Kræsjkurs INF235

Steinar Simonnes og Carina Seidel

Institutt for Informatikk
Universitetet i Bergen

22 Mai 2024

Kræsjkurs!

Steinar Simonnes og Carina Seidel

Institutt for Informatikk
Universitetet i Bergen

22 Mai 2024

Agenda

- Automatateori
  - Deterministisk automata
  - Ikke-deterministisk automata
  - Pushdownautomataer
  - Turingmaskiner
- Formelle språk
  - Regulære språk
  - Kontekstfrie språk
  - Kontekstsensitive språk
  - Grammatikk
- Avgjørbarhet
  - Semi-avgjørbarhet
  - Halteproblemet
- Avgjørbarhet
  - Semi-avgjørbarhet
  - Halteproblemet
- Kompleksitet
  - Klassene P og NP
  - Turingreduksjoner
  - NP-Kompletthet
  - Minnekompleksitet
- Alt det andre
  - $\exists^P$ og $\forall^P$
  - Σ^P og Π^P
  - Det generaliserte halteproblemet

Hvordan programmere en kaffemaskin?

Eksempel på bruksprossess,
når brukeren velger
Cappuccino:

1. Bruker velger Cappuccino
2. Bruker bekrefter valget
3. Maskin heller oppi kaffe
4. Maskin heller oppi melk
5. Tilbake til start

Hvordan programmere en kaffemaskin?

Eksempel på bruksprossess, når brukeren velger Cappuccino:

1. Bruker velger Cappuccino
2. Bruker bekrefter valget
3. Maskin heller oppi kaffe
4. Maskin heller oppi melk
5. Tilbake til start

$$
\begin{tikzcd}
\text{Start} \arrow[r, "\text{Trykk cappuccino}"] & \text{Cappuccino valgt} \arrow[d, "\text{Trykk bekreft}"] \\
\text{Heller melk} \arrow[u, "\text{Ferdig med melk}"] & \text{Heller kaffe} \arrow[l, "\text{Ferdig med kaffe}"']
\end{tikzcd}
$$

Hvordan programmere en kaffemaskin?

Eksempel på bruksprossess, når brukeren velger Cappuccino:

1. Bruker velger Cappuccino
2. Bruker bekrefter valget
3. Maskin heller oppi kaffe
4. Maskin heller oppi melk
5. Tilbake til start

$$
\begin{tikzcd}
\text{Start} \arrow[r, "\text{Trykk cappuccino}"] & \text{Cappuccino valgt} \arrow[d, "\text{Trykk bekreft}"] \\
\text{Heller melk} \arrow[u, "\text{Ferdig med melk}"] & \text{Heller kaffe} \arrow[l, "\text{Ferdig med kaffe}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \underline{Q_0} \arrow[r, "c"] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\
& Q_3 \arrow[u, "m"] & Q_2 \arrow[l, "k"]
\end{tikzcd}
$$

Definition (Deterministisk Endelig Tilstandsmaskin / DFA)

En Deterministisk Endelig Tilstandsmaskin M er en 5-tuppel $M := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der

- Q er et sett tilstander
- Σ er et 'alfabet' av gyldige karakterer
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ er en funksjon som regner ut neste tilstand
- q_0 er starttilstanden
- $F \subseteq Q$ er et sett 'ønskede' tilstander

Definition (Deterministisk Endelig Tilstandsmaskin / DFA)

En Deterministisk Endelig Tilstandsmaskin M er en 5-tuppel $M := (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, der

- Q er et sett tilstander
- Σ er et 'alfabet' av gyldige karakterer
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ er en funksjon som regner ut neste tilstand
- q_0 er starttilstanden
- $F \subseteq Q$ er et sett 'ønskede' tilstander

Kaffemaskinen vår:

$K := (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$, der

$Q := \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$
$\Sigma := \{c, b, k, m\}$
$\mathrm{F} := \{\mathrm{Q}_0\}$

$$\begin{aligned}
\delta(Q_0, c) &= Q_1 \\
\delta(Q_1, b) &= Q_2 \\
\delta(Q_2, k) &= Q_3 \\
\delta(Q_3, m) &= Q_4 \\
\delta(_, _) &= \perp
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \underline{Q_0} \arrow[r, "c"] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\
& Q_3 \arrow[u, "m"] & Q_2 \arrow[l, "k"]
\end{tikzcd}$$

Språket til en DFA

Vi trenger en mer formell definisjon for hva vi mener med et 'gyldig' input til en DFA.

