

Μη Γραμμική Δυναμική Συστημάτων & Ταλαντώσεις

7ο Εξάμηνο 2022 – 2023

Τελική Εργασία: Μελέτη των Discretizations του Bratu – Gelfand Problem

Ζαρίφης Στέλιος – el20435

The Bratu – Gelfand Problem

Το Bratu – Gelfand problem είναι ένα evolution problem, δηλαδή η ζητούμενη λύση $u(x, t)$ εξαρτάται τόσο από το χρόνο t , όσο και από τη θέση x . Ορίζεται ως εξής:

$$u_t = u_{xx} + ae^u, u(0, t) = u(1, t) = 0, \forall t, a \in \mathbb{R}$$

Discretization of Bratu – Gelfand PDE

Η ανάλυση γίνεται για να διερευνήσουμε πώς συμπεριφέρεται μια στατική λύση (δηλαδή όταν ισχύει $u_t = 0$) σχετικά με τη μεταβολή της παραμέτρου a . Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε την αριθμητική μέθοδο ονόματι finite – difference approximation με την οποία προσεγγίζουμε το συνεχές πρόβλημα με μία διακριτοποιημένη εκδοχή του κάνοντας χρήση πεπερασμένου αριθμού mesh points. Ειδικότερα, ένα πλέγμα (mesh) από ισαπέχοντα σημεία διακριτοποιεί το διάστημα $[0, 1]$ (στο οποίο υφίσταται η μεταβλητή x). Σε αυτά τα σημεία προσεγγίζονται οι παράγωγοι των λύσεων.

Ορίζουμε, λοιπόν, τα ομοιόμορφα κατανεμημένα σημεία του πλέγματος

$$x_k = kh, h = \frac{1}{N+1}, k = 0, 1, 2, \dots, N, N+1, N > 1$$

Και προσεγγίζουμε τη χωρική παράγωγο (αφού μελετάμε για $u_t = 0$) χρησιμοποιώντας τη centered finite difference formula ως εξής

$$\dot{u}_k(t) = \frac{u_{k-1}(t) - 2u_k(t) + u_{k+1}(t)}{h^2} + ae^{u_k(t)} = 0, k = 1, 2, \dots, N$$

Με οριακές συνθήκες

$$\begin{cases} u_0(t) = 0 \\ u_{N+1}(t) = 0 \end{cases}$$

Εισάγουμε τη νέα χρονική κλίμακα τ για την οποία ισχύει $t = h^2\tau$ και η μορφή του συστήματος γίνεται

$$\dot{u}_k(t) = u_{k-1}(t) - 2u_k(t) + u_{k+1}(t) + \lambda e^{u_k(t)} = 0, k = 1, 2, \dots, N$$

Όπου $\lambda = h^2a$

Ερώτημα Ε.1

Για $N = 2$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -2u_1 + u_2 + \lambda e^{u_1} \\ \dot{u}_2 = u_1 - 2u_2 + \lambda e^{u_2} \end{cases}$$

Χρησιμοποιούμε το MatCont του MATLAB και σχεδιάζουμε τη σχέση $u_1 - \lambda$ (παρατηρούμε ότι το σύστημα έχει \mathbb{Z}_2 symmetry, άρα bifurcations συμβαίνουν πάνω στον κλάδο των συμμετρικών λύσεων $u_1 = u_2$)

