ΟΡΑΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

8ο Εξάμηνο 2022 – 2023

Assignment 2 – Solutions

Ζαρίφης Στέλιος – el20435 Email: el20435@mail.ntua.gr

Contents

Άσκηση 2.1

Έστω η scale – space συνάρτηση $u(x, y, t)$ που προκύπτει ως λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (και ισχύει $\|\nabla u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \|\nabla u\| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right) = \|\nabla u\| \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\|\nabla u\|}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\|\nabla u\|}\right)\right) =$$

$$= \|\nabla u\| \left(\frac{u_{xx}\|\nabla u\| - u_x \dfrac{u_x u_{xx} + u_y u_{xy}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}}{\|\nabla u\|^2} + \frac{u_{yy}\|\nabla u\| - u_y \dfrac{u_x u_{xy} + u_y u_{yy}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}}{\|\nabla u\|^2} \right) =$$

$$= \frac{u_{xx}\sqrt{u_x^2 + u_y^2} - u_x \dfrac{u_x u_{xx} + u_y u_{xy}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} + \frac{u_{yy}\sqrt{u_x^2 + u_y^2} - u_y \dfrac{u_x u_{xy} + u_y u_{yy}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} =$$

$$= \frac{u_{xx}(u_x^2 + u_y^2) - u_x(u_x u_{xx} + u_y u_{xy})}{u_x^2 + u_y^2} + \frac{u_{yy}(u_x^2 + u_y^2) - u_y(u_x u_{xy} + u_y u_{yy})}{u_x^2 + u_y^2} =$$

$$= \frac{u_{xx}u_x^2 + u_{xx}u_y^2 - u_x^2 u_{xx} - u_x u_y u_{xy} + u_{yy}u_x^2 + u_{yy}u_y^2 - u_y u_x u_{xy} - u_y^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} =$$

$$= \frac{u_{xx}u_y^2 + u_{yy}u_x^2 - 2u_y u_x u_{xy}}{u_x^2 + u_y^2}$$

Για το μοναδιαίο προς την ∇u διάνυσμα ξ, έχουμε:

$$\xi = \left(\frac{u_y}{\|\nabla u\|}, \frac{-u_x}{\|\nabla u\|}\right) = (\xi_1, \xi_2)$$

Η δεύτερη κατευθυντική παράγωγος του u ως προς το ξ είναι:

$$D_\xi^2 u = [\xi_1 \quad \xi_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \xi_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \xi_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} \quad (1)$$

Όμως το $\partial u/\partial t$ γράφεται:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{xx}u_y^2 + u_{yy}u_x^2 - 2u_y u_x u_{xy}}{u_x^2 + u_y^2} = u_{xx}\frac{u_y^2}{u_x^2 + u_y^2} + u_{yy}\frac{u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} - 2u_{xy}\frac{u_y u_x}{u_x^2 + u_y^2}$$
$$= u_{xx}\xi_1^2 + u_{yy}\xi_2^2 + 2u_{xy}\xi_1\xi_2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις $(1, 2)$, αφού τα δεύτερα μέλη είναι ίσα, έχουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_\xi^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

Άσκηση 2.2

Έστω η αρχική καμπύλη $\vec{C}(p) = \big(x(p), y(p)\big)$, με καμπυλότητα:

$$\kappa(p) = \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}, x' = dx/dp, y' = dy/dp$$

Ερώτημα a

Μετά από περιστροφή της καμπύλης κατά γωνία θ, έχουμε τη νέα καμπύλη

$$\vec{C}_2(t) = \big(x_2(t), y_2(t)\big), \begin{cases} x_2(t) = \cos\theta\, x(t) - \sin\theta\, y(t) \\ y_2(t) = \sin\theta\, x(t) + \cos\theta\, y(t) \end{cases}$$

Για τις 2 καμπύλες, έχουμε ταχύτητες:

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = (x', y') \Rightarrow v = \left\| \frac{d\vec{C}}{dt} \right\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$
$$\frac{d\vec{C}_2}{dt} = (x_2', y_2') = (\cos\theta\, x' - \sin\theta\, y', \sin\theta\, x' + \cos\theta\, y') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_2 = \left\| \frac{d\vec{C}_2}{dt} \right\| = \sqrt{(\cos\theta\, x' - \sin\theta\, y')^2 + (\sin\theta\, x' + \cos\theta\, y')^2} =$$
$$= \sqrt{\cos^2\theta\,(x')^2 + \sin^2\theta\,(y')^2 - 2\cos\theta\sin\theta\, x'y' + \sin^2\theta\,(x')^2 + \cos^2\theta\,(y')^2 + 2\sin\theta\cos\theta\, x'y'}$$
$$= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = v$$

