione (anche severa) del rating, che riflette possibili perdite, negli anni successivi, superiori a quanto originariamente previsto dalla banca. In un modello multinomiale, questo rischio di medio-lungo termine è recepito attraverso un minor valore del credito, anche se l'orizzonte di rischio è fissato a un anno. In un modello binomiale, esso non risulta e dunque sfugge ai «radar» del risk management.

Un terzo limite del modello è legato all'assenza di rischio di recupero (si ipotizza che i tassi di recupero attesi siano stimati senza errore) e di esposizione (si ipotizza di conoscere con certezza le EAD dei debitori).

## 15.7 Il VaR marginale

Attraverso i modelli di portafoglio visti in questo capitolo è possibile calcolare il VaR marginale di una esposizione (o di un gruppo di esposizioni), una misura ricca di implicazioni per il controllo del rischio di credito, il pricing dei crediti e la misura delle performance corrette per il rischio. Esso è calcolato come differenza fra il VaR complessivo del portafoglio e il VaR del portafoglio ricalcolato escludendo l'esposizione (o il gruppo di esposizioni) in questione.

Il VaR marginale (o CaR, capitale a rischio, marginale) indica in che misura quell'esposizione (o gruppo di esposizioni) contribuisce ad accrescere il rischio del portafoglio nel momento in cui viene aggiunta alle esposizioni già esistenti. Se la nu-

va esposizione è scarsamente correlata alle precedenti, cioè diversifica bene il portafoglio, il suo VaR marginale sarà probabilmente molto contenuto. Se invece fa riferimento a settori o aree geografiche verso le quali la banca è già esposta in misura considerevole, allora il suo VaR marginale sarà più consistente. Attraverso il VaR marginale è dunque possibile quantificare i costi della mancata diversificazione, espressi in termini di ulteriore capitale economico assorbito dalle nuove esposizioni.

Consideriamo, per esempio, i due titoli visti nel § 15.3 per illustrare il funzionamento di Creditmetrics. Come si ricorderà, il VaR al 95 per cento del primo titolo (rating BBB) era pari a 5,07; aggiungendo anche il secondo, il VaR dell'intero portafoglio risultava pari a 4,96. Questo significa che il secondo titolo aveva un VaR marginale pari a -0,11, visto che il suo inserimento nel portafoglio conduceva a una riduzione del VaR<sup>45</sup>.

Più spesso, l'aggiunta di un'esposizione (o di un gruppo di esposizioni) produce un incremento del VaR, e dunque il VaR marginale è positivo; esso, tuttavia, è di norma<sup>46</sup> inferiore al VaR della nuova esposizione (o gruppo di esposizioni) calcolato su base stand alone, cioè come se essa rappresentasse l'unico asset della banca. Questo perché, come affermato in precedenza, il VaR marginale riflette i benefici della diversificazione, cioè dell'imperfetta correlazione tra le diverse esposizioni rischiose (o gruppi di esposizioni rischiose) raccolte in un portafoglio.

Il VaR marginale può essere calcolato con qualsiasi modello di portafoglio in grado di produrre una misura di VaR (dunque, con tutti i modelli illustrati in questo capitolo). Come accennato, esso trova applicazione, per esempio, nel calcolo del pricing di un'esposizione (cfr. Capitolo 16) o nell'allocazione del capitale economico alle diverse aree strategiche di affari di una banca (cfr. Capitolo 24). Il VaR marginale ha conosciuto una vasta diffusione con riferimento al rischio di credito; tuttavia, il medesimo concetto trova applicazione nel caso del VaR sul rischio di mercato e sulle restanti tipologie di rischio. In particolare, poi, se il VaR è ottenuto con l'approccio delle varianze/covarianze, è possibile calcolare il VaR marginale con una procedura semplificata (cfr. ancora il Capitolo 24).

## 15.8 Un breve confronto fra i principali modelli

È ora possibile effettuare una breve analisi comparata dei modelli visti nei §§ 15.3-15.6, di cui la Tab. 15.21 riporta le principali caratteristiche. Volendo sintetizzare, si possono classificare i modelli in base a cinque aspetti:

<sup>45</sup> Si tratta di un risultato abbastanza infrequente nella pratica, dovuto al fatto che la nostra distribuzione di probabilità (cfr. Tab. 15.10) è fortemente granulare, e dunque le probabilità cumulate aumentano «a gradini». In presenza di un maggior numero di posizioni, e dunque di casi (per esempio, aggiungendo un terzo credito, il numero di casi passerebbe da 64 a 512), simili risultati tendono a farsi via via più rari.

<sup>46</sup> Poiché il VaR non è una misura di rischio subadditiva (cfr. Capitolo 10), è possibile costruire contro-esempi in cui il VaR di un portafoglio è maggiore della somma dei VaR stand-alone. Si tratta tuttavia di fenomeni abbastanza rari in pratica.

Tabella 15.21 Un confronto tra i diversi modelli

	CreditMetrics	PortfolioManager	CreditPortfolioView	Creditrisk+
<i>Tipologia di rischio considerata</i>	Migrazione, insolvenza e recupero	Migrazione, insolvenza e recupero	Migrazione, insolvenza e recupero	Insolvenza
<i>Definizione di rischio</i>	Variazione nei valori (di mercato) futuri	Perdite da migrazioni e insolvenze	Variazione nei valori (di mercato) futuri	Perdite da insolvenze
<i>Fattori determinanti la probabilità di migrazione</i>	Classe di rating	Distanza dal default point	Rating, ma anche ciclo economico (in modo diverso per diversi settori o aree geografiche)	Nessuno (rischio di migrazione non considerato)
<i>Matrici di transizione</i>	Costanti e basate sull'esperienza passata	Determinate da un modello strutturale microeconomico	Determinate dal ciclo macroeconomico	Non presenti
<i>Fattori determinanti la correlazione a livello di portafoglio</i>	Asset correlation stimata sulla base della correlazione fra indici azionari (modello multifattoriale)	Asset correlation stimata sulla base della correlazione fra indici azionari (modello multifattoriale)	Fattori macroeconomici	Factor loading (con background factor indipendenti)
<i>Sensibilità delle stime al ciclo economico</i>	Sì, attraverso il peggioramento dei rating dei debitori (funziona bene se la banca assegna il rating point in time)	Sì, attraverso il peggioramento delle EDF ricavate dal prezzo delle azioni (se questo descrive correttamente il ciclo economico)	Sì, attraverso la modifica delle matrici di transizioni (ed eventualmente il peggioramento dei rating)	No. Il tasso di default è volatile ma indipendente dal ciclo
<i>Tasso di recupero</i>	Fisso o casuale (distribuzione beta)	Casuale (distribuzione beta)	Casuale (distribuzione empirica)	Deterministico
<i>Approccio adottato</i>	Simulazioni	Simulazioni	Simulazioni	Analitico

- modelli binomiali (default mode) *versus* modelli multinomiali;
- modelli a valori futuri *versus* modelli a tassi di perdita;
- modelli conditional *versus* modelli unconditional;
- modelli basati su un approccio di simulazione *versus* modelli basati su un approccio analitico;

■ modelli fondati su correlazioni fra rendimenti degli attivi (asset correlation) *versus* modelli basati su correlazioni fra insolvenze (default correlation).

*Default mode versus multinomiale* – I modelli default mode o binomiali considerano solo due stati possibili: insolvenza o sopravvivenza; le perdite si verificano solo in caso di insolvenza. Al contrario, i modelli multinomiali (detti anche multistato) considerano anche la possibilità di migrazioni verso una diversa classe di rating. Dunque, anche il semplice downgrading comporta una diminuzione del valore di mercato del credito, e dunque una perdita.

I modelli multinomiali sono spesso denominati anche modelli *mark-to-market* in quanto ricalcolano il valore della esposizione valutandola «a prezzi di mercato». In realtà, sarebbe più corretto parlare di *mark-to-model*: infatti, spesso non è possibile ricavare i valori dei crediti dal mercato (si pensi a tutte le esposizioni creditizie private di un mercato secondario liquido ed efficiente) ed è dunque necessario stimarlo con un modello di asset pricing (quale quello basato sul valore attuale dei flussi di cassa futuri). Fatta eccezione per Creditrisk+, che è un modello default mode, tutti gli altri modelli illustrati in questo capitolo sono modelli multinomiali.

*Valori futuri versus tassi di perdita* – Una seconda distinzione riguarda il fatto che l'output del modello sia dato da una distribuzione dei valori futuri del portafoglio o dei tassi di perdita (cioè delle perdite divise per il valore corrente del portafoglio). Questa distinzione può a prima vista sembrare irrilevante: nel primo caso la perdita corrispondente al livello di confidenza desiderato viene stimata indirettamente come differenza fra il forward value (valore del portafoglio se tutti i crediti mantengono il rating originario) e un certo valore di mercato futuro; nel secondo caso essa viene invece stimata direttamente. In realtà, la differenza è più sottile e riguarda i fattori causali che stanno alla base della perdita. I modelli a valori futuri, infatti, utilizzano come input la curva per scadenze degli spread (connessi alle diverse classi di merito creditizio) calcolati rispetto ai titoli privi di rischio (tipicamente, titoli di Stato). Dunque, gli spread rappresentano un input di questi modelli. Al contrario, nei modelli a tassi di perdita non è necessario conoscere lo spread, che anzi può diventare un output del modello, ottenuto sulla base del tasso di perdita attesa, del VaR e del costo unitario del capitale che la banca deve detenere a fronte del rischio (ossia del tasso di rendimento richiesto dagli azionisti della banca)<sup>47</sup>.

CreditMetrics è un tipico modello a valori futuri. Creditrisk+ è invece un modello a tassi di perdita. CreditPortfolioView e CreditManager possono essere utilizzati in entrambi i modi.

*Conditional versus unconditional* – Nei modelli conditional, quale CreditPortfolioView, le stime delle probabilità di insolvenza e di migrazione basate sulle relative frequenze storiche vengono «condizionate» alla fase congiunturale, ossia modificate in presenza di un'espansione o di una recessione. Nel primo caso i tassi storici di insolvenza e di downgrading vengono corretti al ribasso, mentre le frequenze storiche

<sup>47</sup> Per dettagli, cfr. Capitolo 15.

che di upgrading vengono aumentate. Nel secondo caso accade naturalmente il contrario. Questo «condizionamento» si fonda sull'evidenza empirica, che mostra come i tassi di insolvenza e i tassi di migrazione risentano dall'andamento del ciclo macroeconomico. Al contrario, i modelli unconditional non apportano alcuna correzione di questo tipo e utilizzano sempre dati medi di lungo periodo.

Per quanto apparentemente scorretto e contrario all'evidenza empirica, l'approccio unconditional ha un suo fondamento logico, se usato in presenza di un sistema di rating point in time (quali quelli di molte banche). In questo caso, infatti, gli analisti assegnano un'impresa a una certa classe di rating anche in base allo stato corrente (e alle prospettive per l'immediato futuro) dei settori produttivi in cui essa opera, e più in generale sulla base della congiuntura macroeconomica generale. Di conseguenza, le variazioni del ciclo economico sono già riflesse prontamente in un cambio di rating<sup>48</sup>. Utilizzare tassi di insolvenza e di migrazione condizionati al ciclo condurrebbe dunque a considerare due volte l'effetto della congiuntura. Se invece il sistema di rating è di tipo through the cycle e genera rating il più possibile «robusti» (cioè stabili) rispetto alle variazioni del ciclo economico, allora l'utilizzo di matrici di transizione condizionali appare corretto. Peraltro, non è chiaro fino a che punto un'analista, nel formulare il proprio giudizio, possa davvero astrarre dalla fase corrente del ciclo economico.

*Simulazione Monte Carlo versus soluzione analitica* – Diversamente dai modelli VaR per i rischi di mercato, che si fondano sovente su distribuzioni normali, nel caso del rischio di credito è necessario utilizzare distribuzioni diverse, che rispecchino l'asimmetria propria delle perdite su crediti.