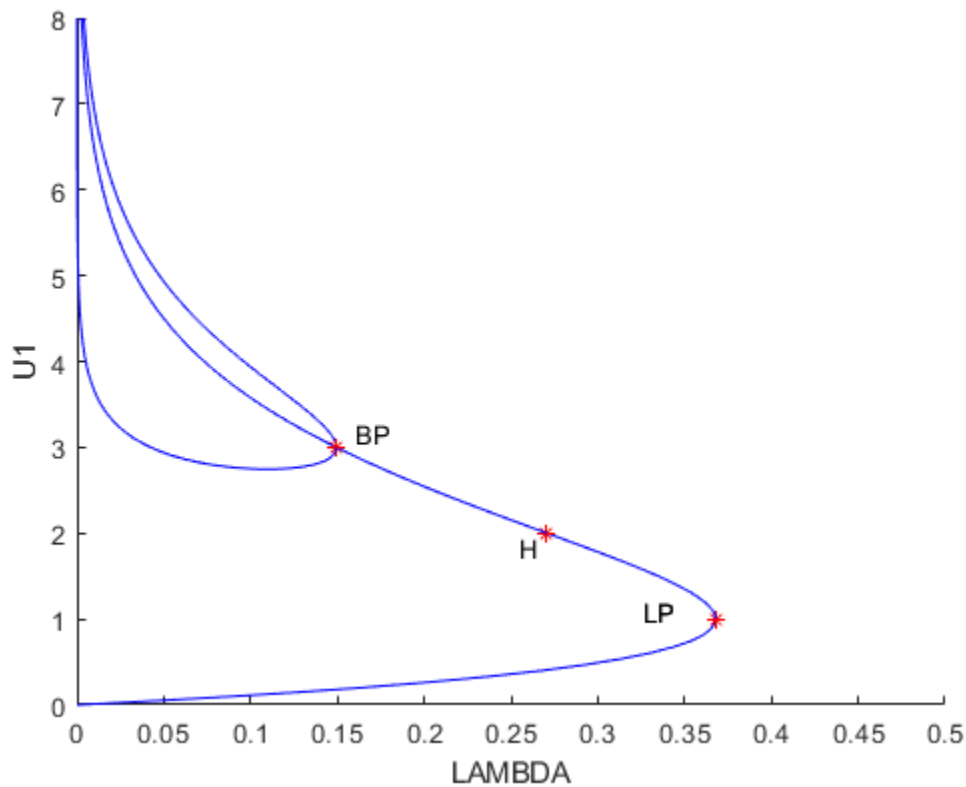


Figure 1: Με αριθμητικές μεθόδους σχεδιάζουμε τη σχέση λύσεων $u_1 = u_2$ με την παράμετρο λ

Συγκεκριμένα, βρήκαμε ότι:

1. Limit Point συμβαίνει όταν $u_1 = u_2 = 1, \lambda \cong 0.367879$
2. Hopf Bifurcation συμβαίνει όταν $u_1 = u_2 = 2, \lambda \cong 0.270671$
3. Branch Point συμβαίνει όταν $u_1 = u_2 = 3, \lambda \cong 0.149361$

Ας δούμε ότι και αναλυτικά καταλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα. Αρχικά βρίσκουμε τη συνθήκη για Σημεία Ισορροπίας εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία του προβλήματος. Σημεία Ισορροπίας θα υπάρχουν μόνο αν $u_1 = u_2 = u^*$. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 0 \\ \dot{u}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2u_1 + u_2 + \lambda e^{u_1} = 0 \\ u_1 - 2u_2 + \lambda e^{u_2} = 0 \end{cases} \xrightarrow{u_1=u_2=u^*} \begin{cases} -2u^* + u^* + \lambda e^{u^*} = 0 \\ u^* - 2u^* + \lambda e^{u^*} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = u^*/e^{u^*} \\ \lambda = u^*/e^{u^*} \end{cases} \quad (1)$$

Βρήκαμε μια σχέση της παραμέτρου λ με τα Σημεία Ισορροπίας. Τώρα μελετάμε γραμμικοποιώντας γύρω από τα Σημεία Ισορροπίας σχηματίζοντας την Ιακωβιανή του συστήματος

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \bigg|_{u_1=u_2=u^*} = \begin{bmatrix} -2 + \lambda e^{u^*} & 1 \\ 1 & -2 + \lambda e^{u^*} \end{bmatrix} \bigg|_{u_1=u_2=u^*} = \begin{bmatrix} -2 + \lambda e^{u^*} & 1 \\ 1 & -2 + \lambda e^{u^*} \end{bmatrix}$$

Η οποία έχει

$$\tau = \text{tr}(A) = -4 + 2\lambda e^{u^*}, \Delta = \det(A) = (-2 + \lambda e^{u^*})^2 - 1$$

Γνωρίζουμε πως bifurcation συμβαίνει όταν $\tau = 0$ ή $\Delta = 0$.

