# Ρομποτική Ι: Ανάλυση – Έλεγχος – Εργαστήριο

## 7ο Εξάμηνο 2022 – 2023

## Εξαμηνιαία Εργασία

**Ζαρίφης Στέλιος – el20435**

Email: el20435@mail.ntua.gr

Contents



Σημείωση: Στην εργασία αυτή για να εκφράσουμε στροφή της άρθρωσης $q_i$ θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$s_i = \sin q_i \,, c_i = \sin q_i$$

# Α. Θεωρητική Ανάλυση

## Ερώτημα 1

Τοποθετούμε τα πλαίσια αναφοράς των συνδέσμων ακολουθώντας τους κανόνες της σύμβασης Denavit – Hartenberg:

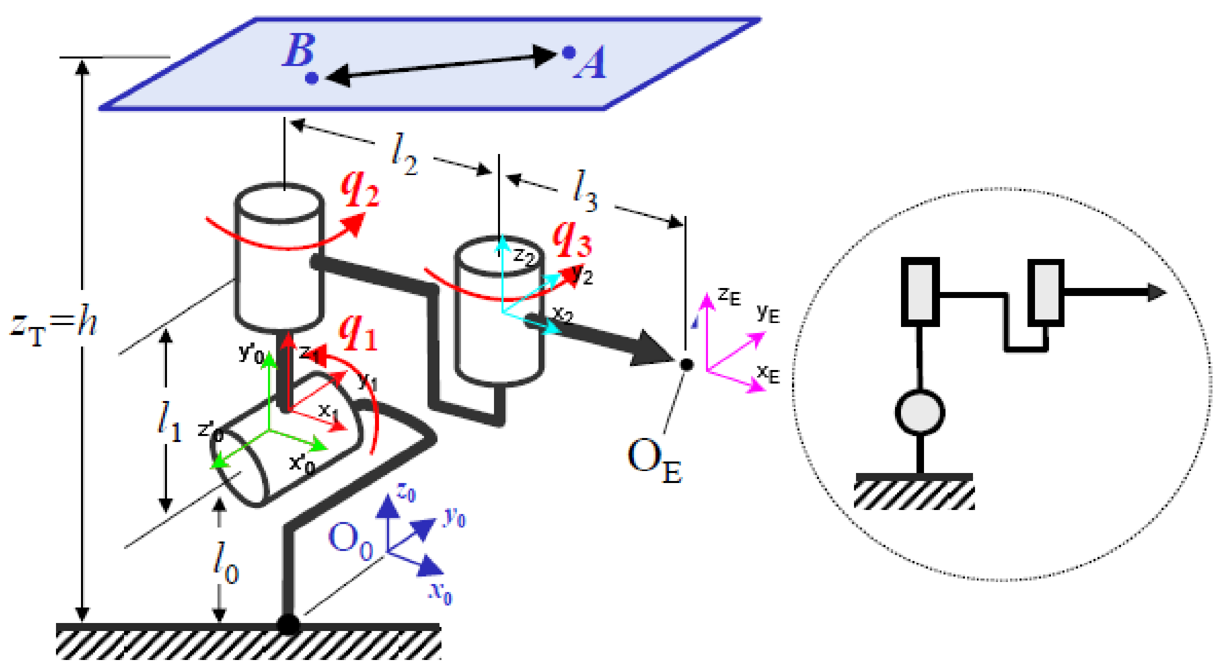
1. Ο άξονας $z$ είναι ο άξονας περιστροφής κάθε στροφικής άρθρωσης
2. Ο άξονας $x$ είναι κάθετος στους $z$ άξονες του τρέχοντος και του προηγούμενου πλαισίου
3. Οι $y$ άξονες κάθε πλαισίου προσδιορίζονται από τον κανόνα του δεξιού χεριού

$$x \perp y \perp z \; και \; z = x$$

Και παίρνουμε τον πίνακα DH:

| $i$ | $\theta_i$ | $d_i$ | $\mathrm{a}_i$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $0'$ | $0$ | $l_0$ | $0$ | $\pi/2$ |
| $1$ | $q_1$ | $0$ | $0$ | $-\pi/2$ |
| $2$ | $q_2$ | $l_1$ | $l_2$ | $0$ |
| $E$ | $q_3$ | $0$ | $l_3$ | $0$ |