Per ottenere questo risultato si può procedere in due modi. In primo luogo, è possibile non formulare alcuna ipotesi circa la forma della distribuzione di probabilità delle perdite e limitarsi a generare una distribuzione attraverso una simulazione Monte Carlo. Una seconda soluzione («analitica») prevede di ipotizzare una funzione di densità di probabilità diversa da quella normale e caratterizzata da un grado di asimmetria coerente con quello desiderato (come, per esempio, una beta o una gamma). In pratica, i modelli analitici sostituiscono l'ipotesi (arbitraria) di distribuzione normale con altre ipotesi, altrettanto arbitrarie, ma maggiormente coerenti con l'evidenza empirica sul rischio di credito; diventa così possibile ricavare il VaR e altre misure di rischio senza ricorrere a procedure di simulazione.

*Asset correlation versus default correlation* – La correlazione fra debitori dipende dal fatto che il loro merito creditizio è funzione, oltre che di fattori specifici della singola impresa, anche di fattori comuni o «sistematici». Occorre dunque, da un lato, stabilire quali siano questi fattori sistematici e, dall'altro, collegare tali fattori al rischio di una singola esposizione creditizia.

<sup>48</sup> In altri termini, in presenza di un'espansione (recessione) gli analisti che assegnano il rating point in time provvedono a riclassificare i debitori ricollocandoli in classi di rating migliori (peggiori), così che la PD media ponderata del portafoglio si riduce (aumenta), anche se i tassi di default e di migrazione delle singole classi restano invariati.

I modelli per la misurazione del rischio di credito seguono, da questo punto di vista, una logica di tipo bottom-up, simile a quella usata per misurare i rischi di mercato di un portafoglio di titoli. Nel caso dei rischi di mercato, il portafoglio viene «ricondotto» a fattori di rischio elementari (tassi di interesse, tassi di cambio, indici azionari ecc.) mediante un opportuno mapping delle singole posizioni<sup>49</sup>. Analogamente, i modelli per il rischio di credito riconducono lo «stato di salute» dei singoli debitori a più fattori di rischio sistematico elementari (per esempio, settori produttivi o aree geografiche), cui si aggiunge una componente di rischio specifico o idiosincratico (eliminabile con la diversificazione di portafoglio)<sup>50</sup>.

In questo contesto, la misurazione del rischio del portafoglio può fondarsi su due diverse misure di correlazione. La prima è quella fra tassi di insolvenza (default correlation), la seconda quella fra gli asset value return di due imprese (a sua volta stimata partendo dalle correlazioni tra indici azionari nazionali o settoriali). Mentre CreditMetrics e PortfolioManager utilizzano le asset correlation, Creditrisk+ consente di stimare (attraverso la 21) una misura di default correlation. La differenza, peraltro, è meno sostanziale di quanto sembri: è infatti possibile, sotto opportune ipotesi, «tradurre» le asset correlation in default correlation e viceversa (cfr. Appendice A).

## 15.9 Alcuni limiti dei modelli per il rischio di credito

L'analisi dei modelli condotta in questo capitolo mostra come il settore bancario e finanziario abbia compiuto sforzi consistenti per migliorare i propri sistemi di misurazione e gestione del rischio di credito. Tali sforzi hanno condotto a un livello di sofisticazione impensabile fino a vent'anni fa. L'attività di finanziamento e di gestione del credito, il più tradizionale e, talvolta, il più antiquato fra i diversi business delle banche, è stata oggetto di una sorta di rivoluzione. La misurazione e la gestione del rischio di credito si avvalgono oggi, presso la maggior parte delle grandi banche internazionali, di risorse giovani, dotate di una formazione fortemente quantitativa, attirate dalla prospettiva di lavorare in un settore che presenta interessanti prospettive di crescita professionale.

<sup>49</sup> Cfr. Capitolo 6.

<sup>50</sup> Un approccio più raffinato prevede di scomporre i fattori sistematici «di primo livello» (settori produttivi, Paesi, regioni geografiche) in base alla loro sensibilità alle variazioni di alcuni fattori sistematici «di secondo livello» (variabili macroeconomiche quali il livello dei tassi di interesse, il tasso di crescita reale del PIL, il tasso di cambio, il tasso di occupazione ecc.). Così, per esempio, il settore produttivo tessile potrebbe essere particolarmente sensibile a variazioni del tasso di cambio (se una quota elevata della produzione è destinata all'esportazione) e meno sensibile ai tassi d'interesse (se le aziende si finanzianno soprattutto con capitali propri). In questo modo le variazioni del merito creditizio di ogni debitore vengono ricondotte all'evoluzione dei fattori «di secondo livello», tra cui è necessario stimare le correlazioni (per esempio, quella tra tassi d'interesse e tassi di cambio, o tra inflazione e crescita del Pil).

Nonostante questi progressi, i modelli visti nei precedenti paragrafi presentano ancora diversi limiti. Per questo, possiamo pensare a essi come a «modelli di prima generazione»<sup>51</sup>, destinati a essere sostituiti da schemi più raffinati, in grado di risolvere i problemi illustrati brevemente nel seguito di questo paragrafo.

### **15.9.1 Il trattamento del rischio di recupero**

A parte Creditrisk+ (che considera la LGD nota con certezza), tutti gli altri modelli esaminati consentono di trattare il tasso di recupero come aleatorio, dunque di considerare il rischio di recupero. Essi, tuttavia, risentono di due limiti, in parte connessi tra loro.

In primo luogo, il rischio di recupero viene solitamente trattato come interamente idiosincratico, cioè indipendente da fattori di rischio sistematico e totalmente riconducibile a caratteristiche specifiche dei singoli debitori. Se le oscillazioni dei tassi di recupero su diverse esposizioni sono tra loro indipendenti, allora il rischio di recupero è totalmente diversificabile; in altri termini, il suo impatto può essere ridotto a zero semplicemente prestando a un numero di debitori sufficientemente elevato. Nella realtà, invece, è possibile che anche il rischio di recupero (e non solo quello di default) abbia natura in parte sistematica; in tal caso, il suo impatto sul rischio di credito di un portafoglio diviene rilevante. Un modello che trascuri questa possibilità rischia dunque di sottostimare il rischio di credito totale.

In secondo luogo, le variazioni dei tassi di recupero vengono trattate come indipendenti dalle variazioni dei tassi di insolvenza. Al contrario, è possibile che PD e LGD siano guidate da fattori comuni e risultino quindi positivamente correlate. Come si è visto nel Capitolo 13, questa eventualità è suffragata da numerose evidenze empiriche e motivazioni teoriche.

Ovviamente, una correlazione positiva tra PD e LGD conduce a perdite (sia attese che inattese) maggiormente elevate, visto che due distinti driver del rischio di credito tendono a «colpire insieme».

### **15.9.2 L'ipotesi di indipendenza fra esposizione e probabilità di insolvenza**

Un secondo limite dei modelli visti in questo capitolo è rappresentato dal fatto che l'EAD viene solitamente considerata nota. Peraltro, anche se venisse resa stocastica (per esempio, con una simulazione Monte Carlo che genera diversi scenari con valori inferiori o superiori alla EAD attesa), essa sarebbe trattata sostanzialmente come indipendente dalla probabilità di insolvenza (PD). In realtà, questi due fattori di rischio potrebbero essere correlati.

Si pensi alle esposizioni connesse alla negoziazione di derivati OTC. Come illustrato nel Capitolo 17, esse sono funzione dell'evoluzione dei fattori di mercato che influiscono sul valore di mercato del derivato (tassi di interesse, tassi di cambio

<sup>51</sup> Cfr. Crouhy, Galai e Mark (2000).

ecc.). Se, per esempio, consideriamo un interest rate swap, il valore della posizione (e dunque l'esposizione al rischio di credito) aumenterebbe in corrispondenza di un aumento dei tassi di mercato. L'aumento dei tassi potrebbe comportare anche un aumento della probabilità di insolvenza della controparte (in particolare, se questa fosse fortemente indebitata a breve termine e dovesse rinegoziare il nuovo debito a tassi più elevati). Ne risulterebbe una correlazione positiva fra EAD e PD. In questo caso, il vero VaR per il rischio di credito sarebbe superiore a quello ottenuto in ipotesi di indipendenza delle due variabili. I modelli analizzati in questo capitolo sotto-estimano dunque il VaR se tra rischio di default e rischio di esposizione sussiste una correlazione positiva.

### **15.9.3 L'ipotesi di indipendenza fra rischio di credito e rischi di mercato**

Un terzo limite riguarda l'ipotesi di indipendenza fra rischio di credito e rischi di mercato. I modelli esaminati ipotizzano infatti che il livello dei tassi di interesse sia noto con certezza; allo stesso modo, peraltro, i modelli per i rischi di mercato visti nella seconda parte di questo volume non considerano il rischio di credito. In realtà, i due rischi possono essere correlati, come emerge dal seguente esempio.

Consideriamo un'obbligazione (corporate bond) in euro emessa da una società con rating BBB. Il titolo è caratterizzato sia da rischio di credito (possibilità che l'emittente fallisca o venga declassato a un rating inferiore, o che la stima del tasso di recupero si riveli eccessiva), sia da rischio di mercato (possibile rialzo della curva dei tassi zero-coupon in euro). In entrambi i casi il prezzo del titolo subirebbe una diminuzione. I modelli da noi presentati trattano separatamente le due componenti di rischio<sup>52</sup>.

Questa critica ha peraltro condotto, nella seconda metà degli anni Novanta, allo sviluppo di alcuni modelli in forma ridotta (reduced-form model) dovuti a Duffie, Jarrow, Lando, Singleton e Turnbull. In questi modelli il livello dei tassi di interesse è generalmente una variabile aleatoria e le probabilità di insolvenza e di migrazione sono legate a fattori di rischio sistematici tra i quali anche il livello dei tassi di interesse. Il rischio di credito e il rischio di mercato sono dunque considerati entrambi, oltre che collegati tra loro. Appare difficile, tuttavia, generalizzare questi modelli a un portafoglio contenente tutti i crediti (inclusi i prestiti) in essere presso una banca<sup>53</sup>.

Un'altra risposta a questa critica è venuta da un modello «di seconda generazione» recentemente sviluppato da Standard & Poor's (Portfolio Risk Tracker<sup>54</sup>). Que-

<sup>52</sup> A questa critica si potrebbe ribattere che anche la gestione delle due componenti di rischio è tipicamente separata all'interno di un'istituzione finanziaria. L'unità preposta alla misurazione/gestione dei rischi di mercato è generalmente indipendente dall'unità che si occupa di misurare e gestire il rischio di credito.

<sup>53</sup> Alcuni di questi modelli sono utilizzati per il pricing dei credit derivatives.

<sup>54</sup> Cfr. de Servigny *et al.* (2003).

sto modello, infatti, ipotizza sia tassi di interesse stocastici<sup>55</sup> che spread stocastici, trattando insieme il rischio di mercato e quello di credito (o, più propriamente il «rischio di spread»). Esso, peraltro, gestisce espressamente anche la possibile correlazione fra PD e LGD.

#### 15.9.4 L'impossibilità di effettuare test retrospettivi

Un ultimo problema è connesso all'impossibilità di verificare la validità delle misure di rischio generate da questi modelli attraverso test retrospettivi (backtesting) statisticamente affidabili. Ciò è dovuto al fatto che l'orizzonte temporale adottato dai modelli (di solito un anno) è molto più esteso di quello dei modelli per il rischio di mercato (tipicamente un giorno). Ciò implica che i dati storici necessari per effettuare test retrospettivi dovranno coprire un orizzonte temporale eccessivamente ampio. Il backtesting dei modelli relativi ai rischi di mercato avviene spesso confrontando il VaR giornaliero relativo ai 250 giorni passati con i corrispondenti risultati economici effettivi (cfr. Capitolo 9): per il rischio di credito un simile confronto richiederebbe di utilizzare i dati relativi agli ultimi 250 anni!