$$\begin{cases} \tau = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 + 2\lambda e^{u^*} = 0 \\ (-2 + \lambda e^{u^*})^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda e^{u^*} = 2 \\ (-2 + \lambda e^{u^*})^2 = 1 \Rightarrow \lambda e^{u^*} = 2 \pm 1 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε τη συνθήκη για το λ που βρήκαμε στην (1): $\lambda = u^*/e^{u^*}$

$$\begin{cases} \tau = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^* = 2 \\ u^* = 2 \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^* = 2 \\ u^* = 1 \\ u^* = 3 \end{cases}$$

Τέλος, υπολογίζουμε τις τιμές της παραμέτρου για καθένα από τα Σημεία Ισορροπίας

Για $u_1 = u_2 \in \{1, 2, 3\}$ έχουμε

$$u_1 = u_2 = 1: \Delta = 0 \text{ και } \lambda = u^*/e^{u^*} = 1/e^1 \cong 0.367879$$

$$u_1 = u_2 = 2: \tau = 0 \text{ και } \lambda = u^*/e^{u^*} = 2/e^2 \cong 0.270671$$

$$u_1 = u_2 = 3: \Delta = 0 \text{ και } \lambda = u^*/e^{u^*} = 3/e^3 \cong 0.149361$$

Βλέπουμε πως τα αναλυτικά αποτελέσματα συμπίπτουν με εκείνα της αριθμητικής ανάλυσης του MatCont!

Απαντώντας στο ζητούμενο, βρήκαμε αναλυτικά πως για $\lambda = \lambda_{BP} = 0.149361$ έχουμε Branch Point, όπως μας έδειξε και το MatCont του MATLAB.

Συμπερασματικά, στο Σημείο Ισορροπίας (3, 3) και για $\lambda = \lambda_{BP}$, παρατηρήσαμε ότι η Ιακωβιανή του συστήματος γίνεται Singular και ένας νέος κλάδος από steady state λύσεις δημιουργείται από τον ήδη υπάρχοντα.

Ερώτημα Ε.2

Για $N = 3$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -2u_1 + u_2 + \lambda e^{u_1} \\ \dot{u}_2 = u_1 - 2u_2 + u_3 + \lambda e^{u_2} \\ \dot{u}_3 = u_2 - 2u_3 + \lambda e^{u_3} \end{cases}$$