Η τοποθέτηση των πλαισίων έγινε ως εξής



## Ερώτημα 2

Από τον πίνακα έχουμε Transformation Matrices

$$A_i^{i-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos a_i & \sin\theta_i \sin a_i & \mathrm{a}_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos a_i & -\cos\theta_i \sin a_i & \mathrm{a}_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin a_i & \cos a_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_{0'}^0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], A_1^{0'} = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], A_2^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], A_E^2 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Υπολογίζουμε τα γινόμενα $A_i^0$ για να φτάσουμε στο ζητούμενο $A_E^0$ (θα τα χρειαστούμε στο επόμενο ερώτημα)

$$A_1^0 = A_{0'}^0 A_1^{0'} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_2^0 = A_1^0 A_2^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A_E^0 = A_2^0 A_E^2 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 c_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & -c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3 & -s_1 & l_3 c_1 c_2 c_3 - l_3 c_1 s_2 s_3 + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \\ s_2 c_3 + c_2 s_3 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 & 0 & l_3 s_2 c_3 + l_3 c_2 s_3 + l_2 s_2 \\ s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 c_3 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 & c_1 & l_3 s_1 c_2 c_3 - l_3 s_1 s_2 s_3 + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Άρα προσδιορίσαμε την ευθεία κινηματική εξίσωση: $T(\boldsymbol{q}) = A_E^0(\boldsymbol{q})$

## Ερώτημα 3

Η Ιακωβιανή μήτρα έχει τη μορφή

$$J = \begin{bmatrix} J_{L_1} & J_{L_2} & J_{L_3} \\ J_{A_1} & J_{A_2} & J_{A_3} \end{bmatrix}$$

Επειδή έχουμε μόνο στροφικές αρθρώσεις, τα στοιχεία της $J$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{bmatrix} J_{L_i} \\ J_{A_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i-1} \times r_{i-1,E} \\ b_{i-1} \end{bmatrix}, \acute{o}\pi o\upsilon \begin{cases} b_{i-1} = R_{i-1}^0 \cdot \boldsymbol{b} \\ r_{i-1,E} = r_{0,E} - r_{0,i-1} \end{cases}$$

$\boldsymbol{b} = [0, 0, 1]^T$, αφού στη σύμβαση DH ο άξονας περιστροφής είναι πάντα ο $z = [0, 0, 1]$

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τα $b_{i-1}$ ως $R_{i-1}^0 \cdot \boldsymbol{b} = R_{i-1}^0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{i-1}^0[1\colon 3, 3]$. Δηλαδή έχουμε

$$b_{0'} = R_{0'}^0[1\colon 3, 3] = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_1 = R_1^0[1\colon 3, 3] = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}, b_2 = R_2^0[1\colon 3, 3] = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Το διάνυσμα $r_{j,k}$ υπολογίζεται ως $A_k^j[1\colon 3, 4]$, αφού είναι το διάνυσμα θέσης του πλαισίου $k$ ως προς το $j$ μετά το μετασχηματισμό $A_k^j$. Έχουμε λοιπόν

$$r_{0,0'} = A_{0'}^0[1\colon 3, 4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{bmatrix}, r_{0,1} = A_1^0[1\colon 3, 4] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{bmatrix}, r_{0,2} = A_2^0[1\colon 3, 4] = \begin{bmatrix} l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \\ l_2 s_2 \\ l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1 + l_0 \end{bmatrix}$$

$$r_{0,E} = A_E^0[1\colon 3, 4] = \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_2 c_3 - l_3 c_1 s_2 s_3 + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \\ l_3 s_2 c_3 + l_3 c_2 s_3 + l_2 s_2 \\ l_3 s_1 c_2 c_3 - l_3 s_1 s_2 s_3 + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1 + l_0 \end{bmatrix}$$