Anche per questo motivo il Comitato di Basilea, in occasione della riforma dei requisiti patrimoniali intervenuta nel 2004, ha deciso di non consentire alle banche di utilizzare, per il calcolo del patrimonio minimo obbligatorio, i propri modelli VaR per il rischio di credito, mentre nel 1996 aveva permesso che i modelli VaR relativi ai rischi di mercato, se sufficientemente accurati, fossero utilizzati per la determinazione del requisito patrimoniale delle banche. Tali modelli, tuttavia, giocano un ruolo fondamentale all'interno del cosiddetto «secondo pilastro» previsto dalla riforma del 2004, su cui ci si soffermerà nel Capitolo 21.

### Esercizi

- In quale tra i seguenti modi vengono stimate le correlazioni in CreditMetrics?
  - CreditMetrics non usa le correlazioni e ipotizza implicitamente che esse siano nulle, cioè che i default siano indipendenti.
  - Tramite le correlazioni tra rendimenti azionari.
  - Tramite le correlazioni tra gli spread sulle obbligazioni societarie.
  - Tramite le correlazioni tra i tassi di insolvenza storici.
- Una banca, che utilizza CreditMetrics, ha emesso un prestito a una società classificata come «rating 3» nel suo sistema di rating interno. Il prestito pagherà una cedola di 5 milioni di euro esattamente dopo un anno, un'altra cedola di altri 5 milioni esattamente dopo due anni, e un flusso di cassa finale (cedola più capitale) di 105 milioni esattamente dopo tre anni. La matrice di transizione a un anno della banca è la seguente:



<sup>55</sup> Il modello consente dunque di trattare gli strumenti a tasso variabile senza ricorrere a esposizioni «loan equivalent» (cfr. Capitolo 16).

		Stato finale					Default
		Rating 1	Rating 2	Rating 3	Rating 4	Rating 5	
Stato iniziale	Rating 1	90,0%	5,0%	3,0%	1,0%	0,5%	0,5%
	Rating 2	4,0%	88,0%	4,0%	2,0%	1,0%	1,0%
	Rating 3	2,0%	4,5%	85,0%	5,0%	2,0%	1,5%
	Rating 4	1,0%	4,0%	9,0%	80,0%	3,5%	2,5%
	Rating 5	0,5%	3,5%	6,0%	10,0%	75,0%	5,0%

La curva dei tassi zero-coupon è piatta al 4 per cento (composto annuo) e gli emittenti appartenenti alle diverse classi di rating pagano i seguenti spread, costanti per tutte le scadenze:

Rating 1	Rating 2	Rating 3	Rating 4	Rating 5
0,26%	0,51%	0,76%	1,26%	2,52%

Ipotizzando che il prestito abbia un valore di recupero in caso di default di 70 milioni di euro, calcolate:

- la distribuzione di probabilità dei valori futuri del prestito tra un anno;
  - il valore atteso del prestito tra un anno;
  - il VaR al 95 per cento di confidenza del prestito su un orizzonte di rischio di un anno.
- Quali tra le seguenti affermazioni sono vere?
    - Creditrisk+ non tiene conto del rischio di migrazione ed è basato sull'ipotesi di indipendenza tra i diversi debitori della banca.
    - Creditrisk+ tiene conto del rischio di migrazione e anche, indirettamente, delle correlazioni tra i diversi debitori della banca.
    - Creditrisk+ non tiene conto del rischio di migrazione ma tiene conto, indirettamente, delle correlazioni tra i diversi debitori della banca.
    - Creditrisk+ tiene conto del rischio di recupero e anche, indirettamente, delle correlazioni tra i diversi debitori della banca.
  - La probabilità di ottenere un certo numero di default su un portafoglio di crediti può essere ragionevolmente approssimata con una distribuzione di Poisson soltanto se le singole probabilità di default sono:
    - basse e i default sono correlati;
    - elevate e i default sono indipendenti;
    - basse e i default sono indipendenti;

d) le singole probabilità di default sono basse, il numero di prestiti è sufficientemente elevato e i default sono indipendenti.

5. Le correlazioni tra i default sono incorporate in Creditrisk+...

- a) trattando il numero atteso di default come una variabile stocastica;
- b) trattando il numero atteso di debitori in portafoglio come una variabile stocastica;
- c) stimando il coefficiente di correlazione tra le variazioni nel valore degli attivi per ogni singola coppia di debitori;
- d) attraverso il «banding» dei prestiti in un numero finito di sottoportafogli, ognuno dei quali include esposizioni di importo simile.



6. In caso di recessione, la probabilità di insolvenza della società Alfa è uguale di 2 per cento, quella della società Beta al 4 per cento. In caso di espansione economica, entrambe le probabilità si dimezzano. Dato un certo scenario macroeconomico (recessione o espansione) le insolvenze delle due società possono essere considerate indipendenti. Gli analisti stimano che vi sia una probabilità del 40 per cento di una recessione e del 60 per cento di un'espansione.

- a) Calcolate la probabilità di default non condizionata di Alfa e quella di Beta.
- b) Calcolate la probabilità di default congiunto di Alfa e Beta condizionata a ciascuno dei due possibili scenari.
- c) Calcolate la probabilità di default congiunto di Alfa e Beta non condizionata ad alcuno scenario macroeconomico, e dite se e perché essa segnala una correlazione positiva tra le due insolvenze.



7. Una banca che utilizza CreditMetrics ha stimato la matrice di transizione e i seguenti tassi spot zero-coupon riportati nelle due tabelle:

**Matrice di transizione**

	A	B	C	D	E	Default
A	98,0%	1,0%	0,3%	0,1%	0,1%	0,5%
B	0,8%	95,0%	1,5%	1,0%	0,7%	1,0%
C	0,2%	1,0%	93,0%	2,3%	2,0%	1,5%
D	0,1%	1,9%	3,0%	90,0%	3,0%	2,0%
E	0,0%	1,0%	3,0%	4,5%	87,5%	4,0%

Ipotizzate che la banca abbia emesso un prestito a favore di una società con rating C; tale prestito prevede un unico flusso di cassa finale (capitale più interessi) pari a 1000 euro, che scade esattamente tra due anni. Il valore stimato del prestito in caso di default è pari a 400 euro. Usando CreditMetrics, calcolate:

- a) il valore corrente del prestito;

### Curve dei tassi zero-coupon

	1 anno	2 anni	3 anni	4 anni	5 anni	6 anni
A	3,0%	3,5%	3,7%	4,0%	4,2%	4,6%
B	3,5%	4,0%	4,2%	4,5%	4,7%	5,1%
C	4,0%	4,5%	4,7%	5,0%	5,2%	5,6%
D	4,5%	5,0%	5,2%	5,5%	5,7%	6,1%
E	5,0%	5,5%	5,7%	6,0%	6,2%	6,6%

b) il suo valore atteso;

c) il VaR al 98 per cento di confidenza su un orizzonte di rischio di un anno.

### Appendice 15A Asset correlation versus default correlation

La correlazione fra i rendimenti degli attivi (asset correlation) è un concetto diverso da quello di correlazione fra insolvenze (default correlation). La prima assume valori tipicamente superiori alla seconda.

Presentando CreditMetrics (cfr. equazioni [15.1] e [15.1 bis]) abbiamo mostrato che, se gli AVR di due imprese A e B sono normalmente distribuiti, la loro probabilità di default congiunta ( $p_{A,B}$ ) può essere scritta come:

$$p_{A,B} = pr(r_A < z_{def,A}; r_B < z_{def,B}) = N(z_{def,A}, z_{def,B}; \rho_{A,B}) \quad [15A.1]$$

dove  $\rho_{A,B}$  (o semplicemente  $\rho$ ) è l'asset correlation,  $r_A$  e  $r_B$  sono gli AVR delle due imprese e  $z_{def,A}$ ,  $z_{def,B}$  sono i rispettivi default point. Ricordando che il default point dell'impresa  $j$  è quel valore dell'AVR a cui corrisponde una probabilità cumulata pari alla PD,  $p_j$ , del debitore:

$$z_{def,j} = N^{-1}(p_j) \quad [15A.2]$$

la [15A.1] può risciversi come:

$$p_{A,B} = N(N^{-1}(p_A), N^{-1}(p_B); \rho_{A,B}) \quad [15A.3]$$

Ricordiamo inoltre che il coefficiente di correlazione tra due variabili casuali  $x$  e  $y$  bernoulliane (cioè dicotomiche, o binarie, che possono assumere solo valore zero o uno) è dato da:

$$\rho_{x,y} = \frac{p_{x=1 \wedge y=1} - p_{x=1} p_{y=1}}{\sqrt{p_{x=1} (1 - p_{x=1}) p_{y=1} (1 - p_{y=1})}} \quad [15A.4]$$

Di conseguenza, il coefficiente di correlazione  $\delta_{A,B}$  tra i default di A e B (entrambi variabili dicotomiche) può scriversi semplicemente come:

$$\delta_{A,B} = \frac{p_{A,B} - p_A p_B}{\sqrt{p_A(1-p_A)p_B(1-p_B)}} = \frac{N(N^{-1}(p_A), N^{-1}(p_B); \rho_{A,B}) - p_A p_B}{\sqrt{p_A(1-p_A)p_B(1-p_B)}} \quad [15A.5]$$

Si noti che la [15A.5] mette in relazione tra loro asset correlation ( $\rho_{A,B}$ ) e default correlation ( $\delta_{A,B}$ ) nel caso in cui gli AVR siano normalmente distribuiti. Si noti anche come tale relazione non sia fissa, ma dipenda dal livello delle PD dei due debitori.

Si considerino per esempio le due imprese viste nel § 15.3.2, con rating iniziale pari a A e BBB. Le loro PD erano rispettivamente 0,06 per cento e 0,18 per cento. La probabilità di insolvenza congiunta stimata sulla base di un'asset correlation del 38% era risultata pari allo 0,0027 per cento.

Dalla [15A.5] si ha che la default correlation è pari a:

$$\delta_{BBB,A} = \frac{0,0027\% - (0,18\% \cdot 0,06\%)}{\sqrt{0,18\%(1-0,18\%)0,06\%(1-0,06\%)}} = 2,49\%$$

Si noti come essa sia meno di un decimo della correlazione fra rendimenti degli attivi (38 per cento).

## 16 Alcune applicazioni dei modelli per il rischio di credito

### 16.1 Introduzione

La misura del rischio creditizio, nelle sue diverse sfaccettature, ha costituito l'oggetto dei precedenti capitoli. Questo capitolo intende mostrare come i risultati esposti in precedenza possano essere utilizzati – e valorizzati – per finalità operative.

Questo non significa che tali modelli siano totalmente affidabili ed esenti da difetti. Al contrario, il desiderio di tradurli in applicazioni concrete nasce anche dalla consapevolezza che ulteriori affinamenti sono necessari, e che solo attraverso un impiego «pratico» dei modelli nella quotidiana gestione della banca è possibile farne emergere con chiarezza le lacune, e dunque riuscire a migliorarli.

In questo capitolo l'attenzione è principalmente rivolta a due applicazioni: la determinazione dei tassi attivi sui prestiti (pricing) e la stima della redditività corretta per il rischio (risk-adjusted performance, RAP). Si accenna inoltre brevemente ad altre applicazioni: la fissazione di limiti all'autonomia delle unità operative e l'ottimizzazione della composizione di portafoglio.

Dapprima (§ 16.2) vengono analizzate separatamente le componenti di costo che incidono sul prezzo di un credito, e in particolare i costi legati alla perdita attesa e a quella inattesa (che implica un certo assorbimento di capitale economico), il cui impatto è illustrato con un esempio. Non ci si sofferma invece sull'imputazione dei costi operativi indiretti, poiché si tratta di un problema di contabilità analitica già risolto presso la maggioranza delle banche e basato su logiche diverse da quelle tipiche della gestione del rischio.

