ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
DEMOCRITUS UNIVERSITY OF THRACE

$2^{Η}$ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στο μάθημα:
«Αναγνώριση Προτύπων»
Καθηγητής: Νικόλαος Μητιανούδης

Στέλιος Μούσλεχ
ΑΜ:57382
31/10/2020 ,Ξάνθη

1^o ΕΡΩΤΗΜΑ

Αρχικά ορίζουμε το άθροισμα των πειραμάτων μας ως

$$\mathrm{N}_5 = \mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2 + \mathrm{N}_3 + \mathrm{N}_4$$

Οπότε υπολογίζουμε τις παρακάτω πιθανότητες ως:

$$P[B] = \frac{\text{Οι φορές που πραγματοποιήθηκε τουλάχιστον το ενδεχόμενο B}}{\text{Άθροισμα των πειραμάτων}} = \frac{N_2 + \mathrm{N}_3}{\mathrm{N}_5}$$

$$P[A \cap B] = \frac{\text{Οι φορές που πραγματοποιήθηκε και το ενδεχόμενο A και το B}}{\text{Άθροισμα των πειραμάτων}} = \frac{\mathrm{N}_3}{\mathrm{N}_5}$$

Οπότε με βάση τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε:

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\frac{\mathrm{N}_3}{\mathrm{N}_5}}{\frac{N_2 + \mathrm{N}_3}{\mathrm{N}_5}} = \frac{N_3}{N_2 + N_3}$$

2^o ΕΡΩΤΗΜΑ

Με βάση τον κανόνα απόφασης Bayes θα επιλέξουμε μία κλάση (ζάρι) ωi όταν :

$$P(\omega_i)p(x|\omega_i) > P(\omega_j)p(x|\omega_j)$$

Για την a priori πιθανότητα:

$$P(\omega_3) = 1 - P(\omega_1) - P(\omega_2) = 0.4$$

Οπότε θα έχουμε για κάθε ενδεχόμενο x:

$$X = 1$$
$$P(\omega_1)p(x|\omega_1) = 0.09$$
$$P(\omega_2)p(x|\omega_2) = 0.06$$
$$P(\omega_3)p(x|\omega_3) = 0.04$$
$$P(\omega_2)p(x|\omega_2) = 0.12$$
$$P(\omega_3)p(x|\omega_3) = 0.06$$

$$X = 2$$
$$P(\omega_1)p(x|\omega_1) = 0.06$$

$$X = 4$$
$$P(\omega_1)p(x|\omega_1) = 0.03$$
$$P(\omega_2)p(x|\omega_2) = 0.015$$
$$P(\omega_3)p(x|\omega_3) = 0.02$$

$X = 5$
$P(\omega_1)p(x|\omega_1) = 0.06$
$P(\omega_2)p(x|\omega_2) = 0.03$
$P(\omega_3)p(x|\omega_3) = 0.12$

$X = 6$
$P(\omega_1)p(x|\omega_1) = 0.03$
$P(\omega_2)p(x|\omega_2) = 0.015$
$P(\omega_3)p(x|\omega_3) = 0.04$

Οπότε το ολικό σφάλμα θα είναι:

$$P_{e,total} = 1 - \sum_i \left(\max_k (P(\omega_k, x_i)) \right)$$

Όπου :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x},\omega_j) &= p(\mathbf{x}\,|\,\omega_j).P(\omega_j) \\ &= P(\mathbf{x}\,|\,\omega_j).p(\omega_j) \end{aligned}$$

Και αντικαθιστώντας με βάση τα παραπάνω:

$$P_{e,total} = 1 - (0.09 + 0.12 + 0.12 + 0.03 + 0.12 + 0.04) = 1 - 0.52 = 0.48$$

3ο ΕΡΩΤΗΜΑ

Βλέπουμε ότι Σ1 = Σ2 έχουμε : Σ1 = Σ2 = Σ. Άρα βρισκόμαστε στη 2η περίπτωση που είδαμε στις διαφάνειες (3η Διάλεξη, σελ 28)
Οπότε οι συναρτήσεις απόφασης θα είναι της μορφής:

$$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + w_{i0} \qquad \mathbf{w}_i = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_i, \quad w_{i0} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_i^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_i + \ln P(\omega_i)$$