Έτσι παίρνουμε

$$r_{0',E} = r_{0,E} - r_{0,0'} = \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_2 c_3 - l_3 c_1 s_2 s_3 + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \\ l_3 s_2 c_3 + l_3 c_2 s_3 + l_2 s_2 \\ l_3 s_1 c_2 c_3 - l_3 s_1 s_2 s_3 + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \\ l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ l_3 s_1 c_{23} + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1 \end{bmatrix}$$

$$r_{1,E} = r_{0,E} - r_{0,1} = \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_2 c_3 - l_3 c_1 s_2 s_3 + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \\ l_3 s_2 c_3 + l_3 c_2 s_3 + l_2 s_2 \\ l_3 s_1 c_2 c_3 - l_3 s_1 s_2 s_3 + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \\ l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ l_3 s_1 c_{23} + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1 \end{bmatrix}$$

$$r_{2,E} = r_{0,E} - r_{0,2} = \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_2 c_3 - l_3 c_1 s_2 s_3 \\ l_3 s_2 c_3 + l_3 c_2 s_3 \\ l_3 s_1 c_2 c_3 - l_3 s_1 s_2 s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 c_1 c_{23} \\ l_3 s_{23} \\ l_3 s_1 c_{23} \end{bmatrix}$$

Επιπλέον, είναι

$$J_{L_1} = b_{0'} \times r_{0',E} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{1,E}^{(1)} \\ r_{0',E}^{(2)} \\ r_{0',E}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{0',E}^{(3)} - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - \left(-r_{0',E}^{(1)}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{0',E}^{(3)} \\ 0 \\ r_{0',E}^{(1)} \end{bmatrix}, J_{A_1} = b_{0'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{L_2} = b_1 \times r_{1,E} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{1,E}^{(1)} \\ r_{1,E}^{(2)} \\ r_{1,E}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - c_1 r_{1,E}^{(2)} \\ c_1 r_{1,E}^{(1)} - \left(-s_1 r_{1,E}^{(3)}\right) \\ -s_1 r_{1,E}^{(2)} - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 r_{1,E}^{(2)} \\ c_1 r_{1,E}^{(1)} + s_1 r_{1,E}^{(3)} \\ -s_1 r_{1,E}^{(2)} \end{bmatrix}, J_{A_2} = b_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$J_{L_3} = b_2 \times r_{2,E} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{2,E}^{(1)} \\ r_{2,E}^{(2)} \\ r_{2,E}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - c_1 r_{2,E}^{(2)} \\ c_1 r_{2,E}^{(1)} - \left(-s_1 r_{2,E}^{(3)}\right) \\ -s_1 r_{2,E}^{(2)} - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 r_{2,E}^{(2)} \\ c_1 r_{2,E}^{(1)} + s_1 r_{2,E}^{(3)} \\ -s_1 r_{2,E}^{(2)} \end{bmatrix}, J_{A_3} = b_2 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Άρα υπολογίζουμε

$$J_{L_1} = \begin{bmatrix} -r_{0',E}^{(3)} \\ 0 \\ r_{0',E}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 s_1 c_{23} - l_2 s_1 c_2 - l_1 c_1 \\ 0 \\ l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 \end{bmatrix}, J_{A_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{L_2} = \begin{bmatrix} -c_1 r_{1,E}^{(2)} \\ c_1 r_{1,E}^{(1)} + s_1 r_{1,E}^{(3)} \\ -s_1 r_{1,E}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 c_1 s_{23} - l_2 c_1 s_2 \\ l_3 c_1^2 c_{23} + l_2 c_1^2 c_2 - l_1 c_1 s_1 + l_3 s_1^2 c_{23} + l_2 s_1^2 c_2 + l_1 c_1 s_1 \\ -l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_1 s_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -l_3 c_1 s_{23} - l_2 c_1 s_2 \\ l_3 c_{23} + l_2 c_2 \\ -l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_1 s_2 \end{bmatrix}, J_{A_2} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$J_{L_3} = \begin{bmatrix} -c_1 r_{2,E}^{(2)} \\ c_1 r_{2,E}^{(1)} + s_1 r_{2,E}^{(3)} \\ -s_1 r_{2,E}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 c_1 s_{23} \\ l_3 c_1^2 c_{23} + l_3 s_1^2 c_{23} \\ -l_3 s_1 s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 c_1 s_{23} \\ l_3 c_{23} \\ -l_3 s_1 s_{23} \end{bmatrix}, J_{A_3} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Τελικά έχουμε:

$$J = \begin{bmatrix} J_{L_1} & J_{L_2} & J_{L_3} \\ J_{A_1} & J_{A_2} & J_{A_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 s_1 c_{23} - l_2 s_1 c_2 - l_1 c_1 & -l_3 c_1 s_{23} - l_2 c_1 s_2 & -l_3 c_1 s_{23} \\ 0 & l_3 c_{23} + l_2 c_2 & l_3 c_{23} \\ l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1 & -l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_1 s_2 & -l_3 s_1 s_{23} \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