Για τις 2 καμπύλες, έχουμε γωνίες εφαπτομένων:

$$\theta = \arg\frac{d\vec{C}}{dt} = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right), \theta_2 = \arg\frac{d\vec{C}_2}{dt} = \arctan\left(\frac{y_2'}{x_2'}\right)$$

Οπότε έχουμε καμπυλότητες αντίστοιχα:

$$\kappa(p) = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\theta'}{v} = \frac{x'y'' - x''y'}{v^3}$$
$$\kappa_2(p) = \frac{d\theta_2}{ds_2} = \frac{d\theta_2}{dt}\frac{dt}{ds_2} = \frac{\theta_2'}{v_2} = \frac{x_2'y_2'' - x_2''y_2'}{v_2^3} =$$
$$= \frac{(\cos\theta\, x' - \sin\theta\, y')(\sin\theta\, x'' + \cos\theta\, y'') - (\cos\theta\, x'' - \sin\theta\, y'')(\sin\theta\, x' + \cos\theta\, y')}{v^3} =$$

Ο αριθμητής γίνεται:

$$\cos\theta\, x' \sin\theta\, x'' + \cos^2\theta\, x'y'' - \sin^2\theta\, y'x'' - \sin\theta\, y' \cos\theta\, y'' -$$
$$-(\cos\theta\, x'' \sin\theta\, x' + \cos^2\theta\, x''y' - \sin^2\theta\, y''x' - \sin\theta\, y'' \cos\theta\, y') =$$
$$= \cos^2\theta\, x'y'' - \sin^2\theta\, y'x'' - \cos^2\theta\, x''y' + \sin^2\theta\, y''x' = y''x' - x''y'$$

Άρα:

$$\kappa_2(p) = \frac{y''x' - x''y'}{v^3} = \kappa(p)$$

Συμπεραίνουμε πως η καμπυλότητα δε μεταβάλλεται κατά την περιστροφή.

Ερώτημα β

Μετά από μετατόπιση της καμπύλης κατά διάνυσμα (v_1, v_2), έχουμε τη νέα καμπύλη

$$\vec{C}_2(t) = \big(x_2(t), y_2(t)\big), \begin{cases} x_2(t) = x(t) + v_1 \\ y_2(t) = y(t) + v_2 \end{cases}$$

Για τις 2 καμπύλες, έχουμε πάλι τις ταχύτητες:

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = (x', y') \Rightarrow v = \left\|\frac{d\vec{C}}{dt}\right\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$
$$\frac{d\vec{C}_2}{dt} = (x_2', y_2') = (x', y') = \frac{d\vec{C}}{dt} \Rightarrow v_2 = v$$

Για τις 2 καμπύλες, έχουμε γωνίες εφαπτομένων:

$$\theta = \arg\frac{d\vec{C}}{dt} = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right), \theta_2 = \arg\frac{d\vec{C}_2}{dt} = \arctan\left(\frac{y_2'}{x_2'}\right) = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) = \theta$$

Οπότε έχουμε ίδιες καμπυλότητες:

$$\kappa(p) = \frac{d\theta}{ds}$$
$$\kappa_2(p) = \frac{d\theta_2}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \kappa(p)$$

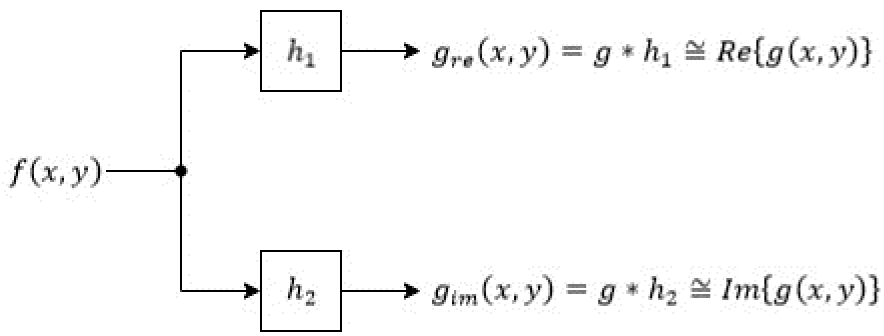
Συμπεραίνουμε πως η καμπυλότητα δε μεταβάλλεται ούτε κατά την παράλληλη μετατόπιση.

