

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

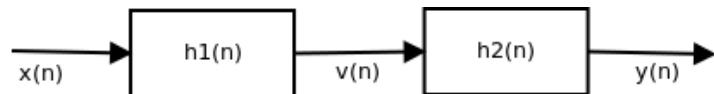
*Επεξεργασία Φωνής και Φυσικής Γλώσσας*

Εαρινό εξάμηνο 2022-2023

Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων

### Άσκηση 1

Θεωρήστε 2 χρονικά αμετάβλητα γραμμικά συστήματα, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, δηλαδή η έξοδος του πρώτου συστήματος είναι η είσοδος του δεύτερου.



1. Δείξτε οτι η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος είναι

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \quad (1)$$

2. Δείξτε οτι

$$h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n) \quad (2)$$

άρα η συνολική κρουστική απόκριση δεν εξαρτάται από την σειρά με την οποία εμφανίζονται τα συστήματα.

3. Θεωρείστε τη συνάρτηση

$$H(z) = \left( \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \right) \left( \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right) = H_1(z)H_2(z) \quad (3)$$

δηλαδή σαν σειρά δυο συστημάτων. Γράψτε τις εξισώσεις διαφορών του ολικού συστήματος από αυτήν την οπτική.

4. Τώρα θεωρείστε τα δυο συστήματα του ερωτήματος (3) με την ανάποδη σειρά, δηλαδή:

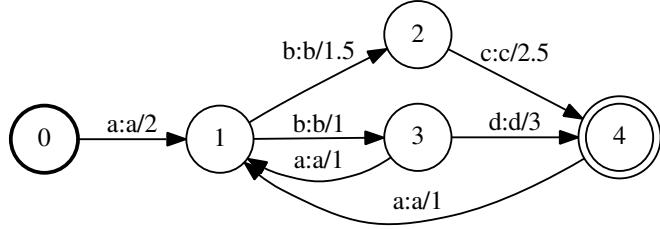
$$H(z) = H_2(z)H_1(z) \quad (4)$$

### Άσκηση 2

Για την μηχανή πεπερασμένης κατάστασης που ακολουθεί

1. Ποια είναι η κανονική έκφραση που αντιστοιχεί στην μηχανή ?
2. Ποια είναι η πιο πιθανή γραμματοσειρά που αποδέχεται η μηχανή εφόσον χρησιμοποιούμε τον τροπικό ημιδακτύλιο? ( tropical semiring collect operation is min, extend operation is +.) Σημείωση: το κόστος των (πιθανών) τελικών καταστάσεων συνυπολογίζεται μόνο εφόσον αυτή η κατάσταση είναι όντως τελική. Το κόστος μίας μη τελικής κατάστασης συνυπολογίζεται κάθε φορά που περνάμε από αυτήν. Το κόστος της κατάστασης 3 είναι 6 και της κατάστασης 4 είναι 0.

3. Ποιο είναι το κόστος της γραμματοσειράς
4. Ποια είναι η ισοδύναμη ντετερμινιστική μηχανή χωρίς κόστος?
5. Ποια είναι η ισοδύναμη ντετερμινιστική μηχανή με κόστος?



### Άσκηση 3

Δίδεται το εξής αλφάβητο  $\Sigma = \{ A, G, C, T, E, F \}$ .

1. Σχεδιάστε τον μετατροπέα (transducer) που υλοποιεί την απόσταση Levenshtein, δηλαδή  $d(x,x) = 0$  και  $d(x,\varepsilon) = d(\varepsilon,x) = d(x,y) = 1$  όπου  $x$  και  $y$  είναι διαφορετικά γράμματα του αλφαβήτου  $\Sigma$ .
2. Ποια είναι η καλύτερη (ποιο φτηνή) αντιστοίχηση ανάμεσα στις γραμματοσειρές AECAGEF και TETCGAG; Πώς χρησιμοποιήσατε το μετατροπέα από την ερώτηση (1)?
3. Ποια είναι η δεύτερη καλύτερη αντιστοιχία ανάμεσα στις γραμματοσειρές της ερώτησης (2)?

