Kræsjkurs MNF130

Steinar Simonnes og Carina Seidel

Institutt for Informatikk
Universitetet i Bergen

22 Mai 2024

Agenda

Slides 'n' Slido

Dere kan stille spørsmål her:
`tinyurl.com/MNF130-QA`
Eller søk på slido.com og skriv inn koden "MNF130".

Dere kan laste ned presentasjonen her:
`tinyurl.com/MNF130-Slides`

Proposisjoner

- En proposisjon er et uttrykk med en sannhetsverdi, som alltid er enten Sann (T) elller Usann (F).
- Ofte setter vi dem i variabler, for å gjøre det lettere å lese.

Proposisjoner

p := 2 < 3
q := "Månen er laget av ost"
r := "MNF130 er et nyttig fag for informatikere"

Ikke proposisjoner

"Hva skal vi ha til middag i dag?"
$x + y < z$

$\neg$, og sannhetstabeller

- Gitt en proposisjon p, kan vi representere den motsatte proposisjonen som $\neg p$.
- Vi kan tegne opp alle mulige verdier et slikt uttrykk kan ha i en tabell.

Eksempler

La $p := 2 < 3$.
$p =$ "Det er sant at 2 er mindre enn 3"
$\neg p =$ "Det er ikke sant at 2 er mindre enn 3"

p	$\neg p$
T	F
F	T

$\vee$ og $\wedge$

- Vi kan slå sammen flere proposisjoner til et større uttrykk på mange forskjellige måter.

Eksempel

La $p :=$ Jorden er flat, og $q :=$ Månen er flat
$p \vee q =$ Jorden er flat **eller** månen er flat
$p \wedge q =$ Jorden er flat **og** månen er flat

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	F

$\to$ og $\leftrightarrow$

- En proposisjon kan implisere en annen proposisjon.

Eksempel

La $p :=$ "Det regner ute", og $q :=$ "Bakken er våt"
$p \to q =$ "Hvis det regner ute, blir bakken våt"
$p \leftrightarrow q =$ "Det regner ute hvis og bare hvis bakken er våt"

p	q	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	T

Ekvivalenser og tautologier

- Når to logiske uttrykk alltid har samme verdi, sier vi at de er *logisk ekvivalente*.
- Om et uttrykk alltid er sant, uavhengig av innholdet, kaller vi det en tautologi.

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \lor \neg p$
T	F	T	T
F	T	F	T

- Konklusjon 1: $p \equiv \neg\neg p$
- Konklusjon 2: $p \lor \neg p \equiv T$, og er en tautologi
- For å se om to uttrykk er ekvivalente, tegn sannhetstabellen og se om kollonene deres er det samme.
- For å se om et uttrykk er en tautologi, tegn sannhetstabellen og se om kolonnen alltid er T.

Noen viktige logiske ekvivalenser

Ekvivalens	Navn
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Identity
$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$	Domination
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent
$p \equiv \neg\neg p$	Negation
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutative

Ekvivalens	Navn
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv q$	Absorption
$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$	Negation

Flere viktige logiske ekvivalenser

Ekvivalenser med $\rightarrow$
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg p \rightarrow \neg q$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee v)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

Ekvivalenser med $\leftrightarrow$
$p \leftrightarrow q \equiv p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \rightarrow \neg q$

Typisk logikkoppgave

Vis at $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$ og $(p \wedge r) \rightarrow q$ er logisk ekvivalente, ved å bruke enkle logiske ekvivalenser.

$$
\begin{aligned}
&(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r \\
&\equiv \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg r \\
&\equiv (\neg p \vee \neg\neg q) \vee \neg r \\
&\equiv (\neg p \vee q) \vee \neg r \\
&\equiv \neg p \vee q \vee \neg r \\
&\equiv \neg p \vee \neg r \vee q \\
&\equiv \neg(p \wedge r) \vee q \\
&\equiv (p \wedge r) \rightarrow q \qquad \square
\end{aligned}
$$

Predikater

- Et predikat er bare en funksjon som returnerer T eller F.
- Gitt et predikat og riktig antall argumenter, kan vi evaluere det som en vanlig proposisjon.

Eksempler på predikater

$P(x, y, z) = x + y < z$
$Q(s) = s$ contains $'a'$

Eksempler på evaluering

$P(1, 2, 3) = 1 + 2 < 3 = 3 < 3 = F$
$Q($«Steinar»$) =$«Steinar» contains $'a' = T$

Kvantorer (/Quantifiers)

- Ofte vil vi si noe om et predikat $P(x)$, men for flere potensielle x samtidig.
- $\forall x : P(x) = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n =$ "For alle x er det sant at $P(x)$"
- $\exists x : P(x) = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n =$ "Det eksisterer en x slik at det er sant at $P(x)$"
- $\exists x \in S : P(x) =$ "Det eksisterer en x i settet S slik at det er sant at $P(x)$"

Eksempler

$\forall x : (x < x + 1) =$ "For alle x er det sant at $x < x + 1$"
$\exists x : (x > x^2) =$ "Det eksisterer en x slik at det er sant at $x > x^2$"
$\exists x \in \mathbb{N} : (x * x = 1)$

Kvantorer i praksis

Kvantorer ser skumle ut, men det er bare for-løkker.

```
def forall(p, xs):
    for x in xs:
        if not p(x):
            return False
    return True

def exists(p, xs):
    for x in xs:
        if p(x):
            return True
    return False
```

- exists(p, xs) $= \exists x \in xs : p(x)$
- forall(p, xs) $= \forall x \in xs : p(x)$

Nøstede kvantorer (/Nested quantifiers)

- Ofte vil vi si noe om mange kombinasjoner av variabler samtidig.
- Da slår vi sammen flere ∀ og ∃.
- Om vi har flere like kvantorer etter hverandre kan vi slå dem sammen med tupler.

Eksempler

$\forall x \forall y : (x^2 + y^2 \geq 0) = \forall x, y : (x^2 + y^2 \geq 0)$
$\forall x \exists y : (x * y = 1) =$ "For alle x eksisterer det en y slik at $x * y = 1$"
$\exists x \forall y : (x^2 \leq y^2) =$ "Det eksisterer en x slik at for alle y er $x^2 \leq y^2$"
$\neg \exists n, a, b, c \in \mathbb{Z} : (n > 2 \wedge a^n + b^n = c^n)$

De Morgan dukker opp igjen

Det viser seg at De Morgan's lover også fungerer på kvantorer.

- $\neg\forall x : P(x)$
  $\equiv \neg[P(x_1) \land P(x_2) \land \ldots \land P(x_n)]$
  $\equiv \neg P(x_1) \lor \neg P(x_2) \lor \ldots \lor \neg P(x_n)$
  $\equiv \exists x : \neg P(x)$
- $\neg\exists x : P(x)$
  $\equiv \neg[P(x_1) \lor P(x_2) \lor \ldots \lor ..P(x_n)]$
  $\equiv \neg P(x_1) \land \neg P(x_2) \land \ldots \land \neg P(x_n)$
  $\equiv \forall x : \neg P(x)$

∀🐠∃🐟(🐟 > 🐠)

Spørsmål?

Figur: Guillaume på Vidden

Lykke til på eksamen!

Takk for oss :)