# ΟΡΑΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

## 8ο Εξάμηνο 2022 – 2023

## Assignment 1 – Solutions

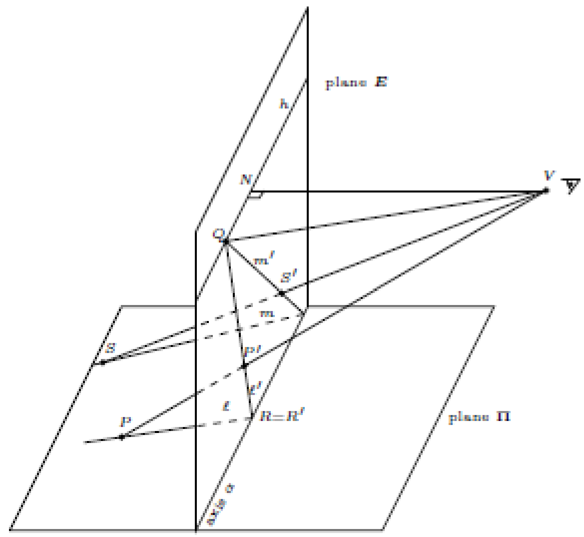
**Ζαρίφης Στέλιος – el20435** Email: el20435@mail.ntua.gr

Όλες οι εικόνες που χρησιμοποιήθηκαν είναι από το βιβλίο του κ. Μαραγκού στο site του μαθήματος.

## Contents

# Άσκηση 1.1

## Exercise 2.6




(α') (α)

### Question a

Για την ευθεία $l$ θεωρούμε αρχικά τα σημεία $P, R, P'$. Γενικά γνωρίζουμε ότι 2 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα κάνουν span ένα επίπεδο. Στην περίπτωσή μας, επειδή τα σημεία $P, R, P'$ σχηματίζουν ένα τρίγωνο (καθώς ανήκουν ανά ζεύγη σε 3 τεμνόμενες ευθείες), εύκολα βλέπουμε ότι $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP'} = \overrightarrow{PP'}$, δηλαδή το $\overrightarrow{PP'}$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{PR}$ και $\overrightarrow{RP'}$ και άρα βρίσκεται στο επίπεδο που κάνουν span τα 2 αυτά διανύσματα. Να σημειώσουμε εδώ ότι τα $\overrightarrow{PR}$ και $\overrightarrow{RP'}$ είναι οπωσδήποτε γραμμικώς ανεξάρτητα αφού ανήκουν σε κάθετα επίπεδα μεταξύ των. Επομένως, οι ευθείες $l, l', PV$ που αντιστοιχούν στα $\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{RP'}, \overrightarrow{PP'}$ είναι συνεπίπεδες. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι και οι ευθείες $m, m', SV$ είναι συνεπίπεδες.

Αφού οι $l, l', PV$ και $m, m', SV$ είναι συνεπίπεδες, τότε και τα σημεία των θα ανήκουν στο επίπεδο των ευθειών. Δηλαδή, $V, Q \in Plane\{l, l', PV\} \rightarrow VQ \in Plane\{l, l', PV\}$ και $V, S \in Plane\{m, m', SV\} \rightarrow VS \in Plane\{m, m', SV\}$

Όμως τα σημεία $V, Q, N$ ορίζουν ένα επίπεδο το οποίο, λόγω $VN \perp E$ είναι κάθετο στο $E$. Ακόμα, και το επίπεδο $\Pi$ είναι κάθετο στο $E$. Το ερώτημα είναι τώρα, αν τα επίπεδα $VQN, \Pi$ είναι παράλληλα ή κάθετα μεταξύ των.

Επειδή ο άξονας $\alpha$ είναι παράλληλος με τη γραμμή του ορίζοντα, σημαίνει και ότι τα επίπεδα $VQN, \Pi$ είναι παράλληλα. Ξέρουμε ότι $VQN \perp E \wedge E \perp \Pi$. Αν τα $VQN, \Pi$ δεν ήταν παράλληλα, θα ήταν αναγκαστικά κάθετα γιατί σε άλλη περίπτωση παραβιάζονται οι τελευταίες σχέσεις που αποδείξαμε. Αν δεχτούμε ότι είναι κάθετα, όμως, θα είναι και κάθετες οι τομές τους με το $E$, δηλαδή ο άξονας $\alpha$ και η γραμμή του ορίζοντα, γεγονός άτοπο. Άρα αναγκαστικά είναι:

$$VQN \perp E \wedge E \perp \Pi \wedge \alpha \parallel horizon \Rightarrow VQN \parallel \Pi$$

Για τις ευθείες που μας ενδιαφέρουν έχουμε:

$$\begin{cases} l \in \Pi \wedge \Pi \parallel VQN \wedge VQ \in VQN \Rightarrow l \parallel VQ \\ m \in \Pi \wedge \Pi \parallel VQN \wedge VQ \in VQN \Rightarrow m \parallel VQ \end{cases} \Rightarrow l \parallel VQ \wedge m \parallel VQ \Rightarrow l \parallel m$$

Η σχέση των 2 ευθειών άρα είναι $l \parallel m$.

## Question b

Αρχικά θα δείξουμε ότι οι γωνίες που σχηματίζουν οι ευθείες $l, a$ και οι $VQ, horizon$ είναι ίδιες

Αν μετατοπίσουμε νοητά το επίπεδο $\Pi$ προς το επίπεδο των $VQN$, διατηρώντας την καθετότητα με το $E$, έως ότου $R \equiv Q$, έχουμε τον άξονα $\alpha$ να συμπίπτει με τη γραμμή του ορίζοντα και την $l$ να συμπίπτει με τη $VQ$. Αυτό σημαίνει ότι οι γωνίες που σχηματίζουν οι $l, a$ είναι ίσες με εκείνες των $h, VQ$.

Θεωρώντας ότι τα μόνα γνωστά χαρακτηριστικά της διάταξης είναι οι θέσεις των σημείων του επιπέδου της εικόνας (και δε γίνεται να μετρήσουμε άλλα μεγέθη, όπως τις γωνίες που αναφέραμε), υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος (και ο συμμετρικός του) να υπολογιστεί η απόσταση του σημείου $V$ από την εικόνα. Με «κανόνα και διαβήτη», μπορούμε να δημιουργήσουμε τη διχοτόμο της γωνίας $180°$ του άξονα $\alpha$ (ορίζουμε την κορυφή της σε κάποιο σημείο), δηλαδή μία κάθετη προς το επίπεδο της εικόνας. Ύστερα, με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να φτιάξουμε τις διχοτόμους των νέων γωνιών, οι οποίες έχουν κλίσεις $45°, 135°$ με το επίπεδο της εικόνας. Κατασκευάζουμε έτσι τις ευθείες $l, m$. Γνωρίζοντας τις τελευταίες γωνίες, καταλαβαίνουμε, όπως δείξαμε πριν, ότι οι γωνίες $h, VQ$ είναι επίσης $45°, 135°$. Εφόσον μιλάμε για απόσταση $NV$, η γωνία $\widehat{QNV}$ είναι ορθή. Συνεπώς, $\widehat{QVN} = 180° - \widehat{QNV} - \widehat{NQV} = 45°$. Άρα το τρίγωνο $QNV$ είναι ισοσκελές με τις πλευρές της ορθής γωνίας $(NQ, NV)$ ίσες. Αφού μας είναι γνωστό το μήκος της $NQ$, έχουμε ότι $(NV) = (NQ)$, στην περίπτωση μας.