### Άσκηση 4

Θεωρήστε ένα all pole μοντέλο με συνάρτηση μεταφοράς της μορφής

$$V(z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^q (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})} \quad (5)$$

όπου

$$c_k = r_k e^{j\theta_k} \quad (6)$$

Δείξτε οτι το αντίστοιχο cepstrum είναι

$$\hat{v}(n) = 2 \sum_{k=1}^q \frac{(r_k)^n}{n} \cos(\theta_k n) \quad (7)$$

### Άσκηση 5

Θεωρήστε 2 πεπερασμένα σήματα φωνής  $x(n)$  και  $y(n)$ ,  $0 \leq n \leq N-1$  (με μηδενικές τιμές εκτός του παραθύρου ανάλυσης). Για LPC ανάλυση με την autocorrelation function μέθοδο χρειάζονται οι αυτοσυσχετίσεις

$$R_x(k) = \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k), \quad R_y(k) = \sum_{n=0}^{N-1-k} y(n)y(n+k) \quad (8)$$

οι οποίες με τη μέθοδο Levinson μας δίνουν τους αντίστοιχους βέλτιστους LPC συντελεστές

$$a_x = (a_{x0}, a_{x1}, \dots, a_{xp}), \quad a_y = (a_{y0}, a_{y1}, \dots, a_{yp}) \quad (9)$$

με  $a_{x0} = a_{y0} = -1$ .

1. Να αποδείξετε ότι η ενέργεια λάθους πρόβλεψης (για το  $x(n)$ ) ισούται με

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1+p} \left( \sum_{k=0}^p a_{xk} x(n-k) \right)^2 = a_x R_x a_x^T \quad (10)$$

όπου  $R_x$  είναι ένας  $(p+1) \times (p+1)$  πίνακας.

2. Αν κάνετε γραμμική πρόβλεψη του σήματος  $x(n)$  με τους βέλτιστους συντελεστές του σήματος  $y(n)$ , να αποδείξετε ότι η ενέργεια του νέου υβριδικού λάθους πρόβλεψης ισούται με

$$E_{xy} = \sum_{n=0}^{N-1+p} \left( \sum_{k=0}^p a_{yk} x(n-k) \right)^2 = a_y R_x a_y^T \quad (11)$$

3. Να βρείτε το πεδίο τιμών του λόγου  $E_{xy}/E_x$

## Άσκηση 6

Θεωρήστε σε μια ακολουθία φωνημάτων την μοντελοποίηση της εναλλαγής άφωνων (U=unvoiced) και έμφωνων (V=voiced) ήχων με ένα HMM μοντέλο (παραμέτρων  $\lambda$ ) 4 καταστάσεων με τις εξής πιθανότητες

	State 1	State 2	State 3	State 4
P(V)	0.5	0.8	0.25	0.2
P(U)	0.5	0.2	0.75	0.8

Υποθέτουμε τις ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης καταστάσεων

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.2 & 0.3 & 0.25 \\ 0.2 & 0.25 & 0.3 & 0.25 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.25 & 0.3 & 0.2 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (12)$$

και ίσες πιθανότητες αρχικής κατάστασης

$$\pi_i = 0.25, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (13)$$

Παρατηρούμε την ακολουθία  $O_1 O_2 O_3$ :

$$\mathbf{O} = (UVU) \quad (14)$$

1. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες

$$\delta_t(i) = \max_{q_1, q_2, q_3} P[q_1 q_2 q_3, O_1 O_2 O_3 | \lambda], \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (15)$$

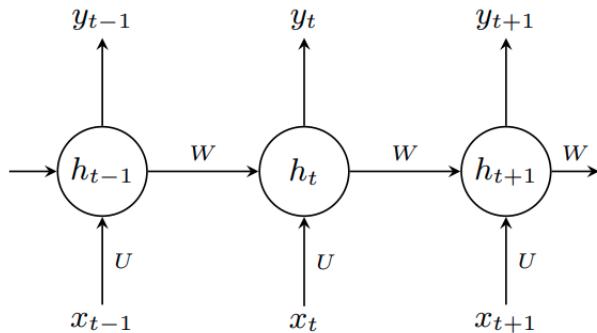
2. Να βρεθεί η πιο πιθανή ακολουθία καταστάσεων  $\mathbf{Q}^* = (q_1, q_2, q_3)$ .