Il § 16.3 esamina invece la stima della redditività corretta per il rischio. Questo tema assume particolare rilevanza quando un'istituzione finanziaria si trova a operare come price-taker in un mercato a elasticità elevata e non è dunque in grado di determinare in autonomia le condizioni di prezzo/tasso dei propri prodotti. Il § 16.4 illustra brevemente la costruzione di un sistema di limiti all'autonomia delle unità operative della banca basato sulle misure di VaR creditizio. Tale approccio consente di migliorare significativamente i tradizionali sistemi di limiti fondati sul valore nominale delle

esposizioni. Infine, il § 16.5 accenna a un'ultima classe di applicazioni, rivolte all'ottimizzazione della composizione del portafoglio crediti.

## 16.2 Il pricing delle esposizioni creditizie

Nel 1999, una *task force* incaricata dal Comitato di Basilea di analizzare i sistemi interni di rating delle maggiori banche mondiali concluse che oltre l'80% delle banche dotate di un sistema interno di rating lo utilizzava per fissare tassi di interesse coerenti con il grado di rischio delle proprie esposizioni.

Uno dei più importanti e diffusi utilizzi di un sistema di misurazione del rischio di credito è dunque la determinazione dei tassi attivi, ossia del pricing aggiustato per il rischio.

In effetti, per lungo tempo molte banche hanno fissato i tassi sugli impieghi in modo solo parzialmente correlato al contenuto di rischio di questi ultimi. Da un lato, se il mercato non era pienamente competitivo, era possibile lucrare margini più elevati. Dall'altro, tuttavia, nelle fasi di espansione economica le banche tendevano a sottostimare il rischio di credito, praticando tassi attivi troppo bassi e distruggendo valore per i propri azionisti. Più in generale, inoltre, i tassi praticati ai diversi clienti non erano sufficientemente differenziati in base al rischio, generando così fenomeni di cross subsidisation, per cui alcuni segmenti di clientela sussidiavano implicitamente, pagando tassi più elevati del dovuto, altri segmenti ai quali venivano praticati tassi di interesse inferiori a quelli richiesti dal loro grado di rischio.

Il motivo di simili fenomeni di mispricing risiedeva, non solo nel fatto che le metodologie viste nei precedenti capitoli non erano ancora disponibili, ma anche nel particolare profilo temporale dei costi di un'operazione d'impiego. Solo una parte di essi, infatti, si manifesta contestualmente all'erogazione del prestito, mentre le perdite connesse con l'eventuale insolvenza emergono solo successivamente. Una banca price setter dovrebbe invece sforzarsi di quantificare *tutti* i costi di produzione (inclusi quelli a manifestazione differita, cioè le possibili perdite attese e inattese) e fissare il tasso sugli impieghi in modo tale da coprire tali costi<sup>1</sup>.

Ovviamente, una banca è libera di decidere i prezzi dei propri impieghi (cioè di comportarsi come un price setter) solo se opera in un mercato sufficientemente inelastico, sul quale gode di un adeguato potere contrattuale; se invece la banca è price taker e deve accettare i livelli di prezzo «imposti» dal mercato, i modelli di misura del rischio di credito sono comunque utili; essi consentono infatti alla banca di indi-

<sup>1</sup> Come è noto, secondo la teoria economica classica l'impresa in concorrenza perfetta fissa il prezzo coprendo esattamente i costi di produzione. Ovviamente ciò non significa che essa non consegua un guadagno (e sia mossa esclusivamente da motivazioni filantropiche...); tra le voci di costo che concorrono alla fissazione delle tariffe finali, infatti, compare anche il tasso di profitto da riconoscere al capitale di rischio, un tasso di profitto «normale» o «fisiologico», calcolato sulla base dei rendimenti offerti da attività alternative e dal livello di rischio proprio dell'impresa. Per semplicità, nei paragrafi seguenti fisseremo i tassi attivi su questo livello minimo; ovviamente, se la banca è monopolista o gode di rendite di posizione, potrà impostare prezzi anche più elevati.

viduare (e rifiutare) i prestiti il cui tasso di mercato risulta eccessivamente basso; più in generale, essi permettono, dato il tasso, di calcolare la redditività corretta per il rischio dell'impiego, che può essere confrontata con l'obiettivo di redditività sul capitale proprio stabilito dalla banca. Nel presente paragrafo ipotizzeremo che la banca possa comportarsi come price setter; il caso della banca price taker verrà affrontato successivamente, nel § 16.3.

### 16.2.1 Il costo della perdita attesa

Una prima componente di costo è rappresentata dal tasso di perdita attesa. Coprire la perdita attesa su un prestito significa applicare un tasso, dato dalla somma del tasso risk-free  $i$  più uno spread  $d_{EL}$ , tale da rendere identico il rendimento atteso dal prestito (che ha probabilità di insolvenza pari a PD e tasso di perdita in caso di insolvenza pari a LGD<sup>2</sup>) e quello di un investimento risk-free di pari importo<sup>3</sup>:

$$(1 + i + d_{EL}) [(1 - PD) + (1 - LGD) \cdot PD] = (1 + i) \quad [16.1]$$

da cui:

$$(1 + i + d_{EL}) = \frac{1 + i}{1 - PD \cdot LGD} - 1 \quad [16.2]$$

e cioè:

$$i + d_{EL} = \frac{1 + PD \cdot LGD}{1 - PD \cdot LGD} = \frac{i + ELR}{1 - ELR} \quad [16.3]$$

dove ELR, dato dal prodotto fra PD e LGD, indica il tasso unitario di perdita attesa (expected loss rate)<sup>4</sup>.

Lo spread  $d_{EL}$  rappresenta il costo della componente di perdita attesa, pari a:

$$d_{EL} = \frac{ELR \cdot (1 + i)}{1 - ELR} \quad [16.4]$$

Consideriamo ora una banca («Banca A») che deve prezzare un prestito. Come tasso privo di rischio  $i$  utilizzeremo il suo tasso interno di trasferimento (TIT<sup>5</sup>)



<sup>2</sup> Si noti che nella [16.1] il tasso di recupero ( $1 - LGD$ ) è riferito al valore del montante finale,  $1 + i + d_{EL}$ , e non al valore del capitale prestato.

<sup>3</sup> Cfr. anche l'appendice 12A al Capitolo 12.

<sup>4</sup> In questa sede si è ipotizzata un'esposizione in caso di insolvenza (EAD) uguale all'esposizione corrente, ossia assenza di rischio di esposizione. Nel caso in cui EAD sia invece superiore all'esposizione corrente, occorrerebbe correggere la [16.3] considerando anche il rischio di esposizione. Come osservato da Resti (2004), ciò potrebbe essere realizzato utilizzando una misura di LGD aggiustata per l'effetto del rischio di esposizione.

<sup>5</sup> Cfr. Capitolo 4. Si noti che il TIT non è esattamente un tasso privo di rischio, in quanto il costo dei fondi disponibili per la banca dipende, in realtà, dal suo rating e dalla struttura delle sue passi-

omogeneo per scadenza, visto che è a questo tasso che è possibile investire fondi senza rischio o finanziare gli impieghi rischiosi: supponiamo quindi che il TIT della banca sia pari al 4%. Assumiamo poi che la probabilità di insolvenza (PD) di un cliente sia l'1% e il relativo tasso di perdita in caso di insolvenza (LGD) sia il 50%.

In questo caso il tasso attivo su un prestito con vita residua pari a un anno sarà

$$i + d_{EL} = \frac{4\% + 0,5\%}{1 - 0,5\%} = 4,522\%$$

mentre dalla [16.4] si otterrà:

$$d_{EL} = \frac{0,5\% \cdot (1 + 4\%)}{1 - 0,5\%} = 0,522\%$$

### 16.2.2 Il costo del capitale economico assorbito dalla perdita inattesa

Il tasso attivo ricavato nella sezione precedente sarebbe adeguato per una banca neutrale al rischio, per cui è indifferente la prospettiva di ricevere un dato ammontare  $M$  con certezza o un montante incerto il cui valore atteso è pari anch'esso a  $M$ .

Si tratta di un'ipotesi chiaramente irrealistica. In particolare, le banche sono avverse al rischio perché se l'attività di prestito fornisse risultati inferiori alle attese (cioè generasse perdite), esse potrebbero fallire. Questa prospettiva risulta sgradita agli azionisti, e ancora di più alle autorità di vigilanza.

Per limitare il pericolo di fallimento, le banche detengono capitale in misura adeguata a coprire le possibili perdite inattese; per questo motivo, come si ricorderà, il VaR su un portafoglio di crediti è detto anche *capitale a rischio*, o *capitale economico*.

Incorporare nel nostro modello di pricing l'avversione al rischio significa dunque verificare che il tasso attivo copra anche il costo del capitale economico mantenuto a presidio delle perdite inattese.

Immaginiamo dunque di avere stimato, grazie ai modelli descritti nei precedenti capitoli, l'importo del VaR associato al portafoglio crediti della banca. Immaginiamo inoltre di avere ripartito questo VaR tra le singole esposizioni, associando a ognuna il suo consumo di capitale a rischio, o capitale economico<sup>6</sup>. Tale misura rappresenta la quantità di rischio associata al singolo prestito, che deve essere coperta dal patrimonio degli azionisti della banca. Il suo costo dipende dall'obiettivo di redditività degli azionisti, ossia dal tasso di rendimento (cost of equity,  $r_e$ ) che la banca

vità. Tuttavia, se la banca dispone di un buon rating e paga spread modesti, la differenza tra  $i$  e TIT è modesta e verrà trascurata nel presente capitolo. Ritorneremo peraltro sull'argomento nel Capitolo 23.

<sup>6</sup> L'allocazione del capitale economico tra diverse esposizioni o gruppi di esposizioni (per esempio, tra le diverse aree di affari che compongono il portafoglio crediti della banca) rappresenta in realtà un passaggio complesso e delicato, che verrà ripreso e approfondito nel Capitolo 24.

ha espressamente o implicitamente concordato con gli investitori<sup>7</sup>. Considerando anche questo costo, la [16.1] si modifica come segue:

$$(1 + i + d_{EL} + d_{UL}) [(1 - PD) + (1 - LGD) \cdot PD] = (1 + i) + VaR(r_e - i) \quad [16.5]$$

dove VaR indica la quantità di capitale economico, per euro prestato, necessaria a coprire le perdite inattese dell'esposizione (per esempio, 7 centesimi per ogni euro).

In pratica, la [16.5] chiede che il tasso attivo praticato al cliente (che include sia uno spread per la perdita attesa,  $d_{EL}$ , che uno spread per la perdita inattesa,  $d_{UL}$ ) generi un montante atteso pari a quello di un investimento risk-free più il premio da pagare agli azionisti ( $r_e - i$ ) sul capitale necessario a coprire i rischi dell'operazione di impiego.

Il secondo membro della [16.5] può essere visto come il costo dei fondi necessari al finanziamento del prestito. In questo caso, notiamo che sul VaR (cioè sul capitale economico) si applica solamente il premio al rischio, ossia la differenza  $r_e - i$ , perché l'impiego è in realtà già interamente finanziato al costo  $i$  con debito e assorbire dunque patrimonio solo idealmente. Il capitale economico non viene dunque materialmente allocato ai singoli prestiti, ma è solo «idealmente assorbito» da essi in funzione del loro grado di rischio<sup>8</sup>.

Per riuscire a vedere il secondo membro come il costo di finanziamento del prestito, può essere utile riscriverlo come segue:

$$(1 + i) + VaR(r_e - 1) = (1 + i)(1 - VaR) + (1 + r_e)VaR \quad [16.6]$$

Per esempio, se il VaR è pari a 7 centesimi per ogni euro prestato, la [16.6] implica che ogni euro prestato deve essere finanziato per 93 centesimi con debito, al tasso  $i$ , e per 7 centesimi con capitale, su cui è necessario corrispondere un rendimento  $r_e > i$ .



Dalla [16.5] si ricava che:

$$i + d_{EL} + d_{UL} = \frac{i + ELR + VaR(r_e - i)}{1 - ELR} \quad [16.7]$$

e che:

$$d_{EL} + d_{UL} = \frac{(1 + i)ELR + VaR(r_e - i)}{1 - ELR} \quad [16.8]$$

Confrontando la [16.4] e la [16.8] si ricava infine che:

$$d_{UL} = \frac{VaR(r_e - i)}{1 - ELR} \quad [16.9]$$

è lo spread richiesto a copertura del costo della perdita inattesa.