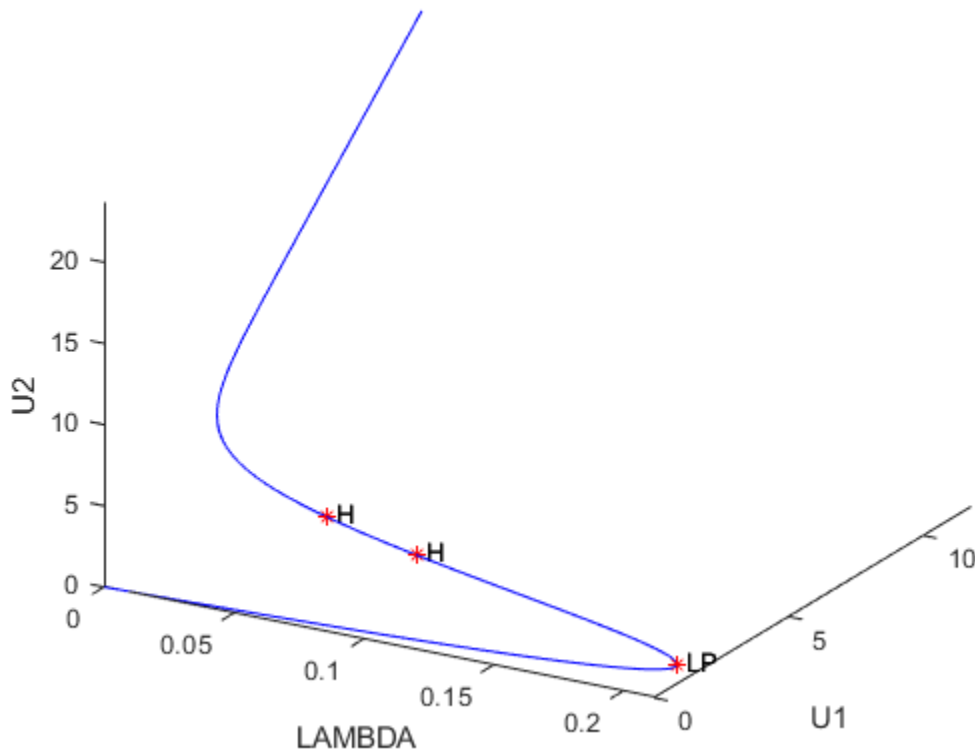


Figure 2: Προσέγγιση του προβλήματος Bratu – Gelfand για $N = 3$

Παρατηρούμε ότι στην προσέγγιση με $N = 3$ χάθηκε η πληροφορία για το Branch Point και βλέπουμε μια επιπλέον Hopf Bifurcation.

Για $N = 4$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -2u_1 + u_2 + \lambda e^{u_1} \\ \dot{u}_2 = u_1 - 2u_2 + u_3 + \lambda e^{u_2} \\ \dot{u}_3 = u_2 - 2u_3 + u_4 + \lambda e^{u_3} \\ \dot{u}_4 = u_3 - 2u_4 + \lambda e^{u_4} \end{cases}$$