3. Να υπολογισθεί η πιθανότητα  $P^* = (\mathbf{O}, \mathbf{Q}^* | \lambda)$

Για τα ερωτήματα (1) και (2) χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο Viterbi.

## Άσκηση 7

**Back propagation through time:** Σας δίνεται το ακόλουθο RNN



Κάθε κατάσταση  $h_t$  δίνεται από το ακόλουθο ζεύγος εξισώσεων

$$h_t = \sigma(W h_{t-1} + U x_t), \quad \sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

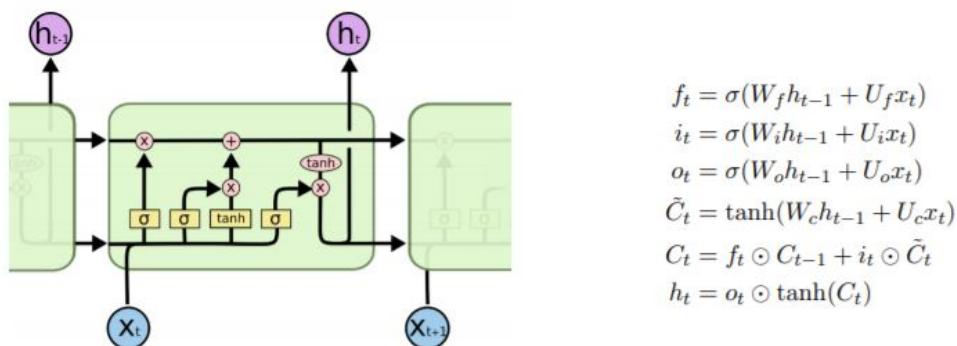
Έστω  $L$  η συνάρτηση σφάλματος, η οποία ορίζεται ως το άθροισμα πάνω σε όλα τα επιμέρους χρονικά σφάλματα  $L_t$  σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  μέχρι το χρονικό ορίζοντα  $T$ . Δηλαδή,  $L = \sum_{t=0}^T L_t$ , όπου το κάθε επιμέρους χρονικό σφάλμα εξαρτάται από την κατάσταση  $h_t$ .

Με βάση τα παραπάνω να εξάγετε την παράγωγο της συνάρτησης σφάλματος ως προς τον πίνακα βαρών  $W$ .

- a) Δοθέντος ότι  $y = \sigma(Wx)$  όπου  $y \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^d$  και  $W \in \mathbb{R}^{n \times d}$ . Δείξτε ότι για την Ιακωβιανή ισχύει  $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{diag}(\sigma')W \in \mathbb{R}^{n \times d}$
- b) Δείξτε ότι ισχύει  $\frac{\partial L}{\partial W} = \sum_{t=0}^T \sum_{k=1}^t \frac{\partial L_t}{\partial h_t} \frac{\partial h_t}{\partial h_k} \frac{\partial h_k}{\partial W}$

## Άσκηση 8

Μια αρχιτεκτονική αναδρομικών δικτύων που λύνει το πρόβλημα της εξαφάνισης ή έκρηξης παραγώγων (vanishing / exploding gradients) είναι τα δίκτυα Βραχέας-Μακράς Μνήμης (Long Short Term Memory networks - LSTM). Η αρχιτεκτονική και οι πράξεις που πραγματοποιεί το δίκτυο φαίνονται στην εικόνα (το σύμβολο  $\odot$  υποδηλώνει τον πολλαπλασιασμό στοιχείο προς στοιχείο - hadamard product):



- a) Διαβάστε αυτό το άρθρο και εξηγείστε εν συντομίᾳ το ρόλο των πυλών  $f_t$ ,  $i_t$  και  $o_t$

- b) Εξηγείστε ποιες από τις ποσότητες είναι πάντα θετικές (ή μηδέν)