## Ερώτημα 4

Το αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο του ρομπότ ως προς τη γραμμική ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης δίνεται από την αντιστροφή της σχέσης

$$\boldsymbol{v_E} = J_L \dot{\boldsymbol{q}} \Longrightarrow \dot{\boldsymbol{q}} = J_L^{-1} \boldsymbol{v_E}$$

$$\begin{aligned}
\det(J_L) &= (-l_3 s_1 c_{23} - l_2 s_1 c_2 - l_1 c_1)[(l_3 c_{23} + l_2 c_2)(-l_3 s_1 s_{23}) - (-l_3 s_1 s_{23} - l_2 s_1 s_2)(l_3 c_{23})] + \\
&\quad +(l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1)[(-l_3 c_1 s_{23} - l_2 c_1 s_2)(l_3 c_{23}) - (l_3 c_{23} + l_2 c_2)(-l_3 c_1 s_{23})] = \\
&= -(l_3 s_1 c_{23} + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1)[-l_3^2 s_1 s_{23} c_{23} - l_2 l_3 s_1 s_{23} c_2 + l_3^2 s_1 s_{23} c_{23} + l_2 l_3 s_1 s_2 c_{23}] + \\
&\quad +(l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1)[-l_3^2 c_1 s_{23} c_{23} - l_2 l_3 c_1 s_2 c_{23} + l_3^2 c_1 s_{23} c_{23} + l_2 l_3 c_1 c_2 s_{23}] = \\
&= -(l_3 s_1 c_{23} + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1)[l_2 l_3 s_1 (s_2 c_{23} - s_{23} c_2)] + \\
&\quad +(l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1)[l_2 l_3 c_1 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23})] = \\
&= -(l_3 s_1 c_{23} + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1)[l_2 l_3 s_1 s_3] + (l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1)[-l_2 l_3 c_1 s_3]
\end{aligned}$$

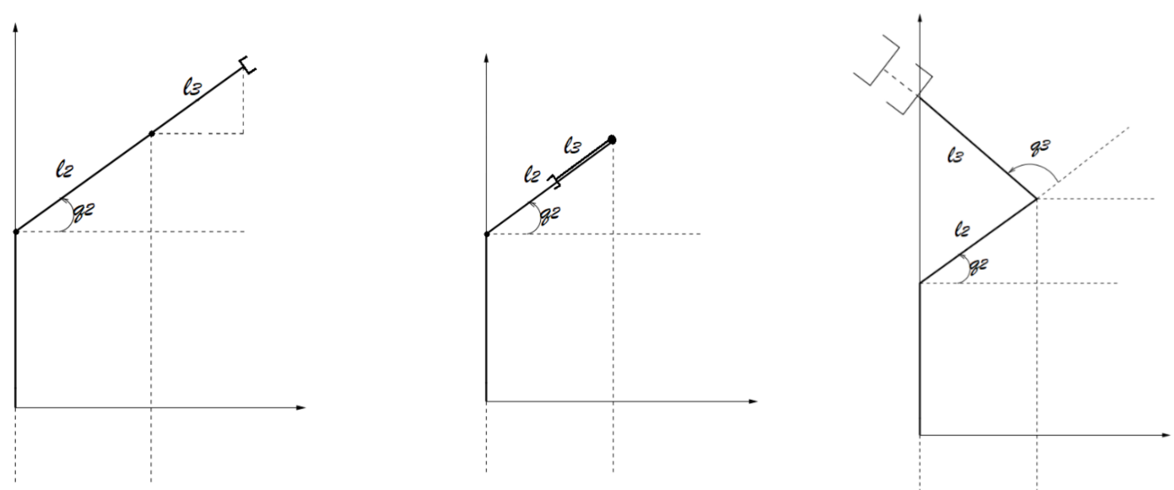
Στις ιδιόμορφες διατάξεις ως προς τη γραμμική ταχύτητα θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\det(J_L) = 0 \Longrightarrow -(l_3 s_1 c_{23} + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1)[l_2 l_3 s_1 s_3] + (l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1)[-l_2 l_3 c_1 s_3] = 0 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow c_1 s_3 (l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1) = -s_1 s_3 (l_3 s_1 c_{23} + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1) \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow l_3 c_1^2 c_{23} s_3 + l_2 c_1^2 c_2 s_3 - l_1 s_1 c_1 s_3 = -l_3 s_1^2 c_{23} s_3 - l_2 s_1^2 c_2 s_3 - l_1 s_1 c_1 s_3 \Longrightarrow (l_3 c_{23} + l_2 c_2) s_3 = 0
\end{aligned}$$