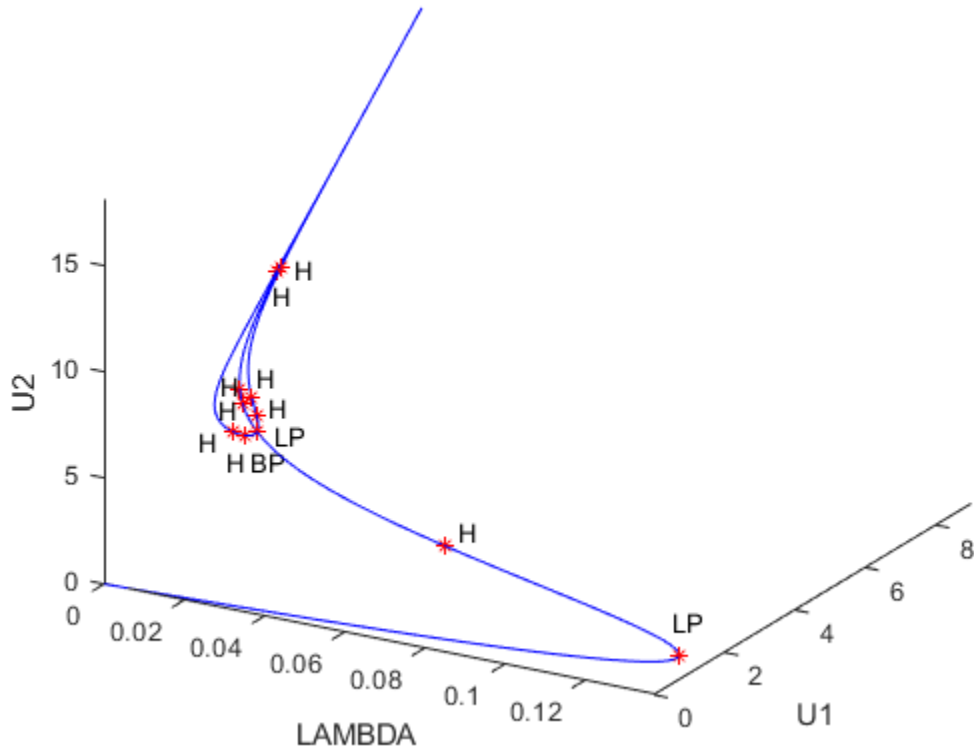


Figure 3: Προσέγγιση του προβλήματος Bratu – Gelfand για $N = 4$

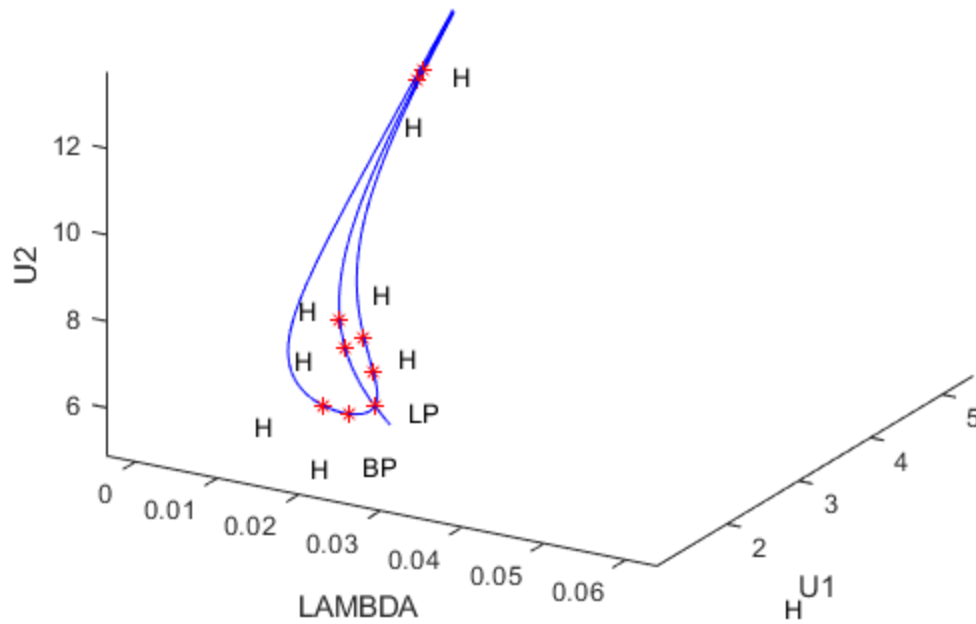


Figure 4: Μεγέθυνση της προσέγγισης για $N = 3$

Βλέπουμε ότι η πληροφορία για το Branch Point επανήλθε και όχι μόνο: Μάθαμε πως ο μη – συμμετρικός κλάδος έχει και πολλά Hopf Bifurcations! Συνεχίζουμε για μεγαλύτερες τιμές του N .

Για $N = 5$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -2u_1 + u_2 + \lambda e^{u_1} \\ \dot{u}_2 = u_1 - 2u_2 + u_3 + \lambda e^{u_2} \\ \dot{u}_3 = u_2 - 2u_3 + u_4 + \lambda e^{u_3} \\ \dot{u}_4 = u_3 - 2u_4 + u_5 + \lambda e^{u_4} \\ \dot{u}_5 = u_4 - 2u_5 + \lambda e^{u_5} \end{cases}$$