<sup>7</sup> In pratica, il cost of equity rappresenta l'obiettivo di Raroc (cfr. Capitolo 10 e più avanti in questo capitolo) degli azionisti.

<sup>8</sup> Cfr. l'Appendice 25A al Capitolo 25.

Riprendiamo l'esempio del paragrafo precedente ( $PD = 1\%$ ,  $LGD = 50\%$ , tasso  $i$  rappresentato da un TIT del 4%). Immaginiamo di avere stimato che il capitale assorbito dal prestito (VaR) sia pari all'8%, cioè a 8 centesimi per ogni euro prestato; supponiamo infine che l'obiettivo di redditività linda degli azionisti ( $r_e$ ) sia pari al 12%.

Il tasso attivo del prestito determinato con la [16.7] sarà:

$$TIT + d_{EL} + d_{UL} = \frac{4\% + 0,5\% + 8\% \cdot (12\% - 4\%)}{1 - 0,5\%} \approx 5,166\%$$

ed il costo della perdita inattesa (equazione [16.9]) sarà pari a:

$$d_{UL} = \frac{8\% (12\% - 4\%)}{1 - 0,5\%} \approx 0,643\%$$

I risultati dell'esempio sono riassunti nella Tab. 16.1 (seconda colonna). La somma di  $d_{EL}$  e  $d_{UL}$  rappresenta lo spread che la banca dovrebbe sommare al tasso interno di trasferimento per ottenere il tasso attivo.

Uno dei passaggi più delicati nell'utilizzo di queste formule è la scelta del VaR per euro prestato da imputare al prestito. Infatti, se il calcolo del VaR su un intero portafoglio di crediti rappresenta già un compito difficile e delicato (per il quale sono necessari modelli complessi, come quelli visti nel Capitolo 15), la ripartizione di questo VaR tra i singoli prestiti del portafoglio costituisce un passaggio particolarmente insidioso.

Da un lato, non è possibile calcolare il VaR su ogni singolo credito come se esso rappresentasse l'unica posta attiva della banca (cosiddetto «VaR stand-alone»), perché questa soluzione porterebbe a ignorare i benefici, in termini di diversificazione del rischio, legati alla compresenza di più crediti. La somma dei singoli VaR stand-alone sarebbe dunque nettamente superiore al VaR di portafoglio della banca.

Dall'altro, non è nemmeno consigliabile fidarsi di misure come il VaR marginale (cfr. Capitolo 15), perché queste assegnano a ogni singolo credito i benefici da diversificazione dovuti alla sua interazione con tutti i restanti crediti della banca. La somma dei VaR marginali tende dunque a essere inferiore al VaR di portafoglio della banca, perché lo stesso beneficio viene conteggiato più volte. Inoltre, se uno o più dei restanti impegni dovessero essere revocati o giungere a scadenza, i benefici da diversificazione del credito risulterebbero sovrastimati: il VaR a esso allocato sarebbe dunque troppo basso, e così pure il tasso attivo.

In generale, è necessario che il VaR (capitale economico) di portafoglio venga suddiviso tra i singoli prestiti in modo tale da:

- garantire che la somma dei capitali economici allocati ai singoli prestiti coincida con il capitale economico della banca;
- «premiare», con un capitale economico comparativamente meno elevato, quei prestiti che meglio diversificano il rischio rispetto al portafoglio complessivo della banca. Così, per esempio, se la banca è esposta in misura considerevole verso il settore petrolifero, ai prestiti verso le società di questo settore deve essere assegnato (a parità di PD, EAD e LGD) un VaR più consistente.

**Tabella 16.1 Esempio di calcolo del tasso attivo**

	Banca A (minori benefici da diversificazione)	Banca B (maggiori benefici da diversificazione)
a) VaR	8,000%	6,000%
b) $i(TIT)$	4,000%	4,000%
c) $d_{EL}$	0,523%	0,523%
d) $d_{UL}$	0,643%	0,482%
e) Tasso attivo ( $b + c + d$ )	5,166%	5,005%



Quest'ultima considerazione spiega perché due banche caratterizzate da sistemi di rating analoghi (che stimano PD, LGD e EAD simili per un dato cliente), da un uguale TIT e da un uguale costo del capitale, ma da una diversa composizione del proprio portafoglio prestiti, potrebbero richiedere tassi diversi sul medesimo finanziamento. La stessa esposizione può infatti essere prezzata in modo differente dalle due banche se esse, in base all'attuale ripartizione per settori e aree geografiche dei propri portafogli, assegnano un VaR diverso al medesimo impiego, perché diverso è il contributo che esso apporta al rischio complessivo del portafoglio.

Consideriamo dunque nuovamente l'esempio visto in precedenza, e immaginiamo una seconda banca (Banca B) che, pur avendo stimato la stessa PD e la stessa LGD, ritiene di dover allocare al prestito un «consumo» di capitale economico di 6 centesimi per euro prestato (e non già di 8), in quanto il debitore opera in un settore scarsamente correlato con quelli in cui essa è maggiormente presente.

Il tasso attivo, per questa seconda banca, sarà:

$$TIT + d_{EL} + d_{UL} = \frac{4\% + 0,5\% + 6\% \cdot (12\% - 4\%)}{1 - 0,5\%} \approx 5,005\%$$

di cui:

$$d_{EL} = \frac{0,5\% \cdot (1 + 4\%)}{1 - 0,5\%} \approx 0,523\%$$

$$d_{UL} = \frac{8\% (12\% - 4\%)}{1 - 0,5\%} \approx 0,643\%$$

Anche questi risultati sono stati riportati nella Tab. 16.1 (terza colonna). È interessante osservare che lo spread da perdita attesa rimane invariato per le due banche, in quanto esso dipende solo dai parametri di rischio del nuovo prestito (che per ipotesi le due banche hanno stimato nel medesimo modo) e non anche dalla composizione del portafoglio già esistente. Al contrario, lo spread da perdita inattesa è portfolio-

**Tabella 16.2 Tassi attivi su un mutuo con LGD = 50% per diverse classi di rating e scadenze**

Scadenza (anni)	Classe di rating										Per memoria: TIT
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	
1	4,10%	4,25%	4,45%	4,70%	5,00%	5,40%	5,80%	6,25%	6,60%	7,00%	4,00%
2	4,35%	4,52%	4,85%	5,10%	5,40%	5,78%	6,15%	6,50%	6,83%	7,18%	4,20%
3	4,62%	4,78%	5,20%	5,55%	5,78%	6,14%	6,47%	6,75%	7,05%	7,35%	4,40%
4	4,83%	5,00%	5,47%	5,85%	6,11%	6,43%	6,71%	6,95%	7,21%	7,45%	4,55%
5	5,05%	5,25%	5,72%	6,15%	6,42%	6,72%	6,94%	7,13%	7,36%	7,54%	4,70%
6	5,25%	5,48%	5,91%	6,40%	6,67%	6,95%	7,10%	7,26%	7,45%	7,56%	4,80%
7	5,45%	5,70%	6,08%	6,63%	7,00%	7,16%	7,26%	7,38%	7,54%	7,60%	4,90%
8	5,65%	5,90%	6,20%	6,85%	7,17%	7,29%	7,35%	7,45%	7,57%	7,60%	4,95%
9	5,85%	6,12%	6,30%	7,00%	7,30%	7,40%	7,45%	7,52%	7,60%	7,62%	5,00%
10	6,00%	6,25%	6,35%	7,10%	7,36%	7,45%	7,50%	7,52%	7,56%	7,60%	5,00%

dependent e risente delle caratteristiche degli altri impieghi già erogati dalle due banche.

In conclusione, dalla [16.7] emerge che il tasso attivo è funzione di cinque fattori<sup>9</sup>:

1. la probabilità di insolvenza della controparte (PD);
2. il tasso di perdita in caso di insolvenza (LGD);
3. il capitale economico (VaR) assorbito dal singolo impiego;
4. il tasso interno di trasferimento relativo alla scadenza considerata ( $i$  o TIT);
5. il costo del capitale di rischio della banca ( $r_e$ ).

Il primo fattore (PD) è riflesso nel rating della controparte. Il secondo fattore (LGD) è invece funzione del tipo di impiego, e in particolare delle eventuali garanzie (cfr. Capitolo 13). Il terzo deriva dalle caratteristiche del nuovo prestito e del portafoglio complessivo della banca. Gli ultimi due sono indipendenti dalle caratteristiche del debitore e del prestito, e dipendono da fattori più generali, come il livello dei tassi di interesse, la situazione del mercato dei capitali, il profilo di rischio complessivo della banca.

Gli esempi visti in questo paragrafo riguardavano, per semplicità, impieghi a un anno. In realtà, la stessa logica può essere estesa a operazioni con scadenza superiore.

<sup>9</sup> In quest'analisi si sono per semplicità trascurati i costi operativi sostenuti dalla banca. Il tasso attivo dovrebbe coprire quantomeno la quota di costi variabili direttamente imputabili all'impiego in esame.

re. È anche possibile predisporre dei veri e propri «listini» prezzi che mostrano i tassi minimi per diverse scadenze, classi di rating, tipologie di garanzie ecc.

La Tab. 16.2 mostra un esempio, ottenuto mantenendo costante la LGD e facendo variare la scadenza del prestito e la classe di rating dei debitori (ad ogni classe di rating corrisponde un diverso valore di PD utilizzato nel pricing).

Ovviamente se cambiassero le garanzie o il grado di subordinazione del prestito, ciò modificherebbe la LGD attesa e renderebbe necessario aggiornare i valori indicati nella tabella. Lo stesso accadrebbe se cambiassero altri parametri di partenza, come la term structure dei TIT o il premio al rischio sul capitale degli azionisti.

Dati come quelli della Tab. 16.2 possono essere utilizzati per aiutare le filiali della banca a negoziare con i clienti condizioni di prezzo coerenti con il grado di rischio degli impieghi<sup>10</sup>, evitando di emettere prestiti a tassi insufficienti a remunerare il costo delle diverse tipologie di perdite (che condurrebbero a una distruzione di valore per la banca). Le formule di pricing esaminate in questo paragrafo rappresentano dunque un importante supporto alla gestione del rischio di credito.

### 16.3 La stima della redditività corretta per il rischio

Nel paragrafo precedente abbiamo immaginato che la banca fosse in qualche misura libera di determinare il tasso attivo su un prestito. La situazione, tuttavia, potrebbe essere diversa. La banca potrebbe operare come price taker su un mercato altamente elastico: per esempio, potrebbe trovarsi a valutare il tasso già offerto al cliente da un'altra banca, per decidere se fare un'offerta analoga o se rinunciare all'operazione.

In tal caso, si renderebbe necessario un percorso opposto a quello seguito nel paragrafo precedente: partendo dal tasso, bisognerebbe infatti valutare l'economia del prestito, ovvero il suo impatto sulla redditività del capitale economico.

Sia  $\bar{r}$  il tasso, esogenamente determinato, a cui è possibile erogare il prestito. Ponendo  $\bar{r}$  a primo membro della [16.7], possiamo ricavare il premio al rischio sul capitale ( $r_e^* - i$ ) implicito in tale tasso attivo. Da:

$$\bar{r} = \frac{i + ELR + VaR(r_e^* - i)}{1 - ELR}$$

seguirà che:

$$r_e^* - i = Raroc - i = \frac{\bar{r} \cdot (1 - ELR) - i - ELR}{VaR} \quad [16.10]$$

o anche:

$$r_e^* = Raroc = i + \frac{\bar{r} \cdot (1 - ELR) - i - ELR}{VaR} \quad [16.11]$$

<sup>10</sup> Cfr. Resti (2004).

Si noti che  $r_e^*$  indica il rendimento sul capitale a rischio (*Raroc*<sup>11</sup>) effettivamente ottenuto dagli azionisti, per un dato  $\bar{r}$ , e non quello ( $r_e$ ) teoricamente desiderato.

