Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Εξηγείστε επαρκώς την εργασία σας. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην HELIOS ιστοσελίδα του μαθήματος `https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=964` και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: `cv23_hwk1_AM_FirstnameLastname.pdf`, όπου AM ειναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναριμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM, και email address σας.
Επισημαίνεται ότι απαγορεύεται η ανάρτηση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων σε ιστοσελίδες ή η διανομή τους με οποιονδήποτε άλλο τρόπο. Η σχεδίαση και το περιεχόμενο των ασκήσεων αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία της διδακτικής ομάδας του μαθήματος.

Ασκηση 1.1: (Σχηματισμός Εικόνων: Προοπτική Γεωμετρία)
Λύσετε τις ακόλουθες ασκήσεις από το Κεφ.2 (έκδοση 5/2022):
(a) 2.6. **(b)** 2.9.

Ασκηση 1.2: (Σχηματισμός Εικόνων: Φωτισμός)
Λύσετε τις ακόλουθες ασκήσεις από το Κεφ.2 (έκδοση 5/2022):
(a) 2.12. **(b)** 2.14.

Ασκηση 1.3: (Κατευθυντικό 2Δ Gabor φίλτρο)
(a) Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x, y)$ που παριστάνει την κρουστική απόκριση ενός 2Δ μιγαδικού Gabor φίλτρου με τις εξής παραμέτρους: η περιβάλλουσα είναι μια Gaussian της οποίας οι ισοϋψείς καμπύλες είναι ελλείψεις στο επίπεδο (x, y) με άξονες μηκών αναλόγων των σταθερών a και b ($a > b$, και στο ύψος e^{-1} η ισοϋψής έχει άξονες $2a$ και $2b$), ο κύριος άξονας των ελλείψεων σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια, και η τομή των αξόνων των ελλείψεων είναι το σημείο (x_c, y_c). Επίσης οι συχνότητες φέροντος είναι ω_{1c} και ω_{2c}.
(b) Να βρεθεί και ο Fourier μετασχηματισμός της $f(x, y)$.

Ασκηση 1.4: (Χρώμα)
Λύσετε τις ακόλουθες ασκήσεις από το Κεφ.5 (έκδοση 6/2013):
(a) 5.5. **(b)** 5.12.

Ασκηση 1.5: (Διαχωρίσιμες 2Δ Γραμμικές και Μη-γραμμικές Συνελίξεις)
(a) Εστω μια συνάρτηση $h(x, y)$ που μπορεί να γραφεί ως γινόμενο μιας συνάρτησης του x και μιας συνάρτησης του y: δηλ.,

$$h(x, y) = h_1(x)h_2(y)$$

Να αποδειχθεί ότι η γραμμική συνέλιξη μιας 2Δ συνάρτησης (εικόνας) $f(x, y)$ με την $h(x, y)$ ισοδυναμεί (και υλοποιείται ευκολώτερα) ως η διαδοχική συνέλιξη της f με τις 1Δ συναρτήσεις $h_1(x)$ και $h_2(y)$. Δηλ.,

$$f * h = (f *_1 h_1) *_2 h_2$$

που $*_1$ και $*_2$ συμβολίζουν 1Δ γραμμική συνέλιξη μιας 2Δ συνάρτησης ως προς την διεύθυνση x και y αντίστοιχα:

$$(f *_1 h_1)(x, y) = \int f(x - a, y)h_1(a)da, \quad (g *_2 h_2)(x, y) = \int g(x, y - b)h_2(b)db$$

(b) Εστω μια συνάρτηση $h(x,y)$ που μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μιας συνάρτησης του x και μιας συνάρτησης του y: δηλ.,

$$h(x,y) = h_1(x) + h_2(y)$$

Να αποδειχθεί ότι η μη-γραμμική (max-plus) συνέλιξη τύπου dilation μιας 2Δ συνάρτησης (εικόνας) $f(x,y)$ με την $h(x,y)$ ισοδυναμεί (και υλοποιείται ευκολώτερα) ως η διαδοχική dilation-συνέλιξη της f με τις 1Δ συναρτήσεις $h_1(x)$ και $h_2(y)$. Δηλ.,

$$f \oplus h = (f \oplus_1 h_1) \oplus_2 h_2$$

που $\oplus_1$ και $\oplus_2$ συμβολίζουν 1Δ dilation-συνέλιξη μιας 2Δ συνάρτησης ως προς την διεύθυνση x και y αντίστοιχα:

$$(f \oplus_1 h_1)(x,y) = \bigvee_a f(x-a,y) + h_1(a), \quad (g \oplus_2 h_2)(x,y) = \bigvee_b g(x,y-b) + h_2(b)$$