Εδώ έχουμε:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{det(\Sigma)}\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Και η a priori πιθανότητα:

$$P(\omega_2) = 1 - P(\omega_1) = 1 - 0.25 = 0.75$$

Οπότε για να βρούμε την επιφάνεια απόφασης :

$$g(x_1) = g(x_2) \implies$$
$$\implies g(x_1) - g(x_2) = 0 \implies$$
$$\implies \left(\Sigma^{-1}\mu_1\right)^t x - \frac{1}{2}\mu_1^t\Sigma^{-1}\mu_1 - \left(\Sigma^{-1}\mu_2\right)^t x + \frac{1}{2}\mu_2^t\Sigma^{-1}\mu_2 + ln\left(\frac{P(\omega_1)}{P(\omega_2)}\right) = 0 \implies$$
$$\implies \left(\frac{1}{35}\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)^t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^t \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{35}\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)^t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}^t \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + ln\left(\frac{0.25}{0.75}\right) = 0 \implies$$
$$\implies 0.6857x_1 + 0.2571x_2 - 0.8843 = 0$$

Άρα στην μορφή με πίνακες: $w^t x + w_0 = 0$

Με: $w = \begin{bmatrix} 0.6857 \\ 0.2571 \end{bmatrix}$ $w_0 = -0.884$

Αναφορικά με το ολικό σφάλμα . Στην περίπτωση μας που έχουμε 2 κλάσεις, έχουμε 2 περιπτώσεις λαθών: το x να είναι στον «χώρο» της πρώτης κλάσης ενώ ανήκει στην δεύτερη και το αντίστροφο.

Άρα το σφάλμα θα είναι

$$P_e = \int_{R_1} p(x|\omega_2)P(\omega_2) + \int_{R_2} p(x|\omega_1)P(\omega_1)$$

Στην δικιά μας περίπτωση, τα ολοκληρώματα θα είναι επιφανειακά (διπλό ολοκλήρωμα) καθώς έχουμε 2D κατανομή Gauss. Η επίλυση αυτού το ολοκληρώματος με κατανομή gauss δεν υπολογίζεται εύκολα οπότε θα εφαρμόσω μια τεχνική που εμφανίζεται στην βιβλιογραφία στο eclass (Στατιστική Αναγνώριση Προτύπων, Θ. Αλεξόπουλος, Α. Τζαμαριουδάκη, Ε.Μ.Π. 2009, σελ 88 του pdf)

Πιο συγκεκριμένα θέτω $y = w^T x$ Οπότε έτσι από 2 μεταβλητές πάμε σε μία και ουσιαστικά μειώνουμε τις διαστάσεις μας σε 1 και το 0.885 είναι το σημείο που διαχωρίζει τις 2 κλάσεις

Καθώς $y + w_0 = 0 \Rightarrow y = -w_0 = 0.885$

Οπότε θα έχουμε:

$$p(x\,|\omega_i) = \mathrm{N}(\mu_i, \Sigma_i) => p(w^T x|\omega_i) = \mathrm{N}\left(w^T\mu_i, w^T\Sigma w\right)$$

Άρα:

$$w^T\mu_1 = \begin{pmatrix} 0.6857 \\ 0.2571 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.2$$

$$w^T\mu_2 = \begin{pmatrix} 0.6857 \\ 0.2571 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1.63$$

$$w^T \Sigma\, w = \begin{pmatrix} 0.6857 \\ 0.2571 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6857 \\ 0.2571 \end{pmatrix} = 2.829$$

Άρα οι αντίστοιχες κατανομής θα αντικατασταθούν με βάση τον τύπο στην αρχή

$$P_e = P(\omega_1)\int_{-\infty}^{0.885} \mathrm{N}\left(1.2, \sqrt{2.829}\right) dx \; + \; P(\omega_2)\int_{0.885}^{\infty} \mathrm{N}\left(1.2, \sqrt{2.829}\right) dx$$

Και γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα από το μείον άπειρο ως κάποια τιμή μιας κανονικής κατανομής μας δίνει το Φ (cdf της gaussian) ως εξής:

$$P_e = \; P(\omega_1)\Phi\left(\frac{0.885 - 1.2}{\sqrt{2.83}}\right) + P(\omega_2)(1 - \Phi\left(\frac{0.885 + 1.628}{\sqrt{2.83}}\right))$$

Το Φ είναι συνάρτηση του error function και παίρνουμε τις τιμές του από πίνακες (ή από MATLAB) :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\, dt = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Και έχουμε τότε το σφάλμα:

$$\mathrm{P}_e \; = \frac{1}{4}\Phi(-0.187) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\Phi(1.494) = \frac{1}{4}(0.425) + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}(0.933) = 0.1562$$