Immaginiamo ora che la Banca B abbia la possibilità di erogare il prestito descritto nel paragrafo precedente ( $PD = 1\%$ ,  $LGD = 50\%$ ,  $VaR = 6\%$ ,  $r = TIT = 4\%$ ) a un tasso  $\bar{r} = 4,8\%$ , e desideri valutare l'economicità di tale opzione. Dalla [16.11] si ha:

$$Raroc = 4\% + \frac{4,8\% \cdot 0,995 - 4\% - 0,5\%}{6\%} = 8,6\%$$

Tale Raroc deve essere confrontato con l'obiettivo di redditività degli azionisti. Se fosse superiore a quest'ultimo ( $Raroc > r_e$ ), il prestito aumenterebbe il valore di mercato del capitale economico della banca, dunque creerebbe valore e sarebbe desiderabile. Viceversa, se la redditività corretta per il rischio risultasse inferiore al rendimento-target ( $Raroc < r_e$ ), il prestito distruggerebbe valore per la banca e sarebbe quindi da scartare.

Nel paragrafo precedente abbiamo immaginato che il rendimento-obiettivo degli azionisti ( $r_e$ ) fosse pari al 12%. Tale valore è superiore al Raroc trovato con la [16.11]. Un prestito al tasso del 4,8% determinerebbe dunque una distruzione di valore, e non andrebbe concesso.

Nella realtà, peraltro, la banca potrebbe comunque effettuare l'operazione di impiego sulla base di considerazioni diverse, relative, per esempio, alla possibilità di fare cross-selling affiancando al prestito (economicamente svantaggioso) altri servizi maggiormente remunerativi (servizi di pagamento su cui guadagnare commissioni, contratti derivati per la copertura dei rischi ecc.). Il prestito potrebbe inoltre essere erogato se si desidera «conquistare» un nuovo cliente o, al contrario, trattenere un cliente cui viene complessivamente attribuito un valore positivo. Il confronto tra Raroc del prestito e rendimento-target degli azionisti sarebbe comunque estremamente utile: esso costringerebbe infatti la filiale che intende concedere il credito a esplicitare e quantificare le motivazioni che la inducono a ritenere comunque conveniente l'operazione.

#### 16.4 L'imposizione di limiti di rischio e le deleghe di autonomia

Una terza importante applicazione di un modello di misurazione del rischio di credito riguarda l'imposizione di deleghe e di limiti all'autonomia alle unità operative della banca che assumono rischi (per esempio, alle filiali che erogano crediti).

Una volta introdotto e sviluppato un sistema di misurazione del rischio di credito, è possibile attribuire alle singole unità un livello di autonomia non più basato su

<sup>11</sup> Risk-adjusted return on capital, ovvero rendimento unitario sul capitale assorbito dai rischi (perdite inattese) associati al prestito. Per una spiegazione più estesa del termine Raroc e dei possibili termini alternativi, cfr. il Capitolo 10.

**Tabella 16.3 Esempio di limiti sulla EAD (migliaia di euro) associati a un limite di perdita attesa di 1 milione di euro**



Classe di rating (valore di PD in corsivo)	LGD medie				
	10%	25%	50%	75%	100%
A 0,5%	2.000.000	800.000	400.000	266.667	200.000
B 1,0%	1.000.000	400.000	200.000	133.333	100.000
C 1,5%	666.667	266.667	133.333	88.889	66.667
D 2,0%	500.000	200.000	100.000	66.667	50.000
E 3,0%	333.333	133.333	66.667	44.444	33.333
F 4,5%	222.222	88.889	44.444	29.630	22.222
G 7,0%	142.857	57.143	28.571	19.048	14.286

valori nominali, ma espresso in termini di rischio o, meglio, di perdite attese e/o inattese<sup>12</sup>. Questo passaggio consente di riconoscere il diverso livello di perdite associate a impieghi a soggetti con diverso rating, con diversa scadenza o, ancora, assistiti da garanzie differenti; è inoltre possibile (anche se non semplice) tenere conto della diversa perdita inattesa di impieghi diversamente correlati al portafoglio esistente (perché appartenenti a determinati settori o aree geografiche).

Una singola unità risk taking potrebbe, a parità di limite in termini di perdita attesa o di VaR, concedere un maggior volume di impieghi a imprese con rating migliore, oppure limitare i volumi ma incrementare i margini unitari attraverso prestiti a debitori con rating più basso. Ancora, per poter accrescere le dimensioni del proprio portafoglio senza superare i limiti assegnati, essa potrebbe richiedere maggiori garanzie, così da ridurre le LGD attese, o ancora (per quanto riguarda il limite sul VaR) sfruttare al massimo i benefici di diversificazione prestando a imprese che operano in settori verso i quali la banca è scarsamente esposta.

Immaginiamo, per esempio, che alle filiali di una banca venga imposto un semplice limite di perdita attesa<sup>13</sup>, pari a un milione di euro. Poiché la perdita attesa è data dal prodotto tra EAD, LGD e PD, è evidente che esistono infiniti portafogli compatibili con questo obiettivo. La Tab. 16.3 mostra alcuni esempi: come si vede, il limite sul valore massimo degli impieghi (valore nominale<sup>14</sup>) è assai diverso a

<sup>12</sup> Ricordiamo che solo la perdita inattesa può essere definita «rischio» in senso stretto. Tuttavia, è comprensibile che attraverso un sistema di limiti la banca cerchi di proteggersi anche contro le perdite attese.

<sup>13</sup> I limiti di perdita attesa sono più facili da gestire, in quanto, come si ricorderà dal § 16.2, la perdita attesa di un credito non dipende dalla composizione dei restanti crediti in portafoglio, mentre la perdita inattesa è portfolio-dependent.

<sup>14</sup> Il valore nominale è espresso in termini di EAD, dunque di esposizione corrente corretta per il CCF presentato nell'introduzione a questa parte del volume.

seconda della qualità del debitore (rating) e delle garanzie ottenute (LGD). Una filiale potrebbe, per esempio, erogare 800 milioni di crediti garantiti (con LGD stimata del 25%) a soggetti con rating «A», oppure meno di 20 milioni di crediti junior (LGD stimata del 75%) a clienti con rating «G» e così via.

Il passaggio dalla semplice misura del rischio di credito al concreto utilizzo di perdita attesa e inattesa per fissare limiti all'autonomia delle unità operative comporta diversi problemi organizzativi: è necessario definire i livelli di aggregazione delle unità (filiali? Gruppi di filiali? Divisioni della banca?), la frequenza di revisione dei limiti, le modalità di integrazione tra il sistema di limiti di VaR e il processo complessivo di budget della banca. Inoltre, sovente misure di rischio apparentemente robuste quando esaminate nel «laboratorio» dell'ufficio Risk Management rivelano difetti e debolezze (e richiedono ulteriori messe a punto) quando esposte al confronto con gli uffici più operativi della banca.

### 16.5 L'ottimizzazione della composizione del portafoglio impieghi

Una quarta e ultima applicazione dei modelli per la misura del rischio di credito riguarda la gestione attiva del portafoglio impieghi complessivo della banca (active credit portfolio management): si tratta, in pratica, di utilizzare i modelli al fine di costruire portafogli efficienti che riducano al massimo i rischi legati alla concentrazione e alla correlazione tra prenditori e sfruttino al massimo le possibilità di diversificazione offerte dal mercato.

È evidente che l'ottimizzazione di un portafoglio di impieghi bancari è molto diversa dall'ottimizzazione di un portafoglio di titoli liberamente acquistabili e cedibili sul mercato. Da un lato, infatti, è necessario tenere presente la scarsa liquidità e trasparenza del mercato degli impieghi bancari, i quali non possono essere negoziati agevolmente come i valori mobiliari; dall'altro, è evidente che la concentrazione geografica e settoriale del «portafoglio clienti» di una banca è spesso il risultato di un particolare posizionamento di mercato e di relazioni di clientela acquisite nel tempo, che rappresentano un patrimonio e non devono essere distrutti.

Il portafoglio crediti può dunque essere ottimizzato solo in modo limitato e graduale. In particolare, gli strumenti per modificarne la composizione e le caratteristiche di concentrazione/correlazione sono essenzialmente i seguenti:

- la rotazione naturale del portafoglio, e dunque la possibilità di sostituire, alla scadenza, determinati crediti con crediti erogati a settori/aree geografiche diverse; un simile meccanismo, per funzionare, richiede che l'ottimizzazione del portafoglio sia fortemente integrata con il processo di budget della banca. In tal modo, ogni anno le unità operative riceveranno non soltanto un insieme di obiettivi in termini di volumi e margini, ma anche indicazioni su quali siano i comparti e le regioni da espandere o da ridimensionare;
- l'utilizzo dei credit derivative, delle operazioni di securitisation e del mercato secondario dei prestiti, tre canali che consentono alla banca di dismettere i rischi su determinate esposizioni senza tuttavia distruggere la relazione di clientela con

le imprese finanziarie. Simili canali consentono di separare, all'interno delle banche, la funzione di origination da quelle di risk management. La prima funzione ha natura prevalentemente commerciale e ricerca, in maniera sostanzialmente autonoma, le opportunità di mercato per emettere nuovi crediti valorizzando le relazioni di clientela; questi nuovi crediti, tuttavia, una volta «impacchettati» (cioè strutturati nelle loro condizioni di prezzo, garanzie, clausole accessorie ecc.) non restano necessariamente nel «magazzino» della banca (cioè nel suo portafoglio crediti) fino alla loro scadenza finale: essi possono essere ceduti sul mercato (anche acquistando protezione con un credit derivative oppure creando un veicolo finanziario *ad hoc*), modificando in questo modo il profilo di rendimento e di rischio del portafoglio della banca.

Agli strumenti di cessione del rischio di credito ora citati (credit derivative, securitisation, loan sale) è dedicata un'appendice al termine di questo capitolo. Dal loro sviluppo e dalla loro effettiva diffusione dipenderà, nei prossimi anni, la possibilità di utilizzare davvero i modelli di credit risk management a fini di ottimizzazione del profilo di rischio/rendimento del portafoglio crediti complessivo della banca.

### Esercizi

1. Calcolate il tasso attivo da applicare a un prestito a un'impresa, sapendo che: la sua PD è pari allo 0,5%; il tasso di recupero è pari al 40% del valore finale del prestito; il VaR sul prestito (al 99% di confidenza) è uguale a 5 centesimi per ogni euro; il costo dei fondi ( $i$ ) per la banca è pari a 4%; il costo del capitale per la banca ( $r_c$ ) è pari al 10%.
2. Una banca sta emettendo un prestito a un anno a favore di un cliente con PD dell'1% e LGD del 30%. Il suo tasso interno di trasferimento è il 6% e il capitale a rischio (VaR) assorbito dal prestito è pari a 13 centesimi per ogni euro prestato. Calcolate il tasso sul prestito che permette alla banca di pagare un Raroc (cost of equity) del 12% ai suoi azionisti. In alternativa, ipotizzate che la banca debba emettere il prestito al tasso del 7% e calcolate il Raroc sul prestito.
3. La Banca Cinecittà e la Banca Tondino si apprestano entrambe a emettere un prestito a favore di MediaChannel, una società attiva nel settore dei media e dell'intrattenimento. La Banca Cinecittà finanzia principalmente stazioni televisive e produttori cinematografici, mentre la Banca Tondino ha in portafoglio molti prestiti ad aziende siderurgiche e miniere di carbone. Entrambe le banche assegnano a MediaChannel la medesima PD; tuttavia, la Banca Tondino, essendo meno esperta del settore dei film e delle trasmissioni tv, ha stimato una LGD prudenziale del 90% sul prestito, mentre la Banca Cinecittà si attende un tasso di recupero del 40%. Sul la base di questi dati, quale delle due banche potrebbe offrire il tasso più basso?
  - a) La Banca Cinecittà, perché le aspettative di recupero sono migliori e perché società come MediaChannel rappresentano già una quota significativa del suo portafoglio prestiti;