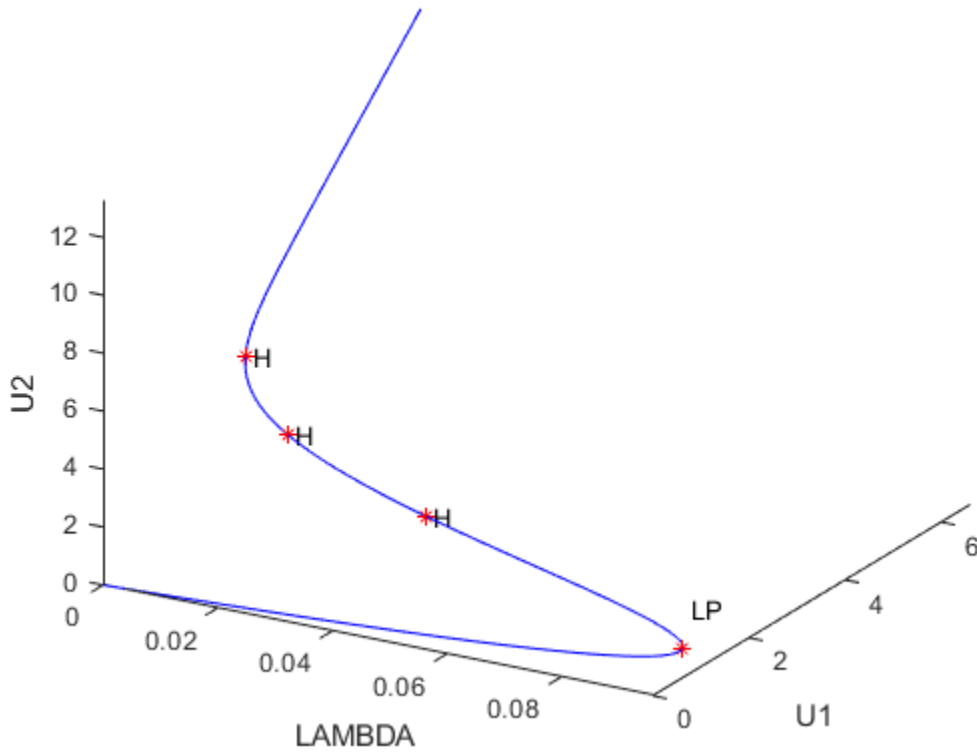


Figure 5: Προσέγγιση του προβλήματος Bratu – Gelfand για $N = 5$

Παρατηρούμε πως η πληροφορία για το Branch Point εξαφανίστηκε πάλι, όμως μάθαμε για την ύπαρξη μιας νέας Hopf Bifurcation. Αρχίζουμε να παρατηρούμε το μοτίβο... Σχεδιάζουμε και για $N = 6, 10$.

Για $N = 6$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -2u_1 + u_2 + \lambda e^{u_1} \\ \dot{u}_2 = u_1 - 2u_2 + u_3 + \lambda e^{u_2} \\ \dot{u}_3 = u_2 - 2u_3 + u_4 + \lambda e^{u_3} \\ \dot{u}_4 = u_3 - 2u_4 + u_5 + \lambda e^{u_4} \\ \dot{u}_5 = u_4 - 2u_5 + u_6 + \lambda e^{u_5} \\ \dot{u}_6 = u_5 - 2u_6 + \lambda e^{u_6} \end{cases}$$