Definition (Transitiv Tillukning / Transitive Closure)

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$

$\delta^*(q, \epsilon) = q$

$\delta^*(q, w_1 w_2 ... w_n) = \delta^*(\delta(q, w_1), w_2 w_3 ... w_n)$

Språket til en DFA

Vi trenger en mer formell definisjon for hva vi mener med et 'gyldig' input til en DFA.

Definition (Transitiv Tillukning / Transitive Closure)

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$
$\delta^*(q, \epsilon) = q$
$\delta^*(q, w_1 w_2 ... w_n) = \delta^*(\delta(q, w_1), w_2 w_3 ... w_n)$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \underline{Q_0} \arrow[rr, "c"] & & Q_1 \arrow[d, "b"] \\ & Q_3 \arrow[u, "m"] & & Q_2 \arrow[ll, "k"'] \end{tikzcd}$$

Eksempler:
$\delta^*(Q_0, "cbkm")$

Språket til en DFA

Vi trenger en mer formell definisjon for hva vi mener med et 'gyldig' input til en DFA.

Definition (Transitiv Tillukning / Transitive Closure)

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$

$\delta^*(q, \epsilon) = q$

$\delta^*(q, w_1 w_2 ... w_n) = \delta^*(\delta(q, w_1), w_2 w_3 ... w_n)$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \underline{Q_0} \arrow[r, "c"] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\
& Q_3 \arrow[u, "m"] & Q_2 \arrow[l, "k"']
\end{tikzcd}$$

Eksempler:

$\delta^*(Q_0, "cbkm") = Q_0$ ✓

Språket til en DFA

Vi trenger en mer formell definisjon for hva vi mener med et 'gyldig' input til en DFA.

Definition (Transitiv Tillukning / Transitive Closure)

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$
$\delta^*(q, \epsilon) = q$
$\delta^*(q, w_1 w_2 ... w_n) = \delta^*(\delta(q, w_1), w_2 w_3 ... w_n)$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \underline{Q_0} \arrow[r, "c"] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\ & Q_3 \arrow[u, "m"] & Q_2 \arrow[l, "k"'] \end{tikzcd}$$

Eksempler:
$\delta^*(Q_0, "cbkm") = Q_0$ ✓
$\delta^*(Q_0, "cbkmcbkm")$

Språket til en DFA

Vi trenger en mer formell definisjon for hva vi mener med et 'gyldig' input til en DFA.

Definition (Transitiv Tillukning / Transitive Closure)

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$
$\delta^*(q, \epsilon) = q$
$\delta^*(q, w_1 w_2 ... w_n) = \delta^*(\delta(q, w_1), w_2 w_3 ... w_n)$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \underline{Q_0} \arrow[r, "c"] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\
& Q_3 \arrow[u, "m"] & Q_2 \arrow[l, "k"]
\end{tikzcd}$$

Eksempler:
$\delta^*(Q_0, "cbkm") = Q_0$ ✓
$\delta^*(Q_0, "cbkmcbkm") = Q_0$ ✓

Språket til en DFA

Vi trenger en mer formell definisjon for hva vi mener med et 'gyldig' input til en DFA.

Definition (Transitiv Tillukning / Transitive Closure)

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$
$\delta^*(q, \epsilon) = q$
$\delta^*(q, w_1 w_2 ... w_n) = \delta^*(\delta(q, w_1), w_2 w_3 ... w_n)$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \underline{Q_0} \arrow[r, "c"] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\
& Q_3 \arrow[u, "m"] & Q_2 \arrow[l, "k"']
\end{tikzcd}$$

Eksempler:
$\delta^*(Q_0, "cbkm") = Q_0$ ✓
$\delta^*(Q_0, "cbkmcbkm") = Q_0$ ✓
$\delta^*(Q_0, "cb")$

Språket til en DFA

Vi trenger en mer formell definisjon for hva vi mener med et 'gyldig' input til en DFA.