Το οποίο ισχύει αν

$$\begin{cases} s_3 = 0 \\ l_3 c_{23} + l_2 c_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q_3 = 0 \text{ ή } q_3 = \pi \\ \textit{Το άθροισμα των προβολών των συνδέσμων } 2 \textit{ και } 3 \\ \textit{στον άξονα του συνδέσμου } 1 \textit{ είναι } 0 \end{cases}$$

1. Ιδιόμορφη διάταξη $q_3 = 0$ ή $q_3 = \pi$: Τύπου boundary singularity αφού το εργαλείο βρίσκεται στα όρια του workspace
2. Ιδιόμορφη διάταξη $l_3 c_{23} + l_2 c_2 = 0$: Τύπου internal singularity αφού το εργαλείο βρίσκεται πάνω στον άξονα $y$ και δεν μπορεί να κινηθεί




Για το αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο συνεχίζουμε:

$$\begin{aligned}
\det(J_L) &= -(l_3 s_1 c_{23} + l_2 s_1 c_2 + l_1 c_1)[l_2 l_3 s_1 s_3] + (l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 - l_1 s_1)[-l_2 l_3 c_1 s_3] = \\
&= -l_2 l_3^2 s_1^2 c_{23} s_3 - l_2^2 l_3 s_1^2 c_2 s_3 - l_1 l_2 l_3 c_1 s_1 s_3 - l_2 l_3^2 c_1^2 c_{23} s_3 - l_2^2 l_3 c_1^2 c_2 s_3 + l_1 l_2 l_3 c_1 s_1 s_3 = \\
&= -l_2 l_3^2 c_{23} s_3 - l_2^2 l_3 c_2 s_3
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$J_L^{-1} = \frac{1}{\det(J_L)} adj(J_L) = \frac{1}{\det(J_L)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T$$

Όπου

$$a_{11} = \begin{vmatrix} l_3c_{23} + l_2c_2 & l_3c_{23} \\ -l_3s_1s_{23} - l_2s_1s_2 & -l_3s_1s_{23} \end{vmatrix} = -l_3^2s_1s_{23}c_{23} - l_2l_3s_1c_2s_{23} + l_3^2s_1s_{23}c_{23} + l_2l_3s_1s_2c_{23} = \\ = l_2l_3s_1s_3$$

$$a_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & l_3c_{23} \\ l_3c_1c_{23} + l_2c_1c_2 - l_1s_1 & -l_3s_1s_{23} \end{vmatrix} = l_3^2c_1c_{23}^2 + l_2l_3c_1c_2c_{23} - l_1l_3s_1c_{23}$$

$$a_{13} = \begin{vmatrix} 0 & l_3c_{23} + l_2c_2 \\ l_3c_1c_{23} + l_2c_1c_2 - l_1s_1 & -l_3s_1s_{23} - l_2s_1s_2 \end{vmatrix} = \\ = -(l_3^2c_1c_{23}^2 + l_2l_3c_1c_2c_{23} + l_2l_3c_1c_2c_{23} + l_2^2c_1c_2^2 - l_1l_3s_1c_{23} - l_1l_2s_1c_2) = \\ = -c_1(l_3c_{23} + l_2c_2)^2 - l_1s_1(l_3c_{23} + l_2c_2)$$

$$a_{21} = -\begin{vmatrix} -l_3c_1s_{23} - l_2c_1s_2 & -l_3c_1s_{23} \\ -l_3s_1s_{23} - l_2s_1s_2 & -l_3s_1s_{23} \end{vmatrix} = -l_3^2s_1c_1s_{23}^2 - l_2l_3s_1c_1s_2s_{23} + l_3^2s_1c_1s_{23}^2 + l_2l_3s_1c_1s_2s_{23} = \\ = 0$$