## Question c

Επιθυμούμε να βρούμε όλες τις παράλληλες ευθείες του επιπέδου $\Pi$ των οποίων οι απεικονίσεις στο επίπεδο της εικόνας τέμνονται στο κεντρικό σημείο φυγής $N$. Το σημείο $N$ είναι κατάλληλο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $VN$ να είναι κάθετο στο επίπεδο της εικόνας.

Από το ερώτημα (b) έχουμε ότι οι γωνίες που σχηματίζουν οι $l, a$ είναι ίσες με εκείνες των $VQ$. Όμως στην περίπτωσή μας το $Q$ συμπίπτει με το $N$ και η προκύπτουσα γωνία είναι $90°$. Συνεπώς και οι γωνίες των $l, a$ είναι $90°$ και επειδή $l \parallel m$ και $l, m$ συνεπίπεδες, οι γωνίες των $m, a$ επίσης θα είναι $90°$.

Οι ευθείες $l, m$, λοιπόν, θα πρέπει να είναι κάθετες στο επίπεδο της εικόνας.

## Question d

Αλλάζουν τα πάντα διότι εξάγαμε τις σχέσεις χρησιμοποιώντας την παραλληλία επιπέδων και ευθειών πάνω τους. Δεν μπορούμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα αν δεν είναι παράλληλα.

## Exercise 2.9

Η ορθογραφική προβολή είναι μια απεικόνιση $\Pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

Επίσης, έχουμε τον $3D$ μετασχηματισμό ομοιότητας $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, P \mapsto sRP + D$

Ο μετασχηματισμός $T$ περιστρέφει το $P$ κατά τον πίνακα $R$, επιβάλει μια κλιμάκωση $s$ σε όλα τα στοιχεία του αποτελέσματος και τέλος το μετατοπίζει κατά $D$, όπου:

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \text{ και } R = \begin{pmatrix} \cos a_1 & \cos b_1 & \cos c_1 \\ \cos a_2 & \cos b_2 & \cos c_2 \\ \cos a_3 & \cos b_3 & \cos c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Είναι, λοιπόν:

$$\Pi\big(T(P)\big) = \Pi(sRP + D) = \Pi\left( s \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \Pi \begin{pmatrix} s(r_{11}X + r_{12}Y + r_{13}Z) + D_1 \\ s(r_{21}X + r_{22}Y + r_{23}Z) + D_2 \\ s(r_{31}X + r_{32}Y + r_{33}Z) + D_3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\Pi: \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \Pi\big(T(P)\big) = \begin{pmatrix} s(r_{11}X + r_{12}Y + r_{13}Z) + D_1 \\ s(r_{21}X + r_{22}Y + r_{23}Z) + D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sr_{11} & sr_{12} \\ sr_{21} & sr_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sr_{13}Z + D_1 \\ sr_{23}Z + D_2 \end{pmatrix}$$

Όμως στην ορθογραφική προβολή θεωρούμε $Z \cong Z_0 = constant$, άρα θεωρούμε το διάνυσμα $\begin{pmatrix} sr_{13}Z + D_1 \\ sr_{23}Z + D_2 \end{pmatrix}$ σταθερό.

Ορίζοντας $L = \begin{pmatrix} sr_{11} & sr_{12} \\ sr_{21} & sr_{22} \end{pmatrix}$ και $d = \begin{pmatrix} sr_{13}Z + D_1 \\ sr_{23}Z + D_2 \end{pmatrix}$, έχουμε την αντιστοίχιση του $3D$ μετασχηματισμού $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, P \mapsto sRP + D$ σε έναν $2D$ αφινικό μετασχηματισμό $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto L \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + d$, όπου

$$L = \begin{pmatrix} sr_{11} & sr_{12} \\ sr_{21} & sr_{22} \end{pmatrix} \text{ και } d = \begin{pmatrix} sr_{13}Z + D_1 \\ sr_{23}Z + D_2 \end{pmatrix}$$

# Άσκηση 1.2

## Exercise 2.12

Έχουμε:

$$L = \frac{d^2\Phi}{dA\cos\theta\, d\Omega} = \frac{d}{dA}\left(\frac{d\Phi}{d\Omega}\frac{1}{\cos\theta}\right) = constant$$

Γνωρίζουμε, όμως, ότι:

$$\frac{d\Phi}{d\Omega} = J$$

Άρα είναι:

$$L = \frac{d}{dA}\left(J\frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{dJ}{dA}\frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow L\cos\theta = \frac{dJ}{dA}$$

Μπορούμε να δούμε τη διαφορική εξίσωση ως εξίσωση χωριζομένων μεταλητών και προκύπτει:

$$dJ = L\cos\theta\, dA \Rightarrow \int dJ = \int L\cos\theta\, dA$$

Όμως, από τα δεδομένα έχουμε ότι $L = constant$ και άρα:

$$\int dJ = \int L\cos\theta\, dA \Rightarrow J = L\cos\theta\, A$$

Τέλος, αν ορίσουμε $J(\theta = 0)$ τη σταθερά $LA$, έχουμε την απόδειξη:

$$J(\theta) = J(0)\cos\theta$$

## Exercise 2.14

Γνωρίζοντας την ένταση της πηγής $\Phi = 100\ W$, υπολογίζουμε την ακτινοβόλο ένταση

$$J_e = \frac{\Phi}{4\pi} = \frac{100}{4\pi} \cong 7.9577\ W/sr\ (1)$$

Αφού η απόσταση του λαμπτήρα από την επιφάνεια είναι $h = 2\ m$, έχουμε την Irradiance:

$$I_e = \frac{J_e}{h^2} = \frac{100/(4\pi)}{2^2} = \frac{100}{16\pi} \cong 1.9894\ W/m^2\ (2)$$

Ακόμα, έχουμε τη Luminous Efficiency για μήκος κύματος $\lambda = 650\ nm$ από το διάγραμμα:

$$K(\lambda = 650\ nm) = 68\ lm\ (3)$$

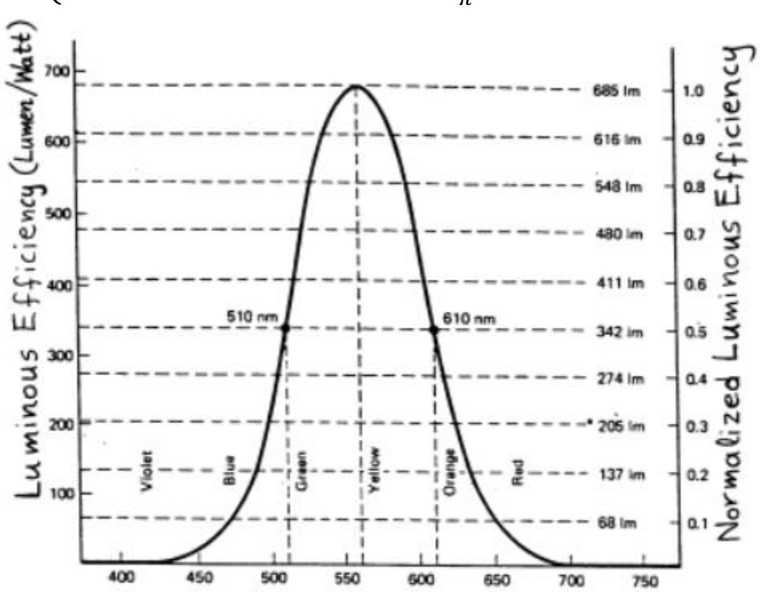
Από τις σχέσεις $(1, 2, 3)$ έχουμε ότι:

$$J_v = J_e \cdot K(\lambda = 650\ nm) = \frac{100}{4\pi} \cdot 68 = \frac{1700}{\pi} \cong 541.1268\ cd$$

$$I_v = I_e \cdot K(\lambda = 650\ nm) = \frac{100}{16\pi} \cdot 68 = \frac{425}{\pi} \cong 135.2817\ lux$$

Υπολογίσαμε λοιπόν τα ζητούμενα μεγέθη:

$$\begin{cases} \text{Φωτοβόλος Ένταση} : J_v = \frac{1700}{\pi} \cong 541.1268\ cd \\ \text{Irradiance} \qquad\quad : I_e = \frac{100}{16\pi} \cong 1.9894\ W/m^2 \\ \text{Illuminance} \qquad\ : I_v = \frac{425}{\pi} \cong 135.2817\ lux \end{cases}$$



# Άσκηση 1.3

## Ερώτημα α

Για συχνότητες φέροντος $\omega_{1c}, \omega_{2c}$ και ισοϋψείς καμπύλες ελλείψεις με άξονες ανάλογους των σταθερών $a, b$ (ίσους με $2\alpha, 2b$ στο ύψος $e^{-1}$) και γωνία $\theta$ στο επίπεδο $(x, y)$, έχουμε την κρουστική απόκριση του $2D$ μιγαδικού φίλτρου Gabor:

$$f(x,y) = \exp\left[-\left(\frac{\left((x-x_c)\cos\theta + (y-y_c)\sin\theta\right)^2}{(2a)^2} + \frac{\left((x-x_c)\sin\theta + (y-y_c)\cos\theta\right)^2}{(2b)^2}\right)\right]\exp\left[j\left(\omega_{1c}(x-x_c) + \omega_{2c}(y-y_c)\right)\right]$$

## Ερώτημα β

Για μια Gaussian έχουμε μετασχηματισμό Fourier:

$$\tilde{g}(\omega_1, \omega_2) = \mathcal{F}^{2D}\left\{\exp\left[-\left(\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2}\right)\right]\right\} = 4\pi ab\exp[-(a^2\omega_1^2 + b^2\omega_2^2)]$$

Όμως, έχουμε περιστροφή κατά γωνία $\theta$ που μεταφράζεται ως περιστροφή πάλι κατά γωνία $\theta$ στο πεδίο των συχνοτήτων:

$$\tilde{g}_\theta(\omega_1, \omega_2) = \mathcal{F}^{2D}\left\{\exp\left[-\left(\frac{(x\cos\theta + y\sin\theta)^2}{4a^2} + \frac{(x\sin\theta - y\cos\theta)^2}{4b^2}\right)\right]\right\} =$$
$$= 4\pi ab\exp[-(a^2(\omega_1\cos\theta + \omega_2\sin\theta)^2 + b^2(\omega_1 \, sin\,\theta - \omega_2\cos\theta)^2)]$$

Έχουμε επίσης για ένα μιγαδικό ημίτονο:

$$\tilde{s}(\omega_1, \omega_2) = \mathcal{F}^{2D}\{\exp[-j(\omega_{1c}x + \omega_{2c}y)]\} = 4\pi^2\delta(\omega_1 - \omega_{1c}, \omega_2 - \omega_{2c})$$

Άρα για τη συνάρτησή μας:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega_1, \omega_2) &= \mathcal{F}^{2D}\{g_\theta s\} = \tilde{g}_\theta * \tilde{s} = \\ &= 16\pi^3 ab\exp[-(a^2(\omega_1\cos\theta + \omega_2\sin\theta)^2 + b^2(\omega_1 \, sin\,\theta - \omega_2\cos\theta)^2)] \\ &\quad * \delta(\omega_1 - \omega_{1c}, \omega_2 - \omega_{2c})\end{aligned}$$

Άρα, κρατάμε τις τιμές για συχνότητες $\omega_{1c}, \omega_{2c}$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega_1, \omega_2) = 16\pi^3 ab\exp\Big[-\Big(a^2\big((\omega_1 - \omega_{1c})\cos\theta + (\omega_2 - \omega_{2c})\sin\theta\big)^2 \\ + b^2\big((\omega_1 - \omega_{1c}) \, sin\,\theta - (\omega_2 - \omega_{2c})\cos\theta\big)^2\Big)\Big]\end{aligned}$$

Και τελικά, ο μετασχηματισμός είναι το πάνω, επί ένα μιγαδικό εκθετικό που προσθέτει την πληροφορία ότι το σήμα είναι κεντραρισμένο στο σημείο $(x_c, y_c)$:

$$\begin{aligned}f(x,y)|_{x_c, y_c} \leftrightarrow 16\pi^3 ab\exp\Big[-\Big(a^2((\omega_1 - \omega_{1c})\cos\theta + (\omega_2 - \omega_{2c})\sin\theta)^2 \\ + b^2((\omega_1 - \omega_{1c}) \, sin\,\theta - (\omega_2 - \omega_{2c})\cos\theta)^2\Big)\Big]\exp[-jx_c\omega_1 - jy_c\omega_2]\end{aligned}$$

# Άσκηση 1.4

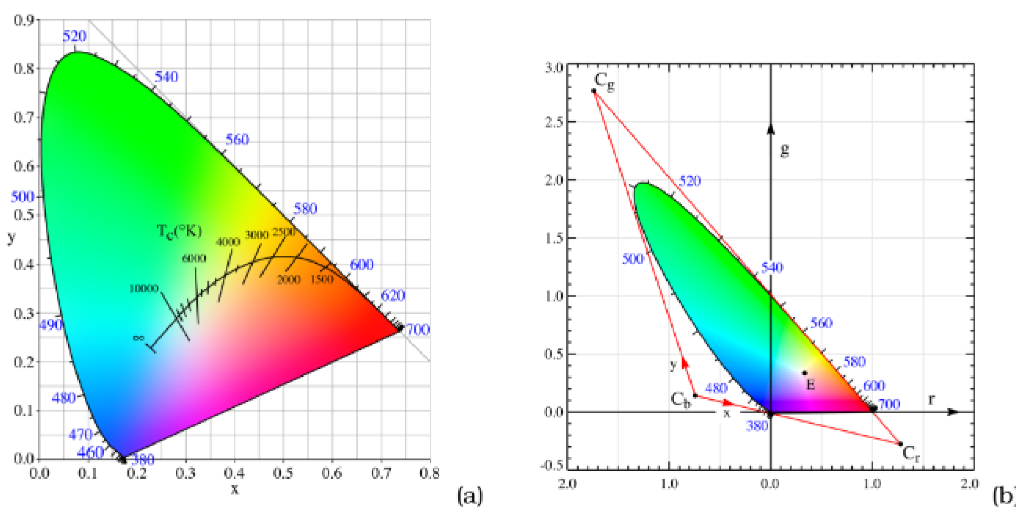
## Exercise 5.5

Το $CIE - xy$ χρωματικό διάγραμμα προκύπτει από τις κανονικοποιημένες $(r, g)$ συνιστώσες του χώρου $RGB$ όπως φαίνεται στην εικόνα. Οι τελευταίες ορίζονται ως

$$r = \frac{R}{R+G+B}, g = \frac{G}{R+G+B} \text{ και επίσης } B = \frac{B}{R+G+B}$$

