ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΕΜΦΕ (2022-2023)

1. Δείξτε ότι το γινόμενο n το πλήθος διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του n.

2. Δείξτε ότι αν $p > 1$ και ο p διαιρεί τον $(p-1)! + 1$, τότε ο p είναι πρώτος.

3. Δείξτε ότι $12 \mid p+q$ και $6 \mid p+1$ όπου $p > 3$ και p, q δυο δίδυμοι πρώτοι (δηλαδή έχουν διαφορά 2).

4. Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί διαιρέτες των αριθμών 140 και 2023, και να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί που έχουν ακριβώς 3 διαιρέτες.

5. Να βρεθούν όλες οι θετικές ακέραιες λύσεις (n, m) της εξίσωσης $m^n = n^m$.

6. Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο k ισχύει ότι $(7k+5, 11k+8) = 1$, και για ακεραίους $a_1, \dots, a_n$ και b με $(a_i, b) = 1\ \forall i$ ισχύει ότι $(a_1 a_2 \cdots a_n, b) = 1$.

7. Για τη συνάρτηση μ του Möbius, δείξτε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 1$ ισχύει

$$\mu(n) \cdot \mu(n+1) \cdot \mu(n+2) \cdot \mu(n+3) = 0$$

και ότι για κάθε φυσικό $n \geq 3$ ισχύει $\sum_{k=1}^{n} \mu(k!) = 1$.

8. Έστω η αριθμητική συνάρτηση λ του Liouville που ορίζεται ως

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^{k_1 + \dots + k_r}, & n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \text{ ανάλυση πρώτων παραγόντων} \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι είναι πολλαπλασιαστική, και να υπολογιστεί το άθροισμα $\sum_{d \mid n} \lambda(d)$.

9. Αν n, k είναι θετικοί ακέραιοι, να δειχθεί ότι $\phi(n^k) = n^{k-1}\phi(n)$ και αν $d|n$, $\phi(n \cdot d^k) = d^k \cdot \phi(n)$.

10. Έστω $\{a_1, \dots, a_p\}$ και $\{b_1, \dots, b_p\}$ δύο πλήρη συστήματα υπολοίπων $\mathrm{mod} p$ όπου $p > 2$ πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι το $\{a_1 b_1, \dots, a_p b_p\}$ δεν είναι πλήρες σύστημα υπολοίπων $\mathrm{mod} p$.

11. Υπολογίστε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $251^{143} : 7$, $5^{100} : 7$ και $16! : 19$.

12. Να βρεθούν οι λύσεις (αν υπάρχουν) των ισοτιμιών $19x \equiv 30 (\mathrm{mod} 4)$ και $980x \equiv 1500 (\mathrm{mod} 1600)$.

13. Βρείτε έναν αριθμό ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 11 και δίνει υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθεί με τους αριθμούς $2, 3, 5, 7$.

14. Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $3k + 2$, και ότι για κάθε $n \geq 3$ υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί που **δεν** είναι της μορφής $nk + 1$.

Παράδοση: Μέχρι 23 Μαΐου στο μάθημα ή στη θυρίδα στο ισόγειο του κτιρίου Ε.