$$a_{22} = \begin{vmatrix} -l_3s_1c_{23} - l_2s_1c_2 - l_1c_1 & l_3c_{23} \\ l_3c_1c_{23} + l_2c_1c_2 - l_1s_1 & -l_3s_1s_{23} \end{vmatrix} = \\ = l_3^2s_1^2c_{23}s_{23} + l_2l_3s_1^2c_2s_{23} + l_1l_3s_1c_1s_{23} - l_3^2c_1c_{23}^2 - l_2l_3c_1c_2c_{23} + l_1l_3s_1c_{23} = \\ = l_3s_1^2s_{23}(l_3c_{23} + l_2c_2) + l_1l_3s_1(c_1s_{23} + c_{23}) - l_3c_1c_{23}(l_3c_{23} + l_2c_2) = \\ = (l_3c_{23} + l_2c_2)(l_3s_1^2s_{23} - l_3c_1c_{23}) + l_1l_3s_1(c_1s_{23} + c_{23})$$

$$a_{23} = -\begin{vmatrix} -l_3s_1c_{23} - l_2s_1c_2 - l_1c_1 & -l_3c_1s_{23} - l_2c_1s_2 \\ l_3c_1c_{23} + l_2c_1c_2 - l_1s_1 & -l_3s_1s_{23} - l_2s_1s_2 \end{vmatrix} = \\ = -l_3^2s_1^2s_{23}c_{23} - l_2l_3s_1^2c_2s_{23} - l_1l_3s_1c_1s_{23} - l_2l_3s_1^2s_2c_{23} - l_2^2s_1^2s_2c_2 - l_1l_2s_1c_1s_2 + \\ +(-l_3^2c_1^2s_{23}c_{23} - l_2l_3c_1^2c_2s_{23} + l_1l_3s_1c_1s_{23} - l_2l_3c_1^2s_2c_{23} - l_2^2c_1^2s_2c_2 + l_1l_2s_1c_1s_2) = \\ = -l_3^2s_{23}c_{23} - l_2l_3c_2s_{23} - l_2l_3s_2c_{23}$$

$$a_{31} = \begin{vmatrix} -l_3c_1s_{23} - l_2c_1s_2 & -l_3c_1s_{23} \\ l_3c_{23} + l_2c_2 & l_3c_{23} \end{vmatrix} = -l_3^2c_1s_{23}c_{23} - l_2l_3c_1s_2c_{23} + l_3^2c_1s_{23}c_{23} + l_2l_3c_1c_2s_{23} = \\ = l_2l_3c_1s_3$$

$$a_{32} = -\begin{vmatrix} -l_3s_1c_{23} - l_2s_1c_2 - l_1c_1 & -l_3c_1s_{23} \\ 0 & l_3c_{23} \end{vmatrix} = l_3^2s_1c_{23}^2 + l_2l_3s_1c_2c_{23} + l_1l_3c_1c_{23} =$$

$$a_{33} = \begin{vmatrix} -l_3s_1c_{23} - l_2s_1c_2 - l_1c_1 & -l_3c_1s_{23} - l_2c_1s_2 \\ 0 & l_3c_{23} + l_2c_2 \end{vmatrix} = \\ = -l_3^2s_1c_{23}^2 - l_2l_3s_1c_2c_{23} - l_1l_3c_1c_{23} - l_2l_3s_1c_2c_{23} - l_2^2s_1c_2^2 - l_1l_2c_1c_2 = \\ = -l_3^2s_1c_{23}^2 - l_2^2s_1c_2^2 - 2l_2l_3s_1c_2c_{23} - l_1l_3c_1c_{23} - l_1l_2c_1c_2$$