Πειράματα έδειξαν αυτό που φαίνεται στο διάγραμμα, ότι δηλαδή το προσθετικό ταίριασμα δεν αρκεί για να καλύψει όλα τα σημεία του ανθρώπινου οπτικού χώρου χρωμάτων ($GHV$). Αυτό σημαίνει ότι απαιτείται αρνητικό βάρος ώστε ο γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών του χώρου $RGB$ να καλύψει τα σημεία του χώρου $GHV$.

Το τελευταίο φαίνεται και στη δεξιά εικόνα: Το σύνολο των πρωταρχικών χρωμάτων είναι γνήσιο υποσύνολο του τριγώνου το οποίο είναι ο χώρος $GHV$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν σημεία του εσωτερικού του τριγώνου που γραμμικός συνδυασμός των χρωμάτων με θετικά βάρη δεν μπορεί να φτιάξει.




Σχήμα 5.10: (α) CIE-$xy$ χρωματικό διάγραμμα από τις κανονικοποιημένες συνιστώσες $(x, y)$ του χώρου XYZ, με υπέρθεση του τόπου των χρωμάτων (Planckian locus) που διαγράφει το μέλαν σώμα. (Σχήμα από `http://en.wikipedia.org/wiki/Black_body`.) (b) CIE-$rg$ χρωματικό διάγραμμα από τις κανονικοποιημένες συνιστώσες $(r, g)$ του χώρου RGB που δείχνει και τον μετασχηματισμό του τριγώνου που ορίζει τον χώρο CIE XYZ. Το τρίγωνο Cb-Cg-Cr είναι η εικόνα του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(x, y) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$ στον χώρο χρωματικοτήτων CIE-$xy$. (Σχήμα από `http://en.wikipedia.org/wiki/CIE_1931_color_space`.)

## Exercise 5.12

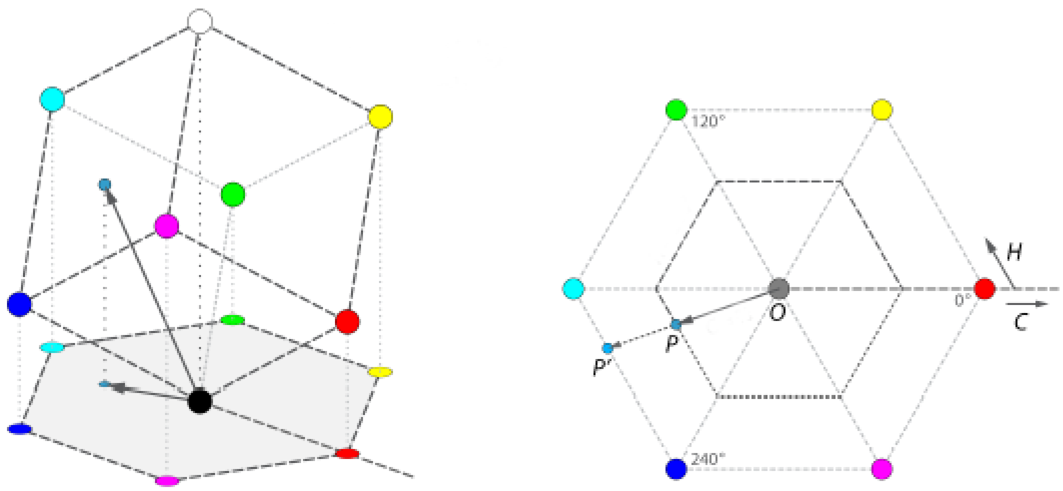
### Ερώτημα a

Θα εκφράσουμε τα $(x, y)$ ως προς τα $(R, G, B)$.

Αρχικά, θα περιστρέψουμε τον κύβο $RGB$ της εικόνας κατά τρόπο ώστε η αχρωματική διαγώνιος, για την οποία ισχύει $R = G = B$, να συμπέσει με τον άξονα $z$ κάποιου συστήματος αξόνων $x, y, z$. Έτσι, προβάλουμε τον κύβο στο επίπεδο $(x, y)$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έχουμε για τις συντεταγμένες $x, y$:

$$x = R\cos(0) + G\cos(2\pi/3) + B\cos(4\pi/3) = R - G/2 - B/2$$

$$y = R\sin(0) + G\sin(2\pi/3) + B\sin(4\pi/3) = 0 + \sqrt{3}G/2 - \sqrt{3}B/2$$




### Ερώτημα b

Ακολουθώντας τις διαδικασίες στη σελίδα 15 του κεφαλαίου 5 του βιβλίου, απεικονίζουμε το εξάγωνο του ερωτήματος (a) σε έναν κύκλο με αποτέλεσμα οι χώροι $HSV$, $HSL$ να μετατραπούν σε κώνους και τα επιπεδοσύνολά των σε δίσκους. Προκύπτουν, λοιπόν, οι σχέσεις $(5.24, 5.25)$ που εκφράζουν το $hue$ ως γωνία $0° - 360°$ και το $chroma$ ως το ευκλείδειο μέτρο της προβολής του διανύσματος $(R, G, B)$ στο χρωματικό επίπεδο:

$$\begin{cases} C_2 = \sqrt{R^2 + G^2 + B^2 - RG - RB - GB} \\ H_2 = \begin{cases} \theta, & G \geq B \\ 360 - \theta, & G \leq B \end{cases}, \text{όπου } \theta = \mathrm{Arccos}[(R - G/2 - B/2)/C_2] \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι ξεκινώντας από αυτές τις σχέσεις μπορούμε να καταλήξουμε στο ζητούμενο, να δείξουμε δηλαδή ότι $C_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ (σημείωση, θέλουμε να αναδιατάξουμε τους όρους ώστε να εμφανιστούν τα $x, y$ στο ριζικό):

$$C_2 = \sqrt{R^2 + G^2 + B^2 - RG - RB - GB} =$$

$$= \sqrt{R^2 - RG - RB + \frac{G^2}{4} + \frac{3G^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{3B^2}{4} + \frac{GB}{2} - \frac{3GB}{2}} =$$

$$= \sqrt{R^2 - RG - RB + \left(\frac{G^2}{4} + \frac{GB}{2} + \frac{B^2}{4}\right) + \left(\frac{3G^2}{4} - \frac{3GB}{2} + \frac{3B^2}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(R^2 - R(G+B) + \frac{1}{4}(G+B)^2\right) + \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}G - \sqrt{3}B\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(R - G/2 - B/2)^2 + \left(\sqrt{3}G/2 - \sqrt{3}B/2\right)^2} \xRightarrow[y=\sqrt{3}G/2-\sqrt{3}B/2]{x=R-G/2-B/2} C_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Μένει να δείξουμε και τη σχέση για το $H_2$. Ως δίκλαδη, εξετάζουμε τις περιπτώσεις:

- Για $G \geq B$, έχουμε:

$$H_2 = \theta = \mathrm{Arccos}[(R - G/2 - B/2)/C_2] \Rightarrow \cos\theta = (R - G/2 - B/2)/C_2 \xRightarrow[x=R-G/2-B/2]{C_2=\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{x^2}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2\cos^2\theta + y^2\cos^2\theta = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2\cos^2\theta = x^2(1 - \cos^2\theta) \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \tan\theta \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan(\theta - \pi) \Rightarrow \theta - \pi = \mathrm{atan2}(y,x) \Rightarrow \theta = \pi + \mathrm{atan2}(y,x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_2 = \theta = \pi + \mathrm{atan2}(y,x)$$

- Για $G \leq B$, έχουμε:

$$H_2 = 2\pi - \theta = 2\pi - \mathrm{Arccos}[(R - G/2 - B/2)/C_2] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(2\pi - \theta) = \cos(2\pi - \mathrm{Arccos}[(R - G/2 - B/2)/C_2]) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta = \cos(2\pi - \mathrm{Arccos}[(R - G/2 - B/2)/C_2])$$

  Όμως, όπως βρήκαμε, είναι:

$$\cos\theta = (R - G/2 - B/2)/C_2 = x/\sqrt{x^2+y^2}$$

  Το οποίο υπολογίσαμε στην περίπτωση $G \geq B$.

Άρα, πάντα είναι $H_2 = \theta = \pi + \mathrm{atan2}(y,x)$.

# Άσκηση 1.5

## Ερώτημα a

Έστω η διαχωρίσιμη συνάρτηση: $h(x,y) = h_1(x)h_2(y)$

Θα δείξουμε ότι $f * h = (f *_1 h_1) *_2 h_2$, όπου

$$(f *_1 h_1)(x,y) = \int f(x-a,y)h_1(a)da \text{ και } (g *_2 h_2)(x,y) = \int g(x,y-b)h_2(b)db$$

Έχουμε:

$$f * h = \iint h(a,b)f(x-a,y-b)dadb = \iint h_1(a)h_2(b)f(x-a,y-b)dadb =$$

$$= \int h_2(b)\left(\int h_1(a)f(x-a,y-b)da\right)db = \int h_2(b)(f *_1 h_1)(x,y-b)db =$$

$$= [(f *_1 h_1) *_2 h_2](x,y)$$

Πραγματικά, λοιπόν, $f * h = (f *_1 h_1) *_2 h_2$

## Ερώτημα b

Έστω τώρα η διαχωρίσιμη συνάρτηση: $h(x,y) = h_1(x) + h_2(y)$

Με παρόμοιο σκεπτικό δείξουμε ότι $f \oplus h = (f \oplus_1 h_1) \oplus_2 h_2$, όπου

$$(f \oplus_1 h_1)(x,y) = \bigvee_a f(x-a,y) + h_1(a) \text{ και } (g \oplus_2 h_2)(x,y) = \bigvee_b g(x,y-b) + h_2(b)$$

Έχουμε:

$$f \oplus h = \bigvee_a \bigvee_b \big(f(x-a,y-b) + h(x,y)\big) = \bigvee_a \bigvee_b \big(f(x-a,y-b) + h_1(x) + h_2(y)\big) =$$

$$= \bigvee_b h_2(y) \bigvee_a \big(f(x-a,y-b) + h_1(x)\big) = \bigvee_b \big(h_2(y) + (f \oplus_1 h_1)(x,y-b)\big) =$$

$$= [(f \oplus_1 h_1) \oplus_2 h_2](x,y)$$

Άρα όντως $f \oplus h = (f \oplus_1 h_1) \oplus_2 h_2$

# Άσκηση 1.6

## Ερώτημα a

### Υποερώτημα a1

Θα αποδείξουμε ότι $X \circ B = (X^c \bullet B^s)^c$.

Έχουμε την ιδιότητα της δυϊκότητας $X \ominus B = (X^c \oplus B^s)^c$. Επεκτείνοντας τον ορισμό του opening παίρνουμε :

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B = (((X^c \oplus B^s)^c)^c \ominus B^s)^c = \left((X^c \oplus B^s) \ominus B^s\right)^c = (X^c \bullet B^s)^c$$

### Υποερώτημα a2

Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{0} \in B \Rightarrow X \ominus B \subseteq X \circ B \subseteq X \subseteq X \bullet B \subseteq X \oplus B$.

*Απόδειξη ότι $X \ominus B \subseteq X$ και $X \subseteq X \oplus B$*

Από τους ορισμούς των dilation και erosion, έχουμε:

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_{+b} \, , X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b}$$

Το $X \oplus B$ είναι η ένωση όλων των μετατοπισμένων κατά κάθε σημείο του πυρήνα $B$ συνόλων $X$. Επειδή $\mathbf{0} \in B$, είναι βέβαιο ότι το ένα από τα σύνολα της ένωσης είναι το $X$, οπότε «τουλάχιστον» $X \oplus B = X$ και επειδή το $B$ γίνεται να έχει και άλλα στοιχεία, εκτός του μηδενός, μπορεί να είναι και $X \subset X \oplus B$ λόγω πιθανής ένωσης με σύνολα που περιέχουν στοιχεία εκτός του $X$. Συνολικά δηλαδή είναι $X \subseteq X \oplus B$ $(1)$.

Το $X \ominus B$ είναι η τομή όλων των μετατοπισμένων κατά το αντίθετο κάθε σημείου του πυρήνα $B$ συνόλων $X$. Επειδή $\mathbf{0} \in B$, είναι βέβαιο ότι το ένα από τα σύνολα της τομής είναι το $X$, οπότε «το πολύ» $X \ominus B = X$ και επειδή το $B$ γίνεται να έχει και άλλα στοιχεία, εκτός του μηδενός, μπορεί να είναι και $X \ominus B \subset X$ λόγω πιθανής τομής με σύνολα που περιέχουν στοιχεία εκτός του $X$. Συνολικά δηλαδή είναι $X \ominus B \subseteq X (2)$.