- b) la Banca Tondino, perché i benefici da diversificazione sono maggiori;
- c) le due banche offriranno esattamente lo stesso tasso, perché il Var su base stand-alone del prestito a MediaChannel è lo stesso, indipendentemente da chi lo emette;
- d) le attese di recupero e i benefici da diversificazione agiscono in direzioni opposte sul rischio; le informazioni date dall'esercizio non sono dunque sufficienti per capire quale delle due banche offrirà il tasso più basso.
- 
4. Il direttore di una filiale bancaria deve essere autorizzato dalla direzione centrale per emettere un prestito con perdita attesa superiore a 100.000 euro. Il direttore sta per emettere un prestito a un cliente con PD pari all'1,4% e LGD attesa del 40%. Qual è il massimo ammontare che può essere emesso senza richiedere l'autorizzazione della direzione centrale?
5. Quale dei seguenti derivati creditizi darebbe luogo a una perdita se il rating della reference entity venisse rivisto al rialzo dalle agenzie di rating?
- Una posizione lunga su un credit default swap;
  - una posizione lunga su un total return swap;
  - una credit default note che contiene una posizione corta su un credit default swap;
  - una posizione corta su una credit spread option.
6. La Alpi Spa ha venduto un credit default swap sulla Appennini Srl. Considerate i seguenti eventi:
- la Appennini Srl subisce un downgrading da parte di Moody's e Standard & Poor's;
  - la Alpi Spa subisce un downgrading da parte di Moody's e Standard & Poor's;
  - la Alpi Spa e la Appennini Srl si fondono;
  - Moody's modifica l'outlook per la Appennini Srl, da stabile a positivo.
- Quali di essi possono ridurre il valore del credit default swap?
- Gli eventi ii e iii;
  - tutti tranne i;
  - tutte;
  - ii e iv.

## Appendice 16A Strumenti per la cessione del rischio di credito

L'esigenza di gestire in modo più flessibile ed efficiente il rischio di credito ha favorito la nascita e lo sviluppo di strumenti per trasferire tale tipologia di rischio.

Credit derivative, operazioni di securitisation e loan sale consentono la trasformazione dei prestiti bancari da attività illiquidate – legate fino alla scadenza al bilancio dell'intermediario che le origina – ad attività negoziabili. Questa appendice ne illustra le principali caratteristiche.

### 16A.1 I derivati creditizi, o credit derivative

Dall'inizio degli anni Novanta si sono diffusi contratti forward, swap e opzioni aventi a oggetto il rischio creditizio denominati *credit derivative*. Si tratta di strumenti altamente personalizzati, negoziati sul mercato over-the-counter (OTC), di taglio medio elevato (indicativamente tra i 25 e i 100 milioni di dollari). Le controparti sono costituite prevalentemente da banche, investitori istituzionali e, in minor misura, grandi imprese non finanziarie. I contratti sono conclusi attraverso un intermediario (di solito, una grande investment bank), che può agire come broker (limitandosi a mettere in contatto due controparti) o come dealer (intervenendo come controparte nel contratto).

**Terminologia** - Esistono alcuni elementi e termini tecnici comuni a tutti i credit derivative, che è necessario conoscere prima di presentare le diverse tipologie di contratto. Per la terminologia è consigliabile fare riferimento alle definizioni dell'ISDA (International Swaps and Derivatives Association), che da tempo si adopera per standardizzare gli schemi contrattuali di questi strumenti<sup>15</sup>.

Il primo elemento da individuare è costituito dalla cosiddetta «attività sottostante»: non si tratta, come per i derivati finanziari, del prezzo di un'azione, di un tasso d'interesse o di un tasso di cambio, bensì di un «nome», ovvero di un soggetto – impresa, ente pubblico o Stato Sovrano – nei confronti del quale esiste un'esposizione creditizia, il cui rischio è trasferito tramite il derivato. Esso è detto *reference entity* (entità di riferimento). Si noti che di solito la reference entity non ha nulla a che fare con le due controparti che stipulano il credit derivative e in molti casi è ignara dell'esistenza del contratto.

Il payoff dei credit derivative dipende dal verificarsi di un credit event, cioè di un evento associato a un netto peggioramento del merito creditizio della reference entity. L'ISDA ha individuato otto distinti credit event:

- *bankruptcy*: assoggettamento della reference entity a qualunque forma di procedura concorsuale, o la cessazione di attività;
- *failure to pay*: mancato pagamento di un'obbligazione (di norma, al di sopra di un certo ammontare minimo ritenuto trascurabile);
- *downgrade*: perdita del rating o sua diminuzione al di sotto di un livello predeterminato;
- *repudiation*: disconoscimento di obbligazioni assunte dalla reference entity;
- *restructuring*: moratoria, dilazioni, rinegoziazioni di debiti tali da diminuirne il valore per il creditore;

<sup>15</sup> Il lavoro dell'ISDA è in particolare volto a uniformare la terminologia, attraverso la puntuale definizione dei vocaboli tecnici più ricorrenti, e a omogeneizzare una serie di clausole e meccanismi che possono essere combinati in vario modo dalle parti per definire la struttura contrattuale desiderata.

- *cross acceleration*: inadempimenti contrattuali che, pur non comportando un mancato pagamento, comportino la perdita del beneficio del termine su un'obbligazione, successivamente non adempiuta dalla reference entity;
- *cross default*: inadempimenti contrattuali che, pur non comportando un mancato pagamento, comportino la perdita del beneficio del termine;
- *credit event upon merger*: fusioni o incorporazioni che comportino un peggioramento sostanziale del rischio di credito.

Un credit derivative può coprire uno o più di questi eventi. Se l'evento si verifica, una parte («protection seller», venditore di protezione) effettua un pagamento a favore dell'altra («protection buyer», compratore di protezione). Non è necessario che il compratore di protezione abbia un'esposizione creditizia verso la reference entity. Potrebbe infatti semplicemente voler speculare, cioè «scommettere», sul verificarsi del credit event.

Il venditore di protezione è la parte a cui viene trasferito il rischio di credito; quale corrispettivo, riceve un premio alla stipula del contratto, oppure una serie di pagamenti periodici.

In molti contratti è inoltre prevista una *reference obligation*: con tale espressione si intende un particolare debito – generalmente un'obbligazione – emesso dalla reference entity. La funzione della reference obligation (v. oltre) può essere diversa a seconda del tipo di contratto. In generale, i pagamenti previsti da un credit derivative dipendono dal movimento del prezzo della reference obligation; essi vengono calcolati dal calculation agent, che può essere un soggetto terzo oppure una delle due controparti.

Se la reference obligation è un titolo obbligazionario scambiato in un mercato secondario liquido ed efficiente, il calculation agent si limita a rilevare i prezzi e a quantificare il pagamento secondo le modalità previste dal contratto. In altri casi, la reference obligation può avere un mercato secondario scarsamente significativo («sottile») e il calcolo diventa maggiormente delicato<sup>16</sup>, anche perché il verificarsi del credit event riduce drasticamente la liquidità del titolo; in questi casi il calculation agent può determinare il prezzo consultando più dealer<sup>17</sup>. In altri casi ancora la reference obligation è un debito non negoziabile, come un prestito bancario, e il calculation agent deve valutarlo autonomamente. In questi casi, per ridurre le assimmetrie informative sarebbe utile che il calculation agent fosse la stessa banca che ha emesso il prestito da valutare; tuttavia, se essa è anche parte del credit derivative,

<sup>16</sup> Se un credit derivative dovesse sempre richiedere una reference obligation altamente negoziabile, le possibilità di sviluppo del mercato risulterebbero drasticamente ridimensionate. Persino in mercati obbligazionari ampi ed evoluti come quello statunitense, infatti, una grande quantità di emissioni è caratterizzata da un mercato secondario illiquido.

<sup>17</sup> Tale procedura prevede che vengano richieste le quotazioni a un certo numero di operatori, individuati a priori nel contratto, che svolgono attività di intermediazione sullo specifico titolo da valutare. Il calculation agent determina poi il prezzo come media delle quotazioni ottenute.

ciò conduce a un evidente conflitto d'interesse, perché il calculation agent ha la possibilità di determinare a proprio favore i flussi di cassa associati al derivato.

Ciò nonostante, è possibile rinvenire contratti (anche se mancano statistiche sull'entità del fenomeno) dove il calculation agent è una delle due parti del derivato; in questi casi, il calculation agent deve godere di un'indiscussa reputazione sul mercato dei derivati creditizi, così che il rischio di perdere tale reputazione lo induca a non trarre indebiti vantaggi dal proprio ruolo. In molti casi, inoltre, è probabile che il calculation agent sia una delle due parti del contratto semplicemente perché la reference obligation è molto facile da valutare, i margini di arbitrio sono sostanzialmente nulli e non vale la pena di ricorrere a un soggetto terzo.

*Principali tipologie di credit derivative* – Così come i derivati finanziari (su tassi di interesse, tassi di cambio, indici azionari ecc.), anche i credit derivative sono separabili in tre principali categorie: i contratti a termine (forward), i credit swaps e le credit option. Più in particolare, i contratti più diffusi sono: credit spread forward, total rate of return («TROR») swap, credit default swap, credit spread option, credit default note.

È inoltre possibile distinguere credit-default product e replication product. I primi consentono il trasferimento del solo rischio di credito, e dunque originano un payoff soltanto in presenza di un credit event che colpisca uno o più soggetti; il più diffuso è il credit default swap. I replication product consentono di creare un'attività sintetica (synthetic asset) sensibile al rischio di credito; in alcuni casi essi trasferiscono, oltre al rischio di credito, anche il rischio di mercato. Il loro payoff dipende dai flussi di cassa e dal prezzo di mercato della reference obligation, e non solo da un credit event. Il più diffuso è il total return swap.

I credit spread forward rappresentano la forma più semplice di credit derivative<sup>18</sup>. Si tratta di contratti a termine che prevedono lo scambio, a scadenza, di un pagamento calcolato sulla base della differenza fra uno spread prefissato contrattuale e lo spread di un corporate bond (calcolato generalmente rispetto al rendimento dei titoli di Stato). L'acquirente del credit spread forward si impegna a pagare al venditore del forward, alla scadenza  $t$  del contratto, il seguente importo  $p$ :

$$p = (s_f - s_t) \cdot DM \cdot VN \quad [16A.1]$$

dove  $s_f$  è lo spread contrattuale (fissato dalle parti alla stipula del forward),  $s_t$  è lo spread effettivamente pagato dal titolo obbligazionario al tempo  $t$ ,  $DM$  è la duration modificata del titolo obbligazionario e  $VN$  il suo valore nominale.

Se il merito creditizio dell'emittente dell'obbligazione peggiora, il suo prezzo si riduce e il suo yield to maturity aumenta. Per un dato rendimento dei titoli di Stato,

<sup>18</sup> Pur essendo contrattualmente più semplici, i credit spread forward non sono i primi credit derivative sviluppatisi nel mercato. Si sono infatti inizialmente diffusi i credit swap e le credit option.

cioè conduce a un rialzo di  $s_f$  al di sopra dello spread contrattuale  $s_f$ . Il valore di  $p$  nella A.1 è negativo: è dunque il venditore a dover corrispondere un flusso di cassa all'acquirente del credit spread forward. Egli si accolla quindi il rischio di credito connesso al titolo obbligazionario.

Per esempio, una banca statunitense che ha in portafoglio titoli del Tesoro messicano può proteggersi da eventuali rialzi del loro spread rispetto ai Treasury americani (rialzi che determinerebbero una riduzione del valore dei titoli), acquistando un credit spread forward. La banca riceverebbe infatti un pagamento pari alla differenza fra lo spread concordato e quello di mercato, moltiplicato per la duration modificata media dei titoli e per il relativo valore nominale.

Un credit spread forward può anche prevedere un pagamento basato, anziché sulla differenza fra due spread, sulla differenza fra un prezzo concordato inizialmente e il prezzo di mercato del titolo al tempo  $t$ .