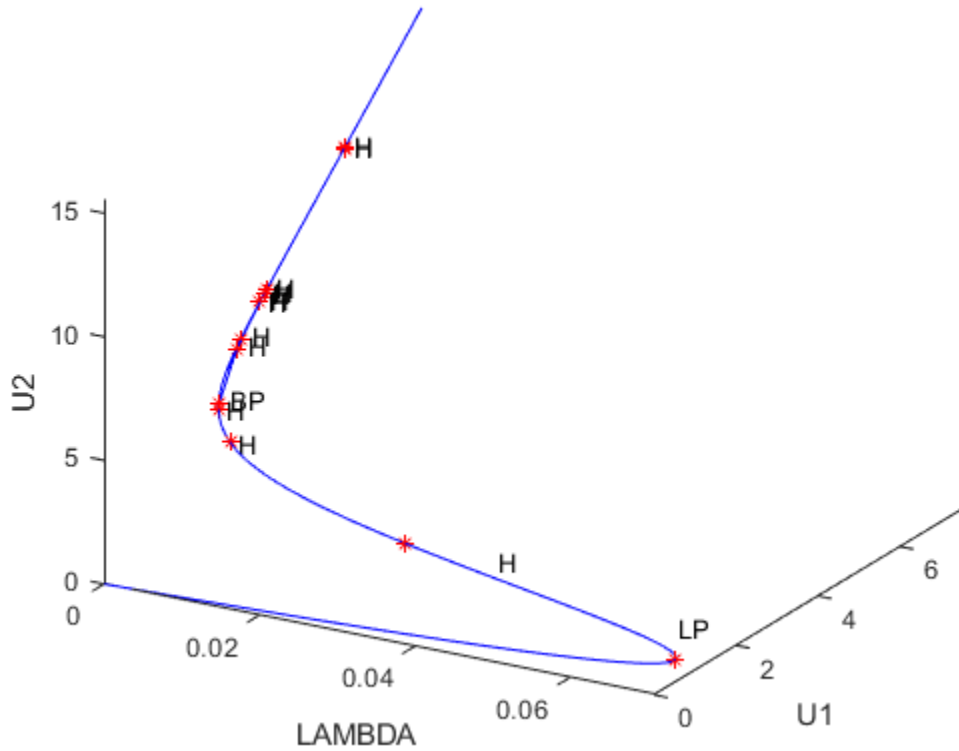


Figure 6: Προσέγγιση του προβλήματος Bratu – Gelfand για $N = 6$

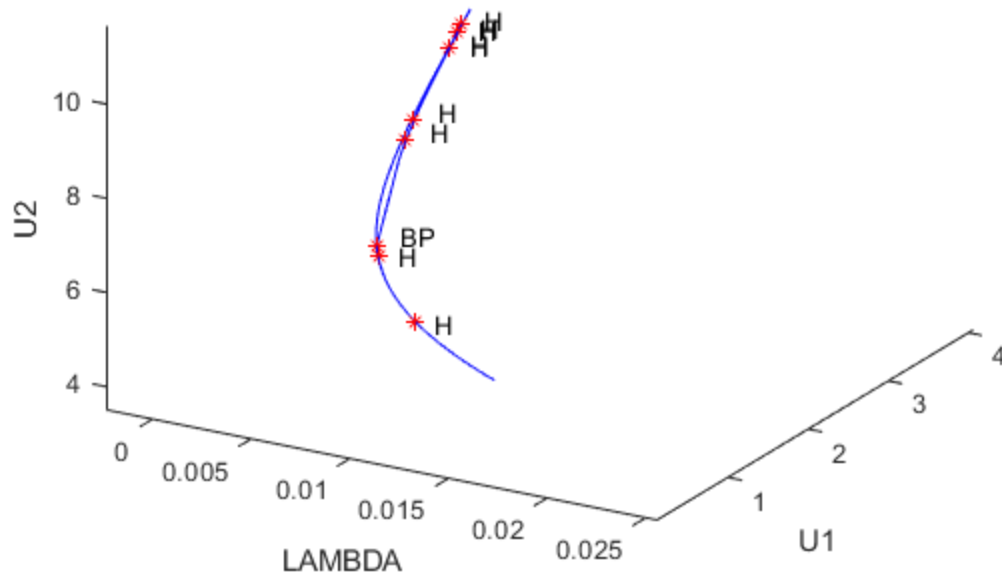


Figure 7: Μεγέθυνση της προσέγγισης για $N = 6$

Για μία ακόμα φορά παρατηρούμε πως ανακτήσαμε την πληροφορία για το Branch Point.

Τέλος, για $N = 10$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -2u_1 + u_2 + \lambda e^{u_1} \\ \dot{u}_2 = u_1 - 2u_2 + u_3 + \lambda e^{u_2} \\ \dot{u}_3 = u_2 - 2u_3 + u_4 + \lambda e^{u_3} \\ \dot{u}_4 = u_3 - 2u_4 + u_5 + \lambda e^{u_4} \\ \dot{u}_5 = u_4 - 2u_5 + u_6 + \lambda e^{u_5} \\ \dot{u}_6 = u_5 - 2u_6 + u_7 + \lambda e^{u_6} \\ \dot{u}_7 = u_6 - 2u_7 + u_8 + \lambda e^{u_7} \\ \dot{u}_8 = u_7 - 2u_8 + u_9 + \lambda e^{u_8} \\ \dot{u}_9 = u_8 - 2u_9 + u_{10} + \lambda e^{u_9} \\ \dot{u}_{10} = u_9 - 2u_{10} + \lambda e^{u_{10}} \end{cases}$$