Ασκηση 1.6: (Ιδιότητες Μορφολογικών Φίλτρων για Σχήματα και Εικόνες)
(a) Για σύνολα-σχήματα X να αποδειχθούν τα εξής:
(a1) $X \circ B = (X^c \bullet B^s)^c, \quad \forall X, B \subseteq \mathbb{R}^m$.
(a2) $\mathbf{0} \in B \Longrightarrow X \ominus B \subseteq X \circ B \subseteq X \subseteq X \bullet B \subseteq X \oplus B$.
(b) Για γκρίζες εικόνες (και γενικώτερα συναρτήσεις) f, g, h να αποδειχθούν τα εξής:
(b1) $(f \ominus g) \ominus h = f \ominus (g \oplus h)$.
(b2) $f = f \circ g$ εάν και μόνον εάν υπάρχει κάποια συνάρτηση h ώστε $f = h \oplus g$.
(c) Δημιουργούμε ένα γκρίζο επίπεδο φίλτρο ϕ με την υπέρθεση κατωφλίου χρησιμοποιώντας ως δυαδική γεννήτρια έναν αυξάνοντα τελεστή συνόλων Φ:

$$\phi(f)(\mathbf{x}) = \sup(v \in \mathbb{R} : \mathbf{x} \in \Phi[X_v(f)]\}$$

όπου $X_v(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : f(\mathbf{x}) \geq v\}$ είναι τα επιπεδοσύνολα της εικόνας f. Να αποδείξετε ότι, αν $\Phi(X) = X \bullet B$, τότε $\phi(f) = f \bullet B$.
(d) Εστω ϕ ένα 2Δ γκρίζο επίπεδο φίλτρο για ψηφιακές εικόνες $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x,y) \in \mathbb{Z}^2$, που σχηματίζεται με υπέρθεση κατωφλίου χρησιμοποιώντας ως δυαδική γεννήτρια τον τελεστή συνόλων (opening) $\Phi(X) = X \bullet B$, όπου $B = \{(0,0),(0,1),(1,0)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ ένα 3-pixel τρίγωνο. Να βρεθεί ένα ισοδύναμο παράθυρο $W = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ το οποίο καθώς κινείται καθορίζει την εκάστοτε έξοδο $\Phi(X)$, να εκφρασθεί ο Φ ως μια Boolean συνάρτηση $\beta(v_1, ..., v_n)$ όπου $v_i = \mathbf{1}_X(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ οι δυαδικές τιμές της δείκτριας συνάρτησης εντός του κινουμένου παραθύρου, και να βρεθεί η αλγεβρική έκφραση (με max/min πράξεις) για το ισοδύναμο γκρίζο φίλτρο $\phi(f)(\mathbf{x})$.

Ασκηση 1.7: (Ανίχνευση Ακμών)
Λύσετε τις ακόλουθες ασκήσεις από το Κεφ.10 (έκδοση 6/2018):
(a) 10.2. **(b)** 10.5.

READING:
Κεφ.02 (2022): Σχηματισμός Εικόνων, Αισθητήρες (απο 2.1.1 εως και 2.4.1)
Κεφ.05 (2013): Χρώμα (5.1, 5.2, 5.3, 5.4.2)
Κεφ.06 (2005): Πολυδιάστατοι Γραμμικοί Τελεστές Εικόνων και 2Δ Fourier
Κεφ.07 (2005): Μορφολογικοί Τελεστές Σχημάτων (7.1–7.5, 7.7–7.9)
Κεφ.08 (2005): Μορφολογικοί Τελεστές Εικόνων (8.1–8.6)
Κεφ.10 (2018): Ανίχνευση Χαρακτηριστικών (10.1–10.3, 10.6–10.9)