Άσκηση 2.3

Οι συνιστώσες υφής μοντελοποιούνται ως $g(x,y) = a(x,y)\exp\big(j\varphi(x,y)\big)$. Περνώντας αυτό το σήμα από τα φίλτρα $h_1(x,y) = G_\sigma(x,y)\cos(ux+vy)$, $h_2(x,y) = G_\sigma(x,y)\sin(ux+vy)$, έχουμε εξόδους:

$$\begin{cases} g_{re}(x,y) = g * h_1 \cong Re\{g(x,y)\} \\ g_{im}(x,y) = g * h_2 \cong Im\{g(x,y)\} \end{cases}$$

Κάναμε την παραδοχή ότι τα σήματα g_{re}, g_{im} προσεγγίζουν καλά το πραγματικό και φανταστικό μέρος της συνιστώσας υφής g. Το σύστημα φαίνεται εδώ:



Από το άνω σύστημα, μπορούμε να εξάγουμε το πλάτος και τη συχνότητα:

$$\begin{cases} a(x,y) = \sqrt{(Re\{g\})^2 + (Im\{g\})^2} \cong \sqrt{(g_1)^2 + (g_2)^2} \\ \varphi(x,y) = Arctan(Im\{g\}/Re\{g\}) \cong Arctan(g_2/g_1) \end{cases}$$

Και το διάνυσμα των στιγμιαίων χωρικών συχνοτήτων:

$$\nabla\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.4

Έστω η παραμετροποίηση μιας κλειστής ομαλής επίπεδης καμπύλης:

$$\vec{C}(p,t) = [x(p,t), y(p,t)]$$

Που εξελίσσεται βάσει της διαφορικής εξίσωσης κίνησης:

$$\frac{\partial \vec{C}(p,t)}{\partial t} = -\kappa \vec{N}_o(p,t)$$

Το μήκος της καμπύλης δίνεται από τη σχέση:

$$L(\vec{C}) = \int_0^1 F(p,x,y,x',y')dp = \int_0^1 F(x',y')dp = \int_0^1 \sqrt{x_p^2 + y_p^2}dp$$

Η ιδέα είναι να να κάνουμε Gradient Descend χρησιμοποιώντας την παράγωγο Euler:

$$\frac{\delta \vec{C}(p,t)}{\delta t} = -[F]_{\vec{C}} = \begin{bmatrix} F_x - \dfrac{dF_{x'}}{dp} \\ F_y - \dfrac{dF_{y'}}{dp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{x_p}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}\right) \\ 0 - \dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{y_p}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{x_{pp}\sqrt{x_p^2 + y_p^2} - x_p \dfrac{x_p x_{pp} + y_p y_{pp}}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}}{x_p^2 + y_p^2} \\ \dfrac{y_{pp}\sqrt{x_p^2 + y_p^2} - y_p \dfrac{x_p x_{pp} + y_p y_{pp}}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}}{x_p^2 + y_p^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_{pp}(x_p^2 + y_p^2) - x_p(x_p x_{pp} + y_p y_{pp})}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} \\ \dfrac{y_{pp}(x_p^2 + y_p^2) - y_p(x_p x_{pp} + y_p y_{pp})}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{x_{pp}y_p^2 - x_p y_p y_{pp}}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} \\ \dfrac{y_{pp}x_p^2 - x_p y_p x_{pp}}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_p \dfrac{x_{pp}y_p - x_p y_{pp}}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} \\ x_p \dfrac{y_{pp}x_p - y_p x_{pp}}{(x_p^2 + y_p^2)^{3/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_p \kappa(p) \\ -x_p \kappa(p) \end{bmatrix} = \kappa(p) \begin{bmatrix} y_p \\ -x_p \end{bmatrix}$$