Για να κατανοήσουμε το πώς προσεγγίζει το LSTM πρόβλημα εξαφάνισης παραγώγων χρειάζεται να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους  $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ , όπου  $\theta$  οι παράμετροι του δικτύου ( $W_f, W_o, W_i, W_c$ ). Στην περίπτωση του LSTM αντί για την κρυφή κατάσταση  $h_t$  ενδιαφερόμαστε για την κατάσταση κελιού  $C_t$ . Όπως και το  $h_t$  στα απλά RNN έτσι και το  $C_t$  εξαρτάται από προηγούμενες τιμές  $C_{t-1}, \dots, C_0$  και οδηγούμαστε σε μια απλοποιημένη εξίσωση της μορφής:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \sum_{t=0}^T \sum_{k=1}^t \frac{\partial L}{\partial C_t} \frac{\partial C_t}{\partial C_k} \frac{\partial C_k}{\partial W}$$

c) Η εξίσωση είναι απλοποιημένη, καθώς αγνοούμε τις εξαρτήσεις του  $C_t$  από τους όρους  $f_t, i_t, \tilde{C}_t$ . Μας ενδιαφέρει η εξάρτηση από αυτούς τους όρους για να μελετήσουμε το φαινόμενο εξαφάνισης παραγώγων; Γιατί;

d) Δεδομένου ότι:

$$\frac{\partial C_t}{\partial C_k} = \prod_{i=k+1}^t \frac{\partial C_i}{\partial C_{i-1}}$$

και αν θεωρήσετε ότι  $f_t = 1$  και  $i_t = 0$  υπολογίστε την ποσότητα  $\frac{\partial C_t}{\partial C_k}$ .

e) (Bonus) Δείξτε ότι στη γενική περίπτωση η αναδρομική σχέση είναι της μορφής

$$\frac{\partial C_t}{\partial C_{t-1}} = \sigma'() \cdot W_f \cdot \delta \odot C_{t-1} + f_t + \sigma'() \cdot W_i \cdot \delta \cdot \tilde{C}_t + i_t \odot \tanh'() \delta,$$

όπου  $\delta = o_{t-1} \odot \tanh'(C_{t-1})$ .

Γιατί εν τέλει είναι καλύτερο να χρησιμοποιούμε το cell state από το hidden state (σχετικά με τα vanishing gradients);

Hint: Θυμηθείτε τον κανόνα παραγώγησης γινομένων. Ισχύει και για το hadamard product:  $(x \odot f(x))' = x' \odot f(x) + x \odot f'(x)$

## Άσκηση 9

Δίνεται (ένα τμήμα) στατιστικής σημασιολογικής γραμματικής:

$S \rightarrow NP VP$	[0.80]
$NP \rightarrow Det Nom$	[0.20]
$NP \rightarrow ProperNoun$	[0.35]
$NP \rightarrow Nom$	[0.05]
$NP \rightarrow Pronoun$	[0.40]
$VP \rightarrow Verb$	[0.55]
$VP \rightarrow Verb NP$	[0.40]
$Verb \rightarrow want$	[0.40]
$Nom \rightarrow Noun$	[0.75]
$Pronoun \rightarrow I$	[0.60]
$Pronoun \rightarrow you$	[0.40]
$Det \rightarrow the$	[0.80]
$Det \rightarrow that$	[0.05]
$Noun \rightarrow flight$	[0.50]

$$P = 1 * 0.8 * 0.4 * 0.6 * 0.4 * 0.4 * 0.2 * 0.05 * 0.75 * 0.5$$

$$P = 1 * 0.8 * 0.4 * 0.4 * 0.4 * 0.4 * 0.2 * 0.05 * 0.75 * 0.5$$

1. Εξηγήστε αν η γραμματική αυτή είναι πλήρης ως προς τους κανόνες που έχουν αριστερά το σύμβολο S και ως προς τους κανόνες που έχουν αριστερά το σύμβολο NP.
2. Σχεδιάστε το συντακτικό δέντρο της πρότασης "I want that flight" σύμφωνα με την παραπάνω γραμματική. Είναι το δέντρο αυτό μοναδικό ή μήπως υπάρχει αμφισημία (ambiguity);
3. Ποιά είναι η πιθανότητα του δέντρου που σχεδιάσατε στο (β'); Ποιά είναι η πιθανότητα του συντακτικού δέντρου της πρότασης "you want that flight";