## Ερώτημα 5

Από τον πίνακα $A_E^0$ έχουμε ότι

$$\boldsymbol{p_E} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3c_1c_2c_3 - l_3c_1s_2s_3 + l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ l_3s_2c_3 + l_3c_2s_3 + l_2s_2 \\ l_3s_1c_2c_3 - l_3s_1s_2s_3 + l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3c_1c_{23} + l_2c_1c_2 - l_1s_1 \\ l_3s_{23} + l_2s_2 \\ l_3s_1c_{23} + l_2s_1c_2 + l_1c_1 + l_0 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$\begin{aligned} p_x^2 &= (l_3c_1c_{23} + l_2c_1c_2 - l_1s_1)^2 = \\ &= l_3^2c_1^2c_{23}^2 + l_2^2c_1^2c_2^2 + l_1^2s_1^2 + 2l_2l_3c_1^2c_2c_{23} - 2l_1l_2c_1s_1c_2 - 2l_1l_3c_1s_1c_{23} \end{aligned}$$

$$p_y^2 = (l_3s_{23} + l_2s_2)^2 = l_3^2s_{23}^2 + 2l_2l_3s_2s_{23} + l_2^2s_2^2$$

$$\begin{aligned} (p_z - l_0)^2 &= (l_3s_1c_{23} + l_2s_1c_2 + l_1c_1)^2 = \\ &= l_3^2s_1^2c_{23}^2 + l_2^2s_1^2c_2^2 + l_1^2c_1^2 + 2l_2l_3s_1^2c_2c_{23} + 2l_1l_2s_1c_1c_2 + 2l_1l_3s_1c_1c_{23} \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} p_x^2 + (p_z - l_0)^2 &= l_3^2c_1^2c_{23}^2 + l_2^2c_1^2c_2^2 + l_1^2s_1^2 + 2l_2l_3c_1^2c_2c_{23} - 2l_1l_2c_1s_1c_2 - 2l_1l_3c_1s_1c_{23} + \\ &+ l_3^2s_1^2c_{23}^2 + l_2^2s_1^2c_2^2 + l_1^2c_1^2 + 2l_2l_3s_1^2c_2c_{23} + 2l_1l_2s_1c_1c_2 + 2l_1l_3s_1c_1c_{23} = \\ &= l_3^2c_{23}^2 + l_2^2c_2^2 + l_1^2 + 2l_2l_3c_2c_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 + (p_z - l_0)^2 &= l_3^2c_{23}^2 + l_2^2c_2^2 + l_1^2 + 2l_2l_3c_2c_{23} + l_3^2s_{23}^2 + 2l_2l_3s_2s_{23} + l_2^2s_2^2 = \\ &= l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3c_3 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$c_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - l_0)^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \Longrightarrow q_3 = \pm \arccos\left[\frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - l_0)^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right]$$

Επίσης

$$\begin{aligned} p_y &= l_3s_2c_3 + l_3c_2s_3 + l_2s_2 = s_2(l_2 + l_3c_3) + c_2l_3s_3 = \\ &= \sqrt{(l_2 + l_3c_3)^2 + (l_3s_3)^2}\,\sin\left(q_2 + \arctan\left(\frac{l_3s_3}{l_2 + l_3c_3}\right)\right) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow q_2 &= \arcsin\left[\frac{p_y}{\sqrt{(l_2 + l_3c_3)^2 + (l_3s_3)^2}}\right] - \arctan\left(\frac{l_3s_3}{l_2 + l_3c_3}\right) \end{aligned}$$

Και

$$\begin{aligned} p_x &= l_3c_1c_{23} + l_2c_1c_2 - l_1s_1 = c_1(l_3c_{23} + l_2c_2) + s_1(-l_1) = \\ &= \sqrt{(l_3c_{23} + l_2c_2)^2 + l_1^2}\,\sin\left(q_1 - \arctan\left(\frac{l_3c_{23} + l_2c_2}{l_1}\right)\right) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow q_1 &= \arcsin\left[\frac{p_x}{\sqrt{(l_3c_{23} + l_2c_2)^2 + l_1^2}}\right] + \arctan\left(\frac{l_3c_{23} + l_2c_2}{l_1}\right) \end{aligned}$$

Υπολογίσαμε το αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arcsin\left[\dfrac{p_x}{\sqrt{(l_3c_{23} + l_2c_2)^2 + l_1^2}}\right] + \arctan\left(\dfrac{l_3c_{23} + l_2c_2}{l_1}\right) \\ \arcsin\left[\dfrac{p_y}{\sqrt{(l_2 + l_3c_3)^2 + (l_3s_3)^2}}\right] - \arctan\left(\dfrac{l_3s_3}{l_2 + l_3c_3}\right) \\ \pm \arccos\left[\dfrac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - l_0)^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}\right] \end{bmatrix}$$