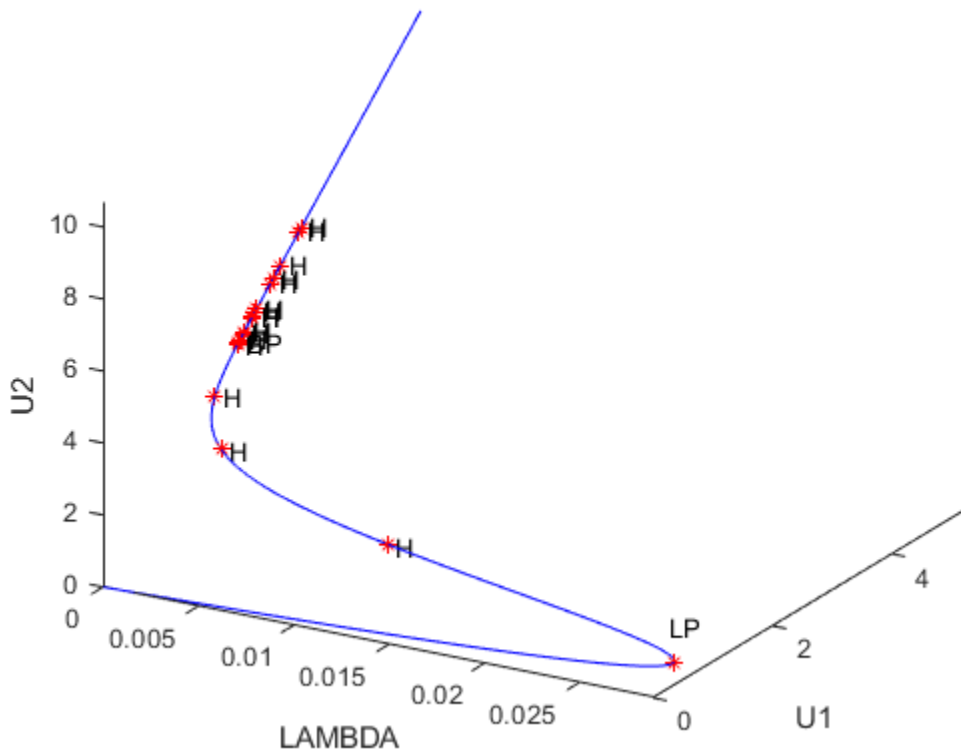


Figure 8: Προσέγγιση του προβλήματος Bratu – Gelfand για $N = 10$

Από την ανάλυση ως τώρα, παρατηρούμε ότι για άρτιο N εμφανίζεται το Branch Point ενώ για περιττό όχι. Επίσης βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται το N , εμφανίζονται περισσότερες Bifurcations.

Αυτό συμβαίνει διότι αυξάνοντας τα σημεία του πλέγματος, αυξάνεται η ακρίβεια της προσέγγισης της αριθμητικής ανάλυσης. Για το ζητούμενο, παρατηρούμε τα εξής:

Για $N = 2$:

$$\begin{cases} \lambda_{LP} \cong 0.367879 \Rightarrow a_{LP} = (N+1)^2 \lambda_{LP} \cong 3.310911 \\ \lambda_{BP} \cong 0.149361 \Rightarrow a_{BP} = (N+1)^2 \lambda_{BP} \cong 1.344249 \end{cases}$$

Για $N = 3$:

$$\begin{cases} \lambda_{LP} \cong 0.212319 \Rightarrow a_{LP} = (N+1)^2 \lambda_{LP} \cong 3.397104 \\ \lambda_{BP} = None \end{cases}$$

Για $N = 4$:

$$\begin{cases} \lambda_{LP} \cong 0.137592 \Rightarrow a_{LP} = (N+1)^2 \lambda_{LP} \cong 3.4398 \\ \lambda_{BP} \cong 0.014974 \Rightarrow a_{BP} = (N+1)^2 \lambda_{BP} \cong 0.37435 \end{cases}$$

Για $N = 5$:

$$\begin{cases} \lambda_{LP} \cong 0.096184 \Rightarrow a_{LP} = (N+1)^2 \lambda_{LP} \cong 3.462624 \\ \lambda_{BP} = None \end{cases}$$

Για $N = 6$:

$$\begin{cases} \lambda_{LP} \cong 0.070945 \Rightarrow a_{LP} = (N+1)^2 \lambda_{LP} \cong 3.476305 \\ \lambda_{BP} \cong 0.001797 \Rightarrow a_{BP} = (N+1)^2 \lambda_{BP} \cong 0.088053 \end{cases}$$

Για $N = 10$:

$$\begin{cases} \lambda_{LP} \cong 0.028915 \Rightarrow a_{LP} = (N+1)^2 \lambda_{LP} \cong 3.498715 \\ \lambda_{BP} \cong 3.366426e-5 \Rightarrow a_{BP} = (N+1)^2 \lambda_{BP} \cong 0.004073 \end{cases}$$

Βλέπουμε πως το α για τα Limit Points προσεγγίζει μια μη μηδενική τιμή ενώ για τα Branch Points προσεγγίζει αρκετά γρήγορα το 0.