*Απόδειξη ότι $X \ominus B \subseteq X \circ B \subseteq X$ και $X \subseteq X \bullet B \subseteq X \oplus B$*

Από τους ορισμούς των closing και opening, έχουμε:

$$X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B = \bigcap_{z \in X \oplus B} X_{-z} \, , X \circ B = (X \ominus B) \oplus B = \bigcup_{z \in X \ominus B} B_{+z}$$

Το $X \bullet B$ είναι η τομή όλων των μετατοπισμένων κατά το κάθε σημείο του συνόλου $X \oplus B$ συνόλων $X$. Από $(1)$ και επειδή $\mathbf{0} \in B \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathbf{0} \in X \oplus B$, έχουμε τομή συνόλων που όλα είναι υπερσύνολα του $X$. Άρα,

$$X \bullet B = \bigcap_{z \in X \oplus B} X_{-z} = \left(\bigcap A\right) \wedge (X \subseteq A), \forall A \Rightarrow X \subseteq X \bullet B \; (3)$$

Από την άλλη πλευρά, πάλι από τον ορισμό του closing είναι:

$$X \bullet B = \bigcap_{z \in X \oplus B} X_{-z}\,, \text{όπου } X \oplus B = \{y: y \in B_{+z}, z \in X\}$$

Αυτό το σύνολο είναι το πολύ $X \oplus B$ και αυτό συμβαίνει αν όλα τα σύνολα της ένωσης, $X_{-z}$, είναι το ίδιο το $X \oplus B$, το οποίο παρεμπιπτόντως συμβαίνει αν και μόνον αν $X, B$ έχουν περιστροφική συμμετρία ως προς το κέντρο τους ή αν $B \equiv \mathbf{0}$ (γιατί σε άλλη περίπτωση, το dilation δημιουργεί ασυμμετρία κατά την περιστροφή με αποτέλεσμα να έχουμε τομή μη πλήρως επικαλυπτόμενων συνόλων, άρα σίγουρα το αποτέλεσμα δε θα είναι το $X \oplus B$). Άρα θα είναι $X \bullet B \subseteq X \oplus B$ $(4)$.

Από τις $(3, 4)$ θα έχουμε: $X \subseteq X \bullet B \subseteq X \oplus B$ $(5)$

Ομοίως, από τον ορισμό του opening είναι:

$$X \circ B = \bigcup_{z \in X \ominus B} B_{+z}\,, \text{όπου } X \ominus B = \{y: y \in B_{-z}, z \in X\}$$

Αυτό το σύνολο είναι τουλάχιστον $X \ominus B$ και αυτό συμβαίνει διότι $\mathbf{0} \in B$. Αφού ισχύει αυτό, το ένα από τα σύνολα της ένωσης είναι το $\mathbf{0}_{+z}, z \in X \ominus B$ το οποίο είναι η μετατόπιση του $\mathbf{0}$ σε όλα τα σημεία του $X \ominus B$, δηλαδή το ίδιο το $X \ominus B$. Άρα δείξαμε ότι $X \ominus B \subseteq X \circ B$ $(6)$.

Το $X \circ B$ είναι η ένωση όλων των μετατοπισμένων κατά το κάθε σημείο του συνόλου $X \ominus B$ συνόλων $X$. Από $(2)$ και επειδή $\mathbf{0} \in B \overset{(2)}{\Rightarrow} \mathbf{0} \in X \ominus B$, έχουμε ένωση συνόλων που όλα είναι υποσύνολα του $X$. Άρα,

$$X \circ B = \bigcup_{z \in X \ominus B} X_{+z} = \left(\bigcup A\right) \wedge (A \subseteq X), \forall A \Rightarrow X \circ B \subseteq X \ (7)$$

Από τις $(6, 7)$ θα έχουμε: $X \ominus B \subseteq X \circ B \subseteq X$ $(8)$

Οι σχέσεις $(5, 8)$ αποδεικνύουν το ζητούμενο:

$$\mathbf{0} \in B \Rightarrow X \ominus B \subseteq X \circ B \subseteq X \subseteq X \bullet B \subseteq X \oplus B$$

### Υποερώτημα b1

Από τους ορισμούς των τελεστών $\ominus$ και $\oplus$, έχουμε:

$$(f \ominus g) \ominus h = \bigwedge_{y \in g} \big(f(x+y)\big) \ominus h = \bigwedge_{y \in g} \left(\bigwedge_{z \in h} f(x+y+z)\right)$$

$$= \bigwedge_{w \in g \oplus h} f(x+w) = f \ominus (g \oplus h)$$

### Υποερώτημα b2

Θα δείξουμε $f = f \circ g \Leftrightarrow \exists h. f = h \oplus g$.

Για το ευθύ σκέλος της ισοδυναμίας (" $\Rightarrow$ ") έχουμε:

Από τον ορισμό του τελεστή $\circ$, επεκτείνουμε το αρχικό μέγεθος

$$f = f \circ g = (f \ominus g) \oplus g = h \oplus g \Rightarrow \exists h. f = h \oplus g$$

Και αυτή η $h$ ορίζεται ως $h = f \ominus g$.

Για το αντίστροφο σκέλος της ισοδυναμίας (" $\Leftarrow$ ") έχουμε:

Έστω κάποια $h$ ώστε $f = h \oplus g$. Ας δούμε τι μας δίνει η πράξη $f \circ g$:

$$f \circ g = (f \ominus g) \oplus g = \big((h \oplus g) \ominus g\big) \oplus g \xRightarrow{(h \oplus g) \ominus g = h \bullet g} f \circ g = (h \bullet g) \oplus g$$

Γνωρίζουμε, όμως από τον ορισμό της πράξης $h \bullet g$ ότι $h \bullet g \geq h$ και λόγω της μονοτονίας της πράξης $\oplus$, έχουμε επίσης ότι $h \bullet g \geq h \Rightarrow (h \bullet g) \oplus g \geq h \oplus g$. Από αυτά, προκύπτει:

$$f \circ g = (h \bullet g) \oplus g \geq h \oplus g \xRightarrow[f = h \oplus g]{\textit{Από υπόθεση:}} f \circ g \geq f \ (1)$$

Ακόμα, από τον ορισμό της πράξης $f \circ g$ έχουμε ότι $f \circ g \leq f \ (2)$

Από τις σχέσεις $(1, 2)$ έχουμε το ζητούμενο: $f \circ g \geq f \wedge f \circ g \leq f \Rightarrow f \circ g = f$.

Από τις 2 αποδείξεις, λοιπόν, έχουμε ότι:

$$(f = f \circ g \Rightarrow \exists h. f = h \oplus g) \wedge (\exists h. f = h \oplus g \Rightarrow f = f \circ g) \Rightarrow f = f \circ g \Leftrightarrow \exists h. f = h \oplus g$$

### Υποερώτημα c

Θεωρούμε το φίλτρο $\varphi$ όπως περιγράφεται στην εκφώνηση:

$$\varphi(f)(x) = \sup\{u \in \mathbb{R}: x \in \Phi[X_u(f)]\}, \text{όπου}$$

$\Phi$: Αυξάνων τελεστής συνόλων (χρησιμοποιούμενος ως δυαδική γεννήτρια).
$X_u(f) = \{x \in \mathbb{R}^2: f(x) \geq u\}$: Επιπεδοσύνολα της εικόνας $f$.