4ο ΕΡΩΤΗΜΑ

Α) Από τη θεωρία ξέρουμε ότι για να κατηγοριοποιηθεί κάτι σε μια δεδομένη κλάση ω1 πρέπει:

$$\frac{P(x|\omega_1)}{P(x|\omega_2)} \geq \frac{\lambda_{12} - \lambda_{22}}{\lambda_{21} - \lambda_{11}} \frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1)}$$

Αντικαθιστώντας με βάση τις τιμές τις εκφώνησης:

$$\frac{P(x|\omega_1)}{P(x|\omega_2)} \geq \frac{2-1}{3-1} \frac{2/3}{1/3}$$

$$\frac{P(x|\omega_1)}{P(x|\omega_2)} \geq 1$$

και αφού:

$$P(x|\omega_1) = N(2, 0.5) \; = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad \mu_1 = 2, \sigma_1^2 = 0.5$$

$$P(x|\omega_2) = N(1.5, 0.2) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad \mu_2 = 1.5, \sigma_2^2 = 0.2$$

Άρα αντικαθιστώντας:

$$\frac{\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}}{\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}} \geq 1 \implies$$

$$\implies \frac{\sigma_2 e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}}{\sigma_1} \geq 1 \implies$$

$$\implies \ln\left(\frac{\sigma_2 e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}}{\sigma_1}\right) \geq 0 \implies$$

$$\implies \ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) - \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \geq 0 \implies$$

$$\implies \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{(x-1.5)^2}{0.4} \leq -0.4581 \implies$$

$$\implies 1.5x^2 - 3.5x + 1.1669 \geq 0$$

Η ισότητα με το μηδέν ισχύει για: $x = 0.403$
$x = 1.9303$

Και επειδή είναι της μορφής: $ax^2 + bx + c$ με α>0 τότε ανάμεσα στις ρίζες η συνάρτηση αρνητική και στα υπόλοιπα διαστήματα θετική

Τότε για :

$$x\epsilon(-\infty, 0.403) \cup (1.93033, \infty) \quad \Delta\iota\alpha\lambda\acute{\epsilon}\gamma\omega\ \omega_1$$

$$x\epsilon(0.403, 1.93033) \qquad \Delta\iota\alpha\lambda\acute{\epsilon}\gamma\omega\ \omega_2$$

Για το ελάχιστο κόστος έχουμε από τη θεωρία:

$$C = P_1\left[\lambda_{11}\int_{R_1} f_{x_1}(x_1/H_1)dx + \lambda_{01}\int_{R_0} f_{x_1}(x_1/H_1)dx\right] + (1-P_1)\left[\lambda_{00}\int_{R_0} f_{x_1}(x_1/H_0)dx + \lambda_{10}\int_{R_1} f_{x_1}(x_1/H_0)dx\right]$$

Σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να υπολογίσουμε :τη πιθανότητα όταν το x είναι στο χώρο του ω2 και ανήκει στο ω1 ,το αντίθετο, καθώς και τις σωστές περιπτώσεις δηλαδή στο χώρο του ω2 και ανήκει όντως στο ω2 και στο χώρο του ω1 και ανήκει όντως στο ω1

Άρα χρησιμοποιώντας την παρακάτω ιδιότητα:

If X is a normal random variable with mean μ and variance σ^2, i.e, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, then

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

<u>Για τον γρήγορο υπολογισμό της Φ χρησιμοποιήθηκε η εντολή normcdf() του MATLAB</u>

Έχουμε:

$$P([0.403 < x < 1.9303]|\omega_1) = \Phi\left(\frac{1.9303 - 2}{\sqrt{0.5}}\right) - \Phi\left(\frac{0.403 - 2}{\sqrt{0.5}}\right) = 0.46073 - 0.0119 = 0.4488$$

$$P([0.403 < x < 1.9303]|\omega_2) = \Phi\left(\frac{1.9303 - 1.5}{\sqrt{0.2}}\right) - \Phi\left(\frac{0.403 - 1.5}{\sqrt{0.2}}\right) = 0.832 - 0.0070 = 0.82493$$

$$P([x < 0.403 \cup 1.93033 < x])|\omega_1) = 1 - 0.4488 = 0.551$$
$$P([x < 0.403 \cup 1.93033 < x])|\omega_2) = 1 - 0.82493 = 0.175$$