Le credit spread option sono una variante dei credit spread forward, in cui l'acquirente ha il diritto, ma non l'obbligo, di effettuare lo scambio tra spread corrente  $s_t$  e spread predefinito  $s_f$ . In cambio di questa facoltà, egli paga un premio – liquidato anticipatamente o con pagamenti periodici.

Un total rate of return (TROR) swap prevede che le controparti si scambino due flussi di pagamenti periodici, entrambi a tasso variabile. Il primo è indicizzato a un parametro di mercato, come il Libor, l'altro corrisponde ai flussi di cassa generati da una reference obligation (titolo o prestito bancario).

Supponiamo per esempio che la banca A abbia in portafoglio un prestito del quale desidera cedere il rischio. Con un TROR swap, essa si accorda per versare alla banca B una serie di pagamenti pari ai flussi di cassa generati dal prestito. Così facendo cede, in pratica, l'intero rendimento (total rate of return) del prestito: interessi, commissioni, guadagni in conto capitale (dati dalla differenza tra prezzo finale e prezzo iniziale).

La banca B si impegna invece a corrispondere ad A, alle stesse date, un flusso di pagamenti indicizzati a un parametro di mercato – generalmente il Libor – maggiorato di un certo spread contrattato tra le parti (che dipende ovviamente dal merito creditizio dell'impresa finanziata).

Poiché i prestiti oggetto di TROR swap sono di norma a tasso variabile, entrambe le «gambe» (leg) dello swap variano con i tassi di mercato. Non vi sono dunque rischi di mercato da coprire, anche se il contratto può dare luogo a un rischio di base (per esempio, se prevede pagamenti indicizzati al Libor mentre il prestito ha come tassi di riferimento il prime rate).

Alla scadenza dello swap A paga a B un flusso di cassa pari all'effettivo rimborso finale del prestito e riceve da quest'ultima un pagamento pari al valore nominale del prestito maggiorato dell'ultima quota di interessi; se il prestito non viene interamente rimborsato, le conseguenze ricadono dunque su B.

Se invece il debitore diventa insolvente prima della scadenza dello swap, esso si estingue e la banca B si impegna a liquidare alla banca A la differenza fra il valore nominale del prestito e il suo valore commerciale (generalmente determinato tramite consulto di dealer). Se tuttavia la banca B non fosse soddisfatta del valore com-

merciale attribuito al prestito, potrebbe rilevarlo dalla banca A pagandolo al valore nominale<sup>19</sup>.

I TROR sono la forma più diffusa di credit derivative, dopo i credit default swap (CDS). Questi ultimi sono contratti con cui il compratore di protezione, dietro pagamento di un premio periodico, ottiene dal venditore di protezione un pagamento in caso di credit event. Per esempio, se la banca A intende tutelarsi contro il rischio di insolvenza di un'impresa (reference entity), effettua alla banca B un pagamento periodico – per esempio trimestrale – a fronte del quale acquista il diritto a ricevere un pagamento in caso di default della reference entity.

Il credit event deve naturalmente essere definito sulla base di criteri oggettivi (come quelli dell'ISDA) e verificabili. Sono inoltre previste delle «soglie di rilevanza» al di sotto delle quali il venditore di protezione non effettua alcun pagamento: per esempio, l'inadempienza deve comportare una perdita totale superiore a una certa percentuale del valore della reference obligation).

Pur essendo denominati swap, tali contratti sono in effetti dei contratti di opzione (con pagamento del premio periodico anziché upfront); per questo motivo sono anche denominati *credit default option*. Essi possono vedersi anche come lettere di credito e, più in generale, come garanzie o assicurazioni del credito.

Le credit default note (o credit linked note) prevedono che l'investitore/sottoscrittore, in cambio di un maggior rendimento, si faccia carico del rischio di inadempienza di una o più reference obligation (e, più in generale, di un portafoglio di esposizioni creditizie). La credit default note viene solitamente emessa da una società *ad hoc* (special purpose entity) il cui attivo è interamente rappresentato da un certo portafoglio di esposizioni creditizie (solitamente cedute da una banca), oppure da titoli a basso rischio (per esempio, titoli di Stato) e da una serie di derivati creditizi in cui la special purpose entity agisce come venditore di protezione. Gli investitori che finanziano il veicolo sono dunque esposti al rischio che le note vengano rimborsate solo in parte se gli attivi del veicolo registrano perdite su crediti, o se le reference obligation dei derivati creditizi risultano inadempienti.

*Gli utilizzi dei credit derivative* - I credit derivative consentono a una banca di ridurre l'esposizione al rischio di credito (operando come protection buyer) nei confronti di determinate controparti senza tuttavia cedere i relativi impegni; oppure, di guadagnare commissioni (agendo come protection seller) in cambio dell'esposizione al rischio di credito verso soggetti con cui non ha (per motivi geografici, di dimensione, di specializzazione operativa) relazioni di clientela dirette. Ciò consente di ridurre, almeno in parte, il problema dell'illiquidità degli impegni bancari e di ottimizzare la composizione del portafoglio impegni, migliorandone l'efficienza.

Si pensi al caso di una banca tedesca, fortemente esposta verso il proprio mercato domestico. Essa è indubbiamente in una posizione vantaggiosa per svolgere la

<sup>19</sup> Così come nei credit spread forward, anche nei TROR swap si possono prevedere pagamenti basati unicamente sugli spread. In questo caso, la parte che cede il rischio del prestito riceverebbe a scadenza la differenza fra il valore dello spread alla scadenza dello swap e quello all'inizio dello swap.

funzione di origination di prestiti a clientela tedesca, selezionandola, applicandole un tasso adeguato e sorvegliandone l'evoluzione. Tuttavia, potrebbe ridurre il proprio rischio di portafoglio attraverso una maggiore diversificazione. Essa dovrebbe dunque separare origination e risk taking ricorrendo, per esempio, a un TROR swap. Un simile contratto consentirebbe a una banca non tedesca, per esempio giapponese, di assumere un'esposizione in Germania lasciando alla banca locale la gestione della relazione di clientela. Più in generale, ogni banca dovrebbe comprare protezione sui settori e le aree geografiche dove è eccessivamente concentrata, vendendo invece protezione su imprese operanti in aree o settori produttivi diversi e scarsamente correlate con i precedenti.

La cessione di rischio tramite credit derivative è particolarmente utile per le banche con portafogli fortemente concentrati verso specifici soggetti o settori. È questo il caso, per esempio, delle banche attive nella negoziazione di derivati OTC, che spesso operano con un numero ristretto di grandi controparti verso le quali finiscono per avere esposizioni molto rilevanti. Ovviamente, anche i derivati creditizi, in quanto derivati OTC, comportano un rischio di controparte, legato alla possibile inadempienza del venditore di protezione.

Un ulteriore utilizzo dei credit derivative è quello connesso alla *costruzione di attività finanziarie sintetiche*. Consideriamo per esempio un fondo pensione statunitense che desidera acquistare titoli del Tesoro messicano a lungo termine (per esempio, decennali) per trarre profitto dai miglioramenti futuri del merito creditizio del Messico. Immaginiamo che lo statuto del fondo pensione o la legge proibiscano l'acquisto di obbligazioni estere con durata superiore a cinque anni. Il fondo pensione potrebbe a questo punto «parcheggiare» i suoi fondi in buoni del Tesoro Usa e ricreare, attraverso un credit derivative, profitti e rischi di un investimento a lungo termine in titoli messicani<sup>20</sup>.

I credit derivative sono stati inoltre usati per realizzare *arbitraggi regolamentari* (regulatory arbitrage), cioè operazioni che sfruttano i disallineamenti tra il contenuto di rischio di due esposizioni e il loro trattamento regolamentare, per esempio in termini di requisiti patrimoniali minimi obbligatori. Un esempio di arbitraggio regolamentare consiste nell'acquistare protezione su crediti a banche a basso rischio, trasferendo il rischio di credito e dunque «liberando» il relativo patrimonio obbligatorio, per poi vendere protezione (acquisendo rischio e dunque obbligandosi a detenere un patrimonio più elevato) su crediti a banche più rischiose. La normativa di alcuni Paesi, negli anni scorsi, prevedeva infatti che la quantità di patrimonio regolamentare liberata e richiesta dai due derivati fosse la medesima, purché tutte le banche avessero sede in Paesi dell'OCSE. Era dunque possibile, a parità di patrimonio minimo obbligatorio, esporsi a maggiori rischi e guadagnare margini più elevati. Simili schemi di arbitraggio sono stati resi molto più difficili dal nuovo Accordo

<sup>20</sup> L'esempio può essere visto come un arbitraggio regolamentare (v. oltre): a rigore, lo statuto del fondo o la legge, che proibiscono l'acquisto diretto di titoli messicani a lungo termine, dovrebbe proibire anche i credit derivative aventi come reference obligation questo tipo di investimenti.

di Basilea (cfr. Capitolo 21), che ha reso i requisiti patrimoniali molto più sensibili al contenuto di rischio dei contratti.

Un ulteriore vantaggio dei credit derivative è il possibile superamento dei problemi connessi ai *differenziali nel costo del funding* di banche di diverso merito creditizio. Per comprendere questo punto si consideri una banca dotata di rating «singola A», in grado di finanziarsi sul mercato interbancario al tasso Libor. Tale banca non avrebbe alcuna possibilità di erogare prestiti a imprese dotate di rating AAA, che potrebbero finanziarsi direttamente sul mercato a tassi inferiori al Libor. Se volesse comunque aggiungere al proprio portafoglio di crediti un rischio verso imprese ad alto rating (per cogliere i benefici di una maggiore diversificazione) potrebbe sottoscrivere, come venditore di protezione, un derivato creditizio la cui reference entity è l'impresa AAA. Analogamente, istituzioni dotate di un vantaggio relativo nel costo del funding potrebbero sfruttare tale vantaggio per finanziare imprese con elevato merito creditizio acquistando successivamente, mediante un credit swap, la protezione dal rischio di credito.

Infine, i credit derivative possono risultare estremamente utili per la *stima delle probabilità di insolvenza* delle reference entity, attraverso modelli simili a quelli applicati, nel Capitolo 12, agli spread obbligazionari.

## 16A.2 Le cartolarizzazioni («securitisation»)

Le banche che desiderano scorporare il rischio di un portafoglio di prestiti senza usare i derivati creditizi, possono fare ricorso a una tecnica nota come *cartolarizzazione*. Essa comporta la creazione di una società *ad hoc* (nota, di solito, come *special purpose vehicle*, SPV, o *special purpose entity*, SPE) che acquista un portafoglio di attività (di norma, prestiti) dalla banca. La SPV è «bankruptcy-remote» rispetto alla banca: ciò significa che un suo eventuale default non comporta il default della banca. La banca, che aveva originariamente emesso i prestiti ceduti alla SPV, prende il nome di *originator*.

La SPV si finanzia emettendo obbligazioni con diversi livelli (tranche) di seniority. I titoli più senior, solitamente dotati di rating da parte di una o più agenzie esterne, sono perlopiù sottoscritti da investitori istituzionali; i titoli junior (noti anche come «junior securitisation tranche», «first-loss tranche» o «equity tranche») sono solitamente sottoscritti dalla banca stessa, per rassicurare il mercato sulla qualità delle attività finanziarie cartolarizzate (cfr. Fig. 16A.1).

La dimensione della tranne «first loss» («a prima perdita») dipende dalla qualità delle attività cartolarizzate e dal rating che la SPV desidera ottenere sulle sue obbligazioni. Per ottenere rating elevati sulle obbligazioni senior emesse a fronte di un portafoglio di cattiva qualità, la banca dovrà sottoscrivere un ammontare superiore di obbligazioni junior. La banca potrà inoltre prestare, a favore della SPV, uno o più liquidity enhancement («facilitazioni di liquidità»), per esempio tenendo a sua disposizione una linea di credito a tre mesi, per aiutarla a superare eventuali scommessi momentanei di liquidità senza rischiare ritardi nel pagamento degli interessi agli obbligazionisti.