Ξεκινάμε από τη σχέση $\Phi(X) = X \bullet B$ και έχουμε:

$$\Phi(X) = X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B$$

Αν ορίσουμε $\Phi_1(X) = X \oplus B$ και $\Phi_2(X) = X \ominus B$ η άνω σχέση εκφράζεται και ως:

$$\Phi(X) = \Phi_2\big(\Phi_1(X)\big)$$

Τα $\Phi_1, \Phi_2$, αντιστοιχούν σε φίλτρα $\varphi_1, \varphi_2$, όπως και το $\Phi$ αντιστοιχεί στο $\varphi$:

$$\varphi_1(f)(x) = \sup\{u \in \mathbb{R}: x \in \Phi_1[X_u(f)]\}$$
$$\varphi_2(f)(x) = \sup\{u \in \mathbb{R}: x \in \Phi_2[X_u(f)]\}$$

Όμως γνωρίζουμε και ότι:

$$\varphi_1(f) = f \oplus B \text{ και } \varphi_2(f) = f \ominus B$$

Αν τα φίλτρα αυτά έχουν την ιδιότητα commute by thresholding, δηλαδή αν η αντιμετάθεσή των και η σειρά με την οποία εφαρμόζουμε την κατωφλιοποίηση (πριν ή μετά τα φίλτρα ή ενδιάμεσα) δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\varphi(f)(x) &= \sup\{u \in \mathbb{R}: x \in \Phi[X_u(f)]\} = \sup\big\{u \in \mathbb{R}: x \in \Phi_2\big[\Phi_1[X_u(f)]\big]\big\} = \\ &= \sup\big\{u \in \mathbb{R}: x \in \Phi_2\big[X_u[\varphi_1(f)]\big]\big\} = \sup\big\{u \in \mathbb{R}: x \in X_u\big[\varphi_2\big(\varphi_1(f)\big)\big]\big\} = \\ &= \varphi_2\big(\varphi_1(f)\big)(x) = (f \oplus B) \ominus B = f \bullet B\end{aligned}$$

Αποδείξαμε το ζητούμενο!

## Υποερώτημα d

Έστω

$$\Phi(X) = X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B = \bigcap_{y \in B}\left(\bigcup_{z \in B}(X_{+z})\right)_{-y} = \bigcap_{y \in B}\left(\bigcup_{z \in B}(X_{+z-y})\right)$$

Επειδή το $B$ ορίστηκε ως $B = \{(0,0),(0,1),(1,0)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\Phi(X) &= \bigcap_{y \in B}\left(\bigcup_{z \in B}(X_{+z-y})\right) = \bigcap_{y \in B}\big(X_{(0,0)-y} \cup X_{(0,1)-y} \cup X_{(1,0)-y}\big) = \\ &= \big(X_{(0,0)} \cup X_{(0,1)} \cup X_{(1,0)}\big) \cap \big(X_{(0,-1)} \cup X_{(0,0)} \cup X_{(1,-1)}\big) \cap \big(X_{(-1,0)} \cup X_{(-1,1)} \cup X_{(0,0)}\big) =\end{aligned}$$

Εκφράζοντας το $\Phi(X)$ ως boolean συνάρτηση $\beta(v_1, v_2, \dots, v_n)$ έχουμε ότι:

$$\beta(\boldsymbol{v}) = \big(v_{0,0} + v_{0,1} + v_{1,0}\big) \cdot \big(v_{0,-1} + v_{0,0} + v_{1,-1}\big) \cdot \big(v_{-1,0} + v_{-1,1} + v_{0,0}\big)$$

Για το ισοδύναμο γκρίζο φίλτρο $\varphi$ έχουμε την αλγεβρική έκφραση:

$$\varphi(f)(x,y) = \min\left\{\begin{matrix}\max\{f(x,y) + f(x,y-1) + f(x-1,y)\} \\ \max\{f(x,y+1) + f(x,y) + f(x-1,y+1)\} \\ \max\{f(x+1,y) + f(x+1,y-1) + f(x,y)\}\end{matrix}\right\}$$

# Άσκηση 1.7

## Exercise 10.2

Έχουμε την εικόνα: $I[x,y] = k_1 + k_2 x + k_3 y + w[x,y], w{:}\, noise\ field, \mu = 0, var = \sigma^2$.

### Ερώτημα a

Θεωρώντας μηδενικό θόρυβο, το gradient της εικόνας είναι:

$$\nabla I = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y}\right) \cdot I = k_2\hat{x} + k_3\hat{y}, \hat{x}, \hat{y}{:}\, unit\ vectors$$

Θεωρούμε μια γειτονιά $3 \times 3$ κεντραρισμένη στο pixel $(0,0)$, οπότε έχουμε τις τιμές:

| | | |
|---|---|---|
| $I[-1,-1]$ | $I[0,-1]$ | $I[1,-1]$ |
| $I[-1,0]$ | $I[0,0]$ | $I[1,0]$ |
| $I[-1,1]$ | $I[0,1]$ | $I[1,1]$ |

=

| | | |
|---|---|---|
| $k_1 - k_2 - k_3$ | $k_1 - k_3$ | $k_1 + k_2 - k_3$ |
| $k_1 - k_2$ | $k_1$ | $k_1 + k_2$ |
| $k_1 - k_2 + k_3$ | $k_1 + k_3$ | $k_1 + k_2 + k_3$ |

Επιπλέον, κάθε ένα φίλτρο στο pixel $(0,0)$ έχει τιμή:

$$\begin{aligned} g_x[0,0] &= I * \begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ b & 0 & -b \\ a & 0 & -a \end{bmatrix}[0,0] = \\ &= a(k_1 - k_2 - k_3) + b(k_1 - k_2) + a(k_1 - k_2 + k_3) - \\ &- a(k_1 + k_2 - k_3) - b(k_1 + k_2) - a(k_1 + k_2 + k_3) = -(4a + 2b)k_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_y[0,0] &= I * \begin{bmatrix} -a & -b & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & a \end{bmatrix}[0,0] = \\ &= -a(k_1 - k_2 - k_3) - b(k_1 - k_3) - a(k_1 + k_2 - k_3) + \\ &+ a(k_1 - k_2 + k_3) + b(k_1 + k_3) + a(k_1 + k_2 + k_3) = (4a + 2b)k_3 \end{aligned}$$

Επιθυμούμε:

$$g_x[0,0] \cong \frac{\partial I}{\partial x}[0,0], g_y[0,0] \cong \frac{\partial I}{\partial y}[0,0] \Rightarrow \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \|\nabla I\|, \arctan\frac{g_y}{g_x} = \arctan\frac{\nabla I \cdot \hat{y}}{\nabla I \cdot \hat{x}}$$

| | |
|---|---|
| $\sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \|\nabla I\| \Rightarrow$ <br> $\sqrt{(4a + 2b)^2 k_2^2 + (4a + 2b)^2 k_3^2} = \sqrt{k_2^2 + k_3^2}$ <br> $(4a + 2b)^2 = 1 \Rightarrow (4a + 2b) = \pm 1$ | $\arctan\frac{g_y}{g_x} = \arctan\frac{\nabla I \cdot \hat{y}}{\nabla I \cdot \hat{x}} \Rightarrow$ <br> $\arctan\frac{(4a + 2b)k_3}{-(4a + 2b)k_2} = \arctan\frac{k_3}{k_2} \Rightarrow$ <br> $\Rightarrow True$ |

### Ερώτημα b

Στην περίπτωση του θορύβου $w: \mu = 0, \sigma^2$ έχουμε για την εικόνα και τα φίλτρα:

$I[-1:1,-1:1] =$

| | | |
|---|---|---|
| $k_1 - k_2 - k_3 + w[-1,-1]$ | $k_1 - k_3 + w[0,-1]$ | $k_1 + k_2 - k_3 + w[1,-1]$ |
| $k_1 - k_2 + w[-1,0]$ | $k_1 + w[0,0]$ | $k_1 + k_2 + w[1,0]$ |
| $k_1 - k_2 + k_3 + w[-1,1]$ | $k_1 + k_3 + w[0,1]$ | $k_1 + k_2 + k_3 + w[1,1]$ |

$$g_x[0,0] = I * \begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ b & 0 & -b \\ a & 0 & -a \end{bmatrix} [0,0] =$$
$$= a(k_1 - k_2 - k_3 + w[-1,-1]) + b(k_1 - k_2 + w[-1,0]) + a(k_1 - k_2 + k_3 + w[-1,1]) -$$
$$- a(k_1 + k_2 - k_3 + w[1,-1]) - b(k_1 + k_2 + w[1,0]) - a(k_1 + k_2 + k_3 + w[1,1]) =$$
$$= -(4a + 2b)k_2 + a(w[-1,-1] + w[-1,1] - w[1,-1] - w[1,1]) + b(w[-1,0] - w[1,0])$$

Επειδή $\mathbb{E}[w] = 0$, είναι:

$$\mathbb{E}\big[g_x[0,0]\big] = -(4a + 2b)k_2 \xRightarrow[(4a+2b)=\pm 1]{Ερώτημα\ α} \mathbb{E}\big[g_x[0,0]\big] = \mp k_2$$

Για τη διακύμανση, τώρα, έχουμε:

$$Var\big[g_x[0,0]\big] = 4a^2\sigma^2 + 2b^2\sigma^2 \xRightarrow[b=\pm 0.5-2a]{(4a+2b)=\pm 1} Var\big[g_x[0,0]\big] = 4a^2\sigma^2 + 2\left(\frac{1}{4} \mp 2a + 4a^2\right)\sigma^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{2} \mp 4a + 12a^2\right)\sigma^2$$

Άρα η διακύμανση ελαχιστοποιείται όταν ελαχιστοποιείται το τριώνυμο: $\frac{1}{2} \mp 4a + 12a^2$

Το ελάχιστο θα συμβαίνει για:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2} \mp 4a + 12a^2\right) = 0 \Rightarrow 24a \mp 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 1/6$$

Οπότε είναι και $(4a + 2b) = \pm 1 \Rightarrow b = \pm 0.5 - 2a \Rightarrow b = \pm 0.5 - 2a = \pm 1/6$ και η μάσκα είναι:

$$g_x = \begin{bmatrix} \pm 1/6 & 0 & \mp 1/6 \\ \pm 1/6 & 0 & \mp 1/6 \\ \pm 1/6 & 0 & \mp 1/6 \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: Το $a = -1/6$ δημιουργεί ένα gradient αντίθετης φοράς, με αντίθετες τιμές $(x, y)$, σε σχέση με $a = 1/6$.

Η $g_x$ είναι μια μάσκα Prewitt κλιμακωμένη κατά $\pm 1/6$.

## Exercise 10.5

### Ερώτημα a

Η Gaussian είναι:

$$G_\sigma(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Την παραγωγίζουμε 2 φορές για να υπολογίσουμε τη Laplacian of Gaussian:

$$\frac{dG_\sigma}{dx} = -\frac{x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$L_\sigma(x) = \frac{d^2G_\sigma}{dx^2} = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \frac{x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Για την εν λόγω διαφορά, στο όριο $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 \to 0$, έχουμε ότι:

$$\frac{G_{\sigma_1} - G_{\sigma_2}}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\Delta G_\sigma}{\Delta\sigma} \cong \frac{\partial G_\sigma}{\partial\sigma} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) = -\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\frac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta G_\sigma}{\Delta\sigma} \cong -\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Όμως από τον τύπο της $L_\sigma(x)$ παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\Delta G_\sigma}{\Delta\sigma} \cong -\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sigma\frac{d^2G_\sigma}{dx^2} = \sigma L_\sigma(x)$$

Άρα, πραγματικά, η $LoG$ συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί από τη διαφορά

$$\frac{G_{\sigma_1} - G_{\sigma_2}}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Στο όριο $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 \to 0$.

### Ερώτημα b

Περνάμε στο πεδίο της συχνότητας και έχουμε για μια Gaussian:

$$\tilde{G}_\sigma(\omega) = \mathcal{F}\{G_\sigma(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\sigma(x)e^{-j\omega x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-j\omega x}dx = e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$$

Άρα είναι:

$$\frac{G_{\sigma_1} - G_{\sigma_2}}{\sigma_1 - \sigma_2} \leftrightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{G_{\sigma_1} - G_{\sigma_2}}{\sigma_1 - \sigma_2}\right\} = \frac{\tilde{G}_{\sigma_1} - \tilde{G}_{\sigma_2}}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Θεωρώντας $\sigma_2 - \sigma_1 = \Delta\sigma$, γράφουμε $\sigma_2 = \sigma_1 + \Delta\sigma$ και έχουμε:

$$\frac{\tilde{G}_{\sigma_1} - \tilde{G}_{\sigma_2}}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{e^{-\frac{\omega^2\sigma_1^2}{2}} - e^{-\frac{\omega^2(\sigma_1+\Delta\sigma)^2}{2}}}{-\Delta\sigma} = \frac{e^{-\frac{\omega^2\sigma_1^2}{2}} - e^{-\frac{\omega^2\sigma_1^2}{2}}e^{-\frac{\omega^2 2\sigma_1\Delta\sigma}{2}}e^{-\frac{\omega^2(\Delta\sigma)^2}{2}}}{-\Delta\sigma} =$$

$$= -e^{-\frac{\omega^2\sigma_1^2}{2}}\frac{1 - e^{-\omega^2\frac{2\sigma_1\Delta\sigma+(\Delta\sigma)^2}{2}}}{\Delta\sigma}$$

Όμως, στο όριο $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 \rightarrow 0$ είναι:

$$\frac{\tilde{G}_{\sigma_1} - \tilde{G}_{\sigma_2}}{\sigma_1 - \sigma_2} = -e^{-\frac{\omega^2\sigma_1^2}{2}}\frac{1 - e^{-\omega^2\frac{2\sigma_1\Delta\sigma+(\Delta\sigma)^2}{2}}}{\Delta\sigma} = -\sigma_1\omega^2\tilde{G}_{\sigma_1} = \sigma_1\mathcal{F}\left\{\frac{d^2G_{\sigma_1}}{dx^2}\right\} = \sigma_1\mathcal{F}\{L_{\sigma_1}\}$$

Αυτό ισχύει για κάθε $\sigma_1$, οπότε γενικά, $\sigma_1 = \sigma$:

$$\frac{\tilde{G}_{\sigma_1} - \tilde{G}_{\sigma_2}}{\sigma_1 - \sigma_2} = \sigma\mathcal{F}\{L_\sigma\}$$