Άρα με βάση τον τύπο του κόστους που γράψαμε πάνω:

$$C = 0.25(1 \cdot 0.551 + 0.4488 \cdot 2) \ + \ 0.75(3 \cdot 0.175 + 0.82493 \cdot 1) = 0.36215 + 1.012447 = 1.374597$$

B) Υπολογιστικά έφτιαξα μια συνάρτηση για να υπολογίζει για το συγκεκριμένο πρόβλημα το κόστος με βάση τα x που υπολογίσαμε παραπάνω για την διάκριση των κλάσεων.

```
def gaussDecision(numberOfSamples):
```

Πιο συγκεκριμένα η παράμετρος της συνάρτησης αποτελεί τον αριθμό των δειγμάτων που θα δημιουργήσουμε

Μέσα στο σώμα της συνάρτησης υπολογίζουμε τα πόσα δείγματα θα έχουμε για κάθε κλάση με βάση την a priori πιθανότητα που έχουμε καθώς ορίζουμε και το πίνακα με τα κόστη

```
p1=1/3
#sample size for our samples according to our  proppabilities
w1_sample_size=int(numberOfSamples*p1)
w2_sample_size=numberOfSamples-w1_sample_size
lamdas=[1,2,3,1]
```

Με βάση αυτά τα sample sizes χρησιμοποιούμε την συνάρτηση της NumPy για να δημιουργήσουμε τις 2 κατανομές μας με την μέση τιμή και τυπική απόκλιση για την κάθε κατανομή από τα δεδομένα της εκφώνησης:

```
w1=np.random.normal(2,np.sqrt(0.5),w1_sample_size)
w2=np.random.normal(1.5,np.sqrt(0.2),w2_sample_size)
```

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις πιθανότητες που υπολογίσαμε θεωρητικά για τον τύπο του κόστους και τις τυπώνουν στα καλέσματα της συνάρτησης για να τα βλέπουμε:

```
w1ClassifiedAsw2=0
w1ClassifiedAsw1 = 0
w2ClassifiedAsw1=0
w2ClassifiedAsw2 = 0
#for actual w1 class data we classify according to our decision boundaries at x=0.403, x=19303
for point in w1:
  if point<1.9303 and point>0.403:
    w1ClassifiedAsw2+=1
  else:
    w1ClassifiedAsw1+=1

  # for actual w1 class data we classify according to our decision boundaries at x=0.403,
x=19303
for point2 in w2:
  if point2 < 1.9303 and point2 > 0.403:
    w2ClassifiedAsw2 +=1
  else:
    w2ClassifiedAsw1 +=1

#calculate the propabbilities
p_w1ClassifiedAsw1= w1ClassifiedAsw1 / w1_sample_size
p_w1ClassifiedAsw2 = w1ClassifiedAsw2 /w1_sample_size
p_w2ClassifiedAsw1 = w2ClassifiedAsw1 / w2_sample_size
p_w2ClassifiedAsw2 = w2ClassifiedAsw2 / w2_sample_size

print("Percentage of w1 classified as w1:",p_w1ClassifiedAsw1)
print("Percentage of w1 classified as w2:",p_w1ClassifiedAsw2)
print("Percentage of w2 classified as w1:", p_w2ClassifiedAsw1)
print("Percentage of w2 classified as w2", p_w2ClassifiedAsw2)
```

και τέλος υπολογίζουμε με βάση τον θεωρητικό τύπο το κόστος και το τυπώνουμε:

```
#the cost according to theory
cost=(((lamdas[0]*p_w1ClassifiedAsw1)+(lamdas[1]*p_w1ClassifiedAsw2))*p1)+
(((lamdas[2]*p_w2ClassifiedAsw1)+(lamdas[3]*p_w2ClassifiedAsw2))*(1-p1))
print("The cost is:",cost)
```

Καλώντας την συνάρτηση για 15000 δείγματα

```
D:\PatternRec1\venv\Scripts\python.exe D:/PatternRec1/Ex2/Ex2-Gauss.py
Percentage of w1 classified as w1: 0.5624
Percentage of w1 classified as w2: 0.4376
Percentage of w2 classified as w1: 0.1767
Percentage of w2 classified as w2 0.8233
The cost is: 1.3814666666666668

Process finished with exit code 0
```

Βλέπουμε ότι και οι πιθανότητες και το κόστος είναι πολύ κοντά με τις θεωρητικές (με πολλά δείγματα όπως εδώ προσεγγίζουμε τα νούμερα πολύ καλά)

(το συνημμένο αρχείο Ex2-Gauss.py περιέχει όλο τον κώδικα)