Definition (Transitiv Tillukning / Transitive Closure)

$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$$
$$\delta^*(q, \epsilon) = q$$
$$\delta^*(q, w_1 w_2 ... w_n) = \delta^*(\delta(q, w_1), w_2 w_3 ... w_n)$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \underline{Q_0} \arrow[r, "c"] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\
& Q_3 \arrow[u, "m"] & Q_2 \arrow[l, "k"]
\end{tikzcd}$$

Eksempler:

$\delta^*(Q_0, "cbkm") = Q_0$ ✓

$\delta^*(Q_0, "cbkmcbkm") = Q_0$ ✓

$\delta^*(Q_0, "cb") = Q_2$ ✗

Språket til en DFA

Vi trenger en mer formell definisjon for hva vi mener med et 'gyldig' input til en DFA.

Definition (Transitiv Tillukning / Transitive Closure)

$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$$
$$\delta^*(q, \epsilon) = q$$
$$\delta^*(q, w_1 w_2 ... w_n) = \delta^*(\delta(q, w_1), w_2 w_3 ... w_n)$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \underline{Q_0} \arrow[r, "c"] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\
& Q_3 \arrow[u, "m"] & Q_2 \arrow[l, "k"']
\end{tikzcd}$$

Eksempler:

$\delta^*(Q_0, "cbkm") = Q_0$ ✓

$\delta^*(Q_0, "cbkmcbkm") = Q_0$ ✓

$\delta^*(Q_0, "cb") = Q_2$ ✗

$\delta^*(Q_0, "cbkc")$

Språket til en DFA

Vi trenger en mer formell definisjon for hva vi mener med et 'gyldig' input til en DFA.

Definition (Transitiv Tillukning / Transitive Closure)

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$
$\delta^*(q, \epsilon) = q$
$\delta^*(q, w_1 w_2 ... w_n) = \delta^*(\delta(q, w_1), w_2 w_3 ... w_n)$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & \underline{Q_0} \arrow[r, "c"] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\
& Q_3 \arrow[u, "m"] & Q_2 \arrow[l, "k"]
\end{tikzcd}$$

Eksempler:

$\delta^*(Q_0, "cbkm") = Q_0$ ✓
$\delta^*(Q_0, "cbkmcbkm") = Q_0$ ✓
$\delta^*(Q_0, "cb") = Q_2$ ✗
$\delta^*(Q_0, "cbkc") = \perp$ ✗

Språket til en DFA

Vi trenger en mer formell definisjon for hva vi mener med et 'gyldig' input til en DFA.

Definition (Transitiv Tillukning / Transitive Closure)

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$
$\delta^*(q, \epsilon) = q$
$\delta^*(q, w_1 w_2 ... w_n) = \delta^*(\delta(q, w_1), w_2 w_3 ... w_n)$

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \underline{Q_0} \arrow[r, "c"] & Q_1 \arrow[d, "b"] \\ & Q_3 \arrow[u, "m"] & Q_2 \arrow[l, "k"] \end{tikzcd}$$

Eksempler:
$\delta^*(Q_0, \text{"}cbkm\text{"}) = Q_0$ ✓
$\delta^*(Q_0, \text{"}cbkmcbkm\text{"}) = Q_0$ ✓
$\delta^*(Q_0, \text{"}cb\text{"}) = Q_2$ ✗
$\delta^*(Q_0, \text{"}cbkc\text{"}) = \perp$ ✗

Språket til kaffemaskinen:
$L(K) = \{(cbkm)^n | n \in \mathbb{N}\}$

Ikke-deterministisk automata

Ikke-deterministisk automata

Ikke-deterministisk automata

Ikke-deterministisk automata

Pushdownautomataer

Regulære språk

Kontekstfrie språk

Kontekstfrie språk

Kontekstsensitive språk

Grammatikk

Grammatikk

Grammatikk

Semi-avgjørbarhet

Semi-avgjørbarhet

Klassene P og NP

Turingreduksjoner

NP-Kompletthet

NP-Kompletthet

NP-Kompletthet

NP-Kompletthet

Minnekompleksitet

Minnekompleksitet

Minnekompleksitet

$\exists^P$ og $\forall^P$

$\exists^P$ og $\forall^P$

Σ^P og Π^P

Σ^P og Π^P

Det generaliserte halteproblemet

Det generaliserte halteproblemet