Αν, λοιπόν, $\vec{C}(p,t) = (x(p,t), y(p,t))$ είναι η εξελισσόμενη καμπύλη και $\vec{C}(p,0)$ η αρχική της κατάσταση, το $\vec{C}_t = -[F]_{\vec{C}}$ θα αντιστοιχεί στο:

$$\vec{C}_t = -\kappa \vec{N}_0, \vec{N}_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{y_p}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}} \\ \dfrac{-x_p}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2.5

Το σημείο $(X, Y, Z)^T$, κινείται στο χώρο με ταχύτητα $(U, V, W)^T$ ξεκινώντας από το σημείο $(X_0, Y_0, Z_0)^T$. Άρα η εξίσωση κίνησής του στο χώρο είναι:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} t, t \geq 0$$

Η προβολή του σημείου στην εικόνα θα έχει συντεταγμένες x, y τέτοιες ώστε:

$$x = f\frac{X}{Z} = f\frac{X_0 + Ut}{Z_0 + Wt}, y = f\frac{Y}{Z} = f\frac{Y_0 + Vt}{Z_0 + Wt} \quad (1)$$

Στο προβολικό επίπεδο, αν το $(x, y, 1)$ ανήκει σε μια ευθεία (a, b, c), θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις που βρήκαμε πριν (1), έχουμε:

$$\begin{aligned} & ax + by + c = 0 \Rightarrow af\frac{X_0 + Ut}{Z_0 + Wt} + bf\frac{Y_0 + Vt}{Z_0 + Wt} + c = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow af(X_0 + Ut) + bf(Y_0 + Vt) + c(Z_0 + Wt) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Για να ισχύει η (2) για κάθε t, θα πρέπει:

$$\begin{cases} afX_0 + bfY_0 + cZ_0 = 0 \\ afUt + bfVt + cWt = 0 \end{cases}$$

Και προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} fX_0 & fY_0 & Z_0 \\ fU & fV & W \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

Το οποίο έχει άπειρες λύσεις (a, b, c), με εξάρτηση από μία παράμετρο. Οι λύσεις είναι της μορφής:

$$r \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή οι συντελεστές της ευθείας θα είναι πολλαπλάσια των συντελεστών της αρχικής ευθείας που υποθέσαμε. Άρα, όλα τα σημεία προβάλονται στην ίδια ευθεία, δηλαδή το σημείο προβολής κινείται κατά μήκος ευθείας στην εικόνα, καθώς αυξάνει το t.

Άσκηση 2.6

Ερώτημα α

Έστω η γενική αναπαράσταση μιας κωνικής τομής:

$$C = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$$

Μετά τον αφινικό μετασχηματισμό της, παίρνουμε:

$$C' = H^{-T}CH^{-1} = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \boldsymbol{p}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Για την ορίζουσα της τελευταίας μορφής (λόγω των θέσεων των μηδενικών), έχουμε:

$$\det(C') = \det\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \boldsymbol{p}^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\det\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 (ac - b^2/4)$$

Από την ορίζουσα μπορούμε να αποφανθούμε τι μορφή θα έχει η νέα καμπύλη:

$$\det(C') \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow ac < b^2/4 \colon \upsilon\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta} \\ = 0 \Leftrightarrow ac = b^2/4 \colon \pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta} \\ > 0 \Leftrightarrow ac > b^2/4 \colon \acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\eta \end{cases}$$

Για το ζητούμενο, ο κύκλος, έχει τιμές παραμέτρων: $a = c = 1 \; \kappa\alpha\iota \; b = 0$

Συνεπώς έχουμε $\det(C') = \left(\det\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^2 (ac - b^2/4) > 0$, άρα ο μετασχηματισμός του κύκλου είναι έλλειψη. Ακόμα, αν το C ήταν έλλειψη, θα ίσχυε $\det(C) > 0 \Rightarrow ac - b^2/4 > 0$, άρα από τις σχέσεις που βρήκαμε θα ήταν επίσης $\det(C') > 0$, οπότε, γενικά, μια έλλειψη μετασχηματίζεται αφινικά μόνο σε έλλειψη, ποτέ υπερβολή ή παραβολή!

Ερώτημα β

Έστω τα σημεία $A = (a_1, a_2, 1)$ και $B = (b_1, b_2, 1)$ που ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα και οι αφινικοί μετασχηματισμοί τους $A' = (\alpha_1', \alpha_2', 1)$ και $B' = (b_1', b_2', 1)$. Οι σχέσεις που συνδέουν τα A, B με τα A', B', προέρχονται από το μετασχηματισμό και είναι:

$$\begin{aligned} a_1' &= c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13} \cdot 1 \\ a_2' &= c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23} \cdot 1 \\ b_1' &= c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + c_{13} \cdot 1 \\ b_2' &= c_{21}b_1 + c_{22}b_2 + c_{23} \cdot 1 \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε:

$$b_1' - a_1' = c_{11}(b_1 - a_1) + c_{12}(b_2 - a_2)$$
$$b_2' - a_2' = c_{21}(b_1 - a_1) + c_{22}(b_2 - a_2)$$

Ακόμα, έχουμε:

$$\frac{(A'B')^2}{(AB)^2} = \frac{(b_1' - a_1')^2 + (b_2' - a_2')^2}{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} =$$
$$= \frac{(c_{11}^2 + c_{21}^2)(b_1 - a_1)^2 + (c_{12}^2 + c_{22}^2)(b_2 - a_2)^2 + 2(c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22})(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Θεωρούμε τη μη τετριμένη περίπτωση, δηλαδή $b_1 \neq a_1$ και διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με $(b_1 - a_1)^2$:

$$\frac{(A'B')^2}{(AB)^2} = \frac{(c_{11}^2 + c_{21}^2) + (c_{12}^2 + c_{22}^2)\frac{(b_2 - a_2)^2}{(b_1 - a_1)^2} + 2(c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22})\frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)}}{1 + \frac{(b_2 - a_2)^2}{(b_1 - a_1)^2}}$$

Όμως, ο λόγος των τετραγώνων (για να μην μπλέξουμε με ριζικά) των αποστάσεων των σημείων βλέπουμε πως εξαρτάται αποκλειστικά από τους συντελεστές του αφινικού μετασχηματισμού και την κλίση των αρχικών ευθύγραμμων τμημάτων: $(b_2 - a_2)/(b_1 - a_1)$. Συνεπώς, αν τα αρχικά ευθύγραμμα τμήματα είναι παράλληλα, δηλαδή ο λόγος $(b_2 - a_2)/(b_1 - a_1)$ είναι σταθερός, τότε και τα μετασχηματισμένα ευθύγραμμα τμήματα θα έχουν σταθερό λόγο μηκών.

Αντίστροφα, αν τα αρχικά ευθύγραμμα τμήματα δεν είναι παράλληλα, τότε τα μετασχηματισμένα δε θα έχουν σταθερό λόγο μηκών.

Ερώτημα γ

Έστω C το δεξί null – vector του P και έστω η ευθεία που διέρχεται από το C και από κάποιο άλλο σημείο A. Τα σημεία X αυτής της ευθείας περιγράφονται από την εξίσωση $X = \lambda A + (1 - \lambda)C$. Η προβολή τους μέσω του πίνακα της κάμερας είναι:

$$x = PX = \lambda PA + (1 - \lambda)PC = \lambda PA + 0 = \lambda PA$$

Συνεπώς, το C είναι η ομογενής αναπαράσταση του κέντρου της κάμερας, αφού για κάθε σημείο A το X είναι μια ευθεία που διέρχεται από αυτό και το C.

Για την κάμερα έχουμε:

$$P = [M|\boldsymbol{p}_4], C = (c_1, c_2, c_3, h)^T$$

Είναι λοιπόν:

$$PC = 0 \Rightarrow [M|\boldsymbol{p}_4]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ h \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow M\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{p}_4 h = 0 \Rightarrow M\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{p}_4 h = 0$$

Αν η κάμερα είναι πεπερασμένη, μπορούμε να θέσουμε $h = 1$ (αυθαίρετα λόγω ομογενών συντεταγμένων) και έχουμε για τη θέση $(c_1, c_2, c_3)^T$ της κάμερας:

$$M\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{p}_4 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = -M^{-1}\boldsymbol{p}_4, \acute{\alpha}\rho\alpha\ C = \begin{bmatrix} -M^{-1}\boldsymbol{p}_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αν η κάμερα είναι στο άπειρο, έχουμε $h = 0$ (γιατί έτσι αναπαρίστανται τα σημεία στο «άπειρο» με ομογενείς συντεταγμένες) και έχουμε για τη θέση $(c_1, c_2, c_3)^T$ της κάμερας τη σχέση:

$$[M|\boldsymbol{p}_4]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow M\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0$$

Τέλος, έστω ο πίνακας

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 6 & -1 \\ 10 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [M|\boldsymbol{p}_4] \Rightarrow \det M = 0$$

Άρα, αφού δεν ορίζεται ο αντίστροφος του M, το κέντρο της κάμερας είναι στο άπειρο, δηλαδή έχουμε:

$$C = (c_1, c_2, c_3, 0)^T$$

Οπότε, όπως δείξαμε και προηγουμένως:

$$MC = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 6 \\ 10 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \\ 7c_1 + 4c_2 + 6c_3 = 0 \\ 10c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5c_1 = c_2 \\ c_3 = -9c_1/2 \\ c_1 = \lambda\ (\alpha\upsilon\theta\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\tau\alpha) \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 5\lambda \\ -9\lambda/2 \end{bmatrix}$$

Ερώτημα δ

Έστω σημείο X στο επίπεδο που αναπαρίσταται από το P^{1T}. Είναι:

$$P^{1T}X = 0 \Rightarrow PX = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Που σημαίνει ότι τα σημεία X προβάλλονται στον άξονα y.

Ομοίως, έστω σημείο X στο επίπεδο που αναπαρίσταται από το P^{2T}. Είναι:

$$P^{2T}X = 0 \Rightarrow PX = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

Που σημαίνει ότι τα σημεία X προβάλλονται στον άξονα x.

Ακόμα είναι:

$$PC = 0 \Rightarrow \begin{cases} P^{1T}C = 0 \\ P^{2T}C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C\ ανήκει\ στο\ επίπεδο\ P^{1T} \\ C\ ανήκει\ στο\ επίπεδο\ P^{2T} \end{cases}$$

Άρα τα P^{1T}, P^{2T} διέρχονται από το C! Τα 2 σκέλη του ζητουμένου αποδείχθηκαν.

Ερώτημα ε

Οι συντεταγμένες της εικόνας είναι κανονικοποιημένες και οι κύριοι άξονες των καμερών τέμνονται στο σημείο X. Αυτό σημαίνει πως για κάθε κάμερα, το X προβάλεται στο $(0,0)^T$. Έχουμε, λοιπόν:

$$x^T F x' = 0 \xRightarrow{x=x'=(0,0,z_{1,2})} \begin{bmatrix} 0 & 0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow z_1 z_2 F_{33} = 0 \Rightarrow F_{33} = 0$$

Άσκηση 2.7

Ερώτημα a

Εκτελούμε τον two – pass forward – backward αλγόριθμο chamfer χρησιμοποιώντας απόσταση cityblock για να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό απόστασης $DT(X)$. Τα αποτελέσματα φαίνονται εδώ:

Η αρχικοποίηση (u_0):

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Μετά το πρώτο πέρασμα (u_1):

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0
0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	0
0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	0
0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Μετά το δεύτερο πέρασμα (u_2):

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	3	3	3	2	1	0
0	1	2	2	2	3	2	2	2	1	0
0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ερώτημα b

Εκτελούμε τις πράξεις των συνόλων και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

	$n=0$									$n=1$									$n=2$								
$X \ominus nB$	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	●	●	●	●	●	○	○
	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○
	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$S_n(X)$	●	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○
	●	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$\bigcup_{k\geq n} S_k$	●	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	●	●	●	●	●	○	○	○	○	●	●	●	●	●	○	○	○	○	●	●	●	●	●	○	○
	○	●	○	○	●	○	○	●	○	○	●	○	○	●	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○
	●	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$X \circ nB$	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	●	●	●	●	●	○	○
	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	●	○
	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	●	○
	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○	●	●	●	●	●	○	○
	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

Ερώτημα c

Μπορούμε για κάθε στοιχείο του μετασχηματισμού απόστασης να κοιτάξουμε τα τοπικά μέγιστα σε γειτονιές B:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	3	3	3	2	1	0
0	1	2	2	2	3	2	2	2	1	0
0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Βλέπουμε ότι οι θέσεις των τοπικών μεγίστων σε γειτονιές B ταυτίζονται με τα σημεία του σκελετού που βρήκαμε!